

Méthode des éléments finis.

Analyse numérique
des
Équations aux dérivées partielles

Polycopié des cours
de Calcul Scientifique CSC108 et CSC109

J-H SAIAC

8 juin 2006

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 11 |
| 1.1 | Principes généraux des méthodes numériques sur ordinateur . . . | 11 |
| 1.1.1 | Différences finies | 11 |
| 1.1.2 | Éléments finis | 12 |
| 1.1.3 | Volumes finis | 12 |
| 1.2 | Un premier exemple de problème en dimension 1 | 12 |
| 1.2.1 | Interprétations physiques | 13 |
| 1.3 | L'approche différences finies | 14 |
| 1.4 | L'approche éléments finis | 16 |
| 1.5 | Approximation par éléments finis | 17 |
| 1.5.1 | Un premier exemple simple : les éléments P1 | 18 |
| 1.5.2 | Base de Lagrange de $V_{0,h}$ | 18 |
| 1.5.3 | Écriture du problème approché | 19 |
| 1.6 | L'approche volumes finis | 20 |
| 2 | Théorème du point-fixe | 23 |
| 2.1 | Espace vectoriel normé | 23 |
| 2.1.1 | Norme d'un espace vectoriel | 23 |
| 2.1.2 | Notions de topologie dans les espaces vectoriels normés . . | 24 |
| 2.2 | Applications linéaires continues | 25 |
| 2.3 | Suites de Cauchy, Espaces complets | 27 |
| 2.3.1 | Exemples et contre-exemples | 27 |
| 2.4 | Théorème du point fixe | 27 |
| 2.5 | Application aux équations intégrales | 29 |
| 2.5.1 | Équations de Fredholm | 29 |
| 2.5.2 | Équations de Volterra | 31 |
| 2.6 | Application aux équations différentielles | 31 |
| 2.7 | Méthodes de résolution numérique de l'équation de Fredholm . . . | 32 |
| 2.7.1 | Écriture du problème approché | 32 |
| 2.7.2 | Résolution du problème approché. | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.7.3 | Étude de l'erreur | 35 |
| 2.8 | Conclusion. | 36 |
| 3 | Espaces de Hilbert | 37 |
| 3.1 | Produit scalaire | 37 |
| 3.1.1 | Norme déduite du produit scalaire | 37 |
| 3.1.2 | Inégalité de Schwarz | 38 |
| 3.2 | Espace de Hilbert | 38 |
| 3.2.1 | Exemples d'espaces de Hilbert | 38 |
| 3.2.2 | Orthogonalité | 39 |
| 3.2.3 | Représentation des applications linéaires continues | 39 |
| 3.3 | Projection | 40 |
| 3.3.1 | Projection sur un convexe fermé | 40 |
| 3.3.2 | Projection sur un sous-espace vectoriel fermé | 41 |
| 3.4 | Bases hilbertiennes | 42 |
| 3.4.1 | Coefficients de Fourier | 42 |
| 3.4.2 | Quelques exemples de bases hilbertiennes | 43 |
| 3.4.3 | Procédé de Gram-Schmidt | 44 |
| 3.5 | Exemples d'espaces fonctionnels en dimension un | 44 |
| 3.5.1 | Espaces de fonctions continues | 44 |
| 3.5.2 | Espaces de fonctions de carré sommable | 45 |
| 3.5.3 | Propriétés d'inclusion | 45 |
| 3.5.4 | L'espace $H_0^1[a, b]$ | 46 |
| 3.5.5 | Inégalité de Poincaré | 46 |
| 3.5.6 | Quelques résultats de densité | 47 |
| 3.6 | Exemples d'espaces fonctionnels en dimension deux et trois | 47 |
| 3.6.1 | Espaces de fonctions continues | 47 |
| 3.6.2 | Espaces de fonctions de carré sommable | 48 |
| 3.6.3 | Propriétés d'inclusion | 49 |
| 3.6.4 | L'espace $H_0^1[\Omega]$ | 49 |
| 3.6.5 | Inégalité de Poincaré | 50 |
| 3.6.6 | Quelques résultats de densité | 50 |
| 4 | Formulations variationnelles en dimension un | 51 |
| 4.1 | Un problème modèle | 51 |
| 4.1.1 | Equivalence des formulations dans le cas de solutions régulières | 52 |
| 4.2 | Théorème de Lax-Milgram | 53 |
| 4.3 | Problèmes de Dirichlet | 55 |
| 4.3.1 | Problème de Dirichlet homogène | 55 |
| 4.3.2 | Problème de Dirichlet non-homogène | 57 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4 | Problèmes de Neumann | 58 |
| 4.4.1 | Formulation variationnelle | 58 |
| 4.4.2 | Retour à la formulation différentielle initiale | 59 |
| 4.5 | Problèmes mêlés | 60 |
| 4.5.1 | Formulation variationnelle | 60 |
| 4.6 | Problèmes de Fourier | 61 |
| 4.6.1 | Formulation variationnelle | 61 |
| 5 | Éléments finis linéaires monodimensionnels | 65 |
| 5.1 | Principes généraux de l'approximation | 65 |
| 5.1.1 | Une famille de problèmes variationnels linéaires | 65 |
| 5.1.2 | Approximation interne du problème | 66 |
| 5.1.3 | Majoration d'erreur | 66 |
| 5.1.4 | Un premier exemple d'approximation interne : la méthode de Galerkin | 67 |
| 5.2 | Éléments finis P1 pour le problème de Dirichlet | 68 |
| 5.2.1 | Problème de Dirichlet homogène | 68 |
| 5.2.2 | Écriture du problème approché | 69 |
| 5.2.3 | Calcul des coefficients A_{ij} de la matrice A | 70 |
| 5.2.4 | Calcul des composantes du second membre F | 72 |
| 5.2.5 | Problème de Dirichlet non-homogène | 73 |
| 5.3 | Approximation du problème de Neumann. | 74 |
| 5.4 | Approximation du problème de Fourier. | 75 |
| 5.5 | Assemblage | 76 |
| 6 | Éléments monodimensionnels d'ordre élevé | 79 |
| 6.1 | Éléments finis de Lagrange de degré deux ou éléments P2 en dimension un. | 79 |
| 6.1.1 | Calcul des matrices et second membre élémentaires dans le cas d'éléments P2 en dimension un | 81 |
| 6.1.2 | Technique de l'élément de référence | 82 |
| 6.1.3 | Calcul de la matrice de masse élémentaire | 83 |
| 6.1.4 | Calcul de la matrice de raideur élémentaire | 83 |
| 6.1.5 | Calcul du second membre élémentaire | 83 |
| 6.1.6 | Intégration approchée. Condensation de masse | 84 |
| 6.1.7 | Technique d'assemblage | 85 |
| 6.2 | Éléments finis de Lagrange de degré k ou éléments P_k en dimen- sion un | 86 |
| 6.3 | Éléments finis de Hermite cubiques en dimension un ou éléments poutres | 87 |
| 6.3.1 | Problème de la poutre encastree | 87 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.3.2 | Écriture du problème approché | 88 |
| 6.3.3 | Calcul des matrices et second membre élémentaires pour l'élément de Hermite cubique | 90 |
| 7 | Formulations variationnelles en dimension deux | 91 |
| 7.1 | Rappels | 91 |
| 7.1.1 | Opérateurs différentiels en dimension deux | 91 |
| 7.1.2 | Intégrales doubles et changement de variables. | 92 |
| 7.1.3 | Intégrales curvilignes. | 92 |
| 7.1.4 | Formules de Green | 93 |
| 7.2 | Équation elliptique linéaire | 93 |
| 7.2.1 | Conduction thermique | 94 |
| 7.2.2 | Membrane élastique | 94 |
| 7.2.3 | Mécanique des fluides parfaits | 95 |
| 7.2.4 | Principe du maximum et unicité | 96 |
| 7.2.5 | Propriété de la moyenne | 97 |
| 7.3 | Problèmes elliptiques en dimensions supérieures | 97 |
| 7.3.1 | Problème de Dirichlet homogène | 98 |
| 7.3.2 | Problème de Dirichlet non-homogène | 100 |
| 7.4 | Problème de Neumann en dimension deux | 101 |
| 7.5 | Problème de Fourier en dimension deux | 102 |
| 8 | Éléments finis bidimensionnels | 105 |
| 8.1 | Rappel de la formulation générale abstraite | 105 |
| 8.2 | Approximation interne du problème | 105 |
| 8.3 | Maillage | 106 |
| 8.4 | Éléments finis de Lagrange triangulaires de degré un : les éléments finis P1 | 107 |
| 8.4.1 | Les fonctions de base P1 | 108 |
| 8.4.2 | Les fonctions de forme P1 | 109 |
| 8.5 | Application à un problème elliptique modèle | 111 |
| 8.5.1 | Formulation variationnelle de ce problème | 111 |
| 8.5.2 | Écriture du problème approché en éléments finis P1 | 112 |
| 8.5.3 | Calcul de la matrice de raideur élémentaire P1 | 113 |
| 8.5.4 | Calcul des seconds membres élémentaires | 114 |
| 8.5.5 | Algorithme d'assemblage | 117 |
| 8.6 | Éléments triangulaires généraux | 118 |
| 8.6.1 | Éléments P1 | 119 |
| 8.6.2 | Éléments P2 | 119 |
| 8.6.3 | Éléments P3 | 119 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.7 | Fonctions de base P_k | 119 |
| 8.8 | Fonctions de forme P_k | 120 |
| 8.8.1 | Fonctions de forme P_1 | 120 |
| 8.8.2 | Fonctions de forme P_2 | 120 |
| 8.8.3 | Fonctions de forme P_3 | 121 |
| 8.9 | Application aux problèmes elliptiques | 122 |
| 8.9.1 | Calcul des matrices et second-membres élémentaires | 122 |
| 8.9.2 | Technique de l'élément de référence | 123 |
| 8.9.3 | Calcul des gradients | 125 |
| 8.10 | Éléments finis isoparamétriques triangulaires et quadrangulaires . | 126 |
| 8.10.1 | Les éléments quadrilatéraux bilinéaires de Lagrange : les éléments Q_1 | 126 |
| 8.10.2 | Fonctions de forme Q_1 | 130 |
| 8.10.3 | Fonctions de base Q_1 | 130 |
| 8.10.4 | Calcul des gradients des fonctions de base Q_1 | 130 |
| 8.10.5 | Application aux problèmes elliptiques. Calcul des matrices et second-membres élémentaires | 132 |
| 8.10.6 | Éléments isoparamétriques Q_2 | 133 |
| 8.10.7 | Éléments isoparamétriques P_2 | 133 |
| 9 | Analyse d'erreur a priori dans les méthodes d'éléments finis | 135 |
| 9.0.8 | Résultat général de majoration d'erreur a priori | 135 |
| 9.0.9 | Majoration d'erreur en éléments P_k ou Q_k avec intégration exacte | 136 |
| 9.0.10 | Un premier exemple simple : Erreur pour les éléments P_1 en dimension un | 136 |
| 9.0.11 | Les éléments P_1 en dimension deux | 138 |
| 9.1 | Analyse de l'erreur en cas d'intégration numérique | 140 |
| 9.1.1 | Condition d'ellipticité | 141 |
| 9.1.2 | Majoration d'erreur avec intégration numérique | 141 |
| 9.2 | Conséquences pratiques | 141 |
| 9.2.1 | En dimension un | 141 |
| 9.2.2 | En dimension deux | 142 |
| 9.2.3 | Contre-exemples : formes approchées non elliptiques | 143 |
| 10 | Exemple de discrétisation de systèmes : l'élasticité linéaire | 145 |
| 10.1 | Le modèle en contraintes planes | 145 |
| 10.2 | Formulation variationnelle d'un problème d'élasticité linéaire. Prin- cipe des travaux virtuels | 147 |
| 10.3 | Approximation par éléments finis P_1 | 149 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 10.4 | Calculs des matrices et second-membre élémentaires P1 | 150 |
| 11 | Introduction aux problèmes d'évolution : L'équation de la cha- leur instationnaire | 155 |
| 11.1 | Position du problème | 155 |
| 11.2 | Étude mathématique de l'équation monodimensionnelle | 156 |
| 11.2.1 | Le modèle de la barre infinie | 156 |
| 11.2.2 | Propriétés fondamentales de la solution | 157 |
| 11.2.3 | Le modèle de la barre finie avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes | 158 |
| 11.3 | L'équation bi ou tridimensionnelle | 159 |
| 11.3.1 | Formulation variationnelle | 160 |
| 11.3.2 | Propriété de dissipation de l'énergie | 161 |
| 11.4 | Étude des schémas de différences finies dans le cas monodimensionnel | 162 |
| 11.4.1 | Introduction | 162 |
| 11.4.2 | Le Schéma d'Euler explicite | 163 |
| 11.4.3 | Ordre | 164 |
| 11.4.4 | Stabilité | 165 |
| 11.4.5 | Étude matricielle de la stabilité | 166 |
| 11.4.6 | Autres exemples de schémas à un pas | 168 |
| 11.4.7 | Étude de la stabilité par l'analyse de Fourier | 170 |
| 11.5 | Méthodes d'éléments finis pour le problème de la chaleur | 173 |
| 11.5.1 | Semi-discrétisation en espace par éléments finis | 173 |
| 11.5.2 | Discrétisation complète en espace et en temps | 175 |
| 12 | Introduction aux problèmes hyperboliques du second ordre : L'équation des ondes | 179 |
| 12.1 | Position du problème | 179 |
| 12.2 | Étude mathématique de l'équation monodimensionnelle | 180 |
| 12.2.1 | Le modèle de la corde infinie | 180 |
| 12.2.2 | Propriétés fondamentales de la solution | 181 |
| 12.2.3 | Le modèle de la corde vibrante finie | 183 |
| 12.3 | L'équation bidimensionnelle | 185 |
| 12.3.1 | Formulation variationnelle | 185 |
| 12.3.2 | Conservation de l'énergie | 186 |
| 12.4 | Étude des schémas de différences finies dans le cas monodimensionnel | 187 |
| 12.4.1 | Première approche : discrétisation directe de l'équation du second ordre | 187 |
| 12.4.2 | Le schéma explicite (en temps) et centré (en espace) | 187 |
| 12.4.3 | Étude de la stabilité par l'analyse de Fourier | 188 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 12.4.4 | Application au schéma explicite | 189 |
| 12.4.5 | Un schéma implicite centré | 191 |
| 12.4.6 | Schéma de Newmark implicite d'ordre 2 | 192 |
| 12.5 | Seconde approche : Système du premier ordre équivalent | 192 |
| 12.5.1 | Un premier schéma explicite centré instable | 193 |
| 12.5.2 | Schémas implicites centrés stables | 194 |
| 12.5.3 | Schémas explicites stables | 194 |
| 12.5.4 | Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy | 196 |
| 12.6 | Méthodes d'éléments finis pour le problème des membranes vibrantes | 197 |
| 12.6.1 | Formulation variationnelle | 197 |
| 12.6.2 | Semi-discrétisation en espace par éléments finis | 198 |
| 12.7 | Discrétisation complète en espace et en temps | 199 |
| 12.7.1 | Schéma du second ordre explicite | 200 |
| 12.7.2 | Schéma implicite | 200 |
| 12.7.3 | Schéma de Newmark | 201 |
| 12.8 | Analyse modale et décomposition orthogonale propre | 201 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Principes généraux des méthodes numériques sur ordinateur

Les mathématiques utilisent couramment les notions d'infini et de continu. La solution exacte d'un problème d'équations différentielles ou aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel.

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- équilibre des forces en chaque point pour les différences finies
- minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis
- loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

Examinons rapidement les avantages et les inconvénients de chacune de ces trois méthodes.

1.1.1 Différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : Limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

1.1.2 Éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage).

Avantages : Traitement possible de géométries complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

Inconvénients : Complexité de mise en oeuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.

1.1.3 Volumes finis

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des formulations discrètes conservatives et est donc particulièrement adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement, équation de conservation de l'énergie.

Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des parallélépipèdes rectangles en dimension 3). Cependant la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, donc de traiter des géométries complexes, ce qui est un avantage sur les différences finies. Il existe une grande variété de méthodes selon le choix de la géométrie des volumes élémentaires et des formules de calcul des flux. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence.

1.2 Un premier exemple de problème en dimension 1

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2.1 Interprétations physiques

- barre élastique sous un chargement axial.

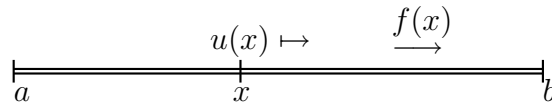


FIG. 1.1 – Barre sous chargement axial.

$$\begin{cases} -E.u''(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où E est le module d'élasticité.

- corde élastique soumise à un chargement normal.

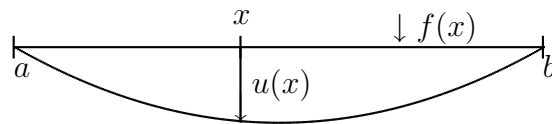


FIG. 1.2 – Corde élastique.

- conduction thermique dans une barre.

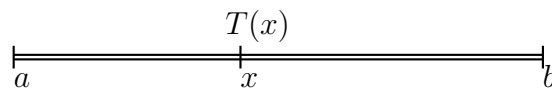


FIG. 1.3 – Barre en équilibre thermique.

$$\begin{cases} -q(x) = k.T'(x) & a < x < b \\ q'(x) = f(x) \\ T(a) = T(b) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

d'où

$$\begin{cases} -k.T''(x) = f(x) & a < x < b \\ T(a) = T(b) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

1.3 L'approche différences finies

Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas des différences finies on discrétise l'intervalle continu $[a, b]$ en un nombre fini de points x_i .

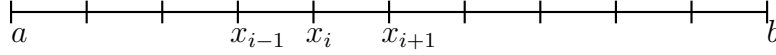


FIG. 1.4 – Discrétisation

On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées u_i des solutions exactes $u(x_i)$ aux points x_i de la discrétisation.

Mais on ne peut plus, dans ce cas, conserver les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues. On les remplace par des analogues discrets, les différences divisées ou différences finies.

Quelques formules simples d'approximation des dérivées par des différences divisées.

Pour la dérivée première :

– différence divisée progressive :

Le développement limité :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2}u''(\xi_i) \quad (1.5)$$

conduit à l'approximation suivante :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.6)$$

- différence divisée regressive :

De même le développement limité :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2}u''(\eta_i) \quad (1.7)$$

donne :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (1.8)$$

- différence divisée centrée :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \frac{h}{2}) - u(x_i - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{12}u'''(\theta_i) \quad (1.9)$$

Ce qui conduit, dans le cas de discrétisations uniformes de pas constant h , à :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad \text{ou} \quad \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{h} \quad (1.10)$$

Pour la dérivée seconde :

- différence divisée centrée

Dans le cas particulier de points x_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on retrouve en utilisant :

$$u''(x_i) = \frac{u'(x_i + \frac{h}{2}) - u'(x_i - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\theta_i) \quad (1.11)$$

et (1.9), la discrétisation centrée classique de la dérivée seconde

$$u''(x_i) = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (1.12)$$

On obtient ainsi le système d'équations linéaires suivant dont la résolution donne les valeurs u_i de la solution approchée

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i & \text{pour } i = 1, N-1 \\ \text{avec } u_0 = u_N = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

1.4 L'approche éléments finis

La présentation très succincte faite dans ce chapitre n'est qu'une première introduction à la méthode des éléments finis. Elle a pour but de donner les idées de base dans un cas extrêmement simple. Les chapitres suivants permettront de préciser et d'élargir les notions entrevues ci-après.

On introduit tout d'abord un produit scalaire de 2 fonctions selon :

$$(v, w) = \int_a^b v(x) w(x) dx$$

et l'espace $L^2[a, b]$ des fonctions de carré sommable sur $[a, b]$, c'est à dire telles que l'intégrale suivante existe :

$$\int_a^b v(x)^2 dx$$

Soit $H^1[a, b]$ l'espace des fonctions v , de carré sommable et dont la dérivée est également de carré sommable.

$$v \in L^2[a, b], \quad v' \in L^2[a, b]$$

et soit $H_0^1[a, b]$ l'espace des fonctions v de $H^1[a, b]$ nulles en a et b .

$$v \in L^2[a, b], \quad v' \in L^2[a, b], \quad v(a) = v(b) = 0$$

Le problème différentiel

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

conduit après multiplication par $v(x)$ et intégration sur $[a, b]$ à :

$$-\int_a^b u''(x) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx \quad (1.16)$$

Par intégration par parties :

$$-\int_a^b u''(x) v(x) dx = \int_a^b u'(x) v'(x) dx + u'(a) v(a) - u'(b) v(b) \quad (1.17)$$

D'où une nouvelle formulation du problème (1), dite formulation variationnelle, qui, en prenant en compte les conditions sur l'espace $H_0^1[a, b]$,

$$v(a) = v(b) = 0$$

s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que :} \\ (u', v') = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Cette formulation est équivalente à la minimisation d'une forme quadratique représentant l'énergie du système qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ qui réalise le minimum} \\ \text{dans l'espace } H_0^1[a, b] \text{ de la forme } J \text{ définie par} \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b v'^2 dx - \int_a^b f v dx \end{array} \right. \quad (1.19)$$

On obtient ainsi 3 formes équivalentes du problème

- une forme différentielle
- une forme variationnelle (principe des travaux virtuels)
- une forme minimisation de l'énergie.

En résumé, nous remplaçons, dans le cadre de la méthode des éléments finis, le problème initial sous forme différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) = f(x) \quad a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

par le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que :} \\ (u', v') = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{array} \right. \quad (1.21)$$

1.5 Approximation par éléments finis

L'approximation par éléments finis consiste à remplacer l'espace $H_0^1[a, b]$ des fonctions tests du problème continu par un sous-espace de dimension finie $V_{0,h}$ qui caractérise la méthode d'éléments finis adoptée.

Le problème approché s'écrit alors, formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u_h \text{ appartenant à } V_{0,h} \text{ telle que :} \\ (u'_h, v'_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0,h} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

1.5.1 Un premier exemple simple : les éléments P1

On approche l'espace $H_0^1[a, b]$ par l'espace $V_{0,h} \subset H_0^1[a, b]$ construit de la manière suivante.

On choisit une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments $K_i = [x_{i-1}, x_i]$

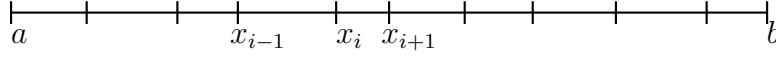


FIG. 1.5 – Discrétisation

Les éléments K_i n'ont pas forcément même longueur. $V_{0,h}$ est alors l'espace des fonctions continues affines par morceaux (c'est à dire affines sur les segments K_i) et nulles aux extrémités a et b .

L'utilisation de fonctions affines, fonctions polynomiales de degré un, justifie la dénomination d'éléments P1.

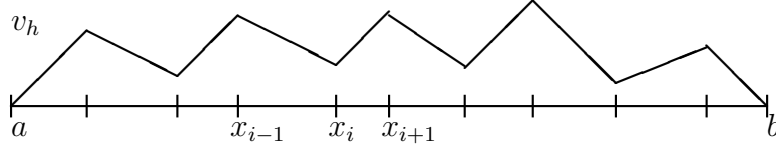


FIG. 1.6 – Une fonction affine par morceaux

Chaque fonction $v_h \in V_{0,h}$ est déterminée de manière unique par la donnée de ses valeurs aux points x_i pour $i = 1, N - 1$. L'espace $V_{0,h}$ est de dimension $N - 1$

1.5.2 Base de Lagrange de $V_{0,h}$

Considérons les $N-1$ fonctions $w_i \in V_{0,h}$ définies par les $N-1$ conditions suivantes :

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, N - 1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, N - 1 \quad (1.23)$$

Ces $N-1$ fonctions forment une base de $V_{0,h}$ et une fonction v_h quelconque s'écrit dans cette base :

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i(x) \quad (1.24)$$

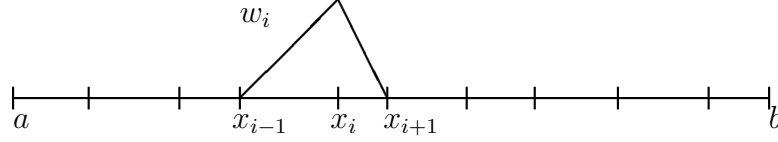


FIG. 1.7 – Fonction de base de Lagrange

avec $v_i = v_h(x_i)$. Les coefficients v_i sont donc les valeurs de v_h aux points (x_i)

1.5.3 Écriture du problème approché

Ecrivons le problème approché dans $V_{0,h}$

$$\int_a^b u'_h(x) v'_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0,h} \quad (1.25)$$

Le problème étant linéaire, l'égalité est vraie pour tout v_h si elle est vraie pour une base de l'espace vectoriel $V_{0,h}$

$$\forall v_h \in V_{0,h} \iff \forall w_i \quad \text{pour } i = 1, N-1$$

D'autre part, écrivons u_h , solution du problème approché dans $V_{0,h}$, dans la base des w_i

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{j=N-1} u_j w_j(x) \quad (1.26)$$

avec $u_j = u_h(x_j)$ valeur approchée de la solution exacte au point (x_j)

On obtient l'écriture suivante du problème approché :

Trouver u_1, u_2, \dots, u_{N-1} tels que

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{j=N-1} u_j w'_j(x) \right) w'_i(x) dx = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad \forall i = 1, N-1 \quad (1.27)$$

Ce que l'on peut récrire

$$\sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad \forall i = 1, N-1 \quad (1.28)$$

Soit en posant

$$\int_a^b f(x) w_i(x) dx = F_i \quad (1.29)$$

et

$$\int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx = A_{ij} \quad (1.30)$$

$$\sum_{j=1}^{j=N-1} A_{ij} u_j = F_i \quad \forall i = 1, N-1 \quad (1.31)$$

On a ainsi obtenu un système linéaire de $N-1$ équations à $N-1$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A U = F \quad (1.32)$$

On verra plus loin la technique détaillée de calcul des coefficients des matrices et second-membres.

1.6 L'approche volumes finis

La méthode des volumes finis, comme celle des éléments finis utilise une formulation intégrale des équations. Mais au lieu d'utiliser un produit scalaire de L^2 par des fonctions tests, on se contente d'intégrer les équations différentielles sur des volumes élémentaires ou volumes de contrôle. Ceci peut s'interpréter comme l'utilisation de fonctions tests, fonctions indicatrices des volumes élémentaires. À partir d'un maillage en volumes finis, où l'on prend les inconnues au centre x_i des volumes de contrôles $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ on passe ainsi de

$$-u''(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad -(u'(x))' = f(x) \quad (1.33)$$

à

$$-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (u'(x))' dx = u'(x_{i-\frac{1}{2}}) - u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx \quad (1.34)$$

Les $u'(x_{i-\frac{1}{2}})$ et $u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ apparaissent comme des flux aux interfaces des volumes élémentaires $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

Si on approche les dérivées selon :

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad \text{et} \quad u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-h})}{h} \quad (1.35)$$

dans le cas particulier de points x_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on retrouve la discrétisation centrée classique de la dérivée seconde

$$u''(x_i) = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (1.36)$$

L'intérêt de cette technique de volumes finis n'apparaît que dans les applications aux problèmes en dimension 2 et 3. De nombreuses variantes existent, selon la géométrie des volumes élémentaires, le choix du positionnement des inconnues aux centres ou aux sommets des volumes de contrôle, et les diverses formules de calcul des flux aux interfaces. Un exposé des techniques de volumes finis sortant du cadre de ce cours, nous renvoyons au livre de C. HIRSCH cité dans la bibliographie.

Chapitre 2

Théorème du point-fixe

Les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire sont supposées connues.

2.1 Espace vectoriel normé

2.1.1 Norme d'un espace vectoriel

Définition 2.1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} ou (\mathbb{C}) , on appelle norme sur E une application qui pour tout v de E associe sa norme $\|v\| \in \mathbb{R}^+$ et vérifie les propriétés suivantes $\forall v \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

$$\begin{aligned} v = 0 &\iff \|v\| = 0 \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned} \tag{2.1}$$

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Exemple 1 : \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^p en général sont des espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} pour les normes suivantes :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^p |X_i| \tag{2.2}$$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^p X_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

$$\|X\|_\infty = \max_{i=1,p} |X_i| \tag{2.4}$$

Exemple 2 : L'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, noté $C[a, b]$, est un espace vectoriel que l'on peut munir des normes suivantes :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad (2.5)$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (2.7)$$

2.1.2 Notions de topologie dans les espaces vectoriels normés

Boules ouvertes - boules fermées

Définition 2.1.2 On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r , l'ensemble noté $B(a, r)$ des éléments x de E tels que $\|x - a\| < r$.

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté $\bar{B}(a, r)$ des éléments x de E tels que $\|x - a\| \leq r$.

Ensembles ouverts - ensembles fermés

Définition 2.1.3 (Ouvert) On appelle ensemble ouvert, tout sous-ensemble O de E tel que

$$\forall x \in O \quad \exists r > 0 : B(x, r) \subset O$$

Propriétés :

E et \emptyset sont des ouverts.

Toute boule ouverte est un ouvert.

La réunion d'une famille d'ouverts est un ensemble ouvert, l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Définition 2.1.4 (Intérieur d'un ensemble) Un point x est dit intérieur à un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé si A contient une boule ouverte de centre x . L'ensemble de tous les points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$

Définition 2.1.5 (Fermé) Un sous-ensemble de E est fermé si son complémentaire dans E est ouvert

Propriétés :

E et \emptyset sont des fermés.

Toute boule fermée est un fermé.

L'intersection d'une famille de fermés est un ensemble fermé, la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Définition 2.1.6 (Adhérence ou fermeture d'un ensemble) *Un point x est dit adhérent à un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé si toute boule ouverte de centre x contient un élément de A . L'ensemble de tous les points adhérents à A s'appelle l'adhérence ou fermeture de A et se note \bar{A}*

Un point x est adhérent à un sous-ensemble A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x .

Définition 2.1.7 *A est un sous-ensemble **dense** dans E si $\bar{A} = E$.*

*Un espace vectoriel normé E est **séparable** s'il existe une suite d'éléments de E dont l'adhérence est \bar{E}*

Exemples classiques.

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} pour la norme induite par la valeur absolue.

L'espace des fonctions polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ pour la norme sup.

2.2 Applications linéaires continues

Définition 2.2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, l'application $f : E \xrightarrow{f} F$ est continue en $x_0 \in E$ si :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta \quad \text{tel que} \quad \|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \epsilon \quad (2.8)$$

f est continue sur E si elle est continue en tout point de E

Définition 2.2.2 (Définition équivalente) *f est continue sur E si pour toute suite x_n convergente de E on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \quad (2.9)$$

Théorème 2.2.1 *Soit f une application **linéaire** d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F , les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) f est continue de E dans F

- 2) f est continue en un point quelconque x_0 de E , par exemple en 0.
 3) f est bornée, c'est à dire que :

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad (2.10)$$

Démonstration :

1) \implies 2) : évident par définition : la continuité sur E entraîne la continuité en un point quelconque x_0 de E .

2) \implies 3) : 2) entraîne en choisissant $\epsilon = 1$:

$$\exists \eta \quad \text{tel que} \quad \|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x - x_0)\|_F \leq 1 \quad (2.11)$$

Soit un vecteur u quelconque appartenant à E . Posons

$$x = x_0 + \eta \frac{u}{\|u\|} \quad (2.12)$$

On a par construction $\|x - x_0\| = \eta$ et par conséquent :

$$\|f(x - x_0)\| \leq 1 \quad (2.13)$$

Donc par linéarité de f

$$\|f(u)\| \leq \frac{\|u\|}{\eta} \quad (2.14)$$

D'où le résultat.

3) \implies 1) Si f est borné sur E , on a en particulier :

$$\|f(x - x_0)\| \leq M \|x - x_0\| \quad (2.15)$$

D'où l'on déduit sans peine la continuité en x_0 .

Définition 2.2.3 On note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \quad (2.16)$$

Notons que l'on a également :

$$\|f\| = \inf \{ M : \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \} \quad (2.17)$$

Définition 2.2.4 Considérons le cas d'un espace vectoriel E sur le corps \mathbb{R} , les applications linéaires continues de E dans \mathbb{R} sont appelées formes linéaires continues. L'espace des formes linéaires continues sur E , noté E' s'appelle le dual de E .

2.3 Suites de Cauchy, Espaces complets

Définition 2.3.1 Une suite $\{x_n\}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé E converge vers une limite $l \in E$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n \geq N \implies \|x_n - l\| \leq \epsilon \quad (2.18)$$

Définition 2.3.2 (Suite de Cauchy) Une suite $\{x_n\}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé E est une suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall p \text{ et } q \geq N \implies \|x_p - x_q\| \leq \epsilon \quad (2.19)$$

Cette définition est remarquable en ce qu'elle ne fait pas intervenir de limite l .

Définition 2.3.3 (Espace complet) Un espace E est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge vers une limite appartenant à E .

Un espace vectoriel normé complet est un espace de Banach.

2.3.1 Exemples et contre-exemples

\mathbb{R} est complet pour la norme de la valeur absolue. On en déduit que les espaces \mathbb{R}^p pour p quelconque, sont complets pour les trois normes 1, 2, ∞

Pour tout espace de Banach E , il y a identité entre ses sous-espaces fermés et ses sous-espaces complets. Par exemple, l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ est un espace de Banach pour la norme ∞ , le sous-espace fermé des fonctions continues, nulles au point a , est également un Banach.

\mathbb{Q} n'est pas complet pour la valeur absolue, car il existe des suites de rationnels qui convergent vers un irrationnel. \mathbb{R} est la fermeture de \mathbb{Q} , c'est également le complété de \mathbb{Q} .

Les espaces des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ munis respectivement des normes 1 et 2, ne sont pas complets, car pour ces normes il existe des suites de Cauchy de fonctions continues dont la limite n'est pas une fonction continue.

2.4 Théorème du point fixe

Définition 2.4.1 Soit T une application d'un espace normé E dans lui-même, T est une contraction (ou application contractante) s'il existe une constante k , $0 \leq k < 1$ telle que pour tout x et y de E on ait :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| \quad (2.20)$$

Théorème 2.4.1 *Si T est une application contractante d'un espace de Banach E dans lui-même, T possède un point fixe unique $s \in E$, qui est par définition la solution unique de l'équation*

$$T(x) = x \quad (2.21)$$

De plus la suite $\{x_n\}$, dite des approximations successives, définie par

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné dans } E \\ x_{n+1} = T(x_n) \end{cases} \quad (2.22)$$

converge vers s .

Démonstration :

1) Existence d'une solution

La suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. En effet posons p entier positif :

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|T(x_{n+p-1}) - T(x_{n-1})\| \leq k \|x_{n+p-1} - x_{n-1}\|$$

donc

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n \|x_p - x_0\|$$

d'autre part

$$\|x_p - x_0\| \leq \|x_p - x_{p-1}\| + \|x_{p-1} - x_{p-2}\| + \dots + \|x_1 - x_0\|$$

soit

$$\|x_p - x_0\| \leq (k^p + k^{p-1} + \dots + k + 1) \|x_1 - x_0\| = \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

On utilise l'hypothèse de contraction $k < 1$ et on obtient :

$$\|x_p - x_0\| \leq \frac{1}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

d'où le résultat

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n \frac{1}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

Donc la suite x_n est une suite de Cauchy qui converge vers une limite s dans l'espace complet E . Cette limite vérifie

$$s = T(s)$$

C'est donc bien un point fixe de T .

2) Unicité de la solution

Supposons l'existence de 2 solutions s_1 et s_2 , l'hypothèse de contraction entraîne :

$$\|s_1 - s_2\| = \|T(s_1) - T(s_2)\| < \|s_1 - s_2\|$$

Donc contradiction et $s_1 = s_2$.

Remarques :

1) La condition imposant l'existence d'une constante $k < 1$ est indispensable, il ne suffit pas d'avoir :

$$\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\| \quad \forall x \neq y$$

Par contre, il suffit que pour une certaine puissance p , T^p soit contractante pour avoir l'existence et l'unicité d'un point fixe de T . La démonstration est laissée en exercice.

2) Le théorème est également vrai pour une application contractante T d'un sous-ensemble fermé F de E dans lui-même. Car un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach est un espace complet.

2.5 Application aux équations intégrales

2.5.1 Équations de Fredholm

On considère un réel λ , une fonction numérique réelle g continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, et une fonction réelle K de 2 variables réelles continue sur le pavé fermé $[a, b] \times [a, b]$. Le problème intégral de Fredholm s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } f \text{ définie sur } [a, b] \text{ telle que :} \\ f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.23)$$

On se place dans l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues muni de la norme du max

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

On pose (K est continue sur $[a, b] \times [a, b]$) :

$$M = \sup_{(x, y) \in [a, b] \times [a, b]} |K(x, y)|$$

et on obtient aisément par application du théorème du point fixe le résultat suivant :

Théorème 2.5.1 *L'équation de Fredholm admet une solution unique dans $C[a, b]$ à la condition suffisante que :*

$$|\lambda| M (b - a) < 1 \quad (2.24)$$

Démonstration :

1) $C[a, b]$ muni de la norme ∞ est un Banach.

2) L'application T définie par

$$\begin{cases} f \longrightarrow Tf \text{ où :} \\ Tf(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{cases}$$

est une application de $C[a, b]$ dans lui même. En effet la fonction Tf est continue sur $[a, b]$.

$$Tf(x_0+h) - Tf(x_0) = \lambda \int_a^b (K(x_0+h, y) - K(x_0, y)) f(y) dy + g(x_0+h) - g(x_0)$$

d'où

$$|Tf(x_0+h) - Tf(x_0)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(x_0+h, y) - K(x_0, y)| |f(y)| dy + |g(x_0+h) - g(x_0)|$$

et le résultat en utilisant la continuité de K et celle de g .

3) L'application T est une contraction, en effet on a :

$$Tf_1(x) - Tf_2(x) = \lambda \int_a^b (K(x, y)) (f_1(y) - f_2(y)) dy$$

donc comme K est bornée par M dans $[a, b] \times [a, b]$

$$|Tf_1(x) - Tf_2(x)| \leq |\lambda| M (b - a) \|f_1 - f_2\| \quad \forall x \in [a, b]$$

et le résultat

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq |\lambda| M (b - a) \|f_1 - f_2\|$$

avec

$$|\lambda| M (b - a) < 1$$

.

