MÉMOIRE DE RECHERCHE

Approximation par volumes finis de l'équation de Saint Venant

Auteurs :
Brice GONEL
Romain PINGUET

Professeur encadrant :
Thomas REY

Table des matières

1 Introduction

Les équations de Saint-Venant permettent de modéliser le comportement d'un écoulement en eau peu profonde, comme un canal ou un bord de plage. Ces équations, introduites à la fin des années 1880, sont bien adaptées à modélisation et à la simulation numérique de phénomènes catastrophiques, comme les inondations ou les tsunamis.

Ce mémoire est consacré à la présentation de ces équations et à l'étude d'un schéma d'approximation par volumes finis appelé le schéma de Rusanov.

2 Description et dérivation des équations

Ici, il s'agit d'énoncer les équations, de décrire les différentes quantités en jeu (h, u, q et Z) et d'expliquer comment on peut arriver à ces équations.

2.1 Description des équations

Le système de Saint-Venant avec terme source (qui est aussi désigné par le nom « équations d'écoulements en eau peu profonde ») est le suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2(t,x)}{h(t,x)} + g\frac{h^2(t,x)}{2}\right) = -gh(t,x)\frac{\partial Z}{\partial x}(x). \tag{2}$$

Celui-ci permet de décrire un écoulement d'eau unidirectionnel où $h(t,x) > 0$ représente la hauteur d'eau, $u(t,x)$ désigne la vitesse du fluide, $q(t,x) = h(t,x)u(t,x)$ le débit du fluide et $Z(x)$ la topographie du canal ; $t \geq 0$ étant le temps, $x \in \mathbb{R}$ la position spatiale dans le cours d'eau et g la constante de gravitation.

Dans ce système, Z ne dépend pas du temps t. On fait ainsi l'hypothèse que le fond ne s'érode pas au cours du temps ; ce qui parait raisonnable dans de nombreuses situations (un fond rocheux sur une courte durée, par exemple).

2.2 Dérivation des équations

Les équations d'Euler sont des équations aux dérivées partielles non linéaires issues de la mécanique des fluides qui permettent de décrire l'écoulement de liquides et de gaz. Dans cette partie, nous allons montrer que dans le cadre de certaines hypothèses (l'hypothèse d'une hauteur d'eau peu profonde notamment), ces équations mènent au système de Saint-Venant.

Rappelons la règle de Leibniz [3] qui permet de calculer la dérivée par rapport à x d'une fonction de la forme $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\ \mathrm{d}t$.

Proposition 1 (Règle de Leibniz)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $\mathbb{R}$, et soient a et b deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'intégrale paramétrique F*

définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y$ *est dérivable et :*

$$F'(x) = f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \mathrm{d}y. \tag{3}$$

Démonstration. Posons $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, l'application définie par $H(u,v,x) = \int_u^v f(x,y)\ dy$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u,v,x) = \frac{\partial}{\partial u}(-\int_v^u f(x,u)) = -f(x,u),$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u,v,x) = \frac{\partial}{\partial v}(\int_u^v f(x,u)) = f(x,v).$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on a

$$\frac{\partial H}{\partial x}(u,v,x) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dy.$$

A partir de là, le théorème est une simple chain rule :

$$F'(x) = (H(a(x),b(x),x))'$$

$$= \begin{bmatrix} -f(x,a(x)) & f(x,b(x)) & \frac{\partial H}{\partial x}(a(x),b(x),x) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a'(x) \\ b'(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= f(x,b(x))b'(x) - f(x,a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ dy.$$

□

Les équations d'Euler

Dans ce paragraphe, nous allons d'abord parler des équations d'Euler. Ce sont des équations qui forment un système hyperbolique non-linéaire. Les équations expriment des lois de conservation qui gouvernent la dynamique des fluides. C'est à partir de ces équations, et moyennant certaines hypothèses, que nous allons dériver les équations de Saint-Venant.

Notons $\rho(x,y,z,t)$ la masse volumique du fluide, $p(x,y,z,t)$ la pression, $u(x,y,z,t)$ la composante selon l'axe (Ox) de la vitesse, $v(x,y,z,t)$ sa composante selon l'axe (Oy) et $w(x,y,z,t)$ sa composante selon l'axe (Oz). Nous noterons alors par la suite $\mathbf{V} = (u,v,w)$ le vecteur vitesse dont les composantes sont les vitesses u, v et w.

Les trois équations d'Euler sont les suivantes :

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0, \tag{4}$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y + (\rho vw)_z = 0, \tag{5}$$

$$(\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2 + p)_z = 0. \tag{6}$$

L'équation (4) est celle qui va nous servir à dériver la deuxième équation de Saint-Venant énoncée. A ces 3 équations, on associe aussi parfois l'équation

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \tag{7}$$

loi de conservation qui va nous servir pour dériver la première équation du système.

Dérivation du système de Saint-Venant

Définition 1. Soit $\mathbf{V} = (u, v, w)$ la vitesse définie comme avant. Soit f une fonction qui dépend de t, x, y et z. On définit (et on note) la dérivée particulaire de f par $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$.

Voici les hypothèses nécessaires à la dérivation des équations de Saint-Venant :

- **(H1)** : Le fluide est incompressible,
- **(H2)** : h, u et v sont invariantes selon l'axe (Oy) (puisqu'il s'agit d'étudier un canal, on ramène l'étude au plan $(y = 0)$ en négligeant les variations selon la largeur du canal),
- **(H3)** : La vitesse u est constante selon l'axe (Oz),
- **(H4)** : la topographie Z est constante au cours du temps.

Nous utiliserons aussi les conditions de passage suivantes :

- **(H5)** : $\frac{D}{Dt}(Z + h - z) = 0$ en z = Z+h,
- **(H6)** : $\frac{D}{Dt}(Z - z) = 0$ en z = Z.

La première condition **(H5)** traduit l'hypothèse que la composante normale de la vitesse à la surface est nulle, autrement dit qu'il n'y a pas de flux entrant par la surface de l'eau. La deuxième **(H6)** traduit le même phénomène mais au niveau du fond de l'eau.

D'après **(H1)**, on peut sortir ρ des dérivées. Alors (4) se réécrit en

$$u_t + (u^2)_x + (uv)_y + (uw)_z = -\frac{1}{\rho} p_x. \tag{8}$$

En supposant **(H2)** on a que les quantités h et u sont invariantes selon l'axe (Oy). Dans ces conditions, le terme $(uv)_y$ est nul et on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{9}$$

Maintenant, on intègre entre $z = Z$ et $z = Z + h$:

$$\int_Z^{Z+h} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2)\right] \mathrm{d}z + [uw]_Z^{Z+h} = -\frac{1}{\rho}\int_Z^{Z+h} \frac{\partial P}{\partial x}\, \mathrm{d}z. \tag{10}$$

Le terme $[uw]_Z^{Z+h}$ disparaît étant donné que la vitesse verticale w est nulle à la surface libre et au fond.

Avec la règle de Leibniz, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_Z^{Z+h} u\,\mathrm{d}z &= \int_Z^{Z+h}\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}z + u(z=Z+h)\frac{\partial}{\partial t}(Z+h) - u(z=Z)\frac{\partial Z}{\partial t}\\ &= \int_Z^{Z+h}\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}z + u(z=Z+h)\frac{\partial h}{\partial t},\end{aligned} \tag{11}$$

la suppression du terme $\frac{\partial Z}{\partial t}$ venant de l'hypothèse **(H4)** selon laquelle le fond Z est constant au cours du temps.

Et d'autre part on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_Z^{Z+h} u^2\,\mathrm{d}z = \int_Z^{Z+h}\frac{\partial}{\partial x}(u^2)\,\mathrm{d}z + u^2(z=Z+h)\frac{\partial}{\partial x}(Z+h) - u^2(z=Z)\frac{\partial Z}{\partial x}. \tag{12}$$

Donc en injectant (11) et (12) dans (10) on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_Z^{Z+h} u\,\mathrm{d}z\right] - u(z=Z+h)\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_Z^{Z+h} u^2\,\mathrm{d}z\right] - u^2(z=Z+h)\frac{\partial}{\partial x}(Z+h)\\ &+ u^2(z=Z)\frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\int_Z^{Z+h}\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{13}$$

Si l'on suppose que la vitesse u est constante selon l'axe (Oz), on a que $\int_Z^{Z+h} u\,\mathrm{d}z = uh$ et $\int_Z^{Z+h} u^2\,\mathrm{d}z = u^2h$, et donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h) - u(z=Z+h)\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u(z=Z+h)\frac{\partial}{\partial x}(Z+h)\right) = -\frac{1}{\rho}\int_Z^{Z+h}\frac{\partial p}{\partial t}\,\mathrm{d}z. \tag{14}$$

Une simplification s'effectue grâce à **(H5)**. $\frac{D}{Dt}(Z+h-z) = 0$ en z = Z+h équivaut à $\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial Z}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ en z = Z+h (en utilisant les invariances et le fait que la vitesse verticale w est nulle à la surface libre). Et donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(z=Z+h)\frac{\partial}{\partial x}(Z+h) = 0.$$

L'équation 14 se réduit alors en

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) = -\frac{1}{\rho}\int_Z^{Z+h}\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z. \tag{15}$$

Encore une fois avec la règle de Leibniz et utilisant la formule d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_Z^{Z+h} p\,\mathrm{d}z = \int_Z^{Z+h}\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z + p(Z+h)\frac{\partial}{\partial x}(Z+h) - p(Z)\frac{\partial Z}{\partial x} = \int_Z^{Z+h}\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z - \rho g h\frac{\partial Z}{\partial x},$$

la pression étant considérée égale à 0 à la surface de l'eau. En utilisant encore cette formule on a :

$$\begin{aligned}\int_Z^{Z+h}\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}z &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho g h \times h) + \rho g h\frac{\partial Z}{\partial x}\\ &= \rho(g\frac{\partial}{\partial x}(h^2) + g h\frac{\partial Z}{\partial x}).\end{aligned} \tag{16}$$

Et en combinant 15 et 16 on arrive à la deuxième équation de Saint-Venant en remplaçant le second membre :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2}) = -g h\frac{\partial Z}{\partial x}. \tag{17}$$

Pour obtenir la première équation, partons de 7 et intégrons entre $z = Z$ et $z = Z + h$:

$$\int_Z^{Z+h}(u_x + v_y)\,dz + w|_{z=Z+h} - w|_{z=Z} = 0. \tag{18}$$

Les conditions (**H5**) et (**H6**) donnent :

$$[\frac{\partial(Z+h)}{\partial t} + u.\frac{\partial(Z+h)}{\partial x} + v.\frac{\partial(Z+h)}{\partial y} - w]|_{z=Z+h} = 0, \tag{19}$$

$$[u.Z_x + v.Z_y + w]|_{z=Z} = 0. \tag{20}$$

Et grâce à la formule de Leibniz, en réinsérant 19 et 20 dans 18, on a finalement :

$$\frac{\partial(Z+h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_Z^{Z+h} u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_Z^{Z+h} v\,dz. \tag{21}$$

Nous pouvons davantage simplifier cette équation en observant que u et v sont indépendants de z, ainsi que Z indépendant du temps. Cette équation devient donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u.h) + \frac{\partial}{\partial y}(v.h) = 0, \tag{22}$$

soit la première équation de Saint Venant.

Les deux équations 22 et 17 forment un système d'équations aux dérivées partielles d'inconnues h et q (ou h et u). Etant données des conditions de bord et des conditions

initiales, il existe une unique solution que l'on peut calculer numériquement à l'aide d'un schéma de type volumes finis.

