质点运动学与动力学练习题

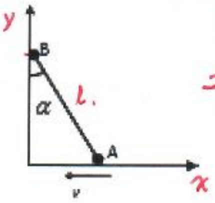
班级：____________姓名：____________学号：____________

一. 从$\vec{r}(t)$到$\vec{v}(t)$到$\vec{a}(t)$逐次求导

1)质点的运动学方程为$\vec{r}(t)=3t\vec{i}+(4t-4.9t^2)\vec{j}$，$t$ 表示时间，那么该质点的初速度的大小为 5 m/s ，加速度大小为 $9.8\ m/s^2$ 。

2) 质点 P 在一条直线上运动，坐标 x 与时间 t 的关系为$x=-A\sin\omega t(\mathrm{SI})$，其中，$A$ 和 ω 为常数，则在任意时刻 t，质点的速度为 $v=-A\omega\cos\omega t$ ，加速度为 $a=A\omega^2\sin\omega t$ 。

3)如右图，A、B 两物体由长为 L 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上 滑行，如物体 A 以恒定的速率 v 向左滑行，当 α=30°时，物体 B 的速度为 $\frac{\sqrt{3}}{3}v_0$ 。



$x^2+y^2=l^2$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0.$

$v_B=\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

$=\frac{x}{y}v=v\cdot\tan30^\circ$

二. 从$\vec{a}(t)$到$\vec{v}(t)$到$\vec{r}(t)$逐次积分，注意分离变量，以及变量的变换

1. $a=f(t)$

一质点由静止开始沿直线运动，初始时刻的加速度为a_0，以后加速度均匀增加，每经过τ秒增加a_0，求任意时刻该质点的速度和运动的路程。

解：由题意得. $a=a_0+\frac{a_0}{\tau}\cdot t$

$a=\frac{dv}{dt}$， $dv=a\,dt$.

$\int_0^v dv=\int_0^t a\,dt$ $\quad v=\int_0^t(a_0+\frac{a_0}{\tau}t)\,dt$

$=a_0t+\frac{a_0}{2\tau}t^2$

$S=\int_0^t v\cdot dt$

$=\int_0^t(a_0t+\frac{a_0}{2\tau}t^2)\,dt$

$=\frac{1}{2}a_0t^2+\frac{a_0}{6\tau}t^3$

2. $a=f(v)$

一石子从空中由静止下落，由于空气阻力，石子并非做自由落体运动，现测得其加速度$a=A-Bv$，式中 A、B 为正恒量，试求石子下落时的速率和路程与时间的函数关系。

解：1). $a=A-Bv=\frac{dv}{dt}$.

$dt=\frac{dv}{A-Bv}$

两边积分. $\int_0^t dt=\int_0^v\frac{dv}{A-Bv}$.

$t=\frac{1}{B}\ln\frac{A}{A-Bv}$

$v=\frac{A}{B}(1-e^{-Bt})$

2). 路程. $S=\int_0^t v\cdot dt$

$=\int_0^t\frac{A}{B}(1-e^{-Bt})\,dt$

$=\frac{A}{B}t+\frac{A}{B^2}e^{-Bt}-\frac{A}{B^2}$

3. $a=f(x)$

一质点初始时从原点以速度v_0沿 x 轴正向运动，设运动过程中质点受到的加速度$a=-kx^2/2$ (k 为常量)，试求质点运动的最大距离。

解: $a=-\frac{k}{2}x^2=\frac{dv}{dt}$

两边同乘以 dx:

$-\frac{k}{2}x^2dx=\frac{dx}{dt}\cdot dv=v\cdot dv$

两边积分: $\int_0^{x_m}-\frac{k}{2}x^2dx=\int_{v_0}^{0}v\cdot dv$

$\frac{1}{2}v_0^2=\frac{1}{6}kx_m^3$

$x_m=\sqrt[3]{\frac{3v_0^2}{k}}$

三．牛顿第二定律

1) 一质量为 1kg 的质点的运动学方程为$\vec{r}=2t\vec{i}+(t^2-2)\vec{j}$，式中各量均用国际单位制单位。则质点在坐标为(4，2)的位置时所受的力为 $2N\vec{j}$ 。

