Diesen Artikel teilen:

Mehrdimensionale Extremstellen

Um die lokalen (relativen) Extremstellen von Funktionen mit mehreren Variablen zu bestimmen geht man im Prinzip genauso vor wie bei Funktionen mit einer Variablen:

Zuerst die kritischen Stellen über die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und dann mit der 2. Ableitung die Art des Extremums bestimmen. Der Unterschied ist, dass wir hier mehrere 1. und 2. Ableitungen haben:

Algorithmus

I. Bilde den Gradienten von f

II. Jede Zeile des Gradienten wird nun null gesetzt. Damit erhält man ein Gleichungssystem. Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind die kritischen Stellen.

III. Berechne die Hesse-Matrix von f

IV. Setze diese Stellen in die Hesse-Matrix ein und bestimme jeweils die Definitheit dieser Matrix:

- Ist die Hesse-Matrix positiv definit, handelt es sich um ein Minimum
- Falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, befindet sich an der kritischen Stelle ein Maximum
- Ist die Hesse-Matrix indefinit, so handelt es sich um einen Sattelpunkt
- Ist die Hesse-Matrix positiv semidefinit, so handelt es sich um ein Minimum oder einen Sattelpunkt
- Ist die Hesse-Matrix negativ semidefinit, so handelt es sich um ein Maximum oder einen Sattelpunkt

Die Stellen, an denen der Gradient null wird, werden neben Extremstelle und kritische Stelle auch stationäre Punkte genannt. Für das ***globale*** Maximum bzw. Minimum gibt es hier einen separaten Artikel.

Was, wenn die Hesse-Matrix semidefinit ist?

$A(x_1, \dots, x_n)$ heißt (lokales) Minimum, wenn für alle Punkte $B(b_1, \dots, b_n)$ in der Nähe von A gilt, dass

$$f(A) \leq f(B)$$

Analog ist es ein Maximum, wenn $f(A) \geq B$. Gibt es sowohl Werte, die größer sind als auch Werte, die kleiner sind, so haben wir einen Sattelpunkt.

Um nun jedoch herauszufinden, welcher dieser Fälle vorliegt, hilft meist erstmal eine grafische Veranschaulichung, die natürlich bei mehreren Variablen dann auch nicht mehr so einfach geht.

Man muss dann meist versuchen mittels quadratischer Ergänzung oder einer Vorzeichenbetrachtung der einzelnen Terme/Faktoren der Funktion zu argumentieren, warum die obige Ungleichung gelten könnte.

Wie das aussehen kann, wird in dieser Aufgabe durchgerechnet.

Für den Fall, dass die Hesse-Matrix echt semidefinit ist, also der Null-Matrix entspricht, bildet man die dritten partiellen Ableitungen der Funktion. Ist eine dieser Ableitungen an dem kritischen Punkt ungleich Null, so haben wir einen Sattelpunkt, sonst lässt sich nichts genaues sagen.

Beispiel 1

Wir suchen die Extrema folgender Funktion:

$$f(x, y) = y^2 + x^2$$

Schritt 1: Gradient bilden

Um die kritischen Stellen zu bestimmen, braucht man den Gradienten der Funktion. Also bilden wir als erstes die ersten partiellen Ableitungen unserer Funktion:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + x^2\right) \\ &= 0 + 2x \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + x^2\right) \\ &= 2y + 0 \\ &= 2y \end{aligned}$$

Damit stellen wir jetzt den Gradienten auf:

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Gradient Null setzen und Gleichungssystem lösen

Die kritischen Stellen erhälst du, indem du den Gradienten gleich Null setzt und das entstehende Gleichungssystem löst:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & 2x & = 0 \\ \mathrm{II} & 2y & = 0 \end{array}$$

Hier erkennt man auch ohne Rechnen, dass die erste Gleichung nur für $x = 0$ und die zweite für $y = 0$ erfüllt ist. Also haben wir eine Extremstelle in $P(0, 0)$.

Schritt 3: Hesse-Matrix

Um zusätzlich die Art des Extremums zu bestimmen brauchen wir die Hesse-Matrix der Funktion, und dafür wiederum die zweiten partiellen Ableitung:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x) \\ &= 2 \\ f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2y) \\ &= 2 \\ f_{yx} = f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_x \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das fassen wir zur Hesse-Matrix zusammen:

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Definitheit der Hesse-Matrix untersuchen

Nun müssten wir eigentlich die Hesse-Matrix an der kritischen Stelle berechnen, d.h. den x-Wert und den y-Wert des Punktes einsetzen.

Da in unserer Matrix aber kein x und kein y mehr vorkommen, erledigt sich diese Arbeit von selbst:

