Семинар 2.

2.1. Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:
(а) $\chi_A(x)^2 = \chi_A(x)$;
(б) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
(в) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;
(г) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Задача 1.
Вывести формулы для вычисления характеристических функций а) $A \setminus B$; б) $A \triangle B$.
Ответ.

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B;$$
$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_b.$$

Характеристические функции множеств позволяют в некоторых случаях легко доказывать теоретико-множественные тождества. Метод характеристических функций доказательства теоретико-множественного тождества заключается в вычислении характеристические функции обеих его частей. Тождество верно тогда и только тогда, когда эти функции совпадают.
Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество:
$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\begin{aligned} &\chi_{(A \triangle B) \cap C} = \chi_{A \triangle B}\chi_C = \\ &\quad = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\ &\quad = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} &\chi_{(A \cap C) \triangle (B \cap C)} = \\ &\quad = \chi_{A \cap C} + \chi_{B \cap C} - 2\chi_{A \cap C}\chi_{B \cap C} = \\ &\quad = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_C\chi_B\chi_C = \\ &\quad = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

Характеристические функции левой и правой части тождества совпадают. Следовательно, тоджество верно.

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;
(б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

(в) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Дом. задание.

Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:

(а) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

(в) $(A \triangle B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

2.2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** $(a,\, b)$ действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a,\, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a,\, b) \neq (b,\, a)$.

Определение 2.1. Декартово (прямое) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар $(a,\, b)$, таких, что первый элемент пары берется из множества A, а второй — из множества B:

$$A \times B = \{(a,\, b) \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Пример.
Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a,\, 1),\, (a,\, 2),\\ &(b,\, 1),\, (b,\, 2),\\ &(c,\, 1),\, (c,\, 2)\}. \end{aligned}$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество.
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
Решение.
Покажем первое включение.

$$\begin{aligned} x =& (y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge\\ &\qquad\qquad \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge\\ &\qquad\qquad \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Покажем второе включение.

$$\begin{aligned} x =& (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge\\ &\qquad\qquad \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge\\ &\qquad\qquad \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \cap C) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (y, z) \in (A \times (B \cap C). \end{aligned}$$

Тождество доказано.

Задачи

2.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

2.2. Доказать, что если $(A \subseteq X)$ и $(B \subseteq Y)$, то

$$(A \times B) \subseteq (X \times Y).$$

Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, X, Y отрезки числовой прямой.

2.3. Используя метод двух включений, доказать справедливость тождества:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

2.4. Показать, что

$$\overline{(A \times B)} \neq \overline{A} \times \overline{B}.$$

Вывести требуемое тождество. Проиллюстрировать полученное графически, приняв в качестве множеств A и B отрезки числовой прямой.

2.5. Проверить на примерах, справедливо ли тождество:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Если не удастся придумать пример, показывающий, что это не тождество, попробуйте доказать его методом двух включений.