3 Découverte du modèle et premières propriétés qualitatives

Dans cette

Proposition 2. *La vitesse u vérifie la loi de conservation hyperbolique scalaire suivante :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + g(Z+h)\right) = 0. \tag{23}$$

Démonstration. Puisque $q = h.u$, la dérivée spatiale de q s'écrit

$$\frac{\partial q}{\partial x} = u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{24}$$

et la dérivée temporelle

$$\frac{\partial q}{\partial t} = u\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{25}$$

Alors en utilisant l'équation 1 du système, la dérivée temporelle donne aussi la relation

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -u\frac{\partial q}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{26}$$

La loi de conservation que l'on cherche à montrer est alors une réécriture de l'équation 2 du système. On a en effet :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2}\right) = -gh\frac{\partial Z}{\partial x}.$$

En développant la dérivée par rapport à x et en utilisant (26) :

$$-u\frac{\partial q}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial x} + 2hu\frac{\partial u}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} = -gh\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow -u\frac{\partial q}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial x} + 2hu\frac{\partial u}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} + gh\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow u\left[-\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{h}{u}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x}\right] + h\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + g(Z+h)\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow u\left[-\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{h}{u}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x}\right] + h\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + g(Z+h)\right)\right] = 0.$$

D'après (24), une simplification s'opère dans les crochets de gauche et on obtient :

$$u\left[\frac{h}{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right] + h\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + g(Z+h)\right)\right] = 0.$$

Il suffit alors de diviser par $h > 0$ pour obtenir le résultat (23).

□

Pour la suite, posons :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial Z}{\partial x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{U}$ désigne le vecteur inconnu, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ la fonction flux et $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ le terme source. Avec ces notations, le système de départ se réécrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) = \mathbf{B}(\mathbf{U}).$$

Nous allons faire l'hypothèse que $Z \equiv 0$. Les résultats que nous allons montrer à partir de maintenant ne seront valables que pour une topographie Z nulle. En particulier, l'utilisation du schéma de Rusanov hors de ce cadre relèvera d'une démarche empirique.

Proposition 3. *Posons le vecteur $\boldsymbol{W} = (h, u)^T$ (variable dite non conservative). $\boldsymbol{W}$ vérifie le système quasi-linéaire suivant :*

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{W})\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x} = 0.$$

avec $\mathbb{A}(\boldsymbol{W})$ définie par :

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On a $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \begin{pmatrix} h_t \\ u_t \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \begin{pmatrix} h_x \\ u_x \end{pmatrix}$.

En effectuant le produit matriciel et en sommant les termes dans l'équation $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbb{A}(\mathbf{W})\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} h_t + uu_x + hu_x \\ u_t + gh_x + uu_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_t + q_x \\ u_t + (gh + u^2)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la première équation du système (1) et la loi de conservation (23) dans le cas $Z \equiv 0$.

□

Proposition 4. *La matrice $\mathbb{A}(\boldsymbol{W})$ est diagonalisable et on a :*

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{W})^{-1}\mathbb{A}(\boldsymbol{W})\mathbb{P}(\boldsymbol{W}) = \mathbb{D}(\boldsymbol{W}),$$

où

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} u + \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u - \sqrt{gh} \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} & -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Le résultat est direct en faisant le produit matriciel si on connait les expressions de $\mathbb{D}(\mathbf{W})$ et $\mathbb{P}(\mathbf{W})$. Dans le cas contraire, on procède comme suit :

On détermine les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}(\mathbf{W})$, ce qui conduit à chercher les racines du polynôme (d'indéterminée λ) suivant :

$$\det(\mathbb{A}(\mathbf{W}) - \lambda I) = \begin{vmatrix} u-\lambda & h \\ g & u-\lambda \end{vmatrix} = (u-\lambda)^2 - gh.$$

Or puisque g et h sont > 0,

$$(u-\lambda)^2 - gh = 0 \Leftrightarrow \lambda u + \sqrt{gh} \quad \text{ou} \quad \lambda u - \sqrt{gh},$$

et comme la matrice admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. La matrice diagonale est alors

$$\mathbb{D}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u+\sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u-\sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer la matrice de passage $\mathbb{P}(\mathbf{W})$. Il s'agit de trouver $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $u+\sqrt{gh}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $u-\sqrt{gh}$.

Pour le vecteur propre associé à $u+\sqrt{gh}$:

$$\mathbb{A}(\mathbf{W}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (u+\sqrt{gh}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un système lié donc il est équivalent de raisonner sur la première équation :

$$au + bh = au + a\sqrt{gh}$$

$$\Leftrightarrow bh = a\sqrt{gh},$$

et on voit que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{h}/\sqrt{g} \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

De même, pour le vecteur propre associé à $u-\sqrt{gh}$:

Cette fois on arrive à

$$cu + dh = cu - c\sqrt{gh}$$

$$\Leftrightarrow dh = -c\sqrt{gh},$$

et on voit que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{h}/\sqrt{g} \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

D'où finalement :

$$\mathbb{P}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} & -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 5. *La matrice jacobienne de* $\boldsymbol{F}$ *admet deux valeurs propres distinctes* $\lambda_1(\boldsymbol{U})$ *et* $\lambda_2(\boldsymbol{U})$ *qui sont égales aux valeurs propres de* $\mathbb{A}(\boldsymbol{W})$.

Démonstration. La matrice jacobienne de $\mathbf{F}$ est la suivante :

$$J_{\mathbf{F}}(h,q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & \frac{2q}{h} \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les valeurs propres de cette matrice, il faut calculer les racines du polynôme donné par

$$\det(J_{\mathbf{F}}(h,q)) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & \frac{2q}{h} - \lambda \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} &-\lambda(\frac{2q}{h} - \lambda) + \frac{q^2}{h^2} - gh = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - gh = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\Delta = 4u^2 - 4(u^2 - gh) = 4gh > 0$, il y a deux racines distinctes

$$\lambda_1(\mathbf{U}) = \frac{2u + 2\sqrt{gh}}{2} \text{ et } \lambda_2(\mathbf{U}) = \frac{2u - 2\sqrt{gh}}{2}.$$

En simplifiant par 2 au numérateur et dénominateur, on voit qu'il s'agit des valeurs propres de $\mathbb{A}(\mathbf{W})$.

□

Les expressions de ces valeurs propres vont être utiles par la suite : elles vont en effet apparaître de façon explicite dans le schéma que nous allons utiliser ; et donc dans le code de l'implémentation.

Plus précisément : le système d'EDP de Saint-Venant est tel que la matrice jacobienne du flux admet deux valeurs propres distinctes. On parle alors de système hyperbolique. Dans ce contexte, on peut appliquer le schéma dit de Rusanov, auquel est associé une condition CFL qui assure la stabilité. Nous allons développer ce point dans la partie suivante consacrée à ce schéma.

4 Le schéma de Rusanov

Le schéma de Rusanov est une méthode de volumes finis pour approcher numériquement des équations aux dérivées partielles. Avant de rentrer plus dans les détails

du schéma, et en s'appuyant sur [1] et [4] , expliquons rapidement ce qu'est une méthode de volumes finis et expliquons les principales différences avec d'autres méthodes numériques.

Les méthodes des volumes finis sont similaires aux méthodes de différences finies et d'éléments finis en ce sens qu'il s'agit d'établir un maillage et de déterminer des approximations de la solution de l'EDP aux points du maillage. Entre différences finies et volumes finis, la principale différence réside dans ce que l'on approche : pour les différences finies, on approche des dérivées à l'aide de différences divisées ; tandis que les volumes finis reposent sur des approximations d'intégrales. Et entre volumes finis et éléments finis, la principale différence est le type de formulation : les volumes finis s'appuient sur une formulation forte alors que les éléments finis découlent d'une formulation faible.

4.1 Présentation du schéma et résultats de convergence

Divisons tout d'abord notre espace et notre temps avec les pas Δx et Δt, respectivement. On cherche à discrétiser l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) = 0 \quad \textbf{Équation sans terme source}.$$

On pose ainsi U_i^n l'approximation de U autour de la position x_i à l'étape t^n. On peut donc noter :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n)\, dx.$$

En intégrant le premier terme de 4.1 entre $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$, on a grâce à un développement de Taylor :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\, dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{U(x, t^{n+1}) - U(x, t^n)}{\Delta t}\, dx = \Delta x \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}.$$

Et en intégrant le second terme de 4.1 :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial \mathbf{F(U)}}{\partial x}\, dx = F(U(x_{i+1/2})) - F(U(x_{i-1/2})) = \mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}.$$

On peut faire l'hypothèse que le flux de U passant en $x_{i+1/2}$, soit $\mathcal{F}_{i+1/2}$, dépend uniquement de U_i et U_{i+1}. On a finalement :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0.$$

Toute la question est donc de savoir comment approcher le flux numérique $\mathcal{F}_{i+1/2}^n$ en fonction de U_i^n et U_{i+1}^n. On notera par la suite que $\mathcal{F}_{i+1/2}^n = f(U_i^n, U_{i+1}^n)$.

Approche naïve : Flux centré

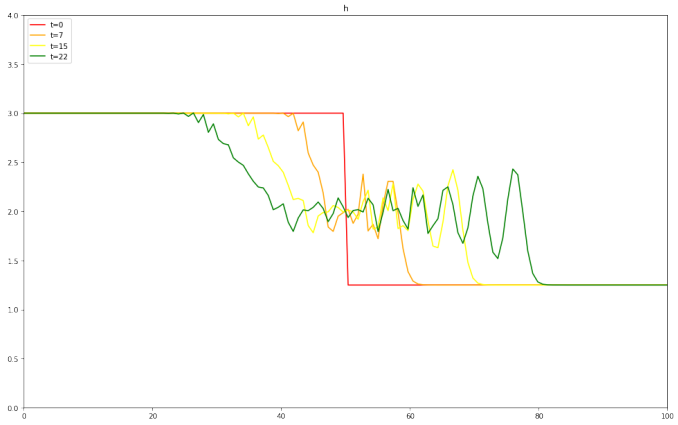
On pourrait d'abord penser à approcher le flux $\mathcal{F}^n_{i+1/2}$ par la moyenne entre x_i et x_{i+1} :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2}.$$

Et ainsi :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n)).$$

Malheureusement, ce flux est instable comme le prouvent ces simulations de rupture de barrage :



Les oscillations de la hauteur d'eau h sont amplifiées au cours du temps.

Flux de Lax-Friedrichs

Essayons maintenant avec un terme supplémentaire :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \alpha\frac{U_{i+1} - U_i}{2} \quad avec \quad \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

On a donc la formule suivante pour calculer U_i^{n+1} :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\frac{F(U_{i-1}) + F(U_{i+1})}{2} - \alpha\frac{U_i - U_{i-1}}{2} - \frac{F(U_{i+1}) + F(U_i)}{2} + \alpha\frac{U_{i+1} - U_i}{2}).$$

En simplifiant, car $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$, on trouve que :

$$U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n).$$

On verra dans la section suivante que l'on peut choisir α plus finement et ayant les bonnes propriétés en fonction des valeurs propres du système étudié.

Flux de Rusanov

Revenons tout d'abord aux critères de choix d'un flux numérique. Deux conditions sont importantes : la consistance et la stabilité. C'est en effet la réunion de ces deux conditions qui permet de conclure la convergence du schéma.

Définition 2. On dit que le schéma est consistant avec le système étudié si :

$$f(U, U) = U \quad \forall U.$$

Définition 3. On dit que le schéma est stable s'il préserve un domaine convexe invariant noté $\mathcal{C}$, autrement dit, que les erreurs ne soient pas amplifiées :

$$U_i^n \in \mathcal{C} \Rightarrow U_i^{n+1} \in \mathcal{C}.$$

En choisissant une valeur de α bien posée dans le flux de Lax-Friedrichs, on obtient le flux de Rusanov :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \alpha \frac{U_{i+1} - U_i}{2},$$

avec $\alpha = \sup_{U=U_i, U_{i+1} j=1,2} \sup |\lambda_j(U)|$. Ce flux numérique vérifie bien les conditions de consistance et de stabilité.

