复习题 （A）

备用数据：

$u_{0.99}=2.326, t_{0.995}(99)\approx u_{0.995}=2.575, \chi^2_{0.005}(99)=66.510, \chi^2_{0.995}(99)=138.987$

一、选择题（20 分，每题 4 分，请将你选的答案填在（　　）内）

1、 下列结论哪一个不正确　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) 设 A,B 为任意两个事件，则 $A\bigcup B-A=B$；

(B) 若 $A=B$，则 A,B 同时发生或 A,B 同时不发生；

(C) 若 $A\subset B$，且 $B\subset A$, 则 $A=B$；

(D) 若 $A\subset B$，则 A-B 是不可能事件.

2、 设 (X,Y) 的联合概率函数为

X \ Y	0	1	2	3
0	1/8	1/4	1/8	0
1	0	1/8	1/4	1/8

则（1）概率 $P(1\le Y<3, X\ge 0)$ 等于（　　）

(A) $\frac{5}{8}$；　　(B) $\frac{1}{2}$；　　(C) $\frac{3}{4}$；　　(D) $\frac{7}{8}$.

（2） $Z=X+Y$ 的概率函数为（　　）

(A)

Z	0	1	2	3	4
概率	1/8	3/8	1/4	1/8	1/8

(B)

Z	1	2	3	4
概率	3/8	1/4	1/4	1/8

(C)

Z	1	2	3	4
概率	1/8	1/4	1/4	3/8

(D)

Z	0	1	2	3	4
概率	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

3、 如果 $EX^2<\infty$， $EY^2<\infty$， 且 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有（ ）

(A) X 与 Y 独立； (B) X 与 Y 不相关； (C) $D(Y)=0$； (D) $D(X)D(Y)=0$.

4、若 $D(X)=25, D(Y)=36$，X 和 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=0.4$，则 X,Y 的协方差 $Cov(X,Y)$ 等于（ ）

(A) 5； (B) 10； (C) 12； (D) 36.

二、(12 分）设 X,Y 为随机变量，且 $P(X\geq 0, Y\geq 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\geq 0)=P(Y\geq 0)=\frac{4}{7}$

求（1） $P(\min(X,Y)<0)$；（2） $P(\max(X,Y)\geq 0)$.

三、(10 分)一个男子在某城市的一条街道遭到背后袭击和抢劫，他断言凶犯是黑人.然而，当调查这一案件的警察在可比较的光照条件下多次重新展现现场情况时，发现受害者正确识别袭击者肤色的概率只有 80%，假定凶犯是本地人，而在这个城市人口中 90%是白人，10%是黑人，且假定白人和黑人的犯罪率相同，

（1）问：在这位男子断言凶犯是黑人的情况下，袭击他的凶犯确实是黑人的概率是多大？

（2）问：在这位男子断言凶犯是黑人的情况下，袭击他的凶犯是白人的概率是多大？

四、(10 分)某商业中心有甲、乙两家影城，假设现有 1600 位观众去这个商业中心的影城看电影，每位观众随机地选择这两家影城中的一家，且各位观众选择哪家影城是相互独立的.问:影城甲至少应该设多少个座位，才能保证因缺少座位而使观众离影城甲而去的概率小于 0.01. （要求用中心极限定理求解.）

五、(16 分)设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, 0<x<y<1\\ 0, \quad\quad 其它\end{cases}$$

（1）求 X,Y 的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$； （2）求条件概率 $P(0<X<\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}<Y<\frac{3}{4}\right.)$；

（3）问：X 与 Y 是否相互独立？请说明理由； （4）求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

六、(14 分)某地交通管理部门随机调查了 100 辆卡车，得到它们在最近一年的行驶里程（单位：100km）的数据 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$，由数据算出 $\overline{x}=145$，样本标准差 $s=24$.假设卡车一年

中行驶里程服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，分别求出均值 μ 和方差 σ^2 的双侧 0.99 置信区间.（请保留小数点后两位有效数字.）

七、(18 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本,总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta e^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>e\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ ，其中 θ 为未知参数, $0<\theta<1$.

