

Ondes dans les milieux continus

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Jean-François Mercier

1^{er} septembre 2008

Table des matières

1	Quelques exemples d'équations d'ondes	5
1.1	L'équation des cordes vibrantes	5
1.1.1	Etablissement des équations	5
1.1.2	Résolution du problème de Cauchy	7
1.1.3	La conservation de l'énergie	12
1.2	L'élastodynamique	13
1.2.1	Les équations	13
1.2.2	La décomposition de Helmholtz	14
1.2.3	Les ondes P	15
1.2.4	Les ondes S	16
1.2.5	La conservation de l'énergie	16
1.2.6	Propagation à vitesse finie	18
1.2.7	Cas d'un solide anisotrope	20
1.3	Un aperçu rapide d'autres types d'ondes	22
1.3.1	Les ondes acoustiques	23
1.3.2	Les ondes électromagnétiques	24
2	Dispersion géométrique, dispersion fréquentielle	27
2.1	Théorème de la phase stationnaire	27
2.2	Application au problème de Cauchy en acoustique	29
2.2.1	Résolution du problème de Cauchy	29
2.2.2	Décroissance locale de l'énergie	31
2.2.3	Dispersion géométrique	32
2.3	Application au problème de Cauchy dans une poutre	34
2.3.1	Résolution du problème de Cauchy	35
2.3.2	Dispersion fréquentielle	36
3	Réflexion, transmission, guidage en milieu stratifié	41
3.1	Le principe des images	42
3.1.1	Réflexion d'une onde acoustique sur une paroi rigide	42
3.1.2	Réflexion d'une onde électromagnétique sur une paroi parfaitement conductrice	45
3.2	Le dioptré acoustique	47
3.3	Le demi-espace élastique	51
3.3.1	Découplage entre ondes SH et ondes P-SV	52

3.3.2	Equations des modes de type P-SV	54
3.3.3	Calculs des modes de type P-SV	56
3.3.4	L'onde de Rayleigh	58

Chapitre 1

Quelques exemples d'équations d'ondes

1.1 L'équation des cordes vibrantes

1.1.1 Etablissement des équations

On considère une tige métallique élastique homogène de densité ρ_0 , de longueur L et de section constante σ_0 . On suppose qu'elle est au repos soumise à une tension moyenne T_0 (T_0 peut être ≥ 0 ou ≤ 0).

On s'intéresse aux vibrations longitudinales de la barre. Un point de la barre est repéré par son abscisse $x \in [0, L]$. On note $u(x, t)$ le déplacement longitudinal à l'instant t du point M situé en x lorsque la barre est au repos et $T(x, t)$ la tension de la barre en x à l'instant t . ($T(x, t)$ désigne la force exercée à l'instant t par la portion $[x, L]$ de la barre sur la portion $[0, x]$.) On peut écrire deux équations reliant u et T : la première résulte du Principe Fondamental de la Dynamique et la seconde est une relation de comportement (la loi de Hooke). On se place dans les hypothèses de petites perturbations, ce qui nous permet d'écrire des équations linéarisées.

Considérons donc un élément de barre situé entre les abscisses x et $x + \Delta x$. Sa longueur au repos est $l = \Delta x$. A l'instant t , on observe un allongement δl tel que :

$$\delta l = (x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - (x + u(x, t))) - \Delta x$$

soit

$$\delta l = u(x + \Delta x, t) - u(x, t) \simeq \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Delta x. \quad (1.1)$$

Or d'après la loi de Hooke, pour un élément de longueur l soumis à une tension moyenne T_0 , un allongement de longueur δl nécessite un accroissement de tension δT tel que :

$$\delta T = E_0 \sigma_0 \frac{\delta l}{l}.$$

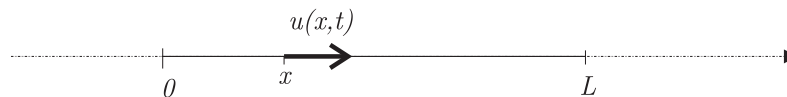


FIG. 1.1 – Vibrations longitudinales d'une barre élastique

La constante E_0 est appelée le module d'Young du matériau constituant la barre. On a donc finalement

$$T(x, t) - T_0 = E_0 \sigma_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (1.2)$$

Par ailleurs, d'après le Principe Fondamental de la Dynamique, appliqué à l'élément de barre $[x, x + \Delta x]$:

$$\rho_0 \sigma_0 \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T(x + \Delta x, t) - T(x, t)$$

qui s'écrit en première approximation

$$\rho_0 \sigma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t). \quad (1.3)$$

De l'équation (1.3) et de la dérivée de l'équation (1.2), on déduit finalement une équation ne portant que sur le déplacement u :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On notera désormais c la quantité homogène à une vitesse définie par :

$$c = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}.$$

L'équation précédente devient alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

qui est appelée *équation des ondes monodimensionnelle*.

Remarque 1.1.1 • Dans le cas d'une barre en acier, on trouve $c \simeq 5000 \text{ m/s}$.

- On peut traiter de la même façon les vibrations transversales d'une corde tendue (c'est-à-dire soumise à une tension $T_0 \geq 0$). On obtient alors l'équation suivante portant sur le déplacement transversal w de la corde :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{r_0}}$, où r_0 représente la densité linéique de la corde. Pour cette raison, l'équation des ondes monodimensionnelle est souvent appelée dans la littérature l'équation des cordes vibrantes.

1.1.2 Résolution du problème de Cauchy

La barre infinie

Supposons que l'on ait une barre infinie (nous reviendrons sur cette hypothèse un peu plus loin) et que l'on cherche à résoudre le problème suivant, appelé problème de Cauchy, dont l'inconnue est le déplacement $u(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Autrement dit, on se donne l'état de la barre (position et vitesse) à l'instant initial et l'on veut connaître les mouvements de la barre au cours du temps, lorsqu'elle n'est soumise à aucune force extérieure.

Notons

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ix\xi} dx$$

la transformée de Fourier de u . Alors \hat{u} est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + c^2 \xi^2 \hat{u} = 0 & \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A ξ fixé, il s'agit d'une équation différentielle en temps dont la solution s'exprime simplement sous la forme suivante :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-i\xi ct} + \hat{g}(\xi) e^{i\xi ct}.$$

On a donc finalement :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{f}(\xi) e^{-i\xi ct} + \hat{g}(\xi) e^{i\xi ct} \right) e^{ix\xi} d\xi,$$

soit encore (si f et g désignent les transformées de Fourier inverses de \hat{f} et de \hat{g}) :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Remarque 1.1.2 • En fait, on peut montrer que toute solution de l'équation des ondes s'écrit sous cette forme. Cela signifie que la solution est la somme de deux ondes se propageant à la vitesse c , l'une “vers la droite” et l'autre “vers la gauche”.

- On peut remarquer que la transformation de Fourier en espace nous a permis de représenter la solution $u(x, t)$ du problème transitoire comme une superposition d'ondes harmoniques en temps de la forme

$$e^{i\xi(x \pm ct)}.$$

C'est l'idée que nous chercherons à généraliser dans la suite du cours.

Cherchons maintenant à exprimer les fonctions f et g à l'aide des données initiales u_0 et u_1 . Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) + g(x), \\ u_1(x) = -cf'(x) + cg'(x), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = \frac{du_0}{dx}(x), \\ -f'(x) + g'(x) = \frac{1}{c}u_1(x). \end{cases}$$

La résolution de ce système 2×2 donne alors

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{du_0}{dx}(x) + \frac{1}{c}u_1(x) \right), \\ f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{du_0}{dx}(x) - \frac{1}{c}u_1(x) \right), \end{cases}$$

d'où finalement (en utilisant l'équation $u_0 = f + g$)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds \right) + a, \\ g(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds \right) - a, \end{cases}$$

où a est une constante arbitraire.

On a ainsi obtenu l'expression explicite suivante du déplacement u au cours du temps en fonction des données initiales :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds.$$

Cette expression appelle quelques commentaires :

- Les droites du plan (x, t) d'équations $x - ct = cte$ et $x + ct = cte$ jouent un rôle important dans la description du phénomène. On les appelle droites *caractéristiques*. On dit qu'il y a propagation *le long des caractéristiques* au sens où, par exemple, la fonction $\frac{1}{2}u_0(x - ct)$ est constante sur une droite d'équation $x - ct = cte$.
- On remarque que la solution au point \tilde{x} et au temps \tilde{t} ne dépend que des données initiales dans le *cône rétrograde* compris entre les deux droites caractéristiques $x - ct = \tilde{x} - c\tilde{t}$ et $x + ct = \tilde{x} + c\tilde{t}$.
- Inversement, on remarque qu'une modification des données initiales dans l'intervalle $[a, b]$ ne modifie pas la solution à l'extérieur du cône situé entre les droites caractéristiques $x + ct = a$ et $x - ct = b$. Ce cône est appelé le *cône d'influence* de l'intervalle $[a, b]$.

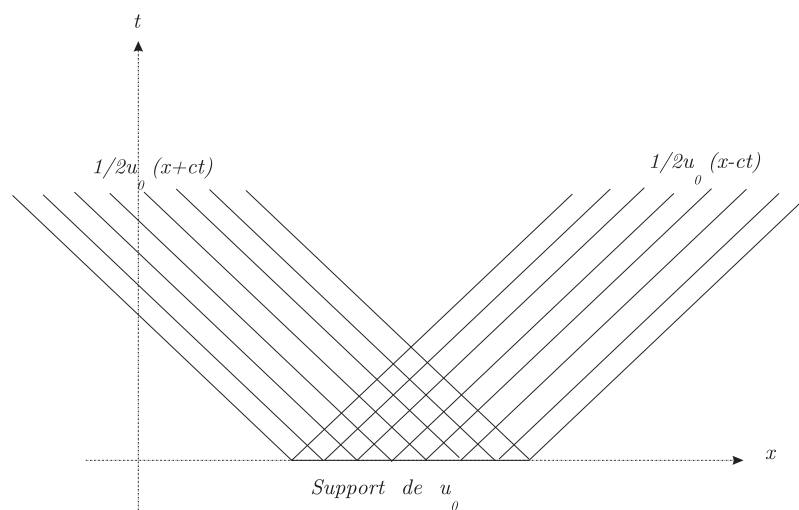


FIG. 1.2 – Droites caractéristiques

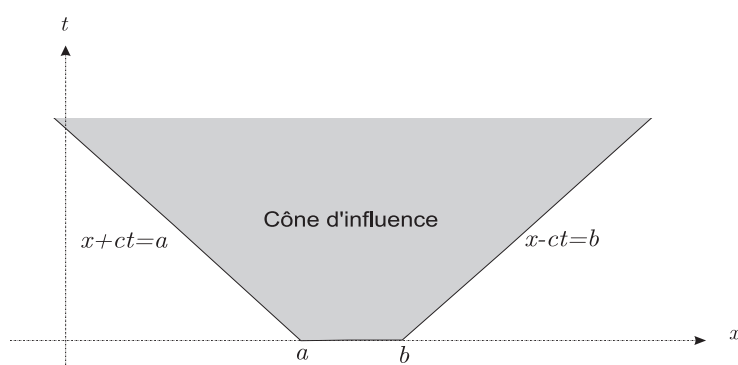


FIG. 1.3 – Le cône d'influence

La barre semi-infinie

Supposons maintenant que la barre occupe le demi-axe réel $x \geq 0$ et soit encastrée en $x = 0$. On s'intéresse alors au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t > 0, \\ u(0, t) = 0, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.5)$$

On peut facilement résoudre ce problème en se ramenant au cas précédent. Pour cela, on prolonge la barre de façon fictive au demi-axe $x \leq 0$ et l'on résout un problème de Cauchy sur \mathbb{R} dont les données initiales sont obtenues en prolongeant u_0 et u_1 par antisymétrie :

$$\tilde{u}_j(x) = \begin{cases} u_j(x) & \text{si } x > 0, \\ -u_j(-x) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

pour $j = 0$ et $j = 1$.

La solution de ce problème est donnée, d'après le paragraphe précédent, par la formule suivante :

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \{ \tilde{u}_0(x - ct) + \tilde{u}_0(x + ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{u}_1(s) ds.$$

Il est alors facile de vérifier que $\tilde{u}(\cdot, t)$ reste antisymétrique au cours du temps :

$$\tilde{u}(-x, t) = -\tilde{u}(x, t) \quad \forall t > 0 \text{ et } x > 0,$$

et que :

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \forall t > 0.$$

On en déduit en particulier que la restriction u de \tilde{u} au demi-axe $x > 0$ est solution du problème (1.5). Cette méthode de construction d'une solution est appelée *la méthode des images*.

On peut interpréter la solution en mettant en évidence le phénomène de réflexion de l'onde en $x = 0$. En effet, supposons pour simplifier que $u_1 = 0$ et que u_0 a pour support l'intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Alors, pour t petit, c'est-à-dire tant que $a - ct > 0$, tout se passe comme si la barre était infinie et l'on a :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)].$$

A l'instant $t = a/c$, l'onde qui se propage vers la gauche atteint l'extrémité encastrée de la barre et elle se *réfléchit* avec un changement de signe. On a alors :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [-u_0(-x + ct) + u_0(x + ct)] \quad \text{si } x < ct$$

et

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] \quad \text{si } x \geq ct.$$

Remarque 1.1.3 On peut traiter de façon identique le cas d'une barre semi-infinie dont l'extrémité est libre. On a dans ce cas $T_0 = 0$ et $T(0, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$; d'après la loi de Hooke, le champ de déplacement vérifie alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Il faut dans ce cas prolonger les données u_0 et u_1 par symétrie au demi-axe réel négatif. La réflexion des ondes en $x = 0$ se fait cette fois sans changement de signe.

La barre finie

On considère finalement le cas d'une barre de longueur finie L encastrée en $x = 0$ et en $x = L$:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \forall t > 0.$$

Cette fois, les ondes vont se réfléchir successivement aux deux extrémités. On peut là encore résoudre complètement le problème en prolongeant les données à $x > L$ et à $x < 0$. On commence par prolonger u_0 et u_1 par antisymétrie à $[-L, 0]$: on obtient ainsi un problème de même nature pour une barre de longueur $2L$. De proche en proche, on construit finalement un prolongement $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ des données à tout \mathbb{R} . Et il est facile de vérifier que \tilde{u}_0 et \tilde{u}_1 sont des fonctions impaires et périodiques de période $2L$. Il en sera de même pour la solution $\tilde{u}(x, t)$. Ceci nous conduit naturellement à une méthode différente qui consiste à utiliser une décomposition de $u(., t)$ en série de Fourier, ou plus précisément une série de sinus, puisque $u(., t)$ est impaire. On écrit donc :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En injectant cette forme dans l'équation, on obtient une équation différentielle portant sur chaque coefficient a_n :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} a_n = 0 \quad \forall n \geq 1, \forall t > 0$$

qui a pour solution générale

$$a_n(t) = f_n e^{-i \frac{n\pi}{L} ct} + g_n e^{i \frac{n\pi}{L} ct}.$$

On a donc :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \left(f_n e^{-i \frac{n\pi}{L} ct} + g_n e^{i \frac{n\pi}{L} ct} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On peut là encore déterminer f_n et g_n à l'aide des conditions initiales et l'on obtient :

$$\begin{cases} f_n = \frac{1}{2} \left((u_0)_n - \frac{iL}{n\pi c} (u_1)_n \right) + a \\ g_n = \frac{1}{2} \left((u_0)_n + \frac{iL}{n\pi c} (u_1)_n \right) - a \end{cases}$$

où a est une constante arbitraire et $(u_j)_n$ désigne le n ième coefficient de la décomposition de u_j en série de sinus.

A nouveau, nous avons obtenu la solution transitoire $u(x, t)$, grâce à la décomposition en série de Fourier en espace, comme superposition d'ondes harmoniques *stationnaires* de la forme

$$e^{\pm i \frac{n\pi}{L} ct} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ces solutions harmoniques en temps sont en fait les modes propres de la barre encastree et la technique que nous avons utilisée pour déterminer u est connue plus généralement sous le nom de *méthode modale*.

1.1.3 La conservation de l'énergie

Considérons finalement le cas général d'une barre, finie ou infinie, occupant l'intervalle $[a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). On considère alors le problème de Cauchy qui consiste à trouver $u(x, t)$ solution de l'équation des cordes vibrantes (1.4) telle que

- $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ sont deux fonctions données u_0 et u_1 (que l'on suppose régulières et à support borné).
- Si la barre est finie ou semi-infinie, u vérifie aux extrémités de la barre une condition aux limites qui est
 - ▷ $u = 0$ si la barre est encastree à cette extrémité,
 - ▷ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ si cette extrémité est libre.

