Семинар 12. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Неформально граф можно рассматривать как множество точек и соединяющих эти точки линий со стрелками или без.

Неориентированные графы

Неориентированный граф G задается двумя множествами

$$G = (V, E),$$

где V — конечное множество, элементы которого называют **вершинами**, E — множество *неупорядоченных пар* на V , элементы которого называют **ребрами**

Тот факт, что **ребро соединяет** вершины u и v, т.е. $\{u, v\} \in E$, обозначается $u \mapsto\!\!\dashv v$;

Вершины u и v, для которых $u \mapsto\!\!\!\dashv v$, называют **смежными**, а также **концами ребра** $\{u, v\}$.

Если $u \mapsto\!\!\!\dashv v$, говорят, что вершины u и v связаны **отношением непосредственной достижимости**.

Ребро e называют **инцидентным** вершине v, если она является одним из его концов.

Степенью вершины v называют число $\mathrm{dg}(v)$ всех инцидентных ей ребер. Можно показать, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер (это утверждение известно как лемма „о рукопожатиях“).

Цепь в неориентированном графе G — это последовательность вершин (конечная или бесконечная) $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, такая, что для любого i $v_i \mapsto\!\!\!\dashv v_{i+1}$, если v_{i+1} существует.

Для конечной цепи v_0, $v_1, \ldots$, v_n число n $(n \geq 0)$ называют **длиной цепи**. Таким образом, длина цепи есть число ее ребер, т.е. всех ребер, соединяющих вершины v_i и v_{i+1} $(i = 0, \cdots, n-1)$.

Цепь длины 0 — это произвольная вершина графа.

Говорят, что вершина v неориентированного графа G **достижима** из вершины u этого графа и обозначают $u \mid\!=\!=\!\mid^* v$, если существует цепь $v_0, v_1, \ldots, v_n$ такая, что $u = v_0$, $v_n = v$ (при этом говорят также, что данная **цепь соединяет** вершины u и v, которые называют **концами цепи**.

Таким образом, задано **отношение достижимости** $\mid\!=\!=\!\mid^*$ в неориентированном графе.

Простая цепь — это цепь, все вершины которой, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны, и все ребра попарно различны.

Простую цепь ненулевой длины с совпадающими концами называют **циклом**.

Граф, не содержащий циклов, называют **ациклическим**.

Ориентированные графы

Ориентированный граф (или, коротко, **орграф**) G задается двумя множествами

$$G = (V, E),$$

где V — конечное множество, элементы которого называют **вершинами**, E — множество *упорядоченных пар* на V, т.е. подмножество множества $V \times V$, элементы которого называют **дугами**.

Тот факт, что **дуга ведет** из вершины u в вершину v, т.е. $(u, v) \in E$, обозначается $u \to v$; если это необходимо, под стрелкой указывается имя графа G ($u \to_G v$).

Вершины u и v, для которых $u \to v$, называют **смежными**, причем u называют **началом**, а v — **концом дуги** (u, v). Дугу, начало и конец которой есть одна и та же вершина, называют **петлей**. Если $u \to v$, то из вершины u непосредственно достижима вершина v. Говорят, что вершины u и v связаны **отношением непосредственной достижимости**.

Дугу (u, v) называют **заходящей** в вершину v и **исходящей** из вершины u. Дугу называют **инцидентной** вершине v, если она или заходит в v или исходит из v.

Полустепенью захода вершины v называют число $\mathrm{dg}^{-}(v)$ заходящих в нее дуг, а **полустепенью исхода** вершины v — число $\mathrm{dg}^{+}(v)$ исходящих из нее дуг. **Степень вершины** v, обозначаемая $\mathrm{dg}(v)$ — это сумма полустепеней захода и исхода.

Путь в ориентированном графе G — это последовательность вершин (конечная или бесконечная) $v_0, v_1, \ldots,\ v_n, \ldots,$ такая, что для любого i $v_i \to v_{i+1}$, если v_{i+1} существует.

Для конечного пути $v_0, v_1, \ldots, v_n$ число n называют **длиной пути** $(n \geq 0)$. Тем самым длина пути есть число его дуг, т.е. всех дуг, которые ведут из вершины v_i в вершину v_{i+1} $(i = 0, \cdots, n-1)$. Путь длины 0 — это произвольная вершина графа.

Говорят, что вершина v ориентированного графа G **достижима** из вершины u этого графа и обозначают $u \Rightarrow^* v$, если существует путь $v_0, v_1, \ldots, v_n$, такой, что $u = v_0$, $v = v_n$ (при этом говорят, что данный **путь ведет** из вершины u в вершину v, называя первую вершину **началом**, а вторую — **концом** данного **пути**). Таким образом, задано **отношение достижимости** $\Rightarrow^*$ в ориентированном графе.

