刚体力学部分练习题

班级：__________姓名：__________学号：__________

一．刚体运动学

1.在高速旋转圆柱形转子可绕垂直其横截面通过中心的轴转动。开始时，它的角速度 $\omega_0=0$，经 300 s 后，其转速达到 18000 r·min^{-1}。转子的角加速度与时间成正比。问在这段时间内，转子转过多少转？

解：$t=300s=5\,min$

$\beta=kt=\frac{d\omega}{dt}$

$\omega=\int_0^t kt\,dt=\frac{1}{2}kt^2$

当 $t=5\,min$，$\omega=18000\ r\cdot min^{-1}$.

$k=\frac{2\omega}{t^2}=\frac{2\times18000}{5^2}$

$\omega=\frac{d\theta}{dt}$

$\theta=\int_0^t\omega\cdot dt=\frac{1}{6}kt^3\Big|_{t=5}$

$=\frac{1}{6}\times\frac{2\times18000}{5^2}\times5^3$

$=30000$ 转.

2.一个飞轮受摩擦力矩作用页减速转动，其角加速度与角速度成正比，即 $\beta=-k\omega$，式中 k 为比例常数，初始角速度为 ω_0。试求(1)飞轮角速度随时间变化的关系；(2)速度由 ω_0 减为 $\omega_0/2$ 所需的时间，以及在此时间内飞轮转过的角度。

解：(1) $\beta=-k\omega=\frac{d\omega}{dt}$.

$\frac{d\omega}{\omega}=-k\,dt$

$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}=\int_0^t-k\,dt$

$\omega=\omega_0e^{-kt}$

(2) $\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$.

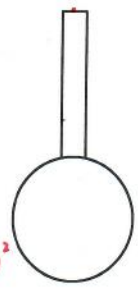
两边乘 $d\theta$，$\frac{d\theta}{dt}\cdot d\omega=-k\omega\cdot d\theta$，$\omega\,d\omega=-k\omega\cdot d\theta$

$d\omega=-k\cdot d\theta$.

$\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}d\omega=-k\int_0^\theta d\theta$.

$\theta=\frac{\omega_0}{2k}$.

二．转动惯量（平行轴定理）



1. 一摆由一根均匀细杆和一均匀薄圆盘组成，如图所示。薄圆盘的半径为 r，质量为 m；细杆长为 l，质量为 M。当摆绕过杆端且垂直于纸平面的轴摆动时，它的转动惯量表示式为 $J=\frac{1}{3}Ml^2+\frac{1}{2}mr^2+m(l+r)^2$；当绕过杆中心垂直于纸平面的轴转动时，转动惯量为 $J=\frac{1}{12}Ml^2+\frac{1}{2}mr^2+m(\frac{l}{2}+r)^2$；当绕过圆盘中心垂直于纸平面的轴转动时，转动惯量为 $J=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{12}Ml^2+M(\frac{l}{2}+r)^2$。

2. 有一半径为 R 的圆盘，它的质量分布由函数 $\sigma=kr\quad(0\le r\le R)$ 决定，σ 为圆盘的面密度，则该圆盘绕通过圆盘中心并垂直圆盘的轴线转动的转动惯量为 $\frac{2}{5}k\pi R^5$。

$J=\int r^2dm$

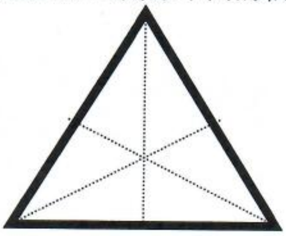
$=\int_0^R r^2\cdot\sigma\cdot2\pi r\,dr$

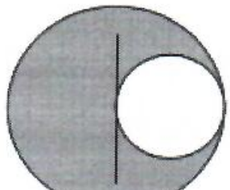
$=\int_0^R r^2\cdot kr\cdot2\pi r\,dr$

$=\frac{2}{5}k\pi R^5$

3. 一等边三角形是由三根长为 l 的均匀细杆组成的，每根杆的质量均为 M; 当等边三角形绕三角形中心且垂直于三角形平面的轴转动时，它的转动惯量为：$\underline{\frac{1}{2}Ml^2}$。绕三角形的顶点且垂直于三角形平面的轴转动时，转动惯量为：$\underline{\frac{3}{2}Ml^2}$。