Remarque : On pourrait remplacer la condition ci-dessus par la suivante :

$$\sup_{x \in [a, b]} |\lambda| \int_a^b |K(x, y)| dy \leq k < 1$$

2.5.2 Équations de Volterra

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, on considère le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } f \text{ définie sur } [a, b] \text{ telle que :} \\ f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + g(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.25)$$

Cette fois la borne supérieure de l'intégrale est égale à la variable x . Ceci permet d'obtenir avec T définie par :

$$\begin{cases} f \longrightarrow Tf \text{ où :} \\ Tf(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + g(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.26)$$

le résultat d'existence et d'unicité sans l'hypothèse restrictive

$$|\lambda| M (b - a) < 1 \quad (2.27)$$

On reprend la démonstration précédente en observant cette fois que T^p sera contractante à partir d'une certaine puissance de p grâce à l'inégalité (dont la démonstration est laissée en exercice) :

$$|T^p f_1(x) - T^p f_2(x)| \leq |\lambda|^p M^p \frac{(b-a)^p}{p!} \|f_1 - f_2\| \quad \forall x \in [a, b] \quad (2.28)$$

2.6 Application aux équations différentielles

On considère le problème différentiel :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Ce problème est équivalent, si y est une solution continûment différentiable (on dit de classe C^1), au problème intégral :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } y \text{ définie sur } [a, b] \text{ telle que :} \\ y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t)) dt \quad \forall x \in [a, b] \end{cases} \quad (2.30)$$

On considère l'application T définie par :

$$Ty(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t)) dt \quad \forall x \in [a, b] \quad (2.31)$$

On suppose que la fonction f vérifie les hypothèses suivantes :

- 1) f est continue sur $[a, b] \times \mathbb{R}$
- 2) f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, c'est à dire qu'il existe une constante L telle que :

$$\forall x \in [a, b], \forall y, z \in \mathbb{R}, \quad |f(x, y) - f(x, z)| \leq L |y - z| \quad (2.32)$$

On montre alors comme précédemment que T est une application de $C[a, b]$ dans lui même qui admet un point fixe unique, solution du problème, car T^p est une contraction stricte à partir d'une certaine puissance p .

2.7 Méthodes de résolution numérique de l'équation de Fredholm

On reprend le problème de Fredholm :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } f \text{ définie sur } [a, b] \text{ telle que :} \\ f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{array} \right. \quad (2.33)$$

On se propose de le résoudre par une méthode numérique.

2.7.1 Écriture du problème approché

La première étape de toute approche numérique consiste à discrétiser la géométrie du problème. Ici, il suffit très simplement de choisir un certain nombre de points x_i discrètement répartis sur $[a, b]$ de telle sorte que l'intervalle $[a, b]$ soit subdivisé en sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$. Nous adoptons la répartition suivante :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$$

La deuxième étape, c'est la discrétisation de l'opérateur fonctionnel, ici l'intégrale. Nous choisissons une méthode de quadrature numérique qui s'écrit sous la forme générale :

$$\int_a^b F(x) dx \approx \sum_{i=1}^N A_i F(x_i) \quad (2.34)$$

Remarque importante : Nous avons choisi les mêmes points x_i comme points d'intégration et comme points de discrétisation. Ceci simplifie l'écriture du problème approché.

Par exemple on peut prendre la méthode des trapèzes, qui dans le cas de points régulièrement espacés s'écrit :

$$\int_a^b F(x) dx \approx \frac{b-a}{(N-1)} \left(\frac{F(a)+F(b)}{2} + \sum_{i=2}^{N-1} F(x_i) \right) \quad (2.35)$$

ou la méthode de Simpson :

$$\int_a^b F(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(F(a) + F(b) + 2 \sum_{i=1}^{p-1} F(a+2ih) + 4 \sum_{i=1}^p F(a+(2i-1)h) \right) \quad (2.36)$$

avec N **impair**, $p = \frac{N-1}{2}$ et $h = \frac{b-a}{N-1}$.

Ainsi en notant f_i pour $i = 1, \dots, N$, les valeurs approchées des $f(x_i)$ et en remplaçant l'intégration exacte dans l'équation de Fredholm par une formule de quadrature approchée, nous obtenons le système linéaire suivant dont les inconnues sont les valeurs f_i cherchées :

$$\begin{cases} \text{Trouver les valeurs } f_i \text{ telles que :} \\ f_i = \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f_j + g(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.37)$$

Ce système de N équations à N inconnues peut se mettre sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} F = G \quad (2.38)$$

avec

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \lambda A \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où A est la matrice de coefficients :

$$A_{i,j} = A_j K(x_i, x_j) \quad (2.40)$$

F le vecteur des inconnues f_i et G le vecteur second membre des $g(x_i)$.

2.7.2 Résolution du problème approché.

Méthode directe

Dans ce cas, on résout le système matriciel par une méthode directe de type Gauss ou Choleski si la matrice est symétrique définie positive. On obtient alors aux erreurs d'arrondis près, la solution exacte du système approché. Notons que, si l'on choisit une formule de quadrature à poids positifs, nous sommes assurés que la matrice M sera inversible car à diagonale strictement dominante.

En effet, si nous avons par hypothèse, pour le problème de Fredholm :

$$k = |\lambda| \sup_{(x,y) \in [a,b] \times [a,b]} |K(x,y)| (b-a) < 1$$

D'autre part, si la formule de quadrature est à poids positifs, on a :

$$\sum_{j=1}^N |A_j| = \sum_{j=1}^N A_j = b - a$$

Donc pour chaque ligne i de la matrice M

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} |M_{ij}| &= |\lambda| \sum_{j \neq i} |A_j| |K(x_i, x_j)| \leq k - |\lambda| |A_i| |K(x_i, x_i)| < 1 - |\lambda| |A_i| |K(x_i, x_i)| \\ &\leq |1 - \lambda A_i K(x_i, x_i)| = |M_{ii}| \end{aligned} \quad (2.41)$$

D'où le résultat.

Méthodes itératives

On peut utiliser les itérations de point-fixe dans le cas du problème approché. En effet, avec la même condition que le problème continu, le problème approché vérifie les hypothèses d'un théorème de point fixe :

On se place dans l'espace \mathbb{R}^N muni de la norme du max

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{i=1,N} |f_i|$$

et on obtient aisément par application du théorème du point fixe le résultat suivant :

Théorème 2.7.1 *Le problème approché :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les valeurs } f_i \text{ telles que :} \\ f_i = \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f_j + g(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (2.42)$$

discrétisation de l'équation de Fredholm, admet une solution unique dans \mathbb{R}^N à condition que :

$$|\lambda| M (b - a) < 1$$

De plus, l'itération :

$$\begin{cases} f_i^0 \text{ donné pour tout } i = 1, N \\ f_i^{n+1} = \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f_j^n + g(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.43)$$

converge, dans ce cas, vers le vecteur F solution du problème approché.

Remarque :

La méthode itérative ci-dessus peut s'interpréter comme une méthode de résolution itérative du système linéaire obtenu par discrétisation. Elle est assez proche de la méthode de Jacobi. On pourrait également proposer des solutions itératives en utilisant les méthodes de relaxation ou de gradient conjugué.

2.7.3 Étude de l'erreur

Définition 2.7.1 Une formule de quadrature est dite d'ordre k si, pour toute fonction suffisamment régulière, l'erreur d'intégration sur un intervalle $[a, b]$ subdivisé en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ est un infiniment petit d'ordre k par rapport à h : longueur maximale des sous-intervalles.

Théorème 2.7.2 Si la formule de quadrature utilisée pour l'écriture du problème approché est d'ordre k , l'erreur d'approximation

$$E = \max_{i=1, N} |f(x_i) - f_i| \quad (2.44)$$

est un infiniment petit d'ordre k en h

Démonstration

On a

$$f(x_i) - f_i = \lambda \int_a^b K(x_i, y) f(y) dy - \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f_j$$

D'où en ajoutant et retranchant le terme auxiliaire

$$\lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f(x_j)$$

l'inégalité :

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f_i| \leq & \left| \lambda \int_a^b K(x_i, y) f(y) dy - \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f(x_j) \right| \\ & + \left| \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) (f(x_j) - f_j) \right| \end{aligned}$$

Or par hypothèse :

$$\left| \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) (f(x_j) - f_j) \right| \leq |\lambda| M (b - a) E$$

En majorant l'erreur d'intégration :

$$\left| \lambda \int_a^b K(x_i, y) f(y) dy - \lambda \sum_{j=1}^N A_j K(x_i, x_j) f(x_j) \right| \leq c h^k$$

on obtient le résultat :

$$E \leq \frac{1}{1 - |\lambda| M (b - a)} c h^k$$

2.8 Conclusion.

Ce chapitre a été l'occasion d'un traitement complet, théorique et numérique, d'un problème d'équation intégrale. Il nous a permis d'introduire un certain nombre de notions et de techniques que nous retrouverons ensuite dans le cas plus complexe des équations aux dérivées partielles résolues par la méthodes des éléments finis.

La démarche sera la même :

Etude théorique du problème continu. Existence et unicité de la solution.

Discrétisation de la géométrie, discrétisation des opérateurs.

Etude du problème approché. Existence et unicité de la solution.

Ecriture du problème approché sous forme d'un système linéaire.
Résolution du système matriciel.

Majoration de l'erreur d'approximation.

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

Les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire sont supposées connues. Nous nous limitons pour la suite au cas d'espaces vectoriels sur le corps des réels.

3.1 Produit scalaire

Définition 3.1.1 (Produit scalaire) *On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel E , une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . On note le produit scalaire de 2 éléments x, y de E sous la forme (x, y) .*

On a donc $\forall x, y, z \in E$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$(x, ay + bz) = a(x, y) + b(x, z) \quad \text{et} \quad (ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$$

$$(x, y) = (y, x)$$

$$(x, x) \geq 0 \quad \text{et} \quad (x, x) = 0 \iff x = 0$$

3.1.1 Norme déduite du produit scalaire

Nous allons montrer que l'application de E dans \mathbb{R} qui à $x \in E$ associe $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E .

Les 2 premiers axiomes de définition d'une norme :

$$x = 0 \iff \|x\| = 0 \tag{3.1}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \tag{3.2}$$

se déduisent immédiatement de la définition du produit scalaire.

La démonstration de l'inégalité triangulaire

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (3.3)$$

nécessite l'inégalité fondamentale suivante

3.1.2 Inégalité de Schwarz

Théorème 3.1.1 $\forall x, y \in E$, on a l'inégalité :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (3.4)$$

Démonstration.

Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = \|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$$

Le trinôme en λ doit donc être toujours ≥ 0 . Ceci entraîne que son discriminant soit ≤ 0 d'où

$$(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

et le résultat en prenant la racine carrée des 2 membres.

On en déduit simplement l'inégalité triangulaire

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3.2 Espace de Hilbert

Définition 3.2.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (x, y) et qui est complet lorsqu'il est normé par la norme associée à ce produit scalaire.*

3.2.1 Exemples d'espaces de Hilbert

a) Les espaces \mathbb{R}^n sont pour tout n des espaces de Hilbert pour le produit scalaire euclidien classique

b) L'espace l^2 des suites x_n de carré sommable, c'est à dire telles que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2$ converge, muni du produit scalaire

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \quad (3.5)$$

est un espace de Hilbert

c) L'espace $L^2(I)$ des fonctions de carré sommable sur I , où I est un intervalle ouvert $]a, b[$ de \mathbb{R} , c'est à dire telles que l'intégrale

$$\int_a^b (f(x))^2 dx \quad (3.6)$$

existe, muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (3.7)$$

est un espace de Hilbert.

d) L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable sur Ω , où Ω est un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , c'est à dire telles que l'intégrale

$$\int_{\Omega} (f(x))^2 dx \quad (3.8)$$

existe, muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad (3.9)$$

est un espace de Hilbert.

3.2.2 Orthogonalité

Deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si leur produit scalaire $(x, y) = 0$.

Soit E un sous-espace de H , l'ensemble des éléments de H orthogonaux à E est un sous-espace de H appelé l'orthogonal de E et noté E^\perp .

En effet E^\perp est évidemment un sous espace vectoriel de H que l'on peut munir du produit scalaire de H . De plus, la continuité de l'application $x \longrightarrow (x, y)$ entraîne que E^\perp est fermé dans H , donc complet.

3.2.3 Représentation des applications linéaires continues

L'application $u \longrightarrow (u, v)$ pour tout u et v de H est une application linéaire continue de norme $\|v\|$. Réciproquement, on admettra le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.2.1 (de Riesz) *Si l est une forme linéaire continue sur H , il existe un élément L unique de H tel que*

$$l(u) = (L, u) \quad \forall u \in H$$

3.3 Projection

3.3.1 Projection sur un convexe fermé

Définition 3.3.1 (convexe) *Un sous-ensemble K d'un espace H est dit convexe si $\forall x, y \in K$ et $\forall t \in [0, 1]$, on a $tx + (1 - t)y \in K$.*

On admettra le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit K un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un Hilbert H , pour tout $u \in H$ il existe un élément unique $\bar{u} \in K$ tel que*

$$\|u - \bar{u}\| = \min_{v \in K} \|u - v\| \quad (3.10)$$

On note ce projeté \bar{u} de u dans K : $\Pi_K u$.

Propriété caractéristique

Le projeté $\Pi_K u$ de u sur K est caractérisé par la propriété :

$$(u - \Pi_K u, w - \Pi_K u) \leq 0 \quad \forall w \in K \quad (3.11)$$

Démonstration.

Par définition $(u - \Pi_K u, u - \Pi_K u) \leq (u - v, u - v) \quad \forall v \in K$. Soit w quelconque dans K on considère la combinaison convexe $tw + (1 - t)\Pi_K u$, avec $0 \leq t \leq 1$ qui appartient également à K . Donc, par définition du projeté :

$$(u - \Pi_K u, u - \Pi_K u) \leq (u - tw - (1 - t)\Pi_K u, u - tw - (1 - t)\Pi_K u) \quad \forall w \in K$$

On développe et on obtient

$$2(u - \Pi_K u, w - \Pi_K u) \leq t(\Pi_K u - w, \Pi_K u - w)$$

et le résultat en faisant tendre t vers zéro dans l'inégalité.

Autres propriétés.

- 1) Π_K est idempotente, i.e. $\Pi_K^2 = \Pi_K$
- 2) Π_K est monotone, i.e. $(\Pi_K u - \Pi_K v, u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in H$.
- 3) Π_K est faiblement contractante, i.e. $\|\Pi_K u - \Pi_K v\| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in H$.

Démonstration.

- 1) $\Pi_K u \in K$, donc évidemment $\Pi_K(\Pi_K u) = \Pi_K u$

2 et 3) On utilise la propriété caractéristique :

$$(u - \Pi_K u, w - \Pi_K u) \leq 0 \quad \forall w \in K$$

$$(v - \Pi_K v, w - \Pi_K v) \leq 0 \quad \forall w \in K$$

On choisit $w = \Pi_K v$ dans la première inégalité et $w = \Pi_K u$ dans la seconde, et on obtient par addition

$$\|\Pi_K u - \Pi_K v\|^2 \leq (u - v, \Pi_K u - \Pi_K v)$$

ceci entraîne 2) et on obtient 3) par Schwarz.

$$(u - v, \Pi_K u - \Pi_K v) \leq \|u - v\| \|\Pi_K u - \Pi_K v\|$$

3.3.2 Projection sur un sous-espace vectoriel fermé

Un sous-espace est un sous ensemble convexe, donc les résultats précédents s'appliquent. On a de plus le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 *Soit F un sous-espace fermé non vide d'un espace de Hilbert H , on note Π_F la projection sur F . On a les résultats suivants :*

1) $\forall u \in H$, $\Pi_F u$ est caractérisé par

$$(u - \Pi_F u, v) = 0 \quad \forall v \in F \quad (3.12)$$

2) L'application projection Π_F est linéaire continue de norme 1, son noyau est l'orthogonal de F dans H noté F^\perp

3) Il existe un couple unique d'applications linéaires Π_F et Π_{F^\perp} qui appliquent respectivement H dans F et H dans F^\perp telles que :

$$u = \Pi_F u + \Pi_{F^\perp} u \quad (3.13)$$

Démonstration

1) Conséquence directe de la propriété caractéristique de la projection sur un convexe en prenant successivement $w = \Pi_F u + v$ et $w = \Pi_F u - v$

2) La linéarité se déduit simplement de la propriété caractéristique précédente. La continuité de l'inégalité 3) et la norme 1 du choix d'un $u \in F$ dans cette inégalité. Enfin

$$(u, v) = (\Pi_F u, v) \quad \forall v \in F$$

entraîne $(\Pi_F u, v) = 0 \quad \forall v \in F$ si $u \in F^\perp$, d'où le résultat que le noyau de Π_F est F^\perp

3) L'existence de Π_F est acquise, on montre simplement par

$$(u - \Pi_F u, v) = 0 \quad \forall v \in F$$

que $(u - \Pi_F u) \in F^\perp$ et le résultat car $u - (u - \Pi_F u) = \Pi_F u$ est orthogonal à F^\perp .

3.4 Bases hilbertiennes

Définition 3.4.1 *Un espace de Hilbert est dit séparable s'il contient une suite d'éléments (un sous ensemble dénombrable) dense.*

Définition 3.4.2 *Une suite d'éléments $\{e_i\}$ d'un Hilbert H est une base hilbertienne de H si*

1) *elle est orthonormée :*

$$\begin{aligned} (e_i, e_j) &= 0 \quad \forall i \neq j \\ \|e_i\| &= 1 \quad \forall i \end{aligned} \tag{3.14}$$

2) *elle est totale, c'est à dire que l'ensemble des combinaisons linéaires des e_i est dense dans H .*

3.4.1 Coefficients de Fourier

Soit $\{e_i\}$ une base hilbertienne de H , pour tout $x \in H$, les nombres (x, e_i) sont les coordonnées ou coefficients de Fourier de x dans la base $\{e_i\}$. On a le théorème :

Théorème 3.4.1 *Soient $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, n vecteurs quelconques de la base hilbertienne et soit H_n le sous-espace de dimension finie n qu'ils engendrent dans H .*

Pour tout x appartenant à H , notons $x_i = (x, e_i) \quad \forall i$, les coefficients de Fourier de x . Le vecteur

$$\sum_{i=1,n} x_i e_i$$

est la projection $\Pi_{H_n} x$ de x dans H_n . C'est donc la meilleure approximation de x dans H_n au sens de la norme de H .

Démonstration.

En effet $\forall x \in H$, et $\forall e_j$ vecteur de base de H_n on a

$$(x - \sum_{i=1,n} x_i e_i, e_j) = 0$$

par construction. Donc le vecteur

$$x - \sum_{i=1,n} x_i e_i$$

est orthogonal à tout vecteur de base de H_n , donc à tout vecteur de H_n . Ceci montre bien que

$$\sum_{i=1,n} x_i e_i$$

est la projection $\Pi_{H_n} x$ de x dans H_n

On en déduit en faisant tendre n vers l'infini :

1) que la série : $\sum_i x_i e_i$ converge et que sa somme est x ,

2) que la série : $\sum_i x_i^2$ converge et que sa somme est $\|x\|^2$ (C'est l'égalité de **Bessel - Parseval**).

Le théorème précédent est fondamental pour la suite du cours. Il signifie que tout espace de Hilbert séparable, admettant une base hilbertienne, sera donc isomorphe et isométrique à l'espace l^2 des suites de carrés sommables. Ceci est la généralisation naturelle en dimension infinie de l'isomorphisme isométrique naturel entre un espace euclidien de dimension finie N et l'espace \mathbb{R}^N .

D'autre part, le théorème précédent donne une construction pratique de la meilleure approximation dans un sous espace de dimension finie par l'utilisation d'une base orthonormée. Ceci a de nombreuses et importantes applications : approximations polynomiales au sens des moindres carrés, polynômes orthogonaux, développements de Fourier etc.

3.4.2 Quelques exemples de bases hilbertiennes

1) Soit l'espace $L^2(-\pi, +\pi)$ des fonctions de carré sommable sur $(-\pi, +\pi)$, la suite des fonctions

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \dots \right\}$$

est une base hilbertienne de l'espace des fonctions périodiques de période 2π de carré sommable sur $(-\pi, +\pi)$

2) Dans l'espace $L^2(-1, 1)$ des fonctions de carré sommable sur $(-1, 1)$, la suite des fonctions monômes

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

base de l'espace des polynômes qui est dense dans $L^2(-1, 1)$, n'est pas orthonormée. Pour obtenir à partir de cette base canonique une base hilbertienne, il suffit de l'orthonormer en utilisant le procédé de **Gram-Schmidt**.

3.4.3 Procédé de Gram-Schmidt

A partir d'une base non orthonormée $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, on peut construire une base orthonormée par l'algorithme suivant.

$$e_1^* = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad (3.15)$$

$$\tilde{e}_2 = e_2 - (e_2, e_1^*)e_1^* \quad \text{et} \quad e_2^* = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} \quad (3.16)$$

$$\tilde{e}_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} (e_n, e_i^*)e_i^* \quad \text{et} \quad e_n^* = \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|} \quad (3.17)$$

Application.

Orthonormons la base canonique $\{1, x, x^2, \dots\}$ au sens du produit scalaire de $L^2[-1, 1]$. On obtient alors la base des polynômes orthogonaux de Legendre.

3.5 Exemples d'espaces fonctionnels en dimension un

3.5.1 Espaces de fonctions continues

$C[a, b]$

$C[a, b]$ est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbb{R} , muni de la norme ∞

$$\|f\|_{0,\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad (3.18)$$

$C^k[a, b]$

$C^k[a, b]$ est l'espace des fonctions continues et dont les dérivées jusqu'à l'ordre k inclus sont continues sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbb{R} , muni de la norme

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_{0,\infty}$$

où $f^{(j)}$ représente la dérivée d'ordre j de f .

On notera $C^\infty[a, b]$ l'espace des fonctions continues et à dérivées continues quel que soit l'ordre de dérivation.

3.5.2 Espaces de fonctions de carré sommable

$L^2[a, b]$

$L^2[a, b]$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur $]a, b[$ muni de la norme

$$\|f\|_{0,2} = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (3.20)$$

$H^k[a, b]$

$H^k[a, b]$ est l'espace des fonctions de carré sommable et dont les dérivées jusqu'à l'ordre k inclus sont de carré sommable sur $]a, b[$ muni de la norme

$$\|f\|_{k,2} = \left(\sum_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_{0,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

où $f^{(j)}$ représente la dérivée d'ordre j de f . C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \sum_{0 \leq j \leq k} \int_a^b f^{(j)}(x) g^{(j)}(x) dx \quad (3.22)$$

3.5.3 Propriétés d'inclusion

Pour tout $k \geq 1$ on a les inclusions évidentes :

$$C^\infty[a, b] \subset C^{k+1}[a, b] \subset C^k[a, b] \subset C[a, b] \quad (3.23)$$

et

$$H^{k+1}[a, b] \subset H^k[a, b] \subset L^2[a, b] \quad (3.24)$$

On a de plus les inclusions suivantes en dimension un :

$$H^1[a, b] \subset C[a, b] \subset L^2[a, b] \quad (3.25)$$

et en général

$$H^{k+1}[a, b] \subset C^k[a, b] \quad (3.26)$$

3.5.4 L'espace $H_0^1[a, b]$

L'inclusion $H^1[a, b] \subset C[a, b]$ permet de définir l'espace $H_0^1[a, b]$ des fonctions de $H^1[a, b]$ nulles aux points a et b . C'est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1[a, b]$ pour le même produit scalaire et la même norme. Il aura une grande importance pour la formulation de problèmes aux limites dans lesquels la solution est fixée aux bornes de l'intervalle. On a alors besoin de l'inégalité fondamentale suivante :

3.5.5 Inégalité de Poincaré

Théorème 3.5.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , on a pour tout $v \in H_0^1[a, b]$ l'inégalité*

$$\|v\|_{0,2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (b-a) \|v'\|_{0,2} \quad (3.27)$$

D'où l'on déduit :

$$\|v\|_{1,2} \leq \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{0,2} \quad (3.28)$$

et donc que $\|v\|_{1,2} = \|v'\|_{0,2}$ définit une norme sur $H_0^1[a, b]$ équivalente à la norme H^1 .

Démonstration.

pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$v(x) = \int_a^x v'(t) dt \quad (3.29)$$

donc

$$|v(x)| \leq \sqrt{x-a} \|v'\|_{0,2} \quad (3.30)$$

On en déduit

$$\int_a^b v(x)^2 dx \leq \left(\int_a^b (x-a) dx\right) \|v'\|_{0,2}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|v'\|_{0,2}^2 \quad (3.31)$$

et le résultat. L'équivalence des normes se déduit de la définition de $\|v\|_{1,2}$:

$$\|v\|_{1,2} = \left(\|v\|_{0,2}^2 + \|v'\|_{0,2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

3.5.6 Quelques résultats de densité

L'espace des fonctions polynômes est dense dans l'espace $C[a, b]$ (Théorème de Weierstrass).

L'espace des fonctions polynômes est dense dans l'espace $L^2[a, b]$. On peut alors construire des bases hilbertiennes de polynômes orthogonaux engendrant un sous-espace dense dans $L^2[a, b]$

L'espace des fonctions continues, polynomiales par morceaux, est dense dans $H^1[a, b]$. Cet espace sera à la base de la méthode des éléments finis en dimension un.

3.6 Exemples d'espaces fonctionnels en dimension deux et trois

3.6.1 Espaces de fonctions continues

$C[\bar{\Omega}]$

$C[\bar{\Omega}]$ est l'espace des fonctions continues sur le fermé borné $\bar{\Omega}$ de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , muni de la norme ∞

$$\|f\|_{0,\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \quad (3.33)$$

ici x désigne selon le cas le point (x_1, x_2) de \mathbb{R}^2 ou le point (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3

$C^k[\bar{\Omega}]$

$C^k[\bar{\Omega}]$ est l'espace des fonctions continues et dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k inclus sont continues sur le fermé borné $\bar{\Omega}$ de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , muni de la norme

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j_1 + j_2 = j}} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} \right\|_{0,\infty} \quad (3.34)$$

pour le cas de \mathbb{R}^2 et de la norme

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j_1 + j_2 + j_3 = j}} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \partial x_3^{j_3}} \right\|_{0,\infty} \quad (3.35)$$

dans le cas de \mathbb{R}^3 .

On notera $C^\infty[\bar{\Omega}]$ l'espace des fonctions continues et à dérivées partielles continues quel que soit l'ordre de dérivation.

3.6.2 Espaces de fonctions de carré sommable

$L^2[\Omega]$

$L^2[\Omega]$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur l'ouvert Ω muni de la norme

$$\|f\|_{0,2} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

où dx représente respectivement l'élément d'aire $dx_1 dx_2$ ou l'élément de volume $dx_1 dx_2 dx_3$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \quad (3.37)$$

$H^1[\Omega]$

$H^1[\Omega]$ est l'espace des fonctions de carré sommable et dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 1 inclus sont de carré sommable sur $]a, b[$ muni de la norme

$$\|f\|_{1,2} = \left(\|f\|_{0,2}^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{0,2}^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{0,2}^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right\|_{0,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx + \int_{\Omega} \mathbf{grad} f(x) \mathbf{grad} g(x) dx \quad (3.39)$$

$H^k[\Omega]$

$H^k[\Omega]$ est l'espace des fonctions de carré sommable et dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k inclus sont de carré sommable sur $]a, b[$ muni de la norme

$$\|f\|_{k,2} = \left(\sum_{0 \leq j \leq k} \|D^{(j)} f\|_{0,2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

où $D^{(j)} f$ représente le vecteur des dérivées partielles d'ordre j de f :

$$D^{(j)} f = \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \partial x_3^{j_3}} \quad (3.41)$$

avec $j_1 + j_2 + j_3 = j$.

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \sum_{0 \leq j \leq k} \int_{\Omega} D^{(j)} f(x) D^{(j)} g(x) dx \quad (3.42)$$

3.6.3 Propriétés d'inclusion

Pour tout $k \geq 1$ on a les inclusions évidentes :

$$C^\infty[\bar{\Omega}] \subset C^{k+1}[\bar{\Omega}] \subset C^k[\bar{\Omega}] \subset C[\bar{\Omega}] \quad (3.43)$$

et

$$H^{k+1}[\Omega] \subset H^k[\Omega] \subset L^2[\Omega] \quad (3.44)$$

ATTENTION : On n'a plus par contre l'inclusion

$$H^1[\Omega] \subset C[\bar{\Omega}] \quad (3.45)$$

mais seulement

$$H^2[\Omega] \subset C[\bar{\Omega}] \quad (3.46)$$

3.6.4 L'espace $H_0^1[\Omega]$

Le fait que l'on n'ait plus l'inclusion

$$H^1[\Omega] \subset C[\bar{\Omega}]$$

en dimension 2 ou 3 pose le problème de la définition de conditions aux limites fixées et de l'espace $H_0^1[\Omega]$ des fonctions de $H^1[\Omega]$ "nulles" sur la frontière Γ de Ω . On admettra le résultat suivant :

Théorème 3.6.1 (théorème de trace) *Si le domaine Ω a une frontière Γ assez régulière, les fonctions de $H^1[\Omega]$ sont de carré sommable sur la frontière Γ du domaine Ω de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , donc appartiennent à l'espace $L^2[\Gamma]$. Et l'on a la majoration :*

$$\|f\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall f \in H^1[\Omega] \quad (3.47)$$

On définira alors $H_0^1[\Omega]$ comme l'espace des fonctions de $H^1[\Omega]$ nulles au sens de $L^2(\Gamma)$ sur la frontière Γ de Ω .

C'est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1[\Omega]$ pour le même produit scalaire et la même norme. Il aura une grande importance pour la formulation de problèmes aux limites dans lesquels la solution est fixée aux bornes de l'intervalle.

On admettra alors l'inégalité fondamentale suivante :

3.6.5 Inégalité de Poincaré

Théorème 3.6.2 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ l'inégalité*

$$\|v\|_{0,2} \leq C(\Omega) \|\text{grad} v\|_{0,2} \quad (3.48)$$

D'où l'on déduit :

$$\|v\|_{1,2} \leq (1 + C(\Omega)^2)^{\frac{1}{2}} \|\text{grad} v\|_{0,2} \quad (3.49)$$

et donc que $\|v\|_{1,2} = \|\text{grad} v\|_{0,2}$ est une norme sur $H_0^1[\Omega]$ équivalente à la norme H^1 .

3.6.6 Quelques résultats de densité

L'espace des fonctions polynômes à 2 ou 3 variables est dense dans l'espace $L^2[\Omega]$. On peut alors construire des bases hilbertiennes de polynômes orthogonaux engendrant un sous-espace dense dans $L^2[\Omega]$. Ceci n'est pratiquement utile que dans le cas facile de domaines simples, par exemple rectangulaires ou parallélépipédiques.

L'espace des fonctions continues, polynomiales par morceaux, est dense dans $H^1[\Omega]$. Cet espace sera à la base de la méthode des éléments finis en dimension 2 et 3. On étudiera plus loin le problème de la construction d'interpolations en dimension 2 et 3.

Chapitre 4

Formulations variationnelles en dimension un

4.1 Un problème modèle

Reprenons un problème de Dirichlet homogène voisin du problème présenté dans le chapitre 1.

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où f et α sont deux fonctions données sur $[a, b]$. On suppose α continue et positive sur $[a, b]$: $\alpha(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Si la fonction au second membre f est continue sur $[a, b]$, la solution u de ce problème est une fonction continue et deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$, l'égalité $-u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x)$ est vérifiée en tout point $x \in [a, b]$ au sens fort. On dit alors que u est solution classique ou solution forte du problème différentiel.

Pour des raisons d'approximation numérique, mais également pour des raisons de modélisation physique, on va choisir de rechercher la solution u du problème dans l'espace des fonctions de carré sommable.

- *En effet le second membre f n'est pas toujours une fonction continue dans la pratique et donc la solution u n'est pas toujours de classe C^2 . Par exemple dans le cas d'une poutre en flexion, on peut avoir un chargement concentré sur une partie, voire sur un seul point de $[a, b]$. De même, on peut concevoir une barre chauffée par une résistance sur une partie limitée ou en un point par un laser.*

On considère donc le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que,} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Cette nouvelle formulation, dite formulation variationnelle ou formulation faible est obtenue après multiplication par $v(x)$ et intégration sur $[a, b]$ de (1) :

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad (4.3)$$

puis par intégration par parties :

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + u'(a)v(a) - u'(b)v(b) \quad (4.4)$$

On peut interpréter cette démarche de la façon suivante : on a remplacé l'égalité $-u'' + \alpha u = f$ écrite initialement au sens fort d'une égalité de fonctions continues, par une égalité au sens faible de fonctions de carré sommable qui s'exprime précisément par produit scalaire dans $L^2[a, b]$. On doit alors considérer la dérivée u'' au sens des distributions, et c'est ce que l'on fait en intégrant par parties.

4.1.1 Equivalence des formulations dans le cas de solutions régulières

Théorème 4.1.1 *Toute solution classique est évidemment solution faible puisqu'elle vérifie (4.2) après intégration par parties.*

Inversement si f est continue, u est une solution régulière (de classe $C^2[a, b]$) et u est une solution classique.

Démonstration.

Supposons $u \in C^2[a, b]$, $u(a) = u(b) = 0$ alors en intégrant (2) par parties à l'envers on obtient :

$$\int_a^b (-u''(x) + \alpha(x)u(x) - f(x))v(x)dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1[a, b]$$

En prenant $v = -u'' + \alpha u - f$, on obtient

$$\int_a^b (-u''(x) + \alpha(x)u(x) - f(x))^2 dx = 0$$

d'où la nullité en tout point de $[a, b]$ de la fonction continue $-u'' + \alpha u - f$ et le résultat.

Nous allons maintenant montrer l'existence et l'unicité dans $H_0^1[a, b]$ d'une solution faible du problème variationnel (4.2). Pour cela nous allons utiliser le théorème fondamental de **Lax -Milgram** présenté dans un cadre général abstrait.

En effet le problème variationnel (4.2) peut s'écrire sous la forme générale :

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (4.5)$$

en posant

$$\begin{aligned} V &= H_0^1[a, b] \\ a(u, v) &= \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx \\ l(v) &= \int_a^b f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

4.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 4.2.1 La forme bilinéaire a est continue dans V s'il existe une constante positive M telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \quad (4.6)$$

Définition 4.2.2 La forme bilinéaire a est dite **coercive** dans V s'il existe une constante **strictement** positive α telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

Remarque.

Lorsqu'elle est symétrique, la forme bilinéaire $a : u, v \longrightarrow a(u, v)$ est un produit scalaire sur V , et sa norme associée $v \longrightarrow a(v, v)^{\frac{1}{2}}$ est une norme équivalente à la norme initialement choisie sur V . On a en effet :

$$\sqrt{\alpha} \|v\| \leq a(v, v)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{M} \|v\| \quad (4.8)$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 (Lax-Milgram) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue coercive sur l'espace de Hilbert V , soit $l(v)$ une forme linéaire continue sur V , le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (4.9)$$

admet une solution unique dans V .

De plus, si a est symétrique, ce problème est équivalent au problème de minimisation :

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ qui réalise le minimum dans } V \text{ de :} \\ J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v) \end{cases} \quad (4.10)$$

Démonstration.

L'application $v \longrightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire continue sur V . Donc, en appliquant le théorème de Riesz, il existe un élément $Au \in V$ tel que

$$a(u, v) = (Au, v)_V \quad \forall v \in V$$

De même $l(v)$ est une forme linéaire continue sur V , donc il existe $L \in V$ tel que

$$l(v) = (L, v)_V \quad \forall v \in V$$

Considérons l'application de V dans V définie par $v \longrightarrow v - \rho(Av - L)$ où ρ est un réel strictement positif. Montrons qu'avec les hypothèses faites sur a et l cette application est une contraction dans V pour ρ assez petit.

En effet

$$\|v - \rho Av\|^2 = \|v\|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2\|Av\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|v\|^2$$

où α est la constante de coercivité et M la constante de continuité de a .

On aura contraction dès que $(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) < 1$ donc pour

$$\rho \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$$

En choisissant donc ρ dans cet intervalle on a construit une application contractante dans V qui admet un point fixe unique $u \in V$ tel que

$$u = u - \rho(Au - L) \quad \text{donc tel que } Au = L$$

u est la solution du problème variationnel.

Considérons maintenant le cas a symétrique. Calculons, pour tout réel λ et tout $v \in V$ l'expression $J(u + \lambda v)$

$$J(u + \lambda v) = J(u) + \lambda[a(u, v) - l(v)] + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v)$$

Donc, si u est solution du problème variationnel

$$a(u, v) - l(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

u minimise J .

Inversement si u minimise J , alors

$$\lambda[a(u, v) - l(v)] + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) \geq 0 \quad \forall \lambda \text{ et } v$$

Donc le trinôme en λ ci-dessus étant toujours positif, on doit avoir

$$a(u, v) - l(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

4.3 Problèmes de Dirichlet

Appliquons ce théorème au problème (4.1).

4.3.1 Problème de Dirichlet homogène

On appelle problème de Dirichlet homogène, dans le cas d'un problème différentiel du second ordre, en dimension un, sur un intervalle $[a, b]$, un problème dans lequel les conditions aux limites aux extrémités a et b de l'intervalle sont

$$u(a) = 0 \quad u(b) = 0 \tag{4.11}$$

On parle aussi de conditions aux limites fixées ou de conditions aux limites essentielles.

Le problème

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x)u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

dont la formulation variationnelle s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{array} \right. \quad (4.13)$$

est donc un problème de Dirichlet homogène.

Vérifions, pour ce problème, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

1) L'espace $H_0^1[a, b]$ est un espace de Hilbert.

2) La forme bilinéaire symétrique (évident) a est continue. En effet soit M le max de α sur $[a, b]$, on a

$$\left| \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx \right| \leq \max(1, M) \|u\| \|v\|$$

3) La forme a est coercive : car ou bien le minimum m de α sur $[a, b]$ est strictement positif et on a

$$\int_a^b v'^2(x)dx + \int_a^b \alpha(x)v^2(x)dx \geq \min(1, m) \|v\|^2$$

et la coercivité avec une constante égale à : $\min(1, m)$,

ou bien $m = 0$ et on utilise l'inégalité de Poincaré vérifiée dans $H_0^1[a, b]$ et qui assure

$$\|v'\|_{0,2}^2 \geq \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2}\right)^{-1} \|v\|_{1,2}^2$$

donc encore la coercivité avec une constante égale à : $\left(1 + \frac{(b-a)^2}{2}\right)^{-1}$

3) La forme l est continue car :

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{0,2} \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{1,2}$$

En conséquence, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, le

problème (4.2) admet une solution unique dans $H_0^1[a, b]$, qui réalise également le minimum de "l'énergie "

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_a^b v'^2(x)dx + \int_a^b \alpha(x)v^2(x)dx \right) - \int_a^b f(x)v(x)dx \quad (4.14)$$

4.3.2 Problème de Dirichlet non-homogène

Dans ce cas, les conditions aux limites sont fixées mais non nulles en a et b . soit par exemple

$$u(a) = u_a \quad u(b) = u_b \quad (4.15)$$

Comme souvent en mathématiques, une solution consiste à se ramener au problème précédent en choisissant une fonction auxiliaire simple u_0 prenant les valeurs fixées

$$u_0(a) = u_a \quad u_0(b) = u_b$$

et à poser $u = \tilde{u} + u_0$. Le problème se ramène alors à un problème de Dirichlet homogène pour la nouvelle inconnue \tilde{u} , soit

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(x) + \alpha(x) \tilde{u}(x) = f(x) + u_0''(x) - \alpha(x) u_0(x) & \forall x \in [a, b] \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

dont la formulation variationnelle s'écrit

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } \tilde{u} \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b \tilde{u}'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)\tilde{u}(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \\ - \int_a^b u_0'(x)v'(x)dx - \int_a^b \alpha(x)u_0(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{cases} \quad (4.17)$$

On verra plus loin, lors de l'approximation par éléments finis de ce problème, quel est le bon choix pratique de la fonction u_0 .