4.2 Validation de l'implémentation avec des tests

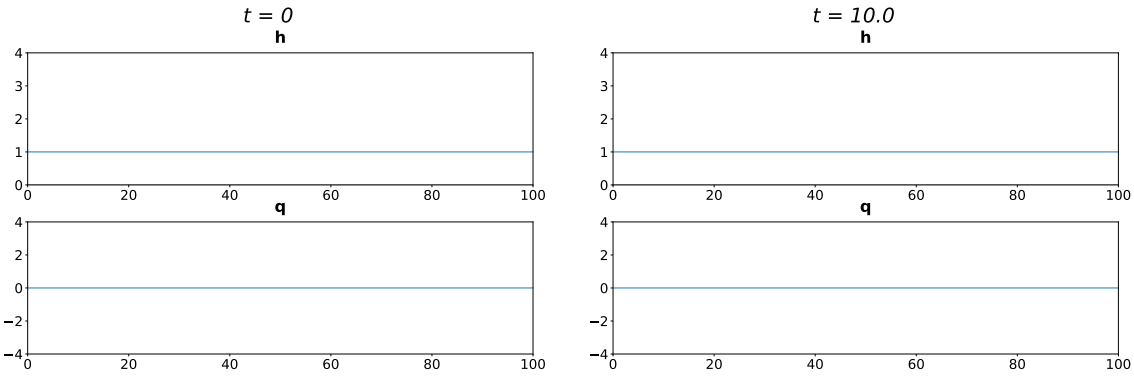
Dans cette partie, nous allons effectuer des tests de notre implémentation (dont le code est en annexe). Dans un premier temps, nous allons comparer nos résultats à des tests trouvés dans des ouvrages de référence. Dans un second temps, nous allons observer numériquement la convergence des solutions calculées.

Dans tous nos tests, les conditions aux bords choisies sont des conditions de Neumann homogène. Les dérivées partielles en espace sont prises égales à 0 au bord du domaine. Du point de vue de l'implémentation, les bords prennent la même valeur que leur voisin.

Quelques exemples

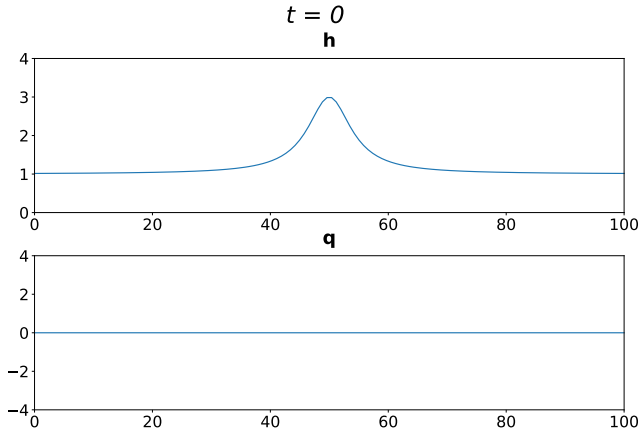
Le test du lac

Voyons d'abord un premier test trivial : en prenant une hauteur d'eau plate et un débit initial identiquement égal à zéro, on s'attend à ce que l'eau reste plate au cours du temps. On vérifie alors avec les plots ci-dessous que le schéma fonctionne bien sur cet exemple.

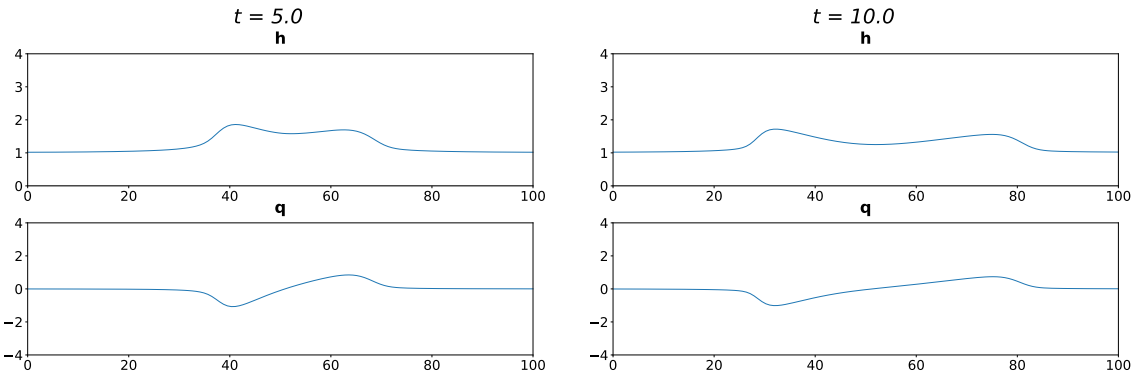


Le test de la goutte d'eau

Partons maintenant de la condition initiale suivante : une bosse d'eau au milieu du domaine sans débit initial.

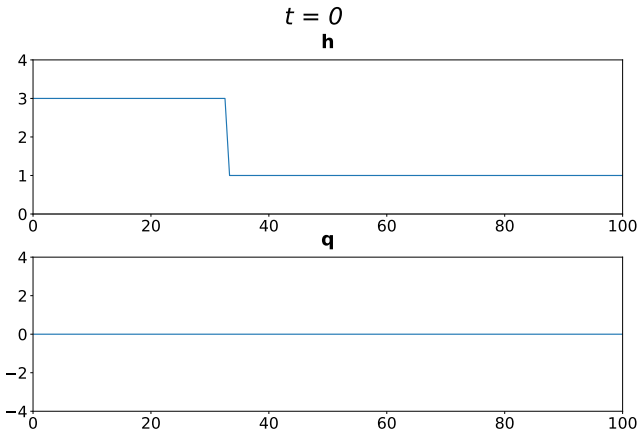


Intuitivement, on s'attend à ce que la « goutte » tombe et forme deux vagues qui partent vers chacun des deux bords du domaine. C'est aussi ce que nous dit la référence [1] à la page 257. Et effectivement, voici ce que l'on observe (après 5 secondes et 10 secondes) :

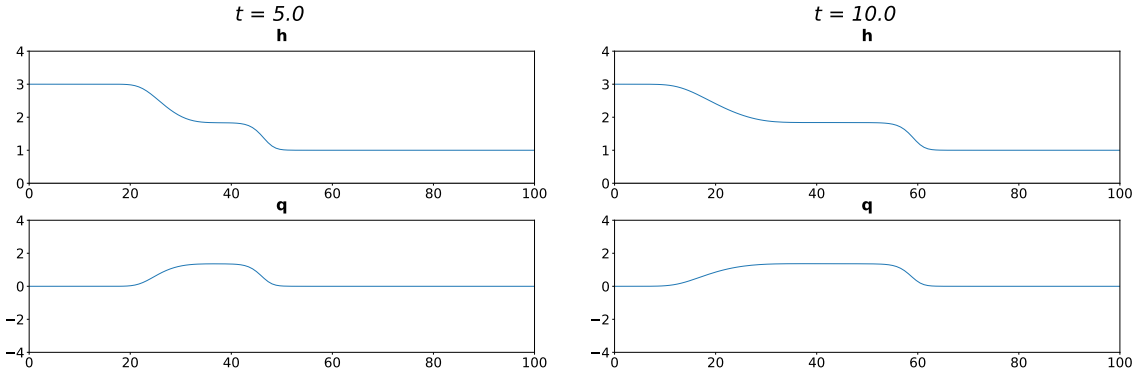


Le test de la rupture de barrage

Regardons maintenant un dernier test classique dans la littérature : la rupture de barrage.



L'eau forme une courbe en escalier (d'une seule marche) comme si elle était contenue dans une digue. On observe son évolution comme si la digue disparaissait juste après l'instant initial ; d'où le nom de rupture de barrage. On a le résultat suivant :



Ce résultat est conforme à ce que l'on peut voir dans [1] page 259. La dynamique des solutions obtenues par notre implémentation est donc la bonne sur ces quelques tests.

Influence du pas spatial

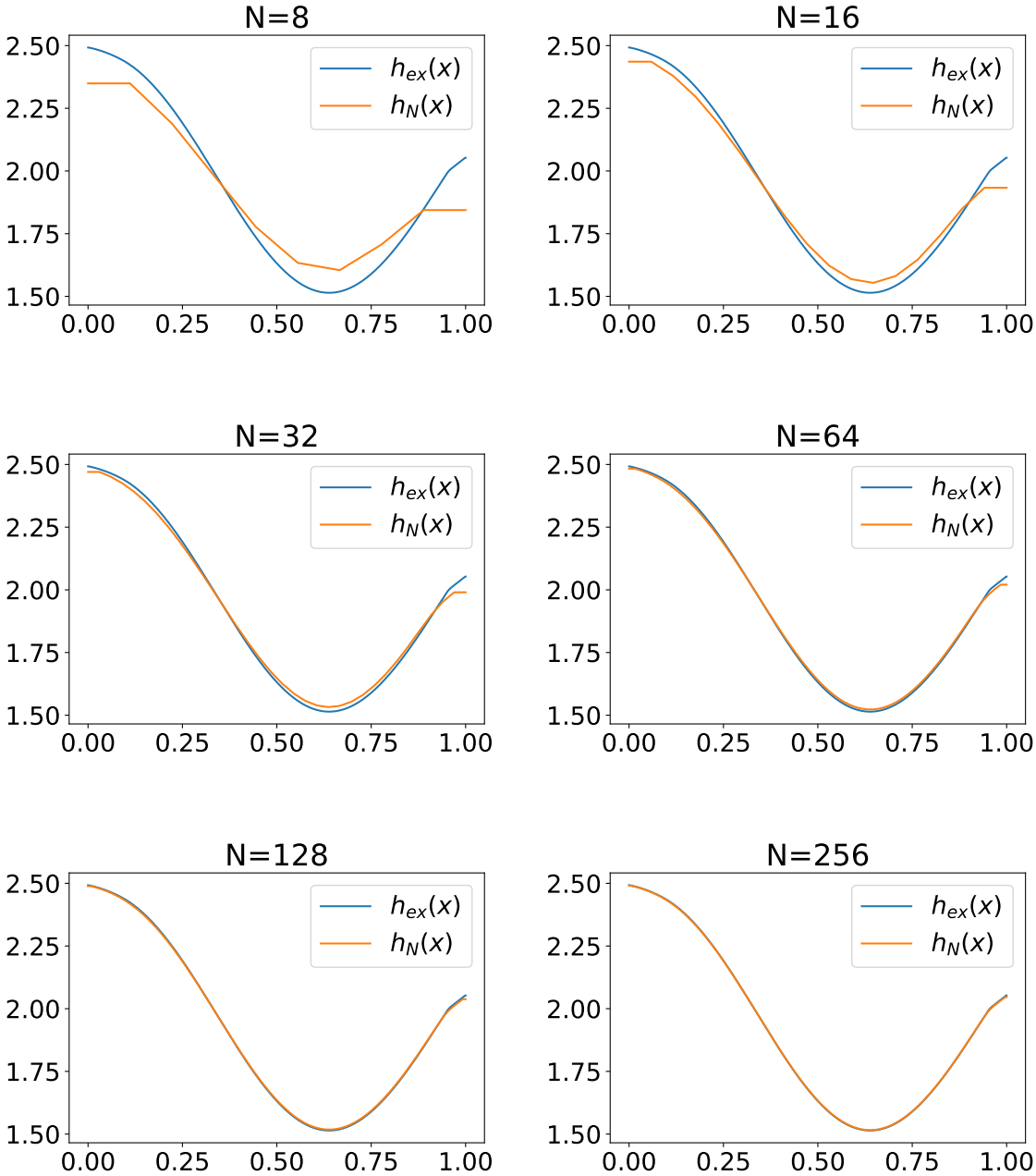
Nous allons faire une étude de convergence de type Cauchy : si la suite des approximations converge vers une limite, alors l'écart entre deux approximations numériques peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite, pourvu que les paramètres de grilles soient assez grands (ou petits selon que l'on considère le nombre de points ou le pas).

