

# ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

# 1. Основные определения

**Определение 3.1.**  $n$ -арным (или  $n$ -местным) отношением на множествах  $A_1, \dots, A_n$  называется произвольное подмножество  $\rho$  декартова произведения  $A_1 \times \dots \times A_n$ :

$$\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n.$$

В частности, при  $\rho = \emptyset$  получаем **пустое отношение**, а при  $\rho$ , совпадающем со всем указанным декартовым произведением — **универсальное отношение**.

Важный частный случай получаем при  $n = 2$ : тогда говорят о **соответствии из множества  $A_1$  в множество  $A_2$** .

Если  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , то  $\rho$  называют  **$n$ -арным отношением на множестве  $A$** ; при  $n = 2$  получаем **бинарное отношение на множестве  $A$** .

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. ■

Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если  $A = \mathbb{R}^1$  (множество действительных чисел), то бинарное отношение на  $\mathbb{R}^1$  — это некоторое множество точек плоскости  $\mathbb{R}^2$ . ■

**Определение 3.2. Область определения соответствия** из множества  $A_1$  в множество  $A_2$   $\rho \subseteq A_1 \times A_2$  — есть множество

$$\mathcal{D}(\rho) = \{x \mid (\exists y \in A_2)(x, y) \in \rho\}. \blacksquare$$

**Область значения соответствия**  $\rho$  — это множество

$$\mathcal{R}(\rho) = \{y \mid (\exists x \in A_1)(x, y) \in \rho\}. \blacksquare$$

Из определения вытекает, что  $\mathcal{D}(\rho) \subseteq A_1$ ,  $\mathcal{R}(\rho) \subseteq A_2$ . ■

Соответствие называют **всюду определенным**, если  $\mathcal{D}(\rho) = A_1$ .

**Определение 3.3.** Сечением соответствия  $\rho$  для фиксированного  $x \in A_1$  называют множество

$$\rho(x) = \{y \mid (x, y) \in \rho\}.$$

**Пример 1.**

Пусть  $\rho = \{(x, y) \mid x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ . ■

Имеем  $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$ . ■

Область определения отношения  $\mathcal{D}(\rho) = \{3, 4\}$ , ■

область значений —  $\mathcal{R}(\rho) = \{1, 2\}$ . ■

**Задание.** Построить график и граф отношения  $\rho$ .

**3.1.** Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  : ■

(а)  $x_1 \varphi x_2$ , если  $x_1 < x_2$  ; ■

(б)  $x_1 \tau x_2$ , если  $x_1 \leq x_2$  ; ■

(в)  $x_1 \rho x_2$ , если  $(x_1 - x_2) \geq 2$  ; ■

(г)  $\{(a, b) \mid a + b \text{ — четное}\}$  ; ■

**3.2.** Определить, по какому принципу построено отношение, заданное графиком  $\Phi$  на  $M \times M$ , где  $M = \{л, о, с, т\}$ ,

а  $\Phi = \{(о, л), (с, л), (т, л), (с, о), (т, о), (с, т)\}$ .

## 2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия. ■

### 1) Композиция соответствий. ■

Если  $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ ,  $\sigma \subseteq A_2 \times A_3$ , то композиция (произведение) соответствий  $\rho$  и  $\sigma$  есть соответствие  $\rho \circ \sigma$ , определяемое как

$$\rho \circ \sigma = \{(x, z) \mid (\exists y)((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma)\}. \blacksquare$$

**Пример 2.** Соответствие  $\rho$  берем из предыдущего примера, а соответствие  $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$  зададим непосредственно как множество пар  $\sigma = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$ . ■

**Задание.** Построить граф композиции  $\rho \circ \sigma$ .



Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

**Определение 3.4.** Отношение  $\text{id}_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$  называют диагональю множества  $A$ .