Отношение достижимости в ориентированном графе рефлексивно и транзитивно, но в общем случае не *антисимметрично*, так как если две вершины орграфа достижимы одна из другой, то из этого вовсе не следует, что они совпадают. Таким образом, отношение достижимости в орграфе есть *отношение предпорядка*.

Простой путь — это путь, все вершины которого, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны.

Простой путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают, называют **контуром**.

Граф (неориентированный или ориентированный) $G_1 = (V_1, E_1)$ называют **подграфом** графа $G = (V, E)$ (соответственно, неориентированного или ориентированного), если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$. Обозначение: $G_1 \subseteq G$.

Подграф G_1 графа G называют **подграфом, порожденным множеством вершин** $V_1 \subseteq V$, если каждое ребро (или дуга) тогда и только тогда принадлежит $E_1 \subseteq E$, когда его концы принадлежат V_1.

Неориентированный граф

Компонента связности (**компонента**) неориентированного графа G — это максимальный подграф $G_1 \subseteq G$, любые две вершины u и v которого соединены цепью ($u \,|\!\!=\!\!=\!\!|^*\, v$).

Две различные компоненты неориентированного графа не пересекаются, т.е. не имеют ни общих вершин, ни общих ребер. Неориентированный граф, который сам является компонентой, называют **связным**.

Ориентированный граф

Компонента связности (или, просто, **компонента**) ориентированного графа G — это максимальный подграф $G_1 \subseteq G$, для любых двух вершин u, v которого вершина v достижима из вершины u или вершина u достижима из вершины v $(u \Rightarrow^* v$ или $v \Rightarrow^* u)$.

Компоненты орграфа могут пересекаться.

Орграф, который сам является компонентой, называют **связным**.

Для орграфа можно определить также понятия сильной и слабой связности.

Бикомпонентой орграфа называют такой его максимальный подграф, что для любых двух его вершин u и v вершина v достижима из вершины u и вершина u достижима из вершины v $(u \Rightarrow^* v$ и $v \Rightarrow^* u)$. Орграф, являющийся бикомпонентой, называют **сильно связным**.

Неориентированный граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называют **ассоциированным** с орграфом $G = (V, E)$, если $V_1 = V$ и $E_1 = \{\{u, v\} \,|\, (u, v) \in E$ или $(v, u) \in E,\ u \neq v\}$.

Содержательно переход от орграфа к ассоциированному с ним неориентированному графу состоит в „стирании“ ориентации дуг орграфа с учетом того, что все петли исчезают, а дуги (u, v) и (v, u) при $u \neq v$ переходят в одно и то же ребро $\{u, v\}$.

Орграф называют **слабо связным**, если ассоциированный с ним неориентированный граф связен. **Компонентой слабой связности** (**слабой компонентой**) орграфа называют его максимальный слабо связный подграф.

Для представления графа может служить матрица **смежности вершин** графа. Это квадратная матрица B n-ого порядка, элементы которой определяются для неориентированного графа следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я и } j\text{-я вершины соед. ребром,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а для орграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю \textit{ведет дуга}} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задачи

12.1. Сколько существует n-вершинных неориентированных графов, т.е. сколько существует различных подмножеств множества всех неупорядоченных пар на множестве из n вершин?

12.2. Доказать, что если число ребер неориентированного графа с n вершинами при $n > 2$, больше C_{n-1}^2, то он связен.

12.3. Доказать , что в связном неориентированном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют общую вершину.

12.4. Доказать, что не существует нериентированного графа, степени всех вершин которого попарно различны.

12.5. Пусть G_n — неориентированный граф, вершины которого пронумерованы натуральными числами $\{1, 2, \ldots, n\}$, а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда числа i и j взаимно просты.

(а) Записать матрицу смежности графа G_5. Установить, является ли граф связным?

(б) Является ли граф G_n связным?

(в) Доказать, что при $m < n$ граф G_m является порожденным подграфом графа G_n.

12.6. Найти число всех n-вершинных орграфов, т.е. число различных подмножеств множества всех упорядоченных пар на множестве из n вершин.

12.7. Установить связь между числами $\sum dg^+(v)$, $\sum dg^-(v)$, $\sum dg(v)$ для произвольной вершины v орграфа?

12.8. Установить, связен ли орграф, изображенный на рисунке? Найти все его компоненты и бикомпоненты.

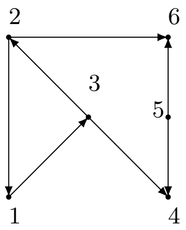

Рис. 12.1

12.9. Доказать, что отношение взаимной достижимости в орграфе есть эквивалентность.

12.10. Доказать, что орграф связен тогда и только тогда, когда в нем есть путь, проходящий через все вершины. Останется ли это утверждение справедливым, если потребовать, чтобы существовал простой путь.