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$\vec{a}=2\vec{j}\ m\cdot s^{-2}$

$\vec{F}=m\vec{a}$

2) 轻型飞机连同驾驶员总质量为1.0×10^3kg。飞机以 55.0m/s 的速率在水平跑道上着陆后，驾驶员开始制动，若阻力与时间成正比，比例系数$\alpha=5.0\times10^2$N/s，空气对飞机的升力不计，求：（1）10s 后飞机的速率；（2）飞机着陆后 10s 内滑行的距离。

解: $f=-kt=ma=m\frac{dv}{dt}$

$dv=-\frac{k}{m}t\,dt$

$\int_{v_0}^{v}dv=-\int_0^t\frac{k}{m}t\,dt$

$v=v_0-\frac{k}{2m}t^2$

当 $t=10s$ 时,

$v=55-\frac{500}{2000}\times10^2$

$=30\ m\cdot s^{-1}$

(2) $S=\int_0^t v\cdot dt$

$=\int_0^t(v_0-\frac{k}{2m}t^2)dt$

$=v_0t-\frac{k}{6m}t^3$

当 $t=10s$.

$S=55\times10-\frac{500}{6\times1000}\times10^3$

$=466.7\ m$

3) 一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为v_0。设此球在水中所受到的浮力与重力相等，水的阻力为$F_r=-kv$，k为一常量。求：（1）此球体的下沉速度与时间的函数关系；（2）阻力对球体作的功与时间的函数关系。

解: (1) 受力分析:

向下为正方向.

$mg-F_浮-F_r=ma$

$-kv=ma=m\frac{dv}{dt}$

$-\frac{k}{m}dt=\frac{dv}{v}$

$\int_0^t-\frac{k}{m}dt=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$

$v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$

(2) 由动能定理可得,

$W_f=\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

$=\frac{1}{2}mv_0^2(e^{-\frac{2k}{m}t}-1)$

4) 设有一质量为 m 的物体，自地面以初速 v_0 竖直向上发射，物体受到的空气阻力为 $f=-kv$，k 为常数，v 为物体的速率。求物体在上升过程中任意时刻的速率和物体达到最大高度所需时间。

解：向上为正方向，

$$-(mg+kv)=ma=m\frac{dv}{dt}$$

分离变量：$-dt=\frac{m\,dv}{mg+kv}$

两边积分：$\int_0^t -dt=\int_{v_0}^{v}\frac{m\,dv}{mg+kv}$

$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg+kv}$$

$$v=\left(\frac{mg}{k}+v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$

当到达最高处，速度减为0.

$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_0}{mg}$$

5) 物体从高空下落时空气阻力大小与速率成正比，比例系数为 k.若物体质量为 m，则该物体下落的最大速率为 $\frac{mg}{k}$，任意时刻的速率为 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$，路程为 $\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m^2g}{k^2}$(重力加速度为 g)

解：由题意得：$mg-kv=ma=m\frac{dv}{dt}$

分离变量：$dt=\frac{m\,dv}{mg-kv}$

两边积分：$\int_0^t dt=\int_0^v\frac{m\,dv}{mg-kv}$

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

$$S=\int_0^t v\cdot dt=\int_0^t\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})dt=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m^2g}{k^2}$$