En multipliant l'équation (1.4) par $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ et en intégrant sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$\int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = 0.$$

Or, en intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= - \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= - \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0 \tag{1.6}$$

avec

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t),$$

$$E_c(t) = \frac{1}{2c^2} \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

La quantité $E(t)$ représente l'énergie du système à l'instant t . C'est la somme de l'énergie cinétique $E_c(t)$ et de l'énergie potentielle $E_p(t)$. L'équation (1.6) signifie que l'énergie reste constante au cours du temps. Ainsi, on a :

$$E(t) = \frac{1}{2c^2} \int_a^b u_1(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 dx.$$

Ceci montre en particulier que la solution du problème de Cauchy est unique. En effet, si $u_0 = u_1 = 0$, alors $E(t) = 0$ pour tout $t > 0$, d'où l'on déduit que $u(x, t) = 0$ pour tout x et tout $t > 0$.

1.2 L'élastodynamique

Nous allons maintenant considérer le cas beaucoup plus complexe des vibrations d'un solide élastique homogène tridimensionnel. Après avoir rappelé les équations de l'élastodynamique, nous chercherons à mettre en évidence l'existence de deux types d'ondes se propageant dans le solide à des vitesses différentes, les ondes transversales (également appelées ondes S) et les ondes longitudinales (ou ondes P). Nous ne considérerons, pour simplifier, que le cas d'un milieu élastique infini. En effet, il n'est pas possible ici de résoudre de façon explicite, comme pour la barre, le problème de Cauchy. En particulier, les phénomènes de réflexion sur une paroi, libre ou encastree, ne seront pas abordés ici mais feront l'objet d'un chapitre ultérieur.

1.2.1 Les équations

Nous considérons un solide élastique homogène et isotrope infini. Chaque point du solide au repos est repéré par sa position $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in \mathbb{R}^3$. On s'intéresse aux petits mouvements du solide et l'on note $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ le champ de déplacements. Tout comme pour la barre, l'équation satisfaite par \mathbf{u} résulte du Principe Fondamental de la Dynamique et de la loi de Hooke. En l'absence de forces appliquées au solide, le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) = \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) \quad (1.7)$$

où ρ désigne la masse volumique et $\sigma(\mathbf{u})$ le tenseur des contraintes en x à l'instant t . Par définition :

$$(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}))_j = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(\mathbf{u}).$$

Par ailleurs, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) Id + 2\mu \epsilon(\mathbf{u})$$

où λ et μ sont des caractéristiques du matériau que l'on appelle les coefficients de Lamé et $\epsilon(\mathbf{u})$ est le tenseur des déformations linéarisé :

$$\epsilon_{jk}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right).$$

Remarque 1.2.1 *Tout comme l'équation des cordes vibrantes, l'équation (1.7) est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 en temps et en espace.*

Nous aurons besoin dans la suite d'une écriture différente de l'équation (1.7).

Lemma 1.2.1 *On a l'identité suivante :*

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

DÉMONSTRATION On a :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(\mathbf{u}) = \lambda \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_k} \delta_{jk} + \mu \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} \right).$$

D'où :

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}.$$

Le lemme résulte finalement de l'identité vectorielle :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

□

L'équation (1.7) admet donc la forme équivalente suivante :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) = (\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (1.9)$$

1.2.2 La décomposition de Helmholtz

Afin de mettre en évidence le fait que l'équation (1.7) modélise un phénomène de propagation d'onde, nous allons calculer des solutions particulières de (1.7) (ou de (1.9)). L'équation (1.7) est en fait un système de trois équations couplées, ce qui rend sa résolution délicate. Afin de découpler les équations, nous allons chercher la solution \mathbf{u} sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x, t) = \nabla \phi(x, t) + \operatorname{rot} \Psi(x, t) \quad (1.10)$$

où ϕ et Ψ sont appelés les potentiels (respectivement scalaire et vectoriel) :

$$\phi(x, t) \in \mathbb{R} \text{ et } \Psi(x, t) = (\Psi_1(x, t), \Psi_2(x, t), \Psi_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3.$$

L'écriture (1.10) est appelée la décomposition de Helmholtz de \mathbf{u} . On admet que tout champ \mathbf{u} peut s'écrire sous cette forme ; les potentiels sont déterminés de façon unique (à une constante additive près pour ϕ et à un gradient additif près pour Ψ).

En injectant la forme (1.10) dans l'équation (1.9), on obtient :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \phi \right) + \operatorname{rot} \left(\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \Psi \right) = 0.$$

Cette équation est satisfaite dès que ϕ et Ψ vérifient :

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \phi = 0 \quad (1.11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \Psi = 0 \quad (1.12)$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_P^2 \Delta \phi = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_S^2 \Delta \Psi = 0 \quad (1.14)$$

où l'on a posé :

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \text{ et } c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.15)$$

Ainsi, la décomposition de Helmholtz nous a permis de découpler le système de l'élastodynamique, faisant apparaître deux équations des ondes tridimensionnelles (l'une scalaire et l'autre vectorielle). Il est important de noter que les vitesses c_P et c_S qui interviennent dans ces deux équations sont distinctes.

1.2.3 Les ondes P

Soient f une fonction régulière et τ un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 . Alors il est facile de voir que la fonction :

$$\phi(x, t) = f(x \cdot \tau - c_P t)$$

est solution de l'équation (1.13). Le champ de déplacement $\mathbf{u}(x, t)$ associé est donné par :

$$\mathbf{u}(x, t) = \nabla \phi(x, t) = f'(x \cdot \tau - c_P t) \tau.$$

Il s'agit d'une *onde plane* car à tout instant t , $\mathbf{u}(x, t)$ est constant sur les plans d'équations $x \cdot \tau = C \text{ste}$. Cette onde se propage à la vitesse c_P dans la direction τ . Enfin, le déplacement $\mathbf{u}(x, t)$ est parallèle à la direction de propagation τ : pour cette raison, on dit qu'il s'agit d'une *onde de Pression* ou onde P. On parle également d'onde longitudinale.

Considérons en particulier le cas où

$$f(r) = \Re e(f_0 e^{ik_P r})$$

pour $f_0 \in \mathbb{C}$ et $k_P \in \mathbb{R}$ donnés. On a alors

$$\phi(x, t) = \Re e(f_0 e^{i(\mathbf{k}_P \cdot x - \omega t)})$$

où l'on a posé

$$\mathbf{k}_P = k_P \tau \text{ et } \omega = k_P c_P.$$

Le champ de déplacement est alors donné par la formule suivante :

$$\mathbf{u}(x, t) = \Re e(i f_0 e^{i(\mathbf{k}_P \cdot x - \omega t)}) \mathbf{k}_P.$$

On dit qu'il s'agit d'une *onde plane harmonique*. On appelle \mathbf{k}_P le vecteur d'onde, k_P le nombre d'onde et ω la pulsation. On a la relation suivante :

$$k_P = \frac{\omega}{c_P}.$$

1.2.4 Les ondes S

On peut suivre une démarche analogue pour construire des ondes S. On vérifie cette fois que, si \mathbf{F} désigne une fonction régulière à valeurs dans \mathbb{R}^3 et τ un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 , alors la fonction

$$\Psi(x, t) = \mathbf{F}(x \cdot \tau - c_S t)$$

est solution de l'équation (1.14). Le champ de déplacement $\mathbf{u}(x, t)$ associé est donné par :

$$\mathbf{u}(x, t) = \text{rot } \Psi(x, t) = \tau \times \mathbf{F}'(x \cdot \tau - c_S t).$$

Il s'agit là encore d'une onde plane qui se propage dans la direction τ à la vitesse c_S . Cette fois, le déplacement $\mathbf{u}(x, t)$ est perpendiculaire à la direction de propagation τ . On parle donc d'une *onde de cisaillement* (en anglais *Shear* d'où l'indice S) ou d'une onde transversale. On remarque que les ondes S se propagent toujours plus lentement que les ondes P.

Pour construire des ondes S harmoniques, on choisit le fonction \mathbf{F} sous la forme suivante

$$\mathbf{F}(r) = \Re(e^{i k_S r} \mathbf{F}_0)$$

où \mathbf{F}_0 est un vecteur de \mathbb{C}^3 et k_S un réel. On trouve alors que

$$\Psi(x, t) = \Re(e^{i(\mathbf{k}_S \cdot x - \omega t)} \mathbf{F}_0)$$

et que

$$\mathbf{u}(x, t) = \Re(i e^{i(\mathbf{k}_S \cdot x - \omega t)} \mathbf{k}_S \times \mathbf{F}_0),$$

où l'on a posé

$$\mathbf{k}_S = k_S \tau \text{ et } \omega = k_S c_S.$$

On a encore l'identité suivante :

$$k_S = \frac{\omega}{c_S}.$$

1.2.5 La conservation de l'énergie

Considérons un solide élastique occupant au repos un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . On suppose que ce solide est encastré sur une partie Γ_0 de sa frontière, la partie complémentaire Γ_1 étant libre. On suppose enfin que l'on connaît à l'instant initial $t = 0$ l'état du solide, c'est-à-dire le déplacement et la vitesse de chaque point du solide, et l'on s'intéresse aux mouvements du solide au cours du temps, lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure. Ce mouvement

est donné par un champ de déplacement $\mathbf{u}(x, t)$, défini pour $x \in \Omega$ et $t > 0$, qui doit vérifier les équations suivantes (où \mathbf{n} désigne la normale unitaire à $\partial\Omega$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) & \forall x \in \Omega, \forall t > 0, \\ \mathbf{u}(x, t) = 0 & \forall x \in \Gamma_0, \forall t > 0, \\ \sigma(\mathbf{u}(x, t))\mathbf{n} = 0 & \forall x \in \Gamma_1, \forall t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) & \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}^1(x) & \forall x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Les calculs précédents, décomposition de Helmholtz et ondes S et P, ne sont valables que si le solide est isotrope et homogène. La conservation de l'énergie en revanche est valable dans des situations beaucoup plus générales. Nous allons considérer ici le cas d'un solide isotrope mais pouvant être hétérogène, c'est-à-dire que les coefficients de Lamé λ et μ et la densité ρ sont supposés dépendre de la position x .

On suit alors la même démarche que pour la corde vibrante : on multiplie l'équation aux dérivées partielles

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})$$

par

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t)$$

et l'on intègre l'identité obtenue sur le domaine Ω . On obtient ainsi :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial t} dx.$$

On remarque alors que

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 dx.$$

Par ailleurs, on déduit de la formule de Green l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial t} dx = - \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial x_k} dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\sigma.$$

D'après les conditions aux limites vérifiées par \mathbf{u} , le terme de bord est nul. Par ailleurs, comme $\sigma(\mathbf{u})$ est un tenseur symétrique, on a, pour tout champs \mathbf{u} et \mathbf{v} :

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \varepsilon_{jk}(\mathbf{v}) dx$$

soit, en utilisant la loi de Hooke :

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où l'on a posé

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} dx + 2 \int_{\Omega} \mu \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk}(\mathbf{u}) \varepsilon_{jk}(\mathbf{v}) dx. \quad (1.17)$$

Ceci appliqué à $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ montre finalement que :

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (1.18)$$

avec

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t),$$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 dx,$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Tout comme pour la corde vibrante, la quantité $E(t)$ représente l'énergie du système à l'instant t . C'est la somme de l'énergie cinétique $E_c(t)$ et de l'énergie potentielle $E_p(t)$. L'équation (1.18) signifie que l'énergie reste constante au cours du temps. Ainsi, on a :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}^1|^2 dx + \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0).$$

Ceci montre là encore que la solution du problème de Cauchy est unique.

1.2.6 Propagation à vitesse finie

En utilisant des techniques énergétiques similaires à celles du paragraphe précédent, nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy (1.16) se propage à vitesse finie, au sens suivant : si les données \mathbf{u}^0 et \mathbf{u}^1 ont leurs supports contenus dans la boule de rayon r , alors, à l'instant t , la solution $\mathbf{u}(t)$ a son support contenu dans la boule de rayon $r + c_P^{\max} t$ où l'on a noté :

$$c_P^{\max} = \max_{x \in \mathbb{R}^3} \sqrt{\frac{\lambda(x) + 2\mu(x)}{\rho(x)}}.$$

Pour établir ce résultat, nous allons montrer que l'énergie contenue dans le demi-espace mobile

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 > r + c_P^{\max} t\}$$

reste nulle au cours du temps. Cette énergie est définie par :

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \left(\lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu \sum_{j,k=1}^3 |\varepsilon_{jk}(\mathbf{u})|^2 + \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 \right) dx.$$

Comme $e(0) = 0$, il nous suffit de montrer que $\frac{de}{dt}(t) = 0$ pour tout $t > 0$ (ou que $\frac{de}{dt}(t) \leq 0$ car l'énergie est positive). On utilise pour cela le lemme suivant (facile à vérifier) :

Lemme 1.2.2 *Pour tout fonction régulière $F(x, t)$:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} F(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx - c_P^{max} \int_{x_1=r+c_P^{max}t} F(x, t) dx_2 dx_3.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{de}{dt}(0) = I(t) - J(t)$$

avec

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} \left(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\mu \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk}(\mathbf{u}) \varepsilon_{jk} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) dx$$

et

$$J(t) = \frac{c_P^{max}}{2} \int_{x_1=r+c_P^{max}t} \left(\lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu \sum_{j,k=1}^3 |\varepsilon_{jk}(\mathbf{u})|^2 + \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 \right) dx_2 dx_3.$$

En appliquant la formule de Green à l'intégrale $I(t)$, on obtient :

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} \left(-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{x_1=r+c_P^{max}t} \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx_2 dx_3$$

où $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)^t$. En utilisant la première équation de (1.16), on obtient finalement :

$$I(t) = \int_{x_1=r+c_P^{max}t} \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx_2 dx_3.$$

Il faut pour conclure montrer que $I(t) \leq J(t)$. Nous allons plus exactement montrer que $|I(t)| \leq J(t)$. Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme 1.2.3 *Pour toute fonction $\mathbf{u}(x, t)$, on a l'inégalité suivante :*

$$\left| \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right| \leq \frac{c_P^{max}}{2} \left(\lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu \sum_{j,k=1}^3 |\varepsilon_{jk}(\mathbf{u})|^2 + \rho \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 \right)$$

DÉMONSTRATION On récrit tout d'abord le terme de gauche sous la forme suivante :

$$-\sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_{j=1,3} 2\mu \varepsilon_{1j} \frac{\partial u_j}{\partial t}$$

d'où l'on déduit les inégalités suivantes (en utilisant $2\alpha ab \leq \alpha\beta a^2 + (\alpha/\beta)b^2$) :

$$\begin{aligned}
\left| \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\lambda c_P^{max} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + \frac{\lambda}{c_P^{max}} \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|^2 + 2\mu c_P^{max} \sum_{j=1}^3 |\varepsilon_{1j}(\mathbf{u})|^2 + \frac{2\mu}{c_P^{max}} \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|^2 \right), \\
&\leq \frac{c_P^{max}}{2} \left(\lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu \sum_{j=1}^3 |\varepsilon_{1j}(\mathbf{u})|^2 \right) + \frac{1}{2c_P^{max}} \left(\lambda \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|^2 + 2\mu \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|^2 \right), \\
&\leq \frac{c_P^{max}}{2} \left(\lambda |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + 2\mu \sum_{j,k=1}^3 |\varepsilon_{jk}(\mathbf{u})|^2 \right) + \frac{1}{2c_P^{max}} (\lambda + 2\mu) \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2.
\end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit finalement par définition de c_P^{max} .

□

1.2.7 Cas d'un solide anisotrope

Nous allons présenter brièvement la propagation d'ondes dans un milieu élastique anisotrope. Une description plus complète peut être trouvée dans le livre de D. Royer et de E. Dieulesaint [1996].

Nous allons montrer que dans un solide anisotrope illimité trois ondes planes avec des vitesses différentes peuvent se propager suivant une direction quelconque $\boldsymbol{\tau}$:

-une onde appelée quasi-longitudinale parce que sa polarisation forme un angle $\alpha < \pi/4$ avec $\boldsymbol{\tau}$,

-une onde quasi-transverse lente,

-une onde quasi-transverse rapide.

Remarque : dans un solide isotrope, les deux ondes transverses sont associées à la même vitesse de propagation.

