1 Probabilidad. Definición y enunciados

1. Axiomas de probabilidad: Dados un experimento, y S un espacio muestral, se asigna a cada evento A una probabilidad $P(A)$ tal que:

   - $P(A) \in [0, 1]$
   - $P(S) = 1$
   - Si $A_1, A_2, \cdots$ disjuntos, $P(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$

   (a)
   $$A \cup A^c = S$$
   y aplicando probabilidad a ambos lados,
   $$P(A \cup A^c) = P(S)$$
   $$P(A) + P(A^c) = 1$$
   pues A y A^c son disjuntos, y $P(S) = 1$.
   $$P(A) = 1 - P(A^c)$$

   (b)
   $$(A \setminus B) \cup B = A$$
   porque $B \subset A$. Aplicando probabilidad:
   $$P((A \setminus B) \cup B) = P(A)$$
   $$P(A \setminus B) + P(B) = P(A)$$
   pues B y $A \setminus B$ son disjuntos.
   $$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

2.

3.

4.

5.

2 Probabilidad condicional e independencia

6. Sea E = la persona está enferma, y V = la persona está vacunada. La probabilidad pedida es $P(\overline{V}|E)$.

$$P(\overline{V}|E) = \frac{P(\overline{V} \wedge E)}{P(E)} = \frac{0.13}{0.13 + 0.02} = \frac{13}{15}$$

7. Asumimos que la probabilidad de que un hijo cualquiera sea varón es de $\frac{1}{2}$. Sea V_1 = el primer hijo es varón, y V_2 = el segundo hijo es varón. La probabilidad pedida es

$$P(V_2|V_1) = \frac{P(V_1 \wedge V_2)}{P(V_1)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

8. Dadas las mismas suposiciones, la probabilidad pedida es:

$$P(V_1 \wedge V_2|V_1 \vee V_2) = \frac{P(V_1 \wedge V_2)}{P(V_1 \vee V_2)} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

9. Notamos cada caso como una tupla de dos letras (M o V), y ponemos un asterisco antes de la letra del hijo que abrió la puerta.

   Los casos posibles (que corresponden al evento en que abre la puerta un varón) son: $\{(V * V), (*VV), (*VM), (M * V)\}$.

   De estos, los favorables son los dos primeros (que corresponden al evento en que hay dos hijos varones). Por lo tanto la probabilidad es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

10. Sea $B_k = A_1 A_2 \cdots A_k$. Notar que $B_k = A_k B_{k-1}$ para $k > 1$.

    Los voy a demostrar por inducción en n. La propiedad se puede enunciar como

$$P(B_n) = P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_n|B_{n-1})$$

Caso base: $B_1 = A_1$. Esto ocurre por definición.

Paso inductivo: vale la propiedad hasta B_{n-1} y quiero demostrarla para B_n.

$$P(A_n|B_{n-1}) = \frac{P(A_n B_{n-1})}{P(B_{n-1})} = \frac{P(B_n)}{P(B_{n-1})}$$
$$P(B_n) = P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})$$

Pero por HI,

$$P(B_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_{n-1}|B_{n-2})$$

Luego tenemos

$$P(B_n) = (P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_{n-1}|B_{n-2}))P(A_n|B_{n-1})$$
$$P(B_n) = P(A_1)P(A_2|B_1) \cdots P(A_n|B_{n-1})$$

Q.E.D.

11.

12.

13.

14.

15.

3 Convergencia en Distribución

26. Sea $S_n \sim \text{Bi}(n, \lambda/n)$.

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} P(S_n = k) &= lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Veamos ambos factores del límite por separado:

$$lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!n^k} = lim_{n\to\infty}\prod_{i=n-k}^{n}\frac{i}{n} \quad > lim_{n\to\infty}\prod_{i=n-k}^{n}\frac{n-k}{n} = 1$$

Como la expresión está acotada por 1, tiende a 1.

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}(n-k)\frac{-\lambda}{n}} \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Ponemos todo junto:

$$lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1 \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Que es la función de probabilidad puntual de la Poisson.

27. Sea $U_n \sim$ Uniforme$\{\frac{1}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\}$.
Para cada par $n \in \mathbb{N}$, $k \in [0,1]$, sea $x_{n,k} \in \mathbb{N}$ el mayor número tal que $\frac{x_{n,k}}{n} \leq k$.