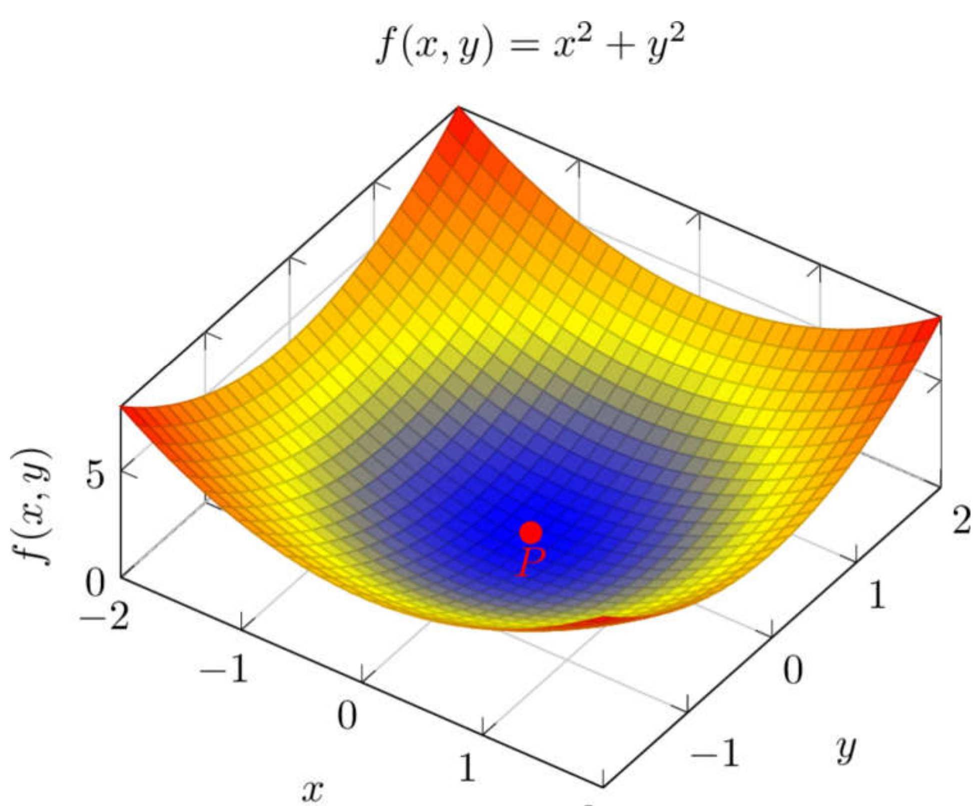
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Für die Definitheit haben wir zwei Möglichkeiten. Entweder das Kriterium von Sylvester oder das Bestimmen der Eigenwerte.

Da unsere Hesse Matrix eine Diagonalmatrix ist, können wir die Eigenwerte einfach auf der Hauptdiagonale ablesen - in diesem Fall ist es sogar nur einer:

$$\lambda_1 = 2 > 0$$

Weil 2 positiv ist, ist die Hesse-Matrix positiv definit, also haben wir ein Minimum in $P(0,0)$. Grafisch sieht das so aus:



Beispiel 2

Suchen wir nun die Extremstellen von:

$$f(x, y) = xy^2 - x$$

Schritt 1: Gradient bilden

Dazu bilden wir zuerst die ersten partiellen Ableitungen, um daraus den Gradienten zu bilden:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2 - x\right) \\ &= y^2 - 1 \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 - x\right) \\ &= 2xy \end{aligned}$$

Der Gradient ist dann:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f) &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schritt 2: Gradient Null setzen und Gleichungssystem lösen

Wenn wir dieses Gleichungssystem lösen wollen:

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & y^2 - 1 & = 0 \\ \mathrm{II} & 2xy & = 0 \end{array}$$

bietet sich erstmal die zweite Gleichung an. Denn hier bekommen wir zwei Fälle: Entweder x ist null oder y ist null. Für jeden dieser Fälle betrachten wir nun die erste Gleichung:

Fall 1: $x = 0$

Dann verändert sich die erste Zeile nicht, weil wir dort gar kein x haben. Wir können dennoch nach y umstellen:

$$y_1 = -1$$
$$y_2 = 1$$

Somit gibt es schon mal zwei Lösungen: $P_1(0, -1)$ und $P_2(0, 1)$. Weiter geht's damit zum zweiten Fall:

Fall 2: $y = 0$

Wenn wir das in Gleichung I einsetzen, bekommen wir eine falsche Aussage:

$$0^2 - 1 = 0$$

Daher gibt es in diesem Fall keine Lösung - wir haben insesamt nur unsere beiden kritischen Stellen P_1 und P_2.

Schritt 3: Hesse-Matrix

Jetzt müssen wir die zweiten partiellen Ableitungen bilden...

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 - 1\right) \\ &= 0 \\ f_{yx} = f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_x \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \\ &= 2y \\ f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} f_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \\ &= 2x \end{aligned}$$

...um die Hesse-Matrix aufzustellen:

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Definitheit der Hesse-Matrix untersuchen

Wir haben zwei Extremstellen, also müssen wir auch zwei Hesse-Matrizen untersuchen. Fangen wir mit $P_1(0,-1)$ an:

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier wollen wir die Eigenwerte bestimmen und starten mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_{H_f(0,-1)} &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4 \end{aligned}$$

Die Regel zum Bestimmen dieser Determinante findest du hier. Die Eigenwerte sind nun die Nullstellen davon:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_1 &= 2 \end{aligned}$$

Ein positiver und ein negativer Eigenwert - dann ist die Matrix indefinit und somit ist P_1 ein Sattelpunkt. Weiter geht's mit $P_2(0,1)$:

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier versuchen wir es über die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \chi_{H_f(0,1)} &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4 \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom ist also genau dasselbe wie eben. Somit haben wir erneut die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$ - unsere Matrix ist wieder indefinit.

Die Funktion $f(x,y) = xy^2 - x$ hat also zwei Sattelpunkte $P_1(0,-1)$ und $P_2(0,1)$.