Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Институт прикладной математики и компьютерных наук

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Вычислительная математика»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. Методы вычислительной математики

для решения систем линейных уравнений (СЛУ).

.

Ходырев Руслан Романович

Направление подготовки 09.03.03 Прикладная информатика

Направленность(профиль) «Разработка программного обеспечения в цифровой экономике»

Руководитель работы

канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_О.В. Романович

*подпись*

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ г.

Автор работы

студент группы № 932203

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Р.Р. Ходырев

*подпись*

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20 \_\_\_ г.

Томск – 2023

**Оглавление**

[введение 3](#_Toc152877922)

[Теоретическая часть 4](#_Toc152877923)

[Программная реализация 5](#_Toc152877924)

[Исследование скорости сходимости 7](#_Toc152877925)

[заключение 8](#_Toc152877926)

# введение

• **Цель работы**:

Целью данной лабораторной работы является изучение и реализация метода Холецкого (The Cholesky Decomposition) для численного решения систем линейных уравнений. Метод Холецкого - это численный метод, который используется для разложения симметричных определенных матриц на произведение верхней и нижней треугольных матриц.

**• Задачи:**

1) Определение теоретических основ метода Холецкого: в рамках этой задачи будет проведен анализ теоретических основ метода Холецкого, включая математические выкладки и объяснения принципов работы метода.

2) Разработка программы, реализующей метод Холецкого: для выполнения этой задачи будет создана программная реализация метода Холецкого, использующая выбранную среду разработки Python.

3) Проведение численных экспериментов для оценки эффективности метода: в рамках этой задачи будут проведены численные эксперименты с использованием разработанной программы для оценки эффективности метода Холецкого при решении систем линейных уравнений с симметричными положительно определенными матрицами.

• Среда разработки: для выполнения лабораторной работы будет использована среда разработки Python.

# Теоретическая часть

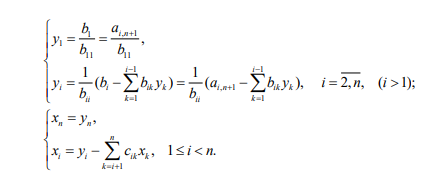
Рассматриваемая система линейных уравнений записывается в матричной форме, где матрица , представляющая собой квадратную матрицу порядка , и векторы-столбцы и играют ключевую роль. Целью данного рассмотрения является представление матрицы в виде произведения двух других матриц: нижней треугольной матрицы и верхней треугольной матрицы с единичной диагональю, то есть .

Исходное линейное уравнение переписывается в следующем виде: BCx = b. Произведение Cx представляет собой вектор-столбец, обозначаемый как y: Cx = y.

Далее, искомый вектор x может быть вычислен путем решения двух систем уравнений: By = b, где матрица B является нижней треугольной матрицей, и Cx = y, где матрица C - верхняя треугольная матрица. Изображение выглядит как текст, Шрифт, линия, диаграмма

Автоматически созданное описание

Из представленных формул видно, что числа удобно вычислять параллельно с коэффициентами. Эта схема вычислений, известная как схема Халецкого, позволяет оптимизировать процесс вычислений и обеспечивает удобный контроль через использование сумм.

Схема Халецкого особенно удобна для выполнения на клавишных вычислительных машинах, так как она позволяет проводить операции "накопления" без необходимости записывать промежуточные результаты, что способствует экономии памяти и повышает эффективность вычислений. 

# Программная реализация

Данные методы реализованы в приложении на языке Python, в интегрированное среде разработке PyCharm Professional 2023.2.4.

Для преобразования строкового ввода в функцию используется библиотека SymPy. Также SymPy используется для вычисления производной в точке.

Библиотека Numpy для создания массива значений.

Библиотека Matplotlib используется для графопостроения функций.

def haletsky\_method(matrix, matrix\_z):

    from haletsky\_method.forward\_motion import forward\_motion

    from haletsky\_method.reverse\_motion import reverse\_motion

    import numpy as np

    eigenvalues = np.linalg.eigvals(matrix)

    determinant = np.linalg.det(matrix)

    t = np.all(eigenvalues > 0)

    if (

        (not np.all(eigenvalues != 0))

        or np.all(matrix != matrix.T)

        or (determinant < 0)

    ):

        raise "ошибка в данных"

    # B = np.zeros(len(matrix))

    B = np.full((len(matrix), len(matrix)), 0.0)

    C = np.eye((len(matrix)))

    for i in range(len(matrix)):

        for j in range(len(matrix)):

            B[i][0] = matrix[i][0]

            C[0][j] = matrix[0][j] / B[0][0]

            if (i >= j) and (j > 0):

                summ = 0

                for k in range(0, j):

                    summ += B[i][k] \* C[k][j]

                B[i][j] = matrix[i][j] - summ

            if (j > i) and (i > 0):

                summ = 0

                for k in range(0, i):

                    summ += B[i][k] \* C[k][j]

                    C[i][j] = (1 / B[i][i]) \* (matrix[i][j] - summ)

    y1 = np.linalg.solve(B, matrix\_z)

    print(y1)

    y = reverse\_motion(B, matrix\_z)

    print(y)

    x = forward\_motion(C, y)

    x1 = np.linalg.solve(C, y1)

    print(x)

    print(x1)

    return x

**Рисунок SEQ Рисунок \\* ARABIC 1**

# Исследование скорости сходимости

Данные полученные в результате исследования скорости сходимости двух методов приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Сравнение сходимости двух алгоритмов в зависимости от ранга матрцы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ранг Матрицы** | **Метод квадратных корней** | **Метод Халецкого** |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | 5 |
| 4 | 10 | 14 |
| 5 | 20 | 30 |
| 6 | 35 | 55 |
| 7 | 56 | 91 |
| 8 | 84 | 140 |
| 9 | 120 | 204 |
| 10 | 165 | 285 |
| 11 | 220 | 385 |
| 12 | 286 | 506 |
| 13 | 364 | 650 |
| 14 | 455 | 819 |
| 15 | 560 | 1015 |
| 16 | 680 | 1240 |
| 17 | 816 | 1496 |
| 18 | 969 | 1785 |
| 19 | 1140 | 2109 |

# заключение

**Подведение итогов**: в ходе выполнения лабораторной работы был изучен и реализован метод Холецкого для численного решения систем линейных уравнений. Программа успешно разложила симметричные положительно определенные матрицы на верхнюю и нижнюю треугольные матрицы, позволяя решать системы линейных уравнений с высокой точностью и ограниченным числом итераций.

**Оценка метода**: Метод Холецкого является эффективным численным методом для решения систем линейных уравнений с симметричными положительно определенными матрицами. Его эффективность проявляется в высокой стабильности и скорости сходимости. В данной работе метод Холецкого успешно справился с различными системами линейных уравнений.

**Пути улучшения**: для дальнейших исследований можно рассмотреть адаптацию метода Холецкого для работы с несимметричными матрицами или матрицами, близкими к симметричным. Также можно исследовать методы оптимизации вычислений для увеличения эффективности при работе с большими матрицами.