6) 一个物体自地球表面以速率 v_0 竖直上抛，假定空气对物体的阻力 $F_r=kmv^2$，其中 k 为常量，m 为物体的质量。求该物体上升的高度。

解：向上为正方向：$-(mg+kmv^2)=ma=m\frac{dv}{dt}$

$$-(g+kv^2)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dy}$$

$$dy=-\frac{v\cdot dv}{g+kv^2}$$

$$\int_0^h dy=\int_{v_0}^0-\frac{v\cdot dv}{g+kv^2}$$

$$h=\frac{1}{2k}\ln\frac{g+kv_0^2}{g}.$$

四．功与动能定理

1）某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\vec{i}$ (SI)的作用下沿 x 轴作直线运动， 在从 x＝0 移动到 x＝10 m 的过程中，力 F 所做的功为 <u>290 J</u> 。 $W=\int_0^{10} F\cdot dx=\int_0^{10}(4+5x)dx=290\ J$

2）一物体以 $x=ct^3$ 作直线运动，c 为常数。设物体所受的阻力 $f=-kv$，k 为常数试求物体从 $x=0$ 运动到 $x=L$ 时，阻力所作的功以及物体合外力所作的功。(物体质量为 m)

解：$x=ct^3$.　$v=\frac{dx}{dt}=3ct^2$

当 $x=0$. $t=0$

$x=L$. $t=(\frac{L}{c})^{\frac{1}{3}}$.

$W_f=-\int_0^L f\cdot dx=\int_0^t -kv\cdot v\cdot dt$

$=-\int_0^{(\frac{L}{c})^{\frac{1}{3}}} k\cdot(3ct^2)^2 dt$

$=-\frac{9}{5}kc^{\frac{1}{3}}L^{\frac{5}{3}}$

3)一质量为 0.4kg 的质点由静止开始运动，运动函数为 $\vec{r}=\frac{5}{3}t^3\vec{i}+2\vec{j}$ (SI 单位)，则在 0 到 4 秒时间内，作用在该质点上的合力所做的功为 <u>1280J</u> 。 $W=\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2$　$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

4)一人从 10.0m 深的井中提水，起始桶中装有 10.0kg 的水，由于水桶漏水，每升高 1.00m 要漏去 0.20kg 的水。求水桶被匀速地从井中提到井口，人所作的功。（g=10m/s^2 ）

解：$m(y)=m_0-0.2y$.

$W=\int_0^h F\cdot dy=\int_0^{10}(10-0.2y)\times 10\times dy=900\ J$

五．冲量与动量定理

1) 质量为 2kg 的物体，所受合外力沿 x 轴正方向，且力的大小随时间变化，其规律为 $F=4+6t$(SI)，从 $t=0$ 到 $t=2$s 的时间内，物体的动量的增量为 <u>20 kg·m·s^{-1}</u> 。 $I=\Delta p=\int_0^t F dt=\int_0^2(4+6t)dt=20\ N\cdot s$

2)一颗子弹由枪口射出时速率为 v_0，当子弹在枪筒内被加速时，它所受的合力为 $F=a-bt$ (a, b 为常数)。试求：(1)假设子弹运行到枪口处合力刚好为零，子弹所受的冲量；(2)子弹的质量。

解：当子弹出枪口时. $F=0$.

$\therefore a-bt=0$,　$t=\frac{a}{b}$

$I=\int F dt$

$=\int_0^{\frac{a}{b}}(a-bt)dt$

$=at-\frac{1}{2}bt^2\Big|_0^{\frac{a}{b}}=\frac{a^2}{2b}$

(2)　$I=\Delta p=m\Delta v$

$m=\frac{I}{\Delta v}=\frac{a^2}{2bv_0}$

3)质量为 m 的小球，在合外力 $F=-kx$ 作用下运动，已知 $x=A\cos\omega t$，其中 k,ω,A 均为正常量。试求在 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时间内小球动量的增量。

解：方法一：$I=\Delta p=\int_0^t F dt=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}-k\cdot A\cos\omega t\cdot dt=-\frac{kA}{\omega}$.

方法二：$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin\omega t$.

$\Delta p=mv-mv_0$

$=m\cdot(-A\omega\cdot\sin\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega})=-mA\omega$.

当 $t=0$. $v_0=-A\omega\sin 0=0$