

2014—2015 学年第二学期（B 卷）

年级	专业	学号			姓名			任课教师	
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共 8 大题，3 大张，满分 100 分。考试时间为 120 分钟. 除填空题外要求写出解题过程，否则不予计分）

备用数据：
 $\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.96) = 0.975, t_{0.975}(20) = 2.086.$

一. 填空题(共 16 分)

1.（4 分）设事件 A, B 相互独立， $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) = 0.25,$ ，则 $P(A) = \underline{\hspace{1cm}}, P(B) = \underline{\hspace{1cm}}.$

2.（6 分）设 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $Y = X^2$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \hspace{1cm} \end{cases}.$$

3.（6 分）设 X_1, X_2, \cdots, X_5 是取自总体 X 的简单随机样本，且 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，则 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 X_i^2$ 服从

自由度为_____的_____分布；当非零常数 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 时， $k \frac{(X_1 + X_2)^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}$ 服从第一自由度为

____、第二自由度为_____的 _____分布。

二.（10 分）某肥皂公司有二个生产车间，一个在苏州，一个在无锡，但都生产同型号肥皂。苏州生产的肥皂占总数的 60%，而无锡的则占 40%。二个车间生产的产品都送到二地之间的一个中心仓库，且产品混合放在一起。从质量检查可知苏州的产品有 5%不合格；无锡的产品则有 10%不合格。求：

- （1）从中心仓库随机抽出一个产品，求它是不合格品的概率；
- （2）从中心仓库随机抽出一个产品发现它是不合格的，求它是来自无锡生产的概率是多少？

三.（12 分）设离散型随机变量 X, Y 相互独立， X, Y 的边缘概率函数分别为

$$P(X = 0) = 0.2, P(X = 1) = 0.8, P(Y = 1) = 0.4, P(Y = 2) = 0.6 \quad . \text{记 } Z = 2X - 3Y$$

- （1）求 (X, Y) 的联合概率函数；
- （2）求 Z 的概率函数；
- （3）求 (X, Z) 的协方差 $\text{cov}(X, Z)$ 和相关系数 ρ_{XZ} 。

四.（12 分）设随机变量 X, Y 相互独立且服从相同的分布，随机变量 X 服从 0-1 分布 $B(1, p)$ ， $0 < p < 1$ 。

$$\text{记随机变量 } Z = \begin{cases} 1, & X + Y = 1, \\ 0, & X + Y \neq 1 \end{cases}.$$

- （1）求 Z 的概率函数；
- （2）求 (X, Z) 的联合概率函数；
- （3）问：当 p 取何值时， X 与 Z 相互独立？

五.（14 分）设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + cxy, & 0 < x < 1 \text{ 且 } 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \text{其中 } c \text{ 为实常数.}$$

求（1） c 的值；（2）分别求 X, Y 的边缘密度函数；

（3）问： X, Y 是否相互独立？请说明理由；

（4）求概率 $P(X + Y \geq 1)$ 。

六.（10 分）设某种电器元件的寿命 X （单位：小时）服从数学期望为 1000 的指数分布, 现在随机取了 1600 只这种电器元件, 假定各个元件的寿命相互独立. 求这 1600 只元件的寿命之和大于 1640000 小时的概率近似值.（要求用中心极限定理解题）

七(12 分) 已知为了得到某种鲜牛奶的冰点, 对其冰点进行了 21 次独立重复测量, 得到数据 x_1, \dots, x_{21} （单位：℃）。

并由此算出样本均值 $\bar{x} = -0.546$ ，样本方差 $s^2 = 0.0015$ 。设鲜牛奶的冰点服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

- （1）若已知 $\sigma^2 = 0.0048$ ，求 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间；
- （2）若 σ^2 未知，求 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间。

（计算结果保留四位小数）

八. (14 分) 设 $X_1, X_2 \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本， X 服从对数正态分布，即 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \text{其中 } \mu, \sigma^2 \text{ 未知.}$$

- (1) 求未知参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计量；
- （2）问：（1）中求得的 μ 的极大似然估计量是否为 μ 的无偏估计量？请说明理由；