Puisque le schéma de Rusanov est convergeant, on peut considérer que la solution calculée est la solution exacte (ou du moins est très proche de la solution exacte) lorsque le pas d'espace est très petit. Notons U_{ex} cette solution que l'on considère exacte et U_N la solution obtenue lorsque le nombre de points (strictement à l'intérieur du domaine) est N. On peut alors procéder comme il est courant

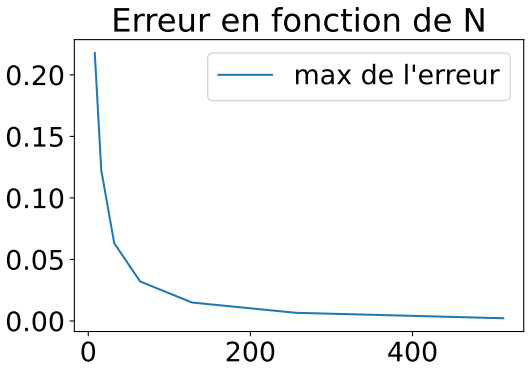
de le faire au calcul de numérique de l'ordre du schéma, en effectuant le plot de $max_{x_i}|U_{ex}(x_i) - U_N(x_i)|$ ou de la norme L^2 discrète de $U_{ex} - U_N$ en fonction de N ; les x_i étant les points de la discrétisation.

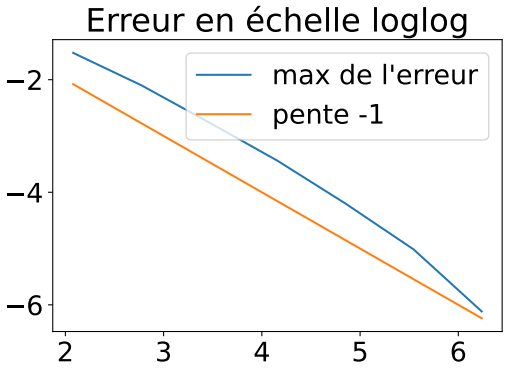
Pour faire cette étude, on prend arbitrairement **xMin** $= 0$, **xMax** $= 1$ pour les bords du domaine et **Tmax** $= 0,03$ pour le temps final de la simulation. Pour les conditions initiales on prend $h_0(x) = 2 + \cos(5x)/2$ et $q_0 \equiv 1$ pour la hauteur d'eau et le débit à l'instant initial. La topographie est prise constante égale à 0 ($Z \equiv 0$).

La convergence s'observe d'abord visuellement, en faisant le plot des solutions calculées pour des valeurs de N de plus en plus grandes. On peut par exemple représenter graphiquement la hauteur d'eau de la solution U_{ex} avec celle de U_N. Dans la suite h_{ex} et h_N désigneront ces quantités. Les figures ci-dessous ont été obtenues avec $N = 2^k$, k allant de 3 à 9.



Regardons maintenant le plot du maximum de l'erreur entre h_{ex} et h_N. Pour ce faire, on retient les points x_i communs aux deux maillages. Si la solution U_{ex} correspond à une discrétisation de $N = 2^l$ point intérieurs (comme c'est le cas dans notre implémentation), alors le maillage correspondant contiendra tous les maillages de $N = 2^k$ point intérieurs avec $k \leq l$. Ainsi, les points x_i communs aux deux maillages sont ceux du maillage pour U_N. Dès lors, on calcule facilement $max_{x_i}|U_{ex}(x_i) - U_N(x_i)|$. Voici les représentations obtenues avec cette manière de calculer l'erreur :





Voyons maintenant l'erreur en norme L^2 discrète. Avant ça, définissons cette notion. La norme $L^2(a,b)$ d'une fonction u de carré intégrable est donnée par

$$\|u\|_{L^2(a,b)} = (\int_a^b u^2(x)\,dx)^{\frac{1}{2}}.$$

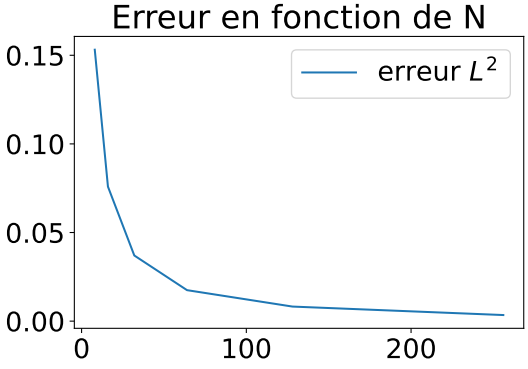
Si $x_0 = a < x_1 < ... < x_N = b$ discrétise $[a,b]$, alors par la relation de Chasles, on a

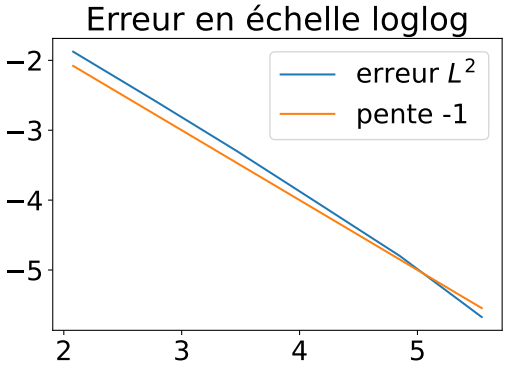
$$\int_a^b u^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u^2(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N} u^2(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

On a alors un analogue discret de la norme L^2 habituelle donné dans la définition qui suit.

Définition 4. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x_0 = a < x_1 < ... < x_{N+1} = b$ la discrétisation uniforme de $[a,b]$ composée de $N+2$ points (N à l'intérieur et 2 aux bords). Posons $h = \frac{b-a}{N+1}$ le pas du maillage. Soit $U = (u_i)_{0\leq i\leq N+1}$ une approximation de la solution aux points du maillage. On définit la norme L^2 discrète de U par $\|U\|_{L^2} = (h\sum_{i=0}^{N+1} u_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Voici les erreurs obtenues avec cette norme :





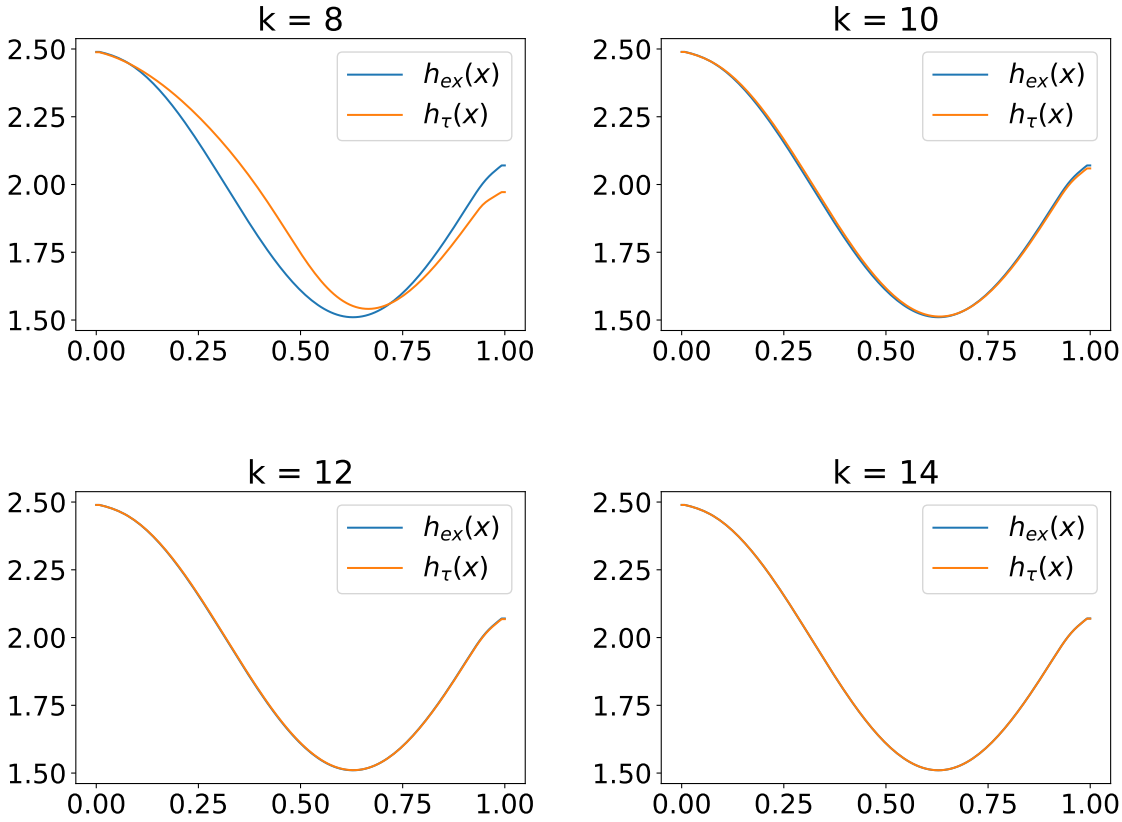
En échelle loglog, on observe à chaque fois que l'erreur décroit selon une pente -1. Sur cet exemple, le schéma est donc d'ordre 1.

Des résultats similaires sont obtenus lorsque l'on affiche le débit q plutôt que la hauteur d'eau h. De la même façon, on peut faire varier les paramètres **xMin**, **xMax**, **Tmax** ainsi que les conditions initiales et on arrive aux mêmes conclusions.

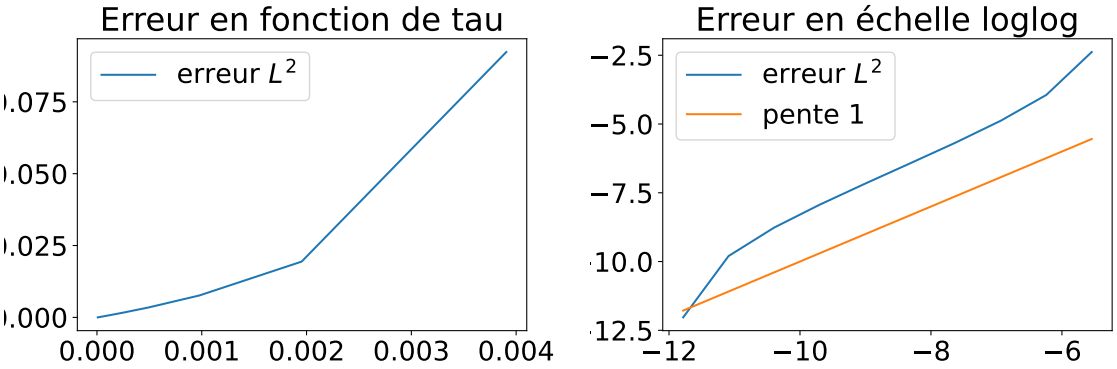
Influence du pas temporel

Dans ce paragraphe, nous allons faire une étude similaire à celle qui précède, sauf que cette fois nous allons fixer le nombre $N = 2^7$ de points (intérieurs) de la discrétisation et faire varier le pas d'espace τ. Tous les autres paramètres restent inchangés et les conditions initiales sont encore les mêmes.

