

## 1 Probabilidad. Definición y enunciados

1. Axiomas de probabilidad: Dados un experimento, y  $S$  un espacio muestral, se asigna a cada evento  $A$  una probabilidad  $P(A)$  tal que:

- $P(A) \in [0, 1]$
- $P(S) = 1$
- Si  $A_1, A_2, \dots$  disjuntos,  $P(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$

(a)

$$A \cup A^c = S$$

y aplicando probabilidad a ambos lados,

$$P(A \cup A^c) = P(S)$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

pues  $A$  y  $A^c$  son disjuntos, y  $P(S) = 1$ .

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

(b)

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

porque  $B \subset A$ . Aplicando probabilidad:

$$P((A \setminus B) \cup B) = P(A)$$

$$P(A \setminus B) + P(B) = P(A)$$

pues  $B$  y  $A \setminus B$  son disjuntos.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

2.

$$\begin{aligned} P(A \vee B) &= P((A \wedge S) \vee B) \\ &= P((A \wedge (B \vee B^c)) \vee B) \\ &= P((A \wedge B) \vee (A \wedge B^c) \vee B) \\ &= P((A \wedge B^c) \vee B) \\ &= P(A \wedge B^c) + P(B) + P(A \wedge B) - P(A \wedge B) \\ &= P(B) + (P(A \wedge B^c) + P(A \wedge B)) - P(A \wedge B) \\ &= P(B) + P(A) - P(A \wedge B) \end{aligned}$$

3. Para dos eventos ocurre que  $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) \leq P(A) + P(B)$ .

Se puede demostrar por inducción:

- $P(A_1) \leq P(A_1)$  porque son iguales.

•

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \vee A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) + P(A_k)$$

Por HI,  $P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k-1} P(A_i)$  Entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k-1} P(A_i) + P(A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$$

4. Sea  $\{B_1, \dots, B_n, \dots\}$  una sucesión tal que  $B_i = A_i - A_{i-1}$  (salvo  $B_1 = A_1$ ). Podemos hacer esto porque la sucesión es creciente.

Es claro que  $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ , y que  $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$ .

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

5. Sea  $B_n = A_n^c$ .  $B_n$  es una sucesión creciente de eventos, y  $A^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ , luego vale el punto anterior:

$$1 - P(A) = P(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(1 - A_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

de donde se obtiene la propiedad pedida.

## 2 Probabilidad condicional e independencia

6. Sea  $E$  = la persona está enferma, y  $V$  = la persona está vacunada. La probabilidad pedida es  $P(\bar{V}|E)$ .

$$P(\bar{V}|E) = \frac{P(\bar{V} \wedge E)}{P(E)} = \frac{0.13}{0.13 + 0.02} = \frac{13}{15}$$

7. Asumimos que la probabilidad de que un hijo cualquiera sea varón es de  $\frac{1}{2}$ . Sea  $V_1$  = el primer hijo es varón, y  $V_2$  = el segundo hijo es varón. La probabilidad pedida es

$$P(V_2|V_1) = \frac{P(V_1 \wedge V_2)}{P(V_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

8. Dadas las mismas suposiciones, la probabilidad pedida es:

$$P(V_1 \wedge V_2|V_1 \vee V_2) = \frac{P(V_1 \wedge V_2)}{P(V_1 \vee V_2)} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

9. Notamos cada caso como una tupla de dos letras (M o V), y ponemos un asterisco antes de la letra del hijo que abrió la puerta.

Los casos posibles (que corresponden al evento en que abre la puerta un varón) son:  $\{(V * V), (*VV), (*VM), (M * V)\}$ .

De estos, los favorables son los dos primeros (que corresponden al evento en que hay dos hijos varones). Por lo tanto la probabilidad es  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

10. Sea  $B_k = A_1 A_2 \cdots A_k$ . Notar que  $B_k = A_k B_{k-1}$  para  $k > 1$ .

Los voy a demostrar por inducción en  $n$ . La propiedad se puede enunciar como

$$P(B_n) = P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_n|B_{n-1})$$

Caso base:  $B_1 = A_1$ . Esto ocurre por definición.

Paso inductivo: vale la propiedad hasta  $B_{n-1}$  y quiero demostrarla para  $B_n$ .

$$P(A_n|B_{n-1}) = \frac{P(A_n B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(B_n)}{P(B_{n-1})}$$

$$P(B_n) = P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})$$

Pero por HI,

$$P(B_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_{n-1}|B_{n-2})$$

Luego tenemos

$$P(B_n) = (P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_{n-1}|B_{n-2}))P(A_n|B_{n-1})$$

$$P(B_n) = P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_n|B_{n-1})$$

Q.E.D.

11.

$$P(B_1 = N \wedge B_3 = R) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{7}$$

12. (a) Proba total: Sea  $\{B_1, \dots, B_n\}$  partición del espacio muestral  $S$ . Entonces  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$ .

