

ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

Introduction à la méthode des éléments finis

Michel KERN¹

2004–2005

S3733 / S3735

¹INRIA, ROCQUENCOURT, BP 105, 78153 LE CHESNAY, Michel.Kern@inria.fr

Table des matières

1	Quelques exemples de problèmes aux limites	5
1.1	Exemples en thermique	5
1.2	Autres problèmes scalaires	8
1.2.1	Électrostatique	8
1.2.2	Hydrogéologie	9
1.2.3	Écoulement irrationnel	9
1.3	Élasticité linéaire	10
1.3.1	Équations générales	10
1.3.2	Le tenseur d'élasticité	12
1.3.3	Élasticité plane	13
2	Formulation variationnelle des problèmes aux limites	15
2.1	La formule de Green	16
2.2	Formulations variationnelles	17
2.2.1	Le Laplacien avec conditions de Dirichlet	17
2.2.2	Généralisation à d'autres problèmes	19
2.3	L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ et le théorème de Lax–Milgram	22
2.3.1	Dérivation faible	22
2.3.2	Définition et premières propriétés	23
2.3.3	Le théorème de trace, et l'espace $H_0^1(\Omega)$	25
2.3.4	Compléments	27
2.4	Le théorème de Lax–Milgram	28
2.5	Application aux problèmes aux limites	30
2.5.1	Le Laplacien avec conditions de Dirichlet	30
2.5.2	Extension à d'autres conditions aux limites	31
2.5.3	Coefficients variables	36
2.5.4	Le système de l'élasticité linéaire	37
3	Présentation de la méthode des éléments finis	41
3.1	La méthode d'approximation interne	41
3.2	Approximation par éléments finis P_1 pour le Laplacien	44
3.2.1	Espace d'approximation local	45
3.2.2	Description de l'espace d'approximation	46
3.3	Mise en oeuvre de la méthode	50
3.3.1	Assemblage du système linéaire	50
3.3.2	Calcul des matrices élémentaires	52

3.3.3	Prise en compte des conditions aux limites	55
3.4	Convergence	56
3.4.1	L'opérateur d'interpolation	56
3.4.2	Estimation de l'erreur	59
3.4.3	Illustration numérique	60
A	Espaces de Hilbert	63
A.1	Définitions et exemples	63
A.2	Propriétés des espace de Hilbert	64

Chapitre 1

Quelques exemples de problèmes aux limites

Nous présentons dans ce chapitre quelques problèmes modèles. Ces exemples seront issus des domaines classiques de la physique : thermique, électrostatique, hydrogéologie, mécanique. Nous n'avons bien entendu nullement l'intention de remplacer un traité de l'une quelconque de ces matières, mais simplement de motiver notre propos, et de montrer que les questions que nous examinerons par la suite sont susceptibles de nombreuses applications.

Pour des raisons de simplicité, nous commencerons par des exemples conduisant à des problèmes *scalaires*, pour passer ensuite aux exemples tirés de l'élasticité. Dans chaque cas, nous commencerons par rappeler la formulation physique du problème (dans un cadre simplifié), en précisant les lois de conservation en cause et les relations de comportement (nous nous placerons toujours dans des conditions où ces lois de comportement sont linéaires). Nous verrons comment on aboutit habituellement à une équation aux dérivées partielles, ainsi que les différentes conditions aux limites possibles. Enfin, nous montrerons comment, sous des hypothèses idéales (milieu homogène, ...) nous pouvons souvent retrouver un même problème modèle : l'équation de Laplace (ou de Poisson).

1.1 Exemples en thermique

Nous considérons un ouvert (connexe) $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ (en pratique, $d = 2$ ou 3), et nous notons Γ la frontière de Ω . Nous cherchons à déterminer la répartition de la température T (fonction des coordonnées $\mathbf{x} = (x, y, z)$) à l'intérieur de Ω , diverses conditions aux limites pouvant être prescrites sur Γ .

On exprime tout d'abord la *conservation de la chaleur* à l'intérieur d'un (sous-)ouvert quelconque \mathcal{D} de Ω : la chaleur cédée par \mathcal{D} est égale à la chaleur émise par les sources thermiques (notées q) contenues dans \mathcal{D} . En désignant par $\Phi(\mathbf{x})$ le vecteur flux de chaleur, le taux de chaleur traversant un élément de surface est $-\Phi \cdot \mathbf{n}$. Le bilan de chaleur à travers le bord du domaine considéré [23] s'écrit donc sous la forme

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \Phi \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

L'utilisation du théorème de la divergence (c'est l'une des formes de la formule de Green, nous y reviendrons en détail au chapitre 2) permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale

de volume, ce qui donne

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div} \Phi - q) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

Le domaine \mathcal{D} étant quelconque, nous obtenons donc la relation valable en tout point du domaine Ω :

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \Phi = q, \quad \text{dans } \Omega.$$

L'équation (1.1) est la forme *locale* (ou différentielle) de la conservation de la chaleur. Il s'agit d'une loi fondamentale de la physique. Il reste maintenant à relier le flux de chaleur Φ à la température T . C'est ce que l'on appelle une *loi de comportement*. Il est communément admis (dans un régime de températures « pas trop élevées ») que le flux de chaleur est *proportionnel au gradient de la température*. Il s'agit de la loi de Fourier. Dans un milieu supposé hétérogène (la loi dépend du point considéré) et anisotrope (les directions de l'espace ne sont pas équivalentes), cette loi suppose l'existence d'un tenseur $K(x, y, z)$, appelé *tenseur de conductivité thermique*, tel que :

$$(1.2) \quad \Phi = -K \operatorname{grad} T.$$

Le tenseur de conductivité est symétrique, et défini positif (comme conséquence du second principe de la thermodynamique [5]).

Dans le cas où le milieu est isotrope (aucune direction de l'espace ne joue un rôle privilégié), le tenseur de conductivité devient diagonal

$$K = kI$$

où k est une fonction strictement positive.

En insérant l'équation (1.2) dans (1.1), nous obtenons l'équation

$$(1.3) \quad -\operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) = q \quad \text{dans } \Omega.$$

En explicitant cette équation aux niveau des composantes, nous obtenons :

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = q, \quad \text{dans } \Omega,$$

et l'on voit que (dans le cas général où les éléments hors-diagonaux du tenseur de conductivité K sont non-nuls) les différentes dérivées partielles sont couplées.

Pour compléter la description du système, il faut préciser les conditions aux limites, qui traduisent l'interaction du système avec son environnement. Celles-ci peuvent prendre différentes formes :

Température imposée La température est imposée sur une partie Γ_D de la frontière :

$$(1.4) \quad T(x, y, z) = g_D(x, y, z) \quad \text{sur } \Gamma_D,$$

où g_D est une fonction donnée sur Γ_D . Dans la littérature mathématique, une telle condition aux limites porte le nom de *condition de Dirichlet*.

Flux imposé Le flux de chaleur est imposé sur une partie Γ_N de la frontière :

$$(1.5) \quad K \operatorname{grad} T \cdot n = g_N(x, y, z) \quad \text{sur } \Gamma_N,$$

où g_N est une fonction donnée sur Γ_N . Dans la littérature mathématique, une telle condition aux limites porte le nom de *condition de Neumann*.

Condition mixte Cette condition exprime que, sur une partie Γ_R de la frontière, la chaleur cédée par le système est proportionnelle à l'écart entre la température du système et celle du milieu extérieur. On obtient une condition du type :

$$(1.6) \quad K \operatorname{grad} T \cdot n + rT = g_R(x, y, z) \quad \text{sur } \Gamma_R,$$

où g_R est une fonction donnée sur Γ_R , et r est un coefficient d'échange (éventuellement variable en espace). Dans la littérature mathématique, une telle condition aux limites porte le nom de *condition de Robin* ou de Fourier.

Notons que Γ_D , Γ_N et Γ_R doivent constituer une *partition* de la frontière Γ , c'est-à-dire :

- en tout point du bord, une condition aux limites est prescrite : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$,
- une seule condition aux limites est prescrite en tout point du bord : $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \Gamma_D \cap \Gamma_R = \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$.

Par contre, il est possible que certaines des trois parties soient vides. Si, par exemple, $\Gamma = \Gamma_D$, on parle de problème de Dirichlet (non-homogène si $g_D \neq 0$). De même, si $\Gamma = \Gamma - N$, on parle de problème de Neumann.

Un exemple de domaine, avec les 3 parties de frontière, est illustré sur la figure 1.1.

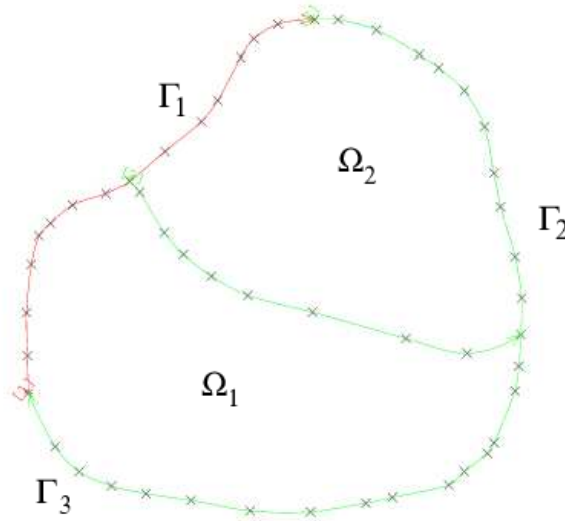


FIG. 1.1 – Domaine en deux dimensions

Finalement, le problème de déterminer la température dans l'ouvert Ω revient à résoudre le problème aux limites constitué de l'équation aux dérivées partielles (1.3) et des conditions aux limites (1.4), (1.5) et (1.6). Nous verrons au chapitre suivant dans quel mesure ce problème est mathématiquement bien posé, c'est-à-dire à quelles conditions sur les données K, q, g_D, g_N, g_R et r il admet une solution unique.

Remarque 1.1. Nous pouvons tout de suite noter que, dans le cas du problème de Neumann, il ne peut pas y avoir de solution unique, puisque les équations (1.3) et (1.5) ne font intervenir que les *dérivées* de la température. Celle-ci ne peut donc (au mieux) être déterminée qu'à une constante additive près.

Remarque 1.2. Comme nous l'avons annoncé, nous pouvons considérer des simplifications du modèle complet ci-dessus :

Milieu isotrope Dans ce cas, le tenseur de conductivité est diagonal. En passant aux composantes, l'équation (1.3) se réécrit :

$$-\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = q, \quad \text{dans } \Omega,$$

et cette fois les dérivées partielles sont découplées.

Milieu homogène (et isotrope) Si, de plus, la conductivité est indépendante du point, $k(x, y, z) = k$, l'équation aux dérivées partielles se réécrit

$$(1.7) \quad -\Delta T = f \quad \text{dans } \Omega$$

où nous avons posé $f = \frac{q}{k}$. L'équation (1.7) est l'équation de Poisson, et devient l'équation de Laplace en l'absence de source de chaleur volumique, c'est-à-dire si $q = 0$.

Remarque 1.3. Nous avons choisi de passer par la formulation (1.3), qui est bien adaptée pour présenter la méthode de éléments finis basée sur les éléments finis de Lagrange (voir les chapitres suivants). Il existe une autre possibilité, plus proche de la physique, et qui débouche sur une autre famille d'éléments finis : les éléments finis mixtes, dont l'étude déborde du cadre de ce cours. Cette formulation consiste ne plus éliminer le flux, comme nous l'avons fait, et à retenir les deux inconnues T et Φ , et les deux équations (1.1) et (1.2). Nous reviendrons sur cette formulation, dite *mixte* au chapitre suivant.

1.2 Autres problèmes scalaires

Dans cette section, nous présentons d'autres modèles qui conduisent à la même formulation qu'au paragraphe précédent.

1.2.1 Électrostatique

Nous cherchons à calculer le champ électrique dans un ouvert borné connexe de \mathbf{R}^3 , limité par un conducteur parfait. Dans le cas de l'électrostatique, les équations de Maxwell, s'écrivent

$$(1.8) \quad \begin{cases} \operatorname{div} D = \rho, \\ \operatorname{rot} E = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega.$$

Elles relient la densité de charge ρ au champ électrique E et à l'induction électrique D . On y ajoute une loi de comportement, par exemple

$$(1.9) \quad D = \varepsilon E$$

où ε est la permittivité diélectrique du milieu.

La seconde des équations ci-dessus implique (au moins localement) l'existence d'une fonction scalaire φ , le *potentiel électrique*, tel que $E = -\text{grad } \varphi$. En reportant cette relation dans la première des équations (1.8), et en tenant compte de la loi de comportement (1.9), il vient

$$(1.10) \quad -\text{div}(\varepsilon \text{grad } \varphi) = \rho,$$

La condition aux limites est donnée par $e \wedge n = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$, qui donne

$$\text{grad } \varphi \wedge n = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Cette relation implique que la dérivée tangentielle de φ sur Γ est nulle, donc que la fonction φ est constante sur Γ , et comme le potentiel est défini à une constante près, cette constante peut être choisie nulle. Finalement, la condition aux limites sur Γ est une condition de Dirichlet homogène.

Si le milieu est homogène, on retrouve l'équation de Poisson.

1.2.2 Hydrogéologie

Nous nous intéressons cette fois à l'écoulement de l'eau dans le sous-sol. Les roches constituent un milieu poreux, et l'écoulement de l'eau est régi par deux grandeurs : la *vitesse* u (dont le flux donne le débit à travers une surface) et la *charge piezométrique* H , qui correspond à une hauteur d'eau (ou à une pression, au facteur multiplicatif ρg près). Ces quantités sont reliées par deux lois :

Conservation de la masse Sous les hypothèses que le milieu est incompressible et saturé, la conservation de la masse d'eau dans un volume infinitésimal donne

$$\text{div } u = 0;$$

Loi de Darcy Il s'agit d'une loi expérimentale, due à l'ingénieur français Darcy, qui a déduit, à partir d'observations expérimentales effectuées sur les fontaines d'Aix en Provence, que la charge est proportionnelle à la différence de débit entre deux points. En termes modernes (différentiels!), cela veut dire que l'écoulement est produit par les gradients de charge :

$$u = -K \text{grad } H,$$

où K (qui peut être un tenseur) porte le nom de conductivité hydraulique. Nous retrouvons encore un système analogue aux équations (1.1), (1.2), et l'on peut bien entendu faire les mêmes constatations pour les conditions aux limites. Dans le cas présent, toutefois, le système d'équations ci-dessus est souvent couplé à une équation modélisant le transport d'un polluant par cet écoulement. Le moteur principal de ce transport étant la vitesse u , il est capital de la déterminer avec précision, et l'on conçoit aisément que la formulation mixte puisse être préférable, ce qui est souvent le cas.

1.2.3 Écoulement irrationnel

On considère l'écoulement d'un fluide parfait incompressible, supposé de plus irrationnel. La vitesse u du fluide vérifie les deux équations :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \text{div } u = 0, \\ \text{rot } u = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega,$$

la première équation exprimant l'incompressibilité, la seconde l'irrotationalité. Il existe alors (localement) un potentiel φ tel que :

$$u = \text{grad } \varphi,$$

et ce potentiel est solution de l'équation de Laplace :

$$(1.12) \quad \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On fait l'hypothèse qu'une partie du bord de Ω est une paroi, on a alors une condition de glissement $u \cdot n = 0$ sur Γ_1 . L'autre partie du bord est une surface de contact, et on a $u \cdot n = \psi$ sur Γ_2 . Les conditions aux limites sont donc :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= \psi \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Comme il n'y a que des conditions de Neumann, le potentiel n'est défini qu'à une constante près, ce qui n'empêche pas la vitesse d'être déterminée de façon unique.

1.3 Élasticité linéaire

Il existe bien entendu de très nombreuses références sur ce sujet (y compris les cours de l'école!). Nous avons utilisé principalement les ouvrages suivants : [9], [18], [8].

1.3.1 Équations générales

Le domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ représente un solide soumis à une force volumique (chargement) $f(\mathbf{x})$. Nous cherchons à déterminer le déplacement $u(\mathbf{x})$ du à ce chargement à l'équilibre.

Le déplacement d'un point matériel M_0 (dans une configuration de référence) sous l'action des forces extérieures \mathbf{f} est défini par $\mathbf{u} = \overrightarrow{M_0 M}$, où M est la position actuelle du point M_0 . On définit ensuite le *tenseur des déformations* (linéarisé) ε par

$$(1.14) \quad \varepsilon(u)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Comme au paragraphe précédent, nous écrivons ensuite l'équilibre d'une partie quelconque \mathcal{D} de Ω . Cela fait intervenir le *tenseur des contraintes* σ , défini implicitement en exprimant que la force exercée sur un élément de surface dS , de normale unitaire n est $TdS = \sigma n dS$.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} d\mathbf{x} = 0,$$

et en utilisant le théorème de la divergence (voir l'équation (2.2) au chapitre 2), on en obtient la forme ponctuelle

$$(1.15) \quad \text{div } \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où $\text{div } \sigma(\mathbf{u})$ est le vecteur de composantes

$$(\text{div } \sigma(\mathbf{u}))_j = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j}.$$

En passant aux composantes, l'équation (1.15) se réécrit :

$$(1.16) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous relierons maintenant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations. Une telle relation est encore une *loi de comportement*. Nous nous restreindrons ici à l'élasticité linéaire. Dans ce cadre, la relation entre ces deux tenseurs est linéaire, donc s'exprime elle-même à l'aide d'un tenseur d'ordre 4, appelé *tenseur d'élasticité* :

$$(1.17) \quad \sigma_{ij}(u) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad i, j \in 1, 2, 3.$$

Le fait que les tenseurs $\sigma(u)$ et $\varepsilon(u)$ sont symétriques entraîne des propriétés de symétrie sur les coefficients d'élasticité C_{ijkl} , et dans le cas général, il y a 21 coefficients distincts (voir le paragraphe 1.3.2). Nous reviendrons plus bas sur le cas particulier important d'un milieu isotrope, où il n'y a plus que 2 coefficients distincts.

Le problème consiste donc à déterminer un champ de déplacement u vérifiant les équations d'équilibre (1.15) et la loi de comportement (1.17). Bien entendu, ces équations doivent être complétées par des conditions aux limites convenables sur le bord Γ de Ω . Celles-ci peuvent être de deux types :

Déplacement imposé Sur une partie du bord Γ_D , le déplacement est une fonction donnée :

$$(1.18) \quad u = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D.$$

Une telle condition aux limites s'appelle une *condition essentielle*.

contrainte imposée Sur une partie du bord Γ_N , la contrainte normale est imposée :

$$(1.19) \quad \sigma(u) \cdot n = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

Cette condition aux limites s'appelle une *condition naturelle*.

Finalement, déterminer le déplacement u revient à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles (1.14), (1.15) et (1.17), avec les conditions aux limites (1.18) ou (1.19).

