ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

Специальные свойства бинарных отношений

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \in \rho)$, т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$,

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$,

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho)$,
т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho)$,
т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

4) **антисимметричным**, если

$$(\forall x \forall y)(((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho) \Rightarrow (x = y))$$

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho)$,
т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

4) **антисимметричным**, если

$$(\forall x \forall y)(((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho) \Rightarrow (x = y))$$

т.е. $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x,x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho)$,
т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

4) **антисимметричным**, если

$$(\forall x \forall y)(((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho) \Rightarrow (x = y))$$

т.е. $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$ (в частности, м. б., что $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$!).

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$,
т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

4) **антисимметричным**, если

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho) \Rightarrow (x = y))$$

т.е. $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$ (в частности, м. б., что $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$!).
Эквивалентное определение:

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \wedge x \neq y) \Rightarrow ((y, x)) \notin \rho).$$

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$,
т.е. $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$.

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$,
т.е. $\rho^{-1} = \rho$.

4) **антисимметричным**, если

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho) \Rightarrow (x = y))$$

т.е. $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$ (в частности, м. б., что $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$!).
Эквивалентное определение:

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \wedge x \neq y) \Rightarrow ((y, x)) \notin \rho).$$

5) **транзитивным**, если

$$(\forall x \forall y \forall z)(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow ((x, z) \in \rho)),$$

5) **транзитивным**, если

$$(\forall x \forall y \forall z)(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow ((x, z) \in \rho)),$$

т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

5) **транзитивным**, если

$$(\forall x \forall y \forall z)((((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow ((x, z) \in \rho)),$$

т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

6) **плотным**, если

$$(\forall x \forall y)((((x, y) \in \rho \Rightarrow (\exists z)((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge ((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \rho)).$$

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно;

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно;

5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно;

5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

6) **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно;

Бинарное отношение называется:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно;

5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

6) **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно;

Говорят: „отношение эквивалентности, толерантности, порядка, предпорядка … “ и т.п.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U : $A \rho B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing \rho \varnothing$.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U: $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$.

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U: $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$.

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично.

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \varnothing$, $A \cap A = A \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$, отношение ρ является рефлексивным.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U : $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A\cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$.

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично.

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \varnothing$, $A \cap A = A \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$, отношение ρ является рефлексивным.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ следует, что $B \cap A \neq \varnothing$, отношение ρ является симметричным.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U : $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$.

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично.

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \varnothing$, $A \cap A = A \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$, отношение ρ является рефлексивным.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ следует, что $B \cap A \neq \varnothing$, отношение ρ является симметричным.

Вывод: это отношение толерантности.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U : $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A\cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$.

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично.

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \varnothing$, $A\cap A = A \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$, отношение ρ является рефлексивным.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ следует, что $B \cap A \neq \varnothing$, отношение ρ является симметричным.

Вывод: это отношение толерантности.

Покажем, что ρ — не эквивалентность.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U : $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$.

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично.

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \varnothing$, $A \cap A = A \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$, отношение ρ является рефлексивным.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ следует, что $B \cap A \neq \varnothing$, отношение ρ является симметричным.

Вывод: это отношение толерантности.

Покажем, что ρ — не эквивалентность.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ и $B \cap C \neq \varnothing$ в общем случае не следует, что $A \cap C \neq \varnothing$, что легко видеть что, отношение ρ не транзитивно.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.

Пример 2.

Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.Если a делит b , а b делит c , то найдутся такие натуральные числа t_1 , t_2 , такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.Если a делит b , а b делит c , то найдутся такие натуральные числа t_1 , t_2 , такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$. Отсюда имеем $c = at_1t_2$, т.е. a — делитель c .

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.Если a делит b , а b делит c , то найдутся такие натуральные числа t_1 , t_2 , такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$. Отсюда имеем $c = at_1t_2$, т.е. a — делитель c .