Demostración:

$$P(A) = P(A \wedge S) = P\left(A \wedge \bigcup_{i=1}^n B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \wedge B_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A \wedge B_i)$$

Porque los eventos  $A \wedge B_i$  son disjuntos dos a dos.

Finalmente, como  $P(A|B) = P(A \wedge B)/P(B)$ ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \wedge B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

- (b) Bayes: Sea  $\{B_1, \dots, B_n\}$  partición del espacio muestral  $S$ . Entonces

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i))}$$

Demostración:

El denominador, por Proba Total, es  $P(A)$ . Por otro lado, vale que:

$$P(B_i|A)P(A) = P(A \wedge B) = P(A|B_i)P(B_i)$$

Combinando los extremos y pasando  $P(A)$  dividiendo se obtiene la demostración.

13. Sin pérdida de generalidad el jugador elige la puerta 1. Sean  $\{B_1, B_2, B_3\} =$  El premio está en la puerta  $i$ . Se cumple  $P(B_i) = 1/3$ .

Si ocurre  $B_1$ , entonces conviene cambiar después de que el presentador abre alguna puerta. Si ocurre cualquiera de las otras dos no conviene.

Por lo tanto la probabilidad de que convenga cambiar es  $2/3$ .

14. Definición de independencia:

Un conjunto de eventos  $\{A_1, \dots, A_n\}$  se dice independiente cuando, para cada  $K$  subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$ , se cumple:

$$P\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \prod_{i \in K} P(A_i)$$

Ejemplo: Se tiran dos monedas y se definen las 3 variables aleatorias:

- $A$  = la primera moneda es cara

- $B$  = la segunda moneda es cara
- $C$  = las monedas son iguales

$A$  y  $B$  son independientes porque son dos monedas diferentes.  $A$  es independiente de  $C$  porque  $P(A|C) = P(A) = 1/2$ . Sin embargo, cuando valen  $A$  y  $B$  a la vez,  $P(C) = 1 \neq 1/2$ , así que no son independientes.

15. Sean  $A, B$  eventos independientes, disitntos de  $S$  y no vacíos. Entonces existen  $a, b \in \{1, \dots, n-1\}$  tales que  $P(A) = a/n$  y  $P(B) = b/n$ .

Como son independientes,

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{ab}{n^2}$$

Al mismo tiempo  $AB$  es un evento de  $S$ , así que debe existir  $c$  tal que  $P(AB) = c/n$ .

Tenemos que  $\frac{ab}{n^2} = \frac{c}{n} \Rightarrow ab = cn \Rightarrow n|ab$  (porque los 4 números son distintos de 0). Como  $n$  es primo,  $n|a$  o  $n|b$ . Pero esto no puede ocurrir porque  $0 < a, b < n$ . Entonces no pueden existir los eventos  $A, B$ .

### 3 Variables Aleatorias

16. Definición:  $F_X(x)$  es la función que en cada punto vale  $P(X \leq x)$ .

Propiedades:

- (a)  $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- (b) Es creciente:  $x < y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- (d)  $F_X$  es continua a derecha.

Demostraciones:

- (a) Vale porque en cada punto es una probabilidad.
- (b) Sean  $x, k > 0$ .

$$F_X(x+k) = P(X \leq x+k) = P((X \leq x) \vee (x < X \leq x+k)) = P(X \leq x) + P(x < X \leq x+k)$$

porque ambos eventos son disjuntos. Luego

$$F_X(x+k) = F_X(x) + P(x < X \leq x+k) \geq F_X(x)$$

- (c) Empezamos por demostrar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de eventos tal que  $A_n = \{X \leq n\}$ . Esta es una sucesión creciente (o sea que  $A_n \subset A_{n+1}$ ), y además  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R}\}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\{x \in \mathbb{R}\}) = 1$$

el segundo paso se puede hacer porque la sucesión es creciente.

Ahora vamos a demostrar que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ .

Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de eventos tal que  $A_n = \{X \leq -n\}$ . Esta es una sucesión decreciente (o sea que  $A_n \supset A_{n+1}$ ), y además  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \emptyset$ .

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} F_X(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\emptyset) = 0$$

el segundo paso se puede hacer porque la sucesión es decreciente.

- (d) Queremos ver que, dados  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow F_X(x_0) - \epsilon < F_X(x) < F_X(x_0) + \epsilon$$

La primera parte se cumple porque  $F_X$  es una función creciente. Queda ver que  $F_X(x) < F_X(x_0) + \epsilon$ .

Consideramos la sucesión  $\{A_n\}$  tal que  $A_n = \{X \in (-\infty, x_0 + 1/n]\}$ . Sea  $A = \{X \in (-\infty, x_0]\}$ . Esta sucesión es decreciente y además  $P(A_n) = F_X(x_0 + \frac{1}{n})$ .

