Семинар 5. ГРУППЫ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ГРУППАХ

1. Группы

Определение 5.1. Элемент y множества G называется **левым (правым) обратным** к элементу x относительно данной операции, если $y * x = \mathbf{1}$ ($x * y = \mathbf{1}$). Элемент y, который является одновременно левым и правым обратным, называется просто **обратным** к x относительно данной операции.

Определение 5.2. Моноид называется **группой**, если в нем для каждого элемента существует обратный.

Теорема 1. В любой группе $\mathcal{G} = (\mathcal{G}, \cdot)$ для каждого элемента $a \in G$ элемент, обратный к a, единственный.

Чтобы проверить, что алгебра $(G, *)$ является группой, нужно
1) проверить ассоциативность операции $*$ на множестве G;
2) найти элемент $\mathbf{1}$ множества G — нейтральный элемент (единицу) относительно операции $*$;
3) убедиться, что для каждого элемента из G существует обратный.

Группа называется **коммутативной** (**абелевой**), если ее операция коммутативна.

Пример 1. Рассмотрим алгебру $(2^A, \triangle, \varnothing)$.

Операция симметрической разности

1) ассоциативна ($(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$) ;

2) для любого $X \subseteq A$ $X \triangle \varnothing = X$, т.е. $\varnothing$ — нейтральный элемент относительно данной операции;

3) $X \triangle Y = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $X = Y$, т.е. каждый элемент X является обратным сам к себе.

Следовательно, данная алгебра является *группой*.

Поскольку операция $\triangle$ коммутативна

$$A \triangle B = B \triangle A,$$

то данная алгебра является *абелевой группой*.

Задача 6.1. Какие из указанных множеств с операциями являются группами:

(а) $(\mathbb{N} \cup \{0\},\ +\ )$;

(б) $(\mathbb{Q},\ +\ )$;

(в) $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\ \cdot\ )$.

Задача 6.2. Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц образуют группу:

(а) множество невырожденных матриц относительно умножения?

(б) множество невырожденных матриц относительно сложения?

(в) множество диагональных матриц одного порядка (включая нулевую) относительно сложения?

(г) множество диагональных матриц одного порядка, исключая нулевую, относительно умножения?

Задача 6.3. Пусть M — некоторое множество. *Является* ли группой алгебра $(2^M, \cap)$?

2. Решение уравнений в группах

Теорема 2. В любой группе $\mathcal{G}$ любое уравнение вида $a \cdot x = b$ или $x \cdot a = b$ имеет единственное решение.

Решение имеет вид:

$$x = a^{-1} \cdot b \text{ или } x = b \cdot a^{-1}.$$

Пример 2.
В группе S_3 решим уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение слева на

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее, умножая полученное уравнение справа на

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

окончательно получим

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3).$$

Задача 6.4. Решить уравнение в группе S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2)\,;$$

Задача 6.5. В аддитивной группе вычетов по модулю 5 $\mathbb{Z}_5^{\oplus}$ решить уравнение $4 \oplus_5 x = 1$.

Таблица Кэли для группы $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \oplus_5)$:

$\oplus_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Задача 6.6. В мультипликативной группе вычетов по модулю 5 $\mathbb{Z}_5^{\odot}$ решить уравнение $4 \odot_5 x = 3$.
Таблица Кэли для группы $(\{1, 2, 3, 4\}, \odot_5)$:

$\odot_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Домашнее задание

Задача Д5.1. Пусть $A = \{x, y, z\}$ — множество букв, а A^* — множество всех слов, которые можно составить из этих букв с повторениями. Конкатенацией двух слов называется слово, полученное их „склеиванием“, например: $xxy + yzxx = xxyyzxx$. Пустое слово обозначают λ. Показать, что $(A^*, +)$ — моноид.

Задача Д5.2 Пусть M — некоторое множество. Является ли алгебра $(2^M, \cup)$ моноидом? группой?

Задача Д5.3. Решить уравнение в группе S_4:

$$(1\ 2)(3\ 4)X(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача Д5.4.
Выписать таблицу Кэли для множества подстановок $\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ с операцией композиции подстановок.

Задача Д5.5. В аддитивной группе вычетов по модулю 7 $\mathbb{Z}_7^{\oplus}$ решить уравнение $4 \oplus_7 x = 2$.

Задача Д5.6 В мультипликативной группе вычетов по модулю 7 $\mathbb{Z}_7^{\odot}$ решить уравнение $6 \odot_5 x = 5$.

Задача Д5.7 В мультипликативной группе вычетов по модулю 31 $\mathbb{Z}_{31}^{\odot}$ решить уравнение $4 \odot_{31} x = 5$.