Remarque importante.

L'espace V , espace des fonctions tests de la formulation variationnelle est toujours le même, $H_0^1[a, b]$, dans le cas Dirichlet non homogène comme dans le cas Dirichlet homogène. Ce qui implique le choix de fonctions tests v nulles au bord, c'est le fait que les valeurs de l'inconnue u soient fixées sur la frontière et non qu'elles y soient nulles.

On démontre sans difficulté, dans le cas Dirichlet non-homogène, l'existence et l'unicité de la solution, par la vérification des hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

4.4 Problèmes de Neumann

On appelle problème de Neumann, dans le cas d'un problème différentiel du second ordre en dimension un sur un intervalle $[a, b]$, un problème dans lequel les conditions aux limites aux extrémités a et b de l'intervalle sont

$$u'(a) = \mu \quad u'(b) = \nu \quad (4.18)$$

On parle aussi de conditions aux limites libres ou de conditions aux limites naturelles dans le cas homogène ($\mu = \nu = 0$).

Ces conditions modélisent la donnée d'une force ou d'un flux sur la frontière Γ .

Le problème

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u'(a) = \mu \quad u'(b) = \nu \end{cases} \quad (4.19)$$

est donc un problème de Neumann.

4.4.1 Formulation variationnelle

Les valeurs de u au bord de l'intervalle ne sont plus fixées, ce sont maintenant des inconnues du problème. En conséquence la formulation variationnelle s'écrit dans l'espace de fonctions tests $H^1[a, b]$ tout entier.

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \\ +\nu v(b) - \mu v(a) \quad \forall v \in H^1[a, b] \end{cases} \quad (4.20)$$

Vérifions, pour ce problème, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

1) L'espace $H^1[a, b]$ est un espace de Hilbert.

2) La forme bilinéaire symétrique (évident) a est continue. En effet soit M le max de α sur $[a, b]$, on a

$$\left| \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx \right| \leq \max(1, M) \|u\| \|v\|$$

3) La forme a est coercive si le minimum m de α sur $[a, b]$ est strictement positif et on a

$$\int_a^b v'^2(x)dx + \int_a^b \alpha(x)v^2(x)dx \geq \min(1, m) \|v\|^2$$

et la coercivité avec une constante égale à : $\min(1, m)$.

Dans le cas $\alpha = 0$ on n'a plus coercivité de a , le problème est mal posé. Il est d'ailleurs clair qu'alors, la fonction inconnue u n'apparaissant dans le problème que par l'intermédiaire des valeurs de sa dérivée, on a une infinité de solutions à une constante additive près.

3) La forme l est continue car :

$$\left| \int_a^b f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{0,2} \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{1,2}$$

et grâce à l'inclusion $H^1[a, b] \subset C[a, b]$

$$|\nu v(b) - \mu v(a)| \leq c \|v\|_{1,2}$$

En conséquence, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, le

problème (2) admet une solution unique dans $H^1[a, b]$, qui réalise également le minimum de "l'énergie "

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_a^b v'^2(x)dx + \int_a^b \alpha(x)v^2(x)dx \right) - \int_a^b f(x)v(x)dx - \nu v(b) + \mu v(a) \quad (4.21)$$

dans $H^1[a, b]$

4.4.2 Retour à la formulation différentielle initiale

En intégrant par parties

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = - \int_a^b u''(x)v(x)dx + u'(b)v(b) - u'(a)v(a)$$

donc :

$$\int_a^b (-u''(x) + \alpha(x)u(x) - f(x))v(x)dx + (u'(b) - \nu)v(b) - (u'(a) - \mu)v(a) = 0$$

pour tout $v \in H^1[a, b]$. On choisit d'abord $v \in H_0^1[a, b]$ ce qui donne $-u'' + \alpha u = f$ au sens de $L^2[a, b]$. Puis on obtient

$$(u'(b) - \nu)v(b) - (u'(a) - \mu)v(a) = 0 \quad \forall v \in H^1[a, b]$$

donc

$$u'(a) = \mu \quad \text{et} \quad u'(b) = \nu$$

4.5 Problèmes mêlés

Les conditions aux limites mêlés sont des conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière, et de Neumann sur une autre partie. En dimension un, cela correspond à une condition de Dirichlet en un point et à une condition de Neumann sur l'autre extrémité du segment domaine de calcul.

$$u(a) = u_a \quad u'(b) = \beta \quad (4.22)$$

Nous obtenons le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u_a \quad u'(b) = \beta \end{cases} \quad (4.23)$$

4.5.1 Formulation variationnelle

La valeur de u au point a est fixée, tandis que sa valeur au point b est une inconnue du problème. On recherchera donc la solution du problème variationnel dans un espace intermédiaire entre $H^1[a, b]$ et $H_0^1[a, b]$, l'espace V des fonctions de $H^1[a, b]$ nulles au point a . V est bien un espace de Hilbert, car c'est un sous-espace fermé de $H^1[a, b]$.

Comme précédemment, pour passer de la formulation différentielle à la formulation variationnelle, on multiplie l'équation

$$-u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x)$$

par $v(x)$ et on intègre sur $[a, b]$

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V$$

puis en intégrant par parties la première intégrale on obtient le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } V \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \\ + \beta v(b) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (4.24)$$

La démonstration de l'existence et de l'unicité se fait comme dans les cas précédents. La coercivité de a est immédiate si α est strictement positif, sinon on l'obtient par une inégalité de Poincaré grâce à la condition de Dirichlet au point a .

4.6 Problèmes de Fourier

Les conditions aux limites de Fourier, fréquentes en thermique, expriment une relation affine entre les valeurs de la solution u et de sa dérivée en un point frontière. Elles s'écrivent de manière générale selon :

$$u'(a) = k_a (u(a) - u_a) + \beta_a \quad (4.25)$$

$$u'(b) = -k_b (u(b) - u_b) + \beta_b \quad (4.26)$$

avec ici k_a et k_b coefficients réels positifs.

Nous obtenons le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u'(a) = k_a (u(a) - u_a) + \beta_a \\ u'(b) = -k_b (u(b) - u_b) + \beta_b \end{cases} \quad (4.27)$$

4.6.1 Formulation variationnelle

Les valeurs de u aux points a et b sont des inconnues du problème. On recherchera donc la solution du problème variationnel dans l'espace $H^1[a, b]$.

Comme précédemment, pour passer de la formulation différentielle à la formulation variationnelle, on multiplie l'équation

$$-u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x)$$

par $v(x)$ et on intègre sur $[a, b]$

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H^1[a, b]$$

puis en intégrant par parties la première intégrale on obtient le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H^1[a, b] \text{ telle que : } \forall v \in H^1[a, b] \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx + k_a u(a)v(a) + k_b u(b)v(b) = \\ \int_a^b f(x)v(x)dx + k_a u_a v(a) + k_b u_b v(b) - \beta_a v(a) + \beta_b v(b) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

La démonstration de l'existence et de l'unicité se fait comme dans les cas précédents. Il convient de remarquer, que dans le cas de conditions aux limites de Fourier, la forme bilinéaire a est modifiée :

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx + k_a u(a)v(a) + k_b u(b)v(b)$$

La continuité de a utilise les majorations

$$|u(a)| \leq \|u\|_{0,\infty} \leq C \|u\|_{1,2}$$

$$|u(b)| \leq \|u\|_{0,\infty} \leq C \|u\|_{1,2}$$

La coercivité de a est immédiate si α ou k_a et k_b sont strictement positifs.

Remarque pratique.

Les conditions de type Fourier fournissent une forme générale comprenant comme cas particuliers :

- 1) les conditions de Neumann dans le cas $k = 0$,
- 2) les conditions de Dirichlet $u(a) = u_a$ à la limite quand k devient infiniment grand.

Enfin, signalons l'existence d'autres types de conditions aux limites importantes, les conditions aux limites périodiques qui s'écrivent :

$$u(a) = u(b) \quad u'(a) = u'(b) \tag{4.29}$$

Chapitre 5

Éléments finis linéaires monodimensionnels

5.1 Principes généraux de l'approximation

5.1.1 Une famille de problèmes variationnels linéaires

Soit V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme associée $\|\cdot\|$.

Soit a une forme bilinéaire continue sur V et coercive, c'est à dire telle qu'il existe, pour tout $v \in V$, un nombre $\alpha > 0$ tel que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad (5.1)$$

Soit l une forme linéaire continue sur V .

On considère le problème P suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (5.2)$$

Sous les hypothèses précédentes : V espace de Hilbert réel , a forme bilinéaire continue sur V et coercive, l une forme linéaire continue sur V , Le théorème de Lax-Milgram conduit aux conclusions suivantes :

- 1) Le problème P admet une solution unique u dans V
- 2) Si la forme bilinéaire a est symétrique le problème variationnel P est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u \in V \text{ qui minimise la forme quadratique} \\ J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \end{cases} \quad (5.3)$$

5.1.2 Approximation interne du problème

On suppose maintenant que l'on connaît un sous-espace $V_h \subset V$ de dimension finie, paramétré par h et tel que pour tout $v \in V$, il existe un élément $r_h v \in V_h$ vérifiant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\| = 0 \quad (5.4)$$

On parle d'approximation interne car $V_h \subset V$.

Considérons alors le problème P_h

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u_h \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V_h \text{ telle que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (5.5)$$

Ce problème admet également une solution unique car $V_h \subset V$, et donc les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont également vérifiées dans V_h .

Remarque :

Si la forme bilinéaire a est symétrique le problème variationnel P_h est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u_h \in V_h \text{ qui minimise la forme quadratique} \\ J(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - l(v_h) \end{cases} \quad (5.6)$$

et on a donc évidemment

$$J(u_h) \geq J(u)$$

5.1.3 Majoration d'erreur

Théorème 5.1.1 *Soit M la constante intervenant dans l'hypothèse de continuité de a : $a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|$ et α la constante intervenant dans l'hypothèse de coercivité : $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, on a la majoration d'erreur suivante :*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (5.7)$$

Démonstration.

De

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

et

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

on obtient

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

et

$$a(u - u_h, u_h - u + u - v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

soit

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

et le résultat.

Remarque : Si a est symétrique :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

signifie que u_h est la projection de u dans V_h au sens du produit scalaire a . Dans ce cas on a

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (5.8)$$

5.1.4 Un premier exemple d'approximation interne : la méthode de Galerkin

On suppose l'espace de Hilbert V séparable. Il existe donc une base $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ dénombrable engendrant un sous-espace dense dans V . On considère alors un sous-ensemble fini $B_m = \{w_j\}_{j=1}^m$ et l'espace V_m engendré par B_m .

Soit Π_m l'opérateur de projection orthogonale de V dans V_m on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Pi_m v - v\| = 0 \quad \forall v \in V \quad (5.9)$$

Le problème P_m suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u_m \text{ appartenant à l'espace } V_m \text{ telle que :} \\ a(u_m, v_m) = l(v_m) \quad \forall v_m \in V_m \end{cases} \quad (5.10)$$

qui admet une solution unique dans V_m peut s'écrire sous forme d'un système linéaire :

$$\sum_{j=1, m} A_{i,j} u_j = L_i \quad \forall i = 1, m \quad (5.11)$$

avec

$$A_{i,j} = a(w_j, w_i) \quad (5.12)$$

et

$$L_i = L(w_i) \quad (5.13)$$

5.2 Éléments finis P1 pour le problème de Dirichlet

5.2.1 Problème de Dirichlet homogène

Reprenons le problème de Dirichlet homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{array} \right. \quad (5.14)$$

et introduisons comme dans le chapitre 1 une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments $T_i = [x_{i-1}, x_i]$

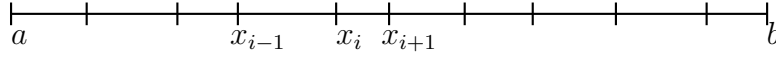


FIG. 5.1 – Discrétisation

Les éléments T_i n'ont pas forcément même longueur. $V_{0,h}$ est alors l'espace des fonctions continues affines par morceaux (affines sur les segments T_i) et nulles aux extrémités a et b .

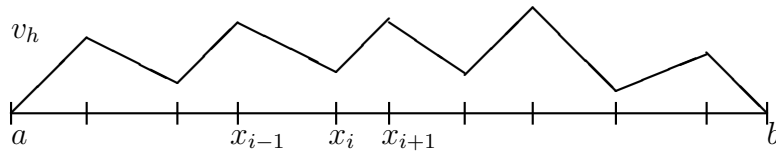


FIG. 5.2 – Une fonction de $V_{0,h}$

Rappelons que chaque fonction $v_h \in V_{0,h}$ est déterminée de manière unique par la donnée de ses valeurs aux points x_i pour $i = 1, N - 1$. L'espace $V_{0,h}$ est de dimension $N - 1$ et est engendré par la base de Lagrange de $V_{0,h}$, formée des $N-1$ fonctions $w_i \in V_{0,h}$ définies par les $N-1$ conditions suivantes :

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, N-1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, N-1 \quad (5.15)$$

Une fonction v_h quelconque s'écrit dans cette base :

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{i=N-1} v_i w_i(x) \quad (5.16)$$

avec $v_i = v_h(x_i)$. Les coefficients v_i sont donc les valeurs de v_h aux points (x_i)

5.2.2 Écriture du problème approché

Ecrivons le problème approché dans $V_{0,h}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u_h \text{ appartenant à } V_{0,h} \text{ telle que } \quad \forall v_h \in V_{0,h} \\ \int_a^b u'_h(x) v'_h(x) dx + \int_a^b \alpha(x) u_h(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Le problème étant linéaire, l'égalité est vraie pour tout v_h si elle est vraie pour une base de l'espace vectoriel $V_{0,h}$

$$\forall v_h \in V_h \iff \forall w_i \quad \text{pour } i = 1, N-1 \quad (5.18)$$

D'autre part, écrivons u_h , solution du problème approché dans $V_{0,h}$, dans la base des w_i

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{j=N-1} u_j w_j(x) \quad (5.19)$$

avec $u_j = u_h(x_j)$ valeur approchée de la solution exacte au point (x_j)

On obtient l'écriture suivante du problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_1, u_2, \dots, u_{N-1} \text{ tels que } \quad \forall i = 1, N-1 \\ \sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx + \int_a^b \alpha(x) w_j(x) w_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Soit en posant

$$\int_a^b f(x) w_i(x) dx = F_i \quad (5.21)$$

et

$$\int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx + \int_a^b \alpha(x) w_j(x) w_i(x) dx = A_{ij} \quad (5.22)$$

$$\sum_{j=1}^{j=N-1} A_{ij} u_j = F_i \quad \forall i = 1, N-1 \quad (5.23)$$

On a ainsi obtenu un système linéaire de $N-1$ équations à $N-1$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A U = F \quad (5.24)$$

5.2.3 Calcul des coefficients A_{ij} de la matrice A

Le calcul des coefficients de la matrice A et du second membre se fait, comme dans le chapitre 1, par assemblage des contributions des éléments $T_i = [x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \dots, N$. La matrice A apparait comme la somme de deux matrices K et M .

K constituée des coefficients

$$K_{ij} = \int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx$$

s'appelle la matrice de raideur.

M constituée, dans le cas $\alpha = 1$ des coefficients

$$M_{ij} = \int_a^b w_j(x) w_i(x) dx$$

s'appelle la matrice de masse. On obtient sans difficulté les contributions de chaque élément T_i aux matrices de raideur et de masse, dites matrices élémentaires de raideur et matrices élémentaires de masse.

Matrice élémentaire de raideur

On calcule les coefficients K_{ij} en sommant les contributions des différents éléments selon :

$$K_{ij} = \int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} w'_j(x) w'_i(x) dx \quad (5.25)$$

Considérons par exemple l'élément $T_i = [x_{i-1}, x_i]$. Sur cet élément, il n'y a que 2 fonctions de base non nulles : w_{i-1} et w_i

$$w_{i-1}|_{T_i} = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \quad w_i|_{T_i} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.26)$$

$$w'_{i-1}|_{T_i} = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} \quad w'_i|_{T_i} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.27)$$

L'élément T_i produira donc effectivement une contribution non nulle aux 4 coefficients $K_{i-1,i-1}$, $K_{i-1,i}$, $K_{i,i}$ et $K_{i,i-1}$ de la matrice globale K .

Calculons les contributions élémentaires de T_i et disposons les sous la forme d'une matrice élémentaire 2×2

$$ElemK_i = \begin{pmatrix} e_{1,1}^i & e_{1,2}^i \\ e_{2,1}^i & e_{2,2}^i \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

avec

$$e_{1,1}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} w'_{i-1}(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.29)$$

$$e_{1,2}^i = e_{2,1}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} w'_{i-1}(x) w'_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} dx = -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.30)$$

$$e_{2,2}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} w'_i(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.31)$$

d'où

$$ElemK_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} \\ \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} & \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Matrice élémentaire de masse

On obtient de même la matrice de masse élémentaire

$$ElemM_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

5.2.4 Calcul des composantes du second membre F

Chaque composante F_i du vecteur second-membre global

$$F_i = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad (5.34)$$

est calculée également par assemblage de contributions élémentaires.

$$F_i = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) w_i(x) dx \quad (5.35)$$

Tout dépend alors de la donnée de f . Si f est donnée analytiquement, on peut parfois calculer les intégrales exactement à la main. Mais en général, f n'est connue que par ses valeurs aux points x_i pour $i = 0, N$. On écrit donc f dans la base des w_i selon :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{j=N} f_j w_j(x) \quad (5.36)$$

Le problème se ramène alors au calcul des intégrales :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} w_j(x) w_i(x) dx \quad (5.37)$$

On utilise des formules d'intégration numérique. Par exemple la formule des trapèzes

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x) dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{2} [F(x_{k-1}) + F(x_k)] \quad (5.38)$$

exacte pour des polynômes de degré 1.

ou la formule de Simpson

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x) dx = \frac{x_k - x_{k-1}}{6} [F(x_{k-1}) + 4F(x_{k-\frac{1}{2}}) + F(x_k)] \quad (5.39)$$

exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Avec des fonctions tests $w_i \in P1$, la méthode des trapèzes conduit à une valeur approchée de l'intégrale, qui dans le cas de points équidistribués de pas h redonne le résultat

$$F_i = h f_i \quad (5.40)$$

obtenu en différences finies. La méthode de Simpson permet un calcul exact et donne dans le même cas

$$F_i = \frac{h}{6} [f_{i-1} + 4 f_i + f_{i+1}] \quad (5.41)$$

5.2.5 Problème de Dirichlet non-homogène

Le problème de Dirichlet non-homogène s'écrit

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u_a \quad u(b) = u_b \end{cases} \quad (5.42)$$

On pose $u = \tilde{u} + u_0$ en choisissant une fonction auxiliaire simple u_0 prenant les valeurs fixées

$$u_0(a) = u_a \quad u_0(b) = u_b \quad (5.43)$$

Le problème se ramène alors à un problème de Dirichlet homogène pour la nouvelle inconnue \tilde{u} dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } \tilde{u} \text{ appartenant à } H_0^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b \tilde{u}'(x) v'(x) dx + \int_a^b \alpha(x) \tilde{u}(x) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx \\ - \int_a^b u_0'(x) v'(x) dx - \int_a^b \alpha(x) u_0(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1[a, b] \end{cases} \quad (5.44)$$

On obtient donc dans ce cas le problème approché suivant dans $V_{0,h}$

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } \tilde{u}_h \text{ appartenant à } V_{0,h} \text{ telle que :} \\ \int_a^b \tilde{u}_h'(x) v_h'(x) dx + \int_a^b \alpha(x) \tilde{u}_h(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \\ - \int_a^b u_0'(x) v_h'(x) dx - \int_a^b \alpha(x) u_0(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0,h} \end{cases} \quad (5.45)$$

Il reste simplement à préciser le choix pratique de u_0 . On prend habituellement pour u_0 , la fonction suivante de l'espace V_h des fonctions continues affines par éléments :

$$u_0 = u_a w_0 + u_b w_N \quad (5.46)$$

L'existence et l'unicité des solutions des problèmes continus et discrets se démontrent aisément par application du Théorème de Lax-Milgram (exercice).

D'un point de vue pratique, la seule modification à apporter au système par rapport au cas Dirichlet homogène concerne les seules composantes 1 et N-1 du second membre.

On verra plus loin une autre technique de prise en compte de conditions aux limites de Dirichlet déduite du cas général de conditions aux limites de Fourier.

5.3 Approximation du problème de Neumann.

La formulation variationnelle du problème de Neumann s'écrit dans l'espace $H^1[a, b]$ tout entier.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \\ +\nu v(b) - \mu v(a) \quad \forall v \in H^1[a, b] \end{array} \right. \quad (5.47)$$

Le problème approché s'écrit dans l'espace V_h des fonctions continues affines par éléments T_i . Sans restriction sur les valeurs aux bords, l'espace V_h est de dimension $N + 1$. Il est engendré par les $N + 1$ fonctions affines par morceaux w_i définies pour $i = 0, \dots, N$ par :

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 0, N \quad \text{et} \quad \forall j = 0, N \quad (5.48)$$

avec

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad x_N = b \quad (5.49)$$

s'écrit dans l'espace des fonctions de $H^1[a, b]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H^1[a, b] \text{ telle que : } \forall v \in H^1[a, b] \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx + k_a u(a)v(a) + k_b u(b)v(b) \\ = \int_a^b f(x)v(x)dx + k_a u_a v(a) + k_b u_b v(b) - \beta_a v(a) + \beta_b v(b) \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Le problème approché s'écrit dans l'espace V_h des fonctions continues affines par éléments T_i . L'espace V_h est de dimension $N + 1$. Il est engendré par les N fonctions affines par morceaux w_i pour $i = 0, \dots, N$

On obtient le problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_0, u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tels que } \quad \forall i = 0, \dots, N \\ \sum_{j=0}^{j=N} \left(\int_a^b w_j'(x) w_i'(x) dx + \int_a^b \alpha(x) w_j(x) w_i(x) dx + k_a w_j(a) w_i(a) + k_b w_j(b) w_i(b) \right) u_j \\ = \int_a^b f(x) w_i(x) dx + k_a u_a w_i(a) + k_b u_b w_i(b) - \beta_a w_i(a) + \beta_b w_i(b) \end{array} \right. \quad (5.54)$$

Par rapport aux cas étudiés précédemment, il convient de noter que les conditions aux limites de Fourier introduisent une modification de la matrice du système linéaire. L'ajout du terme $k_a w_j(a) w_i(a)$ entraîne l'addition de la valeur k_a au coefficient $A_{0,0}$ de la matrice et de même pour k_b au coefficient $A_{N,N}$. En effet le produit $w_j(a) w_i(a)$ est non nul et égal à 1 dans le seul cas $i = j = 0$ (idem pour $w_j(b) w_i(b)$).

Comme on l'a signalé plus haut, le choix d'une valeur très grande de k permet de modéliser une condition aux limites de Dirichlet à partir de la formulation d'une condition de Fourier.

5.5 Assemblage

L'assemblage des matrices et second membres élémentaires afin de constituer le système global s'effectue sans difficulté dans une boucle générale de calcul

passant en revue les éléments E_i et sommant leurs contributions en les affectant aux coefficients adéquats du système global.

Ici, chaque coefficient A_{ij} est obtenu en sommant les contributions des éléments E_i . Remarquons que seuls 2 éléments produisent une contribution non nulle à chaque coefficient. Ainsi on vérifie que sur chaque ligne i de la matrice A il n'y a que 3 coefficients non nuls $A_{i,i-1}$, $A_{i,i}$, $A_{i,i+1}$.

Supposons un maillage en N éléments. Notons A la matrice globale à assembler (matrice de raideur ou de masse globale, second membre) et a_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément E_k .

L'algorithme d'assemblage est très simple, dès lors que l'on dispose d'un tableau associant les points d'un élément E_k et les noeuds du maillage global.

Dans ce cas très simple d'éléments de degré un en dimension un, chaque élément E_k comprend 2 noeuds x_{k-1} , x_k .

D'où l'algorithme :

POUR K = 1, N FAIRE

POUR II = 1, 2 FAIRE

POUR JJ = 1, 2 FAIRE

I = K+II-2

J = K+JJ-2

$A(I,J) = A(I,J) + a(ii,jj)$

FIN DES 3 BOUCLES

Remarque : Les indices des coefficients de la matrice correspondent à la numérotation globale adoptée. Ils vont donc de 0 à N .

Chapitre 6

Éléments monodimensionnels d'ordre élevé

6.1 Éléments finis de Lagrange de degré deux ou éléments P2 en dimension un.

Considérons une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments T_i . Les éléments T_i n'ont pas forcément même longueur. Choisissons comme espace V_h d'approximation, l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, et polynomiales de degré deux sur chaque sous-intervalle. Un polynôme de degré deux est fixé par ses valeurs en trois points. On prend les extrémités et le milieu de chaque élément T_i . On est ainsi amené à considérer une discrétisation de $[a, b]$ en N sous-intervalles comportant eux-mêmes trois points, ce qui nous conduit globalement à une discrétisation par $2N + 1$ points ou noeuds x_i pour $i = 0, \dots, 2N$ selon la figure suivante :

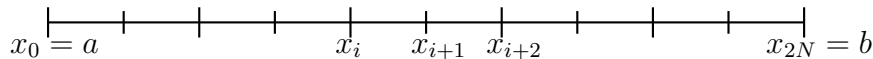
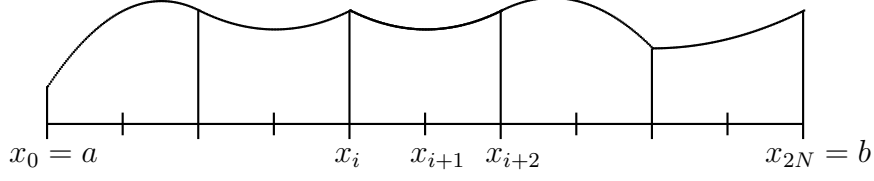


FIG. 6.1 – Maillage P2

D'où l'allure générale d'une fonction $P2$ appartenant à V_h .

On prend comme base de V_h l'ensemble des $2N + 1$ fonctions $w_i \in V_h$ définies classiquement par les $2N + 1$ conditions

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 0, 2N \quad \text{et} \quad \forall j = 0, 2N \quad (6.1)$$

FIG. 6.2 – Une fonction $P2$

Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ on réalise donc une interpolation de Lagrange de degré deux basée sur les trois points équidistants x_i, x_{i+1}, x_{i+2} . Selon la technique classique de Lagrange on construit les trois polynômes :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} \quad (6.2)$$

$$L_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} \quad (6.3)$$

$$L_{i+2}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} \quad (6.4)$$

On aura donc deux types de fonctions de base $P2$. Les fonctions w_i correspondant à un point x_i extrémité d'un élément (les points d'indice pair dans notre numérotation) dont le graphe a l'allure suivante :

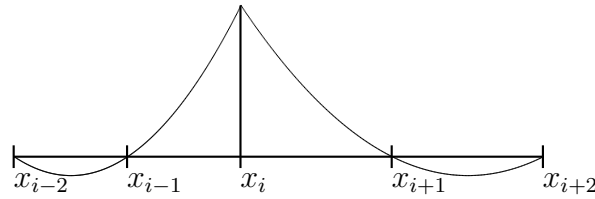


FIG. 6.3 – Fonction de base associée à une extrémité

et qui sont définies par

$$w_i|_{[x_{i-2}, x_i]}(x) = \frac{(x - x_{i-2})(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})} \quad (6.5)$$

$$w_i|_{[x_i, x_{i+2}]}(x) = \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} \quad (6.6)$$

$$w_i = 0 \text{ à l'extérieur de } [x_{i-2}, x_{i+2}] \quad (6.7)$$

Les fonctions de base correspondant à un point milieu d'un élément (points de numéros impair dans le cas de la figure) dont le graphe est le suivant :

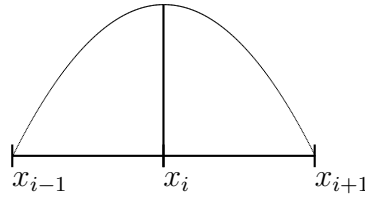


FIG. 6.4 – Fonction de base associée à un milieu

et qui sont définies par

$$w_i|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}(x) = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \quad (6.8)$$

$$w_i = 0 \text{ à l'extérieur de } [x_{i-1}, x_{i+1}] \quad (6.9)$$

6.1.1 Calcul des matrices et second membre élémentaires dans le cas d'éléments P2 en dimension un

Reprenons le problème modèle de Neumann homogène :

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha(x) u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u'(a) = 0 & u'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

avec α strictement positive sur $[a, b]$ telle que : $\alpha(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

La formulation variationnelle du problème de Neumann homogène s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ appartenant à } H^1[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b \alpha(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H^1[a, b] \end{cases} \quad (6.11)$$

Et le problème approché dans l'espace V_h engendré par les fonctions de base w_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2N} \text{ tels que } \forall i = 0, \dots, 2N \\ \sum_{j=0}^{j=2N} \left(\int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx + \int_a^b \alpha(x) w_j(x) w_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Le calcul des coefficients de la matrice de masse et du second membre fait intervenir la détermination des intégrales :

$$\int_a^b w_j(x) w_i(x) dx \quad (6.13)$$

Le calcul de la matrice de raideur nécessite l'évaluation des intégrales :

$$\int_a^b w'_j(x) w'_i(x) dx \quad (6.14)$$

Ces calculs se font, comme précédemment, par assemblage des contributions de chaque élément $T_i = [x_i, x_{i+2}]$ pour i pair. On va maintenant présenter une technique commode de calcul des matrices et second membre élémentaires dans le cas d'éléments d'ordre élevé. Cette technique consiste à ramener par un changement de variable les calculs sur un élément quelconque à un calcul simplifié sur un élément de référence bien choisi.

6.1.2 Technique de l'élément de référence

Par le changement de variable

$$x = x_{i+1} + \frac{x_{i+2} - x_i}{2} t \quad (6.15)$$

on passe de $t \in [-1, 1]$ à $x \in [x_i, x_{i+2}]$. Les fonctions de base dans $[x_i, x_{i+2}]$ se ramènent alors aux trois fonctions simples suivantes dans $[-1, 1]$:

$$\lambda_{-1}(t) = \frac{t(t-1)}{2} \quad \lambda_0(t) = -(t-1)(t+1) \quad \lambda_1(t) = \frac{t(t+1)}{2} \quad (6.16)$$

dont les dérivées sont respectivement égales à :

$$\frac{d\lambda_{-1}}{dt} = t - \frac{1}{2} \quad \frac{d\lambda_0}{dt} = -2t \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = t + \frac{1}{2} \quad (6.17)$$

6.1.3 Calcul de la matrice de masse élémentaire

Le calcul des coefficients de la matrice de masse se ramène, dans le cas α constante, à l'évaluation des intégrales

$$\int_{-1}^1 \lambda_i(t) \lambda_j(t) dt \quad \text{pour } i, j = -1, 0, 1 \quad (6.18)$$

On obtient ainsi la matrice de masse élémentaire suivante pour l'élément $[x_i, x_{i+2}]$

$$M_i = \frac{x_{i+2} - x_i}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{16}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

6.1.4 Calcul de la matrice de raideur élémentaire

Le calcul de la matrice de raideur fait intervenir les dérivées des fonctions w_i par rapport à x . Après changement de variable, elles s'expriment comme produit des dérivées des λ par rapport à t par la dérivée de t par rapport à x .

$$\frac{dw_i}{dx} = \frac{d\lambda_k}{dt} \frac{dt}{dx} \quad (6.20)$$

si λ_k est dans $[-1, 1]$ la fonction correspondant à la restriction de w_i dans $[x_i, x_{i+2}]$. On obtient ainsi :

$$K_i = \frac{2}{x_{i+2} - x_i} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-4}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-4}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-4}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

6.1.5 Calcul du second membre élémentaire

Chaque composante F_i du vecteur second-membre global

$$F_i = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad (6.22)$$

est calculée également par assemblage de contributions élémentaires $F_i^{(k)}$ selon :

$$F_i = \sum_{k=1}^{k=N} F_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) w_i(x) dx \quad (6.23)$$

où les $F_i^{(k)}$ désignent les contributions des éléments k .

Tout dépend alors de la donnée de f . Si f est donnée analytiquement, on peut parfois calculer les intégrales exactement à la main. Mais en général, f n'est connue que par ses valeurs aux points x_i pour $i = 0, 2N$. On écrit donc f dans la base des w_i selon :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{j=2N} f_j w_j(x) dx \quad (6.24)$$

On obtient :

$$F_i = \sum_{j=0}^{j=2N} f_j \left(\sum_{k=1}^{k=N} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} w_j(x) w_i(x) dx \right) \quad (6.25)$$

Le problème se ramène alors au calcul des intégrales :

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} w_j(x) w_i(x) dx \quad (6.26)$$

On retrouve des expressions calculées pour la matrice de masse. L'élément d'indice $k = i/2 + 1 : [x_i, x_{i+2}]$ (pour i pair) produira ainsi une contribution non nulle aux trois composantes d'indices $i, i + 1, i + 2$ selon

$$\begin{pmatrix} F_i^{(k)} \\ F_{i+1}^{(k)} \\ F_{i+2}^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{x_{i+2} - x_i}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{16}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

6.1.6 Intégration approchée. Condensation de masse

On verra plus loin qu'un calcul de l'erreur d'interpolation avec éléments finis $P2$ conduit à une majoration en h^2 selon

$$\|u - P_h u\|_{1,2} \leq C h^2 \max_{x \in [a,b]} |u'''(x)| \quad (6.28)$$

Il est par conséquent inutile de faire exactement tous les calculs d'intégrales. Ce qui est nécessaire, c'est

1) d'assurer la coercivité de la forme bilinéaire approchée après intégration numérique, donc l'existence et l'unicité de la solution approchée.

2) de conserver le même ordre global pour l'erreur. Donc de choisir une formule d'intégration numérique telle que l'erreur de quadrature soit du même ordre que l'erreur d'interpolation.

Dans le cas présent d'éléments $P2$, on choisira d'utiliser la formule de Simpson

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} \Phi(x) dx \approx \frac{x_{i+2} - x_i}{6} [\Phi(x_i) + 4\Phi(x_{i+1}) + \Phi(x_{i+2})] \quad (6.29)$$

qui est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Ceci donne un calcul exact pour les matrices de raideur élémentaires.

En ce qui concerne la matrice de masse élémentaire on obtient la forme approchée diagonale suivante :

$$M_i = \frac{x_{i+2} - x_i}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Dans de nombreuses applications, il sera commode d'utiliser une matrice de masse diagonale (ou condensée).

On obtient de même une écriture plus simple du second membre pour l'élément d'indice $k = i/2 + 1 : [x_i, x_{i+2}]$ (pour i pair) :

$$\begin{pmatrix} F_i^{(k)} \\ F_{i+1}^{(k)} \\ F_{i+2}^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{x_{i+2} - x_i}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

6.1.7 Technique d'assemblage

Supposons un maillage en N éléments T_k pour $k = 1, 2, \dots, N$ comme dans la figure 1.

Notons A la matrice globale à assembler (matrice de raideur ou de masse globale, second membre) et a_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k .

L'algorithme d'assemblage est très simple, dès lors que l'on dispose d'un tableau associant les points d'un élément T_k et les noeuds du maillage global.

Dans ce cas très simple d'éléments de degré deux en dimension un, chaque élément T_k comprend trois noeuds $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$.

D'où l'algorithme :

POUR K = 1, N FAIRE

POUR II = 1, 3 FAIRE
 POUR JJ = 1, 3 FAIRE

I = 2*K + II - 3
 J = 2*K + JJ - 3

A(I,J) = A(I,J) + a(ii,jj)

FIN DES 3 BOUCLES

Remarque : Les indices des coefficients de la matrice correspondent à la numérotation globale des inconnues adoptée. Ils vont donc de 0 à $2N$.

6.2 Éléments finis de Lagrange de degré k ou éléments P_k en dimension un

Comme dans les cas $P1$ et $P2$, considérons une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments T_i .

Choisissons comme espace V_h d'approximation, l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, et polynomiales de degré k sur chaque sous-intervalle. Un polynôme de degré k est fixé par ses valeurs en $k + 1$ points. On prend les extrémités et $k - 1$ points internes à chaque élément T_i . On est ainsi amené à considérer une discrétisation globale en $kN + 1$ points ou noeuds x_i pour $i = 0, \dots, kN$. L'erreur d'interpolation en norme H^1 est cette fois un infiniment petit en $O(h^k)$, si h est la mesure du plus grand des sous-intervalles.

Les calculs des matrices de raideur et de masse ainsi que le calcul du second membre se font comme précédemment et ne posent que des difficultés techniques.

Remarque importante :

Quel que soit le degré du polynôme d'interpolation utilisé dans chaque élément, les fonctions de V_h ne se raccordent, dans le cas d'éléments de Lagrange, que par leurs valeurs aux extrémités des éléments. On a donc uniquement la continuité des valeurs de la fonction inconnue et non celles de ses dérivées.

On parle d'éléments C^0

6.3 Éléments finis de Hermite cubiques en dimension un ou éléments poutres

6.3.1 Problème de la poutre encastrée

Dans certains problèmes, la continuité C^0 ne suffit plus et on demande des solutions approchées plus régulières. Considérons le problème d'une poutre encastrée en ses extrémités et soumise à un chargement d'intensité f .

$$\begin{cases} \frac{d^4}{dx^4}u(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = 0 & u'(a) = 0 & u(b) = 0 & u'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit dans $H_0^2[a, b]$, espace des fonctions de carré sommable, de dérivées première et seconde de carré sommables dans $[a, b]$, nulles et à dérivées premières nulles aux points a et b .