τ va être pris égal à $\frac{1}{2^k}$ avec k variant de 8 à 17. On considère que l'on est très proche de la solution exacte lorsque $\tau = \frac{1}{2^{17}}$ et on note U_{ex} la solution obtenue avec ce pas de temps. On note U_τ une solution obtenue avec un pas plus grand (c'est à dire avec $k \leq 17$). En augmentant k, on s'attend à voir converger la solution U_τ vers U_{ex}. Nous allons le vérifier sur les hauteurs d'eau. Dans la suite, h_{ex} désignera la hauteur d'eau de la solution U_{ex} et h_τ celle de U_τ.



Effectivement, on observe bien la convergence des solutions approchées lorsque k augmente. Nous allons quantifier cette convergence en effectuant la représentation graphique de l'erreur en norme L^2 discrète comme dans le paragraphe précédent.



On voit que plus τ est petit et moins l'erreur entre h_τ et h_{ex} (en norme L^2) est importante. En échelle loglog, la courbe de l'erreur est approximativement une droite de pente égale à 1. Ainsi, le schéma est d'ordre 1 en temps sur cet exemple. Des résultats similaires sont obtenus lorsque l'on fait varier les paramètres **xMin**, **xMax**, **Tmax** ainsi que les conditions initiales.

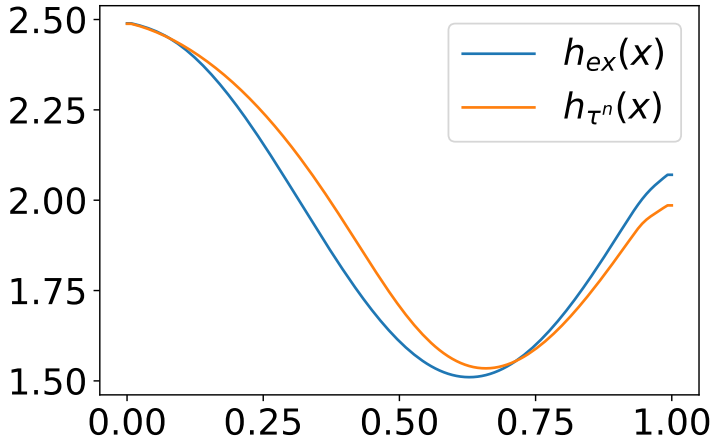
Dans les simulations faites, les solutions calculées sont stables dans la mesure où le pas de temps τ a été pris suffisamment petit. Pour rappel, le schéma de Rusanov est stable sous la condition CFL locale suivante :

$$\max_{j\in\{i,i+1\}}\max_{k\in\{1,2\}}|\lambda_k(U_j^n)|\tau^n \leq \frac{h}{2}.$$

A chaque étape n de la simulation, il faut donc prendre garde à ce que le nouveau pas de temps vérifie cette condition. Sinon, la stabilité n'est pas garantie. Par exemple, si l'on reprend le même contexte que l'étude qui précède mais que l'on choisit de prendre à chaque étape n un pas de temps

$$\tau^n = \frac{3}{2}\frac{h}{2\times\max_{j\in\{i,i+1\}}\max_{k\in\{1,2\}}|\lambda_k(U_j^n)|},$$

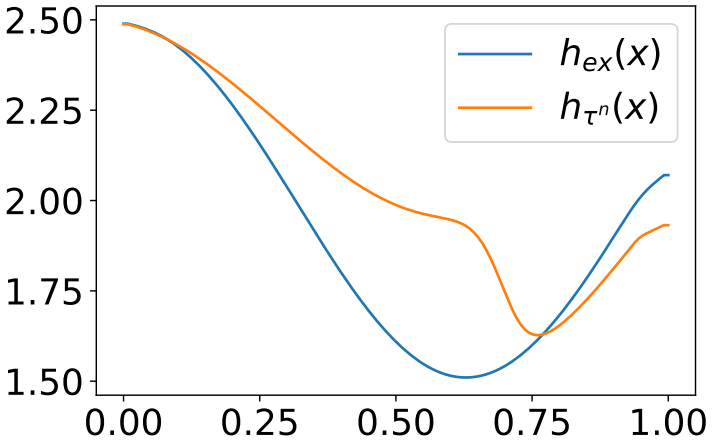
la condition CFL n'est pas vérifiée et voici ce que l'on obtient pour la hauteur d'eau h_{τ^n} correspondante :



Après un petit laps de temps, la solution approchée est déjà très éloignée de la solution exacte. Et en prenant un pas encore plus grand, par exemple

$$\tau^n = 1,9 \, \frac{h}{2 \times \max\limits_{j\in\{i,i+1\}} \max\limits_{k\in\{1,2\}} |\lambda_k(U_j^n)|},$$

le phénomène empire encore :



Il faut donc veiller à ce que la condition CFL soit vérifiée, sans quoi le schéma propage des erreurs importantes.

5 Passage au cas 2D

5.1 Présentation des équations

Dans le cas bi-dimensionnel, nous avons maintenant trois inconnues : h, la hauteur de l'eau, ainsi que u et v, la vitesse de l'eau selon l'axe x et y respectivement.

Nous avons les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = 0, \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + \frac{gh^2}{2}) = 0. \end{cases}$$

En posant : $W = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$, $F(W) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{bmatrix}$, $G(W) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}$,

on a le système suivant :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0$$

5.2 Calculs théoriques

En notant $q_x = hu$ le débit selon l'axe x et $q_y = hv$ le débit selon l'axe y, on peut réécrire W, F(W) et G(W) de la manière suivante :

$$W = \begin{bmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}, F(W) = \begin{bmatrix} q_x \\ q_x^2/h + \frac{gh^2}{2} \\ q_x q_y / h \end{bmatrix} \text{ et } G(W) = \begin{bmatrix} q_y \\ q_x q_y / h \\ q_y^2/h + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}.$$

On peut, de la même manière que dans le cas 1D, calculer les valeurs propres des systèmes associés à F et G : intéressons nous ici au cas de F.

$$\partial_W F(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + gh & 2\frac{q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{bmatrix} = J(W).$$

Soient $\lambda_F \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que : $J(W)x = \lambda_F x$.

On a donc :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda_F x_1, \\ (-\frac{q_x^2}{h^2} + gh)x_1 + 2\frac{q_x}{h}x_2 = \lambda_F x_2, \\ (-\frac{q_x q_y}{h^2})x_1 + \frac{q_y}{h}x_2 + \frac{q_x}{h}x_3 = \lambda_F x_3. \end{cases}$$

Les deux premières lignes sont équivalentes à

$$(\lambda_F^2 - \frac{2\lambda_F q_x}{h} + (\frac{q_x^2}{h^2} - gh))x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_F^2 - \frac{2\lambda_F q_x}{h} + (\frac{q_x^2}{h^2} - gh) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_F = \frac{q_x}{h} = u \quad \text{ou} \quad \lambda_F = u \pm \sqrt{gh}$$

Les valeurs propres de cette matrice $J(W)$ sont donc u, $u + \sqrt{gh}$ et $u - \sqrt{gh}$.

Comme on cherche la plus grande en valeur absolue, il est inutile de prendre en compte u, car cette valeur propre est comprise entre $u + \sqrt{gh}$ et $u - \sqrt{gh}$.

On a la même chose pour le système avec G : les valeurs propres sont dans ce cas v, $v + \sqrt{gh}$ et $v - \sqrt{gh}$.

5.3 Discrétisation

En s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas 1D, on discrétise de la manière suivante :

$$\frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y} = 0.$$

Ce qui nous donne finalement :

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}),$$

avec :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{F(W_{i+1,j}) + F(W_{i,j})}{2} - c\frac{W_{i+1,j} - W_{i,j}}{2} \quad \text{avec} \quad c = \sup_{W=W_{i,j},W_{i+1,j}} \sup_{k=1,2} |\lambda_{F,k}(W)|,$$

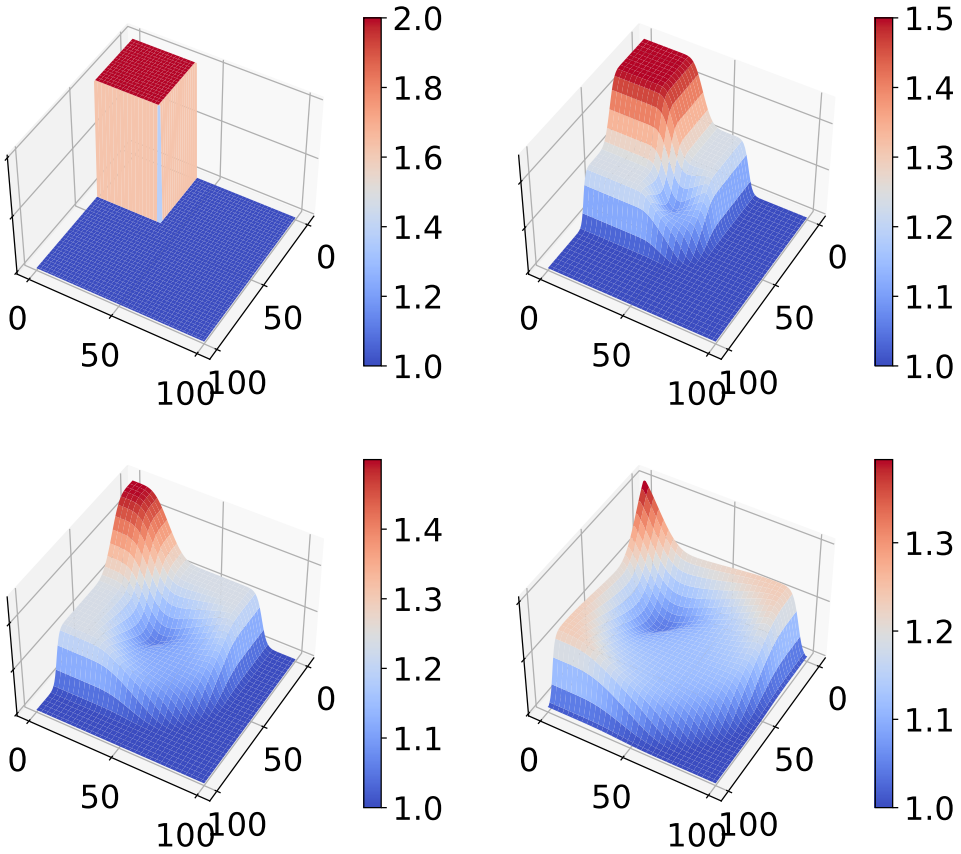
$$G_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{G(W_{i,j+1}) + G(W_{i,j})}{2} - c\frac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{2} \quad \text{avec} \quad c = \sup_{W=W_{i,j},W_{i,j+1}} \sup_{k=1,2} |\lambda_{G,k}k(W)|.$$

5.4 Validation de l'implémentation par des tests

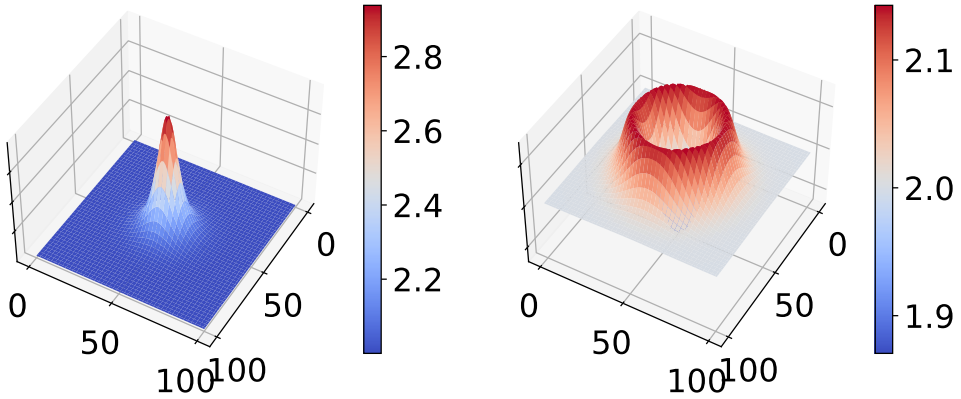
Encore une fois, les conditions aux bords choisies sont des conditions de Neumann homogène. Les dérivées partielles en espace sont prises égales à 0 au bord du domaine. Du point de vue de l'implémentation, les bords prennent la même valeur que leur voisin.

