1.填空题（4 分）设事件 A,B 相互独立，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=0.25,$，则 $P(A)=$______, $P(B)=$________.

2.（6 分）设 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $Y=X^2$ 的概率密度函数为

$f_Y(y)=\{$

__________________________________ .

3.（6 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是取自总体 X 的简单随机样本，且 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}X_i^2$ 服从自由度为__________的_________分布；当非零常数 $k=$

时，$k\frac{(X_1+X_2)^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从第一自由度为

____、第二自由度为_____的 ______分布.

二．某肥皂公司有二个生产车间，一个在苏州，一个在无锡，但都生产同型号肥皂.苏州生产的肥皂占总数的 60%，而无锡的则占 40%.二个车间生产的产品都送到二地之间的一个中心仓库，且产品混合放在一起.从质量检查可知苏州的产品有 5%不合格；无锡的产品则有 10%不合格.求：

（1） 从中心仓库随机抽出一个产品，求它是不合格品的概率；

（2） 从中心仓库随机抽出一个产品发现它是不合格的，求它是来自无锡生产的概率是多少？

三．设离散型随机变量 X,Y 相互独立，X,Y 的边缘概率函数分别为

$P(X=0)=0.2,P(X=1)=0.8,P(Y=1)=0.4,P(Y=2)=0.6$.记 $Z=2X-3Y$

（1）求 (X,Y) 的联合概率函数；

（2）求 Z 的概率函数；

（3）求 (X,Z) 的协方差 $\operatorname{cov}(X,Z)$ 和相关系数 ρ_{XZ}.

四．设随机变量 X,Y 相互独立且服从相同的分布，随机变量 X 服从 0-1 分布 $B(1,p)$，$0<p<1$.

记随机变量 $Z=\begin{cases}1, & X+Y=1,\\ 0, & X+Y\neq 1\end{cases}$.

（1）求 Z 的概率函数；

（2）求 (X,Z) 的联合概率函数；

（3）问:当 p 取何值时，X 与 Z 相互独立?

五．设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+cxy, & 0<x<1\text{且}0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ，其中 c 为实常数.

求（1）c 的值；（2）分别求 X,Y 的边缘密度函数；

（3）问：X,Y 是否相互独立？请说明理由；

（4）求概率 $P(X+Y\geq 1)$.

六．设某种电器元件的寿命 X（单位：小时）服从数学期望为 1000 的指数分布,现在随机取了 1600 只这种电器元件，假定各个元件的寿命相互独立.求这 1600 只元件的寿命之和大于 1640000 小时的概率近似值.（要求用中心极限定理解题）

七．已知为了得到某种鲜牛奶的冰点，对其冰点进行了 21 次独立重复测量，得到数据 $x_1,\ldots,x_{21}$（单位：℃）.并由此算出样本均值 $\bar{x}=-0.546$，样本方差 $s^2=0.0015$.设鲜牛奶的冰点服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

（1）若已知 σ^2=0.0048，求 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间；

（2）若 σ^2 未知，求 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间.

（计算结果保留四位小数）

八. 设 $X_1, X_2 \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本， X 服从对数正态分布，即 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$ ，其中 μ， σ^2 未知.

(1)求未知参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计量；

（2）问：（1）中求得的 μ 的极大似然估计量是否为 μ 的无偏估计量？请说明理由；