On vérifiera en exercice qu'après 2 intégrations par parties successives, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à } H_0^2[a, b] \text{ telle que :} \\ \int_a^b u''(x)v''(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx & \forall v \in H_0^2[a, b] \end{cases} \quad (6.33)$$

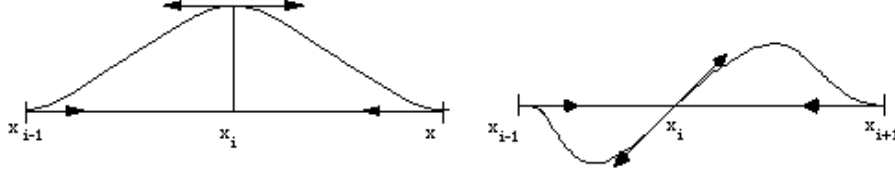
Les fonctions de $H^2[a, b]$ sont de classe C^1 , on va donc construire un espace V_h d'approximation interne de fonctions C^1 .

Discretisons l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments. On choisit pour V_h l'espace des fonctions continues à dérivées premières continues et polynomiales de degré trois par éléments.

Un polynôme de degré 3 est déterminé de manière unique par la donnée de ses valeurs et des valeurs de sa dérivée première aux deux points extrémités du sous-intervalle. Comme on a choisi les valeurs aux extrémités, le recollement global assurera la continuité C^1 des fonctions de V_h .

Chaque fonction de V_h est alors déterminée de manière unique par la donnée de ses valeurs et de celles de sa dérivée aux $N + 1$ points x_i de la discrétisation. V_h est de dimension $2N + 2$.

Si l'on considère maintenant le sous espace $V_{0,h} \subset H_0^2[a, b]$ des fonctions de V_h nulles et à dérivées nulles aux points a et b , il est de dimension $2N - 2$, et est

FIG. 6.5 – Graphe d'une fonction w_i Graphe d'une fonction θ_i

engendré par la double famille de fonctions de base w_i, θ_i définies par les $2N - 2$ conditions suivantes :

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad w'_i(x_j) = 0 \quad \forall i = 1, N-1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, N-1 \quad (6.34)$$

$$\theta_i(x_j) = 0 \quad \theta'_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, N-1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, N-1 \quad (6.35)$$

Une fonction v_h quelconque de $V_{0,h}$ s'écrit dans cette base :

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{i=N-1} v_i w_i(x) + v'_i \theta_i(x) \quad (6.36)$$

avec $v_i = v_h(x_i)$ et $v'_i = v'_h(x_i)$.

6.3.2 Écriture du problème approché

Ecrivons le problème approché dans $V_{0,h}$

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u_h \text{ appartenant à } V_{0,h} \text{ telle que} \\ \int_a^b u_h''(x) v_h''(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0,h} \end{cases} \quad (6.37)$$

Le problème étant linéaire, l'égalité est vraie pour tout v_h si elle est vraie pour une base de l'espace vectoriel $V_{0,h}$

$$\forall v_h \in V_{0,h} \iff \forall w_i \quad \text{et} \quad \forall \theta_i \quad \text{pour} \quad i = 1, N-1 \quad (6.38)$$

D'autre part, écrivons u_h , solution du problème approché dans $V_{0,h}$, dans la base des w_i, θ_i

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{j=N-1} (u_j w_j(x) + u'_j \theta_j(x)) \quad (6.39)$$

avec $u_j = u_h(x_j)$ et $u'_j = u'_h(x_j)$ valeurs de la solution approchée et de sa dérivée au point (x_j)

On obtient l'écriture suivante du problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_1, u'_1, u_2, u'_2, \dots, u_{N-1}, u'_{N-1} \text{ tels que } \forall i = 1, N-1 \\ \sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\int_a^b w_j''(x) w_i''(x) dx \right) u_j + \int_a^b \theta_j''(x) w_i''(x) dx u'_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \\ \sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\int_a^b w_j''(x) \theta_i''(x) dx \right) u_j + \left(\int_a^b \theta_j''(x) \theta_i''(x) dx \right) u'_j = \int_a^b f(x) \theta_i(x) dx \end{array} \right. \quad (6.40)$$

En posant pour i et $j = 1, N-1$

$$\int_a^b f(x) w_i(x) dx = F_{2i-1} \quad (6.41)$$

$$\int_a^b f(x) \theta_i(x) dx = F_{2i} \quad (6.42)$$

et

$$\int_a^b w_j''(x) w_i''(x) dx = A_{2i-1, 2j-1} \quad (6.43)$$

$$\int_a^b \theta_j''(x) \theta_i''(x) dx = A_{2i, 2j} \quad (6.44)$$

$$\int_a^b w_j''(x) \theta_i''(x) dx = A_{2i, 2j-1} \quad (6.45)$$

$$\int_a^b \theta_j''(x) w_i''(x) dx = A_{2i-1, 2j} \quad (6.46)$$

ceci donne

$$\sum_{J=1}^{J=2N-2} A_{I,J} U_J = F_I \quad \forall I = 1, 2N-2 \quad (6.47)$$

où on a posé

$$U_J = u_j \quad \text{avec } J = 2j-1 \quad (6.48)$$

et

$$U_J = u'_j \quad \text{avec } J = 2j \quad (6.49)$$

On a ainsi obtenu un système linéaire de $2N-2$ équations à $2N-2$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A U = F \quad (6.50)$$

6.3.3 Calcul des matrices et second membre élémentaires pour l'élément de Hermite cubique

En adoptant la technique de l'élément de référence, on se ramène sur l'intervalle $[0, 1]$. Par le changement de variable

$$x = x_i + (x_{i+1} - x_i) t \quad (6.51)$$

on passe de $t \in [0, 1]$ à $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Les restrictions des fonctions de base w_j, θ_j dans un élément quelconque $[x_i, x_{i+1}]$ tel que $x_{i+1} - x_i = h_i$ se ramènent alors sur $[0, 1]$ aux 4 fonctions simples $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ suivantes :

$$\lambda_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad \lambda_1(t) = 3t^2 - 2t^3 \quad (6.52)$$

et après avoir remarqué que

$$\frac{d\theta_i}{dx} = \frac{d\mu_k}{dt} \frac{1}{h_i} \quad (6.53)$$

si μ_k est dans $[0, 1]$ la fonction correspondant à la restriction de θ_i dans $[x_i, x_{i+1}]$

$$\mu_0(t) = h_i t(t-1)^2 \quad \mu_1(t) = h_i (t^3 - t^2) \quad (6.54)$$

Leurs dérivées secondes sont respectivement

$$\lambda_0''(t) = 12t - 6 \quad \lambda_1''(t) = 6 - 12t \quad (6.55)$$

$$\mu_0''(t) = h_i (6t - 4) \quad \mu_1''(t) = h_i (6t - 2) \quad (6.56)$$

D'où,

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = \frac{d^2 \lambda_k}{dt^2} \frac{1}{h_i^2} \quad (6.57)$$

si λ_k est dans $[0, 1]$ la fonction correspondant à la restriction de w_i dans $[x_i, x_{i+1}]$, et de même

$$\frac{d^2 \theta_i}{dx^2} = \frac{d^2 \mu_k}{dt^2} \frac{1}{h_i^2} \quad (6.58)$$

si μ_k est dans $[0, 1]$ la fonction correspondant à la restriction de θ_i dans $[x_i, x_{i+1}]$. On obtient en définitive l'expression suivante de la matrice élémentaire relative à un élément $[x_i, x_{i+1}]$ tel que $x_{i+1} - x_i = h_i$

$$K_i = \frac{1}{h_i^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h_i & -12 & 6h_i \\ 6h_i & 4h_i^2 & -6h_i & 2h_i^2 \\ -12 & -6h_i & 12 & -6h_i \\ 6h_i & 2h_i^2 & -6h_i & 4h_i^2 \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

Chapitre 7

Formulations variationnelles en dimension deux

7.1 Rappels

7.1.1 Opérateurs différentiels en dimension deux

Soit u une fonction de 2 variables (x, y) à valeurs réelles définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 . On appelle gradient de u et on note $\mathbf{grad}(u)$ ou ∇u , le vecteur :

$$\mathbf{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Soit \mathbf{V} une fonction vectorielle de 2 variables (x, y) définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 et à valeurs V_1, V_2 dans \mathbb{R} . On appelle divergence du vecteur \mathbf{V} et on note $div(\mathbf{V})$ ou $\nabla \cdot \mathbf{V}$, le scalaire :

$$div(\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

Soit u une fonction de 2 variables (x, y) à valeurs réelles définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 . On appelle laplacien de u et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = div(\mathbf{grad}(u)) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

7.1.2 Intégrales doubles et changement de variables.

On rappelle que pour un changement de variables correspondant à une transformation $(x, y) \in \Omega \longrightarrow (s, t) \in D$ définie par :

$$x = f_1(s, t) \quad y = f_2(s, t)$$

on appelle déterminant jacobien de la transformation le déterminant :

$$J(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

que l'on note également : $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$

On a alors l'égalité :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(x(s, t), y(s, t)) \left| \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \right| ds dt$$

7.1.3 Intégrales curvilignes.

Soit une courbe C d'extrémités A et B et de longueur L , orientée de A vers B . On note $s(M)$ l'abscisse curviligne d'un point M de C . Soit f une fonction qui à tout point M de C associe le réel $f(M) = f(s)$. On définit l'intégrale curviligne de f sur C par l'intégrale simple suivante :

$$\int_C f(M) ds = \int_0^L f(s) ds$$

Si C admet une représentation paramétrique de paramètre t , nous aurons, en posant $f(s(t)) = g(t)$:

$$\int_C f(M) ds = \int_{t_A}^{t_B} g(t) \frac{ds}{dt} dt$$

où t_A et t_B sont respectivement les valeurs du paramètre t associées aux points A et B de la courbe C .

7.1.4 Formules de Green

Formule de base

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière Γ, C^1 par morceaux, et u et v fonctions de $H^1(\Omega)$, on a l'égalité suivante pour chaque composante $i = 1, 2$:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx_1 dx_2 = - \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u \, dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} u \nu_i v \, d\gamma$$

avec ν_i , i^{ieme} composante du vecteur normal unitaire à Γ orienté vers l'extérieur de Ω et noté ν et γ abscisse curviligne sur Γ orientée dans le sens direct.

4.2 Conséquences

En notant en caractère gras les vecteurs (en particulier \mathbf{u} désigne ici un vecteur), on déduit aisément les formules suivantes :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} v \, dx dy = - \iint_{\Omega} \mathbf{u} \operatorname{grad} v \, dx dy + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \nu v \, d\gamma$$

et en posant $\mathbf{u} = a \operatorname{grad}(u)$ où a est une fonction $L^\infty(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \operatorname{grad}(u) \cdot \nu$:

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(a \operatorname{grad} u) v \, dx dy = - \iint_{\Omega} a \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx dy + \int_{\Gamma} a \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\gamma$$

Enfin dans le cas $a = 1$ on obtient la formule classique :

$$- \iint_{\Omega} \Delta u v \, dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\gamma$$

7.2 Équation elliptique linéaire

L'exemple le plus simple d'EDP elliptique linéaire est l'équation de Poisson.

$$-\Delta u = f$$

Cette équation modélise de nombreux problèmes d'équilibre stationnaire. Elle se généralise sous la forme

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad}) u = f \tag{7.1}$$

pour des coefficients variables. Voici quelques problèmes physiques classiques dont elle sert de modèle.

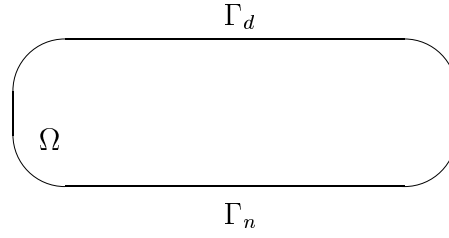


FIG. 7.1 – Température sur une plaque

7.2.1 Conduction thermique

On considère une plaque plane Ω de frontière Γ dont une partie Γ_d est à température connue T_d et une partie Γ_n est isolée thermiquement. La température T à l'équilibre vérifie l'équation

$$\begin{cases} -K \Delta T(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ T|_{\Gamma_d}(x, y) = T_d(x, y) \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma_n}(x, y) = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

K est le coefficient de conductivité thermique (la propagation de la chaleur augmente avec K) et f représente une source volumique de chaleur (sous forme d'une densité de puissance). Si K est variable, l'équation se généralise sous la forme

$$-\text{div}(K \text{grad})T = f$$

7.2.2 Membrane élastique

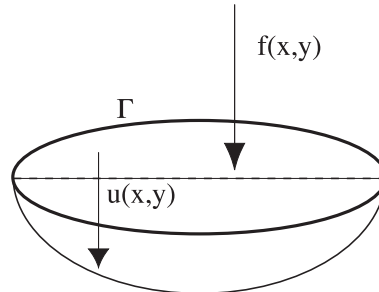


FIG. 7.2 – Membrane élastique

On considère une membrane élastique plane Ω fixée sur son pourtour Γ . On suppose la membrane soumise en tout point (x, y) à une densité de forces f s'exerçant perpendiculairement au plan de la membrane. Sous l'action de f chaque point de la membrane subit un petit déplacement. Le déplacement transversal, perpendiculaire au plan de Ω est l'inconnue u de ce problème et vérifie l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ u|_{\Gamma}(x, y) = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

7.2.3 Mécanique des fluides parfaits

Soit Ω le domaine interne d'une tuyère, on considère l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait, incompressible non-visqueux, à l'intérieur de cette tuyère. L'écoulement étant incompressible, il est à divergence nulle et donc le vecteur vitesse \mathbf{u} du fluide peut s'écrire comme le rotationnel d'une fonction ψ dite fonction de courant. On a :

$$\mathbf{u} = \text{rot } \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (7.4)$$

Les lignes iso- ψ sont les lignes de courant du fluide. La fonction de courant ψ

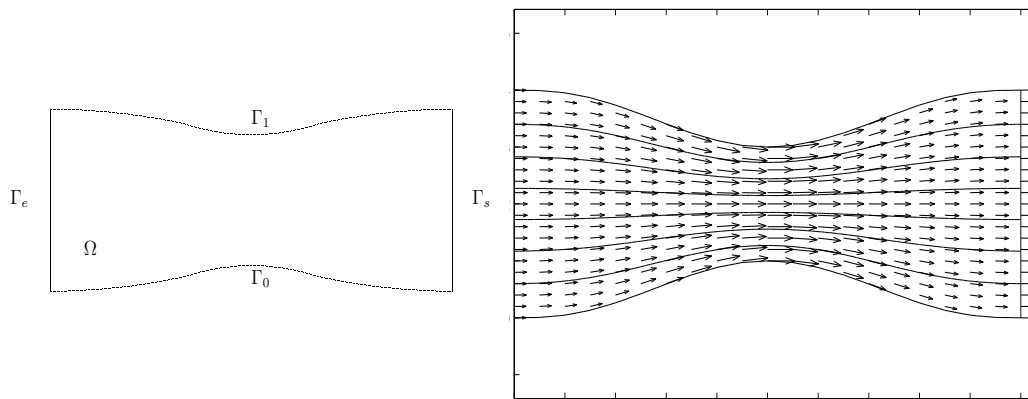


FIG. 7.3 – Écoulement incompressible.

vérifie également une équation de Poisson, qui s'écrit dans le cas d'un écoulement

irrotationnel (cas d'un profil de vitesse horizontal constant en entrée) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \psi(x, y) = 0 \quad \forall x, y \in \Omega \\ \psi|_{\Gamma_0}(x, y) = 0 \\ \psi|_{\Gamma_1}(x, y) = 1 \\ \psi|_{\Gamma_e}(x, y) = y \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma_s}(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (7.5)$$

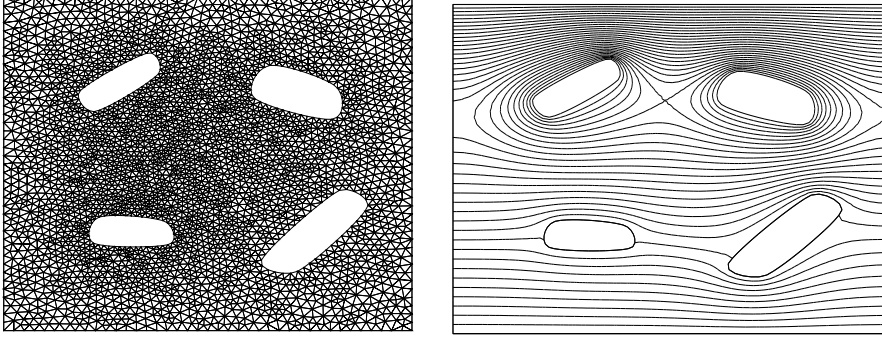


FIG. 7.4 – Distribution du potentiel électrostatique autour de quatre conducteurs. Les conditions aux limites de Dirichlet se reconnaissent par des iso-valeurs parallèles à la frontière. Celles de Neumann homogènes le sont par des lignes de niveau normales à celle-ci, tandis que les conditions de Neumann non-homogène génèrent des iso-lignes obliques à la paroi.

La même équation se retrouve dans de nombreux domaines de la physique : on l'a vu en thermique, en calcul de la déformation d'une membrane sous une charge, en écoulement potentiel en mécanique des fluides incompressibles. La figure 7.4 présente la distribution du potentiel électrostatique dans un milieu non-conducteur. En résumé, cette équation modélise les problèmes d'équilibre ou de minimisation d'énergie.

7.2.4 Principe du maximum et unicité

La solution du problème de Dirichlet (Ω borné) :

$$-\Delta u = 0 \quad x \in \Omega, \quad u = g \quad x \in \partial\Omega.$$

est une fonction harmonique (son laplacien est nul). Les extrema de u sont atteints sur la frontière. Cela s'appelle le principe du maximum. En dimension un, il est facile de le vérifier car u est affine ($u = ax + b$). En dimensions supérieures, supposons que le maximum soit atteint en un point $x \in \overline{\Omega} - \partial\Omega$. Alors, en ce point, toutes les dérivées partielles secondes sont négatives, ce qui est incompatible avec l'équation :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Le principe du maximum permet d'obtenir l'unicité de la solution. En effet, considérons u_1 et u_2 deux solutions distinctes. Alors, $u = u_1 - u_2$ sera solution du problème de Dirichlet suivant :

$$-\Delta u = 0 \quad x \in \Omega, \quad u = 0 \quad x \in \partial\Omega.$$

Or, d'après le principe de maximum $u = u_1 - u_2 = 0$.

7.2.5 Propriété de la moyenne

La valeur d'une fonction harmonique en tout point M est la moyenne de ses valeurs sur la surface de toute sphère (cercle en 2D) de centre M . La démonstration est basée sur la troisième formule de Green. Cette propriété fondamentale explique pourquoi le laplacien se retrouve dans les modèles d'équilibre. Une grandeur en un point donné (température, potentiel électrique, déplacement) s'établira, à l'équilibre, en l'absence de sollicitations extérieures, à la moyenne des valeurs aux points qui l'entourent. On remarquera, plus loin, que les formules d'approximations, par différences finies par exemple, du laplacien, vérifient également cette propriété de la moyenne.

7.3 Problèmes elliptiques en dimensions supérieures

Nous présenterons le cas de la dimension deux d'espace. Mais tout ce qui suit se généralise sans difficulté conceptuelle à la dimension trois. Par contre, il est clair que la discrétisation et l'implémentation pratique sont beaucoup plus complexes pour les problèmes tridimensionnels.

On introduit, comme en dimension un, un produit scalaire de 2 fonctions selon :

$$(v, w) = \iint_{\Omega} v(x, y) w(x, y) dx dy$$

et l'espace $L^2[\Omega]$ des fonctions de carré sommable sur Ω , c'est à dire telles que l'intégrale suivante existe :

$$\iint_{\Omega} v^2(x, y) dx dy$$

Soit $H^1[\Omega]$ l'espace des fonctions v , de carré sommable et dont les dérivées partielles sont également de carré sommable, et soit $H_0^1[\Omega]$ l'espace des fonctions v de $H^1[\Omega]$ "nulles" sur la frontière Γ de Ω (Les fonctions de $H^1[\Omega]$ ne sont pas continues pour Ω de dimension deux et trois, les valeurs nulles sont définies au sens des traces, voir bibliographie)

On utilisera la formule de Green (équivalente à l'intégration par parties en dimension un) pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:

$$-\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma$$

7.3.1 Problème de Dirichlet homogène

Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 de frontière Γ , on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Formulation variationnelle

On cherche une solution u fixée à zéro sur la frontière. On écrit donc la formulation variationnelle du problème dans l'espace $H_0^1(\Omega)$. Après multiplication par $v(x, y)$ et intégration on obtient :

$$-\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \iint_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On utilise alors la formule de Green et on obtient :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v dx dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma = \iint_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Le terme d'intégrale de bord sur Γ disparaît puisqu'on a pris des fonctions tests v nulles au bord, et on obtient enfin le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v dx dy = \iint_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (7.7)$$

Existence et unicité du problème

Ce problème s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (7.8)$$

avec $V = H_0^1(\Omega)$: espace de Hilbert

$a : u, v \longrightarrow a(u, v) = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dxdy$ forme bilinéaire symétrique sur V

$l : v \longrightarrow l(v) = \iint_{\Omega} f v \, dxdy$ forme linéaire sur V .

La démonstration de l'existence et de l'unicité se fait par l'utilisation du théorème de Lax-Milgram. On vérifie

1) la continuité de a :

$$|a(u, v)| \leq \left| \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dxdy \right| \leq \|\mathbf{grad} u\|_{0,2} \|\mathbf{grad} v\|_{0,2} \leq \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}$$

2) l'ellipticité de a :

$$a(v, v) = \iint_{\Omega} (\mathbf{grad} v)^2 \, dxdy \geq C(\Omega) \|v\|_{1,2}^2$$

grâce à l'inégalité de Poincaré en dimension deux vérifiée pour $v \in H_0^1(\Omega)$.

3) la continuité de l :

$$|l(v)| = \left| \iint_{\Omega} f v \, dxdy \right| \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{0,2} \leq \|f\|_{0,2} \|v\|_{1,2}$$

Dès lors qu'il vérifie toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Comme de plus la forme bilinéaire a est symétrique, cette solution réalise le minimum de l'énergie $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$ soit ici :

$$J(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\mathbf{grad} v)^2 \, dxdy - \iint_{\Omega} f v \, dxdy \quad (7.9)$$

Retour à la forme différentielle

Pour montrer que la solution u obtenue est solution forte, c'est à dire solution du problème (7.6) dans le cas où elle est suffisamment régulière (C^2), il suffit comme en dimension un d'intégrer "par parties", c'est à dire d'utiliser la formule

de Green, à l'envers. On obtient alors le résultat suivant : u solution du problème dans $H_0^1(\Omega)$, donc nulle au bord vérifie

$$-\iint_{\Omega} \Delta u \, v \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f \, v \, dx \, dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ceci entraîne par densité :

$$-\iint_{\Omega} (\Delta u + f) \, v \, dx \, dy = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

et donc $-\Delta u = f$ au sens de L^2 . Si $u \in C^2(\Omega)$ on en déduit l'égalité au sens fort.

7.3.2 Problème de Dirichlet non-homogène

Dans ce cas les valeurs de la solution sont fixées mais non nécessairement nulles sur la frontière. Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 de frontière Γ , on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = u_d \end{cases} \quad (7.10)$$

Comme en dimension un, on se ramène au problème homogène en introduisant une fonction auxiliaire simple prenant les valeurs imposées sur la frontière Γ : $u_{0|_{\Gamma}} = u_d$ et à poser $u = \tilde{u} + u_0$. Le problème se ramène alors à un problème de Dirichlet homogène pour la nouvelle inconnue \tilde{u} , soit :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}(x, y) = f(x, y) + \Delta u_0(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ \tilde{u}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } & \forall v \in H_0^1(\Omega) : \\ \iint_{\Omega} \mathbf{grad} \tilde{u} \mathbf{grad} v \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f \, v \, dx \, dy - \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u_0 \mathbf{grad} v \, dx \, dy \end{cases} \quad (7.11)$$

On verra plus loin, lors de l'approximation par éléments finis de ce problème, quel est le bon choix pratique de la fonction u_0 . Nous renvoyons à la remarque ?? pour le choix de l'espace des fonctions tests, qui est ici, comme dans le cas monodimensionnel, l'espace H_0^1 .

On démontre également, dans le cas Dirichlet non-homogène, l'existence et l'unicité de la solution, par la vérification des hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

7.4 Problème de Neumann en dimension deux

Il s'agit de problèmes où les conditions aux limites sur Γ portent sur la dérivée normale de la solution. Ces conditions modélisent la donnée physique d'une force ou d'un flux sur Γ . On considère le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \alpha(x, y) u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g \end{cases} \quad (7.12)$$

Formulation variationnelle

Les valeurs de u sur Γ sont ici des inconnues du problème. La formulation variationnelle s'écrit dans l'espace $H^1[\Omega]$.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dxdy + \iint_{\Omega} \alpha u v \, dxdy = \iint_{\Omega} f v \, dxdy + \int_{\Gamma} g v \, d\gamma \end{cases}$$

Existence et unicité du problème

On suppose que la fonction $\alpha \in L^\infty[\Omega]$ est minorée sur Ω par un nombre m **strictement** positif et majoré par un réel M et que $g \in L^2[\Gamma]$. La démonstration de l'existence et de l'unicité se fait par l'utilisation du théorème de Lax-Milgram. On vérifie dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$

1) la continuité de la forme bilinéaire symétrique :

$$\left| \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dxdy + \iint_{\Omega} \alpha u v \, dxdy \right| \leq \max(1, M) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}$$

2) l'ellipticité de la forme bilinéaire symétrique :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} v^2 \, dxdy + \iint_{\Omega} \alpha v^2 \, dxdy \geq \min(1, m) \|v\|_{1,2}^2$$

3) la continuité de la forme linéaire :

$$\left| \iint_{\Omega} f v \, dxdy + \int_{\Gamma} g v \, d\gamma \right| \leq (\|f\|_{0,2,\Omega} + \|g\|_{0,2,\Gamma}) \|v\|_{1,2,\Omega}$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, le problème admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ qui réalise également, puisque la forme bilinéaire est symétrique, le minimum de l'énergie :

$$J(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\mathbf{grad} v)^2 \, dxdy - \iint_{\Omega} f v \, dxdy - \int_{\Gamma} g v \, d\gamma$$

dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 7.4.1 Dans le cas $\alpha = 0$, comme en dimension un, on n'a plus ellipticité de a , le problème est mal posé. Il est d'ailleurs clair qu'alors, la fonction inconnue u n'apparaissant dans le problème que par l'intermédiaire des valeurs de ses dérivées, on a une infinité de solutions à une constante additive près. Il y a, de plus, une condition de compatibilité entre le second membre et les conditions aux limites de Neumann à vérifier pour avoir une solution. En effet, par la formule de Stokes, on a

$$\iint_{\Omega} \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma$$

ce qui impose

$$\iint_{\Omega} f dx dy + \int_{\Gamma} g d\gamma = 0$$

Retour à la forme différentielle

Pour montrer que la solution u obtenue est solution forte, c'est à dire solution du problème différentiel dans le cas où elle est suffisamment régulière (C^2), il suffit d'utiliser la formule de Green, à l'envers.

On obtient alors le résultat suivant : u solution du problème dans $H^1(\Omega)$ vérifie

$$\iint_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u) v dx dy + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v d\gamma = \iint_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ceci entraîne en choisissant v dans $H_0^1(\Omega)$ puis par densité dans $L^2(\Omega)$:

$$\iint_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u - f) v dx dy = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

et donc $-\Delta u + \alpha u = f$ au sens de L^2 . Puis :

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v d\gamma = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

donc la vérification de la condition aux limites de Neuman, mais au sens faible, c'est à dire au sens de L^2 . Si $u \in C^2(\Omega)$ on en déduit l'égalité et la vérification du problème de Neuman non-homogène au sens fort.

7.5 Problème de Fourier en dimension deux

Les conditions aux limites de Fourier expriment une relation affine entre u et sa dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur la frontière Γ . Elles incluent comme cas particulier les

conditions de Neumann et permettent dans la pratique de modéliser les conditions de Dirichlet par une technique de pénalisation en prenant un coefficient d'échange k très grand. On considère le problème de Fourier suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \alpha(x, y) u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -k(u - u_0) + \beta & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (7.13)$$

Formulation variationnelle de ce problème

La formulation de ce problème s'écrit dans $H^1(\Omega)$ tout entier. En multipliant scalairement dans $L^2(\Omega)$ par v et en utilisant la formule de Green on obtient la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dx dy + \iint_{\Omega} \alpha u v \, dx dy + \int_{\Gamma} k u v \, d\gamma \\ \qquad \qquad \qquad = \iint_{\Omega} f v \, dx dy + \int_{\Gamma} (k u_0 + \beta) v \, d\gamma \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Existence et unicité du problème

On suppose que la fonction α est minorée sur Ω par un nombre m **strictement** positif et majorée par un réel M et que k est un réel positif. La démonstration de l'existence et de l'unicité se fait sans difficulté par l'utilisation du théorème de Lax-Milgram.

Remarque 7.5.1 *On a également ellipticité de a et donc existence et unicité si $\alpha = 0$ et $k > 0$. Ceci permet en particulier de justifier l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas du traitement pratique des conditions de Dirichlet comme des conditions de Fourier avec k très grand.*

Chapitre 8

Éléments finis bidimensionnels

8.1 Rappel de la formulation générale abstraite

Tous les problèmes bidimensionnels précédents, comme les problèmes monodimensionnels résolus par éléments finis lors du chapitre précédent, peuvent s'écrire sous la forme générale du problème P suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à l'Hilbert } V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (8.1)$$

avec V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme associée $\|\cdot\|$, a une forme bilinéaire continue et elliptique sur V et l une forme linéaire continue sur V . Le théorème de Lax-Milgram conduit alors aux conclusions suivantes :

- 1) Le problème P admet une solution unique u dans V
- 2) Si la forme bilinéaire a est symétrique, le problème variationnel (P) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ qui réalise le minimum de la forme quadratique} \\ J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \end{array} \right. \quad (8.2)$$

8.2 Approximation interne du problème

On doit maintenant construire un sous-espace $V_h \subset V$ de dimension finie dans lequel s'écrira le problème approché P_h :

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u_h \text{ appartenant à l'espace } V_h \text{ telle que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (8.3)$$

Ce problème admet également une solution unique car $V_h \subset V$, et donc les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont également vérifiées dans V_h .

Si la forme bilinéaire a est symétrique le problème variationnel P_h est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ qui réalise le minimum de la forme quadratique} \\ J(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - l(v_h) \end{array} \right. \quad (8.4)$$

et on a donc évidemment

$$J(u_h) \geq J(u)$$

8.3 Maillage

Dans la méthode des éléments finis, la construction du sous-espace V_h nécessite la discrétisation préalable du domaine Ω en éléments géométriques simples.

En dimension un, la discrétisation préalable du domaine, un intervalle de \mathbb{R} , en éléments, ne posait pas de difficultés. En dimension deux et plus encore en dimension trois, la discrétisation du domaine Ω est un problème technique difficile. La qualité du maillage est cruciale pour la qualité de l'approximation. Le problème de la réalisation du maillage se pose à la fois en amont de la résolution numérique, qui s'appuie sur une discrétisation a priori, et en aval dans les techniques de maillages adaptatifs par lesquelles on s'efforce d'améliorer la qualité de la discrétisation en fonction des résultats obtenus.

L'exposé des techniques mises en oeuvre pour construire un maillage en éléments finis dépasse le cadre de ce cours et nous renvoyons à la littérature (notamment P.L.George : Génération automatique de maillages.).

Disons simplement que l'on peut distinguer deux types de maillages :

- Les maillages structurés qui fournissent une discrétisation “régulière” obtenue par transformation d'une grille régulière sur un domaine rectangulaire.
- Les maillages non-structurés, principalement construits par la méthode de Delaunay-Voronoi, qui peuvent s'appliquer aux géométries les plus générales.

En dimension deux, les éléments sont des triangles ou des quadrangles de côtés droits ou curvilignes. En dimension trois, ce sont des tétraèdres, pentaèdres ou hexaèdres.

Un maillage en éléments finis doit satisfaire les critères suivants :

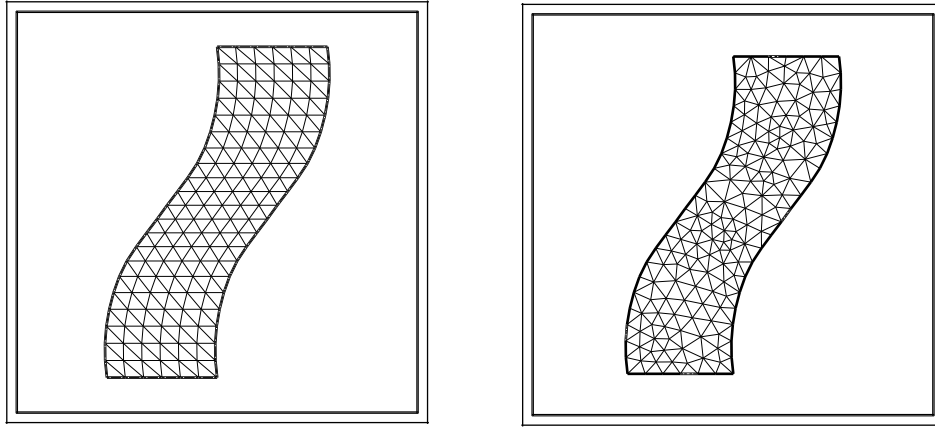


FIG. 8.1 – Maillage structuré et maillage non-structuré

- 1) Les éléments K_i du maillage doivent recouvrir le domaine Ω

$$\bigcup_i K_i = \bar{\Omega}$$

Ceci implique que, par exemple en dimension deux, ce domaine soit polygonal ou approché par un polygone si l'on utilise des éléments droits.

- 2) L'intersection de deux éléments distincts ne peut être que
- l'ensemble vide
 - un sommet
 - un côté
 - une face (en dimension trois)

Ceci a pour but d'assurer la continuité des fonctions de V_h , on parle alors d'éléments **conformes**. En particulier la disposition présentée dans la figure 8.2 est interdite.

8.4 Éléments finis de Lagrange triangulaires de degré un : les éléments finis P1

Dans ce cas l'espace d'approximation V_h est un espace de fonctions continues affines par éléments triangulaires. Dans chaque triangle, la restriction des fonc-

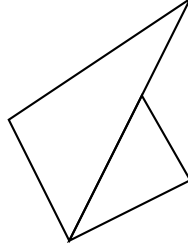


FIG. 8.2 – Configuration interdite

tions de V_h est donc un polynôme de degré un de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 y$ qui est donc déterminé de façon unique par ses valeurs en trois points distincts. On choisit les trois sommets du triangle. Ceci assure la continuité globale des fonctions de V_h sur le domaine polygonal Ω . En effet sur chaque arête commune à deux triangles adjacents, les restrictions des fonctions de V_h sont des fonctions affines fixées de manière unique par la donnée de leurs valeurs aux deux sommets sur l'arête. Globalement les fonctions de V_h seront uniquement déterminées par

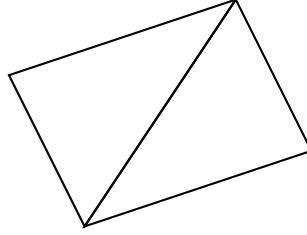


FIG. 8.3 – Deux éléments adjacents

leurs valeurs aux sommets ou noeuds de la triangulation. **La dimension totale de V_h est donc égale au nombre de noeuds du maillage.** Dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière, la dimension de V_h est évidemment réduite au nombre des noeuds associés à une valeur inconnue de la solution. Elle est donc égale au nombre de noeuds total moins le nombre de noeuds où la solution est fixée par une condition de Dirichlet.

8.4.1 Les fonctions de base P1

La construction d'une base de V_h se fait selon la technique classique de Lagrange. On prend comme fonctions de base les N fonctions w_I de V_h définies par les N conditions suivantes aux N noeuds (x_I, y_I) du maillage :

$$w_I(x_J, y_J) = \delta_{IJ}$$

On remarquera que ses fonctions ont un support réduit à l'union des triangles dont le point (x_I, y_I) est un sommet. Dans cette base une fonction de V_h s'écrit :

$$v_h(x, y) = \sum_I v_I w_I(x, y)$$

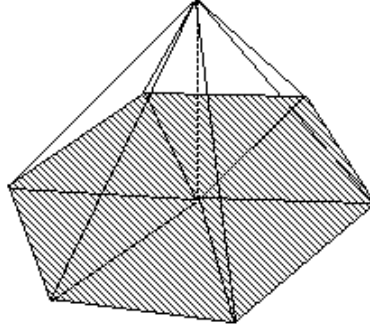


FIG. 8.4 – Une fonction de base P1

8.4.2 Les fonctions de forme P1

On appellera fonctions de forme les restrictions des fonctions de base dans un élément. Dans chaque triangle T de sommets A_1, A_2, A_3 , il n'y a que 3 fonctions de base non-nulles. Les restrictions de ces fonctions de base $w_{I_1}, w_{I_2}, w_{I_3}$ sont les trois fonctions polynomiales de degré un prenant la valeur 1 en un des sommets et nulles aux deux autres sommets. Notons les respectivement $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

λ_1 est le polynôme de degré un prenant la valeur 1 en A_1 et nul en A_2 et A_3 .

$$\lambda_1(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

λ_1 est donc déterminé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1, y_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 = 1 \\ \lambda_1(x_2, y_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 = 0 \\ \lambda_1(x_3, y_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2.Aire(T)$$

est différent de zéro si les points A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés.