Notons tout de suite un lemme qui nous sera utile au chapitre suivant :

Lemme 1.1. *Soit u un champ de déplacement vérifiant $\varepsilon(u) = 0$. Il existe deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} tels que*

$$\forall \mathbf{x}, u(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}.$$

Preuve [18]. Pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, notons $\omega(x)_{ij} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. On a donc $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \varepsilon(x)_{ij} + \omega(x)_{ij}$. Calculons, pour $l \in \{1, 2, 3\}^3$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_l} \\ &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_l} \\ &= 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jl}}{\partial x_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Comme le tenseur ω est antisymétrique, il existe un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & -b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}$. En intégrant, on voit qu'il existe un autre vecteur $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}.$$

■

Remarque 1.4. Un tel champ de déplacement s'appelle un mouvement de corps rigide, et correspond bien entendu à un déplacement d'ensemble du solide considéré.

1.3.2 Le tenseur d'élasticité

Ce tenseur a été défini implicitement en (1.17). On montre (voir [8]) que ce tenseur vérifie les relations de symétrie suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij},$$

ce qui, comme nous l'avons annoncé, réduit le nombre de composants indépendants de 81 à 21. Ce nombre est encore plus réduit si le milieu considéré possède des symétries. Nous ne considérerons que le cas le plus simple d'un milieu isotrope, le cas général étant traité dans les références citées ci-dessus.

Un milieu isotrope est milieu dans lequel il n'existe pas de direction privilégiée. On montre que, dans ce cas, le tenseur d'élasticité ne dépend que de 2 coefficients (voir, par exemple [9]). On peut prendre, par exemple, les coefficients de Lamé :

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \lambda &= C_{1122} = C_{1133} = C_{2233}, \\ \mu &= C_{1212} = C_{1313} = C_{2323}, \end{aligned}$$

et on a alors

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Dans ce cas, la relation entre contraintes et déformations s'appelle la loi de Hooke et prend la forme :

$$(1.21) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \text{Tr } \varepsilon) \delta_{ij}$$

On peut relier les coefficients de Lamé à deux autres paramètres, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . On a les relations suivantes :

$$(1.22) \quad \begin{aligned} E &= \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \end{aligned}$$

Le module d'Young est un module de rigidité à l'allongement (dimension d'une force par unité de surface), et ν est lié à sa compressibilité (voir la discussion dans [9]). On montre que l'on a les inégalités suivantes ($\nu = 1/2$ correspond à un matériau incompressible) :

$$0 < E, \quad 0 < \nu < 1/2.$$

1.3.3 Élasticité plane

Nous allons examiner maintenant les simplifications qui se produisent dans des situations géométriques simplifiées, où l'on se ramène à un problème en deux dimensions. Il existe essentiellement deux situations : les déformations planes et les contraintes planes. Nous supposons dans toute cette section que le milieu est isotrope.

Déformations planes

On fait l'hypothèse que le solide est un cylindre, de génératrices parallèles à la direction Ox_3 , que le chargement (les forces extérieures f) est dans le plan Ox_1x_2 . Loin des extrémités du cylindre, le champ de déplacement se situe approximativement dans le plan x_1, x_2 . L'approximation des déformations planes consiste à dire que (exactement) $u_3 = 0$. Ceci implique $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$, et $\varepsilon_{i3} = 0$, $i = 1, 2, 3$. La loi de Hooke donne ensuite $\sigma_{ij,3} = 0$, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ et

$$(1.23) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

C'est cette relation qui tient lieu de loi de Hooke en déformations planes.

Le problème en déformations planes est donc de chercher le champ de déplacements $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ vérifiant :

- la condition d'équilibre (1.16) ;
- la loi de Hooke (1.23) ;
- des conditions aux limites appropriées.

Ce problème est plus simple que le cas général, puisqu'il faut seulement déterminer deux fonctions de deux variables, au lieu de trois fonctions de trois variables.

Contraintes planes

On suppose maintenant que les contraintes sont dans le plan x_1, x_2 : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33}$. On en déduit $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, $\varepsilon_{33} = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$, et

$$(1.24) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

On remarque que cette équation se réécrit sous la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\lambda^* \text{Tr } \varepsilon) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta},$$

où les indices « grecs » α et β prennent les valeurs 1 et 2, et où

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Les équations d'équilibre, et la loi de comportement, sont donc les mêmes qu'au paragraphe précédent, à condition de remplacer λ par λ^* .

Flexion d'une membrane

On considère ici une membrane infiniment mince, homogène et isotrope, occupant le domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, et soumise à un chargement transverse de densité $f(x_1, x_2)$. Les seules composantes non-nulles du tenseur des déformations sont $\varepsilon_{i3} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, pour $i = 1, 2$, et il en est de même du tenseur des contraintes, avec $\sigma_{i3} = 2\mu\varepsilon_{i3}$. L'équation d'équilibre (1.16) s'écrit alors simplement :

$$(1.25) \quad -2\mu\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega,$$

avec la condition aux limites $u = 0$ sur le bord Γ de Ω , si l'on suppose que la membrane est encastrée.

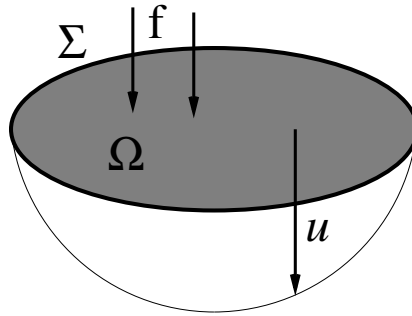


FIG. 1.2 – Flexion d'une membrane

On voit que nous retrouvons encore une fois l'équation de Laplace dans le cas d'un modèle élastique.

Chapitre 2

Formulation variationnelle des problèmes aux limites

Après avoir montré des exemples conduisant à des problèmes aux limites, nous allons introduire des outils permettant de les étudier tant du point de vue mathématique que numérique.

Dans ce chapitre, notre exemple de base sera l'équation de Laplace sur un ouvert Ω (borné, régulier) de \mathbf{R}^d (en pratique, $d = 1, 2$ ou 3), dont la frontière est notée Γ . Rappelons que, étant donné une fonction f (dans $L^2(\Omega)$ pour fixer les idées), on cherche une fonction u (à-priori dans $C^2(\overline{\Omega})$), telle que

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

(une des conséquences mineures de outils développés dans ce chapitre sera de pouvoir expliquer la raison du signe $-$ devant le Laplacien).

En dimension supérieure à 1, il n'est pas facile de démontrer que ce problème admet une solution dans le cas d'un ouvert Ω quelconque. On ne sait « calculer » explicitement cette solution que dans quelques cas particulier (géométries simples, séparation des variables). En fait, il a fallu attendre Hilbert, à la fin du XIX^e siècle pour obtenir un théorème d'existence satisfaisant.

Nous allons voir qu'une formulation différente, appelée « formulation variationnelle » où « formulation faible », couplée à des résultats abstraits d'analyse fonctionnelle permet d'énoncer un théorème général d'existence et d'unicité. Nous devons pour cela changer de point de vue et *affaiblir* la notion de solution. Il sera quelque peu surprenant de définir la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du second ordre comme une fonction ne possédant qu'une dérivée (et encore en un sens non-classique). Les justifications de ce qui peut apparaître comme un tour de passe-passe sont multiples :

- c'est dans ce cadre que l'on peut démontrer un résultat d'existence et d'unicité ;
- quand les données (et la géométrie) s'y prêtent, on retrouve les solutions classiques des EDP ;
- la formulation variationnelle est à la base de la méthode des éléments finis, qui est le sujet de ce cours, et que nous étudierons dans les chapitres suivants ;
- la formulation faible est en réalité plus proche de la physique que la formulation usuelle, puisqu'elle s'interprète comme le principe des travaux virtuels en mécanique.

Pour mener à bien ce programme, nous aurons besoin d'un certain nombre de préliminaires. Le premier est la formule de Green, et ses variantes. Nous aborderons ensuite la théorie abstraite, fondée sur les propriétés des espaces de Hilbert (nous en rappelons les principales dans l'annexe A), et c'est dans ce cadre que nous démontrerons le théorème de Lax–Milgram. Pour appliquer ce résultat fondamental, nous définirons, et donnerons les principales propriétés, de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. Nous pourrons alors appliquer ces outils aux exemples « concrets » du chapitre précédent, et à quelques autres. Nous conclurons en établissant le lien entre ces outils, le calcul des variations et le principe des travaux virtuels.

2.1 La formule de Green

Il serait plus juste de parler *des* formules de Green, dans la mesure où il en existe plusieurs variantes. Nous considérons un ouvert borné « régulier » $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, dont nous noterons le bord Γ . Nous ne chercherons pas à définir précisément la régularité exigée de Ω . Disons simplement que les domaines autorisés comprennent en particulier les domaines dont la frontière est polygonale (en dimension 2). En particulier, on peut définir une normale unitaire (sortante par convention), notée \mathbf{n} , continue presque partout. En dimension 2, \mathbf{n} est discontinue aux sommets du polygone, et en dimension 3 elle est discontinue aux sommets et aux arêtes du polyèdre. Par contre (mais nous reviendrons sur ce point), un domaine avec une fissure n'est pas localement d'un seul côté de la frontière et n'est pas régulier. Ces notions sont illustrées sur la figure 2.1.

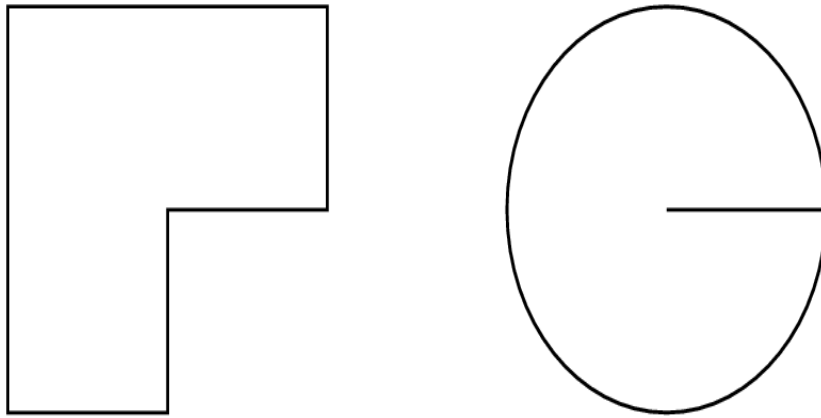


FIG. 2.1 – Domaine assez régulier (à gauche), et domaine avec une fissure (à droite). On peut définir la normale sortante pour le domaine de gauche, à l'exception des coins du polygone, on ne peut pas définir de normale sortante le long du rayon intérieur au cercle

Enfin, nous noterons $d\gamma$ la mesure induite par la mesure de Lebesgue sur Γ .

Nous partons de la formule de la divergence (appelée aussi formule de Gauss en dimension 2, et d'Ostrogradski en dimension 3), que nous admettrons sans démonstration. Soit $\mathbf{q} \in C^1(\Omega)^d$ un champ de vecteur défini sur Ω . On a :

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(x)$$

À partir de cette formule de base, nous allons voir que nous pouvons en obtenir plusieurs autres, qui nous seront plus directement utiles.

Par exemple, en combinant la formule précédente avec la formule d'analyse vectorielle

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}v) = v \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} v,$$

il vient

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\Gamma} v \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(x).$$

Un cas particulier que nous utiliserons au paragraphe suivant, est de prendre $\mathbf{q} = \operatorname{grad} u$, où u est fonction (régulière) définie sur Ω . La relation précédente devient dans ce cas :

$$(2.4) \quad - \int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx = - \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx - \int_{\Gamma} v \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(x).$$

Enfin, en prenant $\mathbf{q} = u \mathbf{e}_i$, où $u \in C_c^1(\Omega)$ et \mathbf{e}_i est le i^{e} vecteur de base, il vient

$$(2.5) \quad \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} u \mathbf{e}_i \cdot \operatorname{grad} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

2.2 Formulations variationnelles

2.2.1 Le Laplacien avec conditions de Dirichlet

Nous supposons que u est une solution de classe C^2 de (2.1). Multiplions cette équation par une « fonction test » $v \in C_c^1(\Omega)$ (fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω , donc en particulier nulle sur Γ). Appliquons la formule de Green (2.4), en notant que le terme de bord est nul grâce aux conditions aux limites vérifiées par v :

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Nous avons donc montré que, si u est une solution « assez régulière » de (2.1), alors u est solution du problème « variationnel »

$$(2.6) \quad \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega). \end{aligned}$$

Réciproquement, si u est une solution de classe C^2 de (2.6), en appliquant la formule de Green (2.4), il vient

$$\int_{\Omega} (\Delta u - f) \, dx = 0, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega),$$

ce qui entraîne bien que u est solution du problème original eq2.1.

Malheureusement, il est souvent difficile de démontrer l'existence d'une solution de classe C^2 à (2.6), et la réciproque que nous venons de démontrer n'a pas d'utilité pratique. Nous verrons qu'une idée importante dans la théorie des équations aux dérivées partielles a été d'élargir la notion de solution, et de *définir* une solution de (2.1) comme une fonction vérifiant (2.6), mais avec une régularité plus faible. Tout ceci est détaillé plus bas, voir (2.25) et le paragraphe 2.5.

Un problème tel que (2.6) s'appelle un problème variationnel, pour des raisons que nous allons maintenant exposer. Pour cela nous considérons la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx$$

et le problème de minimisation associé :

$$(2.7) \quad \text{minimiser } J \text{ sur l'espace vectoriel } E,$$

avec $E = \{u \in C^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$.

Il s'agit d'un problème de calcul des variations en dimension n d . Le cours de première année de l'École [17] considère le cas $d = 1$. Les méthodes sont formellement les mêmes en dimension d quelconque : on calcule le gradient de J pour obtenir une condition nécessaire d'extremum. C'est l'équation d'Euler du problème, et nous verrons que c'est justement le problème (2.6). La difficulté, que nous ne pourrions résoudre que par le passage par les espaces de Sobolev, est de montrer que le minimum est atteint.

Pour le moment, nous raisonnerons de manière formelle, sans nous soucier des justifications portant sur la régularité des fonctions. Pour minimiser J , il est naturel de calculer sa différentielle, et donc de commencer par calculer $J(u + v) - J(u)$:

$$\begin{aligned} J(u + v) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad}(u + v)|^2 - |\text{grad } u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f(u + v) - f u \, dx \\ &= \int_{\Omega} \text{grad } u \, \text{grad } v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 \, dx \end{aligned}$$

Le premier terme est linéaire par rapport à v , et le second tend manifestement vers 0 avec v . Par conséquent,

$$J'(u)v = \int_{\Omega} \text{grad } u \, \text{grad } v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx$$

et le problème (2.6) n'est autre que l'équation d'Euler du problème de minimisation (2.7). Le terme variationnel fait donc référence au calcul des variations. Parce que la fonctionnelle J est quadratique, nous pouvons démontrer que l'équation d'Euler est équivalente au problème de minimisation.

Théorème 2.1. *Une fonction u réalise le minimum global de J sur E si et seulement si u est solution de l'équation variationnelle (2.6).*

Preuve. Le caractère nécessaire découle des résultats généraux sur la minimisation (voir par exemple le cours de Maths 1 du premier semestre).

Pour voir le caractère suffisant, notons u la solution de l'équation variationnelle, et calculons $J(u + v)$, pour $v \in E$. En reprenant le calcul précédent l'énoncé du théorème nous voyons que, si u est solution de (2.6),

$$J(u + v) - J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 \, dx \geq 0.$$

Cette inégalité n'est une égalité que si $\text{grad } v = 0$, donc si v est constante sur Ω , et puisque $v = 0$ sur Γ , v est nulle. u réalise donc le minimum global strict de J sur E . ■

Remarque 2.1. Il faut bien comprendre la signification du théorème 2.1, et en particulier ses limites. Il se contente d'établir que deux problèmes sont équivalents, sans prouver que l'un ou l'autre a une solution.

Telle que nous l'avons présenté, la formulation variationnelle (2.6) ne présente pas de grand avantage par rapport à la formulation habituelle (2.1). L'intérêt de cette formulation vient de ce qu'elle garde un sens même si la fonction u n'est pas deux fois différentiable. Il suffit que u et v soient des fonctions de classe C^1 pour que (2.6) garde un sens. Par conséquent nous pouvons considérer le problème variationnel

$$(2.8) \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in E \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in E. \end{array}$$

La difficulté est qu'il n'est pas possible de démontrer que ce problème admet une solution, essentiellement parce que l'espace X n'est pas *complet*. Dans la section suivante, nous allons introduire un espace de fonction qui est le complété de X pour la norme $L^2(\Omega)$ (la définition sera différente).

2.2.2 Généralisation à d'autres problèmes

Comme nous allons le voir dans ce paragraphe, la méthode que nous venons de voir sur un exemple se prête à de nombreuses variations.

Coefficients variables

Commençons par le problème de thermique décrit au chapitre 1 (voir l'équation (1.3)). Nous prendrons ici un milieu isotrope (i.e. le tenseur de conductivité K est un scalaire, pour le cas général, voir le paragraphe 2.5.3), et nous nous restreindrons pour simplifier à une condition de Dirichlet homogène sur tout le bord Γ . En multipliant (1.3) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et en appliquant la formule de Green (2.3) (avec $\mathbf{q} = -K \text{grad } u$), il vient, compte-tenu de la condition aux limites sur v :

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} (K \text{grad } u) \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} q v \, dx, \quad \forall v \in X.$$

Le problème variationnel associé est naturellement

$$(2.10) \quad \text{Trouver } u \in X \text{ vérifiant (2.9).}$$

La formulation variationnelle (2.9) est encore l'équation d'Euler d'un problème de minimisation. La fonctionnelle associée est

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|K \text{grad } u\|^2 \, dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx$$

Cette remarque montre que, pour que J soit une fonction convexe de u , il faut que la matrice K soit définie positive en tout point. En fait, nous verrons au paragraphe 2.5 que cette condition n'est pas tout à fait suffisante, et nous donnerons les hypothèses précises sur la conductivité K et la source de chaleur q , sous lesquelles le problème (2.10) admet une solution unique.

Conditions aux limites mêlées

Supposons maintenant que la frontière Γ est partitionnée en deux parties : Γ_N (avec une condition de Neumann (1.5) et Γ_R (avec une condition de Robin (1.6)).

En suivant la même méthode, mais en choisissant seulement $v \in C^1(\Omega)$ (sans imposer de condition aux limites), il vient, si u est solution de (1.3), (1.5), (1.6) :

$$\int_{\Omega} (K \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} v \, dx - \int_{\Gamma} (K \operatorname{grad} u) \cdot n \, v \, d\gamma = \int_{\Omega} q v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En utilisant les conditions aux limites (1.5), et (1.6) nous pouvons réécrire l'intégrale de bord, et obtenir

$$(2.11) \quad \int_{\Omega} (K \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\Gamma_R} r u v \, d\gamma = \int_{\Omega} q v \, dx + \int_{\Gamma_N} g_N v \, d\gamma + \int_{\Gamma_R} g_R v \, d\gamma, \quad \forall v \in C^1(\Omega).$$

Signalons au passage que le problème associé à (2.11) est encore l'équation d'Euler d'un problème de minimisation, posé sur $C^1(\Omega)$, dont la fonctionnelle est

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|K \operatorname{grad} u\|^2 \, dx + \int_{\Gamma_R} r |u|^2 \, d\gamma - \int_{\Omega} f u \, dx - \int_{\Gamma_N} g_N u \, d\gamma - \int_{\Gamma_R} g_R u \, d\gamma.$$

Encore une fois, nous préciserons au paragraphe 2.5 des hypothèses sur K, r et les sources q, g_R, g_N sous lesquelles le problème précédent admet une solution unique.