Además  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_0 + 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) = F_X(x_0)$$

Entonces, como  $F_X$  es creciente, dados  $x_0, \epsilon$  existe  $n_0$  tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow F_X(x_0 + 1/n) < F_X(x_0) + \epsilon$$

Así que tomando  $\delta = 1/n_0$  se cumple la condición.

17. Sea  $a = F_X(x_0) - P(X = x_0)$ . Queremos ver que dados  $x_0, \epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow a - \epsilon \leq F_X(x) \leq a + \epsilon$$

Al mismo tiempo  $a = P(X \leq x_0) - P(X = x_0) = P(X < x_0)$ . Como  $x < x_0$ , se cumple que  $P(X \leq x) \leq P(X < x_0)$ . Entonces:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(X < x_0) = a$$

Por lo tanto  $F_X(x) \leq a + \epsilon$ . Queda ver  $a - \epsilon \leq F_X(x)$ .

Tomamos  $\{A_n\}$  tal que  $A_n = \{X < x_0 - 1/n\}$ . Es una sucesión creciente y  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{X < x_0\}$ .

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_0 - 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(X < x_0) = a$$

Por lo tanto existe  $n_0$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow F_X(x_0 - 1/n_0) \geq a - \epsilon$ . Como  $F_X$  es creciente, tomando  $\delta = 1/n_0$  se obtiene la propiedad.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

## 4 Convergencia en Distribución

26. Sea  $S_n \sim \text{Bi}(n, \lambda/n)$ .

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Veamos ambos factores del límite por separado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n-k}^n \frac{i}{n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n-k}^n \frac{n-k}{n} = 1$$

Como la expresión está acotada por 1, tiende a 1.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}(n-k)\frac{-\lambda}{n}} \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Ponemos todo junto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Que es la función de probabilidad puntual de la Poisson.

27. Sea  $U_n \sim \text{Uniforme}\{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ .

Para cada par  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in [0, 1]$ , sea  $x_{n,k} \in \mathbb{N}$  el mayor número tal que  $\frac{x_{n,k}}{n} \leq k$ .



Como tenemos que:

$$F_{U_n}(k) = \sum_{i=1}^{x_{n,k}} \frac{1}{n} = \frac{x_{n,k}}{n}$$

Lo que queremos demostrar es que  $x_{n,k} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} k$ , para que  $U$  se vaya a una uniforme. Pero tenemos que dados  $k$  y  $n$ ,

$$0 \leq \left(k - \frac{x_{n,k}}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Por lo que cuando  $n \rightarrow \infty$ , la expresión del medio se va a 0. Finalmente  $\frac{x_{n,k}}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} k$ , como queríamos demostrar.

28. Sean  $Y_n \sim \text{Geom}(\frac{\lambda}{n})$ .

Vamos a demostrar la convergencia para  $P\left(\frac{Y_n}{n} > y\right)$  porque la cuenta queda fácil así.

Para las geométricas:

$$P\left(\frac{Y_n}{n} > y\right) = P(Y_n > n \cdot y) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{ny}$$

Queremos saber:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{ny} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda} \cdot \frac{-\lambda}{n} ny} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda} (-\lambda y)} \\ &= e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

Con lo que  $F_{\frac{Y}{n}}(y) = 1 - P\left(\frac{Y}{n} > y\right) = 1 - e^{-\lambda y}$ , que es la  $F$  de una V.A. exponencial.

29. Sea  $X_n = c + \frac{1}{n}$ . Por un lado,  $X_n > c$  siempre con lo que  $F_{X_n}(c) = 0$ . Por otro es claro que  $X_n \rightarrow c$ .

## 5 Vectores Aleatorios

30. PREGUNTAR

31. Sean  $Z_1$  y  $Z_2$  constantes de normalización de  $f_{X_1}$  y  $f_{X_2}$  respectivamente.  
 $Z = Z_1 \cdot Z_2$ .

$$P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2) = \frac{1}{Z} a^{x_1+x_2} = \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \cdot \frac{1}{Z_2} a^{x_2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1) &= \sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \cdot \frac{1}{Z_2} a^{x_2} \\ &= \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{1}{Z_2} a^{x_2} \\ &= \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \cdot 1 \end{aligned}$$

(vale 1 porque es la sumatoria sobre toda la densidad de  $X_2$ ).

Análogamente,  $P(X_2 = x_2) = \frac{1}{Z_2} a^{x_2}$ . Como el producto de las densidades da la densidad conjunta, son independientes.

32.

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq x_1 \wedge X_2 \geq x_2) &= a^{x_1+x_2} \\ P(X_1 \geq x_1) &= P(X_1 \geq x_1 \wedge X_2 \geq 0) = a^{x_1} \end{aligned}$$

Análogamente  $P(X_2 \geq x_2) = a^{x_2}$ .

33.