Tenseur des rigidités

Pour un solide anisotrope, la loi de Hooke généralisée reliant le tenseur des contraintes σ au tenseur des déformations ϵ s'écrit

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

c_{ijkl} est le tenseur des rigidités. Pour des raisons de symétrie et en utilisant le premier principe de la thermodynamique on montre qu'on a les relations

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} &= c_{ijlk}, \\
&= c_{klij}.
\end{aligned}$$

Remarque : le cas d'un solide isotrope correspond à $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

Equation de propagation pour un solide anisotrope

En utilisant la symétrie du tenseur des déformations $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ on obtient que l'équation de propagation s'écrit

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Nous allons à présent rechercher des solutions particulières de l'équation de propagation sous la forme d'ondes planes.

Equation de Christoffel

On cherche une onde plane solution de l'équation de propagation se propageant à la vitesse c suivant le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} f(x \cdot \boldsymbol{\tau} - ct).$$

Le vecteur \mathbf{p} est la polarisation de l'onde et indique la direction du mouvement des particules. En remplaçant l'expression de \mathbf{u} dans l'équation des ondes on obtient l'équation de Christoffel :

$$c_{ijkl} \tau_j \tau_k p_l = \rho c^2 p_i,$$

que l'on peut écrire sous forme vectorielle

$$\Gamma(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{p} = \rho c^2 \mathbf{p},$$

où on a introduit le tenseur Γ tel que $\Gamma_{il}(\boldsymbol{\tau}) = c_{ijkl} \tau_j \tau_k$. Pour une direction $\boldsymbol{\tau}$ fixée, on a donc à résoudre un problème aux valeurs propres : les valeurs propres $\gamma = \rho c^2$ donnent les vitesses de phase et les vecteurs propres correspondent aux polarisations \mathbf{p} .

A partir des propriétés de symétrie de c_{ijkl} on montre facilement que le tenseur Γ est symétrique. En effet $c_{ljki} = c_{kilj} = c_{ikjl}$ et $c_{ikjl} \tau_j \tau_k = c_{ijkl} \tau_j \tau_k$. De plus à partir d'arguments énergétiques on peut montrer qu'il est défini positif : ses valeurs propres $\gamma = \rho c^2$ sont donc réelles et positives et ses vecteurs propres orthogonaux. Ainsi il existe trois ondes planes dont les polarisations sont orthogonales qui se propagent dans une même direction avec des vitesses éventuellement différentes.

L'onde dont la polarisation est la plus proche de $\boldsymbol{\tau}$ est appelée onde quasi-longitudinale (analogue à l'onde P pour un solide isotrope, purement longitudinale et associée à la valeur propre $\gamma_P = \rho c_P^2$). Les deux autres ondes sont appelées quasi-transversales (dans un solide isotrope, la valeur propre $\gamma_S = \rho c_S^2$ est dégénérée, et les deux ondes S associées, purement transverses, se propagent à la même vitesse c_S). La vitesse de chacune de ces deux ondes est, le plus souvent, inférieure à celle de l'onde quasi-longitudinale.

Surface des lenteurs

Les solutions de l'équation de Christoffel sont avantageusement représentées sous la forme d'une surface des lenteurs. On porte suivant chaque vecteur $\boldsymbol{\tau}$ l'inverse des vitesses $s = 1/c$ (pour chacune des trois ondes). La surface, lieu des extrémités du vecteur lenteur $\mathbf{s} =$

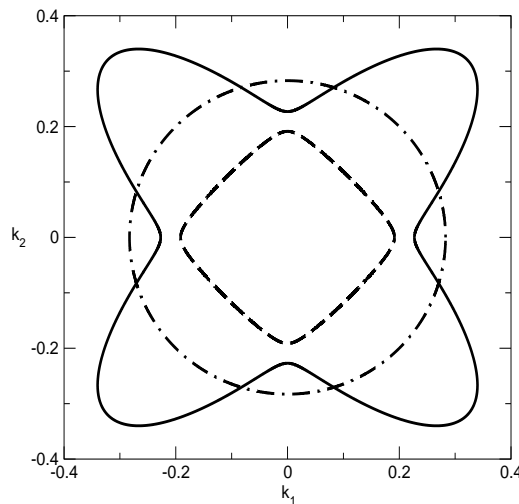


FIG. 1.4 – Surfaces des lenteurs

τ/c , est appelée surface des lenteurs. Elle est composée de trois nappes puisque, pour une direction donnée, trois ondes sont susceptibles de se propager.

Remarque : en régime harmonique de pulsation ω , on a $k = \omega/c$ et donc $\mathbf{k} = \omega \mathbf{s}$. La surface des lenteurs représente donc aussi le lieu des extrémités du vecteur d'onde \mathbf{k} .

Il est utile de porter l'inverse des vitesses plutôt que les vitesses car on montre que la normale à la surface des lenteurs indique le sens de propagation de l'énergie (vitesse de groupe). De plus nous verrons plus tard (chapitre 3) qu'à l'interface entre deux solides ou entre un solide et un fluide, la composante selon l'interface du vecteur d'onde \mathbf{k} d'une onde plane incidente se conserve. Comme $\mathbf{k} = \omega \mathbf{s}$, les surfaces des lenteurs permettent de trouver graphiquement les ondes réfléchies et transmises par l'interface.

Remarque : pour un solide isotrope, il n'existe que deux nappes qui prennent la forme de sphères car $c = c_P$ ou c_S quelque soit la direction de propagation.

Sur la figure 1.2.7 est représentée une coupe selon un plan particulier des surfaces des lenteurs pour le rutile (TiO_2). L'onde quasi-longitudinale (la plus rapide donc de lenteur minimale) est représentée en traits pointillés. L'onde quasi-transverse, représentée en alternance de points et de traits, est isotrope (surface des lenteurs de la forme d'une sphère). On obtient par ailleurs que cette onde est en fait purement transverse. Enfin le trait plein représente l'onde quasi-transverse. Il apparaît que suivant la direction de propagation, c'est l'onde transverse ou celle quasi-transverse qui est la plus rapide.

1.3 Un aperçu rapide d'autres types d'ondes

Nous allons dans cette dernière section présenter brièvement quelques notions relatives aux ondes acoustiques et électromagnétiques.

1.3.1 Les ondes acoustiques

On s'intéresse ici à la propagation du son dans un fluide compressible au repos (au sens où il n'y a pas d'écoulement). On suppose que le fluide est homogène de densité ρ_0 et occupe un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . En un point $x \in \Omega$ et à un instant t , on note $\mathbf{v}(x, t)$ la vitesse, $p(x, t)$ la pression et $\rho(x, t)$ la densité. Ces trois quantités doivent satisfaire deux équations exprimant la conservation de la masse et le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.19)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0. \quad (1.20)$$

On ferme le système à l'aide d'une loi d'état qui relie la pression et la densité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

où c désigne la vitesse du son dans le fluide considéré.

Si l'on s'intéresse à de petites perturbations de l'état du fluide au voisinage du repos, on peut linéariser ces trois équations et l'on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (1.21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.23)$$

Il est facile d'éliminer ρ de la première équation en utilisant la troisième. Cela donne :

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

On peut enfin éliminer \mathbf{v} et l'on obtient l'équation suivante portant sur la pression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0. \quad (1.24)$$

Il s'agit d'une équation des ondes tridimensionnelle tout à fait similaire à l'équation satisfaite par le potentiel élastique ϕ étudié au paragraphe précédent. On peut donc construire de la même manière des ondes planes se propageant dans une direction τ à la vitesse c en posant :

$$p(x, t) = f(x \cdot \tau - ct)$$

où f désigne une fonction régulière arbitraire. Les ondes planes harmoniques admettent quant à elles l'expression générale suivante :

$$p(x, t) = \Re [p_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot x - \omega t)}]$$

avec

$$|\mathbf{k}| = k = \frac{\omega}{c}.$$

La vitesse \mathbf{v} est alors donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{v} = \Re \left(\frac{p_0}{\rho_0 \omega} \mathbf{k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right).$$

Là encore, on peut remarquer que le mouvement des particules se fait parallèlement à la direction de propagation de l'onde. Autrement dit, les ondes acoustiques sont des ondes longitudinales.

Pour conclure ce paragraphe, nous pouvons établir la conservation de l'énergie pour le problème de Cauchy suivant (où Ω désigne le domaine de \mathbb{R}^3 occupé par le fluide au repos) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p & \forall x \in \Omega, \forall t > 0, \\ p(x, t) = 0 & \forall x \in \Gamma_0, \forall t > 0, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \forall x \in \Gamma_1, \forall t > 0, \\ p(x, 0) = p_0(x) & \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x) & \forall x \in \Omega. \end{array} \right.$$

La frontière Γ_1 correspond à une paroi rigide sur laquelle on a écrit une condition de glissement. La frontière Γ_0 est libre.

A nouveau, on multiplie l'équation aux dérivées partielles par $\frac{\partial p}{\partial t}(x, t)$ et l'on intègre l'identité obtenue sur le domaine Ω . Après utilisation de la formule de Green, on obtient l'identité de conservation de l'énergie :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

avec

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla p|^2 dx.$$

Tout comme dans le cas de l'élastodynamique, ce résultat s'étend sans difficulté aux fluides hétérogènes. Enfin, on peut également montrer pour ce problème comme pour l'élastodynamique que si les données p^0 et p^1 ont leurs supports contenus dans la boule de rayon r , alors, à l'instant t , la solution $\mathbf{p}(t)$ a son support contenu dans la boule de rayon $r + c$.

1.3.2 Les ondes électromagnétiques

Intéressons-nous pour conclure ce chapitre à la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu homogène et isotrope occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . Ce milieu est caractérisé par sa perméabilité magnétique μ et sa permittivité diélectrique ε qui sont des nombres réels strictement positifs.

En un point $x \in \Omega$ et à un instant t , on note $\mathbf{E}(x, t)$ le champ électrique et $\mathbf{H}(x, t)$ le champ magnétique. En l'absence de charges et de courants, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} doivent satisfaire les équations suivantes, dites *de Maxwell* :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= 0, \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0.\end{aligned}$$

En prenant le rotationnel de la première équation puis en éliminant $\mathbf{rot} \mathbf{H}$ à l'aide de la seconde équation, on obtient une équation ne portant que sur le champ électrique \mathbf{E} :

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

On pose alors

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu \varepsilon}}$$

de sorte que l'équation précédente se réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) = 0. \quad (1.25)$$

On peut obtenir de façon similaire l'équation suivante ne portant que sur le champ magnétique \mathbf{H} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + c^2 \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{H}) = 0. \quad (1.26)$$

En utilisant l'identité vectorielle (1.8), on vérifie finalement que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont solution du système suivant :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \quad (1.27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{H} = 0, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (1.30)$$

Soient τ un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 et F une fonction régulière à valeurs dans \mathbb{R}^3 telle que $F(s) \cdot \tau = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors il est facile de vérifier que le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) donné par :

$$\mathbf{E}(x, t) = F(x \cdot \tau - ct),$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \frac{-1}{\mu c} \tau \times F(x \cdot \tau - ct),$$

est solution des équations de Maxwell. Il s'agit d'une onde plane qui se propage à la vitesse c dans la direction τ . On remarque que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont orthogonaux entre eux et

qu'ils sont tous deux orthogonaux à la direction de propagation τ . En ce sens, les ondes électromagnétiques sont similaires aux ondes S en élastodynamique (d'ailleurs, on peut remarquer que l'équation (1.25) est identique à l'équation (1.9), à condition de considérer un champ \mathbf{u} à divergence nulle).

On construit les ondes planes harmoniques en choisissant F de la forme $F(s) = \Re e(F_0 e^{iks})$ où F_0 est un vecteur de \mathbb{R}^3 orthogonal à $\mathbf{k} = k\tau$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= \Re e(F_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}), \\ \mathbf{H}(x, t) &= \Re e\left(\frac{-1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times F_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}\right),\end{aligned}$$

avec

$$\omega = kc.$$

Considérons finalement une cavité métallique Ω dont la paroi $\partial\Omega$ est assimilée à un conducteur parfait. Autrement dit, à tout instant, le champ électrique doit être normal à la paroi. On suppose connu le champ électromagnétique dans la cavité à l'instant initial et l'on s'intéresse à l'évolution du système au cours du temps, qui est régie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \forall x \in \Omega \text{ and } t > 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \forall x \in \Omega \text{ and } t > 0, \\ \mathbf{div} \mathbf{E} &= \mathbf{div} \mathbf{H} = 0 & \forall x \in \Omega \text{ and } t > 0, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \text{ and } t > 0, \\ \mathbf{E}(x, 0) &= \mathbf{E}_0 \text{ and } \mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{H}_0 & \forall x \in \Omega.\end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $-\mathbf{H}$ et la seconde par \mathbf{E} , puis en sommant les deux équations ainsi obtenues, on trouve :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) dx = \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dx + \mu \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dx.$$

La formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} dx = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E} dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) d\gamma$$

et la condition aux limites satisfaite par \mathbf{E} sur la paroi permettent finalement de montrer que :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

avec

$$E(t) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{H}|^2 dx.$$

La quantité $E(t)$ est appelée l'énergie électromagnétique.

Chapitre 2

Dispersion géométrique, dispersion fréquentielle

Au chapitre précédent, nous avons montré en dimension 1 (cas des vibrations transversales d'une corde vibrante ou des vibrations longitudinales d'une barre élastique) que toute onde transitoire est une superposition d'ondes périodiques en temps : somme discrète d'ondes stationnaires si la corde est finie ou intégrale continue d'ondes propagatives si la corde est infinie.

Pour une corde ou une barre infinie, nous avons obtenu une formule explicite pour la solution du problème de Cauchy - la formule de D'Alembert - qui montre que la solution se compose de deux ondes se propageant dans des directions opposées à la même vitesse et sans subir aucune atténuation.

Le premier objectif de ce chapitre est de voir comment ces résultats s'étendent aux dimensions supérieures (2 et 3), dans le cas simple de l'acoustique dans un espace infini homogène. Il n'est alors plus aussi simple d'obtenir une formule explicite de la solution du problème de Cauchy. En revanche, on peut facilement comme en dimension 1 écrire la solution comme une somme continue d'ondes périodiques en temps. Le théorème de la phase stationnaire permet alors d'étudier le comportement de l'onde en temps long : on vérifiera en particulier qu'une onde non entretenue décroît rapidement localement et se propage à la vitesse du son dans toutes les directions. Contrairement à la dimension 1, cette propagation s'accompagne d'une décroissance en $1/\sqrt{t}$ en dimension 2 et en $1/t$ en dimension 3.

Nous montrons ensuite, toujours à l'aide du théorème de la phase stationnaire, qu'une autre cause possible de décroissance du signal est la nature dispersive du modèle de propagation d'ondes. C'est le cas par exemple du modèle de poutre pour lequel on vérifie aisément que la vitesse des ondes dépend de leur longueur. Ceci conduit à une décroissance du signal en $1/\sqrt{t}$ au cours de sa propagation, bien qu'il s'agisse d'un problème monodimensionnel.

2.1 Théorème de la phase stationnaire

Nous énonçons dans ce paragraphe, sans le démontrer, un théorème très utile dans les études relatives à la propagation des ondes. Il s'agit du théorème de la phase stationnaire, qui fournit, sous certaines conditions, le comportement en temps long ($t \rightarrow +\infty$) d'intégrales oscillantes

dépendant du paramètre t . Plus précisément, soit f et φ deux fonctions définies sur \mathbb{R} , f étant supposée intégrable sur \mathbb{R} et φ à valeurs réelles. On considère alors la quantité suivante :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega.$$

La quantité $\varphi(\omega)$ est appelée la phase. On peut tout d'abord considérer deux cas particuliers simples qui nous aideront à comprendre le résultat général.

– Premier cas : $\varphi(\omega) = \varphi_0$ Dans ce cas où φ est une constante, on a :

$$I(t) = e^{i\varphi_0 t} \int_{\mathbb{R}} f(\omega) d\omega,$$

donc $I(t)$ est une fonction périodique de t .

– Deuxième cas : $\varphi(\omega) = \omega$ Dans ce cas, $I(t)$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de f . Si f est suffisamment régulière et décroissante à l'infini, on peut alors effectuer une intégration par parties qui conduit à l'identité suivante :

$$I(t) = \frac{-1}{it} \int_{\mathbb{R}} f'(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

d'où

$$|I(t)| \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} |f'(\omega)| d\omega.$$

Ceci prouve que $I(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, au moins aussi vite que $1/t$. Plus généralement, si f est suffisamment régulière, on montre en effectuant plusieurs intégrations par parties que :

$$|I(t)| \leq \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}} |f^{(n)}(\omega)| d\omega,$$

qui prouve que $I(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, au moins aussi vite que $1/t^n$. Dans le cas général, le comportement en temps long de $I(t)$ dépend du fait qu'il existe, ou non, des points stationnaires, c'est à dire des valeurs de ω où la dérivée de φ s'annule. On dit alors que la phase stationne en ces points.

