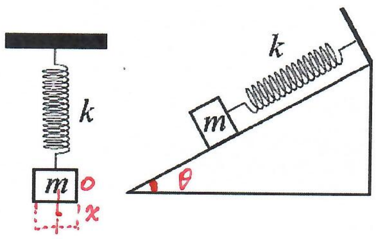
第十章 简谐振动

一 简谐振动的判定

1 一弹簧振子，当把它水平放置时，它可以作简谐振动，若把它竖直放置或放在固定的光滑斜面上（如图所示），问：这两种运动也是简谐振动吗？



倾斜放置也一样是简谐振动.

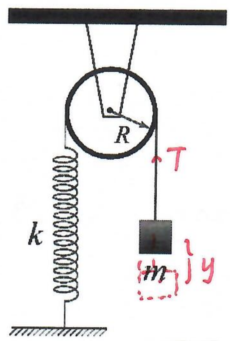
答：是。 $mg = kx_0$.

$F_合 = mg - k(x_0 + x)$

$= -kx = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\therefore \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

2 如图所示，定滑轮半径为R，转动惯量为J，轻绳绕过滑轮，一端与固定的轻弹簧连接，弹簧的倔强系数为k；另一端挂一质量为m的物体。现将m从平衡位置向下拉一微小距离后放手，试证物体作简谐振动，并求其振动周期。(设绳与滑轮间无滑动，轴的摩擦及空气阻力忽略不计)。



解：平衡时. $mg = ky_0$.

再下降y.

$$\begin{cases} mg - T = ma & ① \\ TR - k(y+y_0)R = J\cdot\alpha = J\cdot\dfrac{a}{R}. \\ T - k(y+y_0) = J\dfrac{a}{R^2} & ② \\ ①+②:\ mg - k\cdot(y+y_0) = (m+\dfrac{J}{R^2})a. \end{cases}$$

$\therefore -ky = (m + \dfrac{J}{R^2})a$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$.

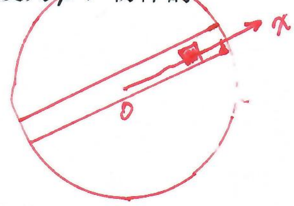
$\omega^2 = \dfrac{k}{m+\frac{J}{R^2}} = \dfrac{kR^2}{J+mR^2}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J+mR^2}{kR^2}}$

3 有人设想了一个假想的实验：在地球内部沿直径挖一个穿透地球的洞，将一个物体静止放入洞中，则该物体在洞中将来回运动；假设地球的引力场数为G，地球的密度为ρ，物体的质量为m，试求

（1）用学过的物理知识分析物体在洞中来回运动的属于什么运动；

（2）利用假设的条件计算物体在洞中来回运动一次所需的时间。



解：(1). $F_合 = -G\dfrac{m'm}{x^2}$

$= -G\dfrac{\frac{4}{3}\pi x^3\cdot\rho\cdot m}{x^2}$

$= -\frac{4}{3}\pi G\rho m x = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{3}\pi G\rho x = 0$

为简谐振动

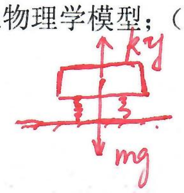
$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho$.

(2) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi G\rho}} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}$

4 汽车在崎岖的路面行驶时，需要通过弹簧来减少振动，现在测得汽车在平稳行驶时，底盘距离地面为$0.2m$；振动时，底盘距离地面最近为$0.1m$，最大振动加速度为$3.6ms^{-2}$。假设t=0时，汽车在平衡位置并向下运动，试（1）画出该问题的最简化物理学模型；（2）证明该振动是简谐振动；（3）用正确的数学方法表达此问题。

(1)



解：(2) 设汽车质量为m，弹簧之弹性系数为k.

平稳行驶时. $mg = ky_0$.

振动时：(向下为正方向)：$F_合 = mg - k(y_0 + y)$

$= -ky = ma = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$ $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

为简谐振动.

(3) 振幅 $A = 0.1\,m$.

$= 0.2 - 0.1$

$a_{max} = A\omega^2$,

$\omega = \sqrt{\dfrac{a_{max}}{A}} = \sqrt{\dfrac{3.6}{0.1}} = 6\ s^{-1}$

运动学方程 $y = 0.1\cos(6t - \frac{\pi}{2})\ m$

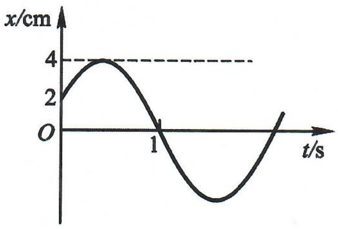
(注：向下为正方向)