Como tenemos que:

$$F_{U_n}(k) = \sum_{i=1}^{x_{n,k}} \frac{1}{n} = \frac{x_{n,k}}{n}$$

Lo que queremos demostrar es que $x_{n,k} \to_{n\to\infty} k$, para que U se vaya a una uniforme. Pero tenemos que dados k y n,

$$0 \leq \left(k - \frac{x_{n,k}}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Por lo que cuando $n \to \infty$, la expresión del medio se va a 0. Finalmente $\frac{x_{n,k}}{n} \to_{n\to\infty} k$, como queríamos demostrar.

28. Sean $Y_n \sim \text{Geom}(\frac{\lambda}{n})$.

    Vamos a demostrar la convergencia para $P\left(\frac{Y_n}{n} > y\right)$ porque la cuenta queda fácil así.

    Para las geométricas:

$$P\left(\frac{Y_n}{n} > y\right) = P(Y_n > n \cdot y) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{ny}$$

    Queremos saber:

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{ny} &= lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}\frac{-\lambda}{n}ny} \\ &= lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}(-\lambda y)} \\ &= e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

    Con lo que $F_{\frac{Y}{n}}(y) = 1 - P\left(\frac{Y}{n} > y\right) = 1 - e^{-\lambda y}$, que es la F de una V.A. exponencial.

29. Sea $X_n = c + \frac{1}{n}$. Por un lado, $X_n > c$ siempre con lo que $F_{X_n}(c) = 0$. Por otro es claro que $X_n \to c$.

4 Vectores Aleatorios

30. PREGUNTAR

31. Sean Z_1 y Z_2 constantes de normalización de f_{X_1} y f_{X_2} respectivamente. $Z = Z_1 \cdot Z_2$.

$$P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2) = \frac{1}{Z} a^{x_1+x_2} = \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \cdot \frac{1}{Z_2} a^{x_2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1) &= \sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \cdot \frac{1}{Z_2} a^{x_2} \\ &= \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \sum_{x_2=1}^{\infty} \frac{1}{Z_2} a^{x_2} \\ &= \frac{1}{Z_1} a^{x_1} \cdot 1 \end{aligned}$$

(vale 1 porque es la sumatoria sobre toda la densidad de X_2).

Análogamente, $P(X_2 = x_2) = \frac{1}{Z_2} a^{x_2}$. Como el producto de las densidades da la densidad conjunta, son independientes.

32.
$$P(X_1 \geq x_1 \wedge X_2 \geq x_2) = a^{x_1+x_2}$$
$$P(X_1 \geq x_1) = P(X_1 \geq x_1 \wedge X_2 \geq 0) = a^{x_1}$$

Análogamente $P(X_2 \geq x_2) = a^{x_2}$.

33.

$(1 \Rightarrow 2)$ Es fácil porque se define $g(x) = f_X(x)$ y $h(y) = f_Y(y)$.

$(1 \Rightarrow 3)$ Es lo mismo que el anterior, se define $G(x) = F_X(x)$ y $H(y) = F_Y(y)$.

$(2 \Rightarrow 1)$

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= g(x)h(y) \\ \int f_{X,Y}(x, y)dy &= \int g(x)h(y)dy \\ f_X(x) &= g(x) \int h(y)dy \end{aligned}$$

Es decir que $g(x) = C_x \cdot f_X(x)$ donde C_x es una constante.
Análogamente $h(y) = C_y \cdot f_Y(y)$ con C_y constante.

Entonces:

$$f_{X,Y}(x,y) = C_x C_y f_X(x) f_Y(y)$$

Y la constante vale 1 porque si integramos de los dos lados, $f_{X,Y}(x,y)$, $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son todas densidades e integran a 1.

Finalmente $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, con lo que son independientes.

$(3 \Rightarrow 2)$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= G(x)H(y) \\ \frac{\delta F_{X,Y}(x,y)}{\delta x} &= G'(x)H(y) \\ \frac{\delta^2 F_{X,Y}(x,y)}{\delta x \delta y} &= G'(x)H'(y) \\ f_{X,Y}(x,y) &= G'(x)H'(y) \end{aligned}$$

Entonces basta definir $g(x) = G'(x)$ y $h(y) = H'(y)$ para demostrar (2).

34. $x_1 \cdots x_n \cdots \geq 0$ independientes con media μ.