(1  $\Rightarrow$  2) Es fácil porque se define  $g(x) = f_X(x)$  y  $h(y) = f_Y(y)$ .

(1  $\Rightarrow$  3) Es lo mismo que el anterior, se define  $G(x) = F_X(x)$  y  $H(y) = F_Y(y)$ .

(2  $\Rightarrow$  1)

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= g(x)h(y) \\ \int f_{X,Y}(x,y)dy &= \int g(x)h(y)dy \\ f_X(x) &= g(x) \int h(y)dy \end{aligned}$$

Es decir que  $g(x) = C_x \cdot f_X(x)$  donde  $C_x$  es una constante.

Análogamente  $h(y) = C_y \cdot f_Y(y)$  con  $C_y$  constante.

Entonces:

$$f_{X,Y}(x,y) = C_x C_y f_X(x) f_Y(y)$$

Y la constante vale 1 porque si integramos de los dos lados,  $f_{X,Y}(x,y)$ ,  $f_X(x)$  y  $f_Y(y)$  son todas densidades e integran a 1.

Finalmente  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ , con lo que son independientes.

(3  $\Rightarrow$  2)

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= G(x)H(y) \\ \frac{\delta F_{X,Y}(x,y)}{\delta x} &= G'(x)H(y) \\ \frac{\delta^2 F_{X,Y}(x,y)}{\delta x \delta y} &= G'(x)H'(y) \\ f_{X,Y}(x,y) &= G'(x)H'(y) \end{aligned}$$

Entonces basta definir  $g(x) = G'(x)$  y  $h(y) = H'(y)$  para demostrar (2).

34.  $x_1 \cdots x_n \cdots \geq 0$  independientes con media  $\mu$ .

Sea  $N \in \{1 \cdots k\}$  (supongo que equiprobable) independiente de todos los  $x_i$ .

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^N x_i\right) &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} E\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{\sum_{n=1}^k \prod_{i=1}^n E(x_i)}{k} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^k (\mu^n)}{k} \\ &= \frac{\mu^{k+1} - 1}{(\mu - 1)k} \end{aligned}$$

En el primer paso, hago suma sobre todos los casos para  $N$ , por la probabilidad de cada uno (que es  $\frac{1}{k}$ ). Puedo sacar la productoria para afuera en el paso 2 por linealidad de la esperanza.

El último paso es la resolución analítica de esa sumatoria.

35.

$$P(R \leq a) = P(X^2 + Y^2 \leq a^2)$$

Sean  $r, \theta$  tales que  $X = r \cdot \sin(\theta)$  e  $Y = r \cdot \cos(\theta)$ . Tenemos que  $r^2 = X^2 + Y^2$ .

$$P(R \leq a) = P(r^2 < a^2) = P(|r| < a)$$

suponiendo que  $a > 0$ .

Quiero hallar:

$$\int \int_D \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dy \, dx$$

para  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

Esto es lo mismo que integrar sobre:

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dy \, dx &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} \cdot r d\theta \, dr \\ &= \int_0^a \left( \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} \cdot r \right) \cdot 2\pi \, dr \\ &= \int_0^a (e^{\frac{-r^2}{2}} \cdot r) dr \\ &= - \int_0^a ((-r) \cdot e^{\frac{-r^2}{2}}) dr \\ &= -(e^{\frac{-a^2}{2}} - e^{\frac{-0^2}{2}}) \\ &= 1 - e^{\frac{-a^2}{2}} \end{aligned}$$

36.

$$F_{X+Y}(z) = P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx$$

Sean  $u = x$ ,  $v = x + y$ :

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z f_{X,Y}(u, v - u) \, dv \, du \\ &= \int_{-\infty}^z \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v - u) \, du \right) \, dv \end{aligned}$$

Luego, lo de adentro del paréntesis es la densidad. Entonces:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, z - u) \, du$$

37. Si reemplazamos la densidad por el producto de las densidades en la anterior:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(z - u) \, du$$

38. Caso discreto:

$$\begin{aligned}
 P(g(X) = x' \wedge h(Y) = y') &= \sum_{\{x:(g(x)=x')\}} \sum_{\{y:(h(y)=y')\}} P(X = x \wedge Y = y) \\
 &= \sum_{\{x:(g(x)=x')\}} \sum_{\{y:(h(y)=y')\}} P(X = x)P(Y = y) \\
 &= \left( \sum_{\{x:(g(x)=x')\}} P(X = x) \right) \left( \sum_{\{y:(h(y)=y')\}} P(Y = y) \right) \\
 &= P(g(X) = x')P(h(Y) = y')
 \end{aligned}$$

FALTA CASO CONTINUO PERO DEBE SER IGUAL, CON MENOR O IGUAL

39. Sale haciendo el gráfico  $(X, Y)$  y pintando el área que sirve, viendo que la proba de que no se crucen es como integrar un cuadrado de  $\frac{5}{6}$  de lado.