(1)求出 θ 的极大似然估计;

(2)记 $\alpha=\dfrac{1}{\theta}$，求参数 α 的极大似然估计;

(3)问:在（2）中求到的 α 的极大似然估计是否为 α 的无偏估计?请说明理由.

复习题（B）

备用数据：

$\Phi(2)=0.9772, t_{0.975}(8)=2.31, \chi^2_{0.025}(8)=2.18, \chi^2_{0.975}(8)=17.54, u_{0.995}=2.575,$

一、选择题(共 20 分，每题 4 分，请将你选的答案填在(　)内)

1、下列命题哪一个是正确的?(　)

(A) 若 $P(A)>P(B)>0$, 则 $P(A|B)<P(B|A)$;

(B) 若 $P(A)>P(B)>0$, 则 $P(A|B)\geq P(B|A)$;

(C) 若 $P(B)>0$, 则 $P(A)\geq P(A|B)$;

(D) 若 $P(B)>0$, 则 $P(A|B)\leq P(AB)$.

2、已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$, $P(AB)=P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{4}$, $P(ABC)=0$, 判断下列结论哪一个是正确的

(　)

(A) 事件 A，B，C 两两不独立，但事件 A，B，C 相互独立;

(B) 事件 A，B，C 两两独立，同时事件 A，B，C 相互独立;

(C) 事件 A，B，C 两两独立，但事件 A，B，C 不相互独立;

(D) 事件 A，B，C 不会同时都发生.

3、 设X_1, X_2相互独立，且都服从参数 1 的指数分布，则当$x>0$时，$\min(X_1, X_2)$的分布函数$F(x)$为

( )

(A) $1-(1-e^{-1})^2$； (B) $1-(1-e^{-x})^2$； (C) e^{2x} ； (D) $1-e^{-2x}$.

4、 已知(X,Y)的联合概率函数为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

若 X， Y独 立 ， 则 α,β的 值 分 别 为 ( )

(A) $\alpha=\dfrac{1}{9},\beta=\dfrac{2}{9}$； (B) $\alpha=\dfrac{2}{9},\beta=\dfrac{1}{9}$；

(C) $\alpha=\dfrac{1}{18},\beta=\dfrac{5}{18}$； (D) $\alpha=\dfrac{5}{18},\beta=\dfrac{1}{18}$.

5、 设$X_1,\dots,X_5$是取自正态总体$N(0,1)$的样本，已知$X_1^2+a(X_2-X_3)^2+b(X_4-X_5)^2$ $(a>0,b>0)$服从χ^2分布，则这个χ^2分布的自由度为

( )

(A) 5； (B) 4； (C) 3； (D) 2.

二、(12 分)已知男性患色盲的概率为 0.005，女性患色盲的概率为 0.0025，如在某医院参加体检的人群中，有 3000 个男性，2000 个女性，现从这群人中随机地选一人，

(1)求此人患有色盲的概率； (2)若经检验此人的确患有色盲，问：此人为男性的概率是多大？

三、(12 分)设随机变量Y服从参数为 1 的指数分布$E(1)$. 定义随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, Y\le k\\ 1, Y>k\end{cases}, \quad k=1,2.$$

(1)求(X_1,X_2)的联合概率函数； (2)分别求X_1,X_2的边缘概率函数.

四、(10 分)有 100 位学生在实验室测定某种化合物的 PH 值，假设各人测量都是独立进行的，每人得到的测定结果服从相同的分布，且这个相同分布的期望为 5，方差为 4，设X_i表示第

i 位学生的测定结果，$i=1,\cdots,100$，$\bar{X}=\dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$，求 $P(4.6<\bar{X}<5.4)$.（要求用中心极限定理求解.）

五、(16 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,且0<y<2x\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求(1) X,Y 的边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$；　(2) $Z=2X+1$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$；

(3) $E(2X-Y)和D(2X-Y)$；　(4) $P(Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2})$.