En résolvant le système 3×3 ci-dessus et les systèmes analogues pour λ_2 et λ_3 on obtient les formules suivantes :

$$\lambda_1(x, y) = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)}{2 \text{ Aire}(T)} \quad (8.5)$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)}{2 \text{ Aire}(T)} \quad (8.6)$$

$$\lambda_3(x, y) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)}{2 \text{ Aire}(T)} \quad (8.7)$$

On en déduit les expressions suivantes des gradients :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2 \text{ Aire}(T)} \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2 \text{ Aire}(T)} \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2 \text{ Aire}(T)} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2 \text{ Aire}(T)} \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2 \text{ Aire}(T)} \quad \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2 \text{ Aire}(T)} \quad (8.10)$$

Les trois fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ s'appellent les coordonnées barycentriques du triangle T . On les désigne sous le nom “area coordinates” en anglais car elles représentent en chaque point M de coordonnées x, y le rapport des aires algébriques des triangles $MA_i A_j$ et T . Par exemple

$$\lambda_1(M) = \frac{\text{Aire}(A_2 A_3 M)}{\text{Aire}(T)}$$

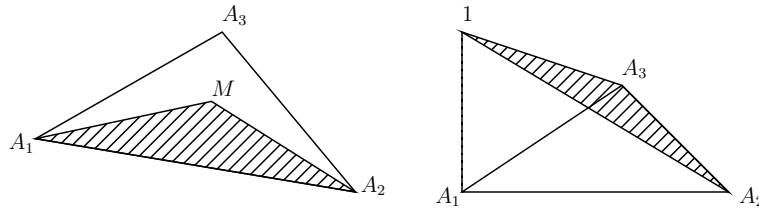


FIG. 8.5 – Deux représentations de la fonction λ_1

Une fonction quelconque de V_h prenant les valeurs v_1, v_2, v_3 aux sommets A_1, A_2, A_3 du triangle T s'écrit dans T sous la forme

$$v_h(x, y) = v_1 \lambda_1(x, y) + v_2 \lambda_2(x, y) + v_3 \lambda_3(x, y)$$

8.5 Application à un problème elliptique modèle

Soit Ω un domaine borné polygonal de \mathbb{R}^2 de frontière Γ . Supposons Γ constituée de deux parties Γ_0 et Γ_1 , $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Sur Γ_0 sont imposées des conditions de Dirichlet.

Sur Γ_1 sont imposées des conditions de Neumann.

Nous obtenons le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ u|_{\Gamma_0} = u_d \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = g \end{cases} \quad (8.11)$$

8.5.1 Formulation variationnelle de ce problème

La formulation du problème s'écrit dans l'espace V des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur la partie Γ_0 de la frontière. On se ramène aux conditions de Dirichlet homogènes sur Γ_0 en introduisant une fonction auxiliaire simple prenant les valeurs imposées sur la frontière Γ_0 : $u_0|_{\Gamma_0} = u_d$ et en posant $u = \tilde{u} + u_0$. On obtient le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in V \text{ telle que : } \forall v \in V \\ \iint_{\Omega} \mathbf{grad} \tilde{u} \mathbf{grad} v \, dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy - \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u_0 \mathbf{grad} v \, dx dy + \int_{\Gamma_1} g v \, d\gamma \end{cases}$$

Ce problème s'écrit sous la forme générale standard :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in V \text{ telle que :} \\ a(\tilde{u}, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

avec $a : u, v \longrightarrow a(u, v) = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v \, dx dy$: forme bilinéaire symétrique sur V

$l : v \longrightarrow l(v) = \iint_{\Omega} f v \, dx dy - \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u_0 \mathbf{grad} v \, dx dy + \int_{\Gamma_1} g v \, d\gamma$: forme linéaire sur V .

8.5.2 Écriture du problème approché en éléments finis P1

Le problème approché s'écrit dans l'espace V_h des fonctions continues affines par triangles et nulles sur la partie Γ_0 de la frontière. Notons \mathbf{I} l'ensemble des indices des noeuds du maillage correspondants à une valeur inconnue de la solution u . C'est à dire ici l'ensemble des noeuds n'appartenant pas à Γ_0 . Notons \mathbf{J} l'ensemble des indices des sommets du maillage appartenant à Γ_0 .

La solution \tilde{u}_h s'écrit dans la base des w_J pour $J \in \mathbf{I}$ selon :

$$\tilde{u}_h(x, y) = \sum_{J \in \mathbf{I}} u_J w_J(x, y)$$

La fonction auxiliaire u_0 sera approchée par une fonction $u_{0,h}$ continue et affine par morceaux prenant les valeurs imposées sur Γ_0 et nulle sur tous les noeuds d'indices $J \in \mathbf{I}$

$$u_{0,h}(x, y) = \sum_{J \in \mathbf{J}} u_d(x_J, y_J) w_J(x, y)$$

Ce choix de $u_{0,h}$ présente deux avantages :

- 1) La solution cherchée u_h et la solution calculée \tilde{u}_h prennent les mêmes valeurs aux points où la solution u est inconnue. Il n'y a donc pas de transformation a posteriori à effectuer sur les résultats.
- 2) Les conditions aux limites ne produisent qu'une modification limitée du système linéaire qui n'intervient que sur quelques composantes du second-membre.

En intégrant dans la formulation variationnelle tous ces éléments on obtient en définitive le problème approché dans V_h

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les valeurs } u_J \text{ pour } J \in \mathbf{I} \text{ telles que :} \\ \sum_{J \in \mathbf{I}} \left(\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy \right) u_J = \iint_{\Omega} f w_I dx dy + \int_{\Gamma_1} g w_I d\gamma \\ - \sum_{J \in \mathbf{J}} \left(\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy \right) u_d(x_J, y_J) \quad \forall I \in \mathbf{I} \end{array} \right.$$

On obtient un système de $N_{\mathbf{I}}$ équations à $N_{\mathbf{I}}$ inconnues où $N_{\mathbf{I}}$ désigne le nombre de points du maillage d'indices $I \in \mathbf{I}$ donc le nombre de noeuds correspondant à des valeurs inconnues de la solution. Ce système s'écrit sous la forme matricielle

$$K U = F$$

où K est la matrice de raideur de coefficients

$$K_{I,J} = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy$$

et F le vecteur second-membre de composantes :

$$F_I = \iint_{\Omega} f w_I dx dy + \int_{\Gamma_1} g w_I d\gamma - \sum_{J \in \mathbf{J}} \left(\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy \right) u_d(x_J, y_J)$$

où l'on reconnaît :

- un premier terme représentant les efforts surfaciques (correspondant au second-membre du problème différentiel).
- un deuxième terme, intégrale curviligne, provenant des conditions aux limites de Neumann.
- un dernier terme, expression des conditions de Dirichlet non-homogènes.

Le calcul des coefficients $K_{I,J}$ de la matrice de raideur et des composantes F_I du second-membre se fait par une procédure d'assemblage des contributions apportées par chacun des éléments T_k de la triangulation.

Par exemple pour la matrice de raideur K :

$$K_{I,J} = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy = \sum_k \iint_{T_k} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy \quad (8.12)$$

On observe que la matrice K est très “creuse”, un grand nombre de ses coefficients sont nuls, en raison du choix de fonctions w_I de support limité.

8.5.3 Calcul de la matrice de raideur élémentaire P1

Un des outils de base essentiels à la programmation de la méthode des éléments finis est un tableau de correspondances entre les noeuds X_I du maillage global et les points d'un élément particulier : ici les sommets A_1, A_2, A_3 des éléments triangulaires.

Dans chaque élément triangulaire T_k de sommets A_1, A_2, A_3 correspondants aux noeuds X_I, X_J, X_K , les seules fonctions de base non nulles sont les fonctions w_I, w_J, w_K . Leurs restrictions dans le triangle sont respectivement les trois coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ calculées précédemment. La matrice élémentaire relative au triangle T_k est donc une matrice 3×3 de coefficients :

$$elemK_{i,j} = \iint_{T_k} \mathbf{grad} \lambda_j \mathbf{grad} \lambda_i dx dy \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

Comme, dans ce cas particulier simple d'éléments P1, les gradients sont constants par triangles, les intégrales à calculer sont des intégrales de fonctions constantes. Il suffit d'en multiplier la valeur par l'aire de l'élément.

On obtient ainsi la matrice élémentaire $P1$ de coefficients :

$$\begin{pmatrix} \frac{(y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2}{4 \text{ Aire}(T)} & \frac{(y_2-y_3)(y_3-y_1)+(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{4 \text{ Aire}(T)} & \frac{(y_2-y_3)(y_1-y_2)+(x_2-x_3)(x_1-x_2)}{4 \text{ Aire}(T)} \\ \frac{(y_2-y_3)(y_3-y_1)+(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{4 \text{ Aire}(T)} & \frac{(y_3-y_1)^2+(x_3-x_1)^2}{4 \text{ Aire}(T)} & \frac{(y_3-y_1)(y_1-y_2)+(x_3-x_1)(x_1-x_2)}{4 \text{ Aire}(T)} \\ \frac{(y_2-y_3)(y_1-y_2)+(x_2-x_3)(x_1-x_2)}{4 \text{ Aire}(T)} & \frac{(y_3-y_1)(y_1-y_2)+(x_3-x_1)(x_1-x_2)}{4 \text{ Aire}(T)} & \frac{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}{4 \text{ Aire}(T)} \end{pmatrix}$$

En particulier, dans le cas du triangle rectangle isocèle de sommets

$$A_1 = (0, 0), A_2 = (1, 0), A_3 = (0, 1)$$

souvent utilisé comme triangle de référence (voir plus loin), on a la matrice élémentaire de raideur suivante :

$$elemK = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

8.5.4 Calcul des seconds membres élémentaires

Le second membre se compose de 3 termes :

1) un premier terme surfacique

$$Fs_I = \iint_{\Omega} f w_I dx dy \quad \forall I$$

son calcul s'effectue en sommant les contributions de chaque élément triangulaire.

$$Fs_I = \sum_k Fs_{I,T_k} = \sum_k \iint_{T_k} f w_I dx dy$$

Si f est connue analytiquement et suffisamment simple on peut calculer exactement, à la main, les intégrales. Mais en général, le second membre f est connu par ses valeurs aux noeuds. On le représente dans la base des w_I et on est ramené aux calculs suivants

$$Fs_I = \iint_{\Omega} \sum_J f_J w_J w_I dx dy \quad \forall I$$

Ce qui ramène aux calculs de

$$\iint_{\Omega} w_J w_I dx dy \quad \forall I, J$$

Dans chaque élément on doit donc calculer la matrice de masse élémentaire.

Matrices élémentaires de masse

On obtient la matrice élémentaire de masse, en utilisant les formules d'intégration exactes suivantes :

$$\begin{aligned} \iint_T \lambda_i dx dy &= \frac{Aire(T)}{3} \\ \iint_T \lambda_i^2 dx dy &= \frac{Aire(T)}{6} \\ \iint_T \lambda_j \lambda_i dx dy &= \frac{Aire(T)}{12} \quad \text{si } i \text{ différent de } j \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat :

$$elemM_{T_k} = Aire(T_k) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \dots & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \dots & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Matrice de masse condensée (mass lumping)

Il peut être avantageux de calculer la matrice de masse élémentaire de manière approchée en utilisant la formule suivante (exacte sur P1) :

$$\iint_T \phi dx dy = \frac{Aire(T)}{3} \sum_{i=1}^3 \phi(A_i)$$

On obtient dans ce cas une matrice de masse diagonale égale à :

$$elemM_{T_k} = \frac{Aire(T_k)}{3} I$$

On en déduit le second membre élémentaire surfacique :

$$\begin{pmatrix} F s_{I,T_k} \\ F s_{J,T_k} \\ F s_{K,T_k} \end{pmatrix} = elemM_{T_k} \begin{pmatrix} f_I \\ f_J \\ f_K \end{pmatrix}$$

2) un terme de bord provenant des conditions de Neumann

$$Fn_I = \int_{\Gamma_1} g w_I d\gamma$$

Son calcul s'effectue sur les éléments ayant un côté sur Γ_1 . Il se ramène à une intégrale simple sur un côté A d'un triangle. Si la fonction g est donnée par ses valeurs aux noeuds du maillage et si A a pour extrémités X_I et X_J , on a sur A : $g = g_I w_I + g_J w_J$ et on doit donc calculer :

$$g_J \int_A w_J w_I d\gamma$$

$$g_J \int_A w_J^2 d\gamma$$

et

$$g_I \int_A w_I^2 d\gamma$$

Ces calculs s'effectuent exactement par la formule de Simpson :

$$g_J \int_A w_J w_I d\gamma = \frac{\text{Longueur}(A)}{6} g_J$$

$$g_J \int_A w_J^2 d\gamma = \frac{\text{Longueur}(A)}{3} g_J$$

etc..

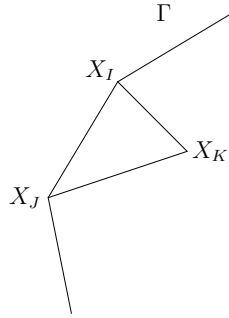


FIG. 8.6 – Triangle frontière

Dans le cas de la figure (8.6), on obtient :

$$\begin{pmatrix} Fn_{T,I} \\ Fn_{T,J} \\ Fn_{T,K} \end{pmatrix} = \frac{\text{Longueur}(A)}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_I \\ g_J \\ g_K \end{pmatrix}$$

On peut également calculer ce terme de façon approchée par la formule des trapèzes ; Ce qui donnerait :

$$\begin{pmatrix} Fn_{T,I} \\ Fn_{T,J} \\ Fn_{T,K} \end{pmatrix} = \frac{Longueur(A)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_I \\ g_J \\ g_K \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas le terme provenant des conditions de Neuman n'induit de contributions non nulles que pour les composantes du second membre relatives à des noeuds du maillage situés sur Γ_1 .

3) un troisième terme provenant des conditions de Dirichlet non-homogènes

$$Fd_I = - \sum_{J \in \mathbf{J}} \left(\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I dx dy \right) u_d(x_J, y_J)$$

Son calcul se ramène encore à une somme de contributions des triangles T . Pour chaque triangle dont des points d'indices $J \in \mathbf{J}$ et le point I sont sommets, on obtient une contribution à la I^{eme} composante du second membre égale à :

$$\sum_{J \in \mathbf{J}} \left(\iint_T \mathbf{grad} \lambda_j \mathbf{grad} \lambda_i dx dy \right) u_d(x_J, y_J)$$

On retrouve des coefficients déjà calculés pour la matrice de raideur. Pour un triangle I, J, K comme celui de la figure (8.6) on obtient une contribution unique à la composante K :

$$Fd_{T,K} = (a_{i,k} \quad , a_{j,k} \quad , a_{k,k}) \begin{pmatrix} ud_I \\ ud_J \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les i, j, k sont les numéros internes au triangle T correspondants aux indices globaux I, J, K .

8.5.5 Algorithme d'assemblage

Supposons un maillage en N éléments T_k pour $k = 1, 2..N$. Notons A la matrice globale à assembler (matrice de raideur ou de masse globale, second membre) et a_k les matrices élémentaires correspondantes relatives à chaque élément T_k . L'algorithme d'assemblage est très simple, dès lors que l'on dispose d'un tableau *numero* associant les sommets d'un élément T_k et les noeuds du maillage global. Dans ce cas simple d'éléments triangulaires P1, chaque élément T_k comprend trois

noeuds X_I, X_J, X_K correspondants aux sommets A_1, A_2, A_3 du triangle T_k . D'où l'algorithme :

```

POUR k = 1, N FAIRE ! boucle sur les éléments
    POUR i = 1, 3 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
        I = numero(k,i) ! numéros globaux
    POUR j = 1, 3 FAIRE
        J = numero(k,j)
        A(I,J) = A(I,J) +  $a_k(i,j)$  ! A : matrice globale, a matrice
élémentaire
    FIN DES 3 BOUCLES

```

8.6 Éléments triangulaires généraux

Considérons un maillage du domaine Ω de \mathbb{R}^2 en triangles T_l pour $l = 1, \dots, Nbe$, satisfaisant aux critères énoncés précédemment. Le choix d'une approximation par éléments finis P_k correspond au choix d'un espace V_h d'approximation constitué de fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, polynomiales de degré k par éléments triangulaires. Notons que ce choix, associé à une triangulation correcte assure l'inclusion $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Un polynôme de degré k à deux variables a $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ coefficients. On devra donc imposer $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ conditions dans chaque élément triangulaire pour y fixer les restrictions des fonctions de V_h . Soit $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ paramètres ou degré de liberté locaux. Dans le cas d'éléments de Lagrange, ces degrés de liberté sont exclusivement les valeurs de la fonction en certains points du triangle.

Pour assurer la continuité globale sur $\bar{\Omega}$ des fonctions de V_h , il faut (et cela suffit) assurer le raccordement aux frontières entre éléments triangulaires. La restriction des polynômes P_k à deux variables sur les côtés des triangles est un polynôme de degré k à une seule variable. Il faut $k+1$ conditions pour le fixer de manière unique. Donc pour assurer le raccordement des fonctions de V_h entre éléments adjacents, il faut disposer, dans le cas d'éléments de Lagrange, $k+1$ points sur leur arête commune.

En définitive les éléments triangulaires de Lagrange de degré k comprennent $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ points par triangles, dont $k+1$ points sur chaque côté.

8.6.1 Éléments P1

L'élément triangle P1 comporte 3 degrés de liberté, donc 3 points nodaux, et 2 points par côtés. Il y a une seule possibilité : le choix des 3 sommets du triangle.

8.6.2 Éléments P2

L'élément triangle P2 comporte 6 degrés de liberté, donc 6 points nodaux, 3 points par côtés. On choisit les 3 sommets et les 3 milieux des côtés du triangle.

8.6.3 Éléments P3

L'élément triangle P3 comporte 10 degrés de liberté, donc 10 points nodaux, 4 points par côtés. On choisit les 3 sommets du triangle, plus 2 points au un tiers, deux tiers de chaque côté et le barycentre.

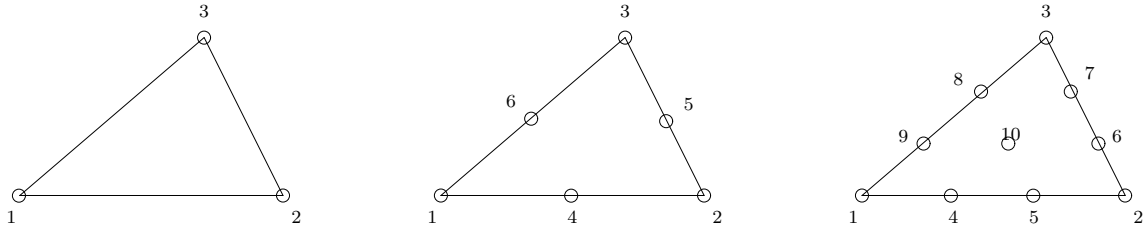


FIG. 8.7 – Éléments triangulaires : P1, P2, P3.

8.7 Fonctions de base Pk

Globalement sur $\bar{\Omega}$ les fonctions de V_h sont définies par leurs valeurs aux noeuds de la triangulation, c'est à dire sur l'ensemble des points constituant l'union des ensembles de points nodaux élémentaires.

Par exemple, dans le cas d'éléments P2, les noeuds X_I du maillage seront les sommets des triangles et les milieux des côtés des arêtes. La base globale de Lagrange sera la base des fonctions w_I définies par les conditions :

$$w_J(x_I, y_I) = \delta_{I,J}$$

pour tout indice I et tout indice J correspondants à un noeud de la triangulation.

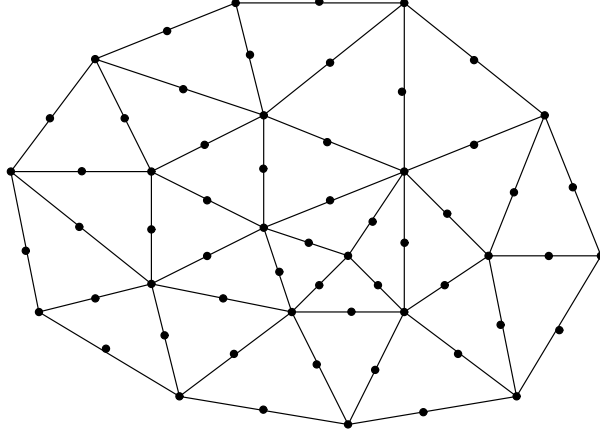


FIG. 8.8 – Maillage en triangles P2 droits

8.8 Fonctions de forme Pk

Ce sont les restrictions des fonctions de base w_I dans un élément triangulaire. Notons les N_i pour $i = 1, \dots, n_k$ avec $n_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On les définit localement selon la technique de Lagrange :

$$N_i(A_j) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, n_k$$

où les A_j dénotent dans un triangle T_l les noeuds X_I du maillage.

Les fonctions de forme N_i s'expriment simplement en fonctions des coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du triangle.

8.8.1 Fonctions de forme P1

En exprimant les conditions de Lagrange on retrouve que les N_i coïncident avec les λ_i . On a donné leur expression analytique ainsi que celles de leurs gradients dans le chapitre précédent.

8.8.2 Fonctions de forme P2

On obtient pour les noeuds aux sommets correspondants aux indices locaux 1, 2, 3 :

$$N_i = \lambda_i (2\lambda_i - 1) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (8.13)$$

et

$$\text{grad} N_i = (4\lambda_i - 1) \text{grad} \lambda_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (8.14)$$



FIG. 8.9 – Fonctions de forme P2

Pour les noeuds aux milieux des côtés correspondants aux indices locaux 4, 5, 6 :

$$N_4 = 4\lambda_1 \lambda_2 \quad (8.15)$$

$$N_5 = 4\lambda_2 \lambda_3 \quad (8.16)$$

$$N_6 = 4\lambda_3 \lambda_1 \quad (8.17)$$

et

$$\mathbf{grad} N_4 = 4(\lambda_1 \mathbf{grad} \lambda_2 + \lambda_2 \mathbf{grad} \lambda_1) \quad (8.18)$$

$$\mathbf{grad} N_5 = 4(\lambda_2 \mathbf{grad} \lambda_3 + \lambda_3 \mathbf{grad} \lambda_2) \quad (8.19)$$

$$\mathbf{grad} N_6 = 4(\lambda_3 \mathbf{grad} \lambda_1 + \lambda_1 \mathbf{grad} \lambda_3) \quad (8.20)$$

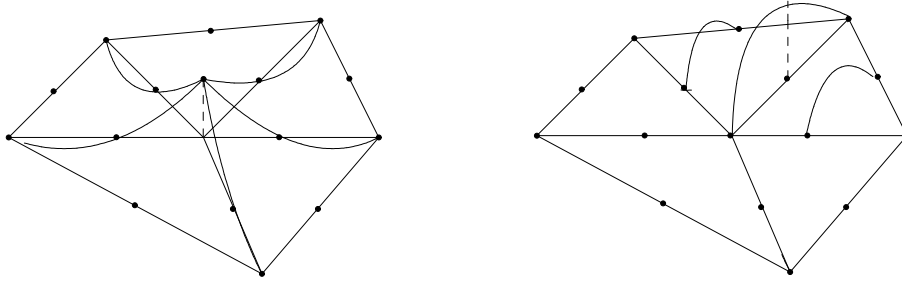


FIG. 8.10 – Fonctions de base P2 et leur support.

8.8.3 Fonctions de forme P3

On obtient pour les noeuds aux sommets correspondants aux indices locaux 1, 2, 3 :

$$N_i = \frac{\lambda_i (3\lambda_i - 1) (3\lambda_i - 2)}{2} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (8.21)$$

Pour les noeuds, aux un tiers et deux tiers des côtés, correspondants aux indices locaux 4 à 9 :

$$N_4 = \frac{9\lambda_1(3\lambda_1 - 1)\lambda_2}{2} \quad \text{etc .. pour } i = 5, 6, 7, 8, 9 \quad (8.22)$$

Enfin, pour le noeud 10 au barycentre, on obtient la fonction “bulle”, nulle sur les côtés du triangle et souvent utilisée dans les formulations mixtes.

$$N_{10} = 27 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (8.23)$$

8.9 Application aux problèmes elliptiques

8.9.1 Calcul des matrices et second-membres élémentaires

Ces problèmes font intervenir des intégrales de la forme :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v \, dx dy$$

$$\iint_{\Omega} u v \, dx dy$$

$$\iint_{\Omega} f v \, dx dy$$

et éventuellement

$$\int_{\Gamma} g v \, d\gamma$$

Leur discrétisation, utilisant les fonctions de base w_I , nécessite le calcul des intégrales suivantes :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I \, dx dy$$

$$\iint_{\Omega} w_J w_I \, dx dy$$

et

$$\int_{\Gamma} w_J w_I \, d\gamma$$

Ces calculs se ramènent à des intégrales sur les éléments triangulaires et leurs arêtes de fonctions composées de puissances et de produits des coordonnées barycentriques λ_i . Par conséquent la formule exacte suivante est souvent très utile.

$$\iint_T \lambda_1^n \lambda_2^p \lambda_3^q \, dx dy = 2 \, \text{Aire}(T) \frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!}$$

Cas particuliers importants :

$$\begin{aligned}\iint_T \lambda_i dx dy &= \frac{Aire(T)}{3} \quad \forall i = 1, 2, 3 \\ \iint_T \lambda_i^2 dx dy &= \frac{Aire(T)}{6} \quad \forall i = 1, 2, 3 \\ \iint_T \lambda_i \lambda_j dx dy &= \frac{Aire(T)}{12} \quad \forall i, j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Par exemple le calcul de la matrice de raideur correspondant au laplacien nécessite l'évaluation des intégrales :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J(x, y) \mathbf{grad} w_I(x, y) dx dy$$

En éléments P2 droits, les matrices élémentaires correspondantes sont constituées des coefficients :

$$a_{i,j} = \iint_T \mathbf{grad} N_j(x, y) \mathbf{grad} N_i(x, y) dx dy \quad \forall i, j = 1, 6$$

L'utilisation des formules des gradients données plus haut conduit à la matrice élémentaire qui s'exprime en fonction des constantes $b_{i,j} = \mathbf{grad} \lambda_i \mathbf{grad} \lambda_j$ déjà calculées dans le chapitre précédent. On obtient

$$\begin{aligned}b_{1,1} &= \frac{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}{4(Aire(T))^2} \\ b_{1,2} &= \frac{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{4(Aire(T))^2}\end{aligned}$$

etc.. en tournant sur les indices 1, 2, 3. Le calcul complet de la matrice élémentaire P2 est laissé au lecteur.

Les intégrations sur des morceaux de frontière se font en utilisant des formules de quadrature approchée à une dimension de type trapèzes ou Simpson.

8.9.2 Technique de l'élément de référence

Les calculs des fonctions de forme et des matrices et second-membres élémentaires peuvent s'effectuer en se ramenant à un élément de référence simple.

Dans le cas d'éléments triangulaires on choisit le triangle rectangle isocèle unité de sommets :

$$a_1 = (0, 0), \quad a_2 = (1, 0), \quad a_3 = (0, 1)$$

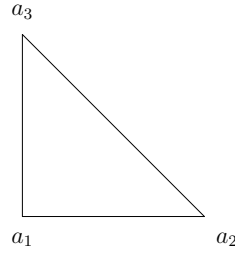


FIG. 8.11 – Élément de référence

Dans ce triangle de référence les coordonnées barycentriques admettent les expressions suivantes en fonction des coordonnées cartésiennes notées \hat{x} et \hat{y} :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{\lambda}_2 = \hat{x} \\ \hat{\lambda}_3 = \hat{y} \end{cases}$$

Par transformation affine inversible on fait correspondre à ce triangle de référence un élément triangulaire droit quelconque T de sommets

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$$

Pour cela il suffit de construire une transformation affine F qui associe respectivement les sommets a_1, a_2, a_3 du triangle de référence aux sommets A_1, A_2, A_3 du triangle quelconque.

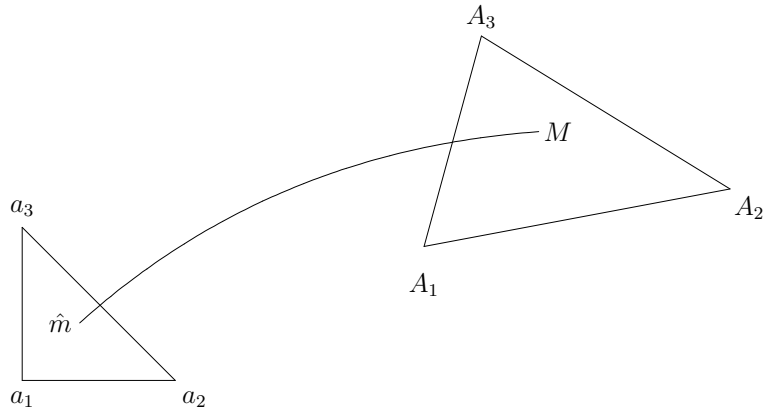


FIG. 8.12 – Transformation affine entre l'élément de référence et un triangle quelconque

Il est très commode pour cela d'utiliser les fonctions coordonnées barycentriques. On obtient les coordonnées x, y du point M de T correspondant au point $\hat{m}(\hat{x}, \hat{y})$

du triangle de référence selon :

$$\begin{aligned}x &= x_1 \hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) + x_2 \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) + x_3 \hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y}) \\y &= y_1 \hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) + y_2 \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) + y_3 \hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y})\end{aligned}$$

Le jacobien de la transformation est égal à deux fois l'aire algébrique du triangle T :

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2.Aire(T)$$

car c'est le rapport de l'aire du triangle T et de celle du triangle de référence (qui vaut $\frac{1}{2}$).

Cette transformation affine qui associe les sommets a_1, a_2, a_3 du triangle de référence aux sommets A_1, A_2, A_3 , est donc inversible si les points A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés. Pour tout point M correspondant au point \hat{m} on a :

$$\hat{\lambda}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda_i(x, y) \quad \forall i = 1, 2, 3$$

autrement dit, les coordonnées barycentriques sont conservées dans la transformation affine ainsi définie.

On ramène alors simplement le calcul des intégrales sur un T quelconque au calcul homologue sur le triangle de référence \hat{T} selon :

$$\iint_T \Phi(x, y) dx dy = 2.Aire(T) \iint_{\hat{T}} \Phi(x(\hat{x}, \hat{y}), y(\hat{x}, \hat{y})) d\hat{x} d\hat{y}$$

8.9.3 Calcul des gradients

Le calcul des matrices de raideur fait intervenir le calcul des gradients des fonctions de forme. Dans le cas d'éléments Pk cela se ramène au calcul des gradients des coordonnées barycentriques λ_i . Il nous faut donc calculer ces gradients en fonction de ceux des coordonnées barycentriques de l'élément de référence. On écrit :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}$$

et de même

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}$$

Ce qui s'exprime sous forme matricielle selon :

$$\mathbf{grad}\lambda_i = \frac{1}{2\text{Aire}(T)} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \mathbf{grad}\hat{\lambda}_i$$

et donne à nouveau les résultats obtenus dans le chapitre précédent.

8.10 Éléments finis isoparamétriques triangulaires et quadrangulaires

Les éléments finis isoparamétriques sont des éléments dont les fonctions de forme sont définies à partir de fonctions de forme mères construites sur un élément de référence. Les fonctions de forme de l'élément réel sont les transformées des fonctions de forme mères dans la transformation géométrique faisant passer de l'élément de référence à l'élément réel. **Si cette transformation géométrique s'exprime dans la base des fonctions de formes mères construites sur l'élément de référence, on parle d'élément isoparamétrique.** Car, dans ce cas, les mêmes fonctions servent à définir la base de l'espace d'approximation et la géométrie des éléments. A l'inverse, dans le cas des éléments $P2$ droits, par exemple, les fonctions de formes mères sont des polynômes de degré deux alors que la transformation qui fait passer du triangle de référence au triangle réel est affine. On parle alors d'élément sous-paramétrique.

8.10.1 Les éléments quadrilatéraux bilinéaires de Lagrange : les éléments Q1

Considérons un maillage du domaine Ω de \mathbb{R}^2 en quadrangles C_l pour $l = 1, \dots, N_{be}$, satisfaisant aux critères caractérisant un maillage par éléments finis. Essayons de construire une approximation par éléments finis correspondant au choix d'un espace V_h d'approximation constitué de fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, régulières et d'expression simple sur chaque élément quadrangulaire. La première idée qui vient à l'esprit consisterait à choisir des polynômes dans chaque quadrangle.

Prenons par exemple un quadrangle droit et choisissons comme degrés de liberté dans ce quadrangle les valeurs de la fonction inconnue aux 4 sommets du quadrangle. Ces 4 valeurs définissent de façon unique un polynôme à 4 coefficients de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

Mais ce choix d'espace d'approximation V_h constitué des fonctions polynomiales de la forme ci-dessus par quadrangles ne fournit pas de méthode d'éléments finis

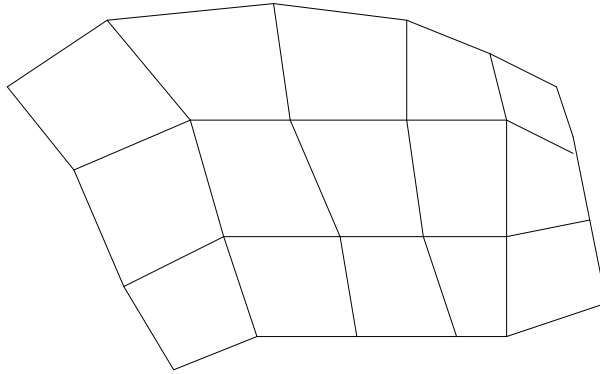


FIG. 8.13 – Maillage en quadrangles

conformes acceptable. En effet, sur chaque côté commun à deux quadrangles adjacents (d'équation $y = mx + p$), la restriction des polynômes de la forme :

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

est un polynôme de degré 2 en x . Et 2 points ne suffisent pas à fixer de manière unique un polynôme de degré 2 à une variable donc à assurer la continuité inter-éléments et la continuité globale des fonctions de cet espace d'approximation.

Remarque 8.10.1 *Par contre, dans le cas de maillages par des éléments rectangulaires (ce qui conduit nécessairement à des maillages structurés et ne s'applique qu'à des domaines simples décomposables en rectangles), en prenant les côtés des rectangles parallèlement aux axes de coordonnées, le choix d'un espace d'approximation V_h de fonctions continues polynomiales de la forme $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ par élément rectangulaire est cohérent. Dans ce cas les côtés des éléments ont des équations de la forme $x = cste$ ou $y = cste$ et les restrictions des fonctions de base sur un côté sont des fonctions affines à une variable complètement déterminées par leurs valeurs aux deux extrémités de ce côté. On laisse au lecteur le développement complet de cette méthode d'éléments finis rectangulaires. Signalons que l'on retrouve ainsi des méthodes classiques de discrétisation par différences finies. En particulier dans le cas du laplacien on retrouve, avec ces éléments rectangulaires bilinéaires et la formule d'intégration approchée des trapèzes, le schéma à 5 points usuel.*

Voyons maintenant la solution au problème évoqué plus haut : comment construire un espace d'approximation acceptable avec une discrétisation géométrique du domaine de calcul en quadrangles ?

On choisit comme élément de référence le carré unité et comme points nodaux les 4 sommets. On note \hat{x} et \hat{y} les coordonnées d'un point du carré unité. On

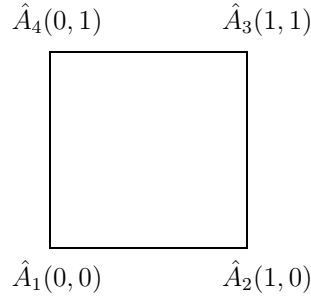


FIG. 8.14 – Élément de référence Q1 : le carré unité

choisit comme espace de fonctions de forme dans l'élément de référence l'espace des polynômes bilinéaires de la forme :

$$a_0 + a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{x}\hat{y}$$

Sur ce carré unité, les fonctions de forme mères sont définies classiquement par les conditions de Lagrange

$$\hat{N}_i(\hat{A}_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, ..4$$

Ce qui donne les formules suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{N}_1 = (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \\ \hat{N}_2 = \hat{x}(1 - \hat{y}) \\ \hat{N}_3 = \hat{x}\hat{y} \\ \hat{N}_4 = (1 - \hat{x})\hat{y} \end{array} \right.$$

Ces quatre fonctions forment une base de l'espace des fonctions bilinéaires et toute fonction bilinéaire est déterminée uniquement par la donnée de ses valeurs aux 4 sommets du carré unité. Considérons alors l'application F

$$(\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow{F} (x, y)$$

du carré unité dans un quadrilatère quelconque de sommets

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4)$$

définie par les formules suivantes :

$$x = x_1\hat{N}_1 + x_2\hat{N}_2 + x_3\hat{N}_3 + x_4\hat{N}_4$$

$$y = y_1\hat{N}_1 + y_2\hat{N}_2 + y_3\hat{N}_3 + y_4\hat{N}_4$$

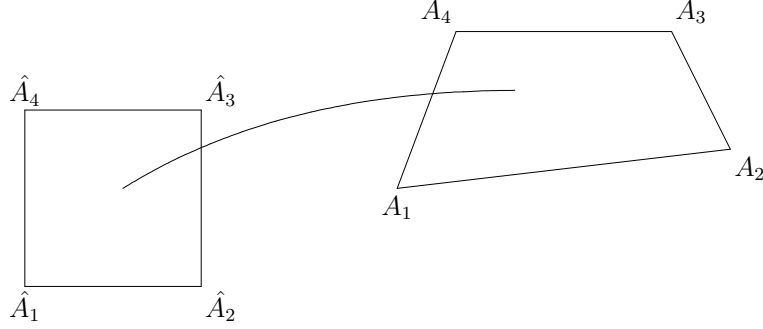


FIG. 8.15 – Transformation du carré unité en quadrangle quelconque

Cette application fait correspondre aux quatre sommets du carré unité numérotés dans le sens direct les quatre sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du quadrilatère également pris dans le sens direct. On va montrer que c'est une transformation inversible si le quadrilatère est convexe. Pour cela on calcule le déterminant jacobien de cette transformation.

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \frac{\partial y}{\partial \hat{x}}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \det(J) = & [(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)](1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \\ & + [(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2)]\hat{x}(1 - \hat{y}) \\ & + [(x_4 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_4 - y_3)]\hat{x}\hat{y} \\ & + [(x_1 - x_4)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_1 - y_4)](1 - \hat{x})\hat{y} \end{aligned}$$

Les coefficients de $\det(J)$ dans la base des \hat{N}_i sont les aires algébriques des 4 parallélogrammes construits sur deux côtés adjacents du quadrilatère. Ces aires sont toutes positives si le quadrilatère est convexe. En effet en notant L_{ij} la longueur du côté $A_i A_j$ et θ_i l'angle interne au sommet A_i on a :

$$\begin{aligned} \det(J) = & L_{12}L_{14}\sin(\theta_1)\hat{N}_1 + L_{12}L_{23}\sin(\theta_2)\hat{N}_2 \\ & + L_{23}L_{34}\sin(\theta_3)\hat{N}_3 + L_{14}L_{34}\sin(\theta_4)\hat{N}_4 \end{aligned}$$

Si le quadrilatère est convexe, les angles θ_i sont strictement inférieurs à π et leur sinus strictement positifs. Les coefficients de $\det(J)$ dans la base des \hat{N}_i sont tous quatre strictement positifs et par conséquent $\det(J)$ est toujours strictement positif dans le carré unité. D'ailleurs on peut également remarquer que les termes en $\hat{x}\hat{y}$ s'annulent dans le développement de $\det(J)$. Donc le jacobien est une fonction affine (P1). Comme il prend des valeurs strictement positives en quatre points distincts et non alignés, il est toujours strictement positif.