Problème de Neumann pur

Nous pouvons tout de suite remarquer un cas particulier dans lequel il ne saurait y avoir unicité : si $\Gamma_R = \emptyset$, le problème initial est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) = q & \text{dans } \Omega, \\ K \operatorname{grad} u \cdot n = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On voit que u est solution si et seulement si $u + C$ est solution (où C est une constante réelle arbitraire). Par ailleurs, si une solution existe, en prenant $v = 1$ dans la formulation faible (2.11) (toujours dans le cas $\Gamma_R = \emptyset$), nous obtenons

$$\int_{\Omega} q \, dx + \int_{\Gamma_N} g_N \, d\gamma = 0,$$

qui constitue une condition nécessaire de compatibilité que doivent vérifier les données q et g_N pour qu'il puisse exister une solution. Nous verrons au paragraphe 2.5 que cette condition est suffisante (en plus des hypothèses générales sur les coefficients) pour qu'il existe une solution, et que celle-ci est unique à une constante additive près.

Élasticité linéaire

Il s'agit d'un exemple d'une grande importance pratique, puisqu'il correspond aux situations de calcul des structures. C'est également, historiquement, pour traiter ce type de problème que la méthode des éléments finis a d'abord été mise en oeuvre par les ingénieurs. Nous

considérons le problème d'élasticité linéaire du chapitre 1, dont nous rappelons les équations (écrites avec la convention de sommation d'Einstein) :

$$(2.12a) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(2.12b) \quad \sigma_{ij}(u) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad i, j \in 1, 2, 3,$$

$$(2.12c) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D,$$

$$(2.12d) \quad \sigma(u).n = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

Il sera naturel de travailler dans le sous-espace de $C^1(\Omega)$ formé des fonctions qui s'annulent sur Γ_D , autrement dit qui vérifient les conditions aux limites *essentiell*es.

En multipliant l'équation (2.12a) par une fonction $v_i \in C^1(\Omega)$ qui s'annule sur Γ_D , en sommant et en utilisant la formule de Green (2.3), il vient

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) + \sum_{i=1}^d f_i v_i dx - \int_{\Gamma_N} (\sigma(u).n) v d\gamma = 0, \quad \forall v.$$

Du fait de la symétrie de $\sigma(\mathbf{u})$, le premier terme se réécrit $\int \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$. En utilisant (2.12d) pour le terme de bord, et (2.12b), nous obtenons finalement

$$(2.13) \quad \int_{\Omega} \sum_{ijkl} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \mathbf{v} d\gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in H_D^1(\Omega).$$

Dans le cas d'un milieu isotrope, l'expression précédente se simplifie (en notant $\varepsilon(\mathbf{u}).\varepsilon(\mathbf{v}) = \sum_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$) :

$$(2.14) \quad \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}).\varepsilon(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \mathbf{v} d\gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in H_D^1(\Omega).$$

De la même façon qu'aux paragraphes précédents, nous pouvons introduire une fonctionnelle J dont (2.13) (où (2.14)) et l'équation d'Euler. Dans le cas isotrope,

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})^2 dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \mathbf{u} d\gamma.$$

Dans les trois cas précédents, nous avons vu que l'équation variationnelle (2.6), (2.9), (2.11) ou (2.13) se mettait sous la forme « abstraite »

$$\text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V,$$

où

- V est un espace de fonctions (en pratique, V devra être un espace de Hilbert, donc un sous-espace d'un espace de Sobolev) ;
- a est une forme bilinéaire définie sur $V \times V$;
- l est une forme linéaire sur définie sur V .

Au paragraphe suivant, nous allons examiner cette situation abstraite en détails, en donnant des hypothèses générales sur a et l pour que le problème précédent ait une solution unique. Auparavant, nous allons donner les principales propriétés des espaces de Sobolev.

2.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ et le théorème de Lax–Milgram

Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans la théorie variationnelle des équations aux dérivées partielles, ainsi que dans la théorie des éléments finis.

2.3.1 Dérivation faible

Nous allons d'abord étendre la notion de dérivée (partielle), en partant de la formule de Green (2.5).

Définition 2.1. Soit $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Une fonction w_i est la i^e dérivée partielle faible de v si

$$(2.15) \quad \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Notons deux propriétés immédiates de dérivées faibles. La première dit que cette notion généralise bien la notion de dérivée partielle classique, la seconde que l'on peut parler de la dérivée faible d'une fonction.

Proposition 2.1. – Si v admet une dérivée partielle faible, celle-ci est unique (à un ensemble de mesure nulle près).
– Si $v \in C^1(\Omega)$, alors les dérivées partielles de v sont les dérivées partielles faibles de v .

Preuve. – Par linéarité, il suffit de montrer que si une fonction w vérifie

$$\int_{\Omega} w \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

alors $w = 0$ presque partout. or ceci est un des résultats de base de la théorie de l'intégration.

– Cela résulte de la définition de la dérivée faible, de la formule de Green (2.5) et du point précédent. ■

Grâce au second point du théorème 2.1, nous noterons de les dérivées faibles de la même façon que les dérivées partielles classiques.

Examinons maintenant quelques exemples.

Exemple 2.1.

En dimension 1, la fonction valeur absolue $v : x \rightarrow |x|$ n'est pas dérivable au sens classique.

Pourtant la fonction w définie par $w(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est la dérivée faible de v , comme on le vérifie par une simple intégration par parties.

Exemple 2.2.

La fonction w de l'exemple précédent ne possède pas de dérivée faible. Si cela était le cas, en notant z cette dérivée, on aurait

$$\int_{\mathbf{R}} v(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbf{R}} z(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{R}).$$

Le premier membre de cette égalité vaut $-2\varphi(0)$, et on aurait donc

$$\int_{\mathbf{R}} z(x) \varphi(x) dx = 2\varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{R}).$$

En prenant φ à support dans \mathbf{R}^+ (disjoint de 0), on en conclut $z = 0$ presque partout sur \mathbf{R}^+ , et de même sur R^- . Mais alors, il reste $0 = 2\varphi(0)$, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{R})$, ce qui est absurde.

En fait, pour définir la dérivée de fonctions telles que v , on doit faire appel à la théorie des distributions, que nous n'utiliserons pas dans ce cours. Pour une introduction à cette théorie, voir[21].

Le prochain exemple nous sera utile lors de la construction des espaces d'éléments finis, et également dans le traitement des problèmes de transmission.

Exemple 2.3.

Soit un ouvert Ω partitionné en deux sous-ouverts Ω_1 et Ω_2 : $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$, et notons $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ (c'est la situation illustrée à la figure 1.1). Soit $v \in C^0(\Omega)$, notons v_1 et v_2 les restrictions de v à Ω_1 et Ω_2 , et supposons que $v_k \in C^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. La fonction w_i définie par

$$w_i = \begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} & \text{sur } \Omega_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_i} & \text{sur } \Omega_2 \\ \text{arbitrairement} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est la k^e dérivée partielle faible de v sur Ω .

Pour le démontrer, fixons i , et une fonction $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega_1} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_2} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \\ &= - \int_{\Omega_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\Gamma} v_1|_{\Gamma} \varphi n_i d\gamma - \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\Gamma} v_2|_{\Gamma} \varphi n_i d\gamma, \\ &= - \int_{\Omega} w_i \varphi dx + \int_{\Gamma} v_1|_{\Gamma} \varphi n_i d\gamma + \int_{\Gamma} v_2|_{\Gamma} \varphi n_i d\gamma. \end{aligned}$$

La somme des deux intégrales est nulle car, d'une part v est continue sur Ω tout entier, et d'autre part, $n_1 + n_2 = 0$.

2.3.2 Définition et premières propriétés

Nous pouvons maintenant définir l'espace de Sobolev :

Définition 2.2. L'espace de Sobolev d'ordre 1 est

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, d \right\}$$

où les dérivées partielles sont prises au sens faible.

Proposition 2.2. L'application suivante définit un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$:

$$(2.16) \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega)^2.$$

Preuve. Notons tout d'abord que pour $(u, v) \in H^1(\Omega)^2$, les deux intégrales intervenant dans la définition de (u, v) sont finies.

Il est clair que l'application $(u, v) \rightarrow (u, v)_1$ est bilinéaire (point i de la définition A.2), symétrique (point ii de la définition) et également que $(u, u)_1 \geq 0, \forall u \in H^1(\Omega)$.

Enfin, si $(u, u)_1 = 0$, en particulier $\int_{\Omega} u^2 dx = 0$, et donc $u = 0$ dans $L^2(\Omega)$. ■

On peut donc définir une norme sur $H^1(\Omega)$. On notera donc

$$(2.17) \quad \|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} u^2 + |\text{grad } u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Exemple 2.4.

Soit $\Omega = B(0, 1)$ (la boule unité de \mathbf{R}^d), et soit $v(x) = |x|^\alpha$.

Notons que

$$\int_{\Omega} |x|^{2\alpha} dx = c_d \int_0^1 r^{2\alpha+d-1} dr$$

(c_d est le volume de la boule unité de \mathbf{R}^d), de sorte que

$$v \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \alpha > -d/2.$$

Par ailleurs, les dérivées partielles faibles de v sont données par $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$, d'où $|v(x)| = |\alpha| |x|^{\alpha-1}$ et

$$\int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx = c_d \int_0^1 |\alpha|^2 r^{2(\alpha-1)+d-1} dr.$$

Cette intégrale est finie si et seulement si $\alpha > 1 - d/2$, qui est finalement la condition pour que $v \in H^1(\Omega)$.

Le résultat suivant montre l'intérêt d'avoir introduit l'espace de Sobolev (le résultat correspondant pour l'espace $C^1(\Omega)$ est faux).

Théorème 2.2. *L'espace $H^1(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\text{grad } u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^d$ respectivement. Comme $L^2(\Omega)$ est complet (théorème de Riesz), ces suites convergent. Notons u et (v_1, \dots, v_d) leurs limites respectives. Pour conclure que $u \in H^1(\Omega)$,

nous allons montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i, \forall i = 1, \dots, d$.

Fixons $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Comme chaque u_n est dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier membre converge vers $\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ et le second vers $-\int_{\Omega} v_i \varphi dx$, par continuité du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. On en déduit que, pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx,$$

par conséquent $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans $H^1(\Omega)$. ■

Il est clair que $C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ (puisque les dérivées classiques sont aussi des dérivées faibles), et que l'inclusion est stricte. En dimension 1, on démontre (voir, par exemple, [3]) que les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont continues ($H^1(a, b) \subset C^0(a, b)$), c'est bien ce que l'on constate à l'exemple 2.4, puisque pour $d = 1$, la condition $\alpha > 1/2$ entraîne bien que v est continue).

Par contre, en dimension supérieure à 1, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continues, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.5.

Soit $\Omega = B(0, R) \subset \mathbf{R}^2$, avec $R < 1$. La fonction $v : x \rightarrow \log\left(\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$ est dans $H^1(\Omega)$.

En effet, on vérifie tout d'abord que $v \in L^2(\Omega)$. Ensuite, **Maple** révèle que

$$\text{grad } v(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2) \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}, \frac{y}{(x^2 + y^2) \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)} \right)$$

puis que

$$\int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx = 2\pi \int_0^R \frac{1}{r \ln r^2} dr = \frac{-2\pi}{\ln R} < \infty.$$

Exemple 2.6.

Plaçons nous dans la situation de l'exemple 2.3. Prenons $(v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, et définissons v par

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ v_2(x) & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Le calcul mené à l'exemple cité montre que si v est continue sur Ω (donc à la traversée de Γ), alors $v \in H^1(\Omega)$.

2.3.3 Le théorème de trace, et l'espace $H_0^1(\Omega)$

Dans la mesure où nous cherchons à étudier des problèmes aux limites, nous aurons besoin de connaître le comportement des fonctions de $H^1(\Omega)$ au voisinage du bord Γ de Ω . Il n'est pas évident que cette question ait un sens : les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont définies presque partout (plus précisément, en tant qu'éléments de $L^2(\Omega)$ ce sont des classes d'équivalence de fonctions, pour la relation d'équivalence où l'on identifie des fonctions égales presque partout). Or le bord Γ est une « variété » de dimension $d - 1$, si $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ (nous ne définirons pas ce qu'est une variété. Disons simplement que dans le cas qui nous intéresse, il s'agit de la généralisation d'une surface dans \mathbf{R}^3 . Par exemple, si $\Omega = \mathbf{R}_+^d$, $\Gamma = \mathbf{R}^{d-1}$). En particulier, Γ est de mesure nulle, et il n'est pas possible de définir la restriction d'une fonction quelconque de $L^2(\Omega)$ à Γ . Toutefois, la régularité supplémentaire des fonctions de $H^1(\Omega)$ permet de définir cette restriction. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3 (de trace). *Soit Ω un ouvert borné régulier, de frontière Γ . On définit l'application trace γ_0*

$$(2.18) \quad \begin{aligned} H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^2(\Gamma) \cap C(\overline{\Gamma}) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, encore notée γ_0 . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$(2.19) \quad \|v|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème, qui est quelque peu technique, sans être réellement difficile (voir par exemple [1] ou [3]).

Comme nous l'avons annoncé, ce théorème nous permet de parler de la valeur (on dit généralement la trace) d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur Γ .

À l'aide du théorème précédent (et d'un argument de densité) on démontre que la formule de Green (2.3) s'étend au cas où les fonctions \mathbf{q} et v sont éléments de $H^1(\Omega)$:

$$(2.20) \quad \forall u \in H^1(\Omega), \forall \mathbf{q} \in H^1(\Omega)^d, \int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\Gamma} v \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(x).$$

Il est naturel de vouloir identifier le noyau et l'image de l'application trace γ_0 . Il est usuel de noter $H_0^1(\Omega)$ le noyau de γ_0 . Informellement, mais cette intuition est fondamentale, $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ « qui s'annulent sur le bord ». Une propriété importante de $H_0^1(\Omega)$ est la suivante :

Proposition 2.3. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables, et à support compact dans Ω , est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Puisque $H_0^1(\Omega) = \gamma_0^{-1}(0)$, et que l'application trace est continue, $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc un espace de Hilbert.

Nous admettons la deuxième partie de la proposition. ■

Il est plus délicat de caractériser l'image de γ_0 dans $L^2(\Gamma)$. Contentons nous de signaler que cette application *n'est pas surjective*.

Concluons cette section par une autre propriété utile de l'espace $H_0^1(\Omega)$, qui sera utile dans l'étude des problèmes avec une condition aux limites de Dirichlet, et dont nous admettons la démonstration (voir [1], [3]).

Lemme 2.1 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^d . Il existe une constante $C_P > 0$ telle*

$$(2.21) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |v(x)|^2 \, dx \leq C_P \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, dx.$$

Une conséquence de ce résultat est que l'on peut définir sur $H_0^1(\Omega)$ une norme plus simple que la norme de $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.4. *La semi-norme définie sur $H_0^1(\Omega)$ par*

$$(2.22) \quad |v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$

Preuve. Il est clair que $|v|_{H_0^1(\Omega)}$ définit bien une semi-norme. Il reste à vérifier que c'est bien une norme (c'est-à-dire que $|v|_{H_0^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow v = 0$, ainsi que l'équivalence des normes).

La première propriété résulte de ce que les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont nulles sur Γ . En effet, si $|v|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, $\nabla v = 0$ (presque partout) sur (chaque composante connexe de) Ω . v est donc constante (sur chaque composante connexe), mais elle est nulle au bord, donc ne peut être qu'identiquement nulle.

En ce qui concerne l'équivalence des normes, nous devons montrer qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), C_1 |v|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 |v|_{H_0^1(\Omega)}.$$

La première inégalité est claire, avec $C_1 = 1$. La seconde est une conséquence de l'inégalité de Poincaré (2.21), avec $C_2 = \sqrt{C_P + 1}$, puisque

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 dx \leq (C + 1) \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

■

2.3.4 Compléments

Nous donnons dans ce paragraphe des propriétés supplémentaires des espaces de Sobolev, dont nous aurons besoin de façon accessoire dans la suite.

La première est un résultat de compacité, qui est parfois utile pour démontrer des résultats de coercivité pour les problèmes aux limites (voir section 2.5.2).

Théorème 2.5 (de Rellich). *Si Ω est un ouvert borné, l'injection canonique de $H^1(\omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est **compacte**. Autrement dit, étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^1(\Omega)$ bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut en extraire une sous suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2(\Omega)$.*

Nous admettons ce théorème. Pour la démonstration, voir [3].

Nous aurons aussi besoin plus loin d'un espace de Sobolev d'ordre plus élevé que $H^1(\Omega)$. Pour cela, nous devons définir des dérivées faibles d'ordre plus grand que 1. Étant donné un *multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, nous noterons pour une fonction v régulière

$$\partial^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x),$$

et nous appelons cette quantité une *dérivée partielle d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$* . Avec cette notation, nous dirons qu'une fonction $v \in L^2(\Omega)$ est m fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles faibles d'ordre $m - 1$ sont faiblement dérivables au sens de la définition 2.1. Remarquons que grâce au théorème de Schwarz, il n'est pas nécessaire d'indiquer l'ordre des dérivations.

Définition 2.3. L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ (m entier) est défini par

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}.$$

Le résultat suivant se démontre comme le théorème 2.2.

Proposition 2.4. *Muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

et de la norme $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{(u, u)}$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2.4 Le théorème de Lax–Milgram

Il s'agit d'un résultat abstrait relatif aux espaces de Hilbert. Nous le présentons dans cette section car, dans ce cours, nous l'utiliserons seulement quand l'espace de Hilbert est une espace de Sobolev ($H^1(\Omega)$ ou l'un de ses sous-espaces).

Nous nous donnons donc un espace de Hilbert V , et nous notons $(., .)$ le produit scalaire sur V , et $\|.\|_V$ la norme associée. Nous considérons un problème variationnel abstrait du type de ceux que nous avons vu à la section 2.2 :

$$(2.23) \quad \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

- i) L est une forme linéaire continue sur V : L est une application linéaire de V dans \mathbf{R} , et il existe $C > 0$ telle que $\forall v \in V, |L(v)| \leq C \|v\|_V$.
- ii) a est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$: les deux applications partielles $w \rightarrow a(w, v)$ et $v \rightarrow a(w, v)$ sont linéaires de V dans \mathbf{R} , et il existe $M > 0$ telle que $\forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$;
- iii) a est coercive : il existe $\alpha > 0$ telle que $\forall u \in V, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$;

Nous allons voir que la coercivité de a est essentielle pour pouvoir résoudre (2.23)

Théorème 2.6. *Sous les hypothèses ci-dessus, le problème (2.23) admet une unique solution $u \in V$. Cette solution vérifie l'estimation*

$$(2.24) \quad \|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha} C.$$

Preuve(cf. [4]). En utilisant le théorème de Riesz, nous allons introduire un opérateur linéaire sur V , et montrer que notre problème est équivalent à une équation linéaire dans V . Nous montrerons ensuite, en utilisant le théorème du point fixe de Banach que cette équation a une solution unique, qui vérifie (2.24).