40. Sea  $Y = aX + b$ . Supongamos primero que  $a > 0$ .

$$\begin{aligned}
 F_{aX+b}(y) &= P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\
 f_{aX+b}(y) &= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la densidad de la normal:

$$\begin{aligned}
 f_{aX+b}(y) &= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b-a\mu}{a}\right)^2}{2\sigma^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 a^2)}} e^{-\frac{y-(a\mu+b)}{2(\sigma^2 a^2)}}
 \end{aligned}$$

Con lo que  $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .

Para el caso negativo, la ecuación con la  $F$  se da vuelta, con lo que la  $f$  queda multiplicada por  $-1$ , pero se cancela al meter el  $\frac{1}{a}$  en la constante de la raíz porque  $-\sqrt{a^2} = a$ .

Para ver la normalización, sea  $Y = X - \mu$ .  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ . Luego sea  $Z = \frac{Y}{\sigma}$ .  $Z \sim N(0, 1)$ .

41. VER DESPUES

42. Primero hay que sacar la constante de normalización: se integra sobre todo el dominio y la constante es  $\frac{1}{\text{Area}}$  para que la función integre a 1.

Después es hacer la integral doble. Para el máximo es directamente  $\int_{20}^{26} \int_{20}^{26} f_{X,Y}(x,y) dy dx$ , y para el mínimo es  $1 - \int_{26}^{30} \int_{26}^{30} f_{X,Y}(x,y) dy dx$ .

## 6 Esperanza

43. Sea  $Y = g(X)$ .

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y \cdot p(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_{\{x: g(x)=y\}} y \cdot p(X = x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x: g(x)=y\}} g(x) \cdot p(X = x) \\ &= \sum_x g(x) \cdot p(X = x) \end{aligned}$$

Cuando reemplazo  $y = g(x)$ , es importante que en cada término es potencialmente un  $x$  distinto, pero como cada  $x$  es de la preimagen de  $g$  en  $y$ , las expresiones son equivalentes.

44. (a) Caso continuo:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x)$$

Hago partes usando el reemplazo  $du = f_X(x)dx$ ,  $u = -(1 - F_X(x))$  (o sea, hago aparecer lo que quiero en la integral de partes).

Quedan  $v = x$ ,  $dv = dx$ .

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x) \\ &= -x(1 - F_X(x)) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} -(1 - F_X(x))dx \\ &= -x(1 - F_X(x)) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} 1 - F_X(x)dx \end{aligned}$$

Queda ver que  $x(1 - F_X(x)) \Big|_0^{\infty} = 0$ . Para  $x = 0$  se ve reemplazando, falta ver qué pasa cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Pero,

$$0 \leq x(1 - F_X(x)) = x \int_x^{+\infty} f_X(u)du \leq \int_x^{+\infty} u \cdot f_X(u)du$$

Como la esperanza está acotada, la parte de la derecha tiende a 0 cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

(b) Caso discreto: Sean  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$  los elementos del rango de  $X$ , en orden creciente. Sea  $x_0 = 0$  (si 0 no está en el rango, lo agrego con probabilidad asociada 0 porque si no está se me rompe todo con las geométricas).

Se cumple que  $p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ .

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^i (x_j - x_{j-1}) \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} (x_j - x_{j-1}) \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} (x_j - x_{j-1}) \cdot (1 - F(x_{j-1}))
\end{aligned}$$

Lo último que quedó es la suma de cada rectángulito de la  $F$  (que en el caso discreto es constante salvo en los saltos que ocurren en los  $x_i$ ). Luego equivale a la integral de la función<sup>1</sup>.

45. (a) Caso Discreto: Supongamos que existe un  $x_1 > 0$  tal que  $p_X(x_1) > 0$ .

$$0 = E(X) = \sum_{\{x \in \text{Rn}(X)\}} x \cdot p_X(x) \geq x_1 \cdot p_X(x_1) > 0$$

Luego, no existe tal  $x_1$ , y  $p(X > 0) = 0 \Rightarrow p(X = 0) = 1$ .

- (b) Caso Continuo: Sea  $a > 0$  un valor tal que  $f(a) > 0$ . Existe un entorno de  $a$  en  $\mathbb{R}$  (digamos  $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ ) donde la densidad es estrictamente positiva porque  $f$  es continua. Es decir que en  $[a, a + \epsilon]$  también. Como toda la función es no negativa, se cumple:

$$\int_a^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \geq \int_a^{a+\epsilon} x \cdot f_X(x) dx > 0$$

Aplicando esto a la esperanza se tiene:

$$E(X) = \int_0^a x \cdot f_X(x) dx + \int_a^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \geq \int_a^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx > 0$$

Luego no puede ser que exista un  $a > 0$  con densidad positiva, entonces  $P(X = 0) = 1$ .

---

<sup>1</sup>Hay un dibujo que sirve para entender qué está sumando esta expresión en el apunte de Ferrari, al principio de la página 13.



