Алгоритм Харроу-Хассидима-Ллойда (ХХЛ) для решения больших систем линейных уравнений. Зададим систему матрицей N × N с вещественными или комплексными элементами и N-мерным ненулевым вектором b. Для простоты предположим, что N = 2n.

Задача решения линейной системы заключается в нахождении N-мерного вектора x такого, что Ax = b.

Решение больших систем линейных уравнений чрезвычайно важно во многих вычислительных задачах в промышленности, науке, оптимизации, машинном обучении и т. д. Во многих приложениях достаточно найти вектор x’, близкий к фактическому решению x.

Мы будем предполагать, что A обратимо (имеет ранг N), чтобы гарантировать существование единственного решения вектора x, который в таком случае равен A−1\*b. Если A не имеет полного ранга, тогда приведенные ниже методы все же позволят инвертировать его, заменяя A−1 с использованием псевдо инверсии Мур-Пенроуза.

Алгоритм ХХЛ может эффективно решать большие линейные системы (при определенных допущениях), но его слабой стороной является то, что вместо вывода вектора решения x его целью является вывод состояния n-кубита

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9) |

или некоторого другого n-кубитного состояния, близкого к |x>. Это называется проблемой квантовой линейной системы:

QLSP: нахождения состояния n-кубита |x’> такого, что |||x> - |x’>|| ≤ ε и Ax = b.

Важно, что QLSP является по своей сути квантовой проблемой, поскольку цель состоит в том, чтобы создать n-кубитное состояние, у которого амплитудный вектор (с точностью до нормализации и до ε-ошибки) является решением линейной системы. В общем случае это не так эффективно, как просто записать N-мерный вектор x на лист бумаги, но в некоторых случаях, когда нам нужна только некоторая частичная информация об х, этого может быть достаточно, чтобы приблизительно построить |x>.

Добавим некоторые ограничения, которые сделают линейную систему «хорошо» и пригодной для HHL алгоритма.

1. Имеем унитарный оператор, который может подготовить вектор b как n-кубитное квантовое состояние

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9) |

используя цепь B 2х-кубитных вентилей. Для простоты мы предполагаем, что ||b|| = 1.

1. Матрица A является s-разреженной, и мы имеем разреженный доступ к ней. Такая разреженность не является обязательной для алгоритма и может быть заменена другими свойствами, которые позволяют эффективное блочное кодирование А.
2. Матрица А уравновешенная: максимальное соотношение между ее наибольшим и наименьшим единичным значением - κ. Для простоты предположим, что наименьшее значение ≥ 1/κ, а наибольшее ≤ 1. Другими словами, все собственные значения A лежат в интервале [−1, −1/κ] ∪ [1/κ, 1]. Чем меньше k, тем лучше будет для алгоритма. Предположим нам известно κ или, по крайней мере, известна верхняя граница κ.

**10.2 ХХЛ алгоритм для линейной системы**

Вектор решения x, который мы ищем, равен A−1\*b, поэтому мы хотим применить матрицу A−1 к b. Если A имеет спектральное разложение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9 |

Тогда отражение А-1 совпадает с отражением aj → . Умножим собственный вектор aj на скаляр 1/λj. Вектор b также может быть представлен в виде линейной комбинации собственных векторов aj:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9 |

(нам не нужно знать коэффициенты βj для дальнейших вычислений). Применим A−1 к b , чтобы получить

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9 |

нормализованной как квантовое n-кубитное состояние.

Отображения A и A−1 не являются унитарными (если |λj| = 1 для любых j), поэтому мы не можем просто применить A−1 в качестве квантовой операции для состояния |b>, чтобы получить состояние |x>.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9 |

U является унитарным и имеет те же собственные векторы, что и A и A−1. Мы можем представить U и степени U с помощью моделирования Гамильтона, а затем использовать оценки фазы для оценки λj связанного с собственным вектором |aj> с небольшой погрешностью аппроксимации (для этого простоты этого примера предположим , что ошибка 0). При условии нашей оценки λj мы можем повернуть вспомогательный |0>-кубит

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9 |

(это допустимое состояние, потому что |κλj| ≥ 1). Далее мы отменяем фазовую оценку, чтобы установить состояние обратно в |0>. Избавившись от вспомогательных кубитов, содержащих временные результаты оценки фазы, мы получаем унитарное отображение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9.) |

Если мы подготовим копию |b>|0> = и применим к нему указанное выше унитарное отображение, тогда получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4.9.) |

где мы не учитываем (субнормализованное) состояние |φ>. Обратим на это внимание, потому что, потому что норма части состояния, оканчивающейся на кубит |0>, не меньше 1/κ. Соответственно, теперь мы можем применить O(κ) циклов усиления амплитуды, чтобы усилить эту часть состояния, чтобы иметь амплитуду 1. Это подготавливает состояние |X>? что приводит к алгоритму, который создает состояние |x’> которое ε-близко к |x>, используя примерно k2s/ε запросов к H и примерно κs (κn / ε + B) других 2-кубитных вентилях