Lorsque la phase ne stationne jamais, on montre facilement que l'on retrouve la situation du second cas. En effet, si :

$$\varphi'(\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

en remarquant que :

$$\frac{d}{d\omega} (e^{i\varphi(\omega)t}) = it\varphi'(\omega) e^{i\varphi(\omega)t},$$

on peut écrire :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\omega)}{it\varphi'(\omega)} it\varphi'(\omega) e^{i\varphi(\omega)t} d\omega$$

d'où, après intégration par parties :

$$I(t) = \frac{-1}{it} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(\omega)}{\varphi'(\omega)} \right)' e^{i\varphi(\omega)t} d\omega.$$

En poursuivant cela autant de fois que la régularité de f et de φ le permet, on peut donc à nouveau montrer que $I(t)$ tend vers 0 au moins aussi vite qu'une certaine puissance entière de $1/t$.

Le résultat intéressant, plus difficile à établir, concerne le cas où la phase stationne en certains points. En partitionnant le domaine, on peut se ramener au cas où la phase stationne exactement en un point ω_0 .

Théorème 2.1.1 *Supposons que la phase vérifie les trois hypothèses suivantes :*

1. $\varphi'(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \neq \omega_0$
2. $\varphi'(\omega_0) = 0$
3. $\varphi''(\omega_0) \neq 0$

Alors $I(t)$ admet l'équivalent suivant pour t grand :

$$I(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{i(\varphi(\omega_0)t + \pi/4)} f(\omega_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\omega_0)}} \quad t \rightarrow +\infty.$$

On remarque donc que dans ce cas, l'intégrale $I(t)$ décroît, mais plus lentement que lorsque la phase ne stationne pas. Cette décroissance est d'autant plus lente que la phase stationne *fortement* : plus précisément, on peut montrer que $I(t)$ décroît comme $1/t^{1/n}$ si toutes les dérivées de φ d'ordre inférieur ou égal à n s'annulent en ω_0 et que $\varphi^{(n+1)}(\omega_0) \neq 0$. On se rapproche ainsi de plus en plus du premier cas où $I(t)$ oscille à la fréquence φ_0 sans aucune décroissance.

2.2 Application au problème de Cauchy en acoustique

2.2.1 Résolution du problème de Cauchy

Nous considérons un fluide parfait compressible et homogène occupant l'espace \mathbb{R}^N tout entier, pour $N = 2$ ou 3 . Nous notons c la vitesse du son dans ce fluide. Nous nous intéressons alors à la pression acoustique p , solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ p(x, 0) = p_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où p_0 et p_1 sont les données initiales. On va traiter ici pour simplifier le cas $p_1 = 0$ mais la démarche s'étendrait sans difficulté au cas général.

On supposera de plus p_0 de carré intégrable ($p_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$).

Tout comme on l'a fait au premier chapitre dans le cas de la dimension 1, on va utiliser la transformation de Fourier en espace, définie de la façon suivante :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

où $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i$. La fonction u s'exprime alors comme la transformée de Fourier inverse de \hat{u} , c'est-à-dire que :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

En remarquant que :

$$\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2 \hat{u}, \quad \text{avec } |\xi|^2 = \sum_{i=1}^N \xi_i^2,$$

on vérifie aisément que, si p est la solution du problème de Cauchy, \hat{p} défini par :

$$\hat{p}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} p(x, t) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} + c^2 |\xi|^2 \hat{p} = 0 & \xi \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ \hat{p}(\xi, 0) = \hat{p}_0(\xi) & \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(\xi, 0) = 0 & \xi \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.2)$$

Il s'agit maintenant, à ξ fixé, d'une équation différentielle ordinaire en temps que l'on résout sans mal, ce qui donne finalement :

$$\hat{p}(\xi, t) = \hat{p}_0(\xi) \cos(c|\xi|t),$$

d'où l'expression intégrale suivante de p :

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{p}_0(\xi) \cos(c|\xi|t) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

En écrivant le \cos comme une somme d'exponentielles, on vérifie bien à l'aide de cette formule que, comme en dimension 1, la solution du problème de Cauchy est une somme d'ondes périodiques en temps de la forme :

$$\frac{1}{2\sqrt{(2\pi)^N}} \hat{p}_0(\xi) e^{\pm i(c|\xi|t \pm x \cdot \xi)}.$$

Il s'agit d'ondes planes harmonique de vecteur d'onde ξ et de pulsation $\omega = c|\xi|$. Pour conclure ce paragraphe, notons que comme p_0 est à valeurs réelles, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \hat{p}_0(\xi) = \overline{\hat{p}_0(-\xi)}$$

d'où l'on déduit que la solution du problème de Cauchy peut aussi s'écrire :

$$p(x, t) = \Re e \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{p}_0(\xi) e^{-ic|\xi|t} e^{ix \cdot \xi} d\xi \right).$$

2.2.2 Décroissance locale de l'énergie

En utilisant les techniques du paragraphe sur le théorème de la phase stationnaire, nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy décroît localement (i.e. en un point fixé de l'espace) très rapidement lorsque t tend vers l'infini. Pour cela, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\omega > 0$:

$$J(x; \omega) = \frac{1}{c\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{|\xi|=\omega/c} \hat{p}_0(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\sigma$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de surface sur la sphère de rayon ω/c .

On a alors :

$$p(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} J(x; \omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

Pour simplifier la démonstration, nous supposons ici que $\hat{p}_0(\xi)$ est une fonction bornée qui décroît rapidement vers 0 quand $|\xi|$ tend vers l'infini. Cette hypothèse revient à supposer la donnée p_0 assez régulière.

Pour montrer que, x étant fixé, $p(x, t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, on va procéder comme dans le paragraphe 2.1 en effectuant des intégrations par parties. Il convient ici de calculer soigneusement les termes de bord qui viennent du fait que l'on intègre sur $[0, +\infty[$ en non sur \mathbb{R} .

On trouve en effet, après trois intégrations par parties, que :

$$p(x, t) = \frac{1}{t^3} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d^3 J}{d\omega^3}(x; \omega) \sin(\omega t) d\omega - \frac{1}{t^2} \frac{dJ}{d\omega}(x; 0).$$

On vérifie par ailleurs aisément que $J(x, \omega)$ se comporte au voisinage de $\omega = 0$ comme ω en dimension 2, et comme ω^2 en dimension 3.

Ainsi, en dimension 2, $dJ/d\omega(x, 0) \neq 0$: le comportement asymptotique de $p(x, t)$ en temps long est donc en $1/t^2$.

En dimension 3 en revanche, on a $dJ/d\omega(x, 0) = 0$ et l'on peut effectuer encore une intégration par parties. On obtient alors :

$$p(x, t) = \frac{1}{t^4} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d^4 J}{d\omega^4}(x; \omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{t^4} \frac{d^3 J}{d\omega^3}(x; 0).$$

Ceci montre que $p(x, t)$ en temps long tend vers 0 au moins aussi vite que $1/t^4$.

L'intérêt de la démonstration que nous venons de faire est qu'elle s'étend à des situations plus complexes (milieux hétérogènes, présence d'obstacles) dès que l'on a une représentation purement intégrale de la solution sur le spectre des fréquences. Ceci s'oppose au cas de la propagation dans un espace clos pour lequel l'intégrale est remplacée par une somme discrète sur les modes propres du système. Dans ce dernier cas, la solution n'a plus aucune raison de décroître en un point fixé si le milieu n'est pas dissipatif.

En fait, dans le cas très simple que nous considérons ici (espace libre et homogène), on peut obtenir une formule plus simple de la solution du problème de Cauchy. Cette formule généralise aux dimension supérieures la formule de D'Alembert établie en dimension 1.

En effet, on peut montrer que :

– En dimension 2 :

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y| < ct} \frac{p_0(x - y) - y \cdot \nabla p_0(x - y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} dy. \quad (2.3)$$

On peut alors montrer que, si p_0 est à support compact :

$$p(x, t) \sim \frac{-1}{2\pi c^2 t^2} \int_{\mathbb{R}^2} p_0(y) dy \quad t \rightarrow +\infty$$

qui est en accord avec le résultat que nous avons établi.

– En dimension 3 :

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{|y|=ct} [p_0(x - y) - y \cdot \nabla p_0(x - y)] dy. \quad (2.4)$$

Cette formule en revanche montre que le résultat que nous avons établi est loin d'être optimal puisque que l'on voit ici que, si la donnée initiale p_0 est à support compact, alors la solution $p(x, t)$ devient rigoureusement nulle pour t assez grand en tout point x fixé. C'est ce que l'on appelle le Principe de Huyghens (qui n'est vrai que pour les dimensions impaires de l'espace).

2.2.3 Dispersion géométrique

Nous venons de montrer qu'un observateur fixe va observer que l'onde disparaît ou décroît très rapidement. Donc, pour suivre l'onde, il faut que l'observateur se déplace. Cela nous conduit à évaluer la pression à l'instant t en un point $x(t) = V t \boldsymbol{\tau}$ où V est la vitesse de l'observateur ($V > 0$) et $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{\tau}| = 1$ la direction dans laquelle il se déplace. On a alors :

$$p(x(t), t) = \Re \left(\int_{\mathbb{R}^+} F(\omega; t) e^{-i\omega t} d\omega \right) \quad (2.5)$$

où

$$F(\omega; t) = \frac{1}{c\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{|\xi|=\omega/c} \hat{p}_0(\xi) e^{iV t \boldsymbol{\tau} \cdot \xi} d\sigma.$$

Cette fois, nous nous proposons d'appliquer le Théorème de la Phase Stationnaire à $F(\omega; t)$.

Pour simplifier, nous allons considérer le cas de la dimension 2 et nous ferons tous les calculs en coordonnées polaires :

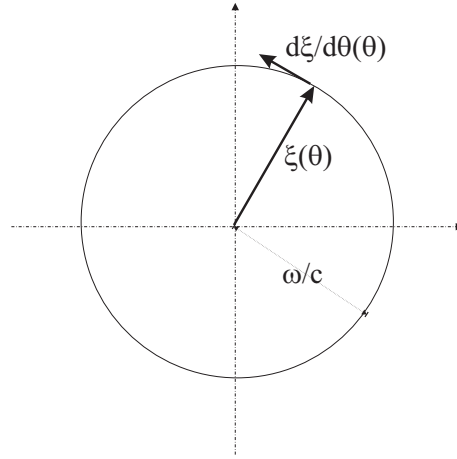
$$\xi = \xi(\theta) = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$F(\omega; t) = \frac{\omega}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \hat{p}_0(\xi(\theta)) e^{i\varphi(\theta)t} d\theta$$

où l'on a posé :

$$\varphi(\theta) = V \boldsymbol{\tau} \cdot \xi(\theta).$$



La phase stationne-t-elle sur l'intervalle $[0, 2\pi]$? On a :

$$\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta) = V\tau \cdot \frac{d\xi}{d\theta}(\theta)$$

or

$$\xi(\theta) \cdot \frac{d\xi}{d\theta}(\theta) = 0$$

donc, la phase stationne aux valeurs de θ telles que $\xi(\theta)$ est parallèle à τ , c'est-à-dire lorsque θ est égal ou opposé à l'argument de τ . Les valeurs de $\xi(\theta)$ correspondantes sont :

$$\xi(\theta) = \pm \frac{\omega}{c} \tau$$

et on vérifie facilement que ces points stationnaires ne sont pas dégénérés puisque :

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta) = -V\tau \cdot \xi(\theta)$$

de sorte qu'aux points stationnaires, on a :

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta) = \mp \frac{\omega}{c} V \neq 0.$$

On peut donc affirmer que :

$$F(\omega; t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \left(a^+(\omega) \hat{p}_0 \left(\frac{\omega}{c} \tau \right) e^{iV/c \omega t} + a^-(\omega) \hat{p}_0 \left(\frac{-\omega}{c} \tau \right) e^{-iV/c \omega t} \right) \text{ pour } t \rightarrow +\infty.$$

Nous ne précisons pas les valeurs des coefficients $a^\pm(\omega)$ qui ne nous intéressent pas ici.

On reporte alors cette formule dans l'intégrale (2.5), ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(x(t), t) \sim & \Re e \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^+} a^+(\omega) \hat{p}_0 \left(\frac{\omega}{c} \tau \right) e^{i(-1+V/c) \omega t} d\omega \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^+} a^-(\omega) \hat{p}_0 \left(\frac{-\omega}{c} \tau \right) e^{-i(1+V/c) \omega t} d\omega \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

On voit tout d'abord que, si $V \neq c$, $p(x(t), t)$ va décroître au moins comme $1/\sqrt{t^3}$: ceci n'est pas surprenant dans le cas $V > c$ puisque nous avons montré au chapitre précédent (propagation à vitesse finie) que dans ce cas $p(x(t), t) = 0$. En revanche, si $V = c$, la dernière intégrale décroît comme $1/t$ mais la première est indépendante de t , de sorte que finalement :

$$p(Vt\boldsymbol{\tau}, t) \sim \Re e \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^+} a^+(\omega) \hat{p}_0 \left(\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\tau} \right) d\omega \right).$$

En conclusion :

- Les ondes acoustiques se déplacent à la vitesse c .
- Au cours de sa propagation, une onde acoustique non entretenue décroît comme $1/\sqrt{t}$ en dimension 2. On obtiendrait de même une décroissance en $1/t$ en dimension 3. Cette décroissance est due à la dispersion géométrique : l'onde se “répartit” dans toutes les directions de l'espace.
- Si l'observateur se déplace à la vitesse c dans la direction $\boldsymbol{\tau}$, après un temps assez long, il ne voit plus que la contribution à la donnée initiale correspondant à l'onde plane de direction $\boldsymbol{\tau}$.

On peut à nouveau, à titre d'exercice, retrouver ces résultats à l'aide des formules (2.3) et (2.4).

Remarque 2.2.1 On peut maintenant comprendre ce qui se passe dans un milieu anisotrope. La solution $p(x(t), t)$ du problème de Cauchy peut encore s'écrire sous la forme (2.5) avec $F(\omega; t)$ défini par :

$$F(\omega; t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\xi \in K_\omega} \hat{p}_0(\xi) e^{iVt\boldsymbol{\tau} \cdot \xi} d\sigma$$

où K_ω désigne la surface des lenteurs à la fréquence ω , surface qui n'est plus une sphère en général.

En 2D par exemple, on trouve comme dans le cas isotrope que la phase stationne si

$$\frac{d\xi}{d\theta} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

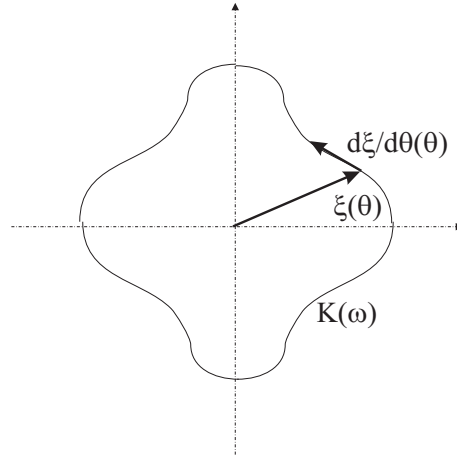
mais contrairement au cas isotrope, $\frac{d\xi}{d\theta}$ n'est généralement pas perpendiculaire à $\xi(\theta)$.

Ainsi, les ondes planes observées après un temps long dans la direction $\boldsymbol{\tau}$ ne sont pas les ondes planes de vecteur d'onde colinéaire à $\boldsymbol{\tau}$.

2.3 Application au problème de Cauchy dans une poutre

On s'intéresse à la propagation des ondes de vibrations transversales d'une poutre élastique rectiligne. En l'absence d'effort appliqué sur la poutre, la dynamique des mouvements de flexion plane de la poutre est régie par l'équation

$$\begin{cases} \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.7)$$



où $u = u(x, t)$ désigne le déplacement transversal à un instant t d'un point de la poutre situé à l'abscisse $x \in \mathbb{R}$. La quantité $\alpha > 0$ est caractéristique de la poutre : $\alpha^2 = EI/\rho$ où E est le module d'Young, I l'inertie géométrique de la section droite et ρ la masse linéique de la poutre. Pour une poutre de section rectangulaire de hauteur h et de largeur d on a $I = dh^3/12$.