8.10.2 Fonctions de forme Q1

Les fonctions de forme choisies dans un quadrilatère quelconque du maillage sont les transformées des fonctions de forme mères \hat{N}_i selon :

$$N_i(x, y) = \hat{N}_i(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$$

On considère les fonctions q obtenues par la transformation inversible précédente F à partir des fonctions bilinéaires \hat{q} sur le carré de référence.

$$(x, y) \longrightarrow q(x, y) = \hat{q}(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{avec} \quad (\hat{x}, \hat{y}) \xrightarrow{F} (x, y)$$

Une fonction $q \in Q1$ prenant les valeurs q_i aux sommets A_i du quadrilatère s'écrira donc

$$q(x, y) = \sum_{i=1,..,4} q_i N_i(x, y) = \sum_{i=1,..,4} q_i \hat{N}_i(\hat{x}, \hat{y})$$

Notons, en effet, que les fonctions de formes mères sont des fonctions de base (locales) des polynômes de type Q1 sur l'élément de référence.

8.10.3 Fonctions de base Q1

Ce sont les fonctions w_I , prenant la valeur 1 en un noeud (d'indice I) du maillage et la valeur zéro en tous les autres noeuds, dont les restrictions dans chaque quadrilatère sont des fonctions de forme Q1.

Toute fonction de V_h s'écrira comme combinaison linéaire des w_I . Remarquons que V_h est bien cette fois un espace de fonctions continues. Toute fonction de V_h est uniquement déterminée par ses valeurs aux noeuds du maillage, sommets des quadrilatères. Deux fonctions de V_h égales en deux sommets adjacents A_i et A_j sont égales sur l'arête $A_i A_j$ joignant ces sommets. Car, par transformation continue inverse, les fonctions correspondantes sont égales sur 2 sommets adjacents du carré de référence \hat{A}_i et \hat{A}_j et par construction des fonctions de forme mères, elles sont égales sur tout le côté $\hat{A}_i \hat{A}_j$ qui s'applique lui-même sur l'arête $A_i A_j$.

8.10.4 Calcul des gradients des fonctions de base Q1

Les restrictions des fonctions de base dans les quadrangles élémentaires C_l sont les fonctions de forme N_i . Rappelons que les N_i sont définies à partir de fonctions de forme \hat{N}_i dans le carré de référence \hat{C} par la transformation F

$$N_i(x, y) = \hat{N}_i(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y))$$

Le calcul de leur gradients se ramène donc à ceux des fonctions de forme mères sur l'élément de référence.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{grad} N_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{grad} \hat{N}_i$$

Les expressions données des \hat{N}_i permettent le calcul aisé de leur gradient. Il nous reste donc à calculer la matrice des dérivées partielles ci-dessus. Or on obtient facilement la matrice jacobienne inverse J donnant :

$$\mathbf{grad} \hat{N}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \mathbf{grad} N_i$$

par :

$$\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = \sum_{i=1,\dots,4} x_i \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial \hat{x}}$$

etc..

On en déduit :

$$\mathbf{grad} N_i = J^{-1} \mathbf{grad} \hat{N}_i = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} & -\frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ -\frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \end{pmatrix} \mathbf{grad} \hat{N}_i$$

Notons que les gradients des fonctions de forme N_i sont des fractions rationnelles (le numérateur est un polynôme de degré deux et le dénominateur $\det(J)$ un polynôme $P1$). On aura donc besoin de formules de quadrature numérique.

Remarque 8.10.2 *Le calcul des gradients qui précède est général. Nous le présentons à propos des fonctions $Q1$ mais on peut l'appliquer à tous les cas de fonctions de base éléments finis. Dans le cas d'éléments Pk nous avons trouvé plus simple de passer par les coordonnées barycentriques.*

8.10.5 Application aux problèmes elliptiques. Calcul des matrices et second-membres élémentaires

Ces problèmes font intervenir des intégrales de la forme :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v \, dx dy$$

$$\iint_{\Omega} u v \, dx dy$$

$$\iint_{\Omega} f v \, dx dy$$

et éventuellement

$$\int_{\Gamma} g v \, d\gamma$$

Leur discrétisation, utilisant les fonctions de base w_I , nécessitent le calcul des intégrales suivantes :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_J \mathbf{grad} w_I \, dx dy$$

$$\iint_{\Omega} w_J w_I \, dx dy$$

et

$$\int_{\Gamma} w_J w_I \, d\gamma$$

Ces calculs se font par des sommes d'intégrales sur les éléments quadrangulaires qui se ramènent par transformation de variables à des intégrales sur le carré unité.

Par exemple le calcul de la matrice de masse élémentaire revient au calcul de ces coefficients pour tout i et $j = 1, 4$

$$m_{i,j} = \iint_C N_j(x, y) N_i(x, y) \, dx dy = \iint_{\hat{C}} \hat{N}_j(\hat{x}, \hat{y}) \hat{N}_i(\hat{x}, \hat{y}) |det(J)| \, d\hat{x} d\hat{y}$$

Le calcul de la matrice de raideur élémentaire correspondant au laplacien nécessite l'évaluation des intégrales :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \iint_C \mathbf{grad} N_j(x, y) \mathbf{grad} N_i(x, y) \, dx dy \\ &= \iint_{\hat{C}} J^{-1} \mathbf{grad} \hat{N}_j(\hat{x}, \hat{y}) J^{-1} \mathbf{grad} \hat{N}_i(\hat{x}, \hat{y}) |det(J)| \, d\hat{x} d\hat{y} \quad \forall i, j = 1, 4 \end{aligned}$$

8.10.6 Éléments isoparamétriques Q2

Les développements précédents peuvent être repris dans le cas d'éléments biquadratiques obtenus par transformation isoparamétrique à partir du carré unité à 9 noeuds sur lequel on définit des fonctions de forme mères de la forme :

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

La transformation permet alors d'obtenir des quadrangles courbes

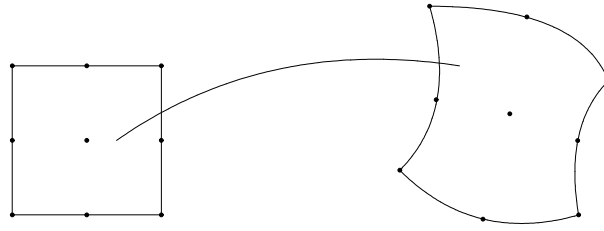


FIG. 8.16 – Transformation du carré unité Q2 en quadrangle courbe

8.10.7 Éléments isoparamétriques P2

On considère cette fois des triangles curvilignes obtenus par transformation isoparamétrique P2 à partir du triangle de référence isocèle rectangle unité à 6 noeuds. Les fonctions de forme utilisées dans l'élément de référence sont les fonctions de forme P2 définies dans le cours précédent. La transformation s'exprime dans la base des fonctions de forme P2, polynômes de degré 2 dans les variables \hat{x}, \hat{y} selon :

$$x = \sum_{i=1,..6} x_i \hat{N}_i$$

$$y = \sum_{i=1,..6} y_i \hat{N}_i$$

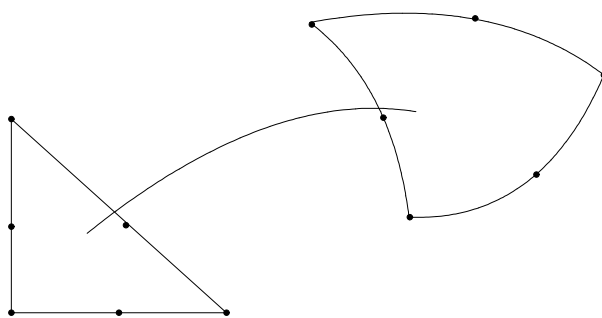


FIG. 8.17 – Transformation du triangle unité P2 en triangle curviligne

Chapitre 9

Analyse d'erreur a priori dans les méthodes d'éléments finis

Nous ferons l'étude de l'erreur dans les deux cas d'intégration exacte et de quadrature approchée.

Les résultats d'existence et d'unicité des problèmes continus et discrets de la forme $a(u, v) = l(v)$ ont été précédemment.

9.0.8 Résultat général de majoration d'erreur a priori

Théorème 9.0.1 *Soit M la constante intervenant dans l'hypothèse de continuité de a : $a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|$ et m la constante intervenant dans l'hypothèse d'ellipticité, on a la majoration d'erreur suivante :*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (9.1)$$

Si a est symétrique :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

signifie que u_h est la projection de u dans V_h au sens du produit scalaire a . Dans ce cas on a

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (9.2)$$

Dans la suite, nous considérons des problèmes elliptiques d'ordre 2. L'espace des fonctions tests considérées est l'espace H^1 ou un sous-espace de H^1 .

9.0.9 Majoration d'erreur en éléments P_k ou Q_k avec intégration exacte

Nous supposons le domaine de calcul Ω exactement recouvert par l'ensemble des éléments du maillage. Dans le cas de triangles ou quadrangles droits le domaine sera donc supposé polygonal. Nous admettrons alors le résultat suivant :

Théorème 9.0.2 (Général) *Dans le cas d'éléments finis de degré k (P_k ou Q_k) et d'une solution exacte u du problème elliptique suffisamment régulière ($u \in H^{k+1}(\Omega)$), on a la majoration d'erreur suivante en norme H^1 :*

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq Ch^k |u|_{k+1,2} \quad (9.3)$$

où h est la longueur du plus grand côté d'élément du maillage et où la constante C est indépendante de h .

Remarque : Si le domaine Ω n'est pas exactement recouvert par le maillage, on doit l'approcher par un maillage Ω_h dont la frontière suit les côtés des éléments droits ou isoparamétriques courbes choisis.

9.0.10 Un premier exemple simple : Erreur pour les éléments P1 en dimension un

Introduisons, une discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ en N sous-intervalles ou éléments $T_i = [x_{i-1}, x_i]$. V_h est alors l'espace des fonctions continues affines par morceaux (affines sur les segments T_i). Nous utilisons le résultat

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\|_{1,2} \quad \forall v_h \in V_h \quad (9.4)$$

démontré plus haut.

En choisissant pour v_h l'interpolé $P_h u$ de u dans l'espace d'éléments finis V_h , on majore l'erreur d'approximation $\|u - u_h\|$ par une constante fois l'erreur d'interpolation $\|u - P_h u\|$. On en déduit les résultats suivants :

Théorème 9.0.3 *Posons $h = \max_i |x_i - x_{i-1}|$, on a $\forall x \in [a, b]$:*

$$|u(x) - P_h u(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \quad (9.5)$$

$$|u'(x) - P'_h u(x)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \quad (9.6)$$

d'où

$$\|u - P_h u\|_{1,2} \leq C h \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \quad (9.7)$$

et enfin

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq C h \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \quad (9.8)$$

Démonstration :

Dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, notons de façon classique w_{i-1} et w_i les deux fonctions de base de V_h associées respectivement aux points x_{i-1} et x_i . Rappelons que leur restriction dans $[x_{i-1}, x_i]$ s'écrivent :

$$w_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \quad w_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (9.9)$$

On a les relations suivantes quel que soit x dans $[x_{i-1}, x_i]$:

$$w_{i-1}(x) + w_i(x) = 1 \quad x_{i-1}w_{i-1}(x) + x_iw_i(x) = x$$

et

$$P_h u(x) = u(x_{i-1})w_{i-1}(x) + u(x_i)w_i(x)$$

donc évidemment

$$(P_h u)'(x) = u(x_{i-1})w'_{i-1}(x) + u(x_i)w'_i(x)$$

On utilise alors les développements de Taylor :

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &= u(x) + (x_{i-1} - x)u'(x) + \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2}u''(\xi_i) \\ u(x_i) &= u(x) + (x_i - x)u'(x) + \frac{(x_i - x)^2}{2}u''(\eta_i) \end{aligned}$$

et l'on obtient :

$$P_h u(x) = u(x) + \frac{1}{2}[(x_{i-1} - x)^2 w_{i-1}(x)u''(\xi_i) + (x_i - x)^2 w_i(x)u''(\eta_i)]$$

et

$$(P_h u)'(x) = u'(x) + \frac{1}{2}[(x_{i-1} - x)^2 w'_{i-1}(x)u''(\xi_i) + (x_i - x)^2 w'_i(x)u''(\eta_i)]$$

D'où l'on déduira en exercice les majorations d'erreur annoncées en remarquant que $w_{i-1}(x)$ et $w_i(x)$ sont compris entre 0 et 1 et que

$$w'_{i-1}(x) = -w'_i(x) \quad \text{pour } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Remarque : Supposons que u soit un polynôme de degré deux. Alors u'' est une constante. On observe que dans ce cas le maximum de l'erreur d'interpolation de la solution u est atteint au milieu de l'intervalle. La dérivée de u est alors une fonction affine. La dérivée de son interpolée $P'_h u$ est une fonction constante égale à la valeur de u' au milieu de l'intervalle. En conclusion, au point milieu de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on a dans ce cas, à la fois un maximum de l'erreur d'interpolation sur u et une erreur d'interpolation nulle sur u' . Ceci explique pourquoi il est avantageux d'estimer les dérivées de la solution aux points milieux des intervalles.

9.0.11 Les éléments P1 en dimension deux

Supposons le domaine polygonal plan Ω discrétisé par un maillage en triangles T_i . Prenons pour espace d'approximation V_h l'espace des fonctions continues affines par morceaux (affines sur les triangles T_i). Nous utilisons encore le résultat

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\|_{1,2} \quad \forall v_h \in V_h \quad (9.10)$$

En choisissant à nouveau pour v_h l'interpolé $P_h u$ de u dans l'espace d'éléments finis V_h , on majore l'erreur d'approximation $\|u - u_h\|$ par une constante fois l'erreur d'interpolation $\|u - P_h u\|$.

On en déduit les résultats suivants :

Théorème 9.0.4 *Notons h la longueur du plus grand côté et θ_0 le plus petit angle au sommet de tous les triangles du maillage et notons $D^2 v$ la matrice Hessienne d'une fonction deux fois continûment différentiable v .*

$$D^2 v(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

et $|D^2 v(x, y)|$ sa norme spectrale.

On a alors $\forall x, y \in \Omega$:

$$|u(x, y) - P_h u(x, y)| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{x, y \in \Omega} |D^2 v(x, y)| \quad (9.12)$$

$$|\text{gradu}(x, y) - \text{grad} P_h u(x, y)| \leq 3 \frac{h}{\sin(\theta_0)} \sup_{x, y \in \Omega} |D^2 v(x, y)| \quad (9.13)$$

d'où

$$\|u - P_h u\|_{1,2} \leq C h \sup_{x, y \in \Omega} |D^2 v(x, y)| \quad (9.14)$$

et enfin

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq C h \sup_{x, y \in \Omega} |D^2 v(x, y)| \quad (9.15)$$

Démonstration :

Nous suivons la démonstration de R. Glowinski (voir bibliographie).

Dans chaque triangle T_i , notons de façon classique λ_1 , λ_2 et λ_3 les trois coordonnées barycentriques, restrictions dans le triangle des fonctions de base de V_h associées aux trois sommets du triangle T_i . On a les relations suivantes quel que soit x, y dans T_i :

$$\lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y) + \lambda_3(x, y) = 1$$

$$x_1 \lambda_1(x, y) + x_2 \lambda_2(x, y) + x_3 \lambda_3(x, y) = x$$

$$y_1\lambda_1(x, y) + y_2\lambda_2(x, y) + y_3\lambda_3(x, y) = y$$

et

$$P_h u(x, y) = u(x_1, y_1)\lambda_1(x, y) + u(x_2, y_2)\lambda_2(x, y) + u(x_3, y_3)\lambda_3(x, y)$$

donc évidemment

$$\text{grad}(P_h u)(x, y) = u(x_1, y_1)\text{grad}\lambda_1 + u(x_2, y_2)\text{grad}\lambda_2 + u(x_3, y_3)\text{grad}\lambda_3$$

On utilise alors les développements de Taylor :

$$u(x_i, y_i) = u(x, y) + \overrightarrow{MA_i} \cdot \overrightarrow{\text{grad}u}(x, y) + \frac{1}{2} \overrightarrow{MA_i} \cdot D^2 u(\xi, \eta) \overrightarrow{MA_i}$$

et l'on obtient :

$$P_h u(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i(x, y) \overrightarrow{MA_i} \cdot D^2 u(\xi, \eta) \overrightarrow{MA_i}$$

et

$$\overrightarrow{\text{grad}P_h u}(x, y) = \overrightarrow{\text{grad}u}(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \overrightarrow{\text{grad}\lambda_i}(x, y) \cdot \overrightarrow{MA_i} \cdot D^2 u(\xi, \eta) \overrightarrow{MA_i}$$

D'où l'on déduira en exercice les majorations d'erreur annoncées.

Remarques :

1) Le terme dominant de l'erreur est celui portant sur les gradients. Il sera minimal pour $\frac{h}{\sin(\theta_0)}$ minimal. Parmi tous les triangles de plus grand côté de longueur h , celui pour lequel ce terme sera minimal est celui pour lequel $\sin(\theta_0)$ sera maximal. On trouve ainsi comme forme optimale le triangle équilatéral. C'est aussi le triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon donné.

2) Supposons que u soit un polynôme de degré deux. Alors $D^2 u$ est une matrice constante. Dans le cas particulier de problème homogène et isotrope, la matrice Hessienne $D^2 u$ est de plus scalaire. Dans chaque élément triangulaire le maximum de l'erreur d'interpolation de la solution u est alors atteint au centre du cercle circonscrit au triangle. Le gradient de u est alors une fonction affine. Le gradient de son interpolée $\mathbf{grad}P_h u$ est une fonction constante égale à la valeur de $\mathbf{grad}u$ au centre du cercle circonscrit au triangle. En conclusion, en ce point, on a dans ce cas, à la fois un maximum de l'erreur d'interpolation sur u et une erreur d'interpolation nulle sur $\mathbf{grad}u$. Ceci explique pourquoi il est avantageux d'estimer les dérivées de la solution aux points centres des cercles circonscrits aux éléments.

Par contre dans le cas de problèmes non-isotropes où la solution varie beaucoup plus fortement dans une direction, l'analyse précédente est insuffisante. Une analyse plus fine conduit à rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des

matrices Hessiennes dans chaque triangle et à en déduire comme triangle optimal celui d'aire maximale inscrit dans une ellipse. Dans le cas de fortes variations dans une direction donnée (phénomènes de couches limites ou de chocs) des triangles très aplatis donnent de bons résultats.

9.1 Analyse de l'erreur en cas d'intégration numérique

Dans le cas d'intégration approchée (voir les différentes formules d'intégration numérique, en dimension un, deux ou trois dans le chapitre ??), on passe du problème P_h

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u_h \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V_h \text{ telle que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

à un nouveau problème P_h^*

$$(P_h^*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver la fonction } u_h^* \text{ appartenant à l'espace de Hilbert } V_h \text{ telle que :} \\ a_h(u_h^*, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

a_h et l_h sont les approximations par intégration numérique des formes exactes a et l , et u_h^* est la solution approchée du nouveau problème P_h^* .

Deux questions se posent alors :

- 1) Ce nouveau problème admet-il une solution unique ?
- 2) Quelle est l'erreur commise ? C'est à dire : quelle majoration obtient-on pour $\|u - u_h^*\|_{1,2}$ ou, ce qui revient au même, quelle précision doit-on imposer à l'intégration approchée pour que cette nouvelle erreur soit du même ordre que l'erreur d'interpolation ? Ceci afin de conserver, dans le cas de quadrature approchée, une erreur du même ordre que dans le cas d'intégration exacte.

La réponse à la première question est donnée par le théorème de Lax-Milgram. Le problème P_h^* admet une solution unique dans V_h si les formes a_h et l_h sont continues et si a_h est elliptique dans V_h c'est à dire s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$a_h(v_h, v_h) \geq m \|v_h\|_{1,2}^2 \quad \forall v_h \in V_h$$

Comme V_h est un espace de dimension finie, les formes linéaires a_h et l_h sont continues. Il reste donc à s'assurer de l'ellipticité de la forme approchée a_h afin d'avoir une solution unique au problème.

9.1.1 Condition d'ellipticité

Les conditions à imposer à la formule d'intégration numérique pour assurer l'ellipticité de la forme bilinéaire approchée sont les suivantes

- 1) La formule doit être à coefficients positifs.
- 2) Elle doit comporter un nombre de points suffisants.

Plus précisément, dans le cas d'éléments P_k en dimension un, deux, ou trois, le nombre de points d'intégration par éléments doit être tel qu'il suffise à définir de façon unique un polynôme P_{k-1}

Dans le cas d'éléments Q_k , le nombre de points d'intégration par éléments doit être tel qu'il suffise à définir de façon unique une fonction de Q_k

Nous préciserons plus loin, dans des cas pratiques, les conditions à imposer aux formules d'intégration numérique pour que cette condition d'ellipticité soit vérifiée.

9.1.2 Majoration d'erreur avec intégration numérique

La réponse à la deuxième question est donnée par le théorème suivant :

Théorème 9.1.1 *Dans le cas d'éléments finis P_k , une formule d'intégration exacte sur l'espace des polynômes P_{2k-2} assure une erreur d'intégration en norme H^1 en $O(h^k)$ donc du même ordre que l'erreur d'interpolation. L'erreur globale reste alors d'ordre k .*

Dans le cas d'éléments Q_k , le même résultat est obtenu si la formule d'intégration est exacte sur Q_{2k-1} .

9.2 Conséquences pratiques

9.2.1 En dimension un

Pour le problème modèle :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à l'espace } H_0^1(a, b) \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(a, b) \end{cases} \quad (9.16)$$

avec

$$a(u, v) = \int_a^b u'v' dx + \int_a^b u v dx$$

et

$$l(v) = \int_a^b f v \, dx$$

nous obtenons les choix suivants :

Éléments P_1

Une formule d'ordre 0 à un point suffirait. On choisit cependant habituellement la formule des trapèzes qui donne une erreur en $O(h^2)$ en norme L^2 et conduit à des matrices de masse diagonales.

Éléments P_2

Une formule d'ordre 2 à deux points suffit. On peut choisir la formule de Gauss-Legendre ou celle de Simpson.

Éléments P_k

Une formule d'ordre $2k - 2$ à k points suffit.

9.2.2 En dimension deux

Pour le problème modèle en dimension deux :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } u \text{ appartenant à l'espace } H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (9.17)$$

avec

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dxdy + \iint_{\Omega} u v \, dxdy$$

et

$$l(v) = \iint_{\Omega} f v \, dxdy$$

nous obtenons les choix suivants :

Éléments P_1

Une formule d'ordre 0 à un point suffirait. On choisit cependant habituellement la formule suivante construite sur les sommets :

$$\iint_T F(x, y) \, dxdy = \frac{\text{Aire}(T)}{3} [F(A_1) + F(A_2) + F(A_3)] \quad (9.18)$$

qui donne une erreur en $O(h^2)$ en norme L^2 et conduit à des matrices de masse diagonales.

Éléments P_2

Une formule d'ordre 2 à trois points suffit. On peut choisir la formule suivante construite sur les points milieux des côtés :

$$\iint_T F(x, y) dx dy = \frac{\text{Aire}(T)}{3} [F(A_{12}) + F(A_{23}) + F(A_{31})] \quad (9.19)$$

Éléments P_k

Une formule d'ordre $2k - 2$ à $\frac{k(k+1)}{2}$ points suffit.

Éléments Q_1

On doit utiliser une formule exacte sur Q_1 à 4 points. On choisit habituellement la formule suivante construite sur les sommets du carré unité :

$$\iint_C F(x, y) dx dy \approx \frac{1}{4} [F(A_1) + F(A_2) + F(A_3) + F(A_4)] \quad (9.20)$$

qui donne une erreur en $O(h^2)$ en norme L^2 et conduit à des matrices de masse diagonales.

Éléments Q_2

On doit utiliser une formule exacte sur Q_2 à 9 points au moins. On peut choisir la formule déduite de Simpson suivante :

$$\begin{aligned} \iint_C F(x, y) dx dy \approx & \frac{1}{36} [F(A_1) + F(A_2) + F(A_3) + F(A_4)] \\ & + \frac{1}{9} [F(A_{12}) + F(A_{23}) + F(A_{34}) + F(A_{41})] + \frac{4}{9} F(G) \end{aligned} \quad (9.21)$$

où $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ sont les milieux et G le barycentre du carré C .

9.2.3 Contre-exemples : formes approchées non elliptiques

Reprenons le problème modèle en dimension deux du paragraphe précédent.

Avec des éléments Q_1 : la formule suivante à un point (G est le barycentre du carré unité C) est également exacte sur Q_1 .

$$\iint_C F(x, y) dx dy \approx F(G)$$

Cependant elle n'assure pas l'ellipticité de la forme a_h et conduit à des schémas numériques instables

En effet la fonction

$$v(x, y) = (x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})$$

vérifie d'une part

$$a(v, v) > 0 \quad \text{et} \quad \|v\|_{1,2} \neq 0$$

D'autre part cette fonction et son gradient s'annulent au point G et donc on a $a_h(v, v) = 0$ si l'on calcule l'intégrale selon la formule à un point ci dessus. En conséquence il n'y aura pas ellipticité, car on ne peut trouver $m > 0$ tel que $a_h(v, v) \geq m\|v\|_{1,2} \quad \forall v \in H_0^1$

Avec des éléments Q_2 : on vérifiera que la formule déduite de Gauss-Legendre ne permet pas non plus d'assurer l'ellipticité. [Prendre la fonction $v(x, y) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(y - \xi_1)(y - \xi_2)$ où ξ_1 et ξ_2 sont les abscisses et ordonnées des points de Gauss-Legendre dans le carré unité.]

Chapitre 10

Exemple de discrétisation de systèmes : l'élasticité linéaire

10.1 Le modèle en contraintes planes

Les problèmes de calcul de structures dans le cas de l'élasticité linéaire ont été à l'origine de la méthode des éléments finis. Considérons le problème de l'équilibre d'un domaine plan Ω , fixé sur une partie Γ_0 de sa frontière Γ , soumis à des efforts surfaciques de densité \mathbf{f} et à un chargement \mathbf{g} sur la partie Γ_1 de Γ . Ces forces s'exercent dans le plan de Ω . Faisons l'hypothèse de petits déplacements pour

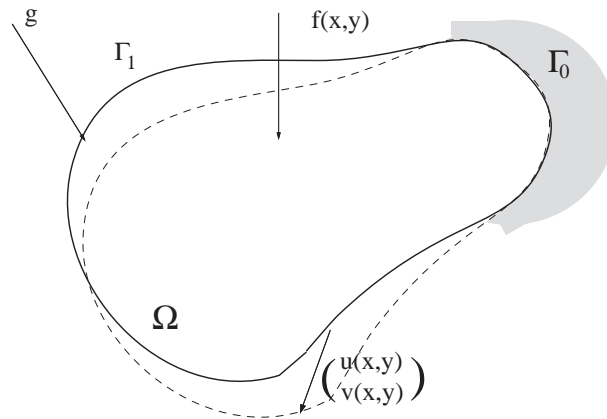


FIG. 10.1 – Problème en contraintes planes

lesquels les équations de l'élasticité linéaire sont valables et adoptons le modèle de

contraintes planes adapté aux plaques minces sollicitées par des forces s'exerçant dans leur plan. L'inconnue du problème est le vecteur déplacement

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Le vecteur déformation est donné, dans le cas d'un problème en contraintes planes, par ses composantes fonction des dérivées premières des déplacements selon :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Ce que l'on peut écrire en utilisant la matrice d'opérateurs différentiels

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

sous la forme

$$\epsilon = B\mathbf{u}$$

Les équations de l'élasticité s'expriment par une relation linéaire entre contraintes et déformation qui dans un problème en contraintes planes s'écrit :

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon$$

où σ est le vecteur des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

et \mathbf{D} est la matrice de Hooke dont l'expression, fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν , s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{pmatrix}$$

Enfin les équations d'équilibre entre efforts et contraintes s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + f_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + f_y = 0 \end{cases}$$

où f_x et f_y sont les 2 composantes des forces de surface.

En utilisant la matrice d'opérateurs différentiels B on peut écrire les équations d'équilibre sous la forme :

$$B^T \sigma + \mathbf{f} = 0$$

soit avec

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad \text{et} \quad \epsilon = B\mathbf{u}$$

On obtient ainsi un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre

$$B^T \mathbf{D} B \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0$$

dont l'inconnue est le vecteur déplacement.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont habituellement de 2 types.

Conditions de type Dirichlet, dites essentielles lorsque les déplacements sont fixés, par exemple à zéro sur la frontière.

$$u = v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0$$

Conditions de type Neuman, dites libres ou naturelles dans le cas homogène, qui s'écrivent sous la forme générale :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = g_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = g_y \end{cases}$$

10.2 Formulation variationnelle d'un problème d'élasticité linéaire. Principe des travaux virtuels

La formulation variationnelle s'obtient comme dans le cas du laplacien par multiplication par une fonction test \mathbf{w} , intégration et utilisation de la formule de

Green. La difficulté supplémentaire dans ce cas provient du fait que l'inconnue est un vecteur. On devra donc multiplier scalairement par une fonction test vectorielle \mathbf{w} . Notons w_x et w_y ses deux composantes. On obtient tout d'abord

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} \right) w_x + \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right) w_y \right] dx dy + \iint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx dy = 0$$

On utilise la formule de Green, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} w_x + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial y} w_x + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial x} w_y + \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial y} w_y \right] dx dy \\ & - \int_{\Gamma} \left[\sigma_{xx} w_x n_x + \sigma_{xy} w_x n_y + \sigma_{xy} w_y n_x + \sigma_{yy} w_y n_y \right] d\gamma = \iint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx dy \end{aligned}$$

Les conditions aux limites s'intègrent dans le terme de bord. Donc avec des conditions de Dirichlet homogènes sur Γ_0 et un effort \mathbf{g} s'exerçant sur Γ_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial x} w_x + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} w_x + \frac{\partial}{\partial x} w_y \right) + \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial y} w_y \right] dx dy \\ & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} d\gamma + \iint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx dy \end{aligned}$$

pour toute fonction vectorielle \mathbf{w} de composantes dans l'espace de Hilbert V des fonctions de $H^1(\Omega)$, nulles sur Γ_0 .

On obtient ainsi la formulation variationnelle de ce problème en contrainte plane

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction vectorielle } \mathbf{u} \text{ appartenant à } V^2 \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \epsilon(\mathbf{w}) dx dy = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} d\gamma + \iint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx dy \quad \forall \mathbf{w} \in V^2 \end{cases}$$

Ceci s'interprète également comme l'expression du principe des travaux virtuels et peut s'écrire, en utilisant les matrices introduites plus haut sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction vectorielle } \mathbf{u} \text{ appartenant à } V^2 \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \mathbf{w} dx dy = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} d\gamma + \iint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx dy \quad \forall \mathbf{w} \in V^2 \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème dans l'espace de Hilbert V^2 s'obtient classiquement par le théorème de Lax-Milgram. L'ellipticité de la forme bilinéaire

$$\mathbf{u}, \mathbf{w} \longrightarrow a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \iint_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \epsilon(\mathbf{w}) dx dy$$

dans V^2 résulte de l'inégalité de Korn qui nécessite que des conditions de type Dirichlet soient imposées sur une partie Γ_0 de mesure non-nulle. En l'absence de fixation sur une partie de la frontière, il existe une infinité de solutions à un déplacement rigide près.

La solution du problème variationnel réalise le minimum dans l'espace V^2 de l'énergie potentielle :

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma(\mathbf{v}) \epsilon(\mathbf{v}) \, dxdy - \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma - \iint_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dxdy$$

10.3 Approximation par éléments finis P1

On suppose tout d'abord le domaine Ω maillé en éléments finis triangulaires droits. On écrit le problème approché dans l'espace V_h^2 des vecteurs à composantes continues, affines par éléments triangulaires et nulles sur la partie Γ_0 de la frontière. On est ainsi assuré de l'inclusion $V_h^2 \subset V^2$, donc la méthode d'éléments finis est dite conforme. Soit \mathbf{I} l'ensemble des indices des noeuds du maillage correspondant à une valeur inconnue de la solution \mathbf{u} , et $N_{\mathbf{I}}$ le cardinal de \mathbf{I} , nombre de noeuds appartenant à \mathbf{I} , l'espace V_h^2 sera de dimension $2N_{\mathbf{I}}$. On choisit comme base de V_h^2 , selon la technique de Lagrange, l'ensemble des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_{\mathbf{I}}$$

où les w_i sont les fonctions scalaires de base de Lagrange de l'espace des fonctions continues affines par triangles déjà rencontrées dans le cas de la discrétisation du laplacien.

Les composantes de la solution approchée s'écriront comme combinaisons linéaires des fonctions de base w_i :

$$u_h(x, y) = \sum_{j \in \mathbf{I}} u_j w_j(x, y)$$

$$v_h(x, y) = \sum_{j \in \mathbf{I}} v_j w_j(x, y)$$

En utilisant l'écriture matricielle de la formulation variationnelle, on obtient alors

le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les composantes } u_j \text{ et } v_j \text{ pour } j \in \mathbf{I} \text{ telles que :} \\ \iint_{\Omega} \sum_{j \in \mathbf{I}} \mathbf{D}B \begin{pmatrix} w_j & 0 \\ 0 & w_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix} dx dy = \\ \quad \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix} d\gamma + \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix} dx dy \quad \forall i \in \mathbf{I} \\ \iint_{\Omega} \sum_{j \in \mathbf{I}} \mathbf{D}B \begin{pmatrix} w_j & 0 \\ 0 & w_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} dx dy = \\ \quad \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} d\gamma + \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} dx dy \quad \forall i \in \mathbf{I} \end{array} \right.$$

Comme il y a 2 inconnues u_i et v_i par noeud du maillage, le système ci-dessus est un système linéaire de $2N_{\mathbf{I}}$ équations à $2N_{\mathbf{I}}$ inconnues.

Numérotons les inconnues dans l'ordre $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_i, v_i, \dots, u_{N_{\mathbf{I}}}, v_{N_{\mathbf{I}}}$. Les coefficients de la matrice de raideur et du second membre se calculent alors selon :

$$\begin{pmatrix} a_{2i-1,2j-1} & a_{2i-1,2j} \\ a_{2i,2j-1} & a_{2i,2j} \end{pmatrix} = \iint_{\Omega} \mathbf{D}B \begin{pmatrix} w_j & 0 \\ 0 & w_j \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} w_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix} dx dy$$

et

$$\begin{pmatrix} b_{2i-1} \\ b_{2i} \end{pmatrix} = \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} w_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} d\gamma + \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} w_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} dx dy$$

10.4 Calculs des matrices et second-membre élémentaires P1

Un élément fini P1 comporte 3 noeuds qui sont les sommets du triangle T . En chaque noeud, nous avons 2 composantes de l'inconnue, où 2 fonctions scalaires de base non nulles. Il y a donc 6 degrés de liberté par triangles. La matrice de raideur élémentaire est donc une matrice 6×6 et le second membre élémentaire un vecteur à 6 composantes. Les restrictions des fonctions de base vectorielles non

nulles dans l'élément T s'expriment en fonction des 3 coordonnées barycentriques selon

$$\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

Notons \tilde{B} la matrice

$$B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Les λ_i étant des fonctions affines, la matrice \tilde{B} est une matrice à coefficients constants que l'on détermine facilement à l'aide des gradients déjà calculés des coordonnées barycentriques. On obtient :

$$\tilde{B} = \frac{1}{2 \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Le calcul complet de la matrice élémentaire se poursuit sans difficulté. Les intégrations portant sur des fonctions constantes, il suffit de multiplier l'intégrande par l'aire du triangle. D'où le résultat : la matrice élémentaire de raideur K_T vaut

$$K_T = \text{aire}(T) \tilde{B}^T \mathbf{D} \tilde{B}$$

soit

$$\frac{1}{4 \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \mathbf{D} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Le second membre élémentaire s'obtient selon le même principe. Notons S le pourtour du triangle T , on calcule ses 6 composantes par :

$$\int_{\Gamma_1 \cap S} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} d\gamma + \iint_T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} dxdy$$

Si les fonctions \mathbf{g} et \mathbf{f} sont données par leurs valeurs aux noeuds du maillage, on trouve :

$$\int_{\Gamma_1 \cap S} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{x1} \\ g_{y1} \\ g_{x2} \\ g_{y2} \\ g_{x3} \\ g_{y3} \end{pmatrix} d\gamma +$$

$$\iint_T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} dxdy$$

Soit

$$\int_{\Gamma_1 \cap S} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \lambda_2 \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & \lambda_2 \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & 0 & \lambda_2^2 & 0 & \lambda_3 \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 & \lambda_2^2 & 0 & \lambda_3 \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 & 0 & \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{x1} \\ g_{y1} \\ g_{x2} \\ g_{y2} \\ g_{x3} \\ g_{y3} \end{pmatrix} d\gamma +$$

$$\iint_T \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \lambda_2 \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 & \lambda_2 \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & 0 & \lambda_2^2 & 0 & \lambda_3 \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 & \lambda_2^2 & 0 & \lambda_3 \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 & 0 & \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix} dxdy$$

Il ne reste plus pour obtenir le résultat qu'à intégrer. Si $\Gamma_1 \cap S$ est le côté $A_1 A_2$

de T , et en calculant exactement les intégrales, le premier terme donne :

$$\frac{Longueur(A_1 A_2)}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{x1} \\ g_{y1} \\ g_{x2} \\ g_{y2} \\ g_{x3} \\ g_{y3} \end{pmatrix}$$

Si l'on fait un calcul approché par la formule des trapèzes sur l'arête $A_1 A_2$, on trouve :

$$\frac{Longueur(A_1 A_2)}{2} \begin{pmatrix} g_{x1} \\ g_{y1} \\ g_{x2} \\ g_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le deuxième terme (surfamique), dans le cas d'un calcul exact, on obtient :

$$\frac{Aire(T)}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix}$$

Si on utilise la formule d'intégration approchée exacte sur $P1$:

$$\int_T F(x, y) dx dy \approx \frac{Aire(T)}{3} [F(A_1) + F(A_2) + F(A_3)]$$

On obtient une matrice de masse condensée et le second membre surfamique devient :

$$\frac{Aire(T)}{3} \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{pmatrix}$$

Chapitre 11

Introduction aux problèmes d'évolution : L'équation de la chaleur instationnaire

11.1 Position du problème

La température $u(x, t)$ d'un corps de volume Ω , de densité ρ , de chaleur spécifique c et de conductivité thermique k est régie au cours du temps par l'équation :

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \mathbf{grad} u) + f \quad \forall x \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

où f représente la puissance volumique fournie au corps Ω .

