MÉMOIRE DE RECHERCHE

Approximation numérique d'ordre élevé de l'équation de Saint Venant

Auteurs :
Brice GONEL
Romain PINGUET

Professeur encadrant :
Thomas REY

Table des matières

1 Introduction et description des équations

Ici, il s'agit de décrire les différentes quantités en jeu (h, u, q et Z), d'énoncer les équations et si possible d'expliquer comment on peut arriver à ces équations. Il y a deux méthodes a priori : une heuristique qui correspond à la démarche historique de Saint-Venant ; et une plus actuelle qui utilise les équations de Navier-Stokes.

2 Découverte du modèle et premières propriétés qualitatives

Proposition 1. *La vitesse u vérifie la loi de conservation hyperbolique scalaire suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2} + g(h+Z)) = 0 \tag{1}$$

Démonstration. Puisque $q = h.u$, la dérivée spatiale de q s'écrit :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

et la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = u\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3}$$

Alors en utilisant l'équation (mettre ici ref) du système, la dérivée temporelle donne aussi la relation

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -u\frac{\partial q}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

La loi de conservation que l'on cherche à montrer est alors une réécriture de l'équation (mettre ici ref) du système. On a en effet :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2}) = -gh\frac{\partial Z}{\partial x}$$

En développant la dérivée par rapport à x et en utilisant (4) :

$$-u\frac{\partial q}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial x} + 2hu\frac{\partial u}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} = -gh\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow -u\frac{\partial q}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial x} + 2hu\frac{\partial u}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} + gh\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow u\left[-\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{h}{u}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x}\right] + h\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2} + g(h+Z))\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow u\left[-\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{h}{u}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x}\right] + h\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2} + g(h+Z))\right] = 0$$

D'après (2), une simplification s'opère dans les crochets de gauche et on obtient :

$$u\left[\frac{h}{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] + h\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2} + g(h+Z))\right] = 0$$

Il suffit alors de diviser par $h > 0$ pour obtenir le résultat (1).

□

3 Implémentation du schéma de Rusanov

3.1 Présentation du schéma et résultats de convergence

Dans cette partie, il s'agit de résoudre numériquement le système de Saint-Venant. Posons

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \ \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \text{ et } \ \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial Z}{\partial x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{U}$ désigne le vecteur inconnu, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ la fonction flux et $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ le terme source.

Proposition 2. *Posons le vecteur $\boldsymbol{W} = (h, u)^T$ (variable dite non conservative). $\boldsymbol{W}$ vérifie le système quasi-linéaire suivant :*

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{W})\frac{\boldsymbol{W}}{\partial x} = 0$$

avec $\mathbb{A}(\boldsymbol{W})$ définie par :

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}$$

Démonstration. □

Proposition 3. *La matrice $\mathbb{A}(\boldsymbol{W})$ est diagonalisable et on a :*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{W})^{-1}\mathbb{A}(\boldsymbol{W})\mathbb{P}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{D}(\boldsymbol{W})$$

où

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} u + \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u - \sqrt{gh} \end{pmatrix} \ \ et \ \ \mathbb{P}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} & -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Le résultat est direct en faisant le produit matriciel si on connait les expressions de $\mathbb{D}(\mathbf{W})$ et $\mathbb{P}(\mathbf{W})$. Dans le cas contraire, on procède comme suit :

On détermine les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$, ce qui conduit à chercher les racines du polynôme (d'indéterminée λ) suivant :

$$\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda I) = \begin{vmatrix} u - \lambda & h \\ g & u - \lambda \end{vmatrix} = (u - \lambda)^2 - gh.$$

Or puisque g et h sont > 0,

$$(u - \lambda)^2 - gh = 0 \Leftrightarrow \lambda u + \sqrt{gh} \ \text{ ou } \ \lambda u - \sqrt{gh}$$

et comme la matrice admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice diagonale est alors

$$\mathbb{D}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u + \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u - \sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer la matrice de passage $\mathbb{P}(\mathbf{W})$. Il s'agit de trouver $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $u+\sqrt{gh}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $u-\sqrt{gh}$.

Pour le vecteur propre associé à $u+\sqrt{gh}$:

$$\mathbb{A}(\mathbf{W})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (u+\sqrt{gh})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système lié donc il est équivalent de raisonner sur la première équation :

$$au + bh = au + a\sqrt{gh}$$

$$\Leftrightarrow bh = a\sqrt{gh}$$

et on voit que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{h}/\sqrt{g} \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

De même, pour le vecteur propre associé à $u-\sqrt{gh}$:

Cette fois on arrive à

$$cu + dh = cu - c\sqrt{gh}$$

$$\Leftrightarrow dh = -c\sqrt{gh}$$

et on voit que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{h}/\sqrt{g} \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

D'où finalement :

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} & -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 4. *La matrice jacobienne de* $\mathbf{F}$ *admet deux valeurs propres distinctes* $\lambda_1(\boldsymbol{U})$ *et* $\lambda_2(\boldsymbol{U})$ *qui sont égales aux valeurs propres de* $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.

Démonstration. La matrice jacobienne de $\mathbf{F}$ est la suivante :

$$J_{\mathbf{F}}(h,q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2}+gh & \frac{2q}{h} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs propres de cette matrice, il faut calculer les racines du polynôme donné par

$$\det(J_{\mathbf{F}}(h,q)) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2}+gh & \frac{2q}{h}-\lambda \end{vmatrix}$$

et

$$-\lambda(\frac{2q}{h} - \lambda) + \frac{q^2}{h^2} - gh = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - gh = 0.$$

Puisque $\Delta = 4u^2 - 4(u^2 - gh) = 4gh > 0$, il y a deux racines distinctes

$$\lambda_1(\mathbf{U}) = \frac{2u + 2\sqrt{gh}}{2} \text{ et } \lambda_2(\mathbf{U}) = \frac{2u - 2\sqrt{gh}}{2}.$$

En simplifiant par 2 au numérateur et dénominateur, on voit qu'il s'agit des valeurs propres de $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.

□

3.2 Validation de l'implémentation avec des tests

Voyons quelques exemples de solutions calculées à l'aide du schéma afin de valider l'implémentation.

4 Utilisation des limiteurs de pente pour une montée en ordre

5 Passage au cas 2D

Bibliographie

[1] R. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2004