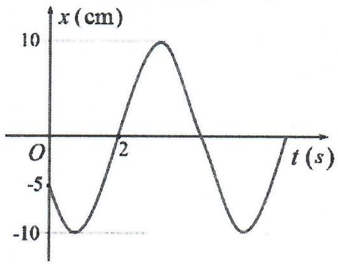
二 旋转矢量法

5 一质点沿 x 轴作简谐振动，振动方程为 $x = 0.04\cos(2\pi t + \pi/3)$ (SI)，从 $t = 0$ 时刻起，到质点位置在 $x = -0.02$ m 处，且向 x 轴正方向运动的最短时间间隔为 0.5 s 。

6 一质点作简谐振动，周期为 T，质点由平衡位置到二分之一最大位移处所需要的最短时间为 $T/12$ ；由最大位移到二分之一最大位移处所需要的最短时间为 $T/6$ 。

7 两简谐运动曲线如下图所示，则运动方程分别是 $x=4\cos(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3})$ cm， $x=10\cos(\frac{5}{12}\pi t+\frac{2}{3}\pi)$ cm 。





8 作简谐运动的小球，速度最大值为 $v_m = 3\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$，$A = 2$ cm，若从速度为正的最大值的某时刻开始计算时间。（1）求振动的周期；（2）求加速度的最大值；（3）写出振动表达式。

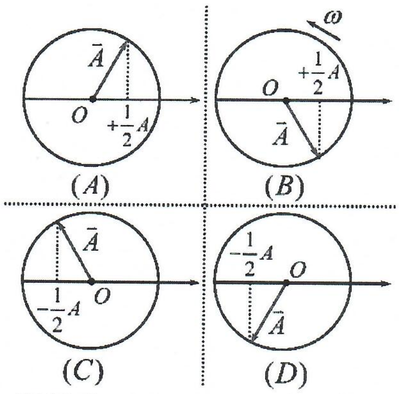
(1) $v_m = A\omega$. $\omega = \frac{v_m}{A} = 1.5\ s^{-1}$

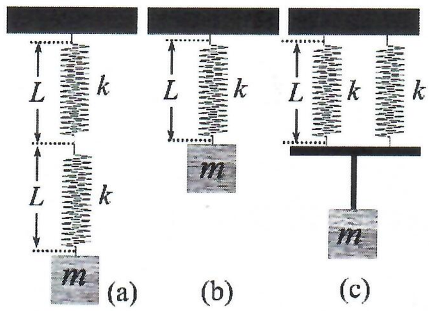
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3}\pi\ s$

(2) $a_{max} = A\omega^2 = 2\times1.5^2 = 4.5\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$

(3) $x = 2\cos(1.5t-\frac{\pi}{2})$ cm

9 一质点作简谐振动，振幅为 A，如图所示，在起始时刻质点的位移为 $A/2$，且向 x 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为（ B ）





10 如图所示，$(a),(b),(c)$ 为三个不同的谐振动系统，组成各系统的各弹簧的倔强系数及重物质量如图所示，$(a),(b),(c)$ 三个振动系统的 ω^2 值之比为 1 : 2 : 4 。

11 一质点作简谐振动，速度最大值为 5cm/s，振幅为 2cm，若在速度具有正的最大值的那一刻开始计时，则质点的振动方程为 $x=2\cos(\frac{5}{2}t-\frac{\pi}{2})$ cm 。

12 有一弹簧，当其下端挂一质量为 m 的物体时，伸长量为 9.8×10^{-2} m。若物体上下振动，且规定向上为正方向，当 t=0 时，物体在平衡位置并以 0.6m/s 的速度向上运动，则运动方程为 $x=0.06\cos(10t-\frac{\pi}{2})$ m 。

第十一章 机械波

1 如图所示，已知 t=0 时和 t=0.5s 时的波形曲线分别为图中曲线(a)和(b)，波沿 x 轴正向传播，试根据图中绘出的条件求：(1)波动方程；(2) P 点的振动方程.

解：$A=0.1\,m$ $\lambda=4\,m$

$(n+\frac{1}{4})T=0.5\,s.$

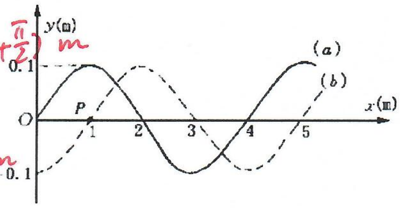
$T=\frac{2}{4n+1}\,s.$

$\omega=\frac{2\pi}{T}=(4n+1)\pi\ s^{-1}$

(1) $y=0.1\cos[(4n+1)\pi t-\frac{2\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}]\ m$

(2) 当 $x=1\,m$

$y_p=0.1\cos(4n+1)\pi t\ m$



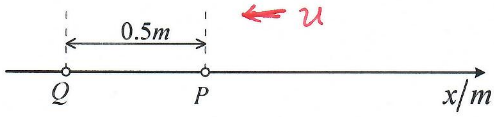
2 一平面简谐波沿着 x 轴负方向传播，已知 x=b 处的质点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，波速为 u，则波方程为 $y=A\cos[\omega(t+\frac{x-b}{u})+\varphi_0]$。