Таким образом, отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ является отношением порядка.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.Если a делит b , а b делит c , то найдутся такие натуральные числа t_1 , t_2 , такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$. Отсюда имеем $c = at_1t_2$, т.е. a — делитель c .

Таким образом, отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ является отношением порядка.

Это отношение на множество целых чисел $\mathbb{Z}$ будет только предпорядком, поскольку не будет антисимметричным.

Пример 2.
Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a \,|\, b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a .Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$,и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$.Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$.Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.Если a делит b , а b делит c , то найдутся такие натуральные числа t_1 , t_2 , такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$. Отсюда имеем $c = at_1t_2$, т.е. a — делитель c .

Таким образом, отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ является отношением порядка.

Это отношение на множество целых чисел $\mathbb{Z}$ будет только предпорядком, поскольку не будет антисимметричным.
Например, 2 делится на -2 , и -2 делится на 2 , однако $2 \neq -2$.

Пример 3.
Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $2^{(A)}$. Покажем, что отношение включения $\subseteq$ на множестве $2^{(A)}$ есть порядок.

Пример 3.
Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $2^{(A)}$. Покажем, что отношение включения $\subseteq$ на множестве $2^{(A)}$ есть порядок.

Это отношение рефлексивно, т.к. для любого множества X справедливо $X \subseteq X$.

Пример 3.
Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $2^{(A)}$. Покажем, что отношение включения $\subseteq$ на множестве $2^{(A)}$ есть порядок.

Это отношение рефлексивно, т.к. для любого множества X справедливо $X \subseteq X$.

Поскольку для любых двух множеств X и Y из $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq X)$ следует, что $X = Y$, рассматриваемое отношение антисимметрично.

Пример 3.
Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $2^{(A)}$. Покажем, что отношение включения $\subseteq$ на множестве $2^{(A)}$ есть порядок.

Это отношение рефлексивно, т.к. для любого множества X справедливо $X \subseteq X$.

Поскольку для любых двух множеств X и Y из $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq X)$ следует, что $X = Y$, рассматриваемое отношение антисимметрично.

Из определения включения вытекает, что если $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq Z)$, то $X \subseteq Z$. Следовательно, отношение транзитивно.

Пример 3.
Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $2^{(A)}$. Покажем, что отношение включения $\subseteq$ на множестве $2^{(A)}$ есть порядок.

Это отношение рефлексивно, т.к. для любого множества X справедливо $X \subseteq X$.

Поскольку для любых двух множеств X и Y из $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq X)$ следует, что $X = Y$, рассматриваемое отношение антисимметрично.

Из определения включения вытекает, что если $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq Z)$, то $X \subseteq Z$. Следовательно, отношение транзитивно.

Таким образом, отношение рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т. е. это отношение порядка.

Задачи.

4.1 Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:

(a) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a,\ a), (a,\ b), (c,\ a), (b,\ d), (a,\ d), (b,\ c)\};$$

Задачи.

4.1 Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:

(a) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a,\ a), (a,\ b), (c,\ a), (b,\ d), (a,\ d), (b,\ c)\};$$

(б) $x\,\varphi\,y$, если $(x - y) \leq 2$, $x \in R$, $y \in R$.

Задачи.

4.1 Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:

(а) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a,\ a), (a,\ b), (c,\ a), (b,\ d), (a,\ d), (b,\ c)\};$$

(б) $x \varphi y$, если $(x - y) \leq 2$, $x \in R$, $y \in R$.

4.2 Пусть $X = \{x \mid x \in [0, 1]\}$, $\rho = \{(x,\ y) \mid x, y \in X, x < y$ и $|x - y| < 0.5\}$. Построить графики отношений ρ и ρ^{-1} . Исследовать свойства отношения ρ . Что можно сказать о свойствах обратного отношения?

Задачи.

