

一. 填空题 1. 设 $P(A)=0.25, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=0.5$, 则 A, B 都发生的概率= _____, A, B 中至少有一个发生的概率= _____, 条件概率 $P(B|\bar{A})=$ _____.

2. 设电流强度 I (单位: 安培) 是一个随机变量, I 服从区间 $[10, 12]$ 上的均匀分布, 若此电流通过 2 欧姆的电阻时, 在其上消耗的功率为 $W=2I^2$, 则 W 的概率密度函数为 $f_W(w)=\{$ _____

3. 假设某产品的寿命 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 总体的均值和方差都未知, 为估计总体均值, 现随机抽查了 9 只该产品, 得到寿命数据为 x_1, \dots, x_9 , 并由此算出 $\sum_{i=1}^9 x_i = 45, \sum_{i=1}^9 x_i^2 = 225.32$, 则样本方差 $s^2 =$ _____, μ 的置信水平 0.95 的双侧置信区间为 _____. (答案请保留三位小数)

二. 将两信息分别编码 A 和 B 传送出去, 接收站接收信号时, A 被误收为 B 的概率为 0.04, 而 B 被误收为 A 的概率为 0.05. 传送信息 A 和 B 的比例为 2:1.

- (1) 求接收站接收到信号为 A 的概率;
- (2) 如果已知接收站接收到信号为 A, 求原发信号是 A 的概率.

三. 设离散型随机变量 X, Y 均只取 0, 1 这两个值.

$P(X=0, Y=0)=0.2, P(X=1, Y=1)=0.3$, 且随机事件 $\{X=1\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立.

(1) 求 (X, Y) 的联合概率函数; (2) 分别求 X, Y 的边缘概率函数;

(2) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率函数和协方差 $\text{cov}(X, Z)$.

四. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 $\ln 2$ 的指数分布. 记 $U = \max(X, Y), V = \min(X, Y)$.

- (1) 分别求随机变量 U 的概率密度函数和随机变量 V 的概率密度函数;
- (2) 求概率 $P(U \leq 1, V \geq 0.5)$.

五. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.25e^{-0.5x}, & 0 < y < x; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 分别求 X, Y 的边缘密度函数;
- (2) 问: X, Y 是否相互独立? 请说明理由;

(3) 求条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$, 其中 $x > 0$; (4) 求 $E(X), E(Y), \text{cov}(X, Y)$.

六. 小王自主创业, 开了一家蛋糕店, 店内有 A, B, C 三种蛋糕出售, A, B, C 三种蛋糕的售价分别为 5 元, 10 元, 12 元. 顾客购买 A, B, C 三种蛋糕的概率分别为 0.2, 0.3, 0.5. 假设今天共有 700 位顾客, 每位顾客各买了一个蛋糕, 且各位顾客的消费是相互独立的. 用中心极限定理求小王今天的营业额在 7000 元至 7140 元之间的概率的近似值.

七. 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 500)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu, 625)$, 现从这两个总体中各独立抽取了样本容量为 5 的样本

$X_1, \dots, X_5, Y_1, \dots, Y_5$, 即合样本 $X_1, \dots, X_5, Y_1, \dots, Y_5$ 相互独立.

(1) 求随机变量 $\bar{X} - \bar{Y}$ 的概率密度函数, 其中 \bar{X}, \bar{Y} 分别为两个正态总体的样本均值;

(2) 求概率 $P(\bar{X} - \bar{Y} \leq 30)$.

八. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本, $n \geq 2$, X 的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^2}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } \theta \text{ 未知, } \theta > 0.$$

- (1) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$;
- (2) 问: θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 请说明理由;