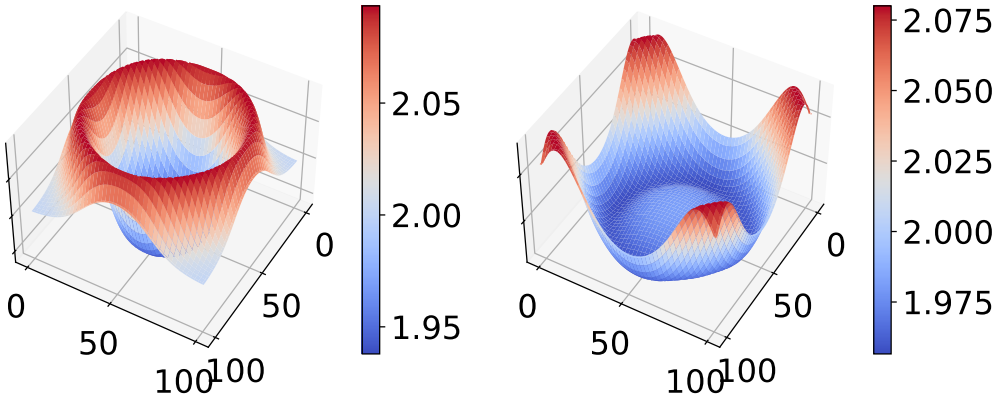
Quelques exemples

Le test de la rupture de barrage Voici le test de la rupture de barrage en 2D. L'eau contenue dans le coin du domaine est lachée au temps initial. Voilà ce que l'on observe (respectivement aux temps $t = 0, 12.5, 25$ et 37.5).



Le test de la goutte d'eau Comme pour le cas 1D, on effectue le test de la goutte d'eau, facile à confronter à l'intuition. Voilà ce que l'on observe (respectivement aux temps $t = 0, 12.5, 25$ et 37.5).

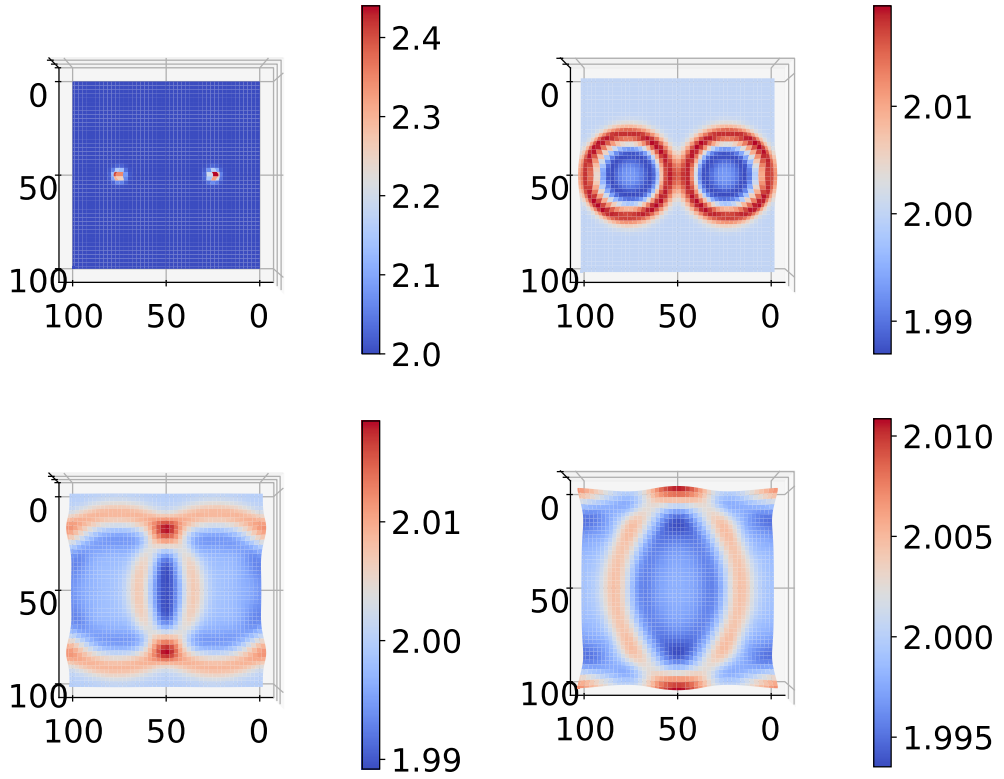




On observe que la goutte tombe, donnant naissance à une onde circulaire propageant vers l'extérieur du domaine.

Interactions d'ondes circulaires

On peut prendre deux gouttes d'eau pour condition initiale. On souhaite vérifier que les interactions entre les fronts d'onde sont conformes à la réalité. Pour ce faire, on affiche l'évolution avec une vue du dessus. Voilà ce que l'on observe (respectivement aux temps $t = 0, 12.5, 25$ et 37.5).



Au niveau des des deux points de rencontre des deux cercles, la hauteur d'eau est la plus haute car les ondes s'additionnent. C'est donc conforme à la réalité.

6 Conclusion

Nous avons vu dans ce mémoire l'implémentation de la méthode des volumes finis, dans le cadre de la simulation des équations de Saint Venant. Dans un premier temps, notre étude a porté sur le cas uni-dimensionnel, afin d'obtenir des résultats théoriques de convergence, ainsi que des résultats pratiques, par le biais de simulations numériques, comme la rupture de barrage. L'influence des différents paramètres du schéma, comme le pas spatial ou temporel ont aussi été étudiés. Nous avons ensuite pu, grâce à ces résultats, élargir notre champ d'étude en nous consacrant au cas bi-dimensionnel, ce qui nous a permis d'observer la stabilité et la consistance du schéma de Rusanov.

Pour continuer cette étude, de nombreuses directions sont envisageables. D'un point de vue mathématiques, il est possible d'augmenter l'ordre du schéma. D'un point de vue physique, nous n'avons pas pris en compte l'influence du fond dans le cas 2D. Enfin, d'un point de vue informatique, il aurait été judicieux de coder en C, ou de paralléliser notre code, afin d'accélérer les simulations, qui pouvaient être assez longues, notamment dans le cas bi-dimensionnel.

A Annexes

A.1 Code de l'implémentation du schéma de Rusanov en 1D

Voici le code à partir duquel nous avons obtenu les graphes du rapport. Ce code permet aussi de générer des fichiers .gif et ainsi de visualiser les évolutions (hauteur d'eau et débit) au cours du temps.

Importations

[1]:
```
import math as math # Pour les fonctions math
import matplotlib.pyplot as plt # Pour l'affichage des graphes
from matplotlib.backends.backend_agg import FigureCanvasAgg as␣
 ↪FigureCanvas
from matplotlib.figure import Figure
import numpy as np # Pour les tableaux numpy
import imageio # Pour faire des .gif
```

Paramètres du problème

[2]:
```
g=1 # Constante gravitationnelle

xMin=0 # Bord gauche du domaine
xMax=100 # Bord droit du domaine

N=512 # Nombre de points (strictement à l'intérieur)
# Donc au total, on considère N+2 points avec les bords
h=(xMax-xMin)/(N+1) # Pas du maillage spatial

Tmax=10 # Temps final de la simulation
t=0 # Temps dans la simulation
n=0 # Nombre d'itérations
```

Conditions initiales et Topographie

Dans la cellule ci-dessous, nous définissons la discrétisation de l'axe des abscisses $\mathbf{X}$, ainsi que la topographie $\mathbf{Z}$ et les profils initiaux de la hauteur d'eau h et du débit q. Le code en commentaire correspond à différentes initialisations possibles. Pour le suite, notons $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ le vecteur inconnu.

[3]:
```
X=np.linspace(xMin,xMax,N+2) # Discrétisation de [xMin, xMax]
U=np.ones([2,N+2]) # discrétisation du vecteur (h, q)
Uprime=np.zeros([2,N+2]) # Va servir d'intermédiaire de calcul
```

```
Z=np.zeros(N+2) # Discrétisation du fond Z

# Définitions de Z ----------------------------------------

# Conditions initiales avec Z en créneau :
# Z[(N+2)//5:2*(N+2)//5]=0.3
# Z[3*(N+2)//5:4*(N+2)//5]=0.3

# Conditions initiales avec Z en bosse C infini :
# Z=1/(1+.1*(X-50)**2)

# Conditions initiales avec Z en escalier descendant :
# Z[0:(N+2)//4]=.75
# Z[(N+2)//4:3*(N+2)//4]=0.25

# Conditions initiales avec Z en tangente hyperbolique :
# Z=np.tanh(5-X)/2+.5


# Définitions du h initial -------------------------------------

# Hauteur de l'eau en escalier
U[0,0:(N+2)//3]=3-Z[:(N+2)//3]
# U[0,(N+2)//3:N+2]=1.25-Z[(N+2)//3:N+2]

# Hauteur de l'eau constante
# U[0,:]=1-Z

# Hauteur de l'eau en bosse
# U[0,:]=1+2/(1+.05*(X-50)**2)-Z


# Définitions du q initial -------------------------------------

# Débit de l'eau constant
U[1,:]=0
```

Nombre de sauvegardes durant la simulation

Quelques variables qui vont nous servir pour enregistrer des étapes de la simulation, sans pour autant les sauvegarder toutes. Sans ça, le nombre d'images à sauver deviendrait vite trop important.

[4]:
```
nSauvegarde=10 # Nombre de sauvegardes au cours de la simulation
tSauvegarde=[False for i in range(nSauvegarde)]
images=[]
j=0 # Nombre de sauvegardes déjà effectuées
```

Affichage des images

La fonction ci-dessous permet de gérer l'affichage de la solution. Elle est suivie d'un test. Les graphes qui s'affichent sont ceux de h et q à $t = 0$.

[5]:
```
def affiche_U(t):

    t_int=round(t,4) # Troncature de t après la 4eme décimale

    fig,axs=plt.subplots(2,1,figsize=(12,8))

    fig.suptitle("t = "+str(t_int),style='italic',size=30)
    fig.tight_layout()

    plt.rc('font', size=20)

    h_z=U[0,:]+Z

    axs[0].plot(X,h_z)
    axs[0].set_title("h",fontweight="bold",pad=15)
    axs[0].set_xlim([xMin,xMax])
    axs[0].set_ylim([0,4])
    axs[0].fill_between(X,Z,step="pre",alpha=0.5,color="grey")

    axs[1].plot(X,U[1,:])
    axs[1].set_title("q", fontweight="bold",pad=15)
    axs[1].set_xlim([xMin,xMax])
    axs[1].set_ylim([-4,4])

    # axs[1].set_xlabel("Quantité d'eau : "+str(round(sum(U[0,:
↪])*h,2)))

    plt.show()

affiche_U(0) # Test d'affichage de la solution
```

Sauvegarde des images

enregistre_U effectue un traitement identique à *affiche_U*. La seule différence est qu'elle enregistre le plot dans le répertoire courant plutôt que de l'afficher.