4.1 Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:
(а) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a,\ a), (a,\ b), (c,\ a), (b,\ d), (a,\ d), (b,\ c)\};$$

(б) $x \varphi y$, если $(x - y) \leq 2$, $x \in R$, $y \in R$.

4.2 Пусть $X = \{x \mid x \in [0, 1]\}$, $\rho = \{(x,\ y) \mid x, y \in X, x < y$ и $|x - y| < 0.5\}$. Построить графики отношений ρ и ρ^{-1}. Исследовать свойства отношения ρ. Что можно сказать о свойствах обратного отношения?

4.3 Пусть τ — отношение на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b)\,\tau\,(c, d)$, если $a \leq c$ и $b \leq d$. Является ли τ отношением порядка и почему?

Задачи.

4.1 Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:

(а) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a,\ a), (a,\ b), (c,\ a), (b,\ d), (a,\ d), (b,\ c)\};$$

(б) $x \,\varphi\, y$, если $(x - y) \leq 2$, $x \in R$, $y \in R$.

4.2 Пусть $X = \{x \mid x \in [0, 1]\}$, $\rho = \{(x,\ y) \mid x, y \in X, x < y$ и $|x - y| < 0.5\}$. Построить графики отношений ρ и ρ^{-1} . Исследовать свойства отношения ρ . Что можно сказать о свойствах обратного отношения?

4.3 Пусть τ — отношение на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b)\, \tau\, (c, d)$, если $a \leq c$ и $b \leq d$. Является ли τ отношением порядка и почему?

4.4 Пусть υ определено на множестве положительных рациональных чисел: $(a/b)\upsilon(c/d)$, если $ad \leq bc$. Показать, что υ является отношением линейного порядка.

4.5 Пусть A — произвольное множество и σ — отношение на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя):

$$(P, Q)\sigma(X, Y), \text{ если}(P \subseteq X) \text{ и } (Q \subseteq Y);$$

Является ли σ отношением порядка?

4.5 Пусть A — произвольное множество и σ — отношение на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя):

$$(P, Q)\sigma(X, Y), \text{ если} (P \subseteq X) \text{ и } (Q \subseteq Y);$$

Является ли σ отношением порядка?

4.6 Рассмотрим множество квадратных матриц размером 2×2, элементами которых являются целые числа. Является ли заданное ниже отношение τ отношением порядка? Линейного порядка?
(a) $A \tau B$, если $a_{ij} \le b_{ij}$, $i, j = 1, 2$;

4.5 Пусть A — произвольное множество и σ — отношение на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя):

$$(P, Q)\sigma(X, Y), \text{ если} (P \subseteq X) \text{ и } (Q \subseteq Y);$$

Является ли σ отношением порядка?

4.6 Рассмотрим множество квадратных матриц размером 2×2, элементами которых являются целые числа. Является ли заданное ниже отношение τ отношением порядка? Линейного порядка?
(а) $A\tau B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, 2$;
(б) $A\tau B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, 2$ и хотя бы для одной пары элементов неравенство строгое.

4.5 Пусть A — произвольное множество и σ — отношение на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя):

$$(P, Q)\sigma(X, Y), \text{ если} (P \subseteq X) \text{ и } (Q \subseteq Y);$$

Является ли σ отношением порядка?

4.6 Рассмотрим множество квадратных матриц размером 2×2, элементами которых являются целые числа. Является ли заданное ниже отношение τ отношением порядка? Линейного порядка?
(а) $A\tau B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, 2$;
(б) $A\tau B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, 2$ и хотя бы для одной пары элементов неравенство строгое.

4.7 Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$. Исследовать свойства отношения τ:
$f(x)\tau g(x)$, если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$. Является ли τ отношением предпорядка? порядка?

Отношение эквивалентности.

Определение 4.1. Бинарное отношение называется: **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение 4.2. Пусть $\rho \subseteq A^2$ — экивалентность. Множество

$$[x]_\rho = \{y \mid y\rho x\}$$

называют **классом эквивалентности элемента x по отношению ρ**.