六、(14 分)某医生为研究铅中毒患者与正常成年人的脉搏数的关系，他随机调查了 9 例患者，测得其脉搏数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_9$，并由此算出 $\sum_{i=1}^{9}x_i=675,\sum_{i=1}^{9}x_i^2=50657$. 设铅中毒患者的脉搏数服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，分别求出均值 μ 和标准差 σ 的置信水平 0.95 的双侧置信区间.(请保留小数点后两位有效数字.)

七、(16 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & ,x>0\\ 0 & ,其它\end{cases}$$，其中 θ 是未知参数, $\theta>0$。

(1)求 θ 的矩估计;

(2)求 θ 的极大似然估计;

(3)问:在(2)中求得的 θ 的极大似然估计是否为 θ 的无偏估计?请说明理由.

复习题（2）--（A）

备用数据：$t_{0.995}(8)=3.3554, \chi^2_{0.025}(8)=2.1797, \chi^2_{0.975}(8)=17.5345$,

$\Phi(1)=0.8413, \Phi(2)=0.9772, \Phi(1.645)=0.95.$

一、填空题(18 分)

1、（6 分）已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(A|B)=0.32,$则 $P(A\cup B)=$________，

$P(AB)=$________，$P(\bar{A}\cup\bar{B})=$__________.

2、（6 分）设一个袋中装有两个白球和三个黑球，现从袋中不放回地任取两个球，则取到的两个球均为白球的概率为________；第二次取到的球为白球的概率为_________；如果已知第二次取到的是白球，则第一次取到的也是白球的概率为_________.

3、（6 分）假设某物理量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现用一个仪器测量这个物理量 9 次，由此算出其样本均值 $\bar{x}=56.32$，样本标准差 $s=0.22$，则 μ 的置信水平 0.99 的双侧置信区间为_________________________，σ 的置信水平 0.95 的双侧置信区间为_______________.

二、(12 分）设有四门火炮独立地同时向一目标各发射一枚炮弹，若有两发或两发以上的炮弹命中目标时，目标被击毁.

（1） 如果每发炮弹命中目标的概率（即命中率）为 0.9，求目标被击毁的概率；

（2） 若四门火炮中有两门 A 型火炮和两门 B 型火炮，A 型火炮发射的炮弹的命中率为 0.9，B 型火炮发射的炮弹的命中率为 0.8，求目标被击毁的概率.

三、(12 分)设某保险公司开办了一个农业保险项目，共有一万农户参加了这项保险，每户交保险费 1060 元，一旦农户因病虫害等因素受到损失可获 1 万元的赔付，假设各农户是否受到损失相互独立.每个农户因病虫害等因素受到损失的概率为 0.10.不计营销和管理费用.

(1)求该保险公司在这个险种上产生亏损的概率；

(2)求该保险公司在这个险种上的赢利不少于 30 万的概率.

（要求用中心极限定理解题）

四、(16 分) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$. 其中 A,B 为常数.

(1) 求常数 A,B； (2) 求 X 的概率密度函数；

(3) 求概率 $P(1<X<2)$； (4) 求 $E(X),E(X^2),D(X)$.

五、(16 分) 若 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, |y|\le x 且 0\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$

(1) 分别求 X,Y 边缘密度函数； (2) 求 $E(X),E(Y),E(XY)$；

(3) 问：X,Y 是否相互独立？X,Y 是否相关?为什么？请说明理由.

(4) 求 $P(|X|\le \frac{1}{2},|Y|\le \frac{1}{2})$.

六、(12 分) 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_6 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, $\sigma^2>0$, 分别求下列统计量服从的分布：(1) $T_1=\frac{2(X_1^2+X_2^2)}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}$； (2) $T_2=\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+X_5^2+X_6^2}}$.

七、(14 分) 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是取自总体 X 的样本, X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x-\vartheta}{2}}, x\ge\vartheta\\ 0, x<\vartheta\end{cases}$$, 其中 ϑ 未知.