46. Minimizar  $E(X - c)^2$  es lo mismo que minimizar  $E(X - c)^2 - E(X^2)$  porque es un número que no depende de  $c$ .

$$\begin{aligned} E(X - c)^2 - E(X^2) &= E((X - c)^2 - X^2) = E((X - c + X)(X - c - X)) \\ &= E((2X - c)c) = c \cdot E(2X - c) = c \cdot (2E(X) - c) \end{aligned}$$

que es una cuadrática que tiene sus ceros en  $c = 0$  y  $c = 2E(X)$ . Por lo tanto el mínimo está en el vértice que es el promedio:  $c = E(X)$ .

47.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=1}^n i \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-i)!} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i} \\ &= np \end{aligned}$$

Porque el término de la sumatoria es la probabilidad puntual de una  $Bi(n-1, p)$ .

49. (a)  $V(X) = E((x - \mu)^2) \geq 0$  porque es suma de producto de cosas no negativas.  
 (b)  $\Rightarrow V(X) = E((X - \mu_X)^2) = V(0) = 0$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $Y = (X - \mu_X)^2$ . Sabemos que  $V(X) = E(Y) = 0$ . Como es no negativa, por la propiedad 45 sabemos  $P(Y = 0) = 1$ . Finalmente,  $P(X = \mu_X) = 1$ .

$$(c) \quad V(X + b) = E((X + b - E(X + b))^2) = E((X + b - \mu_X - b)^2) = E((X - \mu_X)^2) = V(X)$$

$$(d) \quad V(aX) = E((aX - E(aX))^2) = E(((aX - a\mu_X)^2)) = E(a^2(X - \mu_X)^2) = a^2E((X - \mu_X)^2) = a^2V(X)$$

50. Primero, el conjunto de las VA es un espacio vectorial real (o sea, las VA se portan bien con la suma y el producto por un escalar). Además, si definimos  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$  vale que

- $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
- $\langle X, X \rangle = E(X^2) \geq 0$
- $E(X^2) = 0$  sii  $X = 0$

así que es un producto interno del EV.

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y)^2 &= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))^2 \\ &= \langle X - \mu_X, Y - \mu_Y \rangle^2 \\ &= \langle X - \mu_X, Y - \mu_Y \rangle^2 \\ &\leq \langle X - \mu_X, X - \mu_X \rangle \langle Y - \mu_Y, Y - \mu_Y \rangle \\ &= E((X - \mu_X)^2)E((Y - \mu_Y)^2) \\ &= V(X)V(Y) \end{aligned}$$

La desigualdad vale por CBS para espacios vectoriales.

51. (a)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

(b)

$$\text{Cov}(X, X) = E((X - \mu_X)^2) = V(X)$$

(c) Sean  $U = X - \mu_X$  y  $V = Y - \mu_Y$ .

$$V(X) + V(Y) - |\text{Cov}(X, Y)| = E(U^2) + E(V^2) - |\text{Cov}(U, V)|$$

Si  $\text{Cov}(X, Y) = E(UV) \geq 0$ :

$$\begin{aligned} V(X) + V(Y) - |\text{Cov}(X, Y)| &= E(U^2) + E(V^2) - E(UV) \\ &= E((U - V)^2) + E(UV) \\ &\geq E((U - V)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Si no,

$$\begin{aligned} V(X) + V(Y) - |\text{Cov}(X, Y)| &= E(U^2) + E(V^2) + E(UV) \\ &= E((U + V)^2) - E(UV) \\ &\geq E((U + V)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

(d) Es obvio porque el producto conmuta.

(e)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(aX + bY, Z) &= E((aX - a\mu_X + bY - b\mu_Y)(Z - \mu_Z)) \\ &= E((aX - a\mu_X)(Z - \mu_Z) + (bY - b\mu_Y)(Z - \mu_Z)) \\ &= E((aX - a\mu_X)(Z - \mu_Z)) + E((bY - b\mu_Y)(Z - \mu_Z)) \\ &= a \cdot E((X - \mu_X)(Z - \mu_Z)) + b \cdot E((Y - \mu_Y)(Z - \mu_Z)) \\ &= a \cdot \text{Cov}(X, Z) + b \cdot \text{Cov}(Y, Z) \end{aligned}$$

52. (a) Sean  $U = X - \mu_X$ ,  $V = Y - \mu_Y$ .