2.3.1 Résolution du problème de Cauchy

Notons

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ix\xi} dx,$$

la transformée de Fourier de u . Alors \hat{u} est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + \omega(\xi)^2 \hat{u} = 0 & \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}, \\ \frac{d\hat{u}}{dt}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où on a introduit la relation de dispersion $\omega(\xi) = \alpha\xi^2$. Tout comme dans le cas de la propagation acoustique nous allons nous limiter au cas $u_1 = 0$. A ξ fixé, on doit résoudre une équation différentielle ordinaire en temps, ce qui donne :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cos(\omega(\xi)t),$$

d'où l'expression intégrale suivante de u :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) \cos(\omega(\xi)t) e^{ix\xi} d\xi.$$

En écrivant le cos comme une somme d'exponentielles, on vérifie une fois de plus à l'aide de cette formule que la solution du problème de Cauchy est une somme d'ondes périodiques en temps de la forme :

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \hat{u}_0(\xi) e^{\pm i(\omega(\xi)t \pm x\xi)}.$$

Il s'agit d'ondes planes harmoniques de vecteur d'onde ξ et de pulsation $\omega(\xi) = \alpha\xi^2$. Notons que comme u_0 est à valeurs réelles, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{u}_0(\xi) = \overline{\hat{u}_0(-\xi)}$$

d'où l'on déduit que la solution du problème de Cauchy peut aussi s'écrire :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Re e \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) e^{i(\xi x - \omega(\xi)t)} d\xi \right].$$

Dans le cas de l'acoustique on avait $\omega(\xi) = c\xi$ et donc une vitesse de phase $v_p(\xi) = \omega/\xi$ constante. Le milieu est dit alors non dispersif. Pour la poutre on trouve $v_p(\xi) = \alpha\xi$. Les ondes harmoniques de nombres d'onde différents se propagent donc à des vitesses différentes : le milieu est dit dispersif. Nous allons voir plus tard que la dispersion conduit à une atténuation des ondes en $1/\sqrt{t}$ au cours de la propagation (on n'a pas d'atténuation dans une corde vibrante).

Remarque 2.3.1 si on étudie les solutions périodiques en temps de (2.7), définies par $u(x, t) = \Re e \{ w(x) e^{-i\omega t} \}$ avec $\omega \in \mathbb{R}^+$, alors $w(x)$ satisfait

$$\alpha^2 \frac{d^4 w}{dx^4} + \omega^2 w = 0.$$

On en déduit que $w(x)$ est une combinaison linéaire des quatre fonctions suivantes

$$\exp(i\xi x) \quad \text{où} \quad \xi = e^{in\pi/2} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3.$$

Parmi ces quatre fonctions, $\exp(\pm i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x)$ sont les solutions bornées en espace tandis que les deux autres $\exp(\pm \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x)$ sont exponentiellement croissantes à l'infini. On trouve donc que la solution transitoire de (2.7) ne se décompose que sur les ondes propagatives bornées, que l'on appelle les modes propres. Si on étudie le cas d'une poutre n'occupant que la demi droite $x \geq 0$, encastree ou libre en $x = 0$, on trouve que la solution transitoire se décompose toujours sur les modes propres (solutions bornées en espace), au nombre de trois dans ce cas : $\exp(\pm i\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x)$ et $\exp(-\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x)$. Ce résultat est très général et s'applique aussi à l'acoustique et aux équations de l'élasticité.

Nous allons à présent déterminer comment se comporte $u(x, t)$ aux temps longs.

2.3.2 Dispersion fréquentielle

A l'aide du Théorème de la Phase Stationnaire nous allons déterminer le comportement asymptotique ($t \rightarrow +\infty$) de $u(x, t)$ lorsqu'on se déplace à vitesse constante $v \in \mathbb{R}$ (autrement dit lorsque $x = vt$). Si on introduit la phase $\varphi(\xi) = v\xi - \omega(\xi)$, alors

$$u(vt, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Re e \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(\xi) e^{i\varphi(\xi)t} d\xi \right].$$

La phase φ stationne lorsque

$$\frac{d\varphi}{d\xi}(\xi) = v - \frac{d\omega}{d\xi} = 0.$$

On introduit la vitesse $v_g(\xi) = d\omega/d\xi = 2\alpha\xi$ appelée vitesse de groupe. Dans le cas de l'acoustique, les vitesses de groupe et de phase sont les mêmes. Dans le cas de la poutre, elles sont différentes, et nous allons voir tout de suite que c'est la vitesse de groupe qui caractérise le mieux la propagation de l'onde. En effet la phase stationne lorsque $v_g(\xi) = v$ ce qui conduit à $\xi = \xi_0 = v/2\alpha$. On a alors $(d^2\omega/d\xi^2)(\xi_0) = 2\alpha \neq 0$ et $\varphi(\xi_0) = v^2/4\alpha$. On obtient l'expression générale

$$u(vt, t) \sim \frac{1}{\sqrt{(d^2\omega/d\xi^2)(\xi_0)t}} \Re \left[\hat{u}_0(\xi_0) e^{i(\varphi(\xi_0)t - \frac{\pi}{4})} \right],$$

quand $t \rightarrow \infty$, qui pour la poutre donne

$$u(vt, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} \Re \left[\hat{u}_0 \left(\frac{v}{2\alpha} \right) e^{i\left(\frac{v^2}{4\alpha}t - \frac{\pi}{4}\right)} \right],$$

quand $t \rightarrow \infty$.

Ce résultat indique que, alors que l'onde $u(x, t)$ est une superposition d'une infinité d'ondes harmoniques de nombres d'ondes $\xi \in \mathbb{R}$, lorsqu'on se déplace à la vitesse v on ne "voit" que l'onde harmonique se déplaçant à v , donc associée au nombre d'onde ξ_0 tel que $v = v_g(\xi_0)$, avec une amplitude ne dépendant que de l'état initial $\hat{u}_0(\xi_0)$.

Une autre façon d'interpréter ce résultat est de supposer que $\hat{u}_0(\xi)$ s'annule en dehors de deux petits intervalles autour des valeurs $\xi = \pm k_0$ où k_0 est donné (on rappelle que \hat{u}_0 est paire pour u_0 réelle). Ceci signifie que les oscillations spatiales de l'état initial sont analogues à celles de $\cos(k_0 x)$. Alors $u(x, t)$ est essentiellement une onde qui se déplace à $v_g(k_0)$ et il faut se déplacer à cette vitesse pour voir quelque chose. Comme la vitesse de groupe a pour expression $v_g(\xi) = 2\alpha\xi$, on voit que les ondes harmoniques de grandes longueurs d'ondes λ se déplacent plus lentement que les petites longueurs d'ondes (car $\xi = 2\pi/\lambda$). Ce comportement est très différent de ce qu'on obtient pour un milieu non dispersif : dans le cas de la corde vibrante, quelque soit le forme de $\hat{u}_0(\xi)$, l'onde se déplace à c .

Remarque 2.3.2 On obtient la même décroissance en temps en $1/\sqrt{t}$ que pour la propagation bidimensionnelle d'une onde acoustique. Cependant les mécanismes expliquant la décroissance sont différents dans les deux cas. Dans le cas de l'acoustique en 2D, la décroissance est due à la diffusion de l'onde dans toutes les directions du plan et à la répartition de l'énergie suivant toutes ces directions (dispersion géométrique). Dans le cas d'un milieu dispersif 1D (poutre) nous avons montré que les différentes composantes spectrales $\hat{u}_0(\xi)$ de l'état initial se propagent à des vitesses différentes $v_g(\xi)$. La décroissance en temps est alors due à la dispersion fréquentielle : l'énergie se répartit suivant toutes les composantes spectrales. Lorsqu'on se déplace à la vitesse v on ne perçoit que la composante qui se déplace aussi à v (c'est-à-dire celle dont la vitesse de groupe est égale à v).

Illustration numérique

On choisit l'état initial

$$u_0(x) = \beta\sqrt{2} \exp \left[- \left(\frac{\beta x}{2} \right)^2 \right] \cos(k_0 x),$$

où β et $k_0 \in \mathbb{R}^+$, qui conduit à

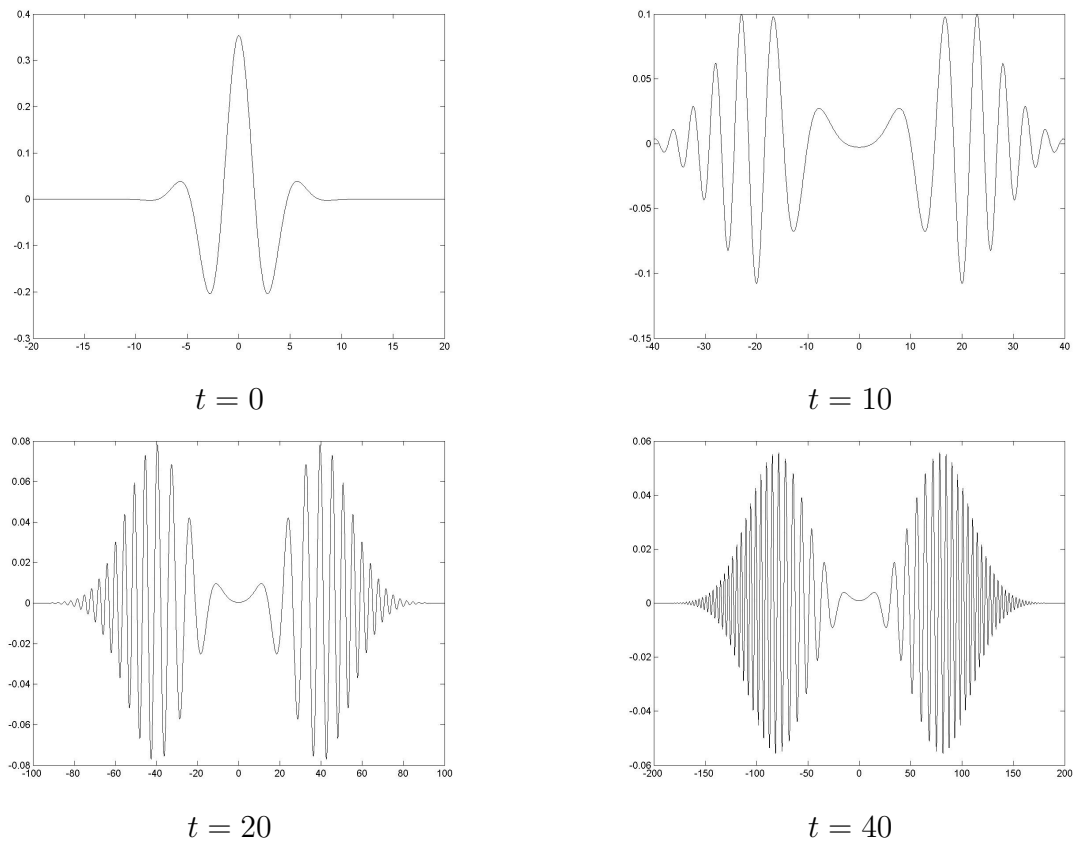
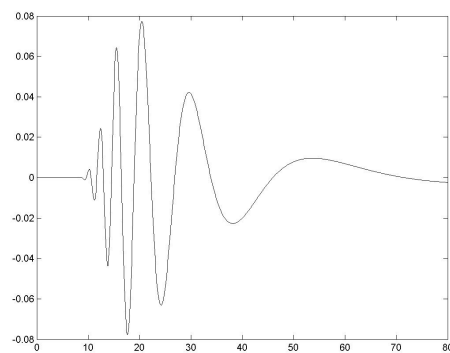
$$\hat{u}_0(\xi) = \exp \left[- \left(\frac{\xi - k_0}{\beta} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{\xi + k_0}{\beta} \right)^2 \right].$$

On est donc dans le cas où $\hat{u}_0(\xi)$ est pratiquement nulle en dehors de deux petits intervalles symétriques par rapport à $\xi = 0$ autour des valeurs k_0 et $-k_0$. D'après ce qui précède on s'attend à ce que $u(x, t)$ se propage majoritairement aux vitesses $v_g(\pm k_0) = \pm 2\alpha k_0$. Dans le cas $k_0 = 1$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0.5$, sur la Fig. 2.3.2 est représenté $u(x, t)$ en fonction de x aux instants $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ et $t = 40$. La première observation est qu'il apparaît de plus en plus d'oscillations au cours du temps, dues au fait que les composantes spectrales de nombres d'onde ξ différents se déplacent à des vitesses différentes. A l'instant $t = 0$, bien que toutes ces composantes spectrales soient aussi présentes, leurs amplitudes $\hat{u}_0(\xi)$ sont telles que leur superposition conduit à un état peu oscillant ($u_0(x)$). On observe bien que les petites longueurs d'ondes se propagent plus vite que les grandes longueurs d'ondes. Il apparaît deux "paquets d'ondes" se propageant symétriquement par rapport à l'origine et dont les centres sont localisés en $x = \pm 2t$ ce qui correspond bien à $v = \pm v_g(k_0) = \pm 2$. Enfin on observe bien la décroissance de l'amplitude du paquet d'onde au cours du temps. Plus exactement pour les centres des paquets d'ondes on trouve qu'en $x = \pm 2t$,

$$u(\pm 2t, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right),$$

quand $t \rightarrow \infty$.

Sur la Fig. 2.3.2 est représenté $u(x, t)$ en fonction du temps en $x = 40$. On retrouve que les ondes de petites longueurs d'onde arrivent avant celles de grandes longueurs d'onde. Le signal est maximum à $t = 20$, lorsque le centre du paquet d'onde, se déplaçant à $v = 2$, atteint le point $x = 40$. On observe aussi la décroissance locale de l'énergie (même si la dépendance en $1/\sqrt{t}$ ne se déduit pas visuellement de la figure).

FIG. 2.1 – $u(x, t)$ en fonction de x à différents instants t FIG. 2.2 – $u(x, t)$ en fonction de t en $x = 40$

Chapitre 3

Réflexion, transmission, guidage en milieu stratifié

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, pour décrire la propagation d'ondes transitoires dans un milieu infini, il était utile de connaître les modes propres de ce milieu (c'est-à-dire les ondes harmoniques en temps). La méthode a été illustrée dans deux situations différentes : le cas des ondes acoustiques dans l'espace libre dont les modes propres sont simplement les ondes planes harmoniques, puis le cas de la poutre.

Nous allons considérer dans ce chapitre des milieux plus complexes pour lesquels le calcul des modes propres n'est pas immédiat : il s'agit de milieux fluides ou solides *stratifiés*. Plus précisément, il s'agit de milieux invariants dans 2 directions de l'espace mais dont la géométrie et/ou les caractéristiques varient dans la troisième direction. L'exemple le plus courant est celui d'un milieu *multi-couches*, c'est-à-dire constitué d'un empilement de couches homogènes de caractéristiques différentes. Ce type de milieux se présente dans de nombreuses applications. Ainsi par exemple, en sismique ou en sismologie, on cherche à modéliser la propagation d'ondes élastiques dans le sous-sol, or le sous-sol s'apparente souvent à un demi-espace stratifié. De même, en microélectronique et en micro-optique, on réalise aujourd'hui de nombreux composants multi-couches, dans lesquels se propagent des ondes électromagnétiques.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au calcul des modes propres dans différents milieux stratifiés. En revanche, nous ne montrerons pas comment en déduire une formule de représentation modale. Il s'agit en effet, dans le cas de milieux hétérogènes, de résultats compliqués, qui ne peuvent s'obtenir à partir de la seule transformation de Fourier et qui dépassent, très largement, le cadre de ce cours.

La première partie du chapitre est consacrée au cas de la propagation acoustique ou électromagnétique dans un demi-espace homogène, avec une condition de type *miroir* sur le bord. Ce cas très simple relève du Principe des Images et nous sert essentiellement à introduire quelques notations. Nous traitons ensuite le cas d'un dioptré acoustique : le calcul des modes propres permet de mettre en évidence dans ce cas, de façon assez classique, les notions d'ondes réfléchies et transmises, d'angle critique et de réflexion totale. Ce calcul, bien connu en optique, est une introduction naturelle au cas du demi-espace homogène élastique, traité au paragraphe 3 (pour lequel on ne peut pas appliquer le Principe des Images). Nous menons les calculs en supposant que la paroi est soit encastree, soit libre. Dans les deux cas, nous met-

tons en évidence le phénomène de conversion d'ondes, typique de l'élastodynamique : autrement dit, nous montrons que généralement, une onde incidente de type S (resp. P) génère, lorsqu'elle rencontre la paroi, deux ondes réfléchies de type S et P. Une autre particularité de l'élastodynamique est l'existence, dans le cas d'une surface libre, d'un mode particulier, décrivant une onde guidée par la paroi. Il s'agit de l'onde de Rayleigh que nous étudions en détails.