$\frac{1}{3}Ml^2\times 2+\left[\frac{1}{12}Ml^2+M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2\right]$





4. 在半径为 R 的均匀球体中挖出一直径为 R 的球体（如图），所剩部分的质量为 m，空球形的球心距球体的球心为 R/2，则所剩部分对通过球心且与空球形相切的轴的转动惯量为$\underline{\frac{57}{140}mR^2}$。若是圆盘，则转动惯量为$\underline{\frac{13}{24}mR^2}$。

$\frac{2}{5}\times\frac{8}{7}m\times R^2-\left[\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}m\times\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{1}{7}m\times\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]$

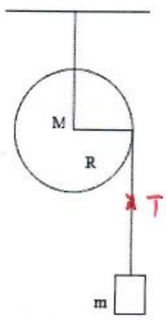
三．转动定律($\tau = J\beta$)

1.如图所示，一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M = 2.00kg$，半径为 $R = 0.100m$，上面绕一根不能伸长的轻绳，绳下端系一质量 m=5.00kg 的物体。求物体下落的加速度和绳中张力。（g=10m/s^2 ）

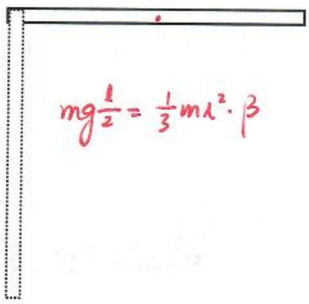
$$\begin{cases} mg-T=ma \\ T\cdot R=J\cdot\beta=\frac{1}{2}mR^2\beta \quad \text{（定滑轮看作圆盘）} \\ a=\beta\cdot R. \end{cases}$$

$a=\frac{25}{3}\ m\cdot s^{-2}.$

$T=\frac{25}{3}\ N.$



2. 一根质量为 m，长为 l 的均匀细棒，在竖直平面内绕通过其一端并与棒垂直的水平轴转动，如左图所示，现使棒从水平位置自由下摆，则(1)开始摆动时的角加速度为$\underline{\frac{3g}{2l}}$；(2)摆到竖直位置时的角速度为$\underline{\sqrt{\frac{3g}{l}}}$。



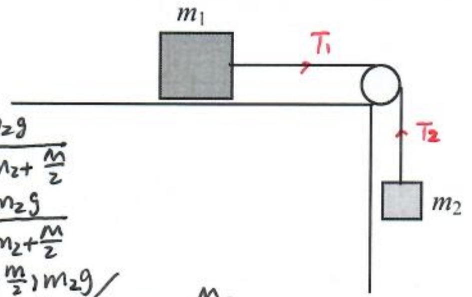
$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{3}ml^2\cdot\beta$

$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\omega^2$

3. 质量为 m_1 的物体置于完全光滑的水平桌面上，用一根不可伸长的细绳拉着，细绳跨过固定于桌子边缘的定滑轮后，在下端悬挂一个质量为 m_2 的物体。已知滑轮是一个质量为 M、半径为 r 的圆盘，轴间的摩擦力忽略不计，绳子不可伸长。求滑轮与 m_1 之间的绳子的张长 T_1、滑轮与 m_2 之间的绳子的张长 T_2 以及物体运动的加速度 a。

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_2 \cdot r - T_1 \cdot r = J \cdot \beta = \frac{1}{2} M r^2 \beta. \\ a = \beta \cdot r. \end{cases}$$



$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

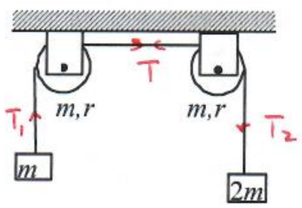
$$T_2 = (m_1 + \tfrac{M}{2}) m_2 g / (m_1 + m_2 + \tfrac{M}{2})$$

$$\cancel{a = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}}$$

$$\cancel{T_1 = \frac{m_1 (2m_2 + \frac{M}{2}) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} \qquad \cancel{T_2 = \frac{m_2 (2m_1 + \frac{M}{2}) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}}$$