Tout d'abord, d'après le théorème de Riesz A.2, il existe $f \in V$, tel que

$$L(v) = (f, v), \forall v \in V.$$

Considérons maintenant l'application $v \rightarrow a(w, v)$, $w \in V$ étant fixé. Toujours d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique de V , que nous pouvons noter $A(w)$ tel que

$$a(w, v) = (A(w), v), \forall v \in V.$$

Notre problème variationnel se met donc sous la forme d'une équation dans V : $A(u) = f$. Nous allons maintenant étudier les propriétés de l'application $w \rightarrow A(w)$. Il est facile de voir que A est un opérateur linéaire sur V (une application linéaire $V \rightarrow V$). En effet, par définition $A(\alpha w + \beta z)$ vérifie, pour tout $v \in V$

$$(A(\alpha w + \beta z), v) = a(\alpha w + \beta z, v) = \alpha a(w, v) + \beta a(z, v) = \alpha (A(w), v) + \beta (A(z), v),$$

ce qui démontre la linéarité de A .

Notons maintenant que l'équation (linéaire) $Au = f$ peut se mettre, pour $\rho > 0$ à choisir, sous la forme du problème de point fixe

$$u - \rho(Au - f) = u,$$

qui est équivalent au problème initial.

Nous allons vérifier que l'on peut choisir ρ de façon que l'application $T : w \rightarrow w - \rho(Aw - f)$ soit strictement contractante. Calculons

$$T(w) - T(w') = w - \rho(Aw - f) - w' - \rho(Aw' - f) = w - w' - \rho A(w - w'),$$

puis

$$\begin{aligned} \|T(w) - T(w')\|_V^2 &= \|w - w'\|_V^2 + \rho^2 \|A(w - w')\|_V^2 - 2\rho(A(w - w'), w - w') \\ &= \|w - w'\|_V^2 + \rho^2 \|A(w - w')\|_V^2 - 2\rho a(w - w', w - w') \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|w - w'\|_V^2. \end{aligned}$$

Si nous choisissons (par exemple) $\rho = \frac{\alpha}{M^2}$, nous obtenons $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{M^2} < 1$, de sorte que l'application T est strictement contractante. D'après le théorème du point fixe de Banach, T admet un unique point fixe, qui est bien solution du problème variationnel (2.23).

L'estimation (2.24) s'obtient en prenant $v = u$ dans la formulation variationnelle, ce qui donne

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq M \|u\|_V,$$

d'où l'inégalité cherchée. ■

Quand la forme bilinéaire est symétrique ($a(w, v) = a(v, w)$, pour tous $(v, w) \in V^2$), , ce qui sera le cas de la plupart des exemples que nous examinerons, nous pouvons améliorer le résultat précédent. Dans ce cas, le problème variationnel est l'équation d'Euler d'un problème de minimisation. Introduisons la fonctionnelle J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Théorème 2.7. *Nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème 2.6. Soit u la solution du problème variationnel (2.23). u est l'unique point réalisant le minimum de la fonctionnelle J .*

Réciproquement, si u minimise J , alors u est l'unique solution de (2.23).

Preuve. La preuve est analogue au calcul que nous avons fait avec le Laplacien à la section 2.2.1. Si u est solution de (2.23), alors pour tout $v \in V$, nous avons grâce à la symétrie de a :

$$J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \geq J(u),$$

et u minimise J sur V .

Réciproquement, supposons que u minimise J sur V . Définissons $j(t) = J(u + tv)$, qui est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui atteint son minimum en 0. On a donc $j'(0) = 0$, et l'on calcule

$$j(t) = J(u) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) + ta(u, v) - tL(v)$$

soit

$$j'(t) = ta(v, v) + a(u, v) - L(v)$$

de sorte que la condition $j'(0) = 0$ est exactement la formulation variationnelle (2.23). ■

Avant d'appliquer ce théorème à des exemples de problèmes aux limites, il est instructif d'examiner ce qui se passe quand V est de dimension finie. Pour simplifier, nous supposons que a est symétrique.

Remarque 2.2. Dans le cas où V est un espace de dimension finie (c'est-à-dire un espace euclidien), la situation se simplifie considérablement. Tout d'abord, à la forme bilinéaire a est associée une matrice A (c'est l'opérateur qui intervient dans la preuve précédente). Toutes les formes linéaires et bilinéaires sont automatiquement continues, et seule reste l'hypothèse de coercivité. Cette hypothèse se réécrit :

$$\text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } (Au, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \text{ pour tout } u \in V.$$

Cette condition signifie simplement que la plus petite valeur propre de A est strictement positive, donc que A est injective. En dimension finie, A est donc bijective, et nous retrouvons dans ce cas le fait bien connu qu'une matrice symétrique et définie positive est inversible.

2.5 Application aux problèmes aux limites

Nous revenons sur les problèmes que nous avons commencé à étudier à la section 2.2. Nous allons montrer que, à condition de se placer dans le cadre des espaces de Sobolev, ces problèmes ont tous une solution. Ensuite, nous examinerons (brièvement) liens de cette *solution faible* avec les solutions classiques (c'est-à-dire de classe C^2). Commençons, comme au paragraphe 2.2.1, par le Laplacien.

2.5.1 Le Laplacien avec conditions de Dirichlet

Nous reprenons le problème (2.8), mais en remplaçant l'espace X par $H_0^1(\Omega)$:

$$(2.25) \quad \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} &- V = H_0^1(\Omega), \\ &- a(w, v) = \int_{\Omega} \text{grad } w \cdot \text{grad } v \, dx, \quad \forall (w, v) \in V^2, \\ &- L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

nous voyons que (2.25) rentre dans le cadre des problèmes variationnels abstraits que nous avons étudiés au paragraphe 2.4. Il reste à vérifier les hypothèses du théorème de Lax–Milgram 2.6.

Proposition 2.5. *Si l'ouvert Ω est borné, le problème (2.25) admet une solution unique.*

Preuve. Il est clair que a est une forme bilinéaire sur $V \times V$, et L une forme linéaire sur V . La continuité de L est facile à voir :

$$|L(v)| \leq \int_{\Omega} |f| |v| \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

par l'inégalité de Cauchy–Schwarz. De même a est continue sur $V \times V$:

$$|a(w, v)| \leq \int_{\Omega} \text{grad } w \cdot \text{grad } v \, dx \leq \|\text{grad } w\|_{L^2(\Omega)} \|\text{grad } v\|_{L^2(\Omega)} = \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Enfin, la coercivité de a est triviale (d'après le théorème 2.4 qui est, rappelons le, une conséquence de l'inégalité de Poincaré (2.21)) :

$$a(w, w) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} w|^2 dx = \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lax–Milgram 2.6. ■

La solution qui résulte du théorème précédent s'appelle une *solution faible* de (2.1). En appliquant le théorème 2.7, nous pouvons faire le lien avec le calcul des variations :

Proposition 2.6. *La solution faible de (2.25) réalise le minimum sur $H_0^1(\Omega)$ de la fonctionnelle*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Nous voulons maintenant comprendre le lien entre cette solution faible et les solutions classiques, ou fortes de l'équation de Laplace. En général, la solution de (2.25) n'a pas de régularité plus grande que son appartenance à $H^1(\Omega)$. Ce ne peut donc pas être une solution classique. Toutefois, si nous supposons que la solution faible est plus régulière, alors c'est bien une solution forte de (2.1).

Proposition 2.7. *Sous l'hypothèse que la solution faible $u \in H^2(\Omega)$, u est une solution classique de (2.1).*

Preuve. Si $u \in H^2(\Omega)$, alors nous pouvons appliquer la formule de Green (2.4), avec une fonction test $v \in C_c^\infty(\Omega)$, et nous obtenons

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)v dx = 0, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Comme $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, l'égalité précédente implique que $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$, donc que

$$-\Delta u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$
■

Remarque 2.3. On démontre que, même sans l'hypothèse de régularité $u \in H^2(\Omega)$, l'équation (2.6) est tout de même vérifiée presque partout dans Ω . La solution faible n'est plus nécessairement une solution forte. La démonstration est toutefois plus délicate (voir [1]).

2.5.2 Extension à d'autres conditions aux limites

Conditions de Dirichlet non-homogène

La première variante que nous étudions consiste à remplacer la condition de Dirichlet homogène $u = 0$ sur $\partial\Omega$ par une condition non-homogène $u = g$ sur $\partial\Omega$. Pour que ce problème puisse avoir une solution, il est naturellement nécessaire que g soit la trace sur le bord d'une fonction $u_g \in H^1(\Omega)$ (cette fonction n'est évidemment pas unique, puisqu'on peut lui rajouter n'importe quel élément de $H_0^1(\Omega)$). Nous ne pouvons pas rentrer dans le détail de cette question, nous supposons simplement qu'il existe une telle fonction g . Nous verrons au paragraphe 3.3.3 comment on peut facilement construire numériquement un tel « relèvement ».

En prenant comme nouvelle fonction inconnue $\tilde{u} = u - u_g$, nous voyons que \tilde{u} est solution du problème

$$(2.26) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = f + \Delta u_g & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Par construction, $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. En procédant comme précédemment, nous obtenons la formulation variationnelle

$$(2.27) \quad \begin{aligned} &\text{Trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_{\Omega} \text{grad } \tilde{u} \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Omega} \text{grad } u_g \cdot \text{grad } v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

à laquelle nous pouvons appliquer le théorème de Lax–Milgram, et obtenir ainsi l’existence et l’unicité d’une solution faible.

Il est commode de revenir à l’inconnue naturelle u , et d’introduire le sous-espace (fermé, d’après le théorème de trace) de $H^1(\Omega)$

$$H_g^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = u_g \text{ sur } \partial\Omega\},$$

qui est donc un espace de Hilbert.

La formulation variationnelle devient dans ce cas

$$(2.28) \quad \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H_g^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

Nous pouvons encore faire le lien avec le calcul des variations. La solution u de (2.28) réalise le minimum sur $H_g^1(\Omega)$ de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx.$$

Conditions aux limites de Neumann

Dans le cas où l’on remplace la condition aux limites de Dirichlet par une condition de Neumann, le raisonnement précédent doit être modifié.

Nous commençons par étudier le problème, où $f \in L^2(\Omega)$, et $g \in L^2(\partial\Omega)$ sont deux fonctions données :

$$(2.29) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée est (dans ce cas, il n’y a pas lieu de prendre une fonction test nulle sur le bord, l’espace naturel est donc $H^1(\Omega)$ entier :

$$(2.30) \quad \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_{\Omega} (\nabla v(x))^T \nabla u(x) + u(x)v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x)v(x) \, d\gamma(x) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

On a alors le

Théorème 2.8. *Le problème 2.30 admet une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$.*

Preuve. Comme d'habitude, le seul point qui nécessite une démonstration est la coercivité de a :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + |u|^2 \, dx = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

■

Par contre l'interprétation du problème variationnel va s'avérer plus délicate qu'au paragraphe précédent. Nous faisons l'hypothèse que la solution $u \in H^2(\Omega)$. Dans ce cas, la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Omega)$, et nous pouvons utiliser la formule de Green (2.4), pour obtenir

$$\int_{\Omega} (\Delta u - u + f) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\gamma(x).$$

Choisissons $v \in C_0^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire à support compact dans Ω . Le terme de droite est alors nul, et par un résultat de densité des fonctions régulières dans $L^2(\Omega)$, nous voyons que u vérifie $-\Delta u + u = f$ dans $L^2(\Omega)$, donc presque partout dans Ω .

Toujours sous l'hypothèse que $u \in H^2(\Omega)$, nous en déduisons par le même raisonnement de densité (sur le bord) que $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$, donc presque partout sur $\partial\Omega$.

Remarque 2.4. L'hypothèse $u \in H^2(\Omega)$ est assez restrictive. On peut réinterpréter, mais c'est plus délicat, le problème variationnel sans l'hypothèse précédente. Le problème à l'intérieur est toujours vérifié presque partout. Par contre, il n'est plus possible de donner un sens à $\frac{\partial u}{\partial n}$ en tant que fonction (c'est une distribution), et la condition aux limites ne peut être vérifiée que dans un sens faible.

Nous considérons maintenant le problème de Neumann pour le Laplacien, c'est-à-dire

$$(2.31) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La difficulté supplémentaire par rapport au cas précédent est, comme nous l'avons annoncé lors de l'étude formelle du problème de Neumann, qu'il n'existe une solution que si les données f et g vérifient une *condition de compatibilité* (que nous allons expliciter plus loin), et que dans ce cas, la solution de (2.31) n'est définie qu'à une constante près.

En effet, puisque seules les dérivées de u interviennent dans (2.31), on voit que si u en est une solution, alors $u + C$ est aussi solution quelle que soit la constante $C \in \mathbf{R}$. Par ailleurs, en appliquant la formule (2.4) avec $v = 1$, nous retrouvons

$$(2.32) \quad \int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \, d\gamma(x) = 0,$$

qui est une relation entre les données f et g qui ne fait pas intervenir u . On voit donc que (2.32) est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution.

La formulation variationnelle, sans encore préciser l'espace dans lequel nous chercherons la solution est

Trouver u tel que

$$(2.33) \quad \int_{\Omega} (\nabla v(x))^T \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x)v(x) d\gamma(x) \quad \forall v.$$

Le choix le plus naturel serait de prendre $V = H^1(\Omega)$, mais la remarque précédente montre que nous devons nous attendre à des difficultés, et en effet, il n'est pas possible de démontrer la coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v(x))^T \nabla u(x) dx$ sur $H^1(\Omega)$.

Il est clair que nous devons modifier le cadre variationnel pour pouvoir appliquer le théorème de Lax–Milgram. Une solution est de « fixer la constante » en travaillant avec des fonctions à moyenne nulle, soit en posant

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u dx = 0 \right\},$$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc complet quand on le munit de la norme induite par $H^1(\Omega)$. Nous prenons donc comme formulation variationnelle

Trouver $u \in V$ tel que

$$(2.34) \quad \int_{\Omega} (\nabla v(x))^T \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x)v(x) d\gamma(x) \quad \forall v \in V,$$

et nous devons vérifier la coercivité de la forme bilinéaire sur V (les autres propriétés sont claires). Ce point est quelque peu délicat, et nous admettrons le résultat. Nous avons donc

Théorème 2.9. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ vérifiant la condition de compatibilité (2.32). Il existe une solution unique $u \in V$ du problème de Neumann (2.34).*

Conditions aux limites mêlées

Nous envisageons maintenant le cas où la frontière est partitionnée en deux parties $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, avec $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$.

- Sur $\partial\Omega_D$ est imposée une condition de Dirichlet, que nous supposons homogène pour simplifier

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D;$$

- Sur $\partial\Omega_N$ est imposée une condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_D,$$

où $g \in L^2(\partial\Omega_N)$ est donnée.

Pour démontrer l'existence d'une solution, nous devons supposer que la partie $\partial\Omega_D$ n'est « pas trop petite » (sans quoi, nous retrouverons les difficultés du problème de Neumann). Nous ferons l'hypothèse que $\text{mes}(\partial\Omega_D) > 0$, en désignant par mes la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Il est naturel de chercher u dans un sous-espace de $H^1(\Omega)$ de fonctions nulles sur $\partial\Omega_D$. Pour une fonction test vérifiant la même condition aux limites, la formule de Green conduit à une formulation variationnelle avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v^T \cdot \nabla u \, dx, \quad L(v) = \int_K f v \, dx + \int_{\Omega} g v \, d\gamma(x).$$

L'espace sur lequel sont définies ces formes est

$$V_D = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}.$$

Notre problème variationnel est donc

(2.35) Trouver $u \in V$ tel que

$$\int_{\Omega} (\nabla v(x))^T \nabla u(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g(x) v(x) \, d\gamma(x) \quad \forall v \in V.$$

Théorème 2.10. *Le problème 2.35 admet une solution unique $u \in V$.*

Preuve. La continuité de a et de L se démontre comme à la proposition 2.5. Le seul point délicat (et qui peut être passé en première lecture) est la coercivité de a .

Pour montrer la coercivité de a , commençons par montrer que $w \rightarrow \sqrt{a(w, w)}$ définit une norme sur V . Il est clair que c'est une semi-norme. Si $a(w, w) = 0$, $\nabla w = 0$ (presque partout) sur Ω , donc w est constant sur Ω (connexe). Comme $w = 0$ sur une partie du bord de mesure strictement positive, nous concluons que $w = 0$ sur Ω .

Il nous faut donc montrer que cette nouvelle norme est équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$. Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $w_n \in V$, tel que

$$a(w_n, w_n) \leq \frac{1}{n} \|w_n\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

En fait, nous pouvons prendre $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ (c'est une simple normalisation). La suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc bornée dans $H^1(\Omega)$. Par compacité (voir le théorème de Rellich 2.5), nous pouvons extraire une sous suite $(w_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Par hypothèse,

$$a(w_{n_k}, w_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k},$$

et donc $\nabla w_{n_k} \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $k \rightarrow \infty$. Par conséquent $(w_{n_k})_k$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\omega)$, et converge vers une limite w^* . On a donc

$$\int_{\Omega} |\nabla w^*|^2 \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla w_{n_k}|^2 \, dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = 0.$$

D'après la première partie de la démonstration, on a donc $w^* = 0$, mais par ailleurs,

$$\int_{\Omega} |w^*|^2 \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |w_{n_k}|^2 \, dx = 1,$$

ce qui est une contradiction avec $w^* = 0$. ■

2.5.3 Coefficients variables

Nous considérons donc le problème (1.3) (dont nous avons donné la formulation variationnelle en (2.9)), et nous considérons maintenant le cas général d'un tenseur de conductivité anisotrope. Nous nous donnons une *fonction à valeurs dans l'espace des matrices* $K(x)$, vérifiant les conditions suivantes : il existe deux constantes, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, telles que, pour presque tout $x \in \Omega$,

- $\|K(x)\xi\| \leq \beta \|\xi\|$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^d$;
- $\xi^T K(x) \xi = \sum_{i,j=1}^d k_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^d$.

On considère alors le problème aux limites :

$$(2.36) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(K \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En multipliant, comme d'habitude par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et en utilisant la formule de Green (2.3) avec $\mathbf{q} = A \nabla u$, nous obtenons la formulation variationnelle

$$(2.37) \quad \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ &\int_{\Omega} (\nabla v(x))^T K(x) \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Théorème 2.11. *Sous les hypothèses ci-dessus, le problème (2.37) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. En posant, pour $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v(x))^T K(x) \nabla u(x) dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx,$$

il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax–Milgram 2.6. Les caractères respectivement linéaire de L , et bilinéaire de a sont évidents. Nous vérifions les deux autres points.

Continuité En appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy–Schwarz (d'abord dans \mathbf{R}^d , puis dans $H_0^1(\Omega)$), il vient

$$|L(v)| \leq \beta \int_{\Omega} \|\nabla u\| \|\nabla v\| dx \leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

soit la première hypothèse du théorème, avec $C = \beta$.

Coercivité C'est le point délicat, mais qui est encore une fois rendu trivial par l'inégalité de Poincaré :

$$a(u, u) \geq \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad \blacksquare$$

On peut également démontrer un résultat analogue à la proposition 2.7, en suivant le même raisonnement.