3.1 Le principe des images

3.1.1 Réflexion d'une onde acoustique sur une paroi rigide

Le calcul des modes propres

Nous considérons un fluide compressible occupant le demi-espace $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 < 0\}$ limité en $x_1 = 0$ par une paroi rigide. Le calcul des modes propres acoustiques de ce milieu consiste à déterminer les solutions $p(x, t)$ du système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 & x_1 = 0, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

de la forme

$$p(x, t) = \Re e(\varphi(x) e^{-i\omega t})$$

où φ est bornée en espace (en particulier, on interdira à φ un comportement exponentiellement croissant à l'infini). Autrement dit, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche des solutions bornées φ de

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0 & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 & x_1 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Tout comme pour le guide dans le chapitre précédent, il est naturel ici de chercher des solutions à variables séparées, c'est-à-dire de la forme

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3).$$

On trouve alors que

$$\frac{\varphi_1''(x_1)}{\varphi_1(x_1)} + \frac{\varphi_2''(x_2)}{\varphi_2(x_2)} + \frac{\varphi_3''(x_3)}{\varphi_3(x_3)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Ceci montre que chacun des rapports

$$\frac{\varphi_j''(x_j)}{\varphi_j(x_j)}$$

est une fonction constante sur son domaine de définition. On en déduit en particulier (en excluant les solutions exponentiellement croissantes) que

$$\varphi_j(x_j) = a_j e^{ik_j x_j} \text{ avec } k_j \in \mathbb{R}$$

pour $j = 2$ et $j = 3$. On peut toujours, sans perte de généralité, supposer que $k_3 = 0$ (il suffit pour cela de "faire tourner" les axes dans le plan Ox_2x_3). On est ainsi conduit à chercher φ sous la forme :

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x_1)e^{ik_2x_2}$$

où la fonction φ_1 a été notée $\hat{\varphi}$ pour simplifier, et doit vérifier :

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{\varphi}}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2\right) \hat{\varphi} = 0 & x_1 < 0, \\ \frac{d\hat{\varphi}}{dx_1} = 0 & x_1 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

On doit alors distinguer deux cas suivant le signe de la quantité $\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2$.

- **Premier cas :** $\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} k_1^2 \geq 0$ avec $k_1 \geq 0$

Si $k_1 = 0$, la solution générale $\hat{\varphi}$ est de la forme

$$\hat{\varphi}(x_1) = Cste,$$

et la condition aux limites est automatiquement vérifiée. Dans ce cas, le mode propre est de la forme

$$\varphi(x) = Ae^{ik_2x_2} \text{ avec } k_2 = \pm \frac{\omega}{c}.$$

Il décrit une onde plane qui se propage dans la direction x_2 (et donc parallèlement à la paroi) à la vitesse c .

Si $k_1 \neq 0$, la solution générale $\hat{\varphi}$ est de la forme

$$\hat{\varphi}(x_1) = Ae^{ik_1x_1} + A'e^{-ik_1x_1},$$

et la condition aux limites conduit à la relation suivante sur les coefficients A et A' :

$$ik_1(A - A') = 0.$$

La condition s'écrit $A = A'$ et le mode propre a la forme suivante :

$$\varphi(x) = 2A \cos(k_1x_1)e^{ik_2x_2} = A \left(e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + e^{i(-k_1x_1+k_2x_2)} \right).$$

Autrement dit, il correspond à la superposition de deux ondes planes de vecteurs d'ondes respectifs

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} -k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ tels que } |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = \frac{\omega}{c}.$$

On a donc finalement :

$$\varphi(x) = A \left(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \right)$$

ou encore

$$p(x, t) = \Re \left(A \left(e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right) \right).$$

Le premier terme correspond à l'onde *incidente* au sens où elle se propage vers la paroi, le second terme à l'onde *réfléchie*. On appelle *angle d'incidence* (resp. *angle de réflexion*)

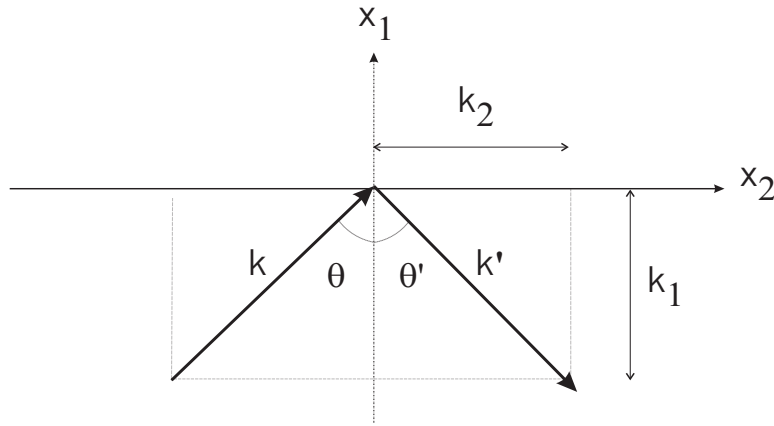


FIG. 3.1 – Réflexion acoustique sur une paroi rigide

l'angle θ (resp. θ') que fait le vecteur de l'onde incidente k (resp. réfléchi (k')) avec la normale à la paroi d'où :

$$\sin \theta = \sin \theta' = \frac{k_2 c}{\omega}.$$

On parle d'incidence *normale* quand $\theta = 0$, c'est-à-dire quand $k_2 = 0$, et d'incidence *rasante* lorsque $\theta \sim \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand $k_1 \sim 0$.

Remarque 3.1.1 Bien entendu, on retrouve les deux lois fondamentales de Descartes. Premièrement, la réflexion se fait dans le plan d'incidence (ce qui signifie que le vecteur d'onde k' appartient au plan formé par le vecteur d'onde k et la normale à la paroi). Deuxièmement, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

- **Second cas :** $\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma^2 < 0$ avec $\gamma \geq 0$

La solution générale $\hat{\varphi}$ est alors de la forme

$$\hat{\varphi}(x_1) = A e^{\gamma x_1}$$

et la condition aux limites sur la paroi impose

$$A = 0.$$

Autrement dit, il n'existe pas de mode propre de cette forme.

La formule de représentation modale

Dans ce cas très simple, il est possible d'établir une formule de représentation modale en utilisant le Principe des Images et la formule de représentation dans l'espace libre. L'objectif est d'obtenir une formule de représentation, comme superposition de modes propres, pour la solution $p(x, t)$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \text{ pour tout } t > 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 & \text{pour } x_1 = 0, \text{ pour tout } t > 0, \\ p = p_0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial t} = p_1 & \text{dans } \Omega, \text{ à l'instant } t = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

où p_0 et p_1 sont des fonctions définies dans Ω , supposées connues. Comme nous l'avons toujours fait, nous considérons pour simplifier le cas $p_1 = 0$. Considérons alors le problème suivant posé dans l'espace libre :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \text{ pour tout } t > 0, \\ q = q_0 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial t} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \text{ à l'instant } t = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

où q_0 est définie en prolongeant p_0 symétriquement par rapport à la paroi $x_1 = 0$. On a établi pour ce problème au chapitre précédent la formule de représentation suivante :

$$q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{q}_0(\xi) \cos(c|\xi|t) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (3.6)$$

où \hat{q}_0 désigne la transformée de Fourier de q_0 . Comme q_0 est symétrique par rapport au plan $x_1 = 0$, sa transformée de Fourier \hat{q}_0 est symétrique par rapport au plan $\xi_1 = 0$. Il est alors très facile de vérifier que la restriction de q au demi-espace Ω est solution du problème (3.4). En effet :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}(0, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{q}_0(\xi) \cos(c|\xi|t) i\xi_1 e^{i(x_2\xi_2 + x_3\xi_3)} d\xi = 0$$

car l'intégrand est une fonction impaire de ξ_1 . Autrement dit :

$$p(x, t) = q(x, t) \quad \forall x_1 < 0.$$

C'est ce que l'on appelle le Principe des Images. Finalement, en utilisant la propriété de symétrie vérifiée par \hat{q}_0 , on peut récrire la formule (3.6) sous la forme suivante :

$$p(x, t) = \frac{2}{\sqrt{(2\pi)^N}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^N, \xi_1 > 0} \hat{q}_0(\xi) \cos(c|\xi|t) \cos(x_1\xi_1) e^{i(x_2\xi_2 + x_3\xi_3)} d\xi.$$

On vérifie bien ici que les ondes acoustiques transitoires dans le demi-espace peuvent se décomposer sur les modes harmoniques que nous avons calculés plus haut.

Remarque 3.1.2 Un calcul similaire peut être mené dans le cas où la pression vérifie sur la surface $x_1 = 0$ la condition de Dirichlet homogène $p = 0$ (cas d'une surface libre) : la seule différence est que la réflexion se fait avec un changement de signe. Autrement dit, on a $A' = -A$.

3.1.2 Réflexion d'une onde électromagnétique sur une paroi parfaitement conductrice

Supposons maintenant que l'on s'intéresse à la propagation des ondes électromagnétiques dans le demi-espace Ω limité cette fois par un mur électrique. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche les solutions bornées \mathbf{E} de

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 & x \in \Omega, \\ E_2 = E_3 = 0 & x_1 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Par analogie avec ce qui précède, nous allons chercher \mathbf{E} sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}(x) = \hat{\mathbf{E}}(x_1)e^{ik_2x_2}$$

et chaque composante de $\hat{\mathbf{E}}$ doit vérifier :

$$\frac{d^2 \hat{E}_j}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2 \right) \hat{E}_j = 0, \quad x_1 < 0.$$

On doit à nouveau distinguer deux cas :

- **Premier cas** : $\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} k_1^2 \geq 0$ avec $k_1 \geq 0$

La solution générale est alors de la forme :

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{F}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{F}'e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}.$$

La condition aux limites impose les deux relations suivantes :

$$F_2 + F'_2 = F_3 + F'_3 = 0. \quad (3.8)$$

Par ailleurs l'équation $\text{div } \mathbf{E} = 0$ valable dans le domaine Ω donne :

$$ik_1(F_1e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - F'_1e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}) + ik_2(F_2e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + F'_2e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}) = 0$$

d'où

$$\begin{cases} k_1F_1 + k_2F_2 = 0 \\ -k_1F'_1 + k_2F'_2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Ces deux équations signifient que les ondes incidente et réfléchie sont *transverses*. De (3.8) et (3.9), on déduit finalement :

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_2 \\ -F_3 \end{pmatrix}.$$

On remarque l'effet de la réflexion sur la *polarisation* de l'onde : le vecteur \mathbf{F}' est le symétrique du vecteur \mathbf{F} par rapport à l'axe Ox_1 .

- **Second cas** : $\frac{\omega^2}{c^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma^2 < 0$ avec $\gamma \geq 0$

La solution générale $\hat{\mathbf{E}}$ est alors de la forme

$$\hat{\mathbf{E}}(x_1) = \mathbf{F}e^{\gamma x_1}$$

et la condition aux limites sur la paroi impose

$$F_2 = F_3 = 0.$$

Enfin la condition de divergence nulle montre que $F_1 = 0$. Autrement dit, à nouveau, il n'existe pas de mode propre de cette forme.

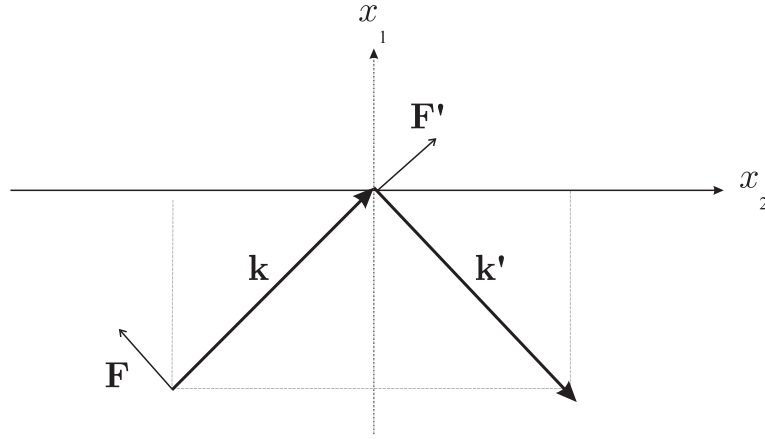


FIG. 3.2 – Réflexion électromagnétique sur une paroi conductrice

3.2 Le dioptré acoustique

Nous nous intéressons maintenant à la propagation acoustique au voisinage de l'interface entre deux fluides compressibles de caractéristiques différentes (l'eau et l'air par exemple). On parle alors d'un *dioptré*. Chaque fluide est caractérisé par sa vitesse et sa densité : on supposera qu'un premier fluide de densité ρ_+ et de vitesse c_+ occupe le domaine

$$\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 > 0\}$$

et qu'un second fluide de densité ρ_- et de vitesse c_- occupe le domaine

$$\Omega_- = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 < 0\}.$$

Pour fixer les idées, on suppose que $c_+ \geq c_-$. A la traversée de l'interface, on doit assurer la continuité de la pression p et de la vitesse normale des particules $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Cette dernière condition est dite *condition de glissement*.

En régime harmonique, la pression p et la vitesse \mathbf{v} sont de la forme

$$p(x, t) = \Re e(\varphi(x)e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{v}(x, t) = \Re e(\mathbf{w}(x)e^{-i\omega t})$$

et la relation (1.22) se traduit par l'équation suivante :

$$-i\omega\rho\mathbf{w} + \nabla\varphi = 0.$$

On doit donc assurer sur l'interface $x_1 = 0$ la continuité de φ et de $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$.

Le calcul des modes propres revient donc à chercher, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, les solutions φ (bornées en espace) de

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \frac{\omega^2}{c_+^2}\varphi = 0 & x \in \Omega_+, \\ \Delta\varphi + \frac{\omega^2}{c_-^2}\varphi = 0 & x \in \Omega_-, \\ \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right] = [\varphi] = 0 & x_1 = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

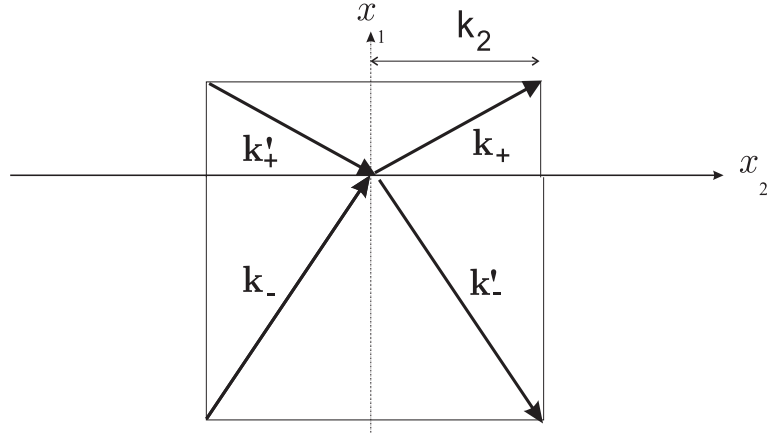


FIG. 3.3 – Transmission acoustique à travers un dioptré

où $[\varphi]$ désigne le saut de φ en $x_1 = 0$.

La même démarche que dans le paragraphe précédent conduit alors à chercher φ sous la forme suivante

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x_1)e^{ik_2x_2}$$

où $k_2 \in \mathbb{R}$. La fonction $\hat{\varphi}$ doit vérifier :

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{\varphi}}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{\pm}^2} - k_2^2\right)\hat{\varphi} = 0 & x_1 > 0, \\ \frac{d^2\hat{\varphi}}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{\pm}^2} - k_2^2\right)\hat{\varphi} = 0 & x_1 < 0, \\ \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\hat{\varphi}}{dx_1}\right] = [\hat{\varphi}] = 0 & x_1 = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

On doit alors distinguer trois cas suivant le signe des quantités $\frac{\omega^2}{c_{\pm}^2} - k_2^2$.