(1) 求 ϑ 的极大似然估计;

(2) 问: ϑ 的极大似然估计是 ϑ 的无偏估计吗? 如果是，请给出证明；如果不是，请将其修正为 ϑ 的无偏估计.

复习题（2）（B）

备用数据：$t_{0.95}(9)=1.833, \chi^2_{0.025}(9)=2.700, \chi^2_{0.975}(9)=19.023$，

$\Phi(1)=0.8413, \Phi(2)=0.9772, \Phi(1.645)=0.95.\quad F_{0.95}(1,1)=161.45$.

一、填空题(18 分)

1、（6 分）掷一颗均匀的骰子两次，以 x, y 表示先后掷出的点数，记 $A=\{(x,y): x+y<10\}$，$B=\{(x,y): x>y\}$ 则 $P(A\cup B)=$__________，$P(\overline{A}\overline{B})=$_______，$P(\overline{B}|\overline{A})=$__________.

2、（6 分）某公共汽车站从上午 7：00 起每 15 分钟发一班车，如果小王是在 7：00 到 7：30 之间（等可能地）随机到达该汽车站的，则小王在车站的等候时间不超过 5 分钟的概率为_______；小王在车站的平均等候时间为________分钟，小王在车站的等候时间的标准差为 _________ 分钟.

3、（6 分）假设某物理量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现用一个仪器测量这个物理量 10 次，由此算出其样本均值 $\overline{x}=14.705$，样本标准差 $s=1.843$，则 μ 的置信水平 0.90 的双侧置信区间为____________________，σ 的置信水平 0.95 的双侧置信区间为______________.

二、(12 分）某种电子元件在电源电压不超过 200 伏、200 伏至 240 伏之间及超过 240 伏这三种情况下使用时损坏的概率依次为 0.1、0.001 及 0.2，设电源电压 $X\sim N(220,400)$.

（1） 求此种电子元件在使用时损坏的概率；

（2） 求此种电子元件在遭损坏时电源电压在 200 伏至 240 伏之间的概率.

三、(12 分)每个正常男性成人血液中每毫升所含的白细胞数的数学期望为 7300，标准差为 700.现准备随机抽查 100 个正常男性成人的血液，记第 i 个被抽查人的血液中每毫升所含的

白细胞数为 X_i， $i=1,2,\cdots,100$. 记 $\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$.

求概率 $P\left(7230\le\overline{X}\le7370\right)$的近似值.（要求用中心极限定理解题）

四、(16 分) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2,-1<x<1\\0,\text{其他}\end{cases}.$$

记 $\mathrm{Y}=X^2$.

(1) 求 Y 的概率密度函数；(2) 求 $E(X),E(Y),E(XY)$；

（3）问：X,Y 是否相互独立？ X,Y 是否不相关？请说明理由.

五、（16 分）若 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2}),0<x<1\text{且}0<y<2\\0,\text{其他}\end{cases}$

(1) 分别求 X,Y 边缘密度函数；

(2) 求 X,Y 的协方差和相关系数；

(3) 求 $P(|X|\le\frac{1}{2},|Y|\le\frac{1}{2})$.

六、(12 分) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, $\sigma^2>0$.

(1) 求统计量 $Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_3-X_4}\right)^2$ 服从的分布;

(2) 求小于 1 的常数 C 使得 $P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}>C\right)=0.05$.

七、(14 分) 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 是取自总体 X 的样本, X 的密度函数为

$$f(x;\vartheta)=\frac{1}{2\vartheta}e^{-\frac{|x|}{\vartheta}} \quad \text{其中 } \vartheta \text{ 未知, } \vartheta>0.$$

(1) 求 ϑ 的极大似然估计;

(2) 问: ϑ 的极大似然估计是 ϑ 的无偏估计吗? 如果是，请给出证明；如果不是，请将其修正为 ϑ 的无偏估计.