Remarque 2.5. Problème de transmission

Considérons le cas particulier où Ω est partitionné en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , et nous notons Σ l'interface entre les deux sous-domaines. Deux situations possibles sont illustrées sur la figure 2.2.

Nous supposons que le coefficient K est scalaire, et constant sur chaque sous-domaine, $K(x) = k_i \kappa_{\Omega_i}(x)$ pour $x \in \Omega_i$ (κ_i désignant la fonction caractéristique de Ω_i).



FIG. 2.2 – Domaine Ω partitionné en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , deux exemples

Dans la formulation variationnelle, prenons d'abord v à support compact dans Ω_1 , puis dans Ω_2 (en particulier v est nulle sur Σ), et nous voyons que dans chaque sous-domaine, la restriction u_i de u à Ω_i vérifie $-k_i \Delta u_i = f|_{\Omega_i}$. Il y a aussi des conditions de transmission entre u_1 et u_2 sur l'interface Σ , qui sont en fait *contenues dans la formulation variationnelle*. Tout d'abord, le théorème de trace implique que, puisque $u \in H^1(\Omega)$,

$$u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma.$$

Ensuite, si nous prenons maintenant une fonction test quelconque, en appliquant la formule de Green dans Ω_1 et dans Ω_2 , compte tenu des équations à l'intérieur, il reste (en notant n la normale orientée de Ω_1 vers Ω_2 , par exemple)

$$\int_{\Sigma} k_1 \nabla u_1 \cdot n v \, d\gamma(x) = \int_{\Sigma} k_2 \nabla u_2 \cdot n v \, d\gamma(x), \quad \text{pour tout } v \in L^2(\Sigma),$$

ce qui entraîne

$$k_1 \nabla u_1 \cdot n = k_2 \nabla u_2 \cdot n.$$

2.5.4 Le système de l'élasticité linéaire

Nous considérons maintenant le système de l'élasticité linéarisé que nous avons introduit au paragraphe 1.3. Pour simplifier, nous nous placerons dans le cas homogène et isotrope (c'est-à-dire que le système est décrit par les deux *coefficients de Lamé* λ et μ , qui sont supposés constants, et positifs). Le tenseur des contraintes est donc relié au tenseur d'élasticité par la relation

$$\sigma(u) = 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(\mathbf{u}) I,$$

et la condition d'équilibre est

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ est une force donnée, et où $\operatorname{div} \sigma$ est le vecteur de composantes noté

$$(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}))_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma(\mathbf{u})_{ij}}{\partial x_j}$$

Commençons par étudier le cas où l'on impose une condition de Dirichlet sur **tout** le bord. Nous verrons plus tard le cas, plus réaliste de conditions aux limites mixtes.

Nous cherchons donc $\mathbf{u} \in V = H_0^1(\Omega)^3$, et prenons les fonctions test dans ce même espace. Multiplions scalairement la condition d'équilibre par $\mathbf{v} \in V$, et intégrons par partie pour obtenir

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (2\mu \varepsilon(\mathbf{u})_{ij} + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(\mathbf{u}) \delta_{ij}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx.$$

Pour simplifier la première somme, remarquons que

$$\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\varepsilon(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{v}).$$

Pour ce qui est de la deuxième partie de la somme, remarquons également que $\operatorname{Tr} \varepsilon(\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{u})$ (la *vraie* divergence cette fois). Par conséquent,

$$\sum_{i,j=1}^3 \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Finalement, la formulation variationnelle, pour des conditions aux limites de Dirichlet est

$$(2.38) \quad \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

Le théorème auquel s'attend le lecteur a bien lieu :

Théorème 2.12. *Étant donné un champ de vecteur $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, le problème variationnel (2.38) admet une solution unique $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$.*

Preuve. Comme d'habitude nous ne vérifierons que la coercivité de la forme bilinéaire. Celle-ci n'est à priori pas évidente, car la forme bilinéaire ne contient pas toutes les dérivées de ses arguments.

Tout d'abord, puisque $\lambda > 0$, nous avons

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 2\mu \int_{\Omega} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 dx.$$

Ensuite, un cas simple de l'inégalité de Korn, démontré dans le lemme 2.2 ci-dessous donne

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 2\sqrt{2}\mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3},$$

et pour conclure, nous utilisons l'inégalité de Poincaré (2.21) (composante par composante). ■

Il reste à démontrer la première inégalité de Korn.

Lemme 2.2. *Pour $\mathbf{v} \in V$, on a*

$$(2.39) \quad \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \sqrt{2} \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Preuve. C'est un simple calcul. Pour $\mathbf{u} \in V$,

$$\int_{\Omega} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx$$

Intégrons par partie deux fois (c'est ici qu'intervient la condition de Dirichlet) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} u_j dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 dx &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx. \end{aligned}$$

■

En pratique, il est important de ne pas se restreindre aux cas des conditions de Dirichlet. En effet, cela correspond à un solide encastré sur tout son bord. Or nous voulons pouvoir traiter le cas d'un solide dont le bord (ou une partie du bord) est libre, ou soumis à une contrainte surfacique.

Nous considérons donc une partition du bord $\partial\Omega$ en $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ (nous supposons que la mesure superficielle de $\partial\Omega_D$ est strictement positive), et le problème

$$(2.40) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} (2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon(\mathbf{u}) I) = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_N. \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)^2$, et $g \in L^2(\partial\Omega_N)^3$ sont donnés.

Il paraît raisonnable de considérer l'espace $V_D = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$, qui est sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^3$ par application du théorème de trace. La formulation variationnelle est alors :

$$(2.41) \quad \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\gamma(x), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

et l'on a le théorème attendu

Théorème 2.13. *Étant donnés $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, et $\mathbf{g} \in L^2(\partial\Omega_N)^3$ le problème variationnel (2.41) admet une solution unique $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$.*

Preuve (Esquisse). Encore une fois le seul point délicat et la coercivité. Nous n'indiquons que les étapes de la démonstration, qui est technique. Tout d'abord, puisque nous supposons $\lambda > 0$, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V_D, \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)^3}.$$

Pour cela, montrons d'abord que $\|\varepsilon \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^3}$ définit une norme sur V_D . Le seul point à démontrer est que $\|\varepsilon \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^3} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0$. D'après le lemme 1.1, \mathbf{v} est alors un déplacement de corps rigide : $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}$. Or, puisque $\mathbf{u} = 0$ sur la partie Ω_D , ceci n'est possible que si $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$.

Il faut ensuite utiliser la seconde inégalité de Korn, énoncée sans démonstration au lemme 2.3, ainsi qu'un raisonnement faisant appel à la compacité pour conclure. ■

Le lemme de Korn, énoncé ci-dessous, est hautement non-trivial. Comme pour la première inégalité (2.39), seule *certaines* dérivées partielles interviennent dans le membre de droite de l'inégalité. Mais cette fois, il n'est pas possible d'utiliser l'argument simple basé sur une intégration par parties. La démonstration se trouve, par exemple, dans le livre [10].

Lemme 2.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$, on a*

$$(2.42) \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^3} \right)$$

On peut bien entendu réinterpréter le problème variationnel, sous une hypothèse de régularité de la solution (voir par exemple [1]).

Comme nous l'avons annoncé, la formulation variationnelle d'un problème aux limites n'est rien d'autre que le principe des travaux virtuels, alors que les fonctions test sont les déplacements admissibles. Nous allons retrouver ce lien par l'intermédiaire de la formulation « minimum de l'énergie ». Nous introduisons pour cela la fonctionnelle, définie sur V_D :

$$(2.43) \quad J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(2\mu \|\varepsilon(\mathbf{v})\|^2 + \lambda |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 \right) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega_D} \mathbf{g} \mathbf{v} \, d\gamma(x).$$

L'interprétation mécanique de J est la suivante : la première intégrale est l'énergie de déformation, alors que les deux autres termes représentent le travail des forces extérieures.

Par un raisonnement tout à fait similaire à celui mené avant le théorème 2.1, nous pouvons montrer que

$$J(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{g} \mathbf{v} \, d\gamma(x) + \int_{\Omega} \mu \|\varepsilon(\mathbf{u})\|^2 \, dx,$$

et prouver ainsi l'équivalence entre le problème variationnel (2.41) et la minimisation de J sur l'espace des déplacements admissibles V_D . Une conséquence de ce calcul est que le problème variationnel est l'équation d'Euler du problème de minimisation, et l'on retrouve le principe des travaux virtuels.

Chapitre 3

Présentation de la méthode des éléments finis

Dans ce chapitre nous abordons le coeur de notre sujet : l'approximation des problèmes elliptiques par la méthode des éléments finis. Nous commencerons par présenter la méthode d'approximation interne, qui est une méthode d'approximation abstraite dans les espaces de Hilbert. La méthode des éléments finis est une méthode de d'approximation interne particulière, l'espace d'approximation étant un espace de fonctions polynomiales par morceaux. Nous décrirons donc ensuite les espace *locaux* utilisés dans l'approximation, en nous bornant aux exemples les plus courants : les éléments de Lagrange sur des triangles et des rectangles, en 2 dimension, sur des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes en 3 dimensions. Ensuite, nous montrerons comment on construit les espaces d'approximation globaux, et les propriétés du problème approché obtenu.

3.1 La méthode d'approximation interne

Nous nous plaçons dans la situation du paragraphe 2.4 : V est un espace de Hilbert dont nous notons (\cdot, \cdot) le produit scalaire. Nous considérons un problème variationnel

$$(3.1) \quad \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V,$$

où a est une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$, et L est une forme linéaire continue sur V (voir le paragraphe 2.4 pour les définitions précises).

Nous nous donnons une famille de sous-espaces $V_h \subset V$ de dimension finie N_h . Le paramètre h est destiné à tendre vers 0. Il est pour l'instant sans signification, mais nous servira à mesurer la finesse du maillage au chapitre prochain. Nous *définissons* le problème approché par la formulation variationnelle :

$$(3.2) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h.$$

Par application du théorème de Lax–Milgram (dont les hypothèses sont vérifiées puisque $V_h \subset V$, il est immédiat que le problème approché (3.2) admet une solution unique u_h . Cela est démontré à la proposition 3.1.

Bien entendu, comme le problème approché est en dimension finie, il est équivalent à un système linéaire, après avoir fixé une base de V_h . Notons $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$ les éléments de cette

base (pour l'instant, nous ne précisons pas ce que sont les vecteurs de cette base, mais nous verrons que la méthode des éléments finis conduit au choix canonique d'une base de V_h). Nous pouvons développer la solution approchée u_h sur la base choisie :

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} x_j \varphi_j.$$

Dans la formulation variationnelle (3.2), il est suffisant (et nécessaire) de prendre $v_h = \varphi_i$, pour $i = 1, \dots, N_h$. Le système approché se met sous la forme

$$a \left(\sum_{j=1}^{N_h} x_j \varphi_j, \varphi_i \right) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h,$$

En développant par linéarité, nous obtenons le système linéaire

$$(3.3) \quad Ax = b,$$

où les éléments de la matrice A et du second membre b sont donnés par

$$(3.4) \quad A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = L(\varphi_i),$$

et où nous avons noté x le vecteur inconnu de composantes x_j , $j = 1, \dots, N_h$.

Par analogie avec le cas de l'élasticité linéaire, la matrice A s'appelle la **matrice de rigidité** du système.

Il est important de savoir que le système approché possède toujours une solution unique.

Proposition 3.1. *La matrice A est inversible.*

Lorsque la forme bilinéaire a est symétrique, la matrice A l'est aussi, et elle est alors définie-positive.

Preuve. L'inversibilité de A est une conséquence immédiate du lemme de Lax-Milgram appliqué à V_h .

La symétrie de A se voit sur la définition (3.4). Le caractère défini positif est la traduction en dimension finie de la coercivité. Soit $x \in \mathbf{R}[N_h]$, et posons $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} x_i \varphi_i$.

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{N_h} x_i x_j a(\varphi_j, \varphi_i) = a \left(\sum_{j=1}^{N_h} x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} x_i \varphi_i \right) = a(u_h, u_h) > 0. \quad \blacksquare$$

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation particulière (nous en verrons les détails aux paragraphes suivants) qui conduit à un système approché possédant plusieurs bonnes propriétés :

- les éléments de la matrice A et du second membre b peuvent être calculés de manière systématique, et simple, à partir de la donnée de V_h ;
- il est possible d'évaluer la différence entre la solution exacte u et la solution approchée u_h ;
- le problème approché peut être résolu assez efficacement.

Nous reviendrons en détail sur ces différents points dans la suite de ce cours.

Pour commencer à quantifier l'erreur entre u et u_h , nous allons donner le résultat connu comme le lemme de Céa, qui est une estimation abstraite de l'erreur.

Lemme 3.1. Soit u la solution exacte (solution de (3.1)), et u_h la solution approchée (solution de (3.2)). On a l'égalité

$$(3.5) \quad a(u - u_h, v_h) = 0, \text{ pour tout } v_h \in V_h.$$

Preuve. Puisque $V_h \subset V$, on peut prendre $v = v_h \in V_h$ dans le problème exact (3.1). En soustrayant alors (3.2) de (3.1), nous obtenons (3.5). ■

Proposition 3.2 (Lemme de Céa). Avec les mêmes notations qu'au lemme précédent, on a l'inégalité

$$(3.6) \quad \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

où M et α sont les quantités qui interviennent dans le lemme de Lax–Milgram.

Preuve. Fixons un élément quelconque $v_h \in V_h$. D'après (3.5),

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h),$$

puisque la différence $u_h - v_h$ est élément de V_h .

Utilisons alors, d'une part, la coercivité de a ,

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h),$$

d'autre part, la continuité de a ,

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V.$$

On déduit l'inégalité (3.6) des deux inégalités précédentes. ■

Remarque 3.1. Dans le cas où a est symétrique, le lemme 3.1 admet une interprétation importante. Dans ce cas, la forme bilinéaire définit un produit scalaire et une norme sur V , appelée *norme de l'énergie* :

$$\|u\|_e = \sqrt{a(u, u)}, \quad \forall u \in V,$$

et équivalente à la norme de V :

$$\sqrt{\alpha} \|u\|_V \leq \|u\|_e \leq \sqrt{M} \|u\|_V, \quad \forall u \in V.$$

Dans ce cas, la relation (3.5) exprime que l'erreur $u - u_h$ est **orthogonale** à l'espace approché V_h . La solution approchée est donc la *projection* de la solution exacte sur V_h .

Toujours dans le cas où a est symétrique on peut améliorer l'estimation de la proposition (3.6). En effet, d'après ce qui précède,

$$a(u - u_h, u - u_h) = \|u - u_h\|_e^2 = \|u - v_h\|_e^2 = a(u - v_h, u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

et il en résulte que, pour tout $v_h \in V_h$

$$\alpha \|u - u_h\|_V \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - v_h, u - v_h) \leq M \|u - v_h\|_V^2,$$

d'où

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

(qui est meilleure que (3.6), puisque $\alpha \leq M$).

Remarque 3.2. L'importance du lemme de Céa est de remplacer le problème d'estimation de l'erreur par un problème d'approximation, dans lequel la solution approchée n'apparaît plus. Si l'on peut démontrer que la solution (ou plus généralement, n'importe quelle fonction de V) est *bien approchée* par les fonctions de V_h , alors l'erreur ne sera qu'une constante fois plus grande que cette erreur d'approximation.

Nous en tirerons la stratégie qui sera utilisée au chapitre suivant pour obtenir une estimation d'erreur : étant donné $w \in V$, construire un élément $w_h \in V_h$ pour lequel la différence $\|w - w_h\|_V$ peut être « facilement » estimée. On en déduit, à une constante près, une estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_V$.

La version « abstraite » de cette stratégie est contenue dans le résultat suivant.

Corollaire 3.1. *On suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V , et un opérateur $r_h : \mathcal{V} \rightarrow V$, tel que*

$$\forall v \in \mathcal{V}, \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0.$$

Alors la solution approchée converge vers la solution exacte quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de \mathcal{V} , il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que $\|u - v\|_V \leq \varepsilon$. Par ailleurs, il existe h_0 tel que $\|v - r_h(v)\|_V \leq \varepsilon$ pour $h \leq h_0$.

Par le lemme de Céa (nous notons $C = \sqrt{M/\alpha}$),

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - r_h(v)\|_V \leq C (\|u - v\|_V + \|v - r_h(v)\|_V) \leq 2C\varepsilon.$$

■

Dans les applications, V sera un sous-espace de $H^1(\Omega)$, et \mathcal{V} sera un espace de fonctions régulières (sous-espace de $C^1(\Omega)$). L'opérateur r_h s'appelle *l'opérateur d'interpolation*.

3.2 Approximation par éléments finis P_1 pour le Laplacien

Dans ce paragraphe, nous allons nous attacher à la résolution du problème modèle suivant :

$$(3.7) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(k \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ k \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega_N. \end{cases}$$

où Ω est un ouvert (connexe) de \mathbf{R}^2 , que nous supposons **polygonal**, $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ forment une partition de $\partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_N)$ dont deux fonctions données. D'après le chapitre 2, la formulation variationnelle de ce problème aux limites est

$$(3.8) \quad \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V,$$

en notant

$$(3.9) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega_N} g v \, d\gamma(x), \quad \forall (u, v) \in H_D^1(\Omega)^2,$$

et $V = H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}$.

3.2.1 Espace d'approximation local

L'espace V_h sera construit en assemblant des fonctions définies sur chaque triangle de la triangulation \mathcal{T}_h . Nous commençons donc par décrire la situation locale. Nous noterons P_1 l'espace des polynômes de degré 1 en deux variables :

$$(3.10) \quad P_1 = \{p \in \mathbf{R}[X, Y], p(x, y) = a + bx + cy\}.$$

Il s'agit bien évidemment d'un espace vectoriel de dimension 3. Comme nous voulons associer un tel espace à chaque triangle K , nous cherchons une base adaptée. L'existence d'une telle base est la conséquence du résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit K un triangle non-dégénéré de \mathbf{R}^2 , de sommets A_1, A_2, A_3 . Il existe un unique polynôme de P_1 prenant des valeurs fixées aux sommets de K .*

Preuve. Pour $i = 1, 2, 3$, notons (x_i, y_i) les coordonnées du sommet A_i , et f_i la valeur imposée à ce même sommet. Nous devons trouver 3 nombres a, b, c tels que

$$p(x_i, y_i) = f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ces conditions sont équivalentes au système linéaire

$$a + bx_i + cy_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

est égal à la surface du triangle K . Comme ce triangle est supposé non-dégénéré, le déterminant est non-nul, et le système possède une solution unique. ■

Dans la situation de la proposition 3.3, nous dirons que l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ est **P_1 -unisolvant**.

Nous noterons λ_i l'unique fonction de P_1 qui prend la valeur 1 au noeud A_i et 0 aux deux autres noeuds. Par définition, on a alors (avec un léger abus de notation), pour tout $p \in P_1$:

$$p = \sum_{i=1}^3 p(A_i) \lambda_i.$$

Les fonctions λ_i s'appellent des **coordonnées barycentriques** sur le triangle K . Géométriquement (voir la figure 3.1), $\lambda_i(P)$ représente l'aire du triangle PA_jA_k (A_j et A_k sont les deux autres sommets du triangle).