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E(U+V)^2 = E(U^2 + V^2 + 2UV) = V(U) + V(V) + 2\text{Cov}(U, V) \\ V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

(b)

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

53. BUSCAR EJEMPLO DESPUES

54. BUSCAR EJEMPLO DESPUES

55.

$$\begin{aligned} \rho(aX + b, cY + d) &= \frac{\text{Cov}(aX + b, cY + d)}{\sqrt{V(aX + b)V(cY + d)}} \\ &= \frac{ac \cdot \text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{a^2c^2V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{ac}{|ac|} \cdot \rho(X, Y) \\ &= \text{sg}(ac) \cdot \rho(X, Y) \end{aligned}$$

56. Sean  $U = X - \mu_X$ ,  $V = Y - \mu_Y$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}} = \frac{\langle U, V \rangle}{\sqrt{\langle U, U \rangle \langle V, V \rangle}} \\ \rho(X, Y)^2 &= \frac{\langle U, V \rangle^2}{\langle U, U \rangle \langle V, V \rangle} \end{aligned}$$

El cociente es  $\leq 1$  por CS. Además sabemos que ocurre la igualdad cuando:

$$\begin{aligned} V &= \alpha U \\ (Y - \mu_Y) &= \alpha(X - \mu_X) \\ Y - \alpha X &= \mu_Y - \alpha \cdot \mu_X = \beta \\ Y &= \alpha X + \beta \end{aligned}$$

57.

$$E(aX) = \sum_{x \in \text{Rg}(X)} aX \cdot P(X = x) = a \sum_{x \in \text{Rg}(X)} X \cdot P(X = x) = a \cdot E(X)$$

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{x \in \text{Rg}(X)} \sum_{y \in \text{Rg}(Y)} (x + y)P(X = x \wedge Y = y) \\ &= \sum_{x \in \text{Rg}(X)} \sum_{y \in \text{Rg}(Y)} x \cdot P(X = x \wedge Y = y) + \sum_{x \in \text{Rg}(X)} \sum_{y \in \text{Rg}(Y)} y \cdot P(X = x \wedge Y = y) \\ &= \sum_{x \in \text{Rg}(X)} x \sum_{y \in \text{Rg}(Y)} P(X = x \wedge Y = y) + \sum_{y \in \text{Rg}(Y)} y \sum_{x \in \text{Rg}(X)} P(X = x \wedge Y = y) \\ &= \sum_{x \in \text{Rg}(X)} x \cdot P(X = x) + \sum_{y \in \text{Rg}(Y)} y \cdot P(Y = y) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

La propiedad vale para la sumatoria de  $n$  términos por inducción.

58.

$$E(aX) = \int_{-\infty}^{+\infty} aX \cdot f_X(x) = a \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f_X(x) = a \cdot E(X)$$

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)f_{X,Y}(x, y)dy \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X,Y}(x, y)dy \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{X,Y}(x, y)dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) \, dy \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

La propiedad vale para la sumatoria de  $n$  términos por inducción.

59. Sea  $Z = X - Y$ . Entonces  $P(Z \geq 0) = 1$ .

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot f_Z(z) \, dz \geq \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot f_Z(z) \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dz = 0$$

$$E(Z) = E(X) + E(Y) \Rightarrow E(X) + E(Y) \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$$

60.

$$E(X) = \sum_{x \in \text{Rg}(X)} x \cdot P(X = x) = c \cdot P(X = c) = c \cdot 1 = c$$

## 7 Esperanza Condicional

	X \ Y	Y		T
		2	3	
61.	0	0	1/8	1/8
	1	3/8	0	3/8
	2	3/8	0	3/8
	3	0	1/8	1/8
	T	3/4	1/4	1

No son independientes.

$$E(X|Y = 2) = \frac{1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{3}{8}} = 3/2$$

62.

$$E(X|Y = 1) = \frac{2 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6}{1/2} = 4$$

$$E(Y|X \geq 4) = \frac{1 \cdot 1/6 + 0 \cdot 1/6 + 1 \cdot 1/6}{1/2} = 2/3$$

63. Sean  $N \sim P(\lambda)$  y  $X_i \sim \text{Bi}(p)$ .

$$\begin{aligned}
 E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^N X_i \middle| N = k\right) \cdot P(N = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k \mu_X\right) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} kp \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda p e^{\lambda} \\
 &= \lambda p
 \end{aligned}$$

64.

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{(0 < x < y)} \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{(0 < x < y)} dy \\
&= \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{(0 < x)} dy \\
&= (-\lambda e^{-\lambda y}) \Big|_x^{+\infty} \mathbb{I}_{(0 < x)} \\
&= (\lambda e^{-\lambda x}) \mathbb{I}_{(0 < x)}
\end{aligned}$$

Entonces  $X \sim E(\lambda)$ . Por otro lado:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{(0 < x < y)} dx \\
&= \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{(0 < y)} dx \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda y} \cdot x \Big|_0^y \mathbb{I}_{(0 < y)} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda y} \cdot y \mathbb{I}_{(0 < y)} \\
&= \frac{\lambda^2 \cdot y^{2-1} e^{-\lambda y}}{(2-1)!} \mathbb{I}_{(0 < y)}
\end{aligned}$$

Entonces  $Y \sim \Gamma(2, \lambda)$ , por lo que  $Z = Y - X \sim E(\lambda)$ .<sup>2</sup>

65.