[6]:
```
def enregistre_U(n,t):

    t_int=round(t,4) # Troncature de t après la 4eme décimale

    fig,axs=plt.subplots(2,1,figsize=(12,8))

    fig.suptitle("t = "+str(t_int),style='italic',size=30)
    fig.tight_layout()
```

```
    plt.rc('font',size=20)

    h_z = U[0,:]+Z

    axs[0].plot(X,h_z)
    axs[0].set_title("h", fontweight="bold", pad=15)
    axs[0].set_xlim([xMin,xMax])
    axs[0].set_ylim([0,4])
    axs[0].fill_between(X,Z,step="pre",alpha=0.5,color="grey")

    axs[1].plot(X,U[1,:])
    axs[1].set_title("q", fontweight="bold", pad=15)
    axs[1].set_xlim([xMin,xMax])
    axs[1].set_ylim([-4,4])

    # axs[1].set_xlabel("Quantité d'eau : "+str(round(sum(U[0,:
↪])*h,2)))

    # To remove the huge white borders
    axs[0].margins(0)
    axs[1].margins(0)

    fig.canvas.draw()
    image_from_plot=np.frombuffer(fig.canvas.tostring_rgb(),␣
↪dtype=np.uint8)
    image_from_plot=image_from_plot.reshape(fig.canvas.
↪get_width_height()[::-1]+(3,))

    images.append(image_from_plot)

    #Sauvegarde dans un fichier .png
    plt.savefig("etape"+str(n)+".png")

    plt.close()

enregistre_U(0,0)
```

Fonctions qui interviennent dans le schéma

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur inconnu. Les différentes fonctions du schéma qu'il s'agit d'implémenter sont $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ et $\mathcal{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$. Rappelons les différentes définitions :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial Z}{\partial x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{F}(\mathbf{U})$ désigne la fonction flux et $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ le terme source. Avec ces notations, le système de départ se réécrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) = \mathbf{B}(\mathbf{U}).$$

Et si l'on suppose que $Z \equiv 0$, alors le schéma s'écrit simplement :

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_i} = 0.$$

Avec

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n)}{2} - \max_{j\in\{i,i+1\}} \max_{k\in\{1,2\}} |\lambda_k(\mathbf{U}_j^n)| \frac{\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n}{2}.$$

En prenant une topographie Z non triviale, on peut essayer de prendre le même schéma en rajoutant le terme source. Si l'on a accès à la dérivée Z' de Z, le schéma s'écrit alors :

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_iZ_i' \end{pmatrix},$$

ou bien en utilisant des différences finies centrées pour approcher les dérivées :

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_i\frac{Z_{i+1}-Z_{i-1}}{2\Delta x_i} \end{pmatrix}.$$

[7]:
```
# Fonction F du schéma :
# Entrée : vecteur U = (h, q) (type numpy.ndarray)
# Sortie : F(U) (type numpy.ndarray)
def F(U):
    return np.array([U[1],U[1]**2/U[0]+g*U[0]**2/2])

# Fonction B du schéma :
# Entrées : * vecteur U = (h, q) (type numpy.ndarray)
#           * valeur dxZ de la dérivée spatiale de Z
# Sortie : B(U) (type numpy.ndarray)
def B(U,i):
    return np.array([0,-g*U[0]*(Z[i+1]-Z[i-1])/2])
```

```
# Fonction qui retourne la valeur propre max en module
# Entrées : * U solution discrétisée (type numpy.ndarray de taille 2*(N+2))
#           * indice i de la position spatiale
# Sortie : max_j max_k |lambda_k(U_j^n)|
def vmax(U,i):
    res = abs(U[1,i]/U[0,i]+math.sqrt(g*U[0,i]))
    res = max(res,abs(U[1,i]/U[0,i]-math.sqrt(g*U[0,i])))
    res = max(res,abs(U[1,i+1]/U[0,i+1]+math.sqrt(g*U[0,i+1])))
    res = max(res,abs(U[1,i+1]/U[0,i+1]-math.sqrt(g*U[0,i+1])))
    return res

# Fonction flux numérique :
# Entrées : * U solution discrétisée (type numpy.ndarray de taille 2*(N+2))
#           * indice i de la position spatiale
# Sortie : F_{i+1/2}^n
def F_ronde(U,i):
    return (F(U[:,i])+F(U[:,i+1]))/2-vmax(U,i)*(U[:,i+1]-U[:,i])/2
```

Boucle de résolution numérique

Une fois le pas de temps Δt^n déterminé selon le critère qui garanti le respect de la conditions CFL, on passe du temps t^n au temps t^{n+1} suivant la relation explicite suivante :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \Delta t^n \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta t^n \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x_i} + \Delta t^n \begin{pmatrix} 0 \\ -g h_i \frac{Z_{i+1} - Z_{i-1}}{2\Delta x_i} \end{pmatrix}.$$

[8]:
```
while(t<Tmax): # Tant que le temps max n'est pas atteint :

    M = vmax(U, 0)
    for i in range(1, N+1):
        M = max(M, vmax(U, i))

    # Pour assurer la stabilité, tau doit être inférieur à h/(2*max(vp))
    tau = 0.8*h/(2*M)

    for i in range(1, N+1):
        Uprime[:,i] = U[:,i]+tau/h*(F_ronde(U,i-1)-F_ronde(U,i))
        Uprime[:,i] -= tau*B(U[:,i],i)

    U = Uprime

    # Conditions aux bords
```

```
    U[:,0] = U[:,1]
    U[:,N+1] = U[:,N]

    t+=tau
    n+=1

    if (t > Tmax/nSauvegarde*j and (j<nSauvegarde) and (not␣
 ↪tSauvegarde[j])):
        enregistre_U(n,t)
        #affiche_U()
        tSauvegarde[j]=True
        j+=1

print("Nombre d'itérations : " + str(n))
imageio.mimsave('movie.gif', images)
print("Gif Sauvegardé dans le dossier sous le nom : movie.gif")
```

A.2 Code de l'étude numérique de la convergence

Arreter une simulation au temps souhaité

On peut faire en sorte de terminer la simulation précisément à *Tmax*. Le dernier ajout de *tau* a entrainé le dépassement de *Tmax*. On retourne donc en arrière de un pas de temps et on prend *tau=Tmax-t* pour finir tout pile au temps *Tmax*. A la fin d'une simulation, cela revient à ajouter le code de la cellule suivante.

[1]:
```
t -= tau # Retour de un pas de temps en arrière
tau = Tmax-t # On prend le tau qui permet d'arriver à Tmax

# On effectue la boucle habituelle :
for i in range(1, N+1):
    Uprime[:,i] = U[:,i]+tau/h*(F_ronde(U,i-1)-F_ronde(U,i))
    Uprime[:,i] -= tau*B(U[:,i],i)

U = Uprime
```

Ordre du schéma

Pour faire cette étude, on prend arbitrairement *xMin=0*, *xMax=1* et *Tmax=0.03*. La hauteur d'eau a la forme d'une vague (*U[0, :]=2+0.5*np.cos(5*X)*). On va augmenter le nombre de points et calculer l'erreur avec une solution obtenue avec *N* très grand. Il s'agit de vérifier la convergence et de déterminer l'ordre.

[2]:
```
Uex = np.ones([2,N+2]) # discrétisation du vecteur (h, q) ~ solution␣
 ↪exacte
Uex = Uprime

# Conditions aux bords
```

```
Uex[:,0] = Uex[:,1]
Uex[:,N+1] = Uex[:,N]

L1 = np.zeros([2,7]) # Va contenir les erreurs entre U_N et U_ex
L2 = np.zeros([2,7]) # Va contenir les erreurs entre U_N et U_ex

for k in range(3, l):

    N = 2**k
    # Pour chaque N, on calcule la solution U_N :
    t=0 # Temps dans la simulation
    n=0 # Nombre d'itérations
    X=np.linspace(xMin,xMax,N+2) # Discrétisation de [xMin, xMax]
    h=(xMax-xMin)/(N+1) # Pas du maillage spatial
    U=np.ones([2,N+2]) # discrétisation du vecteur (h, q)
    U[0,:]=2+0.5*np.cos(5*X) # Profil initial de la vague
    U[1,:]=0 # Débit initial
    Uprime=np.zeros([2,N+2]) # Va servir d'intermédiaire de calcul

    while(t<Tmax): # Tant que le temps max n'est pas atteint :

        M = vmax(U, 0)
        for i in range(1, N+1):
            M = max(M, vmax(U, i))

        # Pour assurer la stabilité, tau doit être inférieur à h/(2*
↪max(vp))
        tau = 0.9*h/(2*M)

        for i in range(1, N+1):
            Uprime[:,i] = U[:,i]+tau/h*(F_ronde(U,i-1)-F_ronde(U,i))
            Uprime[:,i] -= tau*B(U[:,i],i)

        U = Uprime

        # Conditions aux bords
        U[:,0] = U[:,1]
        U[:,N+1] = U[:,N]

        t+=tau
        n+=1

    t -= tau
    tau = Tmax-t

    for i in range(1, N+1):
        Uprime[:,i] = U[:,i]+tau/h*(F_ronde(U,i-1)-F_ronde(U,i))
        Uprime[:,i] -= tau*B(U[:,i],i)

    U = Uprime
```

```
    # Conditions aux bords
    U[:,0] = U[:,1]
    U[:,N+1] = U[:,N]

    # Le code en commentaire sert à sauvegarder les plots de la␣
↪hauteur d'eau h

    # plt.plot(np.
↪linspace(xMin,xMax,2**l+2),Uex[0],label="$h_{ex}(x)$")
    # plt.plot(X,U[0],label="$h_N(x)$")
    # plt.title("N="+str(N))
    # plt.legend()
    # plt.savefig("testconv"+str(N)+".pdf")
    # plt.show()

    # Différence des deux solutions aux points communs de la␣
↪discrétisation :
    diff = np.zeros([2,N+2])
    diff[:,1:-1] = np.abs(Uex[:,1:-1:2**(l-k)]-U[:,1:-1])
    diff[:,0] = np.abs(Uex[:,0]-U[:,0])
    diff[:,-1] = np.abs(Uex[:,-1]-U[:,-1])
    L1[0,k-3] = max(diff[0])
    L1[1,k-3] = max(diff[1])
    L2[0,k-3] = np.sqrt(sum(diff[0]**2)*h)
    L2[1,k-3] = np.sqrt(sum(diff[0]**2)*h)
```

A ce stade, il reste à faire le plot des erreurs stockées.

[3]:
```
plt.plot(2**np.arange(3, l), L1[0][:], label="max de l'erreur")
plt.title("Erreur en fonction de N")
plt.legend()
plt.savefig("erreur.pdf")
plt.show()
```

De même en échelle Loglog.

[4]:
```
plt.plot(np.log(2**np.arange(3, l)), np.log(L1[0][:]), label="max de␣
↪l'erreur")
plt.plot(np.log(2**np.arange(3, l)), -np.log(2**np.arange(3, l)),␣
↪label='pente -1')
plt.title("Erreur en échelle loglog")
plt.legend()
plt.savefig("erreurLogLog.pdf")
plt.show()
```

Ce même code s'adapte pour l'étude de la convergence en temps.

A.3 Code de l'implémentation du schéma de Rusanov en 2D

Voici le code à partir duquel nous avons obtenu les graphes du rapport. Ce code permet aussi de générer des fichier .gif et ainsi de visualiser les évolutions (hauteur d'eau et débit) au cours du temps.

Importations

[1]:
```
import math as math # Pour les fonctions math

import matplotlib.pyplot as plt # Pour l'affichage des graphes
from matplotlib.backends.backend_agg import FigureCanvasAgg as␣
 ↪FigureCanvas
from matplotlib.figure import Figure
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits import mplot3d

plt.rc('font', size=20)

import numpy as np # Pour les tableaux numpy
import imageio # Pour faire des .gif
```

Paramètres du problème

[2]:
```
g=1 # Constante gravitationnelle

xMin=0 # Bord gauche du domaine
xMax=100 # Bord droit du domaine

yMin = 0 #Bord bas du domaine
yMax = 100 #Bord haut du domaine

N = 128 # Nombre de points (strictement à l'intérieur)
# Donc au total, on considère (N+2)^2 points avec les bords

h=(xMax-xMin)/(N+1) # Pas du maillage spatial, le même pour X et Y

Tmax = 50 # Temps final de la simulation
t=0 # Temps dans la simulation
n=0 # Nombre d'itérations
```

Conditions initiales

Dans la cellule ci-dessous, nous définissons la discrétisation de l'axe des abscisses **X**, ainsi que la topographie **Z** et les profils initiaux de la hauteur d'eau h et des débits hu

et hv selon x et y respectivement. Le code en commentaire correspond à différentes initialisations possibles. Pour le suite, notons $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur inconnu.