**Свойства композиции:**

(1)  $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$ ; ■

(2)  $\rho \circ \emptyset = \emptyset \circ \rho = \emptyset$ ; ■

(3)  $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = \rho \circ \sigma \cup \rho \circ \tau$ ; ■

(4)  $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq \rho \circ \sigma \cap \rho \circ \tau$ ;

(равенство в общем случае не имеет места!).

(5)  $\rho \circ \text{id}_A = \text{id}_A \circ \rho = \rho$ , где  $\rho \subseteq A^2$  — бинарное отношение на  $A$ . ■

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений. ■

Первое включение.

$$\begin{aligned}(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) &\Rightarrow \text{■} (\exists y)((x, y) \in \rho \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((x, y) \in \rho \wedge ((y, t) \in \sigma \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((x, y) \in \rho \wedge ((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (\exists t)((x, t) \in \rho \circ \sigma \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (x, z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau.\end{aligned}$$

Второе включение.

$$\begin{aligned}(x, z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau &\Rightarrow \text{■} (\exists t)((x, t) \in \rho \circ \sigma \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((x, y) \in \rho \wedge ((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((x, y) \in \rho \wedge ((y, t) \in \sigma \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (\exists y)((x, y) \in \rho \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \text{■} \\&\Rightarrow (x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau).\end{aligned}$$



## 2) Обратное соответствие

Соответствие, обратное соответствию  $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ , есть соответствие из  $A_2$  в  $A_1$ , обозначаемое  $\rho^{-1}$  и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Для соответствия  $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$

$$\rho^{-1} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}.$$

*Обратное соответствие* обладает следующими свойствами:

$$(6) \quad (\rho^{-1})^{-1} = \rho$$

$$(7) \quad (\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$$

Для фиксированного  $y \in A_2$  положим  $\rho^{-1}(y) = \{x \mid y \in \rho(x)\}$ .

## Задачи

**3.1.** Найти  $\mathcal{D}(\rho)$ ,  $\mathcal{R}(\rho)$ ,  $\rho^{-1}$ ,  $\rho \circ \rho$ ,  $\rho^{-1} \circ \rho$ ,  $\rho \circ \rho^{-1}$  для отношения: ■

$$\rho = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1], 2x \geq 3y\}. \blacksquare$$

**3.2.** Доказать, что для любых бинарных отношений  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in A \times A$ :

(а)  $\rho_1 \cap \rho_1 = \rho_1 \cup \rho_1 = \rho_1$ ; ■

(б)  $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$ ; ■

(в)  $\rho_1 \circ id_A = id_A \circ \rho_1 = \rho_1$ .

## Домашнее задание

**3.1.** Найти  $\mathcal{D}(\rho)$ ,  $\mathcal{R}(\rho)$ ,  $\rho^{-1}$ ,  $\rho \circ \rho$ ,  $\rho^{-1} \circ \rho$ ,  $\rho \circ \rho^{-1}$  для отношений:

(а)  $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x = 0 \pmod{y}\}$ ;

(б)  $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1], x + y \leq 1\}$ .

**3.2.** Доказать, что для любого бинарного отношения  $\rho \subseteq A \times A$ :

(а)  $\mathcal{D}(\rho^{-1}) = \mathcal{R}(\rho)$ ;

(б)  $\mathcal{R}(\rho^{-1}) = \mathcal{D}(\rho)$ ;

(в)  $\mathcal{D}(\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_1^{-1}(\mathcal{R}(\rho_1) \cap \mathcal{D}(\rho_2))$ ;

(г)  $\mathcal{R}(\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_2(\mathcal{R}(\rho_1) \cap \mathcal{D}(\rho_2))$

(д)  $(\bar{\rho})^{-1} = \overline{(\rho^{-1})}$ .

**3.3.** Доказать, что для любых бинарных отношений  $\rho_1, \rho_2 \in A \times A$ :

(а)  $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$ ;

(б)  $(\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1}$ ;

(в)  $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$ .