4. 一轻绳跨过两个质量均为 m、半径均为 r 的均匀圆盘状定滑轮，绳的两端分别挂着质量为 m 和 $2m$ 的重物，如图所示．绳与滑轮间无相对滑动，滑轮轴光滑．将由两个定滑轮以及质量为 m 和 $2m$ 的重物组成的系统从静止释放，求两滑轮之间绳内的张力。

$$\begin{cases} T_1 - mg = ma \\ 2mg - T_2 = 2ma \\ (T - T_1) r = J \cdot \beta = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{a}{r}. \\ (T_2 - T) r = J \cdot \beta = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{a}{r}. \end{cases}$$



$$T = \frac{11}{8} mg.$$

四．角动量及守恒定律

1. 一个质量为 m 的质点在 $O-xy$ 平面上运动，其位置矢量随时间的关系(m, a, b, w 为常数) $\vec{r} = a\cos wt\vec{i} + b\sin wt\vec{j}$,则该质点对坐标原点的角动量为<u>$mabw\vec{k}$</u>，所受力矩为<u>0</u>。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -aw\sin wt\,\vec{i} + bw\cos wt\,\vec{j}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

$$= m \cdot (a\cos wt\,\vec{i} + b\sin wt\,\vec{j}) \times (-aw\sin wt\,\vec{i} + bw\cos wt\,\vec{j})$$

$$= m(abw\cos^2 wt\,\vec{k} + abw\sin^2 wt\,\vec{k})$$

$$= mabw\vec{k}$$

2. 一人手握哑铃坐在一转轴摩擦可忽略不计的转台上，以一定的角速度转动，若把两手伸开，使转动惯量增加一倍，则角速度变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，转动动能变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍。

3. 一质量为 20kg 的小孩，站在一半径为 3m、转动惯量为 450kgm^2 的静止水平转台上，此转台可绕通过转台中心的竖直轴转动，转台与轴间的摩擦不计。如果此小孩相对转台以 1ms^{-1} 的速率沿转台边缘行走，问转台的角速率有多大?

解：由角动量守恒可得.

$0 = J_{台}\omega_{台} + m_{孩} v_{孩} \cdot R.$

$v_{孩} = v_{孩台} + \omega_{台} \cdot R.$

代入数据：$0 = 450\omega + 20 \times 3 \times (\omega \times 3 + 1).$

$\omega = -0.0952\ rad/s.$ 负号表示两者运动的方向相反.

4. 一均匀木棒质量为 $m_1 = 1.0kg$、长为 $l = 40cm$，可绕通过其中心并与棒垂直的轴转动。一质量为 $m_2 = 10g$ 的子弹以 $v = 200m/s$ 的速率射向棒端，并嵌入棒内。设子弹的运动方向与棒和转轴相垂直，则棒受子弹撞击后的角速度为 $29.1\ rad \cdot s^{-1}$。

解：由角动量守恒，可得：

$m_2 v \cdot \frac{l}{2} = (\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_2 \cdot \frac{l^2}{4})\omega.$

五. 力矩、角动量定理和转动动能

5 一半径为 R、质量为 M 的匀质圆盘，以角速度 ω 绕其中心轴转动，现将它平放在一水平板上，盘与板表面的摩擦因数为 μ，求：（1）圆盘所受的摩擦力矩，（2）经多少时间后，圆盘转动才能停止？（3）到圆盘停止转动为止，摩擦力矩所作的功。

解：(1) $\tau_f = -\int_0^R \cdot r \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot \mu \cdot g$

$= -\frac{2}{3}\mu m g R.$

(2) $\tau_f \cdot t = 0 - J\omega_0$

$t = \frac{-J\omega}{\tau_f} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega}{\frac{2}{3}\mu m g R} = \frac{3\omega R}{4\mu g}.$

(3) $W_{\tau_f} = 0 - \frac{1}{2}J\omega^2$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$