Plus algébriquement, les coordonnées barycentrique du point P de coordonnées affines (x, y) sont la solution du système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = x, \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = y, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

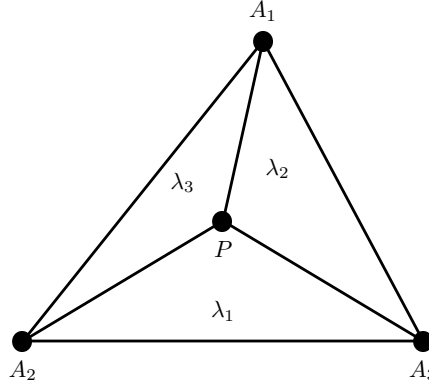


FIG. 3.1 – Coordonnées barycentriques

Ce système a bien une solution unique, puisque sa matrice est la transposée de celle qui est intervenue à la proposition 3.3. Les coordonnées barycentriques sont des fonctions affines des coordonnées du point, et sont comprises entre 0 et 1 (quand le point est intérieur au triangle).

Voyons quelques exemples : le côté A_1A_2 du triangle admet $\lambda_3(P) = 0$ comme équation, la droite passant par les milieux des côtés A_1A_2 et A_2A_3 a $\lambda_2 = 1/2$ comme équation, enfin les coordonnées barycentriques du centre de gravité du triangle sont $(1/3, 1/3, 1/3)$.

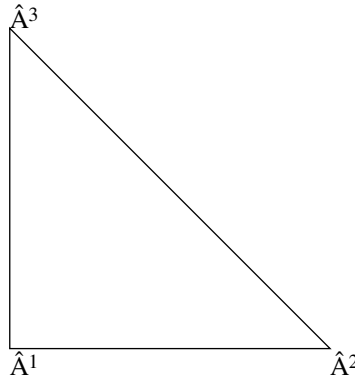


FIG. 3.2 – Triangle de référence

Nous aurons besoin plus loin du triangle unité \hat{K} dont les sommets sont $\hat{A}_1 = (0,0)$, $\hat{A}_2 = (1,0)$ et $\hat{A}_3 = (0,1)$. Les coordonnées barycentriques sur ce triangle sont simplement $\lambda_1(x, y) = 1 - (x + y)$, $\lambda_2(x, y) = x$ et $\lambda_3(x, y) = y$, voir la figure 3.2.

3.2.2 Description de l'espace d'approximation

Pour définir l'espace d'approximation V_h nous commençons par « remplacer » l'ouvert Ω par une structure discrète.

Définition 3.1. Une **triangulation** (on parle aussi de **maillage**) d'un ouvert polygonal $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ est un ensemble \mathcal{T}_h de triangles $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifiant

- i) $K_i \subset \overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega} = \cup_{1 \leq i \leq n} K_i$;

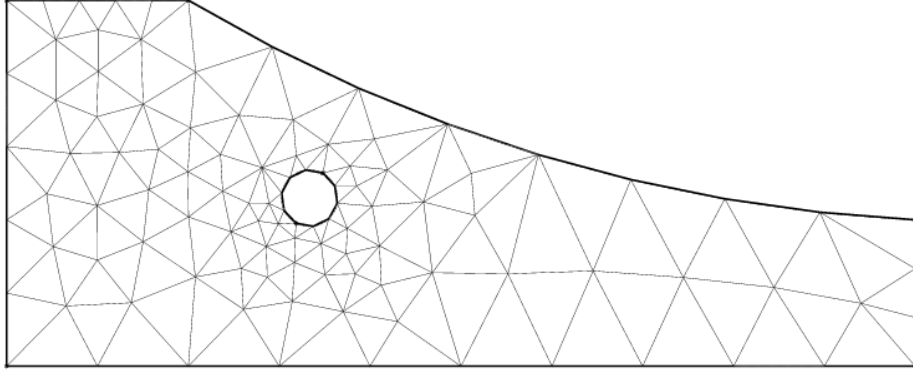


FIG. 3.3 – Exemple de triangulation

- ii) $K_i \cap K_j$ est soit vide soit réduite à un sommet commun, soit la totalité d'une arête commune.

Nous appelleront **noeud** du maillage les sommets des triangles de \mathcal{T}_h .

Nous noterons N_s le nombre de sommets, N_s^D le nombre de sommets *non situés sur* Ω_D , et N_e le nombre de triangles de \mathcal{T}_h .

Le paramètre h qui intervient dans la notation \mathcal{T}_h peut être compris comme « la taille typique » d'un élément du maillage, ou plus précisément comme $\max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam } K$ (où $\text{diam } K$ est le *diamètre* de l'élément, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux éléments de K). Bien entendu, h est destiné à « tendre vers 0 », de sorte que nous avons en théorie une famille indexée par h de maillages.

Remarque 3.3. Dans cette partie du cours, nous ne préoccuperons pas de savoir comment on obtient le maillage. Il faut toutefois être conscient que la phrase « Soit \mathcal{T}_h une triangulation de Ω » masque une étape loin d'être simple (et que les ingénieurs considèrent souvent comme plus coûteuse que le calcul). Si mailler un domaine en dimension 2 est un problème bien compris, avec des logiciels efficaces (par exemple EMC2 [13]), le maillage automatique d'un domaine en 3 dimensions dans un contexte industriel est encore une activité de recherche. On pourra se reporter au livre [12] pour un état de l'art.

Remarque 3.4. En pratique, il n'est évidemment pas possible de « faire tendre h vers 0 ». On calcule le plus souvent avec 1, parfois plusieurs, mais toujours un *nombre fini* de maillages. Ainsi, les estimations d'erreurs que nous indiquerons au paragraphe 3.4 ont un intérêt théorique, mais ne peuvent être utilisées telles quelles en pratique pour estimer la précision d'un calcul. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'estimations à-posteriori. Pour une introduction à ce vaste sujet, voir le dernier chapitre de [11].

Un exemple de maillage est présenté sur la figure 3.3, alors que la figure 3.4 illustre des exemples de situations interdites par la définition 3.1.

Nous pouvons maintenant définir l'espace d'approximation V_{Dh} . Nous posons tout d'abord

$$(3.11) \quad V_h = \{v_h \in C^0(\Omega), v_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

puis

$$(3.12) \quad V_{Dh} = \{v_h \in V_h, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}.$$

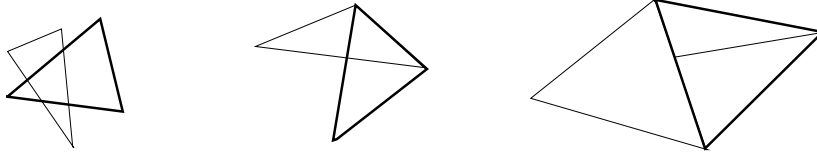


FIG. 3.4 – Situations interdites par la définition 3.1

(et quand $\Omega_D = \Omega$, nous le noterons simplement V_0h). En d'autres termes, les fonctions de V_h sont

- affines sur chaque triangle de \mathcal{T}_h ;
- globalement continues.

De plus, les fonctions de V_{Dh} sont nulles sur $\partial\Omega_D$.

Lemme 3.2. V_h est une approximation interne de $H^1(\Omega)$: $V_h \subset H^1(\Omega)$.

V_{Dh} est une approximation interne de $H_D^1(\Omega)$.

Preuve. Nous raisonnons comme à l'exemple 2.3, en montrant que toute fonction $vinV_h$ possède une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$. Pour cela, définissons la fonction $w \in L^2(\Omega)$ par sa restriction à chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$:

$$w_{j|K} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{|K}.$$

Par la formule de Green, nous avons alors, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial K} \varphi(x) v(x) n_{K,j} d\gamma(x) \right)$$

(où $n_{K,j}$ est la j^e composante de la normale extérieure à K).

Comme v est continue sur K , étant donné deux triangles K_1 et K_2 ayant une arête commune L , on a $v|_{K_1} = v|_{K_2}$ sur L , et également $n_{K_1} = -n_{K_2}$. Par ailleurs, φ s'annule sur le bord de Ω . En regroupant la dernière somme de la précédente équation, il vient

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) w_j(x) dx + \sum_L \int_L (v|_{K_1} - v|_{K_2}) \varphi n_{K_1,j} d\gamma(x) = - \int_{\Omega} \varphi(x) w_j(x) dx,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial v}{\partial x_j} = w_j \in L^2(\Omega)$.

Il est alors immédiat de voir que $V_{Dh} \subset H_D^1(\Omega)$. ■

Nous construisons maintenant une base particulière de V_h , liée à la triangulation \mathcal{T}_h . Notons N_s le nombre de sommets, et N_s^D le nombre de sommets *non situés sur* Ω_D . Pour tout sommet a_i de \mathcal{T}_h , définissons la fonction φ_i par

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

La fonction φ_i est représentée sur la figure 3.5.

Lemme 3.3. La fonction φ_i est élément de V_h .

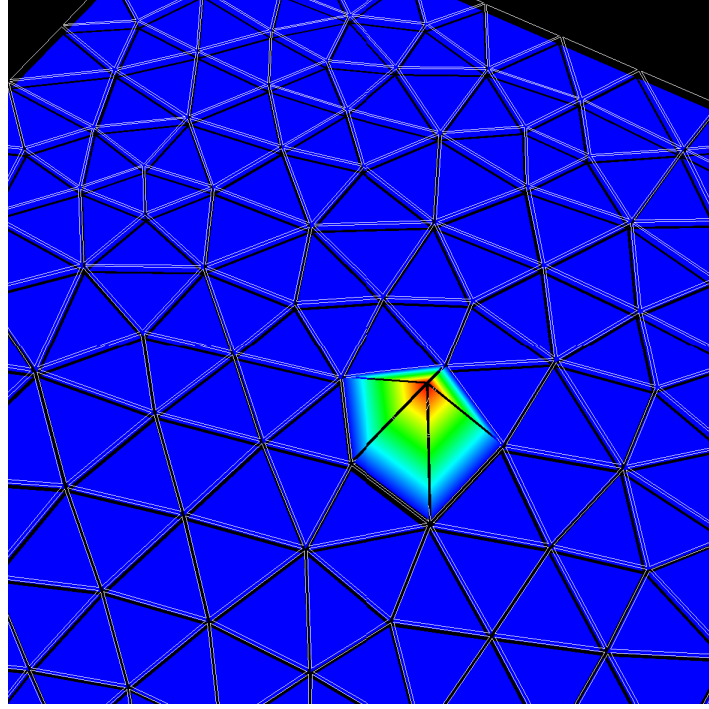


FIG. 3.5 – Fonction de base φ_i pour l'élément fini P_1

Preuve. Pour chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$, la fonction φ_i est bien définie, d'après la proposition 3.3. Il nous reste à montrer que φ_i est continue pour conclure qu'elle est élément de V_h .

Pour la continuité, il suffit d'examiner ce qui se passe sur une arête commune à deux triangles (d'après la définition 3.1). Soit donc K et K' deux triangles ayant une arête commune L . Alors la trace sur L de la restriction de φ_i à K est une fonction affine, et il en est de même sur K' . Or les deux traces coïncident aux extrémités de L , par hypothèse, et sont donc égales sur tout L , ce qui prouve la continuité de φ_i . ■

Proposition 3.4. *L'ensemble $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_s}$ forme une base de V_h .*

L'ensemble $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_s^D}$ forme une base de V_{Dh} .

Preuve. D'après la définition de φ_i , on a, pour toute fonction $v \in V_h$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N_s} v(a_i) \varphi_i(x),$$

puisque cette relation est vraie sur chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$. La famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_s}$ forme donc un système générateur de V_h .

Pour montrer que cette famille est libre, supposons une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \varphi_i = 0.$$

En évaluant cette somme au sommet a_j , pour $j = 1, \dots, N_s$, il vient immédiatement $\alpha_j = 0$.

Pour obtenir une base de V_{Dh} , il suffit de retirer les fonctions de base correspondant aux sommets situés sur Ω_D , puisque une fonction de V_h s'annule sur Ω_D si et seulement si elle s'annule aux sommets situés sur Ω_D (les fonctions dont affines). ■

Comme nous le voyons sur la figure 3.5, le support de φ_i est réduit à l'union des triangles ayant le noeud a_i pour sommet. Cette propriété est la clé d'une implémentation efficace de la méthode, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

Nous pouvons maintenant caractériser la méthode des éléments finis comme la méthode d'approximation interne, avec le choix de l'espace d'approximation V_{Dh} , et de la base $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N_s^D}$.

3.3 Mise en oeuvre de la méthode

Du point de vue de la mise en oeuvre, et en supposant que le maillage est donné, les tâches principales sont la formation et la résolution du système linéaire (3.3). Dans ce paragraphe nous nous attachons au calcul de la matrice A et du second membre b de ce système linéaire. Les méthodes de résolution du système linéaire dépassent le cadre de ce cours. On pourra trouver plus de détails (dans le contexte de la méthode des éléments finis) dans les ouvrages suivants : [20] pour une introduction, [2] pour une description plus approfondie, [14, chap11] ou [24, chap. 15] pour une présentation plus orientée vers les applications en mécanique.

D'après l'équation (3.4), les éléments de la matrice A sont donnés par

$$(3.13) \quad A_{ij} = \int_{\Omega} k(x) \nabla \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K k(x) \nabla \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) dx,$$

et les éléments du vecteur b par

$$(3.14) \quad \begin{aligned} b_i &= \int_{\Omega} f(x) \varphi_i(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \varphi_i(x) d\gamma(x) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(x) \varphi_i(x) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \partial\Omega} g(x) \varphi_i(x) d\gamma(x), \end{aligned}$$

puisque nous pouvons décomposer les intégrales sur Ω en une somme d'intégrales sur tous les éléments du maillage.

On peut déjà constater que la matrice A est **creuse**, c'est-à-dire que la très grande majorité de ses éléments sont nuls. En effet, une condition *nécessaire* pour que A_{ij} soit non-nul est que les sommets a_i et a_j appartiennent à un même élément. Or, étant donné un sommet a_i , le nombre d'éléments contenant ce sommet est certainement très faible par rapport au nombre de sommets total du maillage. Le nombre d'éléments non-nuls sur chaque ligne de la matrice est donc « petit ». Même s'il n'est pas possible de le borner en général (il dépend de la topologie du maillage), une moyenne pour le maillage de la figure 3.5 est visiblement entre 6 et 7.

3.3.1 Assemblage du système linéaire

L'algorithme à-priori le plus naturel pour mener ces calculs consiste en une double boucle (pour le calcul de A_{ij}) sur i et j . Pour chaque itération, on calcule l'intégrale (3.13) (ou (3.14) pour le second membre). Le coût de cet algorithme est manifestement proportionnel au carré du nombre de sommets. Nous allons voir qu'il existe une méthode dont le coût est simplement proportionnel au nombre d'éléments du maillage. Cette seconde manière de procéder s'appelle **l'assemblage** du système linéaire.

L'assemblage se base sur la forme des éléments de la matrice et du second membre comme somme d'intégrales sur les éléments du maillage. Pour réaliser ce calcul, nous aurons besoin

Algorithme 1 Algorithme « naïf » du calcul du système linéaire

```
for  $j = 1 : N_s^d$  do
  for  $i = 1 : N_s^d$  do
     $A_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K k(x) \nabla \varphi_i(x) \nabla \varphi_j(x) dx$ 
  end for
   $b_i = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(x) \varphi_i(x) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \partial\Omega} g(x) \varphi_i(x) d\gamma(x)$ 
end for
```

de supposer que la description du maillage comporte, pour chaque élément, la liste de ses sommets. L'algorithme d'assemblage comporte une boucle principale sur les éléments. Pour chaque élément K , les seuls éléments de la matrice A qui recevront une contribution non-nulle de K sont ceux dont un sommet appartient à K . Comme il y a 3 sommets dans chaque triangle (nous négligeons pour l'instant le cas de triangles voisins de la frontière), chaque élément contribue à 9 éléments de la matrice. Le coût de cette méthode est donc bien proportionnel au nombre d'éléments.

Détaillons ce calcul. Nous supposons donné un tableau d'entiers de taille $(N_e, 3)$ noté **NumSom** (numéros des sommets) tel que **NumSom**(e, l) désigne le l^e noeud de l'élément e . Par conséquent, sur l'élément K^l , la fonction de base locale λ_e est la restriction à K^l de la fonction de base $\varphi_{\text{NumSom}(e,l)}$ associée au sommet **NumSom**(e, l).

Algorithme 2 Algorithme d'assemblage du système linéaire

```
for  $i = 1 : N^s$  do
   $b_i = 0$ 
  for  $i = 1 : N^s$  do
     $A_{ij} = 0$ 
  end for
end for

for  $K \in \mathcal{T}_h$  do
  for  $e = 1 : 3$  do
     $i = \text{NumSom}(e, l)$ 
    for  $f = 1 : 3$  do
       $j = \text{NumSom}(f, l)$ 
       $A_{ij} = A_{ij} + \int_K k(x) \nabla \lambda_e(x) \nabla \lambda_f(x) dx$ 
    end for
     $b_i = b_i + \int_K f(x) \lambda_e(x) dx + \int_{K \cap \partial\Omega} g(x) \lambda_e(x) d\gamma(x)$ 
  end for
end for
```

L'algorithme d'assemblage est présenté en 2. Il est incomplet sur trois points importants :

- La description donnée suppose implicitement que la matrice A est stockée en mémoire comme une matrice pleine. Ce n'est jamais le cas, comme nous le verrons rapidement à la remarque 3.5 ci-dessous ;

- Tel qu’il est écrit, l’algorithme laisse supposer que l’on peut calculer exactement les matrices qui interviennent. Ce n’est également pas le cas : il est généralement pénible de calculer des intégrales sur un triangle, et de toutes façons, pour des fonction k , f ou g générales, il est le plus souvent impossible de calculer exactement ces intégrales. Nous montrerons au paragraphe 3.3.2 comment utiliser les méthodes d’intégration numérique.
- Enfin, l’algorithme ne calcule pas la matrice A et le vecteur b tels qu’ils sont définis aux équations (3.13) et (3.14). En effet, l’algorithme 2 ne tient pas compte des conditions aux limites. Nous montrons comment corriger ce défaut au paragraphe 3.3.3.

Remarque 3.5. La description de l’algorithme suppose implicitement que A est stocké en mémoire comme une matrice pleine, c’est-à-dire qu’il existe dans l’ordinateur un tableau $A(N_s, N_s)$. En pratique, nous voulons tirer parti de la structure creuse de A , que nous avons évoqué au début de ce paragraphe (c’est d’ailleurs la seule façon de traiter des problèmes de taille non-triviale), et il est indispensable d’utiliser des structures de données de stockage des matrices plus sophistiquées. Nous n’entrerons pas dans le détail de ces structures de données, qui peuvent être assez compliquées. Signalons simplement que le choix de ces structures est intimement lié à la méthode de résolution du système linéaire. Pour plus de détails on consultera les références citées plus haut au sujet des méthodes de résolution.