    Sea $N \in \{1 \cdots k\}$ (supongo que equiprobable) independiente de todos los x_i.

$$\begin{aligned} E(\prod_{i=1}^{N} x_i) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k} E(\prod_{i=1}^{n} x_i) \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{k} \prod_{i=1}^{n} E(x_i)}{k} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{k} (\mu^n)}{k} \\ &= \frac{\mu^{k+1} - 1}{(\mu - 1)k} \end{aligned}$$

    En el primer paso, hago suma sobre todos los casos para N, por la probabilidad de cada uno (que es $\frac{1}{k}$). Puedo sacar la productoria para afuera en el paso 2 por linealidad de la esperanza.

    El último paso es la resolución analítica de esa sumatoria.

35. $$P(R \leq a) = P(X^2 + Y^2 \leq a^2)$$

    Sean r, θ tales que $X = r \cdot sin(\theta)$ e $Y = r \cdot cos(\theta)$. Tenemos que $r^2 = X^2 + Y^2$.

$$P(R \leq a) = P(r^2 < a^2) = P(|r| < a)$$

suponiendo que $a > 0$.

Quiero hallar:

$$\int\int_D \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dy\ dx$$

para $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Esto es lo mismo que integrar sobre:

$$\begin{aligned}
\int\int_D \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dy\ dx &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} \cdot r d\theta\ dr \\
&= \int_0^a \left(\frac{1}{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} \cdot r \right) \cdot 2\pi\ dr \\
&= \int_0^a (e^{\frac{-r^2}{2}} \cdot r) dr \\
&= -\int_0^a ((-r) \cdot e^{\frac{-r^2}{2}}) dr \\
&= -(e^{\frac{-a^2}{2}} - e^{\frac{-0^2}{2}}) \\
&= 1 - e^{\frac{-a^2}{2}}
\end{aligned}$$

36.

5 Funciones Generadoras de Momentos

78. Quiero ver que

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

Como las X_i son independientes, tenemos que

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = E(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}) = E(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

79.

$$M_{aX+b}(t) = E(e^{atX+bt}) = E(e^{atX}) \cdot E(e^{bt}) = E(e^{atX}) \cdot e^{bt} = M_X(at) \cdot e^{bt}$$

$E(e^{bt}) = e^{bt}$ porque e^{bt} es una constante.

80. Quiero calcular $M_X(t) = E(e^{tX})$ para $X \sim N(0,1)$.

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} \cdot f_X(x) dX = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} dX$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tX-\frac{X^2}{2}} dX$$

Ahora multiplico y divido por $e^{-\frac{t^2}{2}}$ para completar a una normal:

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tX-\frac{X^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dX$$
$$= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X^2-2tX+t^2)} dX = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-t)^2}{2}} dX$$

Notamos que lo que está adentro de la integral es $f_X(x)$ si $X \sim N(t,1)$. Por lo tanto integra a 1 :) y la FGM de la normal es:

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

81. Sea $X \sim P(\lambda)$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!}$$

Ahora, sabemos que $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = e^x$ (se deriva de la f de la Poisson, de hecho).

$$M_X(t) = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = e^{e^t \lambda - \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Ahora vamos a usar esto para calcular la FGM de una suma de Poissons. Si da la FGM de una Poisson, para cierto λ, demostramos que la suma es $P(\lambda)$ por unicidad de la FGM.

Sean $X_i \sim P(\lambda_i)$ VA independientes. Como son independientes (por item 78):

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i (e^t - 1)} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i (e^t - 1)} = e^{(e^t - 1) \sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

6 Coupon collector

131. Voy a asumir que empiezo a contar desde 0 y no desde 1 porque me hace feliz, y los índices quedan más lindos.

Primero, T_i es el número de intentos hasta el primer éxito (encontrar un elemento nuevo), con una probabilidad de éxito de:

$$\frac{\text{elementos nuevos}}{\text{elementos totales}} = \frac{n-i}{n}$$

Además, las T_i son independientes.

En particular, T_0 (el tiempo hasta el primer elemento) tiene una probabilidad de éxito de 1.

Esta definición de T_i quiere decir que $T_i \sim G(\frac{n-i}{n})$. Por esta razón, $E(T_i) = \frac{n}{n-i}$.

$$E(T) = \sum_{i=0}^{n-1} E(T_i)$$

$$E(T) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i}$$

$$E(T) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i}$$

$$E(T) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

FALTA TERMINAR