Si la conductivité k est constante, l'équation se réduit à :

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + f \quad \forall x \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

Ce problème du premier ordre en temps est le modèle des problèmes paraboliques. La détermination de la solution nécessite de fixer une **condition initiale** en temps : valeur de la température u au temps 0.

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

On dit que le problème est un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.

D'autre part, un certain nombre de conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine peuvent être prises en compte pour déterminer complètement la solution.

- Conditions de type Dirichlet lorsque la température est fixée sur une partie de la frontière
- Conditions de type Neumann si le flux thermique est fixé (nul dans le cas d'un matériau isolé thermiquement)
- Conditions de type Fourier dans le cas le plus général d'un échange convectif avec le milieu extérieur, etc, comme dans le cas stationnaire.

Remarque 11.1.1 (solution stationnaire) *Lorsque la température ne dépend plus du temps (régime permanent ou stationnaire), on retrouve l'équation déjà étudiée :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k \mathbf{grad} u) = f & \forall x \in \Omega \\ + \text{ Conditions aux limites sur } \Gamma \end{cases}$$

11.2 Étude mathématique de l'équation monodimensionnelle

Nous allons maintenant donner les principales propriétés caractéristiques des problèmes de type paraboliques en nous appuyant, pour simplifier, sur le cas de l'équation de la chaleur monodimensionnelle.

11.2.1 Le modèle de la barre infinie

Considérons tout d'abord le modèle de la barre infinie, sans apport de chaleur et dont la température est initialement donnée. Il est clair que, selon le premier principe de la thermodynamique, la température de la barre doit décroître au cours du temps. Ecrivons l'équation du modèle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : (x, t) \longrightarrow u(x, t) \text{ telle que :} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{donnée} \end{cases}$$

Soit $F(\nu, t)$ la transformée de Fourier de u définie par :

$$F(\nu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi\nu x) u(x, t) dx$$

La transformation de Fourier de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\nu, t) + 4\pi^2 \nu^2 F(\nu, t) = 0$$

$F(\nu, 0)$ est la transformée de Fourier de la condition initiale u_0 . La résolution de l'équation différentielle du premier ordre en temps ci-dessus donne donc :

$$F(\nu, t) = \exp(-4\pi^2 \nu^2 t) F(\nu, 0)$$

Or

$$\exp(-4\pi^2 \nu^2 t) = F\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)$$

et

$$F(f * g) = F(f) F(g)$$

Donc la transformée de Fourier de la solution u est égale à la transformée du produit de convolution de u_0 et $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t})$. Ceci donne, par transformation de Fourier inverse, l'expression classique de la solution u :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy$$

11.2.2 Propriétés fondamentales de la solution

Nous en déduisons les propriétés fondamentales de la solution u du problème de la chaleur.

1. La solution en un point particulier dépend de la condition initiale en tous les points du domaine. Le domaine de dépendance de la solution s'étend au domaine Ω tout entier.
2. Une perturbation en un point quelconque de la solution initiale influence immédiatement la valeur en tout point de la solution u . On dit que la vitesse de propagation est infinie.
3. La valeur ponctuelle de la solution décroît au cours du temps.
4. t doit être positif. Le phénomène est irréversible, on ne peut pas remonter le temps.
5. Enfin, l'opérateur de la chaleur a un effet régularisant. Pour une condition initiale dans $L^2(\Omega)$, la solution u est C^∞ pour tout temps $t > 0$ (voir un exemple en figure 11.1).

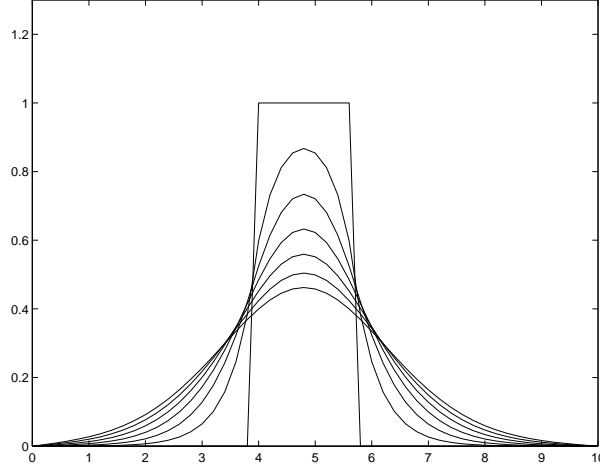


FIG. 11.1 – Effet régularisant de l'opérateur de la chaleur. On voit ici la suite de solutions en temps à partir d'une condition initiale en fonction porte discontinue

11.2.3 Le modèle de la barre finie avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes

On considère une barre de longueur L dont la température est fixée à zéro aux extrémités. L'équation de la température au cours du temps s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + f(x, t) & \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{donnée : condition initiale} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Les fonctions ϕ_k définies par

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (11.1)$$

sont fonctions propres de l'opérateur

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ avec conditions de Dirichlet homogènes}$$

associées aux valeurs propres $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$. D'autre part les fonctions ϕ_k forment une famille orthogonale de $L^2[0, L]$.

Exprimons la solution u comme combinaison linéaire des ϕ_k

$$u(x, t) = \sum_k \tilde{u}_k(t) \phi_k(x)$$

et supposons connu un développement de f sous la même forme :

$$f(x, t) = \sum_k \tilde{f}_k(t) \phi_k(x)$$

En reportant ces expressions de u et de f dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient un ensemble d'équations différentielles en temps indépendantes pour chaque k .

$$\frac{d\tilde{u}_k}{dt} + \frac{k^2\pi^2}{L^2}\tilde{u}_k = \tilde{f}_k$$

dont la solution s'écrit :

$$\tilde{u}_k(t) = \tilde{u}_k(0) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}(t-s)\right) \tilde{f}_k(s) ds$$

Dans le cas particulier $f = 0$, on trouve :

$$\tilde{u}_k(t) = \tilde{u}_k(0) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

On admet la convergence dans $L^2[0, L]$ de la série de Fourier de coefficients $\tilde{u}_k(t)$ vers la solution u du problème et ceci $\forall t$. D'où l'expression de la solution

$$u(x, t) = \sum_k \tilde{u}_k(0) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Remarque 11.2.1 (importante) *La décomposition en modes propres présentée ci-dessus est possible en raison de la propriété essentielle de **linéarité** du problème de la chaleur. Elle révèle une propriété fondamentale de l'opérateur de la chaleur : son effet de **lissage**. En effet la décroissance des modes en $\exp(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t)$ est d'autant plus rapide que le nombre d'onde k est grand. Les hautes fréquences sont donc amorties les premières. Cet effet de lissage a des conséquences positives pour l'approximation numérique, car des erreurs locales d'initialisation ou de calcul, qui correspondront à des modes de fréquence élevée, seront immédiatement amorties.*

11.3 L'équation bi ou tridimensionnelle

Reprenons le problème initial de la chaleur et considérons pour simplifier un problème de Cauchy en temps à conditions aux limites de Dirichlet homogènes en espace.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t) & \forall x \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{donnée : condition initiale} \\ u|_{\Gamma}(x, t) = 0 & \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

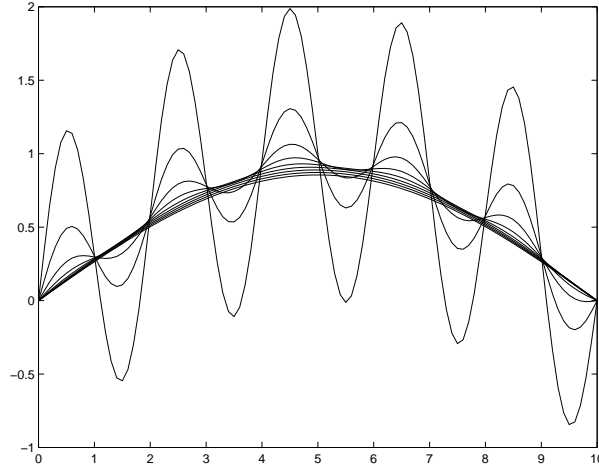


FIG. 11.2 – Effet de lissage de l’opérateur de la chaleur. La condition initiale est $\sin(\pi x) + \sin(10\pi x)$. On observe la décroissance immédiate des oscillations en $\sin(10\pi x)$ avant que le mode fondamental ne commence à décroître.

11.3.1 Formulation variationnelle

Plaçons-nous, pour simplifier l’exposé, dans le cas d’un domaine plan. La formulation variationnelle du problème s’obtient, comme dans le cas stationnaire, par multiplication par des fonctions tests indépendantes du temps appartenant à l’espace $H_0^1(\Omega)$, compte tenu des conditions aux limites choisies. Après intégration en espace sur le domaine Ω et intégration “par parties” par la formule de Green, on obtient le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \quad u : (x, y, t) \longrightarrow u(x, y, t) \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) v(x, y) \, dx dy + \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v \, dx dy \\ \qquad \qquad \qquad = \iint_{\Omega} f(x, y, t) v(x, y) \, dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \text{donnée} \end{array} \right.$$

On admet le résultat d’existence et d’unicité de la solution de ce problème d’évolution. A chaque instant t , la fonction u considérée comme fonction des variables d’espace x, y appartient alors à l’espace $H_0^1(\Omega)$

Notons (\cdot, \cdot) le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, et $a : (u, v) \longrightarrow a(u, v)$ la forme bilinéaire elliptique dans $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v \, dx dy$$

On obtient l'écriture suivante de la formulation variationnelle du problème parabolique ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \quad u : (x, y, t) \longrightarrow u(x, y, t) \text{ telle que :} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \text{donnée} \end{array} \right.$$

On rappelle l'ellipticité de a dans H_0^1 . Donc il existe une constante α strictement positive telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in H_0^1$$

11.3.2 Propriété de dissipation de l'énergie

En prenant $v = u(x, y, \cdot)$ dans la formulation variationnelle, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{0,\Omega}^2 + a(u, u) = (f, u)$$

où $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$

Utilisons alors l'ellipticité de a et la majoration de la norme de L^2 par la norme H^1

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \geq \alpha \|u\|_{0,\Omega}^2$$

on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \|u\|_{0,\Omega}^2 \leq \|f\|_{0,\Omega} \|u\|_{0,\Omega}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{0,\Omega} + \alpha \|u\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}$$

Multiplions alors les deux membres de l'inégalité par $e^{\alpha t}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} [e^{\alpha t} \|u(t)\|_{0,\Omega}] \leq e^{\alpha t} \|f\|_{0,\Omega}$$

et en intégrant en temps de 0 à T :

$$\|u(T)\|_{0,\Omega} \leq e^{-\alpha T} \|u_0\|_{0,\Omega} + \int_0^T e^{-\alpha(T-t)} \|f(t)\|_{0,\Omega} dt$$

On observe à nouveau, dans le cas où f est nulle, c'est à dire en l'absence de source de chaleur, la décroissance en temps de la norme L^2 de la solution. Remarquons que cette décroissance de la norme L^2 de la solution est exponentielle en temps.

Cette propriété de décroissance, d'amortissement ou de dissipation d'énergie est caractéristique des problèmes paraboliques. Elle est particulièrement favorable pour l'approximation numérique. En effet, toute perturbation survenant à un instant donné, et en particulier une perturbation due à des erreurs de calcul, est amortie exponentiellement au cours du temps. Il est important que les schémas numériques utilisés respectent ce comportement dissipatif au cours du temps.

Signalons enfin que la technique précédente permet d'obtenir sans difficulté l'unicité de la solution u .

11.4 Étude des schémas de différences finies dans le cas monodimensionnel

11.4.1 Introduction

Une première méthode pour résoudre numériquement les problèmes d'évolution consiste à discrétiser le problème continu par différences finies. Plaçons nous dans le cas monodimensionnel d'une barre de longueur L pour simplifier. On choisit une discrétisation régulière de $[0, L]$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = M\Delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = N\Delta t$. Notons x_j le point $j\Delta x$ et t_n le temps $n\Delta t$. Notons u_j^n la valeur de la solution approchée au point x_j et au temps t_n .

Définition 11.4.1 *Un schéma aux différences finies est dit schéma à p pas en temps si les valeurs u_j^{n+1} des solutions approchées au temps t_{n+1} sont fonctions des valeurs aux p instants précédents, soit aux temps $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-p+1}$. En particulier, un schéma est dit à un pas si les u_j^{n+1} ne dépendent que des u_j^n .*

Les deux principales propriétés d'un schéma numérique sont :

l'ordre du schéma qui mesure la précision ou erreur de troncature mathématique commise en remplaçant les dérivées partielles exactes par leurs approximations sous formes de différences divisées. L'ordre est déterminé par des développements de Taylor obtenus en injectant dans l'écriture du schéma numérique la fonction solution continue exacte du problème différentiel.

la stabilité du schéma concerne l'évolution du vecteur des valeurs approchées de la solution aux points x_j au cours des temps t_n (et non plus la solution exacte continue) dans le cas concret où Δt et Δx ne tendent pas vers zéro, mais ont des valeurs fixées. Numériquement, ce critère est relatif à la propagation et l'amplification des erreurs d'arrondis, la condition minimale de stabilité impose

que le vecteur de composantes u_j^n reste borné pour tout $n \in [0, N]$. Sinon, il n'est même pas calculable. Si l'on désire de plus que la solution approchée reproduise le comportement de la solution exacte au cours du temps, on devra imposer des conditions plus sévères sur le schéma numérique. Par exemple, dans le cas de l'équation de la chaleur, on cherche à reproduire sur la solution numérique le comportement dissipatif du problème continu. On choisira donc des schémas tels que la solution approchée soit décroissante au cours du temps.

11.4.2 Le Schéma d'Euler explicite

Nous allons préciser les définitions des notions d'ordre et de stabilité en nous appuyant sur l'exemple le plus simple de schéma numérique : le schéma d'Euler explicite (en temps) et centré (en espace).

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{donnée : condition initiale} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

et choisissons les approximations classiques suivantes des dérivées première et seconde par différences finies

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) &\approx \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} \quad (\text{à } O(\Delta t) \text{ près}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) &\approx \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x^2} \quad (\text{à } O(\Delta x^2) \text{ près}) \end{aligned}$$

Remplaçons les dérivées partielles par leurs approximations en différences finies ci-dessus et la fonction inconnue u par une collection de valeurs discrètes u_j^n pour $j = 0, \dots, M$ et $n = 0, \dots, N$. Nous obtenons un premier exemple de schéma d'approximation en différences finies de l'équation de la chaleur : le schéma d'Euler explicite centré.

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u_0(x_j) & \text{donnée : condition initiale} \\ u_0^n = u_M^n = 0 & \forall n : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Ce schéma est un schéma à un pas, car le vecteur des solutions approchées au temps t_{n+1} ne dépend que des solutions approchées au temps t_n . C'est un schéma explicite car il donne une formule explicite de calcul de la solution au temps t_{n+1} en fonction des valeurs de la solution au temps précédent. Il n'y a pas d'équation à résoudre pour obtenir la valeur au nouvel instant t_{n+1} .

11.4.3 Ordre

Notons $S_{\Delta x, \Delta t} u(x_j, t_n)$ l'application d'un schéma aux différences finies à la solution continue u . Par exemple pour le schéma d'Euler explicite centré :

$$S_{\Delta x, \Delta t} u(x_j, t_n) = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2}$$

Définition 11.4.2 *Un schéma aux différences finies est d'ordre p en temps et d'ordre q en espace si la différence entre l'équation et le schéma appliqué à la fonction solution du problème continu est un infiniment petit d'ordre p en temps et d'ordre q en espace. C'est à dire si l'on a :*

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) - S_{\Delta x, \Delta t} u(x_j, t_n) \right| = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q)$$

Un schéma **consistant** est un schéma tel que l'expression ci-dessus tende vers zéro avec Δt et Δx .

Application : le schéma d'Euler explicite est d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace. On montrera en exercice que l'on obtient en effet pour ce schéma

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) - \left[\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} - \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2} \right] = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_j, \theta) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi, t_n)$$

Remarque 11.4.1 *Au point x_j, t_n en dérivant l'équation on a :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_j, t_n) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_j, t_n)$$

on pourrait optimiser l'ordre par un choix de pas de temps et d'espace tel que

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{\Delta x^2}{12}$$

On obtiendrait alors l'ordre 2 en temps et l'ordre 4 en espace. Malheureusement ceci n'est possible que pour des maillages réguliers à pas constants et n'est pas généralisable au cas des éléments finis.

11.4.4 Stabilité

Dans le cas de schémas à un pas appliqués à des problèmes linéaires, le vecteur des solutions approchées au temps t_{n+1} est lié au vecteur des solutions approchées au temps t_n par une relation matricielle. Considérons le problème modèle

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

et appliquons un schéma numérique à un pas. Nous pouvons exprimer le vecteur U^{n+1} des valeurs de la solution au temps t_{n+1} en fonction du vecteur U^n des solutions au temps t_n par :

$$U^{n+1} = C(\Delta t, \Delta x) U^n$$

où C est une matrice caractérisant le schéma et dépendant des pas de temps et d'espace.

On en déduit :

$$U^n = C^n U^0$$

où U^0 est le vecteur des conditions initiales.

La condition minimale de stabilité s'exprime par le fait que $\|U^n\|$ reste borné quel que soit n . Une condition plus forte impose la décroissance de $\|U^n\|$ quand n augmente.

Condition de stabilité de Von Neumann

Le schéma est stable s'il existe $\tau > 0$ tel que $\|C^n\|$ soit uniformément borné pour tout n et tout Δt vérifiant les conditions :

$$0 < \Delta t < \tau \quad \text{et} \quad 0 \leq n\Delta t \leq T$$

Ce critère minimal de stabilité entraîne simplement que la suite U^n ne soit pas explosive. Il est satisfait si l'on a la majoration

$$\|C\| \leq 1 + c \Delta t$$

En effet dans ce cas :

$$\|C\| \leq 1 + c \Delta t \implies \|U^n\| \leq (1 + c \Delta t)^n \|U^0\| \leq e^{cn\Delta t} \|U^0\| \leq e^{cT} \|U^0\|$$

U^n reste borné pour tout $n = 0, \dots, N$. Mais la constante de majoration est exponentielle en la durée d'intégration en temps T et donc devient très grande avec T .

On peut en conséquence préférer des conditions de stabilité plus restrictives telles que :

$$\|C\| \leq 1$$

En effet on a alors

$$\|U^n\| \leq \|U^0\| \quad \forall n = 0, \dots, N$$

Si l'on veut de plus que la solution numérique reproduise le comportement décroissant de la solution exacte on imposera l'inégalité stricte

$$\|C\| \leq \alpha < 1$$

qui entraîne la décroissance de la norme de U^n .

11.4.5 Étude matricielle de la stabilité

Supposons que le schéma s'exprime sous la forme matricielle présentée plus haut, on déduira la stabilité de majorations de la norme de la matrice C souvent obtenues par le calcul de ses valeurs propres.

Exemple : le schéma d'Euler explicite

Reprenons le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{donnée : condition initiale} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{array} \right.$$

et appliquons le schéma d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u_0(x_j) \quad \text{donnée : condition initiale} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad \forall n : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{array} \right.$$

On obtient aisément l'écriture matricielle :

$$U^{n+1} = \left[I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A \right] U^n$$

où A est la matrice tridiagonale symétrique déjà rencontrée lors de la discrétisation de la dérivée seconde.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de A sont les analogues discrets des fonctions propres ϕ_k (voir équation 11.1). On obtient les vecteurs propres V^k de composantes $V_j^k = \sin(\frac{k\pi j}{M})$. Les valeurs propres associées sont :

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2M} \quad \text{pour } k = 1, \dots, M-1$$

où M dénote le nombre d'intervalles de discrétisation de $[0, L]$ et donc où la dimension de A est égale à $M-1$.

La matrice $C = I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A$ est une matrice symétrique réelle. Ses vecteurs propres sont ceux de A , ses valeurs propres sont égales à :

$$\mu_k = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \lambda_k$$

Majorons la norme euclidienne de U^{n+1}

$$\|U^{n+1}\|_2 \leq \|I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\|_2 \|U^n\|_2$$

Comme la matrice $C = I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A$ est une matrice symétrique, sa norme euclidienne est égale à son rayon spectral

$$\|I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\|_2 = \rho(I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A) = \max_{k=1, \dots, M-1} |1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi}{2M})|$$

La condition de stabilité $\|C\| \leq 1$ se traduit donc par :

$$\max_{k=1, \dots, M-1} |1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi}{2M})| \leq 1 \quad \text{soit} \quad 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{(M-1)\pi}{2M}) \leq 2$$

Ceci sera assuré dès que l'on aura la majoration

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Cette condition est la condition classique de stabilité du schéma d'Euler explicite pour l'équation de la chaleur. Elle impose des pas de temps très petits, ce qui exclut, dans la plupart des cas, l'usage de ce schéma explicite pour les problèmes paraboliques.

11.4.6 Autres exemples de schémas à un pas

Schéma d'Euler implicite

On considère, pour la discrétisation du même problème, le schéma implicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u_0(x_j) \quad \text{donnée : condition initiale} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad \forall n : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Ce schéma est dit implicite car le calcul de la solution au pas de temps $n + 1$ nécessite la résolution d'un système matriciel.

Ordre du schéma

Un développement de Taylor permet de vérifier simplement que ce schéma est d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace comme le schéma explicite.

Stabilité du schéma

La même analyse matricielle conduit au résultat suivant :

$$\left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A \right] U^{n+1} = U^n$$

La matrice d'itération C est cette fois égale à :

$$C = \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A \right)^{-1}$$

Ses valeurs propres sont :

$$\mu_k = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \lambda_k}$$

Elles sont donc strictement positives et strictement inférieures à 1 pour tout k . Ce qui entraîne la stabilité inconditionnelle (quels que soient Δt et Δx) du schéma implicite

Observons que l'on a, avec ce schéma, décroissance de la solution approchée au cours des pas de temps.

$$\|U^{n+1}\|_2 \leq \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \lambda_1} \|U^n\|_2 \quad \text{avec } \lambda_1 = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)$$

Schéma de Crank-Nicolson ou schéma des trapèzes

On considère, pour la discrétisation du même problème, le schéma implicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \\ u_j^0 = u_0(x_j) \quad \text{donnée : condition initiale} \\ u_0^n = u_I^n = 0 \quad \forall n : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Ce schéma est dit implicite car le calcul de la solution au pas de temps $n + 1$ nécessite la résolution d'un système matriciel. Il correspond à une intégration en temps approchée selon la formule des trapèzes sur les instants t_n et t_{n+1} .

Ordre du schéma

Ce schéma est d'ordre deux en temps et en espace.

Stabilité du schéma

Le même type d'analyse matricielle que précédemment conduit au résultat suivant :

$$\left[I + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} A \right] U^{n+1} = \left[I - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} A \right] U^n$$

La matrice d'itération C est cette fois égale à :

$$C = \left(I + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} A \right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} A \right)$$

Ses valeurs propres sont :

$$\mu_k = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \lambda_k}{1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \lambda_k}$$

Elles sont donc de module inférieur à 1 pour tout k . Ce qui entraîne la stabilité inconditionnelle (quels que soient Δt et Δx) du schéma de Crank Nicolson.

Remarque 11.4.2 *Attention, la stabilité en norme euclidienne (L^2), considérée ici, n'assure pas la monotonie ou la positivité du schéma. La décroissance en norme L^2 n'implique pas la décroissance de chaque composante du vecteur solution.*

La méthode précédente se complique dans le cas de schémas à plusieurs pas, nous allons présenter ci-dessous une technique de calcul plus simple et adaptable au cas de schémas multipas.

11.4.7 Étude de la stabilité par l'analyse de Fourier

Une technique simple de calcul de la stabilité d'un schéma est donnée dans le cas de problèmes **linéaires** par l'analyse de Fourier. Rappelons l'analyse présentée au paragraphe 11.2.3. Nous avons exprimé la solution u de l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{donnée : condition initiale} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{array} \right.$$

sous la forme du développement :

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

En utilisant de nouveau la linéarité du problème et le principe de superposition, nous observons que la solution, dans le cas de conditions aux limites linéaires quelconques, Dirichlet, Neumann, Fourier ou périodiques s'écrit sous la forme générale :

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_k(t) e^{ikx}$$

où k est un coefficient réel intégrant le nombre d'onde, le type de conditions aux limites et la dimension du domaine. Les coefficients de Fourier \tilde{u}_k vérifient chacun une équation différentielle en temps dont la solution s'écrit :

$$\tilde{u}_k(t) = \tilde{u}_k(0) \exp(-k^2 t)$$

On a donc

$$\tilde{u}_k(t + \Delta t) = \exp(-k^2 \Delta t) \tilde{u}_k(t)$$

Faisons la même analyse dans le cas discret. Injectons dans le schéma numérique une suite de solutions de la forme

$$u_j^n = \tilde{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

Ces solutions ont pour conditions initiales

$$u_j^0 = \tilde{u}_k^0 e^{ikj\Delta x}$$

et correspondent chacune à une composante harmonique. L'étude de la stabilité se ramène à l'étude de l'évolution au cours des pas de temps n des suites \tilde{u}_k^n quand n augmente. La condition minimale de stabilité numérique nécessite que

les nombres \tilde{u}_k^n restent bornés $\forall k$ et $\forall n = 0, \dots, N$. Si l'on veut de plus décroissance de la solution approchée, on devra avoir décroissance des \tilde{u}_k^n quand n augmente.

Dans les schémas à p pas, on obtient les \tilde{u}_k^{n+1} par multiplication par une matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$ selon :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^{n-p+2} \end{pmatrix} = G(\Delta t, k) \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^n \\ \tilde{u}_k^{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^{n-p+1} \end{pmatrix}$$

Dans les schémas à un pas, la matrice d'amplification se réduit à un facteur d'amplification $G(\Delta t, k)$ tel que $\tilde{u}_k^{n+1} = G_k(\Delta t) \tilde{u}_k^n$.

Nous obtenons alors les conditions de stabilité suivantes :

Condition nécessaire de stabilité de Von Neumann

Pour que le schéma soit stable, il faut qu'il existe $\tau > 0$ tel que les valeurs propres λ_i de la matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$ soient toutes majorées en module selon :

$$|\lambda_i| \leq 1 + c\Delta t \quad \forall i = 1, \dots, p$$

avec $c > 0$, quel que soit k et pour tout $0 < \Delta t < \tau$

Dans le cas de schéma à un pas la matrice d'amplification se réduit à un facteur scalaire et la condition de Von Neuman est suffisante.

Conditions suffisantes de stabilité

1) Si la matrice d'amplification est normale, c'est à dire qu'elle commute avec son adjointe (ou transposée dans le cas réel)

$$G G^* = G^* G$$

ou bien, ce qui est équivalent, si elle admet une base de vecteurs propres orthonormés, alors la condition de Von Neumann est suffisante.

2) La condition précédente étant parfois difficile à vérifier, on peut utiliser la condition suffisante suivante : le schéma est stable si les coefficients de la matrice $G(\Delta t, k)$ sont bornés et si ses valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1 sauf éventuellement une de module égal à 1.

Un premier exemple simple d'application : le schéma d'Euler

Posons

$$u_j^n = \tilde{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

et calculons le facteur d'amplification $G_k(\Delta t)$ tel que $\tilde{u}_k^{n+1} = G_k(\Delta t) \tilde{u}_k^n$. On obtient :

$$\frac{\tilde{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n}{\Delta t} \exp(ikj\Delta x) = \frac{\exp(ik\Delta x) - 2 + \exp(-ik\Delta x)}{\Delta x^2} \exp(ikj\Delta x) \tilde{u}_k^n$$

soit :

$$\tilde{u}_k^{n+1} = \left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (2 \cos(k\Delta x) - 2) \right] \tilde{u}_k^n = \left[1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k}{2}\Delta x\right) \right] \tilde{u}_k^n$$

La condition $|G_k(\Delta t)| \leq 1 \quad \forall k$ nécessite $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$. On retrouve évidemment des calculs analogues et le même résultat que par l'analyse matricielle faite plus haut.

Un exemple simple de schéma implicite à 2 pas : le schéma de Gear

Considérons le schéma suivant pour l'équation de la chaleur monodimensionnelle :

$$\frac{3}{2} u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}]$$

Posons comme précédemment

$$u_j^n = \tilde{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

Un calcul simple conduit au résultat suivant

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & -\frac{1}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^n \\ \tilde{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $a = \frac{3}{2} + 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k}{2}\Delta x\right)$

Les valeurs propres de la matrice 2×2 d'amplification ci-dessus sont racines de

$$\lambda^2 - \frac{2}{a} \lambda + \frac{1}{2a} = 0$$

On trouve le discriminant $\Delta' = \frac{2-a}{2a^2}$. On obtient si $a > 2$ deux racines complexes

conjuguées de module $\sqrt{\frac{1}{2a}} < 1$ et dans le cas $a \leq 2$ deux racines réelles dont la plus grande en valeur absolue vaut

$$\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{2-a}{2a^2}} < 1$$

On a donc stabilité inconditionnelle de ce schéma qui se révèle dans la pratique particulièrement adapté dans le cas d'équations "raides", c'est à dire dans lesquelles on aurait de fortes variations locales des constantes thermiques.

11.5 Méthodes d'éléments finis pour le problème de la chaleur

On considère le problème bidimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) \quad \text{donnée : condition initiale} \\ u|_{\Gamma_0} = u_d \quad : \text{conditions aux limites de Dirichlet} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = g \quad : \text{conditions aux limites de Neumann} \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème s'obtient comme dans le cas stationnaire par multiplication par des fonctions tests indépendantes du temps appartenant, compte tenu des conditions aux limites choisies, à l'espace V des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur Γ_0 . Après intégration en espace sur le domaine Ω et intégration "par parties" par la formule de Green, on obtient le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \quad u : (x, y, t) \longrightarrow u(x, y, t) \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) v(x, y) dx dy + \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v dx dy \\ \qquad \qquad \qquad = \iint_{\Omega} f(x, y, t) v(x, y) dx dy + \int_{\Gamma_1} g v d\gamma \quad \forall v \in V \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \text{donnée} \end{array} \right.$$

11.5.1 Semi-discrétisation en espace par éléments finis

On suppose réalisé un maillage du domaine Ω en éléments finis triangulaires P_k ou quadrangulaires Q_k . Soient w_i les fonctions de base associées aux éléments finis choisis. Le maillage est pris fixe au cours du temps une situation dans laquelle le domaine est déformable et donc le maillage change au cours du temps). Les

fonctions de base w_i sont donc indépendantes du temps. Notons \mathbf{I} l'ensemble des indices des noeuds du maillage correspondant à une valeur inconnue de la solution u . C'est à dire ici l'ensemble des noeuds n'appartenant pas à Γ_0 . Notons \mathbf{J} l'ensemble des indices des sommets du maillage correspondant à une valeur connue de la solution, donc ici appartenant à Γ_0 .

Comme dans le cas stationnaire nous décomposerons la solution approchée u_h en somme d'une inconnue auxiliaire \tilde{u}_h et d'une fonction connue u_0 prenant les valeurs imposées sur Γ_0 . La solution auxiliaire \tilde{u}_h s'écrira dans la base des w_i pour $i \in \mathbf{I}$ selon :

$$\tilde{u}_h(x, y, t) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_i(t) w_i(x, y)$$

La fonction u_0 , supposée indépendante du temps pour simplifier, sera approchée par une fonction $u_{0,h}$ prenant les valeurs imposées sur Γ_0 et nulle sur tous les noeuds d'indices $i \in \mathbf{I}$

$$u_{0,h}(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{J}} u_d(x_i, y_i) w_i(x, y)$$

On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial t} u_h(x, y, t) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u'_i(t) w_i(x, y)$$

Notons $N_{\mathbf{I}}$ le nombre de noeuds "inconnus" d'indices $i \in \mathbf{I}$. Le problème approché s'écrit sous la forme d'un système différentiel linéaire de $N_{\mathbf{I}}$ équations à $N_{\mathbf{I}}$ fonctions inconnues du temps u_i .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \forall t \in [0, T], \text{ et } \forall j \in \mathbf{I}, \text{ les fonctions } u_j(t) \text{ telles que, } \forall i \in \mathbf{I} : \\ \sum_{j \in \mathbf{I}} \left(\iint_{\Omega} w_j w_i dx dy \right) u'_j(t) + \left(\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_j \mathbf{grad} w_i dx dy \right) u_j(t) = \\ \iint_{\Omega} f w_i dx dy + \int_{\Gamma_1} g w_i d\gamma - \sum_{j \in \mathbf{J}} \left(\iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_j \mathbf{grad} w_i dx dy \right) u_d(x_j, y_j) \\ u_i(0) = u_{i,0} \quad \text{donnés} \quad \forall i \in \mathbf{I} \end{array} \right.$$

Ce qui donne matriciellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \text{ le vecteur } U(t) \text{ tel que :} \\ MU'(t) + KU(t) = B \\ U(0) = U^0 \quad \text{donné} \end{array} \right.$$

avec M matrice de masse de coefficients

$$m_{i,j} = \iint_{\Omega} w_j w_i dx dy$$

K matrice de raideur de coefficients

$$k_{i,j} = \iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_j \mathbf{grad} w_i dx dy$$

et B vecteur second membre dont les coefficients sont dans ce cas égaux à

$$B_i = \iint_{\Omega} f(x, y, t) w_i dx dy + \int_{\Gamma_1} g w_i d\gamma - \sum_{j \in \mathbf{J}} k_{i,j} u_d(x_j, y_j)$$

11.5.2 Discrétisation complète en espace et en temps

Il nous reste à appliquer les schémas en temps déjà présentés dans le cas de discrétisations en différences finies pour obtenir une discrétisation complète du problème.

Schéma d'Euler explicite

On utilise l'approximation

$$U'(t) \approx \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t}$$

ce qui conduit au schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ donné : } (U_i^0 = u^0(x_i, y_i)) \\ MU^{n+1} = MU^n - \Delta t K U^n + \Delta t B \end{array} \right.$$

Remarquons que la dépendance du second membre B par rapport au temps ne poserait pas de problème difficile.

La résolution complète du problème approché nécessite la résolution d'un système matriciel à chaque pas de temps. Nous avons deux possibilités :

1) On factorise une fois pour toute en début de calcul la matrice de masse M qui est symétrique définie positive sous forme LL^T et on a deux systèmes triangulaires à résoudre à chaque pas de temps.

2) On calcule la matrice de masse de façon approchée sous forme d'une matrice de masse condensée diagonale (mass lumping). L'inversion de la matrice de masse est alors immédiate et on obtient véritablement un schéma numérique explicite.

Malheureusement le schéma d'Euler explicite dont la stabilité dépend d'une condition très sévère sur le pas de temps n'est pas adapté à l'équation de la chaleur. On préférera utiliser les schémas implicites suivants.

Schéma d'Euler implicite

On utilise l'approximation

$$U'(t) \approx \frac{U(t) - U(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

ce qui conduit au schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ donné : } (U_i^0 = u^0(x_i, y_i)) \\ MU^{n+1} = MU^n - \Delta t K U^{n+1} + \Delta t B \end{array} \right.$$

Soit

$$[M + \Delta t K] U^{n+1} = MU^n + \Delta t B$$

Dans ce cas, que l'on ait ou non condensé la matrice de masse sous forme diagonale, on doit résoudre un système matriciel. Ce que l'on fait en factorisant une fois pour toutes au début du calcul, la matrice $M + \Delta t K$ qui est symétrique définie positive, sous forme LL^T puis en résolvant à chaque pas deux systèmes triangulaires.

Schéma de Crank-Nicolson

Le schéma s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ donné : } (U_i^0 = u^0(x_i, y_i)) \\ MU^{n+1} = MU^n - \frac{\Delta t}{2} K [U^n + U^{n+1}] + \Delta t B \end{array} \right.$$

Soit

$$[M + \frac{\Delta t}{2} K] U^{n+1} = [M - \frac{\Delta t}{2} K] U^n + \Delta t B$$

Il est facile de montrer, en reprenant l'analyse matricielle faite en 11.4.6, la stabilité inconditionnelle de ce schéma.

Schéma de Gear

Dans les cas difficiles, en particulier le cas d'équations "raides", si l'on veut l'ordre deux de précision, on utilisera le schéma à deux pas implicite suivant, dit schéma de Gear :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ \frac{3}{2}MU^{n+1} = 2MU^n - \frac{1}{2}MU^{n-1} - \Delta t KU^{n+1} + \Delta t B \end{array} \right.$$

Soit

$$[\frac{3}{2}M + \Delta t K]U^{n+1} = 2MU^n - \frac{1}{2}MU^{n-1} + \Delta t B$$

Ce schéma, inconditionnellement stable et du second ordre en temps, nécessite au démarrage l'utilisation d'un schéma à un pas (Crank-Nicolson afin de conserver l'ordre 2) pour le calcul de U^1 . Les schémas de Runge et Kutta implicites sont un autre choix possible de schémas d'ordre élevé stables avec l'avantage pratique d'être des schémas à un pas.

Chapitre 12

Introduction aux problèmes hyperboliques du second ordre : L'équation des ondes

12.1 Position du problème

Considérons une membrane élastique de surface Ω , plane au repos et fixée sur son bord Γ . Lors de petites vibrations transversales, le déplacement normal au plan d'équilibre en tout point x, y de Ω et à chaque instant t est une fonction $u : x, y, t \longrightarrow u(x, y, t)$ qui vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

où c désigne la vitesse des ondes. Ce problème du second ordre en temps est un modèle de problème hyperbolique. La détermination de la solution nécessite de fixer deux **conditions initiales** en temps. En fixant les valeurs du déplacement transversal u et de sa dérivée partielle en temps (voir la remarque ??), au temps 0 :

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u^0(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = u^1(x, y) \end{cases}$$

on obtient un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.

Les conditions aux limites choisies, pour la membrane fixée sur son bord Γ , sont des conditions de Dirichlet homogènes mais on pourrait choisir d'autres types de conditions aux limites comme dans les cas stationnaires ou paraboliques.

Remarque 12.1.1 (solution stationnaire) *Lorsque la solution ne dépend plus du temps (régime permanent ou stationnaire) on retrouve une équation déjà*

étudiée de forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \forall (x, y) \in \Omega \\ + \text{ Conditions aux limites sur } \Gamma \end{cases}$$

L'équation des ondes et l'équation de la chaleur ont les mêmes expression dans le cas stationnaire. C'est pourquoi les solutions du problème de Poisson ci-dessus peuvent s'interpréter physiquement, à la fois comme des déplacements d'une membrane élastique ou des températures.

12.2 Étude mathématique de l'équation monodimensionnelle

Nous allons maintenant donner les principales propriétés caractéristiques des problèmes de type hyperboliques en nous appuyant, pour simplifier, sur le cas de l'équation des ondes monodimensionnelle ou équation de la corde vibrante.