3.3.2 Calcul des matrice élémentaires

Il nous reste à montrer comment calculer les intégrales intervenant dans (3.13) et (3.14). Dans les deux cas, ils s’agit d’intégrales, soit sur un élément K , soit sur une partie du bord de cas. D’après l’algorithme 2, nous devons calculer

$$A_{ef}^K = \int_K k(x) \nabla \lambda_e(x) \nabla \lambda_f(x) dx, \quad (e, f) = 1, 2, 3,$$

et

$$B_e^K = \int_K f(x) \lambda_e(x) dx + \int_{K \cap \partial\Omega} g(x) \lambda_e(x) d\gamma(x), \quad e = 1, 2, 3.$$

La matrice 3×3 A^K s’appelle matrice de rigidité élémentaire, et le vecteur b^K s’appelle second membre élémentaire.

Passage à l’élément de référence

Pour simplifier, et rendre systématiques, les calculs, il sera commode de passer par l’intermédiaire d’un élément fixe, appelé **élément de référence**. Le choix le plus simple est le triangle unité \hat{K} , de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ décrit au paragraphe 3.2.1. Tout triangle de \mathcal{T}_h est l’image de \hat{K} par une application affine F . Plus précisément, F est l’application affine (unique, si le triangle K n’est pas dégénéré) qui envoie \hat{A}_e sur A_e , pour $e = 1, 2, 3$. Nous noterons B_K l’application linéaire associée à F_K .

Commençons par l’intégrale définissant A_{ef}^K , et effectuons le changement de variable $x = F(\hat{x})$, dont le jacobien (constant) n’est autre que $|\det(B)|$. Pour cela nous devons transformer le gradient des fonctions de base sur l’élément de référence. En notant $\hat{\lambda}_e(\hat{x}) = \lambda_e(x)$, autrement dit $\hat{\lambda}_e = \lambda_e \circ F_K$, la formule de dérivation composée conduit à

$$D_{\hat{x}} \hat{\lambda}_e(\hat{x}) = D_x \lambda_e(x) D_x F(x),$$

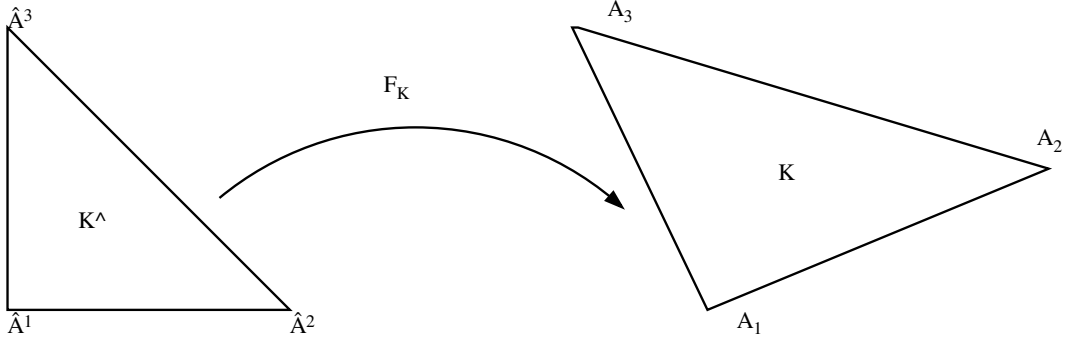


FIG. 3.6 – Transformation affine de l'élément de référence \hat{K} sur l'élément courant K

soit, en transposant :

$$\nabla \lambda_e(x) = B^{-T} \nabla \hat{\lambda}_e(\hat{x}).$$

L'intégrale est donc égale à

$$\begin{aligned} A_{ef}^K &= \int_{\hat{K}} k(\hat{x}) B^{-T} \nabla \hat{\lambda}_e(\hat{x}) \cdot B^{-T} \nabla \hat{\lambda}_f(\hat{x}) |\det(B)| d\hat{x} \\ &= |\det(B)| \int_{\hat{K}} k(\hat{x}) \nabla \hat{\lambda}_e(\hat{x}) (B^T B)^{-1} \nabla \hat{\lambda}_f(\hat{x}) d\hat{x}. \end{aligned}$$

Un calcul montre que

$$(B^T B)^{-1} = \frac{1}{\det(B)^2} \begin{pmatrix} \|A_1 A_3\|^2 & -(A_1 A_2, A_1 A_3) \\ -(A_1 A_2, A_1 A_3) & \|A_2 A_3\|^2 \end{pmatrix},$$

de sorte que si nous définissons la matrice (dépendant de la géométrie de l'élément courant) :

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^K &= \frac{1}{|\det(B)|} \|A_1 A_3\|^2 \\ \gamma_{12}^K &= \gamma_{21}^K = -\frac{1}{|\det(B)|} (A_1 A_2, A_1 A_3) \\ \gamma_{22}^K &= \frac{1}{|\det(B)|} \|A_2 A_3\|^2 \end{aligned}$$

et les intégrales qui ne font intervenir que l'élément de référence :

$$(3.15) \quad A_{ef,kl}^K = \int_{\hat{K}} k(\hat{x}) \frac{\partial \hat{\lambda}_e}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{\lambda}_f}{\partial \hat{x}_l} d\hat{x},$$

la matrice élémentaire s'exprime comme une combinaison linéaire

$$(3.16) \quad A_{ef}^K = \sum_{kl} \gamma_{kl} A_{ef,kl}^K.$$

Un calcul similaire pour le second membre conduit à

$$(3.17) \quad b_e^K = |\det(B)| \int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x}) \hat{\lambda}_e(\hat{x}) d\hat{x} + |K \cap \partial\Omega_D| \int_0^1 g(t) \lambda_e(t) dt,$$

où, dans l'intégrale de bords, nous avons posé $x = F(A\hat{t} + B*(1-\hat{t}))$, A et B étant les extrémités de l'arête de K concernée.

Il reste à calculer les trois intégrales précédentes.

Intégration numérique

Sauf dans quelques cas très particuliers (les fonctions k et f sont constantes, ou de forme très simple), il n'est en général pas possible de calculer exactement les intégrales 3.15 ou 3.17, et il est nécessaire de recourir à l'intégration numérique.

Étant donné une fonction φ continue sur \hat{K} , une formule de quadrature sur K approche l'intégrale $I = \int_K \varphi(\hat{x}) d\hat{x}$ par une somme finie

$$S = \sum_{q=1}^Q \omega_q \varphi(\hat{b}_q),$$

avec des *poids* $\omega_q \in \mathbf{R}$ et des *noeuds de quadrature* $\hat{b}_q \in \mathbf{R}^2$. Il est généralement préférable de choisir les poids $\omega_q > 0$ et les points $\hat{b}_q \in \hat{K}$.

Deux exemples qui peuvent être utilisées pour calculer les intégrales précédentes sont (en dimension 2)

L'intégration aux sommets : $Q = 3$, $\hat{b}_q = \hat{A}^q$ (sommet de \hat{K}) , $\omega_q = 1/6$, soit

$$\int_{\hat{K}} \varphi(\hat{x}) d\hat{x} \approx \frac{1}{6} \sum_{q=1}^3 \varphi(\hat{A}^q);$$

L'intégration au barycentre : $Q = 1$, $b_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \hat{A}_i$, $\omega_1 = 1/2$, soit

$$\int_{\hat{K}} \varphi(\hat{x}) d\hat{x} \approx \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \hat{A}_i \right).$$

En dimension 1, des formules possibles sont

La formule des trapèzes :

$$\int_0^1 \varphi(\hat{t}) d\hat{t} \approx \frac{1}{2} (\varphi(0) + \varphi(1));$$

La formule du point milieu :

$$\int_0^1 \varphi(\hat{t}) d\hat{t} \approx \varphi(1/2).$$

Ces deux formules sont exactes lorsque $\phi \in P^1$. On dit qu'elles sont de degré 1.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser l'intuition, il n'est pas nécessaire d'approcher très précisément les intégrales 3.15 ou 3.17. Les formules que nous avons citées sont suffisantes dans le cas de l'approximation P^1 que nous utilisons ici. Cette remarque est justifiée par l'analyse de convergence, voir la remarque 3.9 pour une autre discussion.

3.3.3 Prise en compte des conditions aux limites

Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'algorithme 2 ne calcule pas la matrice du problème (3.7). En fait, l'algorithme calcule la matrice du problème de Neumann, c'est-à-dire avec $\partial\Omega_D = 0$. Pour calculer la matrice dont nous avons besoin, nous devons modifier certains termes de cette matrice. En effet, les degrés de libertés situés sur les noeuds du maillage appartenant à $\partial\Omega_D$ ne sont pas des inconnues, puisque la condition aux limites leur impose une valeur nulle.

Il est commode de raisonner directement sur le système linéaire (3.3). Pour la démonstration nous allons partitionner les degrés de libertés en deux sous-ensembles :

- ceux appartenant à $\Omega \cap \partial\Omega_N$. Nous notons u_I le vecteur correspondant ;
- ceux appartenant à $\partial\Omega_D$, et nous notons u_{II} le vecteur.

Le système formé par l'algorithme 2 calcule un système linéaire

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_I \\ b_B \end{pmatrix}$$

soit $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, et nous devons résoudre simplement le système $A_{II}x_I = b_I$. Un système équivalent, qui se prête mieux à la mise en oeuvre informatique (et qui conserve la symétrie de la matrice) est

$$(3.18) \quad \begin{pmatrix} A_{II} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_I \\ 0 \end{pmatrix}$$

Informatiquement, cela veut juste dire que nous devons modifier les lignes et les colonnes du système construit par l'algorithme 2, en remplaçant les éléments diagonaux par 1 et les éléments hors-diagonaux par 0. Cette opération peut se faire renuméroter explicitement les inconnues comme nous l'avons fait.

La plupart des logiciels d'éléments finis procèdent ainsi en deux étapes. On calcule d'abord la matrice du système sans tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet (d'ailleurs, pour des raisons de cohérence, on ne se préoccupe pas du tout des conditions aux limites dans cette première étape), puis on traite l'ensemble des conditions aux limites :

- les conditions de Neumann rajoutent des termes au second membre ;
- les conditions de Robin modifient les éléments de la matrice de rigidité ;
- les conditions de Dirichlet mènent à l'opération que nous venons de détailler.

Pour conclure cette partie, nous indiquons brièvement les modifications à apporter à la procédure précédente dans le cas de conditions de Dirichlet non-homogènes. Nous répondons tout d'abord à une question laissée en suspens au paragraphe 2.5.2 : étant donnée une fonction g définie sur le bord, comment construire un relèvement, c'est-à-dire une fonction $u_g \in H^1(\Omega)$ telle que $u_g = g$ sur $\partial\Omega$? Il existe une réponse très simple dans le contexte des éléments finis.

Notons g_i les valeurs de g aux sommets situés sur $\partial\Omega$. D'après la proposition 3.4, il existe une unique fonction $u_{gh} \in V_h$ définie par

$$u_{gh_i} = \begin{cases} g_i & \text{si } i \text{ est un noeud du bord,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas un relèvement de g (elle ne coïncide avec g qu'aux noeuds du bord, et pas nécessairement entre les noeuds), mais joue ce rôle au niveau discret. Autrement dit, on peut chercher la solution approchée u_h dans le sous-espace

$$V_{Dgh} = \{v_h \in V_h, v_{hi} = g_i \text{ en tous les noeuds de } \partial\Omega_D\}.$$

Il faut ensuite éliminer les noeuds du bord comme nous l'avons fait précédemment. Il suffit de remplacer le système 3.18 par

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_I \\ g_h \end{pmatrix}.$$

L'inconvénient est que l'on perd la symétrie de la matrice. On obtient une formulation équivalente, avec une matrice symétrique, en écrivant

$$\begin{pmatrix} A_{II} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_I - A_{IB}g_h \\ g_h \end{pmatrix}.$$

3.4 Convergence

Pour compléter l'étude mathématique de la méthode, il convient de pouvoir quantifier la qualité de l'approximation de la solution exacte u par la solution approchée u_h . Comme nous l'avons signalé, un premier élément de réponse est fourni par le lemme de Céa 3.2, qui majore l'erreur entre u et u_h par (un multiple) de l'erreur d'approximation de V par V_h . En d'autres termes, nous pouvons maintenant « oublier » les problèmes variationnels (3.1) et (3.2), et examiner simplement la question de savoir comment une fonction (quelconque) $v \in V$ peut être approchée par une fonction de V_h , lorsque h tend vers 0, autrement dit lorsque l'on raffine le maillage.

Comme nous l'avons déjà signalé, le but d'une telle étude de convergence *n'est pas* de donner une indication sur un calcul particulier (nous verrons que cela est rendu impossible par l'intervention de diverses constantes que l'on ne connaît pas), mais plutôt de donner confiance dans le principe de la méthode, dans la mesure où l'on saura ainsi que l'erreur due à la discrétisation peut, **en principe**, être rendue arbitrairement petite par un choix adéquat du maillage.

Disons un mot sur l'argument parfois employé pour ne pas se poser ces questions : « de toutes manières, les erreurs numériques seront négligeables devant celles causées par l'imprécision avec laquelle sont connus les paramètres physiques du calcul ». Cela est vrai dans certains cas, mais ne dispense aucunement de l'étude de convergence de la méthode employée. L'argument précédent n'est valable que parce que l'on « sait » que la méthode numérique converge. Sans cette information (au moins dans des cas simples), comment peut-on dire que l'erreur numérique est négligeable ?

3.4.1 L'opérateur d'interpolation

La stratégie pour démontrer la convergence sera de construire une fonction $I_h v$ dont on peut majorer la distance à une fonction $v \in V$ donnée. Commençons par construire cet opérateur localement.

Définition 3.2. Soit K un triangle de sommets A_1, A_2, A_3 . On appelle **opérateur d'interpolation** sur un triangle K l'application

$$(3.19) \quad I_K : \begin{cases} C^0(K) \rightarrow P^1 \\ v \rightarrow I_K(v) = \sum_{l=1}^3 \lambda_l v(A_l). \end{cases}$$

Le fait que I_K est bien défini est une conséquence de la proposition 3.3.

Pour étudier l'opérateur d'interpolation, nous avons encore besoin de deux définitions concernant la géométrie de K .

Le diamètre de K , noté $\text{diam}(K)$, est la plus grande distance entre deux points de K .

La rondeur de K est le diamètre du plus grand cercle inscrit dans K .

Le rapport $\text{diam}(K)/\rho(K)$ mesure « l'aplatissement » de K . Il est d'autant plus grand que le triangle est proche d'être dégénéré. Comme nous allons le voir dans l'estimation d'erreur (et cela est confirmé par la pratique), il faut éviter des triangles trop aplatis.

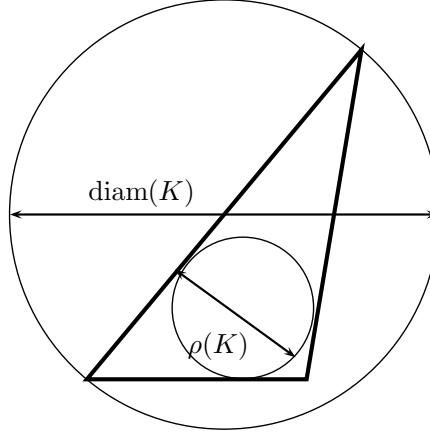


FIG. 3.7 – Diamètre et rondeur d'un triangle

Théorème 3.1. On a les inégalités suivantes, pour $v \in C^2(K)$:

$$(3.20) \quad \forall P \in K, |(v - I_K v)(P)| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(K)^2 \|D^2 v\|_{L^\infty(K)},$$

$$(3.21) \quad \forall P \in K, |\nabla(v - I_K v)(P)| \leq \frac{1}{2} \frac{\text{diam}(K)^2}{\rho(K)} \|D^2 v\|_{L^\infty(K)},$$

avec

$$\|D^2 v\|_{L^\infty(K)} = \max \left(\sup_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) \right|, \sup_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) \right|, \sup_{(x,y) \in K} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) \right| \right)$$

Preuve. Puisque nous supposons que $V \in C^2(K)$, nous pouvons utiliser un développement de Taylor en chacun des sommets de K . Pour tout point $P \in K$, il existe trois points $\xi_l \in [A^l, P]$ tels que

$$(3.22) \quad v(A^l) = v(P) + \nabla v(P) \cdot (A^l - P) + \frac{1}{2} (A^l - P)^T D^2 v(\xi_l) (A^l - P).$$

Calculons $I_K v = \sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) v(A^l)$:

$$\sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) v(A^l) = v(P) \sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) + \nabla v(P) \cdot \sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) (A^l - P) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) (A^l - P)^T D^2 v(\xi_l) (A^l - P).$$

Compte tenu de ce que $\sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) = 1$, et $\sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) A^l = P$, il vient

$$I_K v(P) - v(P) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \lambda_l(P) (A^l - P)^T D^2 v(\xi_l) (A^l - P),$$

d'où l'estimation 3.20, puisque $|A^l - P| \leq \text{diam}(K)$.

Pour l'estimation en norme H^1 , multiplions l'équation 3.22 par $\nabla \lambda_l(P)$, et sommons les 3 équations, en remarquant que

$$\sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) = 0, \quad \sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) \cdot P = I,$$

relations qui s'obtiennent par différentiation. On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) v(A^l) &= v(P) \sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) + \nabla v(P) \cdot \sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) (A^l - P) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) (A^l - P)^T D^2 v(\xi_l) (A^l - P) \\ &= \nabla v(P) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \nabla \lambda_l(P) (A^l - P)^T D^2 v(\xi_l) (A^l - P), \end{aligned}$$

puis

$$|\nabla(I_K v(P) - v(P))| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(K)^2 \sup_{\substack{P \in K \\ 1 \leq l \leq 3}} |\nabla \lambda_l(P)| \|D^2 v\|_{L^\infty(K)}.$$

En intégrant cette relation, et compte tenu du lemme 3.4, nous obtenons l'estimation (3.21). ■

Lemme 3.4. Pour $l = 1, 2, 3$,

$$|\nabla \lambda_l(P)| \leq \frac{1}{\rho(K)}.$$

Preuve. Puisque les coordonnées barycentriques sont des fonctions affines de P , leurs gradients sont des constantes. On a donc, pour deux points P et Q dans le triangle K ,

$$\nabla \lambda_l \cdot (P - Q) = \lambda_l(P) - \lambda_l(Q).$$

et donc $|\nabla \lambda_l \cdot (P - Q)| \leq 1$.

Par ailleurs, en notant S le disque unité de \mathbf{R}^2 , on a

$$|\nabla \lambda_l| \leq \sup_{u \in S} |\nabla \lambda_l \cdot u|,$$

et comme, pour $u \in S$ il existe P et Q dans K tels que $P - Q = \rho(K)u$, il vient

$$\forall l \in \{1, 2, 3\}, \quad |\nabla \lambda_l| \leq \sup_{P, Q \in K} \frac{|\nabla \lambda_l \cdot (P - Q)|}{\rho(K)} \leq \frac{1}{\rho(K)}.$$

■

3.4.2 Estimation de l'erreur

Pour déduire le résultat de convergence des estimations précédentes, nous devons faire une hypothèse sur la famille de maillages.

Définition 3.3. Nous dirons qu'une famille de triangulations $\mathcal{T}_{h>0}$ est **régulière** si

- i) la suite $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$ tend vers 0 ;
- ii) il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $h > 0$, et tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$(3.23) \quad \frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C.$$

Remarque 3.6. La condition 3.23 rend précise la condition, que nous avopns déjà mentionnée, qui demande que les triangles de \mathcal{T}_h ne soit pas trop aplatis.