Определение 4.3. Множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности ρ на множестве A называется фактор-множеством множества A по отношению ρ и обозначается A/ρ, т.е.

$$A/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in A\}.$$

Пример 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ („ m равно n по модулю 2 “) имеющее место тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 2 : $2 \,|\, m-n$.

Пример 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $m \equiv_{(\mathrm{mod}\,2)} n$ („ m равно n по модулю 2 “) имеющее место тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 2: $2 \,|\, m-n$.

Это отношение рефлексивно и симметрично, поскольку $m - m = 0$ делится на 2, и из того, что $m-n$ делится на 2, вытекает, что $n-m$ делится на 2.

Пример 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ („ m равно n по модулю 2 “) имеющее место тогда и только тогда, когда $m - n$ делится на 2: $2 \mid m - n$.

Это отношение рефлексивно и симметрично, поскольку $m - m = 0$ делится на 2, и из того, что $m - n$ делится на 2, вытекает, что $n - m$ делится на 2.

Покажем транзитивность. Пусть $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ и $n \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} p$.

Пример 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ („ m равно n по модулю 2 “) имеющее место тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 2: $2 \mid m-n$.

Это отношение рефлексивно и симметрично, поскольку $m - m = 0$ делится на 2, и из того, что $m-n$ делится на 2, вытекает, что $n-m$ делится на 2.

Покажем транзитивность. Пусть $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ и $n \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} p$. Если $m-n$ делится на 2 и $n-p$ делится на 2, то числа m, n и p либо все четные, либо нечетные.

Пример 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ („ m равно n по модулю 2 “) имеющее место тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 2: $2 \,|\, m-n$.

Это отношение рефлексивно и симметрично, поскольку $m - m = 0$ делится на 2, и из того, что $m-n$ делится на 2, вытекает, что $n-m$ делится на 2.

Покажем транзитивность. Пусть $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} n$ и $n \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} p$. Если $m-n$ делится на 2 и $n-p$ делится на 2, то числа m, n и p либо все четные, либо нечетные.Поэтому $m-p$ делится на 2, что означает $m \equiv_{(\mathrm{mod}\, 2)} p$.

Пример 4. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $m \equiv_{(\mathrm{mod}\,2)} n$ („ m равно n по модулю 2 “) имеющее место тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 2: $2 \,|\, m-n$.

Это отношение рефлексивно и симметрично, поскольку $m - m = 0$ делится на 2, и из того, что $m-n$ делится на 2, вытекает, что $n-m$ делится на 2.

Покажем транзитивность. Пусть $m \equiv_{(\mathrm{mod}\,2)} n$ и $n \equiv_{(\mathrm{mod}\,2)} p$. Если $m-n$ делится на 2 и $n-p$ делится на 2, то числа m, n и p либо все четные, либо нечетные.Поэтому $m-p$ делится на 2, что означает $m \equiv_{(\mathrm{mod}\,2)} p$.

Таким образом, $\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}$ — транзитивность.

Найдем фактор-множество множества целых чисел $\mathbb{Z}$ по данному отношению эквивалентности.

Найдем фактор-множество множества целых чисел $\mathbb{Z}$ по данному отношению эквивалентности.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}$ с числом 0. Разность некоторого числа n и 0 будет нацело делиться на 2 только если число n — четное. Таким образом, $[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$ — множество четных чисел.

Найдем фактор-множество множества целых чисел $\mathbb{Z}$ по данному отношению эквивалентности.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}$ с числом 0. Разность некоторого числа n и 0 будет нацело делиться на 2 только если число n — четное. Таким образом, $[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$ — множество четных чисел.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}$ с числом 1. Разность некоторого числа m и 1 будет нацело делиться на 2 только если число m — нечетное. Таким образом, $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$ — множество нечетных чисел.