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j) \cdot E\left(\sum_{i=1}^N X_i \Big| N=j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j) \cdot E\left(\sum_{i=1}^j X_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j) \cdot \left(\sum_{i=1}^j E(X_i)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j) \cdot j \cdot E(X_1) \\
&= E(X_1) \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(N=j) \\
&= E(X_1) E(N)
\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>AVERIGUAR SI PUEDO DECIR ESTO!

66. Sea  $N$  la cantidad de túneles recorridos hasta salir.  $N \sim G(1/3)$ . Sea  $T$  el tiempo total que se tarda en salir, y  $T_i$  el tiempo que lleva recorrer cada túnel salvo el último.

$$E(T_i) = 1/2 \cdot 2h + 1/2 \cdot 3h = 2,5h$$

Ahora usamos Wald para resolver la esperanza condicional:

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(1h + \sum_{n=1}^{N-1} T_i\right) = 1h + E\left(\sum_{n=1}^{N-1} T_i\right) \\ &= 1h + E(N-1)E(T_i) \\ &= 1h + (3h - 1h) \cdot 2,5h = 6h \end{aligned}$$



## 8 Vectores Aleatorios

73. Sea  $\mathbb{I}_{[\epsilon, +\infty)}(X)$  la indicadora de  $X \geq \epsilon$ .

$$\mathbb{I}_{[\epsilon, +\infty)}(X) \cdot \epsilon \leq X$$

Porque si  $X < \epsilon$  el lado izquierdo da 0, y si no es obvio que  $X \geq \epsilon$ .

Si tomamos esperanza a ambos lados, siendo que la esperanza de la indicadora es  $P(X \geq \epsilon)$ ,

$$P(X \geq \epsilon) \cdot \epsilon \leq E(X) \Rightarrow P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}$$

Si tomamos la VA  $(X - E(X))^2$  (sabemos que es  $\geq 0$ ), y reescribimos la constante como  $\epsilon^2$ ,

$$P((X - E(X))^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{\epsilon^2}$$
$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Que es la fórmula de Chebychev.

74.

## 9 Funciones Generadoras de Momentos

78. Quiero ver que

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Como las  $X_i$  son independientes, tenemos que

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = E(e^{t \sum_{i=1}^n X_i}) = E(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

79.

$$M_{aX+b}(t) = E(e^{atX+bt}) = E(e^{atX}) \cdot E(e^{bt}) = E(e^{atX}) \cdot e^{bt} = M_X(at) \cdot e^{bt}$$

$$E(e^{bt}) = e^{bt} \text{ porque } e^{bt} \text{ es una constante.}$$

80. Quiero calcular  $M_X(t) = E(e^{tX})$  para  $X \sim N(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} \cdot f_X(x) dX = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} dX \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tX - \frac{X^2}{2}} dX \end{aligned}$$

Ahora multiplico y divido por  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  para completar a una normal:

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tX - \frac{X^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dX \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X^2 - 2tX + t^2)} dX = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-t)^2}{2}} dX \end{aligned}$$

Notamos que lo que está adentro de la integral es  $f_X(x)$  si  $X \sim N(t, 1)$ . Por lo tanto integra a 1 :) y la FGM de la normal es:

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

81. Sea  $X \sim P(\lambda)$ .

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!}$$

Ahora, sabemos que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$  (se deriva de la f de la Poisson, de hecho).

$$M_X(t) = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = e^{e^t \lambda - \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Ahora vamos a usar esto para calcular la FGM de una suma de Poissons. Si da la FGM de una Poisson, para cierto  $\lambda$ , demostramos que la suma es  $P(\lambda)$  por unicidad de la FGM.

Sean  $X_i \sim P(\lambda_i)$  VA independientes. Como son independientes (por item 78):

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(e^t - 1)} = e^{(e^t - 1) \sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Por lo tanto,  $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ .

## 10 Coupon collector

131. Voy a asumir que empiezo a contar desde 0 y no desde 1 porque me hace feliz, y los índices quedan más lindos.

Primero,  $T_i$  es el número de intentos hasta el primer éxito (encontrar un elemento nuevo), con una probabilidad de éxito de:

$$\frac{\text{elementos nuevos}}{\text{elementos totales}} = \frac{n-i}{n}$$

Además, las  $T_i$  son independientes.

En particular,  $T_0$  (el tiempo hasta el primer elemento) tiene una probabilidad de éxito de 1.

Esta definición de  $T_i$  quiere decir que  $T_i \sim G(\frac{n-i}{n})$ . Por esta razón,  $E(T_i) = \frac{n}{n-i}$ .

$$E(T) = \sum_{i=0}^{n-1} E(T_i)$$

$$E(T) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i}$$

$$E(T) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i}$$

$$E(T) = n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

FALTA TERMINAR