Pour appliquer les résultats du paragraphe précédent, nous introduisons l'opérateur **d'interpolation globale**. Pour toute fonction V continue sur Ω , définissons

$$I_h v = \sum_{i=1}^{N_s} \varphi_i v(A_i),$$

où, rappelons-le, A_i est le i^{e} sommet de la triangulation, et φ_i la fonction de base associée. Naturellement, l'opérateur d'interpolation global est lié aux opérateurs locaux introduits au paragraphe précédent par

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (I_h v)|_K = I_K(v|_K).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 3.2. Soit \mathcal{T}_h une famille de triangulations régulières, d'un ouvert polygonal Ω . Supposons que la solution exacte $u \in C^2(\Omega)$. Alors la méthode des éléments finis converge, et on a les estimations :

$$(3.24) \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 h^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$(3.25) \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 h \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

où C_0 et C_1 sont deux constantes indépendantes de h ,

Preuve. D'après le lemme de Céa (proposition 3.2), il suffit de montrer qu'il existe une fonction $v_h \in V_h$ telle que

$$\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Naturellement, la fonction v_h sera l'interpolé de la solution exacte $v_h = I_h u$. C'est ici que nous avons besoin de la régularité $u \in C^2(\Omega)$, puisque l'opérateur I_h n'est pas défini sur $H^1(\Omega)$.

Pour démontrer les estimations du théorème, calculons

$$\int_{\Omega} |u - I_h u|^2 dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |u|_K - I_K(u|_K)|^2 dx \leq \frac{1}{2} h^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|,$$

grâce à l'inégalité (3.20), où $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$. C'est l'estimation 3.24.

Pour la seconde estimation, nous avons de manière similaire

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - I_h u)|^2 dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla(u|_K - I_h(u|_K))|^2 dx \leq \frac{1}{2} \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(K)^2}{\rho(K)} |K|.$$

Nous utilisons ici l'hypothèse de régularité du maillage. Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, $\frac{\text{diam}(K)^2}{\rho(K)} \leq C \text{diam}(K)$.

On en déduit

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - I_h u)|^2 dx \leq C_1 h |\Omega| \|D^2 u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

qui est l'estimation cherchée. ■

Remarque 3.7. On peut améliorer le résultat précédent en remplaçant l'hypothèse $u \in C^2(\Omega)$ par l'hypothèse (plus raisonnable) $u \in H^2(\Omega)$ (et en changeant les normes au second membre des inégalités).

Remarque 3.8. Par contre, le taux de convergence du théorème 3.2 ne peut pas être amélioré. Si la solution est moins régulière, la convergence est effectivement plus lente, comme nous l'illustrons au paragraphe 3.4.3.

Remarque 3.9. L'analyse précédente suppose que les intégrales élémentaires sont calculées exactement. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.3.2, il est rare que cela soit possible et l'on doit recourir à l'intégration numérique. L'analyse de convergence doit être modifiée pour prendre ces modifications en compte. Ces modifications sont assez délicates, et nous nous contenterons d'en donner la principale conclusion (voir [15] pour une introduction, [6], où [4] pour une analyse plus complète).

Il est naturel de vouloir choisir la formule de quadrature de façon à ce que son utilisation ne modifie pas l'ordre de convergence obtenu au théorème 3.2. On démontre dans les références précédentes que les choix cités au paragraphe 3.3.2 entrent dans cette catégorie.

3.4.3 Illustration numérique

Nous illustrons la théorie précédente en montrant un exemple de calcul tiré du livre [11], utilisant des maillages avec différents nombres de points, et des solutions possédant différents degrés de régularité.

Le problème est l'équation de Poisson sur le domaine $\Omega =]0, 1] \times]0, 1[$. Le second membre et la condition de Dirichlet sont choisis de façon que la solution exacte soit

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \frac{\alpha}{2}.$$

Nous représentons tout d'abord, sur la figure 3.8 la solution exacte, pour deux valeurs différentes de α . On notera (passer en coordonnées polaires) que la régularité de u est fonction de α . Plus précisément

$$u \in \begin{cases} H^1(\Omega) & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ H^2(\Omega) & \text{si } 1 < \alpha \leq 2 \\ H^3(\Omega) & \text{si } 2 < \alpha \leq 3. \end{cases}$$

Nous avons calculé la solution sur un maillage régulier du carré, comportant de pas h , c'est-à-dire que les sommets du maillage ont pour coordonnées (ih, jh) , pour $0 \leq i, j \leq N+1$, avec $h = 1/(N+1)$. Ce maillage est représenté sur la figure 3.9.

La figure 3.10 présente les erreurs en norme L^2 et H^1 en fonction de h , pour différentes valeurs de α ($\alpha = 0.5, 1.5$ et 2.5), en échelle log-log. L'information intéressante sur cette figure se situe dans les pentes des différentes droites. Tout d'abord, on s'attend bien à observer (approximativement) des droites, puisque l'erreur doit être de la forme $\|u - u_h\| \approx h^p$, où

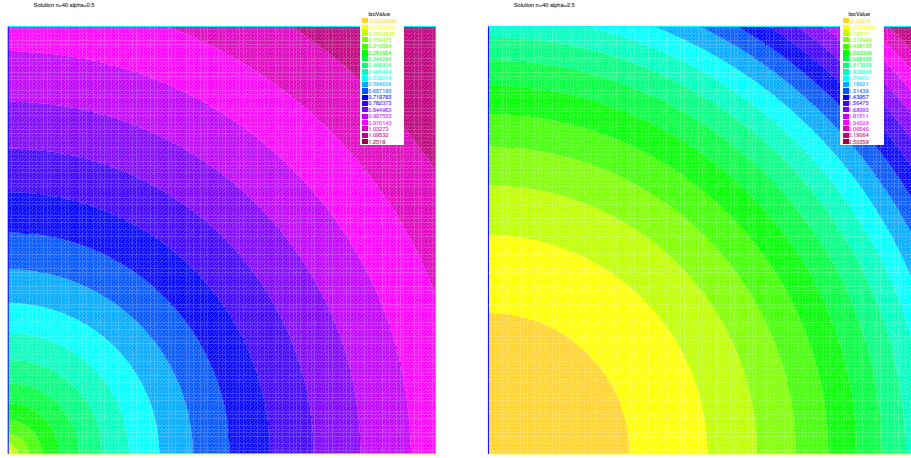


FIG. 3.8 – Solution exacte, $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$. À gauche, $\alpha = 0.5$, à droite, $\alpha = 2.5$

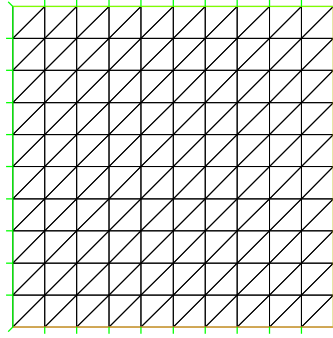


FIG. 3.9 – Maillage uniforme du carré unité

p dépend de la régularité de la solution, et de la norme. Dans notre cas, la théorie du paragraphe 3.4.2 prévoit une valeur de $p = 2$ pour la norme L^2 et $p = 1$ pour la norme H^1 . Un calcul approché donne les valeurs indiquées dans la table 3.1. Pour $\alpha = 0.5$, les valeurs sont

	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 2.5$
Erreur L^2	1.74	1.93	1.98
Erreur H^1	0.50	1.45	1.95

TAB. 3.1 – Pentes des droites d'erreur pour différentes valeurs de α

inférieures à 1 (pour la norme H^1) et à 2 (pour la norme L^2), ce qui s'explique par le manque de régularité de la solution. Par contre pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2.5$ et pour la norme L^2 , on observe bien une pente pratiquement égale à 2, alors que pour la norme H^1 , les pentes sont supérieures à ce que prévoit la théorie.

Pour conclure, nous montrons la répartition spatiale des erreurs en fonction de α , et de la finesse du maillage. L'effet de la singularité est apparent, surtout sur la première ligne.

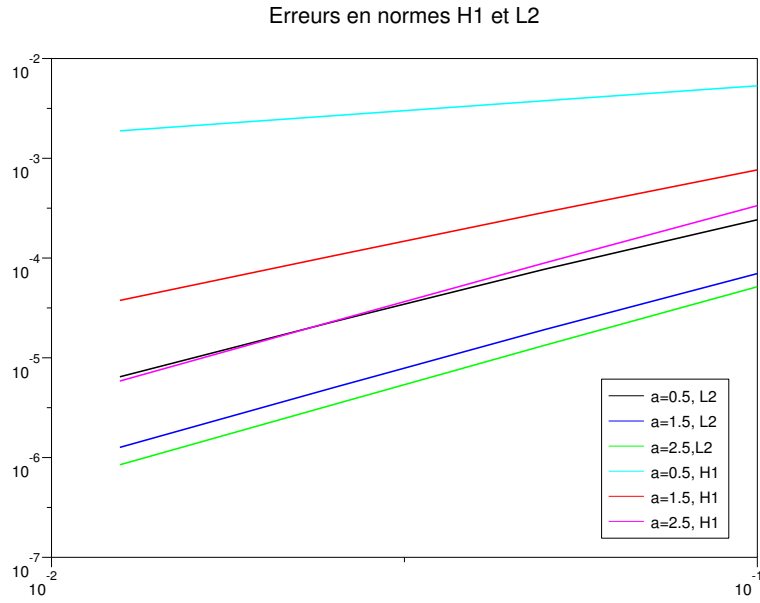


FIG. 3.10 – Erreurs en norme L^2 et H^1

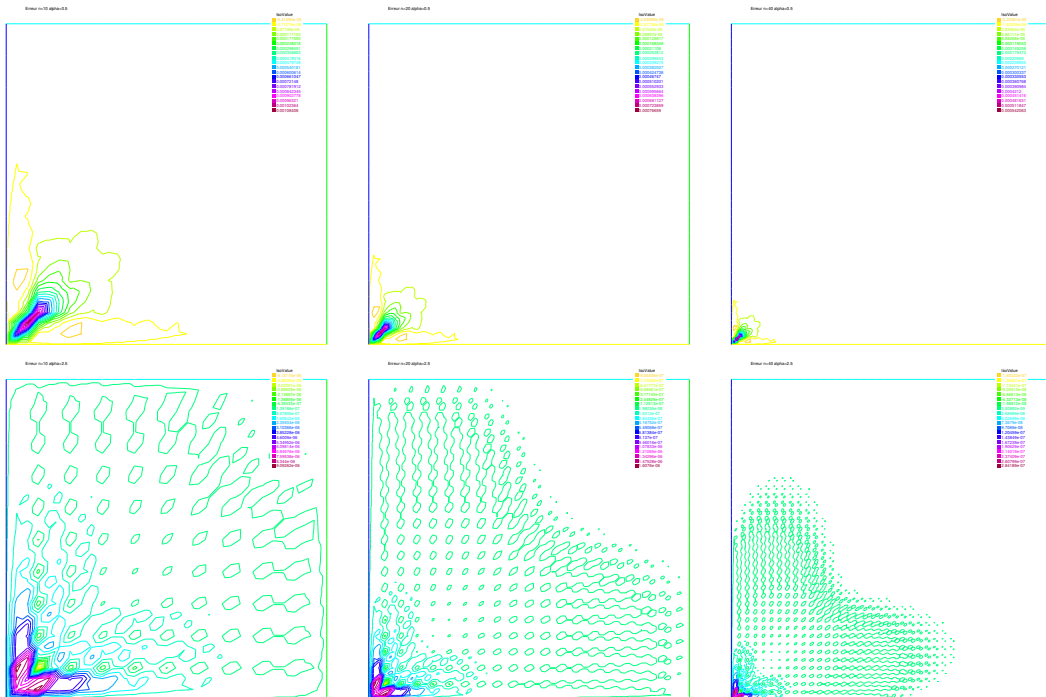


FIG. 3.11 – Erreurs L^2 en fonction du maillage et de α . Première ligne $\alpha = 0.5$, deuxième ligne $\alpha = 2.5$. De gauche à droite, $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$

Annexe A

Espaces de Hilbert

Cet appendice présente quelques unes des principales propriétés des espaces de Hilbert, essentiellement celles qui sont utilisées au chapitre 2. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel préhilbertien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire), complet pour la norme associée. L'exemple canonique est $L^2(\Omega)$. C'est la généralisation en « dimension infinie » des espaces euclidiens usuels, et ils en partagent la plupart des propriétés, avec toutefois quelques différences dues à la perte de la dimension finie.

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel sur \mathbf{R} .

A.1 Définitions et exemples

Définition A.1. Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} . Une *norme* sur E est une application de E dans \mathbf{R} , possédant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$ et $\|x\|_E = 0 \Rightarrow x = 0$;
- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \|\alpha x\|_E = |\alpha| \|x\|_E$;
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

Exemple A.1.

Dans le cas où E est de dimension n (nous l'identifions alors à \mathbf{R}^n), les normes suivantes sont les plus utilisées :

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$;
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$;

Définition A.2. Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} . Un *produit scalaire* sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbf{R} , notée (\cdot, \cdot) , possédant les propriétés suivantes :

- i) $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
- ii) $\forall (x, y) \in E^2, (x, y) = (y, x)$;
- iii) $\forall x \in E, (x, x) \geq 0$, et $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace *préhilbertien*.

Exemple A.2.

Sur \mathbf{R}^n , le produit scalaire euclidien usuel est :

$$(A.1) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Exemple A.3.

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n . L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$(A.2) \quad L^2(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbf{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \infty\}$$

est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire :

$$(A.3) \quad (f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante :

$$(A.4) \quad \|x\|_E = \sqrt{(x, x)}.$$

Définition A.3. Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Exemple A.4.

L'espace vectoriel \mathbf{R}^n , muni du produit scalaire euclidien usuel, est un espace de Hilbert.

Le résultat suivant est fondamental.

Proposition A.1. *L'espace vectoriel $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire défini en (A.3), est un espace de Hilbert.*

Au paragraphe 2.3, on étudie les espaces de Sobolev, qui sont d'autres exemples d'espace de Hilbert.

A.2 Propriétés des espace de Hilbert

Proposition A.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité :*

$$(A.5) \quad |(x, y)|^2 \leq \|x\|_E^2 \|y\|_E^2.$$

L'égalité n'a lieu que si x et y sont proportionnels.

Proposition A.3 (Identité du parallélogramme). *Pour tous $(x, y) \in E^2$, on a l'identité :*

$$(A.6) \quad \|x + y\|_E^2 + \|x - y\|_E^2 = 2 \left(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 \right)$$

Les deux théorèmes suivants sont parmi les plus importants de la théorie.

Théorème A.1 (de projection). Soit F un sous-ensemble fermé, convexe de E , et $z \in E$ donné. Il existe un unique élément de F tel que :

$$(A.7) \quad \|z - x_0\|_E = \inf_{x \in F} \|z - x\|_E, \quad x \in F.$$

Le point x_0 est caractérisé par la condition :

$$(A.8) \quad x_0 \in F \quad \text{et} \quad (z - x_0, x - x_0) \leq 0, \quad \forall x \in F$$

Le point x_0 mis en évidence au théorème A.1 s'appelle la *projection* de z sur F . Dans le cas où F est un sous-espace vectoriel, on peut préciser ce résultat :

Corollaire A.1. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E , et soit $z \in E$. La projection de z sur F est caractérisée par :

$$(A.9) \quad x_0 \in F \quad \text{et} \quad (z - x_0, x) = 0, \quad \forall x \in F$$

Dans un espace de Hilbert, on dit que deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est :

$$F^\perp = \{x \in E, (x, y) = 0, \forall y \in F\}.$$

Une conséquence des résultats précédents est :

Corollaire A.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E (non nécessairement fermé). On a

$$(A.10) \quad F^\perp + \overline{F} = E$$

Avant d'énoncer le dernier résultat, rappelons qu'une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E à valeurs dans \mathbf{R} .

Théorème A.2 (de représentation de Riesz). Soit l une forme linéaire sur E . Il existe un unique élément $x \in E$ tel que

$$(A.11) \quad \forall u \in E, l(u) = (u, x)$$

Autrement dit, toute forme linéaire se *représente* par le produit scalaire avec un élément de E . On dit qu'un espace de Hilbert est (canoniquement) isomorphe à son dual.

Bibliographie

- [1] G. ALLAIRE. Analyse numérique et optimisation. Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Cours de l'École Polytechnique, 2004.
- [2] Owe AXELSSON et Vincent A. BARKER. *Finite element solution of boundary value problems : theory and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [3] Haïm BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et application*. Masson, 1983.
- [4] Philippe G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1980.
- [5] Robert DAUTRAY et Jacques-Louis LIONS, éditeurs. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 1 : Modèles physiques. Masson, 1987.
- [6] Robert DAUTRAY et Jacques-Louis LIONS, éditeurs. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 5 : Méthodes intégrales et numériques. Masson, 1987.
- [7] Ghilain de MARSILY. *Hydrogéologie Quantitative*. Masson, 1981.
- [8] Philippe DESTUYNDER. *Modélisation mécanique des milieux continus*. Numéro 5/6 dans Mathématiques et Applications. Ellipses, 1991.
- [9] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1990.
- [10] G. DUVAUT et J. L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [11] Alexandre ERN et Jean-Luc GUERMOND. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Numéro 36 dans Mathématiques et Applications. Springer, 2002.
- [12] Pascal Jean FREY et Paul-Louis GEORGE. *Maillages. Applications aux éléments finis*. Hermes, Paris, 1999.
- [13] F. HECHT et E. SALTEL. « EMC2, un éditeur de maillages et de contours en bidimensionnels ». <http://www-rocq1.inria.fr/gamma/cdrom/www/emc2/fra.htm>, 1995.
- [14] T. J. R. HUGHES. *Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, New-York, 2000.
- [15] Peter KNABNER et Lutz ANGERMAN. *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*. Numéro 44 dans Texts in Applied Mathematics. Springer, 2003.
- [16] J. David LOGAN. *Transport Modelling in Hydrogeochemical Systems*. Numéro 15 dans Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2001.

- [17] Francis MAISONNEUVE. « Mathématiques 1 – Calcul différentiel ». Cours de tronc commun, 1er semestre, École des Mines de Paris, 2004.
- [18] Alain MIRANVILLE et Roger TEMAM. *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*. Scopus. Springer, 2003.
- [19] Jean-Claude NÉDÉLEC. *Notions sur les techniques d'éléments finis*. Numéro 7 dans Mathématiques et Applications. Ellipses, 1991.
- [20] Olivier PIRONNEAU et Brigitte LUCQUIN. *Introduction au calcul scientifique*. Masson, 1997.
- [21] Pierre-Arnaud RAVIART et Jean-Marie THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.
- [22] Gilbert STRANG et George J. FIX. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall Series in Automatic Computation. Prentice Hall, 1973.
- [23] G. VOUILLE et S. M. TIJANI. « La méthode des éléments finis ». Notes de cours, École des Mines de Paris, 1978.
- [24] O.C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR. *La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires*. afnor technique, traduction française de la 4^e édition édition, 1991.