3 有一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅为 2m，周期为 4s，波长 4m，在 t=0 时，坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴的正方向运动。则波动方程为 $y=2\cos(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2})$。

4 如图，一平面简谐波从无限远处向左传播，波速 2m/s，波线上一点 P 的振动，方程 $y=2\cos(4\pi t+\pi/3)$ m，点 Q 位于 P 左端 0.5 m 处，求：分别以 P、Q 为坐标原点，写出波动方程。

$\lambda=u\cdot T=u\cdot\frac{2\pi}{\omega}$

$=2\times\frac{2\pi}{4\pi}=1\,m.$



P为原点：$y=2\cos(4\pi t+2\pi x+\frac{\pi}{3})\ m$

Q为原点：$y=2\cos(4\pi t+2\pi x-\frac{2}{3}\pi)\ m$

5 频率为100 Hz，传播速度为300 m·s 的平面简谐波，波线上两点振动的相位差为 $\pi/3$，则此两点相距 0.5 m。

$\lambda=u\cdot T=\frac{u}{\nu}=3\,m.$

$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ $\Delta x=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot\Delta\varphi=\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=0.5\,m$

6 设声波在媒质中的传播速度为 u，声源频率为 ν_S，若声源 S 不动，而接收器 R 相对于媒质以速度 v_R 沿着 S，R 的连线向着声源 S 运动，则接收器 R 的振动频率为 $\frac{u+v_R}{u}\nu_s$。

7 一静止的报警器，其频率为1000 Hz，有一汽车以79.2 km/h（22 m/s）的时速驶向和背离报警器时，坐在汽车里的人听到报警声的频率分别是 1064.7 Hz 和 935.3 Hz（设空气中声速为340 m·s^{-1}）

A　$\overset{v_o}{O\rightarrow}$　$B\overset{v_B}{\rightarrow}$

8 A、B 为两个汽笛，其频率皆为500 Hz，A 静止，B 以 60ms^{-1} 的速率向右运动。在两个汽笛之间有一观察者 O，以 30 m·s^{-1} 的速度也向右运动。已知空气中的声速为 330 m·s^{-1}，求：（1）观察者听到来自 A 的频率；（2）观察者听到来自 B 的频率；（3）观察者听到的拍频。

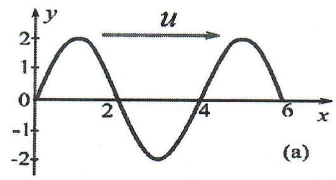
(1) $\nu_A=\frac{330-30}{330}\times500\,Hz=454.5\,Hz$

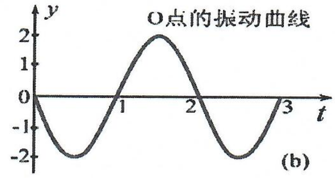
(2) $\nu_B=\frac{330+30}{330+60}\times500\,Hz=461.5\,Hz$

(3) 拍频：$461.5-454.5=7\,Hz$

9 某平面简谐波在 $t=0$ 时的波形曲线和原点($x=0$ 处)的振动曲线如图 $(a),(b)$ 所示（单位为 m，s），试写出

（1）该波动方程；（2）x=2m 处的简谐振动方程。





解：

$\lambda = 4m.\ A = 2m.\ T = 2s.\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

(1) $y = 2\cos(\pi t - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2})\ m$

(2) $x = 2m.$

$y = 2\cos(\pi t - \pi + \frac{\pi}{2})$

$= 2\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})\ m$

10 蝙蝠可以通过声波感知周边的环境，已知蝙蝠的飞行速度为 $10m/s$，发射的声波频率为 $10000HZ$，声波在空气中的速度为 $340m/s$，试

（1）分析蝙蝠向洞壁飞行时，蝙蝠接受的声波频率会有什么变化？变化多少？

（2）若蝙蝠接受到一个频率为 $12000HZ$ 到的反射声波信号，则反射信号的物体的速度为多少？

解：

(1). 洞壁接收到的频率. $\nu = \frac{340}{340-10} \times 10000\ Hz = 10303\ Hz$

(2) 洞壁为波源. 蝙蝠接收: $\nu' = \frac{340+10}{340} \times 10303\ Hz$

$= 10606 Hz.$

变化 $10606 - 10000$

$= 606\ Hz$

设物体的速度为 v_0. 假设两者在靠近. 相对运动.

(2). $\nu' = \frac{340+v_0}{340-10}\nu.$

$\nu'' = \frac{340+10}{340-v_0}\nu'$

$\therefore 12000 = \frac{340+10}{340-v_0} \cdot \frac{340+v_0}{340-10} \times 10000$

$\approx 21\ m/s$