- **Premier cas :** $\frac{\omega^2}{c_{\pm}^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} (k_{\pm}^{\pm})^2 \geq 0$

En posant

$$\mathbf{k}_{\pm} = \begin{pmatrix} k_{\pm}^{\pm} \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{k}'_{\pm} = \begin{pmatrix} -k_{\pm}^{\pm} \\ k_2 \end{pmatrix},$$

on trouve que φ est de la forme :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_+ e^{i\mathbf{k}_+ \cdot x} + A'_+ e^{i\mathbf{k}'_+ \cdot x} & \text{si } x_1 > 0 \\ A_- e^{i\mathbf{k}_- \cdot x} + A'_- e^{i\mathbf{k}'_- \cdot x} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

Autrement dit, le mode correspond, de chaque côté du dioptré, à la superposition de deux ondes planes. Les conditions aux limites sur l'interface du dioptré permettent ensuite d'écrire le système linéaire suivant, portant sur les amplitudes de ces ondes planes :

$$\begin{cases} A_+ + A'_+ = A_- + A'_- \\ \frac{k_1^-}{\rho_-}(A_- - A'_-) = \frac{k_1^+}{\rho_+}(A_+ - A'_+) \end{cases}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} A_+ + A'_+ = A_- + A'_- \\ \tau(A_- - A'_-) = A_+ - A'_+ \end{cases}$$

avec

$$\tau = \frac{k_1^- \rho_+}{k_1^+ \rho_-}.$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de 2 équations (indépendantes) et 4 inconnues. Ses solutions forment donc un espace vectoriel de dimension 2. On peut par exemple construire deux solutions linéairement indépendantes en imposant

$$A_- = 1 \text{ et } A'_+ = 0$$

pour la première et

$$A_- = 0 \text{ et } A'_+ = 1$$

pour la seconde. Considérons pour fixer les idées le premier cas. Les 4 amplitudes des ondes planes sont alors données par

$$\begin{cases} A_- = 1 \\ A'_- = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \\ A_+ = \frac{2\tau}{\tau + 1} \\ A'_+ = 0 \end{cases}$$

Le mode propre correspondant peut s'interpréter physiquement de la façon suivante : l'onde d'amplitude $A_- = 1$ est incidente sur l'interface du dioptré et produit une onde réfléchie d'amplitude A'_- et une onde transmise d'amplitude A_+ . On trouve souvent dans la littérature les valeurs du *coefficient de réflexion*

$$R = \frac{A'_-}{A_-} = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

et du *coefficient de transmission*

$$T = \frac{A_+}{A_-} = \frac{2\tau}{\tau + 1}.$$

On remarque que l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence :

$$\sin \theta_- = \sin \theta'_- = \frac{k_2 c_-}{\omega}.$$

En revanche, l'onde transmise est *réfractée*. En effet, on a :

$$\sin \theta_+ = \sin \theta'_+ = \frac{k_2 c_+}{\omega}$$

et l'on retrouve la célèbre loi de Descartes qui relie l'angle de réfraction à l'angle d'incidence :

$$\frac{\sin \theta_+}{c_+} = \frac{\sin \theta_-}{c_-}. \quad (3.12)$$

Remarque 3.2.1 On remarque que le coefficient de réflexion s'annule si et seulement si $\tau = 1$. On dit que l'interface est dans ce cas parfaitement transparente. La relation $\tau = 1$ peut se récrire à l'aide des angles θ_+ et θ_- sous la forme :

$$\frac{\cos \theta_-}{\rho_- c_-} = \frac{\cos \theta_+}{\rho_+ c_+}.$$

Cette relation jointe à l'équation (3.12) permet de déterminer complètement l'angle d'incidence. On trouve :

$$\cos \theta_- = \sqrt{\frac{1 - \frac{c_-^2}{c_+^2}}{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho_-^2}}},$$

relation qui ne peut être vérifiée que si

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} \leq \frac{c_-}{c_+} < 1.$$

En particulier, l'interface est parfaitement transparente en incidence normale si $\rho_- c_- = \rho_+ c_+$. On dit dans ce cas que les impédances des deux milieux sont *parfaitement adaptées*.

Remarque 3.2.2 Dans le cas de l'interface entre l'eau (milieu +) et l'air (milieu -), on a au contraire un fort contraste d'impédance puisque

$$\frac{\rho_+ c_+}{\rho_- c_-} \sim 3.6 \cdot 10^3.$$

Autrement dit, le coefficient τ est très grand et le coefficient de réflexion R est proche de 1. Tout se passe comme si, vue de l'air, la surface de l'eau était une surface rigide (que l'on peut modéliser par une condition de Neumann homogène sur la pression). Inversement, si l'on considère le cas d'une onde incidente dans l'eau, on trouve que le coefficient R est proche de -1 ; cela signifie que vue de l'eau, l'interface avec l'air se comporte comme une surface parfaitement molle (que l'on peut modéliser par une condition de Dirichlet homogène sur la pression).

- **Second cas :** $\frac{\omega^2}{c_+^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma_+^2 \leq 0$ et $\frac{\omega^2}{c_-^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} (k_1^-)^2 \geq 0$ avec $\gamma_+ \geq 0$ et $k_1^- \geq 0$

On trouve cette fois que φ est de la forme suivante :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_+ e^{-\gamma_+ x_1} e^{ik_2 x_2} & \text{si } x_1 > 0 \\ A_- e^{ik_1^- x_1} + A'_- e^{ik_1' x_1} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

Autrement dit, le mode correspond, dans Ω_- , à la superposition de deux ondes planes et, dans Ω_+ , à une onde localisée au voisinage de la surface, encore appelée *onde évanescente*. Les conditions aux limites sur l'interface du dioptré conduisent ensuite au système linéaire suivant, portant sur les amplitudes :

$$\begin{cases} A_+ = A_- + A'_- \\ i \frac{k_1^-}{\rho_-} (A_- - A'_-) = -\frac{\gamma_+}{\rho_+} A_+ \end{cases}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} A_+ = A_- + A'_- \\ \tau(A_- - A'_-) = -A_+ \end{cases}$$

avec

$$\tau = \frac{ik_1^- \rho_+}{\gamma_+ \rho_-}.$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de 2 équations (indépendantes) et 3 inconnues. Ses solutions forment donc un espace vectoriel de dimension 1. On peut par exemple construire une solution en imposant $A_- = 1$. Les 3 amplitudes sont alors données par

$$\begin{cases} A_- = 1 \\ A'_- = \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \\ A_+ = \frac{2\tau}{\tau - 1} \end{cases}$$

C'est le cas de la réflexion totale. On observe qu'elle se produit dès que

$$\theta_- \geq \text{Arcsin} \frac{c_-}{c_+}.$$

Cet angle est appelé *angle critique*.

- **Troisième cas :** $\frac{\omega^2}{c_+^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma_+^2 \leq 0$ et $\frac{\omega^2}{c_-^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma_-^2 \leq 0$ avec $\gamma_+ \geq 0$ et $\gamma_- \geq 0$

On trouve cette fois que φ est de la forme suivante :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_+ e^{-\gamma_+ x_1} e^{ik_2 x_2} & \text{si } x_1 > 0 \\ A_- e^{\gamma_- x_1} e^{ik_2 x_2} & \text{si } x_1 < 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une onde localisée au voisinage de l'interface, "guidée" par l'interface. Les conditions aux limites sur l'interface du dioptré s'écrivent ensuite :

$$\begin{cases} A_+ = A_- \\ \frac{\gamma_-}{\rho_-} A_- = -\frac{\gamma_+}{\rho_+} A_+ \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'il n'admet aucune solution non nulle. Autrement dit, l'interface du dioptré ne peut pas guider d'ondes acoustiques.

3.3 Le demi-espace élastique

On considère maintenant la propagation des ondes élastiques dans un solide homogène et isotrope occupant le demi-espace $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 < 0\}$ et dont la frontière $x_1 = 0$ est soit libre, soit encastrée. La recherche des modes propres consiste à déterminer les champs de déplacement \mathbf{U} harmoniques en temps (et bornés en espace)

$$\mathbf{U}(x, t) = \Re(\mathbf{u}(x) e^{-i\omega t})$$

vérifiant (1.7) dans Ω et la condition aux limites considérée sur le bord. Autrement dit, \mathbf{u} doit vérifier :

$$\begin{cases} -\omega^2 \rho \mathbf{u} = \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) & (\Omega) \\ \mathbf{u} = 0 \quad (\text{ou } \sigma(\mathbf{u})e_1 = 0) & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.13)$$

où le tenseur des contraintes $\sigma(\mathbf{u})$ est donné par la loi de Hooke et e_1 désigne le premier vecteur unitaire de la base.

Une fois de plus, la technique de séparation de variables nous conduit à chercher \mathbf{u} sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x) = \hat{\mathbf{u}}(x_1)e^{ik_2x_2}. \quad (3.14)$$

Notons bien qu'il s'agit d'un champ de déplacement à 3 composantes mais qui ne dépend que des 2 variables x_1 et x_2 . Autrement dit, la propagation se fait nécessairement dans le plan $0x_1x_2$ (les vecteurs d'ondes appartiennent à ce plan) mais la polarisation des ondes est quelconque.

En injectant cette expression dans les équations du problème, on obtient un système différentiel en x_1 qui couple a priori les 3 composantes du déplacement $\hat{\mathbf{u}}$. Pour obtenir un découplage de ces équations, nous allons procéder en deux temps : tout d'abord, nous allons montrer qu'il y a un découplage naturel entre les deux premières composantes d'une part et la troisième d'autre part. Ce résultat est vrai dans le contexte général des milieux stratifiés et nous le réutiliserons au chapitre suivant. Dans un second temps, nous reprendrons la décomposition de Helmholtz, que nous avons déjà utilisée pour mettre en évidence les ondes S et les ondes P dans un milieu homogène, ce qui nous permettra de découpler les 2 premières équations du système.

3.3.1 Découplage entre ondes SH et ondes P-SV

En calculant les tenseurs de déformations et de contraintes pour un champ de la forme (3.14), on vérifie aisément qu'ils sont de la forme suivante

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \hat{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}})e^{ik_2x_2} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{u}) = \hat{\sigma}(\hat{\mathbf{u}})e^{ik_2x_2}$$

avec

$$\hat{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} & \frac{1}{2} \left(ik_2\hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1} \right) & \frac{1}{2} \frac{d\hat{u}_3}{dx_1} \\ \frac{1}{2} \left(ik_2\hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1} \right) & ik_2\hat{u}_2 & \frac{1}{2} ik_2\hat{u}_3 \\ \frac{1}{2} \frac{d\hat{u}_3}{dx_1} & \frac{1}{2} ik_2\hat{u}_3 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} + ik_2\lambda\hat{u}_2 & \mu \left(ik_2\hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1} \right) & \mu \frac{d\hat{u}_3}{dx_1} \\ \mu \left(ik_2\hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1} \right) & \lambda \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} + ik_2(\lambda + 2\mu)\hat{u}_2 & ik_2\mu\hat{u}_3 \\ \mu \frac{d\hat{u}_3}{dx_1} & ik_2\mu\hat{u}_3 & \lambda \left(\frac{d\hat{u}_1}{dx_1} + ik_2\hat{u}_2 \right) \end{pmatrix}$$

Le système de l'élastodynamique prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_1} \left((\lambda + 2\mu) \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} + ik_2 \lambda \hat{u}_2 \right) + ik_2 \left(\mu \left(ik_2 \hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1} \right) \right) &= -\omega^2 \rho \hat{u}_1 \\ \frac{d}{dx_1} \left(\mu \left(ik_2 \hat{u}_1 + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1} \right) \right) + ik_2 \left(\lambda \frac{d\hat{u}_1}{dx_1} + ik_2 (\lambda + 2\mu) \hat{u}_2 \right) &= -\omega^2 \rho \hat{u}_2 \\ \frac{d}{dx_1} \left(\mu \frac{d\hat{u}_3}{dx_1} \right) + ik_2 (\mu ik_2 \hat{u}_3) &= -\omega^2 \rho \hat{u}_3 \end{cases} \quad (3.15)$$

On observe donc bien, comme on l'avait annoncé, un découplage entre les deux premières équations qui ne font intervenir que les deux premières composantes du déplacement, et la troisième équation qui ne fait intervenir que la troisième composante du déplacement.

Il faut bien-sûr considérer maintenant les conditions aux limites pour s'assurer qu'elles respectent elles-aussi ce découplage : c'est évident en ce qui concerne les conditions d'encastrement qui s'écrivent tout simplement

$$\hat{u}_1(0) = \hat{u}_2(0) = \hat{u}_3(0) = 0.$$

C'est également le cas de la condition de surface libre qui s'écrit quant à elle :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{d\hat{u}_1}{dx_1}(0) + ik_2 \lambda \hat{u}_2(0) &= 0 \\ \mu \left(ik_2 \hat{u}_1(0) + \frac{d\hat{u}_2}{dx_1}(0) \right) &= 0 \\ \mu \frac{d\hat{u}_3}{dx_1}(0) &= 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Ce découplage nous permet donc de rechercher séparément les solutions telles que $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 0$ et les solutions telles que $\hat{u}_3 = 0$.

- Les modes tels que $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 0$ correspondent à des ondes qui se propagent dans le plan $0x_1x_2$ et qui sont polarisées selon x_3 . Autrement dit, il s'agit d'ondes transverses (ou de cisaillement). D'ailleurs, on observe que la dernière équation de (3.15) fait intervenir la vitesse $c_S = (\mu/\rho)^{1/2}$ des ondes de cisaillement. On parle dans la littérature d'ondes SH, i.e. d'ondes S polarisées horizontalement (la direction d'invariance x_3 étant supposée horizontale...)
- Les modes tels que $\hat{u}_3 = 0$ correspondent à des ondes qui se propagent dans le plan $0x_1x_2$ et qui sont polarisées dans ce même plan. Comme on va le voir dans la suite, ils sont obtenus par superposition d'ondes S et d'ondes P, couplées par la présence de la surface. On parle dans la littérature d'ondes P-SV (Attention : le V signifie cette fois que les ondes S sont polarisées dans un plan vertical, et non pas que leur polarisation est verticale !)

Remarque 3.3.1 Le découplage que l'on vient d'observer entre ondes SH et ondes P-SV est valable dans un cadre beaucoup plus général. En effet, il est facile de voir que le découplage se produit dès que l'on s'intéresse, dans un milieu élastique invariant dans la direction x_3 , à des solutions élastodynamiques indépendantes de x_3 . Nous l'exploiterons en particulier dans le chapitre suivant dans les cas d'un milieu stratifié quelconque, pour lequel λ , μ et ρ sont des fonctions de la coordonnée verticale x_1 .

L'étude des modes propres de type SH ne pose aucune difficulté. On observe que le problème à résoudre est le même que le problème d'acoustique dans un fluide compressible, u_3 jouant le rôle de la pression acoustique et c_S celui de la vitesse du son. En effet, la troisième équation du système (3.15) peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \hat{u}_3}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_S^2} - k_2^2 \right) \hat{u}_3 = 0.$$

La condition d'encastrement se traduit par une condition aux limites de type Dirichlet homogène sur u_3 , et s'apparente à une condition de paroi parfaitement molle pour l'acoustique. Inversement, la condition de bord libre se traduit par une condition aux limites de type Neumann homogène, et s'apparente à une condition de paroi parfaitement rigide pour l'acoustique.

Finalement, tous les modes propres sont de la forme :

$$\mathbf{u}(x) = e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} + e^{i(-k_1 x_1 + k_2 x_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A' \end{pmatrix}$$

avec $A' = -A$ dans le cas de l'encastrement et $A = A'$ dans le cas du bord libre.

Autrement dit, une onde SH incidente sur une paroi libre ou encastree produit une onde SH réfléchiée d'amplitude égale ou opposée, qui obéit aux lois de Descartes.

Comme on va le voir maintenant, le cas des ondes P-SV est beaucoup plus complexe.

3.3.2 Equations des modes de type P-SV

Considérons maintenant un mode de type P-SV de la forme :

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} \hat{u}_1(x_1) \\ \hat{u}_2(x_1) \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_2 x_2}.$$

Pour déterminer \hat{u}_1 et \hat{u}_2 , il nous faut résoudre le système différentiel couplé formé des deux premières équations de (3.15). Pour cela, le milieu étant homogène, nous aurons à nouveau recours à la décomposition de Helmholtz :

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \text{rot } \Psi, \quad \text{div } \Psi = 0$$

et nous rappelons que \mathbf{u} vérifie l'équation (3.13) dès que les potentiels φ et Ψ sont solutions respectives de

$$\Delta \varphi + \frac{\omega^2}{c_P^2} \varphi = 0$$

et

$$\Delta \Psi + \frac{\omega^2}{c_S^2} \Psi = 0.$$

En calculant $\text{div } \mathbf{u}$ et $\text{rot } \mathbf{u}$, on vérifie alors aisément que les potentiels sont de la forme

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x_1)e^{ik_2x_2} \text{ et } \Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\psi}(x_1) \end{pmatrix} e^{ik_2x_2}.$$

Ainsi, on a remplacé un système couplé en \hat{u}_1 et \hat{u}_2 par les deux équations suivantes (découplées !) en $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$:

$$\frac{d^2\hat{\varphi}}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_P^2} - k_2^2 \right) \hat{\varphi} = 0$$

et

$$\frac{d^2\hat{\psi}}{dx_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_S^2} - k_2^2 \right) \hat{\psi} = 0.$$

Bien entendu, les conditions aux limites rétablissent un couplage entre les deux potentiels (et donc entre les ondes S et les ondes P).