[3]:
```
X,Y=np.mgrid[xMin:xMax+2*h/3:h,yMin:yMax+2*h/3:h] # Discrétisation
 ↪de [xMin, xMax] et [yMin, yMax]


W = np.ones([N+2,N+2,3]) # Discrétisation de h , hu et hv
Wprime = np.ones([N+2,N+2,3]) # Intermédiaire pour les calculs dans
 ↪la boucle temporelle


#Pour améliorer la complexité de l'algorithme
Tableau_F_Ronde = np.ones([N+2,N+2,3])
Tableau_G_Ronde = np.ones([N+2,N+2,3])


# Définitions du h initial ------------------------------------

# Hauteur de l'eau en escalier
W[0:(N+2)//3,0:(N+2)//3,0]   = 3

# Hauteur de l'eau constante
# W[:,:,0]=1

# Hauteur de l'eau en bosse
# W = 2+10/(4 + .01*( (X-50)**2 + (Y-50)**2 ) )

# Hauteur de l'eau en double bosse
# W[:,:,0] = 2+1/np.cosh(np.sqrt((X-25)**2+(Y-50)**2))
# W[:,:,0] += 1/np.cosh(np.sqrt((X-75)**2+(Y-50)**2))


# Définitions des débit initial -------------------------------------

# Débit de l'eau constant
W[:,:,1]=0
W[:,:,2]=0
```

Nombre de sauvegardes durant la simulation

Quelques variables qui vont nous servir pour enregistrer des étapes de la simulation, sans pour autant les sauvegarder toutes. Sans ça, le nombre d'images à sauver

deviendrait vite trop important. De plus, l'affichage ne serait pas uniforme dans le temps car certains passages de la simulation nécessitent des pas de temps plus petits.

[4]:
```
nSauvegarde=100 # Nombre de sauvegardes au cours de la simulation
tSauvegarde=[False for i in range(nSauvegarde)]

imageH=[]
imageHU=[]
imageHV=[]

k=0 # Nombre de sauvegardes déjà effectuées
```

Affichage des images

La fonction ci-dessous permet de gérer l'affichage de la solution. Elle est suivie d'un test. Les graphes qui s'affichent sont ceux de h et q à $t = 0$.

[5]:
```
def affiche_W(t=0,index=0):

    #index : suivant que l'on veuille afficher h, hu ou hv

    t_int=round(t,4) # Troncature de t après la 4eme décimale

    fig = plt.figure(figsize =(14, 9))
    ax = plt.axes(projection ='3d')

    if(index==0):
        ax.plot_surface(X, Y, W[:,:,0], cmap=cm.coolwarm)
        ax.set_title("h",fontweight="bold",pad=15)
        ax.set_zlim([0,4])
    elif(index==1):
        ax.plot_surface(X, Y, W[:,:,1])
        ax.set_title("hu",fontweight="bold",pad=15)
        ax.set_zlim([-1,1])
    elif(index==2):
        ax.plot_surface(X, Y, W[:,:,2])
        ax.set_title("hv",fontweight="bold",pad=15)
        ax.set_zlim([-1,1])
    else:
        print("Mauvaise valeur d'index")

    fig.suptitle("t = "+str(t_int),style='italic',size=30)

    ax.set_xlim([xMin,xMax])
    ax.set_ylim([yMin,yMax])

    ax.view_init(25, 30)

    plt.show()
```

```
# Affichage de h, u et v
# affiche_W()
# affiche_W(index=1)
# affiche_W(index=2)
```

Sauvegarde des images

enregistre_W effectue un traitement identique à *affiche_W*. La seule différence est qu'elle enregistre le plot dans le répertoire courant plutôt que de l'afficher.

[6]:
```
def enregistre_W(t,index=0):

    t_int=round(t,4) # Troncature de t après la 4eme décimale

    fig = plt.figure(figsize =(14, 9))
    ax = plt.axes(projection ='3d')

    if(index==0):
        ax.plot_surface(X, Y, W[:,:,0], cmap=cm.coolwarm)
        ax.set_title("h",fontweight="bold",pad=15)
        ax.set_zlim([0,4])
    elif(index==1):
        ax.plot_surface(X, Y, W[:,:,1])
        ax.set_title("hu",fontweight="bold",pad=15)
        ax.set_zlim([-1,1])
    elif(index==2):
        ax.plot_surface(X, Y, W[:,:,2])
        ax.set_title("hv",fontweight="bold",pad=15)
        ax.set_zlim([-1,1])
    else:
        print("Mauvaise valeur d'index")

    fig.suptitle("t = "+str(t_int),style='italic',size=30)

    ax.set_xlim([xMin,xMax])
    ax.set_ylim([yMin,yMax])

    ax.view_init(25,30)

    fig.canvas.draw()
    image_from_plot=np.frombuffer(fig.canvas.tostring_rgb(),␣
↪dtype=np.uint8)
    image_from_plot=image_from_plot.reshape(fig.canvas.
↪get_width_height()[::-1]+(3,))

    if(index==0):
        imageH.append(image_from_plot)
    elif(index==1):
        imageHU.append(image_from_plot)
```

```
    elif(index==2):
        imageHV.append(image_from_plot)

    plt.close()

# enregistre_W(0,index=0)
# enregistre_W(0,index=1)
# enregistre_W(0,index=2)
```

Fonctions intervenant dans le schéma

$$\text{On : } W = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, F(W) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{bmatrix} \text{ et } G(W) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix},$$

avec h la hauteur de l'eau, u sa vitesse suivant la direction x et v sa vitesse suivant la direction y.

On a le système suivant :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = 0.$$

En identifiant $F(W)$ au flux suivant x et $G(W)$ au flux suivant y.

En s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas 1D, on discrétise de la manière suivante :

$$\frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} = 0.$$

Ce qui nous donne finalement :

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n).$$

Avec :

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{F(W_{i+1,j}) + F(W_{i,j})}{2} - c\frac{W_{i+1,j} - W_{i,j}}{2} \quad o \quad c = \sup_{W=W_{i,j},W_{i+1,j}} \sup_{k=1,2} |\lambda_k(W)|$$

et

$$G_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{G(W_{i,j+1}) + G(W_{i,j})}{2} - c\frac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{2} \quad o \quad c = \sup_{W=W_{i,j},W_{i,j+1}} \sup_{k=1,2} |\lambda_k(W)|.$$

[7]:
```
def F(w):
    return np.array([w[1] , w[1]**2 /w[0] + g * w[0]**2 / 2 ,␣
 ↪w[1]*w[2]/w[0] ])

def G(w):
    return np.array([w[2] , w[1]*w[2]/w[0] , w[2]**2 /w[0] + g *␣
 ↪w[0]**2 / 2])


def vmaxF(i,j): #vmax du premier système : u , u+sqrt(gh) ou␣
 ↪u-sqrt(gh)

    res = W[i,j,1] / W[i,j,0]

    res = max(res,abs( W[i,j,1]/W[i,j,0] + math.sqrt(g*W[i,j,0])))
    res = max(res,abs( W[i,j,1]/W[i,j,0] - math.sqrt(g*W[i,j,0])))

    res = max(res,abs( W[i+1,j,1]/W[i+1,j,0] + math.
 ↪sqrt(g*W[i+1,j,0])))
    res = max(res,abs( W[i+1,j,1]/W[i+1,j,0] - math.
 ↪sqrt(g*W[i+1,j,0])))

    return res

def vmaxG(i,j): #vmax du deuxième système : v , v+sqrt(gh) ou␣
 ↪v-sqrt(gh)

    res = W[i,j,2] / W[i,j,0]

    res = max(res,abs( W[i,j,2]/W[i,j,0] + math.sqrt(g*W[i,j,0])))
    res = max(res,abs( W[i,j,2]/W[i,j,0] - math.sqrt(g*W[i,j,0])))

    res = max(res,abs( W[i,j+1,2]/W[i,j+1,0] + math.
 ↪sqrt(g*W[i,j+1,0])))
    res = max(res,abs( W[i,j+1,2]/W[i,j+1,0] - math.
 ↪sqrt(g*W[i,j+1,0])))

    return(res)

def F_ronde(i,j):
    return( (F(W[i+1,j,:])+F(W[i,j,:]))/2 - vmaxF(i,j) * (W[i+1,j,:]␣
 ↪- W[i,j,:]) / 2  )

def G_ronde(i,j):
    return( (G(W[i,j+1,:])+G(W[i,j,:]))/2 - vmaxG(i,j) * (W[i,j+1,:]␣
 ↪- W[i,j,:]) / 2  )
```

Ci-dessous une fonction dont l'appel permet de gérer les conditions de bord (Neumann homogène).

[8]:
```
def conditionBord():

    # Conditions aux bords sur h , hu et hv de Neumann
    W[:,0,:] = W[:,1,:]
    W[:,N+1,:] = W[:,N,:]
    W[0,:,:] = W[1,:,:]
    W[N+1,:,:] = W[N,:,:]
```

Dès lors, le schéma s'écrit de façon explicite comme suit :

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}).$$

[9]:
```
while(t<Tmax): # Tant que le temps max n'est pas atteint :

    M = 0
    for i in range(0, N+1):
        for j in range(0,N+1):
            M = max(M, vmaxF(i,j))
            M = max(M, vmaxG(i,j))

    # Pour assurer la stabilité, tau doit être inférieur à h/(2*␣
↪max(vp))
    tau = 0.8*h/(2*M)

    for i in range(0, N+1):
        for j in range(0, N+1):

            Tableau_F_Ronde[i,j] = F_ronde(i,j)
            Tableau_G_Ronde[i,j] = G_ronde(i,j)

    for i in range(1, N+1):
        for j in range(1, N+1):

            Wtemp = W[i,j]
            Wtemp = Wtemp - tau/h * ( Tableau_F_Ronde[i,j] -␣
↪Tableau_F_Ronde[i-1,j] ) #Terme avec les F ronde
            Wtemp = Wtemp - tau/h * ( Tableau_G_Ronde[i,j] -␣
↪Tableau_G_Ronde[i,j-1] ) #Terme avec les G ronde

            Wprime[i,j,:] = Wtemp


    #Copie des tableaux intermédiaires dans W = [W0 , W1 , W2]
    W[:,:,:] = Wprime


    conditionBord() #Conditions aux bords sur h , hu et hv
```

```
    t+=tau
    n+=1

    print("Nombre d'itérations : " + str(n) + " | t = "+ str(t))

    if (t > Tmax/nSauvegarde*k and (k<nSauvegarde) and (not␣
 ↪tSauvegarde[k])):
        enregistre_W(t,index=0)
        enregistre_W(t,index=1)
        enregistre_W(t,index=2)

        tSauvegarde[k]=True
        k+=1

imageio.mimsave('movie_H.gif' , imageH )
imageio.mimsave('movie_HU.gif', imageHU)
imageio.mimsave('movie_HV.gif', imageHV)

print("Gif Sauvegardé dans le dossier sous le nom : movie.gif")
```

Bibliographie

[1] R. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2004

[2] E. TORO, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamic*, Springer, 2009

[3] WIKIPEDIA, *Intégrale paramétrique*

[4] WIKIPEDIA, *Méthode des volumes finis*