2013—2014 学年第二学期（A 卷）

年级_____专业____________________学号__________姓名_____________任课教师______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共 8 大题，3 大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟.除填空题外要求写出解题过程，否则不予计分）

备用数据：

$t_{0.975}(15)=2.1315$，$\chi^2_{0.975}(15)=27.488, \chi^2_{0.025}(15)=6.262$ ．

一. 填空题(共 14 分)

1.（6 分）设 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.25$，则 A,B,C 中至少有一个发生的概率 = ________，A,B,C 中恰好有一个发生的概率= ________，A,B,C 中最多有一个发生的概率= ________.

2.（4 分）设 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，且 $\mu_1=\mu_2=\rho=0,\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$，则 $X-Y$ 服从的分布为________________，X^2+Y^2 服从的分布为_______________. （都用分布记号表示）

3.（4 分）设随机变量 $X\sim t(n)$，则随机变量 X^2 服从的分布为________________. （用分布记号表示）

二.（10 分）小李同学的雨伞掉了,他的雨伞落在图书馆的概率为 0.40,这种情况下雨伞被找回的概率为 0.80;他的雨伞落在教室的概率为 0.40,这种情况下雨伞被找回的概率为 0.60;他的雨伞落在食堂的概率为 0.20,这种情况下雨伞被找回的概率为 0.10 .

（1）求小李的雨伞被找回的概率;

（2）如果已知小李的雨伞被找回了,求雨伞是被落在教室里的概率.

三.（14 分）设随机变量 X,Y 相互独立且服从相同的分布,记事件 $A=\{X>a\},B=\{Y>a\}$, 且 $P(A\cup B)=\dfrac{24}{25}$.

(1)求概率 $P(A)$ 和 $P(A-B)$；

(2)如果 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} cx^2, 0<x<2 \\ 0, \text{[illegible]} \end{cases}$ ，求常数 c 和 a 的值 .

四.（10 分)设 (X,Y) 的联合概率函数为

$$P(X=-1,Y=0)=0.25, P(X=0,Y=1)=0.5, P(X=1,Y=0)=0.25 \quad .$$

(1) 求概率 $P(XY=0)$；

（2）分别求 $U=X+Y$ 的概率函数和 $V=\max(X,Y)$ 的概率函数 .

五.（14 分）设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y; \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

(1) 分别求 X,Y 的边缘密度函数； （2）问：X,Y 是否相互独立？请说明理由；

（3）求 $E(X),E(Y),\mathrm{cov}(X,Y)$.

六.（12 分)(1) 设 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立且服从相同的分布, $X_1\sim P(1)$,求 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的概率函数;

(2) 利用中心极限定理求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-n}+ne^{-n}+\dfrac{n^2}{2!}e^{-n}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}e^{-n})$.

七.(10 分)假设某品牌轮胎的寿命 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（单位：万公里），为估计总体均值，现随机抽查了 16 只该品牌轮胎的寿命，得到数据为 $x_1,\ldots,x_{16}$，并由此算出 $\bar{x}=4.71, s^2=0.04$.分别求 μ 和 σ^2 的置信水平 0.95 的双侧置信区间.（结果保留四位小数）

八.（16 分)设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，X 服从二项分布 $B(3,\theta)$ ，其中 θ 未知，$0<\theta<1$.

（1） 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$；

（2） 问：θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量? 请说明理由;

（3） 如果通过调查得到样本观测值 $x_1,x_2,\ldots,x_{100}$,记 n_j 表示 $x_1,x_2,\ldots,x_{100}$ 中取值为 j 的个数, $j=0,1,2,3$. 且由观测值 $x_1,x_2,\ldots,x_{100}$ 得到 $n_0=10,n_1=20,n_2=30,n_3=40$，求 θ 的极大似然估计值.