La condition d'encastrement

Le champ de déplacement s'écrit en fonction des potentiels sous la forme suivante

$$\hat{u}(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{d\hat{\varphi}}{dx_1}(x_1) + ik_2\hat{\psi}(x_1) \\ ik_2\hat{\varphi}(x_1) - \frac{d\hat{\psi}}{dx_1}(x_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Par conséquent, la condition d'encastrement sur la surface $x_1 = 0$ s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\varphi}}{dx_1}(0) + ik_2\hat{\psi}(0) = 0 \\ ik_2\hat{\varphi}(0) - \frac{d\hat{\psi}}{dx_1}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

La condition de surface libre

D'après (3.16) et (3.17), la condition de surface libre s'écrit en fonction des potentiels φ et ψ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{d^2\hat{\varphi}}{dx_1^2}(0) + ik_2 \frac{d\hat{\psi}}{dx_1}(0) \right) + ik_2\lambda \left(ik_2\hat{\varphi}(0) - \frac{d\hat{\psi}}{dx_1}(0) \right) = 0 \\ \mu ik_2 \left(\frac{d\hat{\varphi}}{dx_1}(0) + ik_2\hat{\psi}(0) \right) + \mu \left(-\frac{d^2\hat{\psi}}{dx_1^2}(0) + ik_2 \frac{d\hat{\varphi}}{dx_1}(0) \right) = 0 \end{cases}$$

Ce système peut être simplifié en utilisant les équations satisfaites par $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$; on obtient ainsi, après quelques manipulations, le système suivant :

$$\begin{cases} -t\hat{\varphi}(0) + 2ik_2 \frac{d\hat{\psi}}{dx_1}(0) = 0 \\ 2ik_2 \frac{d\hat{\varphi}}{dx_1}(0) + t\hat{\psi}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

où le coefficient t est donné par

$$t = \frac{\omega^2}{c_S^2} - 2k_2^2. \quad (3.20)$$

Nous allons pouvoir maintenant effectuer tous les calculs de façon analogue au cas du dioptre acoustique : la principale différence tient au fait que les ondes lentes (ici les ondes S) et rapides (les ondes P) co-existent ici dans le même domaine spatial. En réalité, ceci ne modifie en rien la manière de mener les calculs et nous allons observer des phénomènes tout à fait similaires à ceux que nous avons rencontrés lors de l'étude du dioptre tels que la réfraction ou la réflexion totale.

3.3.3 Calculs des modes de type P-SV

Comme dans le cas du dioptre, il nous faut distinguer trois cas selon le signe des quantités $\frac{\omega^2}{c_S^2} - k_2^2$ et $\frac{\omega^2}{c_P^2} - k_2^2$.

- **Premier cas** : $k_2^2 \leq \frac{\omega^2}{c_P^2} \leq \frac{\omega^2}{c_S^2}$

En posant

$$k_1^P = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_P^2} - k_2^2}, k_1^S = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_S^2} - k_2^2},$$

$$\mathbf{k}_P = \begin{pmatrix} k_1^P \\ k_2 \end{pmatrix}, \mathbf{k}_S = \begin{pmatrix} k_1^S \\ k_2 \end{pmatrix}, \mathbf{k}'_P = \begin{pmatrix} -k_1^P \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{k}'_S = \begin{pmatrix} -k_1^S \\ k_2 \end{pmatrix},$$

on trouve que les potentiels sont de la forme :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A_P e^{i\mathbf{k}_P \cdot \mathbf{x}} + A'_P e^{i\mathbf{k}'_P \cdot \mathbf{x}} \\ \psi(x) = A_S e^{i\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{x}} + A'_S e^{i\mathbf{k}'_S \cdot \mathbf{x}} \end{cases}$$

Autrement dit, le mode correspond à la superposition de quatre ondes planes : une onde P incidente, une onde P réfléchie, une onde S incidente et une onde S réfléchie.

Si θ_P et θ_S désignent les angles d'incidence respectifs de l'onde P et de l'onde S, on peut noter que :

$$\frac{\sin \theta_P}{c_P} = \frac{\sin \theta_S}{c_S}. \quad (3.21)$$

En particulier,

$$\sin \theta_S \leq \frac{c_S}{c_P} < 1/\sqrt{2}.$$

Autrement dit, dans ce régime où toutes les ondes sont propagatives, l'angle d'incidence des ondes S est nécessairement strictement plus petit que $\pi/4$.

Les conditions aux limites sur la surface $x_1 = 0$ permettent ensuite d'écrire un système linéaire, portant sur les amplitudes de ces ondes planes.

Considérons par exemple le cas de la condition d'encastrement. D'après (3.18), on a :

$$\begin{cases} k_1^P(A_P - A'_P) + k_2(A_S + A'_S) = 0 \\ k_2(A_P + A'_P) - k_1^S(A_S - A'_S) = 0 \end{cases}$$

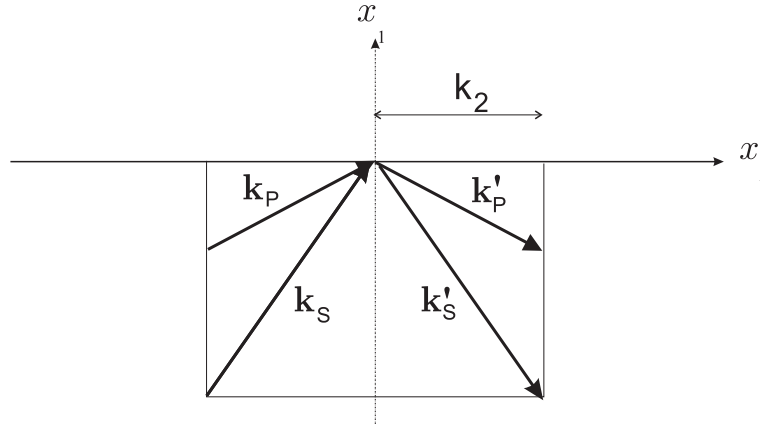


FIG. 3.4 – Réflexion des ondes P-SV

Il s'agit d'un système linéaire homogène de 2 équations (indépendantes) et 4 inconnues. Ses solutions forment donc un espace vectoriel de dimension 2. On peut par exemple construire deux solutions linéairement indépendantes en imposant

$$A_P = 1 \text{ et } A_S = 0$$

pour la première et

$$A_P = 0 \text{ et } A_S = 1$$

pour la seconde. La première solution peut s'interpréter physiquement de la façon suivante : l'onde P d'amplitude $A_P = 1$ est incidente sur l'interface du dioptré et produit une onde P réfléchie d'amplitude A'_P et une onde S transmise et réfractée d'amplitude A_S . De même, la seconde solution correspond au cas d'une onde S incidente qui génère une onde S réfléchie et une onde P transmise et réfractée.

On dit qu'il y a *conversion d'ondes*, puisque une onde S génère une onde P et réciproquement. Il est facile de voir que cette conversion a lieu pour tous les angles d'incidence sauf pour l'incidence normale ($k_2 = 0$). En incidence normale, les ondes S et P sont parfaitement réfléchies, sans changement de signe pour l'onde S et pour l'onde P.

De même, dans le cas de la condition de surface libre, on obtient :

$$\begin{cases} -t(A_P + A'_P) - 2k_2k_1^S(A_S - A'_S) = 0 \\ -2k_2k_1^P(A_P - A'_P) + t(A_S + A'_S) = 0 \end{cases}$$

où t est donné par (3.20). On observe les mêmes phénomènes : il y a toujours conversion d'ondes sauf en incidence normale. En effet, $t = 0$ correspondrait à une incidence des ondes S d'angle $\pi/4$ or on a vu que l'angle d'incidence des ondes S, dans ce premier cas, est toujours plus grand que $\pi/4$.

- **Second cas** : $\frac{\omega^2}{c_P^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma_P^2 \leq 0$ et $\frac{\omega^2}{c_S^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} (k_1^S)^2 \geq 0$ avec $\gamma_P \geq 0$ et $k_1^S \geq 0$

On trouve cette fois que les potentiels sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A_P e^{\gamma_P x_1} e^{i k_2 x_2} \\ \psi(x) = A_S e^{i \mathbf{k}_S \cdot x} + A'_S e^{i \mathbf{k}'_S \cdot x} \end{cases}$$

Autrement dit, le mode correspond à la superposition de deux ondes S propagatives et d'une onde P évanescence. C'est le régime de réflexion totale des ondes S. Il correspond à un angle d'incidence des ondes S supérieur à l'angle critique qui est donné par :

$$\theta_S^{critique} = \arcsin \frac{c_S}{c_P}.$$

Comme on l'a déjà dit, cet angle critique est inférieur à $\pi/4$.

A nouveau, les amplitudes sont déterminées à partir des conditions aux limites sur la surface $x_1 = 0$ qui conduisent à un système linéaire homogène de 2 équations (indépendantes) et 3 inconnues (A_S , A'_S , et A_P).

On peut noter que dans le cas où la surface du solide est libre, il existe un angle particulier pour lequel l'onde S incidente ne génère pas d'onde P évanescence. C'est l'angle $\pi/4$ qui correspond à la relation $t = 0$.

- **Troisième cas :** $\frac{\omega^2}{c_P^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma_P^2 \leq 0$ et $\frac{\omega^2}{c_S^2} - k_2^2 \stackrel{\text{déf}}{=} -\gamma_S^2 \leq 0$ avec $\gamma_P \geq 0$ et $\gamma_S \geq 0$

On trouve cette fois que les potentiels sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A_P e^{\gamma_P x_1} e^{ik_2 x_2} \\ \psi(x) = A_S e^{\gamma_S x_1} e^{ik_2 x_2} \end{cases}$$

Les ondes S et P en présence sont toutes deux évanescences et se propagent avec la vitesse de phase ω/k_2 dans la direction x_2 . Les conditions aux limites sur la surface permettent ensuite d'écrire un système linéaire de 2 équations pour les 2 inconnues A_P et A_S . Bien entendu, il n'existera de tels modes que si le déterminant de ce système peut s'annuler.

Considérons tout d'abord le cas du solide encastré. On trouve alors le système suivant :

$$\begin{cases} \gamma_P A_P + ik_2 A_S = 0 \\ ik_2 A_P - \gamma_S A_S = 0 \end{cases}$$

dont le déterminant est égal à $\gamma_P \gamma_S - k_2^2$. Il est facile de voir qu'il ne s'annule jamais puisque par hypothèse, $\gamma_S < \gamma_P \leq k_2$. Autrement dit, il n'existe pas d'ondes guidées au voisinage d'une surface encastrée.

Regardons maintenant le cas de la surface libre. Le système obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} -t A_P + 2ik_2 \gamma_S A_S = 0 \\ 2ik_2 \gamma_P A_P + t A_S = 0 \end{cases}$$

Il admet des solutions non-triviales si et seulement si :

$$4k_2^2 \gamma_S \gamma_P - t^2 = 0. \quad (3.22)$$

Nous allons montrer que cette équation admet des solutions. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.3.4 L'onde de Rayleigh

Pour établir l'existence d'ondes guidées par la surface libre d'un solide élastique, il nous faut étudier l'équation (3.22). Pour cela, remarquons tout d'abord qu'elle peut se récrire sous la

forme $f(c^2) = 0$ avec

$$f(x) = \left(2 - \frac{x}{c_S^2}\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{x}{c_S^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{c_P^2}\right)^{1/2}$$

et

$$c = \frac{\omega}{k_2}.$$

Pour montrer que f admet une racine non nulle, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$, $f(c_S^2) = 1$ et

$$f'(0) = -2 \left(\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right) < 0.$$

La fonction f étant continue, elle s'annule nécessairement dans l'intervalle $]0, c_S^2[$. En fait, on peut montrer qu'elle admet exactement une racine dans cet intervalle que l'on note c_R^2 .

Autrement dit, on a montré qu'il existe un mode propre qui correspond à une onde qui se propage dans la direction x_2 avec la vitesse de phase c_R (donc plus lentement que les ondes S) et dont l'énergie s'atténue très rapidement lorsque l'on pénètre à l'intérieur du solide. Elle a été découverte par Lord Rayleigh en 1887, c'est pourquoi elle porte son nom.

Cette onde est dite *non dispersive* puisque sa vitesse ne dépend pas de la fréquence mais uniquement du matériau considéré (en effet, la fonction f ne dépend pas de ω). En fait, on peut montrer que le rapport c_R/c_S reste très proche de 1, quel que soit le matériau considéré. Par conséquent, la composante de type S de l'onde de Rayleigh est prépondérante.

Il est intéressant de décrire la trajectoire des particules lors du passage d'une onde de Rayleigh. L'expression complète du champ de déplacement étant la suivante :

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{pmatrix} \gamma_P A_P e^{\gamma_P x_1} \cos(k_2 x_2 - \omega t) - k_2 A_S e^{\gamma_S x_1} \sin(k_2 x_2 - \omega t) \\ -k_2 A_P e^{\gamma_P x_1} \sin(k_2 x_2 - \omega t) - \gamma_S A_S e^{\gamma_S x_1} \cos(k_2 x_2 - \omega t) \end{pmatrix}$$

on peut facilement vérifier que

$$\gamma_P \mathbf{U}_1(x, t)^2 + \gamma_S \mathbf{U}_2(x, t)^2$$

ne dépend que de x_1 . Autrement dit, les particules décrivent des ellipses dont la taille dépend de la profondeur.

Bibliographie

- [1972] M. ABRAMOWITZ AND I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions*, Dover Publications, New York.
- [1973] J.D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, North Holland, Amsterdam.
- [1985a] M. ARTOLA ET M. CESSENAT, *Théorie Spectrale*, dans *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, tome 2 (R. Dautray et J.-L. Lions), Masson, Paris.
- [1985b] M. ARTOLA ET M. CESSENAT, *Problèmes d'Évolution*, dans *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, tome 3 (R. Dautray et J.-L. Lions), Masson, Paris.
- [1990] A. BAMBERGER, Y. DERMENJIAN, AND P. JOLY, *Mathematical analysis of the propagation of elastic guided waves in heterogeneous media*, *Journal of Differential Equations*, 88 :113–153.
- [1991] A. BAMBERGER, P. JOLY, AND M. KERN, *Propagation of elastic waves along a cylindrical cavity of arbitrary cross section*, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 25 :1–30.
- [1990] L.M. BREKHOVSKIKH AND O.A. GODIN, *Acoustic of Layered Media I : Plane and Quasi-Plane Waves*, Springer-Verlag, Berlin.
- [1994] L.M. BREKHOVSKIKH AND V. GONCHAROV, *Mechanics of Continua and Wave Dynamics*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [1998] M. BRUNEAU, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Hermes, Paris.
- [1998] A. S. BONNET-BEN DHIA, J. DUTERTE AND P. JOLY, *Mathematical Analysis of Elastic Surface Waves in Topographic Waveguides*, *Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci.*, Vol. 9, 5 :755–798.
- [1953] R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, INC., New York.
- [1983] A.P. DOWLING AND J.E. FLOWCS WILLIAMS, *Sound and Sources of Sound*, John Wiley and Sons, Chichester.
- [1995] J. DUTERTE, *Ondes de surface guidées par une perturbation locale d'un demi-espace élastique homogène*, PhD thesis, Université Paris, Paris.
- [1994] P.J.T. FILIPPI (COORDONNATEUR), *Acoustique Générale*, Collection d'Acoustique, Société Française d'Acoustique.
- [1973] P. GERMAIN, *Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome I : Théorie Générale*, Masson, Paris.

- [1998] C. HAZARD ET M. LENOIR, *Modélisation et Résolution des Problèmes de Diffraction*, Cours du DEA de Mécanique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).
- [1976] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag.
- [1996] M. MCIVER, *An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem*, J. Fluid. Mech., 315, pp. 257–266.
- [1978] J. MIKLOWITZ, *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, Amsterdam.
- [1980] M. REED AND B. SIMON, *Methods of Modern Physics, Analysis of Operators*, volume 4, Academic Press.
- [1996] D. ROYER ET E. DIEULESAINT, *Ondes élastiques dans les solides*, Tome 1, Masson.
- [1989] J. SANCHEZ-HUBERT AND E. SANCHEZ-PALENCIA, *Vibration and Coupling of Continuous Systems, Asymptotic Methods*, Springer-Verlag, Berlin.
- [1965] L. SCHWARTZ, *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, Paris.
- [1989] B.R. VAINBERG, *Asymptotic Methods in Equations of Mathematical Physics*, Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- [1990a] K.J. WITSCH, *Examples of embedded eigenvalues for the Dirichlet Laplacian in perturbed waveguides*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 12, pp. 91–93.
- [1990b] K.J. WITSCH, *Examples of embedded eigenvalues for the Dirichlet-Laplacian in domains with infinite boundaries*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 12, pp. 177–182.