Семинар 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества

Понятие **множества** является исходным, для него нельзя дать строгого математического определения. Множество состоит из **элементов**.

Основоположник теории множеств Георг Кантор, поясняя интуитивную идею множества, писал:

„Под ... множеством, я понимаю вообще все многое, которое возможно мыслить как единое, т.е. такую совокупность определенных элементов, которая посредством одного закона может быть соединена в одно целое.“

Принадлежность элемента x множеству A обозначается с помощью знака $\in$ („принадлежит“): $x \in A$.

Элементы формальной логики

Для сокращения записи мы будем использовать элементы формальной логики, оперирующей с *высказываниями*.

Высказывание — это предложение, которое может быть истинно или ложно. Для записи высказываний используют логические символы.

- Символ $\wedge$ (конъюнкция) заменяет в речи союз „и“.
- Символ $\vee$ (дизъюнкция) — союз „или“.
- Символ $\Rightarrow$ (импликация) — слова „если $\ldots$, то“.
- Символ $\Leftrightarrow$ — слово „равносильно“.
- Символ $\neg$ — слово „не“.

Будем также пользоваться кванторами $\forall$ (всеобщности) и $\exists$ (существования).

Равенство множеств. Подмножество

Два множества A и B считаются **равными**, если любой элемент x из множества A ($x \in A$) является элементом множества B ($x \in B$) и наоборот:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Говорят, что B есть **подмножество** множества A , если всякий элемент B есть элемент A ($(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$). Используют запись: $B \subseteq A$. Символ $\subseteq$ называют символом включения.

Если $B \subseteq A$, но $B \neq A$, то пишут $B \subset A$, и B называют **строгим**, или **собственным подмножеством** множества A , а символ $\subset$ — символом **строгого включения**.

Пустое множество есть подмножество любого множества, т.е.

$$(\forall A)(\varnothing \subseteq A),$$

и собственное подмножество любого непустого множества.

Теоретико-множественные операции

Для любых двух множеств A и B определены новые множества, называемые **объединением**, **пересечением**, **разностью** и **симметрической разностью**.

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение A и B есть множество всех таких x, что x является элементом хотя бы одного из множеств A, B;
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение A и B есть множество всех таких x, что x — одновременно элемент A и элемент B;
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ — разность A и B есть множество всех таких x, что x — элемент A, но не элемент B ($x \notin B$);
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, а симметрическая разность A и B — множество всех таких x, что x — элемент A, но не элемент B или x — элемент B, но не элемент A.

Удобно рассматривать все множества как подмножества некоторого **универсального** множества U. В этом случае можно определить **дополнение множества** A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}.$$

Дополнение A состоит из всех элементов универсального множества U, которые не являются элементами множества A.

Другими словами $\overline{A} = U \setminus A$. В общем случае разность $B \setminus A$, где $A \subseteq B$ называют дополнением множества A до множества B.

Свойства теоретико-множественных операций

Введенные операции над множествами, обладают следующими свойствами.

1) $A \cup B = B \cup A$ 2) $A \cap B = B \cap A$
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
9) $A \cup \varnothing = A$ 10) $A \cap \varnothing = \varnothing$
11) $A \cap U = A$ 12) $A \cup U = U$
13) $A \cup \overline{A} = U$ 14) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
15) $A \cup A = A$ 16) $A \cap A = A$
17) $A = \overline{\overline{A}}$ 18) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
19) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Метод двух включений

Любое высказывание о равенстве двух множеств может быть доказано так называемым **методом двух включений**, основанном на определении равенства через включения:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Если нужно доказать тождество $X = Y$, то достаточно из предположения $x \in X$ вывести, что $x \in Y$, и, обратно, из предположения $x \in Y$ вывести $x \in X$.

Докажем, например, тождество 19)

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

используя метод двух включений.

Покажем первое включение

$$\begin{aligned} x \in A \triangle B \Rightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

Первое включение установлено. Покажем второе включение.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in A \triangle B. \end{aligned}$$

Оба включения имеют место, тождество доказано.

Задачи

1.1. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, сделать чертеж:
(а) $A = [3, 5]$, $B = [2, 4]$;
(б) $A = (3, 5)$, $B = (2, 4]$.

1.2. Пусть M_n есть множество натуральных чисел, делящихся на натуральное число n . Найти:
(а) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$
(б) $M_n \cap M_m$
(в) $\bigcup\limits_{p \in P} M_p$, где P — множество простых чисел.

1.3. Найти $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$:
(а) $X_n = [-1/n, 1/n]$;
(б) $X_n = (-1/n, 1/n)$;
(в) $X_n = [0, 1/n]$;
(г) $X_n = (0, 1/n)$.

1.4. Найти множество точек круга, принадлежащих объединению и пересечению
(а) всех треугольников, вписанных в данный круг;
(б) всех правильных треугольников, вписанных в данный круг.

1.5. Доказать, что пересечение произвольной системы выпуклых множеств на плоскости есть выпуклое множество. (Множество точек на плоскости будет выпуклым, если все точки отрезка, соединяющего любые две точки множества, принадлежат этому множеству). Верно ли это утверждение для объединения?

1.6. Метод эквивалентных преобразований доказательства теоретико-множественных тождеств заключается в применении ранее установленных тождеств для преобразования правой части исследуемого тождества к левой или наоборот. Используя тождества 1)–19), проверить, что справедливы тождества:

(а) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$;

(б) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$;