12.2.1 Le modèle de la corde infinie

Considérons tout d'abord le modèle de la corde infinie, libre de toute sollicitation. On se donne la position et la vitesse initiale au temps zéro. Ecrivons l'équation du modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : (x, t) \longrightarrow u(x, t) \text{ telle que :} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{donnée} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u^1(x) \quad \text{donnée} \end{array} \right.$$

Posons

$$y = x + ct \quad z = x - ct$$

En remplaçant dans l'équation les dérivées partielles par rapport à t et x par leurs expressions en fonctions des dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables y et z , on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = g_1(z)$$

soit :

$$u = g(z) + f(y)$$

Ce qui donne en définitive l'expression remarquable suivante :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

Prenant en compte les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = u^0(x) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = cf'(x) - cg'(x) = u^1(x)$$

on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}u^0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u^1(s)ds$$

et

$$g(x) = \frac{1}{2}u^0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u^1(s)ds$$

d'où :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2}[u^0(x + ct) + u^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s)ds$$

12.2.2 Propriétés fondamentales de la solution

1. L'expression $f(x + ct)$ prend au point x et à l'instant t la même valeur qu'au point $x + ct$ au temps zéro. De même $g(x - ct)$ prend au point x et à l'instant t la valeur qu'elle prenait au point $x - ct$ au temps zéro. La solution u au point x et au temps t apparaît comme la somme de deux ondes, l'une f se propageant avec une vitesse $-c$, donc de droite à gauche, l'autre g se propageant avec une vitesse c donc de gauche à droite. c apparaît comme une vitesse de propagation d'onde (mais non comme la vitesse des points de la corde).
2. Domaine de dépendance : la solution au point x et au temps t ne dépend que des valeurs des conditions initiales u^0 et u^1 aux points de l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. Inversement les conditions initiales au temps zéro en un point ξ n'influenceront la solution aux instants t que pour les seules abscisses x comprises entre $\xi - ct$ et $\xi + ct$. La figure 12.1 ci-dessous illustre simplement cette notion fondamentale de domaine de dépendance.

Les droites $x - ct = cste$ et $x + ct = cste$ s'appellent les droites caractéristiques.

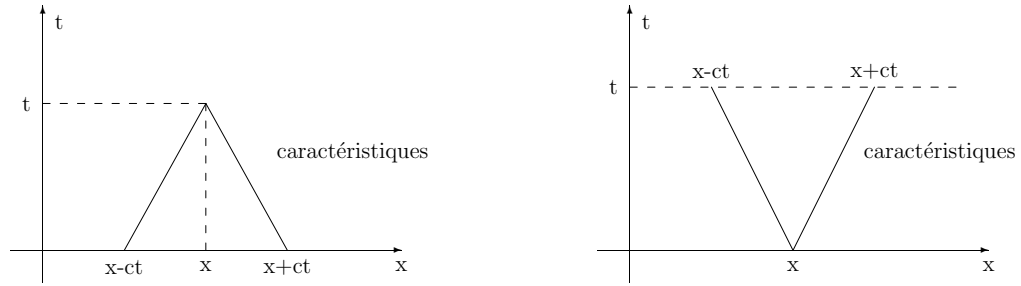


FIG. 12.1 – Domaine de dépendance et droites caractéristiques.

3. Si $u^1 = 0$ la solution ne dépend que des valeurs de u^0 aux points $x - ct$ et $x + ct$. Une perturbation en un point quelconque de la solution initiale se transmet pour moitié vers la droite avec une vitesse c et pour moitié vers la gauche avec la même vitesse absolue c car dans ce cas

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u^0(x - ct) + u^0(x + ct)]$$

Il est alors facile d'obtenir une solution à partir de conditions initiales simples par transport et en particulier d'observer l'évolution de solutions initiales discontinues de type échelon.

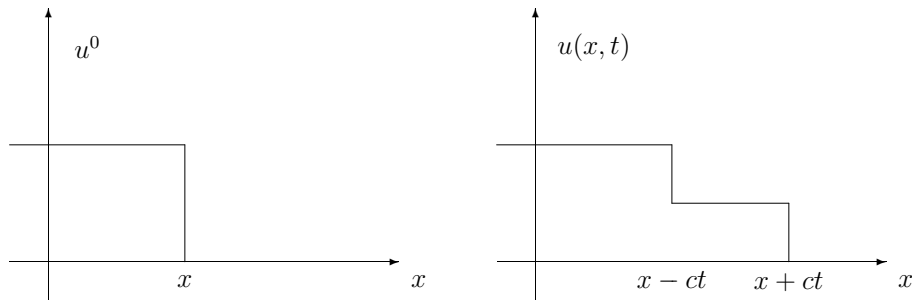


FIG. 12.2 – Évolution d'une solution initiale de type échelon.

4. t peut être positif ou négatif. Le phénomène est réversible, on peut remonter le temps et retrouver, par résolution de problèmes rétrogrades, la solution à un instant précédent.

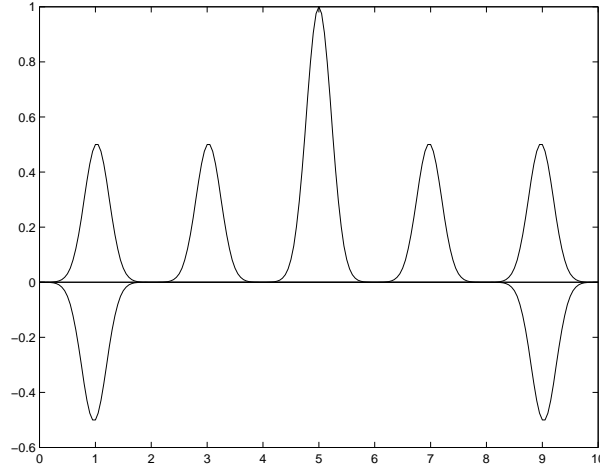


FIG. 12.3 – Évolution au cours du temps de la solution de l'équation de la corde vibrante avec une initialisation en forme de gaussienne

12.2.3 Le modèle de la corde vibrante finie

On considère une corde de longueur L fixée aux extrémités. L'équation du déplacement transversal au cours du temps s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u^0(x) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u^1(x) & \text{données : conditions initiales} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Symétrie, périodicité et réflexion aux bornes

Reprenons la forme générale abstraite de la solution générale

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2}[u^0(x + ct) + u^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s) ds$$

Au point $x = 0$, on a donc : $f(ct) + g(-ct) = 0$ pour tout t . Les fonctions f et g doivent donc vérifier la condition générale : $g(s) = -f(-s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$

On en déduit simplement que la solution u doit être une fonction impaire de x . En effet

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = f(x + ct) - f(-x + ct)$$

$$u(-x, t) = f(-x + ct) + g(-x - ct) = f(-x + ct) - f(x + ct)$$

d'où

$$u(-x, t) = -u(x, t) \quad \forall x \text{ et } t$$

Ceci entraîne la réflexion avec changement de signe des ondes lorsqu'elles atteignent une extrémité fixe de la corde. Signalons que cette propriété de réflexion sur une frontière Dirichlet introduit une difficulté importante dans la modélisation numérique de propagation d'ondes en milieu infini. En effet on est, dans la pratique, obligé de se limiter à des domaines bornés. Si l'on impose sur les frontières à "l'infini" des conditions de Dirichlet, la réflexion sur ces frontières va entraîner l'apparition d'ondes réfléchies parasites qui vont gravement perturber la solution. De nombreux travaux de recherches sur des conditions aux limites "transparentes" ou "absorbantes" ont été développés pour surmonter cette difficulté. Citons également la méthode PML (perfectly matched layer) qui consiste à ajouter une couche de matériau absorbant à l'infini, ce qui évite le développement de conditions aux limites particulières.

Au point $x = L$ on a : $f(L + ct) + g(L - ct) = 0$ pour tout t . La fonction f doit donc vérifier la condition générale : $f(L + s) = f(-L + s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$. f est donc une fonction périodique de période $2L$. On en déduit que la solution u doit être une fonction périodique en x de période $2L$ et en t de période $\frac{2L}{c}$. En effet

$$u(x + 2L, t) = f(x + 2L + ct) - f(-x + ct + 2L) = f(x + ct) - f(-x + ct) = u(x, t)$$

$$u(x, t + \frac{2L}{c}) = f(x + ct + 2L) - f(-x - 2L + ct) = f(x + ct) - f(-x + ct) = u(x, t)$$

En conséquence, on peut très simplement obtenir la valeur de la solution en un point x et un instant t à partir de la solution initiale au temps zéro complétée par symétrie et périodicité.

Analyse de Fourier

Reprenons les fonctions ϕ_k définies par

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

fonctions propres de l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec conditions de Dirichlet homogènes associées aux valeurs propres $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$.

Exprimons la solution u comme combinaison linéaire des ϕ_k

$$u(x, t) = \sum_k \tilde{u}_k(t) \phi_k(x)$$

En reportant cette expression de u dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient un ensemble d'équations différentielles du second ordre en temps indépendantes pour chaque k .

$$\frac{d^2 \tilde{u}_k}{dt^2} + \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \tilde{u}_k = 0$$

Dans ce cas sans second membre, la solution s'écrit sous la forme générale :

$$\tilde{u}_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}ct\right)$$

On trouve donc :

$$u(x, t) = \sum_k \left[A_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Remarquons que l'on retrouve ainsi le caractère impair en x et périodique en x et t de la solution.

12.3 L'équation bidimensionnelle

Reprenons le problème initial de membrane vibrante et considérons pour simplifier un problème de Cauchy en temps à conditions aux limites de Dirichlet homogènes en espace.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) = c^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = u^1(x, y) : \text{conditions initiales} \\ u|_{\Gamma}(x, y, t) = 0 \quad : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{array} \right.$$

12.3.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème s'obtient comme dans le cas stationnaire par multiplication par des fonctions tests indépendantes du temps appartenant à l'espace $H_0^1(\Omega)$, compte tenu des conditions aux limites choisies. Après intégration en espace sur le domaine Ω et intégration "par parties" par la formule

de Green, on obtient le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \quad u : (x, y, t) \longrightarrow u(x, y, t) \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) v(x, y) dx dy + c^2 \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v dx dy \\ \qquad \qquad \qquad = \iint_{\Omega} f(x, y, t) v(x, y) dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = u^1(x, y) \end{array} \right.$$

On a existence et unicité de la solution de ce problème d'évolution. A chaque instant t , la fonction u considérée comme fonction des variables d'espace x, y appartient alors à l'espace $H_0^1(\Omega)$

12.3.2 Conservation de l'énergie

Considérons le cas d'une équation homogène (second-membre $f = 0$). En prenant $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ dans la formulation variationnelle on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy + c^2 \iint_{\Omega} \mathbf{grad}(u) \mathbf{grad}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx dy = 0$$

D'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{grad} u\|_{0,\Omega}^2 = 0$$

où $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$

On en déduit la conservation de l'énergie au cours du temps sous la forme :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0,\Omega}^2 + c^2 \|\mathbf{grad} u\|_{0,\Omega}^2 = cste$$

Cette propriété de conservation de l'énergie est fondamentale dans le cas des problèmes hyperboliques. L'absence d'amortissement ou de dissipation d'énergie est une des causes principales de la difficulté de la résolution numérique des problèmes hyperboliques. Il est souhaitable que les schémas numériques utilisés respectent ce comportement conservatif au cours du temps. Or la recherche de conservation exacte entraîne le risque d'explosion numérique. On doit donc parfois accepter une légère dissipation dans les schémas numériques pour en assurer la stabilité.

12.4 Étude des schémas de différences finies dans le cas monodimensionnel

12.4.1 Première approche : discrétisation directe de l'équation du second ordre

Une première méthode pour résoudre numériquement ce problème d'évolution consiste à discrétiser l'équation du second ordre par différences finies. Plaçons nous dans le cas monodimensionnel d'une corde de longueur L pour simplifier. On choisit une discrétisation régulière de $[0, L]$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = M\Delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = N\Delta t$. Notons x_j le point $j\Delta x$ et t_n le temps $n\Delta t$. Notons u_j^n la valeur de la solution approchée au point x_j et au temps t_n .

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u^0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u^1(x) & \text{données : condition initiale} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

et choisissons les approximations classiques suivantes des dérivées secondes par différences finies

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_j, t_n) &\approx \frac{u(x_j, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1}))}{\Delta t^2} & (\text{à } O(\Delta t^2) \text{ près}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) &\approx \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2} & (\text{à } O(\Delta x^2) \text{ près}) \end{aligned}$$

Remplaçons les dérivées partielles par leurs approximations en différences finies ci-dessus et la fonction inconnue u par une collection de valeurs discrètes u_j^n pour $j = 0, \dots, M$ et $n = 0, \dots, N$. Nous obtenons un premier exemple de schéma d'approximation en différences finies de l'équation des ondes :

12.4.2 Le schéma explicite (en temps) et centré (en espace)

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u^0(x_j) \quad \text{et} \quad u_j^1 = u^0(x_j) + \Delta t u^1(x_j) & \text{déduts des conditions initiales} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad \forall n & \text{: conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Ce schéma est un schéma explicite car il donne une formule explicite de calcul de la solution au temps t_{n+1} en fonction des valeurs de la solution au temps précédent. Il n'y a pas d'équation à résoudre pour obtenir la valeur au nouvel instant t_{n+1} .

Ordre

Ce schéma explicite est d'ordre deux en temps et en espace (par développement de Taylor).

Stabilité

Dans le cas de schémas numériques appliqués à des problèmes hyperboliques nous choisirons, comme condition de stabilité, d'imposer au vecteur des solutions approchées d'être conservé ou de décroître en norme au cours du temps.

12.4.3 Étude de la stabilité par l'analyse de Fourier

Reprenons la technique de calcul de la stabilité des schémas par l'analyse de Fourier. Injectons dans le schéma numérique une suite de solutions de la forme

$$u_j^n = \tilde{u}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

obtenues à partir de conditions initiales

$$u_j^0 = \tilde{u}_k^0 e^{ikj\Delta x}$$

et correspondant chacune à une composante harmonique. L'étude de la stabilité se ramène à l'étude de l'évolution au cours des pas de temps n des suites \tilde{u}_k^n quand n augmente. La condition minimale de stabilité numérique nécessite que les nombres \tilde{u}_k^n restent bornés $\forall k$ et $\forall n = 0, \dots, N$. Nous imposerons ici que les nombres \tilde{u}_k^n soient conservés ou décroissants en module quand n augmente.

Dans les schémas à p pas, on obtient les \tilde{u}_k^{n+1} par multiplication par une matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$ selon :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^{n-p+2} \end{pmatrix} = G(\Delta t, k) \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^n \\ \tilde{u}_k^{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^{n-p+1} \end{pmatrix}$$

Nous choisirons alors les conditions de stabilité suivantes :

Condition de stabilité

Pour que le schéma soit stable il faut qu'il existe $\tau > 0$ tel que les valeurs propres λ_i de la matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$ soient toutes majorées en module par 1 selon :

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (12.1)$$

quel que soit k et pour tout $0 < \Delta t < \tau$.

Conditions suffisantes de stabilité

1) Si la matrice d'amplification est normale, c'est à dire qu'elle commute avec son adjointe (ou transposée dans le cas réel)

$$G G^* = G^* G$$

ou bien, ce qui est équivalent, si elle admet une base de vecteurs propres orthonormés, alors la condition précédente (12.1) est suffisante.

2) La condition de normalité n'étant pas toujours vérifiée, on peut utiliser la condition suffisante suivante : le schéma est stable si les coefficients de la matrice $G(\Delta t, k)$ sont bornés et si ses valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1 sauf éventuellement une de module égal à 1.

Dans certains cas, comme par exemple le cas du schéma aux différences finies explicite, on est obligé, pour conclure, de faire un calcul complet des vecteurs propres et valeurs propres de la matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$.

12.4.4 Application au schéma explicite

Reprenons le schéma explicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Posons

$$u_j^n = \tilde{u}_k^n \exp(ikj\Delta x)$$

On obtient :

$$\frac{\tilde{u}_k^{n+1} - 2\tilde{u}_k^n + \tilde{u}_k^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{\exp(ik\Delta x) - 2 + \exp(-ik\Delta x)}{\Delta x^2} \tilde{u}_k^n$$

soit :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k^{n+1} &= [2 + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (2 \cos(k\Delta x) - 2)] \tilde{u}_k^n - \tilde{u}_k^{n-1} \\ &= [2 - 4 c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k}{2}\Delta x)] \tilde{u}_k^n - \tilde{u}_k^{n-1} \end{aligned}$$

Notons $\alpha^2 = 4c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k}{2}\Delta x)$, On obtient l'écriture suivante de la matrice d'amplification :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^n \\ \tilde{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas une matrice normale.

Les valeurs propres de la matrice 2×2 d'amplification ci-dessus sont racines de

$$\lambda^2 - (2 - \alpha^2)\lambda + 1 = 0$$

On trouve le discriminant $\Delta = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$.

Si $\alpha^2 > 4$ le discriminant est positif et le trinôme a deux racines réelles distinctes dont le produit vaut 1. L'une des deux est donc forcément de module strictement supérieur à 1 et dans ce cas le schéma est instable.

Si $\alpha^2 < 4$ le trinôme a deux racines complexes conjuguées de module 1 et dans ce cas on ne peut conclure directement car la matrice d'amplification n'est pas normale et qu'alors la condition suffisante de stabilité n'autorise qu'une seule valeur propre de module 1. Un calcul simple permet de vérifier que si λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de G , les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont vecteurs propres de G . On obtient ainsi

$$G = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$G^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

G^n reste donc bornée quel que soit n dans le cas de deux racines complexes conjuguées distinctes, donc à la condition que Δ soit strictement négatif. Une autre manière de montrer la stabilité dans ce cas consiste à remarquer que si l'on dispose de 2 vecteurs propres indépendants on peut exprimer les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \end{pmatrix}$$

dans la base des vecteurs propres. L'action de la matrice d'itération G se ramène dans cette base à la multiplication des composantes des vecteurs par les valeurs propres λ_1 et λ_2 . Comme ces valeurs propres sont de module 1, le vecteur des itérés est borné en module.

Dans le cas $\Delta = 0$ la racine double est -1 . Les deux vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont alors confondus. Le sous-espace propre relatif à la valeur propre -1 est de dimension un. La matrice G n'est pas diagonalisable, mais seulement jordanisable sous la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les puissances nièmes de G tendent vers l'infini avec n . Donc dans ce cas limite le schéma est également instable.

En définitive la stabilité impose $\alpha^2 < 4$, ce qui s'exprime par la condition :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

dénommée **condition de Courant Friedrichs Lewy** apparaissant ici au sens strict.

12.4.5 Un schéma implicite centré

On considère le schéma implicite suivant directement déduit du schéma explicite précédent :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u^0(x_j) \quad \text{et} \quad u_j^1 = u^0(x_j) + \Delta t u^1(x_j) \quad \text{déduts des condition initiales} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad \forall n : \text{conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

Ce schéma n'est plus que d'ordre un en temps. Mais il est inconditionnellement stable, c'est à dire stable quel que soit Δt . Sa matrice d'amplification s'écrit avec les notations précédentes :

$$G(k, \Delta t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1 + \alpha^2} & -\frac{1}{1 + \alpha^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut augmenter la précision en temps, en utilisant le schéma suivant.

12.4.6 Schéma de Newmark implicite d'ordre 2

On considère le schéma implicite suivant déduit des schémas précédents et faisant partie de la famille des schémas de Newmark.

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{c^2}{4} [\delta_j^{2n+1} + 2\delta_j^{2n} + \delta_j^{2n-1}]$$

avec

$$\delta_j^{2n} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Ce schéma classique est d'ordre deux et inconditionnellement stable.

12.5 Seconde approche : Système du premier ordre équivalent

L'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

se ramène en posant

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad w = c \frac{\partial u}{\partial x}$$

au système de deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

pour lequel on doit se donner les deux conditions initiales suivantes au temps zéro pour v et w :

$$v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x)$$

et

$$w(x, 0) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = c \frac{d}{dx} u^0(x)$$

ceci peut également s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

et l'on retrouve sous cette forme la conservation de l'énergie en multipliant scalairement l'équation ci-dessus par le vecteur (v, w) et en intégrant sur $[0, L]$.

Remarque 12.5.1 *Le lien avec l'équation de transport est évident. On retrouvera donc naturellement, dans le chapitre suivant, consacré à la résolution de l'équation de transport, les schémas que nous présentons ici pour résoudre le système du premier ordre équivalent à l'équation des ondes.*

12.5.1 Un premier schéma explicite centré instable

On considère le schéma discret évident suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} = c \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \end{cases}$$

Ce schéma est clairement d'ordre un en temps et deux en espace. Étudions en la stabilité. Posons

$$v_j^n = \tilde{v}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

et

$$w_j^n = \tilde{w}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

nous obtenons :

$$\begin{cases} \tilde{v}_k^{n+1} - \tilde{v}_k^n = c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \tilde{w}_k^n \\ \tilde{w}_k^{n+1} - \tilde{w}_k^n = c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \tilde{v}_k^n \end{cases}$$

Soit

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_k^{n+1} \\ \tilde{w}_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ia \\ ia & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_k^n \\ \tilde{w}_k^n \end{pmatrix}$$

avec

$$a = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification sont égales à :

$$\lambda = 1 \pm ia \quad \text{donc sont de module} \quad \sqrt{1 + a^2} > 1$$

On en déduit l'instabilité de ce schéma quel que soit Δt . Ce résultat négatif que l'on retrouvera dans le cas de l'équation de transport, a fait coulé beaucoup d'encre et a suscité de nombreuses recherches de schémas stables par modifications simples de ce schéma naturel.

12.5.2 Schémas implicites centrés stables

On obtient évidemment des schémas stables en prenant des schémas implicites en temps. Par exemple on peut considérer le schéma de type Euler implicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} = c \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \end{cases}$$

On montrera en exercice que ce schéma d'ordre un en temps et deux en espace, est inconditionnellement stable.

On peut également considérer le schéma de type Crank Nicolson suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{c}{2} \left[\frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{w_{j+1}^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} = \frac{c}{2} \left[\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \end{cases}$$

Schéma d'ordre deux en temps et en espace inconditionnellement stable et conservatif (les valeurs propres de la matrice d'amplification sont deux complexes conjugués de module un).

12.5.3 Schémas explicites stables

Schéma de Lax

On remplace au premier membre des équations du schéma explicite centré instable v_j^n par $\frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2}$ et de même w_j^n par $\frac{w_{j+1}^n + w_{j-1}^n}{2}$. Ceci peut s'interpréter comme un lissage en x ou comme l'ajout d'un terme dissipatif $\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{2\Delta t}$ approximant $\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et de même pour w .

On obtient alors le schéma de Lax suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{w_j^{n+1} - \frac{w_{j+1}^n + w_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} = c \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \end{cases}$$

On montre que ce schéma est d'ordre un en temps et stable sous la condition de Courant Friedrichs Lewy dite condition CFL

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Schéma de Lax-Wendroff

On ajoute au schéma explicite instable un terme dissipatif en $O(\Delta t)$ correspondant à une discrétisation de $\frac{c^2\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Une interprétation classique de cette modification consiste à remarquer que le développement de Taylor

$$v(x_j, t_{n+1}) = v(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)$$

devient en utilisant l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x_j, t_{n+1}) = v(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c^2\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + O(\Delta t^3)$$

L'ajout des termes $\frac{c^2\Delta t}{2} \frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{\Delta x^2}$ et $\frac{c^2\Delta t}{2} \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}$ donnera le second ordre en temps au schéma et assurera sa stabilité.

On obtient le schéma de Lax-Wendroff suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c^2\Delta t}{2} \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} = c \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c^2\Delta t}{2} \frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{\Delta x^2} \end{cases}$$

On montrera que la matrice d'amplification de ce schéma s'écrit :

$$G_k = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1) & i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \\ i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) & 1 + \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1) \end{pmatrix}$$

et que ce schéma est stable sous la condition CFL

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Schéma de Courant Friedrichs

On utilise pour stabiliser le schéma explicite un maillage décalé pour w par rapport au maillage de discrétisation de v et un calcul implicite des w en fonction des v . On écrit :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = c \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} = c \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} \end{cases}$$

Ce schéma est globalement explicite puisque le calcul de v_j^{n+1} et v_{j-1}^{n+1} est effectué avant le calcul de $w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$. Il est équivalent au schéma explicite du second ordre en posant

$$v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

et

$$w_{j-\frac{1}{2}}^n = c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

On obtient exactement la même condition de stabilité CFL stricte.

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

C'est d'ailleurs à propos de l'étude de ce schéma que Courant Friedrichs et Lewy ont introduit le concept de stabilité.

12.5.4 Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy

La condition de Courant Friedrichs Lewy souvent mentionnée exprime la compatibilité nécessaire entre domaine de dépendance théorique et domaine de dépendance numérique. Le pas de temps Δt doit rester inférieur à la valeur limite au delà de laquelle des parties du domaine de dépendance théorique ne seraient pas prises en compte dans le schéma numérique. Autrement dit le domaine de dépendance numérique issu du point (x_j, t_{n+1}) doit inclure le domaine de dépendance théorique correspondant, le triangle $\{(x_{j-1}, t_n), (x_{j+1}, t_n), (x_j, t_{n+1})\}$. Une autre façon de dire la même chose consiste à limiter le pas de temps de telle sorte qu'en un pas de temps Δt l'onde ne parcourt pas une distance supérieure à un pas d'espace Δx . On retrouvera cette condition CFL dans le cas de l'équation de transport.

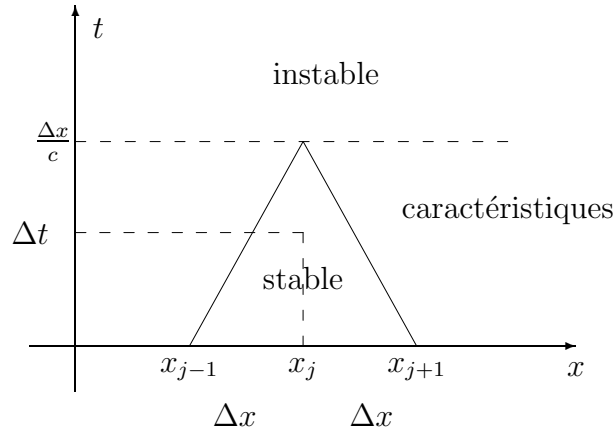


FIG. 12.4 – Domaine de dépendance et condition de stabilité CFL

12.6 Méthodes d'éléments finis pour le problème des membranes vibrantes

On considère le problème bidimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) = c^2 \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Omega \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = u^1(x, y) \quad \text{données : condition initiale} \\ u|_{\Gamma_0} = u_d \quad : \text{conditions aux limites de Dirichlet} \\ c^2 \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = g \quad : \text{conditions aux limites de Neumann} \end{array} \right.$$

12.6.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème s'obtient comme dans le cas stationnaire par multiplication par des fonctions tests indépendantes du temps appartenant, compte tenu des conditions aux limites choisies, à l'espace V des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur Γ_0 . Après intégration en espace sur le domaine Ω et intégration "par parties" par la formule de Green, on obtient le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \quad u : (x, y, t) \longrightarrow u(x, y, t) \text{ telle que :} \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) v(x, y) dx dy + c^2 \iint_{\Omega} \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v dx dy \\ \qquad \qquad \qquad = \iint_{\Omega} f(x, y, t) v(x, y) dx dy + \int_{\Gamma_1} g v d\gamma \quad \forall v \in V \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = u^1(x, y) \quad \text{données} \end{array} \right.$$

12.6.2 Semi-discrétisation en espace par éléments finis

On suppose réalisé un maillage du domaine Ω en éléments finis triangulaires P_k ou quadrangulaires Q_k . Soient w_i les fonctions de base associées aux éléments finis choisis. Notons \mathbf{I} l'ensemble des indices des noeuds du maillage correspondant à une valeur inconnue de la solution u . C'est à dire ici l'ensemble des noeuds n'appartenant pas à Γ_0 . Notons \mathbf{J} l'ensemble des indices des sommets du maillage correspondant à une valeur connue de la solution, donc ici appartenant à Γ_0 .

Comme dans le cas stationnaire nous décomposerons la solution approchée u_h en somme d'une inconnue auxiliaire \tilde{u}_h et d'une fonction connue u_0 prenant les valeurs imposées sur Γ_0 . La solution auxiliaire \tilde{u}_h s'écrira dans la base des w_i pour $i \in \mathbf{I}$ selon :

$$\tilde{u}_h(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_i(t) w_i(x, y)$$

La fonction u_0 , supposée indépendante du temps pour simplifier, sera approchée par une fonction $u_{0,h}$ prenant les valeurs imposées sur Γ_0 et nulle sur tous les noeuds d'indices $i \in \mathbf{I}$

$$u_{0,h}(x, y) = \sum_{i \in \mathbf{J}} u_d(x_i, y_i) w_i(x, y)$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_h(x, y, t) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_i''(t) w_i(x, y)$$

Notons $N_{\mathbf{I}}$ le nombre de noeuds "inconnus" d'indices $i \in \mathbf{I}$. Le problème approché s'écrit sous la forme d'un système différentiel linéaire de $N_{\mathbf{I}}$ équations à $N_{\mathbf{I}}$ fonctions inconnues du temps u_i .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \forall t \in [0, T], \text{ et } \forall j \in \mathbf{I}, \text{ les fonctions } u_j(t) \text{ telles que, } \forall i \in \mathbf{I} : \\ \sum_{j \in \mathbf{I}} \left(\iint_{\Omega} w_j w_i dx dy \right) u_j''(t) + \left(c^2 \iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_j \mathbf{grad} w_i dx dy \right) u_j(t) = \\ \iint_{\Omega} f w_i dx dy + \int_{\Gamma_1} g w_i d\gamma - \sum_{j \in \mathbf{J}} \left(c^2 \iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_j \mathbf{grad} w_i dx dy \right) u_d(x_j, y_j) \\ u_i(0) \quad \text{et} \quad u_i'(0) \quad \text{donnés } \forall i \in \mathbf{I} \end{array} \right.$$

Ce qui donne matriciellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } t \in [0, T], \text{ le vecteur } U(t) \text{ tel que :} \\ MU''(t) + KU(t) = B \\ U(0) \text{ et } U'(0) \quad \text{donnés} \end{array} \right.$$

avec M matrice de masse de coefficients

$$m_{i,j} = \iint_{\Omega} w_j w_i dx dy$$

K matrice de raideur de coefficients

$$k_{i,j} = c^2 \iint_{\Omega} \mathbf{grad} w_j \mathbf{grad} w_i dx dy$$

et B vecteur second membre dont les coefficients sont dans ce cas égaux à

$$B_i = \iint_{\Omega} f(x, y, t) w_i dx dy + \int_{\Gamma_1} g w_i d\gamma - \sum_{j \in \mathbf{J}} k_{i,j} u_d(x_j, y_j)$$

12.7 Discrétisation complète en espace et en temps

Il nous reste à appliquer les schémas en temps déjà présentés dans le cas de discrétisations en différences finies pour obtenir une discrétisation complète du problème.

12.7.1 Schéma du second ordre explicite

On utilise l'approximation

$$U''(t) \approx \frac{U(t + \Delta t) - 2U(t) + U(t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

ce qui conduit au schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ MU^{n+1} = 2MU^n - MU^{n-1} - \Delta t^2 KU^n + \Delta t^2 B \end{array} \right.$$

Remarquons que la dépendance du second membre B par rapport au temps ne poserait pas de problème difficile.

La résolution complète du problème approché nécessite la résolution d'un système matriciel à chaque pas de temps. Nous avons deux possibilités :

1) On factorise une fois pour toutes en début de calcul la matrice de masse M qui est symétrique définie positive sous forme LL^T et on a deux systèmes triangulaires à résoudre à chaque pas de temps.

2) On calcule la matrice de masse de façon approchée sous forme d'une matrice de masse condensée diagonale (lumping). Ce qui est facile pour des éléments P1. L'inversion de la matrice de masse est alors immédiate et on obtient véritablement un schéma numérique explicite.

12.7.2 Schéma implicite

Le choix d'une discrétisation implicite en temps conduit au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ (M + \Delta t^2 K)U^{n+1} = 2MU^n - MU^{n-1} + \Delta t^2 B \end{array} \right.$$

Dans ce cas, que l'on ait ou non condensé la matrice de masse sous forme diagonale, on doit résoudre un système matriciel. Ce que l'on fait en factorisant une fois pour toutes au début du calcul, la matrice $M + \Delta t^2 K$ qui est symétrique définie positive, sous forme LL^T puis en résolvant à chaque pas deux systèmes triangulaires.

12.7.3 Schéma de Newmark

On peut, pour une meilleure précision, utiliser le schéma de **Newmark** pour la discrétisation en temps. On aboutit ainsi à une méthode classique et performante pour la résolution temporelle des problèmes de vibrations.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ (M + \frac{\Delta t^2}{4}K) U^{n+1} = 2(M - \frac{\Delta t^2}{4}K) U^n - (M + \frac{\Delta t^2}{4}K) U^{n-1} + \Delta t^2 B \end{array} \right.$$

12.8 Analyse modale et décomposition orthogonale propre

Pour résoudre le problème des vibrations de structures, une autre méthode couramment utilisée consiste à rechercher les modes propres de vibrations en résolvant un problème de valeurs propres et à représenter second-membre et solutions dans la base de ces modes propres. C'est ce qu'on appelle l'analyse modale. Ainsi, on ramène la résolution de l'EDP à celle de plusieurs équations différentielles ordinaires pour les coefficients du développement de la solution dans la base des modes propres obtenus.

Le calcul des modes propres est coûteux. La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres est un des algorithmes les plus délicats de l'analyse numérique matricielle. Pour réduire ce coût on choisit une base partielle de modes propres.

On peut utiliser des solutions observées ou calculées pour construire une base orthogonale, voire orthonormale par Gram-Schmidt, qui sera utilisée à la place de celle des modes propres. C'est ce qu'on appelle la décomposition orthogonale propre (DOP).

Cette réduction du modèle est très utile, en particulier lorsqu'on s'intéresse à plusieurs configurations similaires ou si l'on veut évaluer la sensibilité de la solution aux petites variations des paramètres du problème.

Suggestions non-exhaustives de lectures complémentaires

Nous donnons quelques indications de lecture en complément de cet ouvrage. Ceci n'est bien entendu pas une liste exhaustive. Certains ouvrages peuvent faire appel à des connaissances mathématiques relativement avancées chez le lecteur, nous les avons identifié avec une (*).

Tout d'abord, sur l'ensemble des techniques numériques, dont les éléments finis :

B. Mohammadi, J.-H. Saiac, *Pratique de la simulation numérique*, Dunod, 2003.

Sur l'analyse mathématique des EDP

(*) H. Brezis , *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

(*) R. Dautray, J-L Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson 1984

(*) J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.

(*) L. Schwartz, *Méthodes mathématiques de la physique*, Hermann, 1965.

I.P. Stavroulakis, S.A. Tersian, *Partial differential equations*, World Scientific, 1999.

Sur les méthodes numériques de base

G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, *Computer methods for mathematical computations*, Prentice-Hall, 1977.

P. Moin, *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2001.

W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd ed., Cambridge 1992.

Sur la résolution numérique des équations différentielles

M. Crouzeix, A. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, 1983.

(*) E. Hairer and S. Nørsett and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I, Nonstiff problems*, 2nd ed., Springer, 1993.

(*) E. Hairer and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations II, Stiff and differential-algebraic problems*, Springer, 1991.

Sur l'analyse numérique matricielle

A. Björck, *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, 1996.

P. Ciarlet, *Analyse numérique matricielle*, Masson, 1994.

P. Joly, *Analyse numérique matricielle*, Editions Cassini, 2002.

P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielle*, Masson, 1993.

B.N. Parlett, *The symmetric Eigenvalue problem*, SIAM, 1998.

Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Manchester University Press, 1992.

Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS, 1996.

G. Strang, *Introduction to applied mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, 1986.

N. Trefethen, D. Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM, 1997.

J.H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, 1965.

Sur les différences finies

R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*, Interscience, Wiley, 1967.

Sur les éléments finis

J.L. Batoz, G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, 1992.

(*) F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer Verlag, 1991.

(*) P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.

T.J.R. Hughes, *The Finite Element method*, Prentice Hall, 1987.

J.F. Imbert, *Analyse des structures par éléments finis*, Cepadues, 1984.

C. Johnson, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.

B. Lucquin, O. Pironneau, *Introduction au calcul scientifique*, Masson-Wiley, 2000.

P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.

O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *La méthode des éléments finis*, AFNOR, 1991.

Sur les volumes finis

(*) E. Godlewski, P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer-Verlag, New-York, 1996.

R.J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Birkhauser, 1999.

(*) J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Second edition, Springer-Verlag, New-York, 1994.

Sur l'optimisation et notions associées

(*) J. Céa, *Optimisation, théorie et algorithmes*, Dunod, 1971.

K. Chadan, D. Colton, L. Paivarina, W. Rundell, *An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems*, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, PA, 1997.

R. Fletcher, *Practical methods of optimization*, Wiley, 2nd ed. 1987.

A. Griewank, *Evaluating derivatives*, SIAM, 2000.

B. Mohammadi, O. Pironneau, *Applied shape Optimization for fluids*, Oxford University Press, 2001.

G. N. Vanderplaats, *Numerical optimization techniques for engineering design*, Mc Graw-Hill, 1986.

Sur l'analyse fréquentielle

R.N. Bracewell, *The Fourier Transform and its applications*, McGraw-Hill, New-York. 2ème édition, 1986.

C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, 1990.

S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press Inc., 1998.

Sur la programmation scientifique

D. Bernardi, F. Hecht, O. Pironneau, *freefem+ documentation*, on the web at www.freefem.org, 2001.

F. Hecht, O. Pironneau, *Analyse numérique en C++*, collection SMAI, Springer, 2003.

W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press New York, 1986.

Sur le maillage

P.J. Frey, P.L. George, *Maillages*, Hermès, 1999.

P.L. George, *Automatic triangulation*, Wiley, 1996.

Sur les modèles mathématiques en finance

R. Jarrow, A. Rudd, *Option pricing*, R. Irwin publishing co. Illinois, 1983.

P. Wilmott, x. Howinson, J. Dewynne, *The mathematics of financial derivatives, a student introduction*, Cambridge U press, 1997.

Sur les modèles mathématiques et numériques en mécanique des fluides

(*) R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Springer-Verlag, 1984.

C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Wiley, 1976.

(*) B. Mohammadi, O. Pironneau, *Analysis of the k-epsilon turbulence model*, Wiley, 1992.

R. Peyret, T.D. Taylor, *Computational methods for fluid flow*, Springer Verlag, 1982.

O. Pironneau, *Méthode des éléments finis en fluide*, Masson, 1995.