Найдем фактор-множество множества целых чисел $\mathbb{Z}$ по данному отношению эквивалентности.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}$ с числом 0. Разность некоторого числа n и 0 будет нацело делиться на 2 только если число n — четное. Таким образом, $[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$ — множество четных чисел.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}$ с числом 1. Разность некоторого числа m и 1 будет нацело делиться на 2 только если число m — нечетное. Таким образом, $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$ — множество нечетных чисел.

В итоге получаем ровно 2 попарно различных классов эквивалентности по данному отношению: $[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$ и $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\ 2)}}$.

Найдем фактор-множество множества целых чисел $\mathbb{Z}$ по данному отношению эквивалентности.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}$ с числом 0. Разность некоторого числа n и 0 будет нацело делиться на 2 только если число n — четное. Таким образом, $[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}}$ — множество четных чисел.

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}$ с числом 1. Разность некоторого числа m и 1 будет нацело делиться на 2 только если число m — нечетное. Таким образом, $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}}$ — множество нечетных чисел.

В итоге получаем ровно 2 попарно различных классов эквивалентности по данному отношению: $[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}}$ и $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)}}$.

Можем записать

$$\mathbb{Z}/\equiv_{(\mathrm{mod}\,2)} \sim \{0, 1\}.$$

Задача 4.8 На множестве рациональных дробей вида a/b, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ задано бинарное отношение

$$\tau = \{(a/b,\, c/d) \,|\, ad = cb\}.$$

Показать, что τ является отношением эквивалентности. Что является фактор-множеством множества рациональных дробей по данному отношению?

Задача 4.8 На множестве рациональных дробей вида a/b, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ задано бинарное отношение

$$\tau = \{(a/b,\, c/d) \,|\, ad = cb\}.$$

Показать, что τ является отношением эквивалентности. Что является фактор-множеством множества рациональных дробей по данному отношению?

Задача 4.9 Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана плоскость $ax + by + cz = 0$. Точки с радиус-векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ связаны отношением τ, если $((\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}), \mathbf{n}) = 0$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение. Показать, что τ — отношение эквивалентности. На какие классы эквивалентности разбивается $\mathbb{R}^3$. Что будет фактор-множеством множества $\mathbb{R}^3$ по данному отношению эквивалентности.

Задача 4.8 На множестве рациональных дробей вида a/b, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ задано бинарное отношение

$$\tau = \{(a/b,\, c/d) \,|\, ad = cb\}.$$

Показать, что τ является отношением эквивалентности. Что является фактор-множеством множества рациональных дробей по данному отношению?

Задача 4.9 Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана плоскость $ax + by + cz = 0$. Точки с радиус-векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ связаны отношением τ, если $((\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}), \mathbf{n}) = 0$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Показать, что τ — отношение эквивалентности. На какие классы эквивалентности разбивается $\mathbb{R}^3$. Что будет фактор-множеством множества $\mathbb{R}^3$ по данному отношению эквивалентности.

Задача 4.10 Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$. Исследовать свойства отношения τ:

$f(x)\tau g(x)$, если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Является ли τ отношением эквивалентности?

Индексированное семейство множеств $\{B_i\}_{i\in I}$ называется **разбиением** множества A, если:

1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$,

2) если $i \neq j$, то $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Индексированное семейство множеств $\{B_i\}_{i\in I}$ называется **разбиением** множества A, если:

1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$,

2) если $i \neq j$, то $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Таким образом, разбиение множества A — это семейство попарно не пересекающихся подмножеств A, объединение которых равно A.

Индексированное семейство множеств $\{B_i\}_{i\in I}$ называется **разбиением** множества A, если:

1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$,

2) если $i \neq j$, то $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Таким образом, разбиение множества A — это семейство попарно не пересекающихся подмножеств A, объединение которых равно A.

Например, множества $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$ и $[2/3, 1]$ образуют разбиение отрезка $[0, 1]$.

Индексированное семейство множеств $\{B_i\}_{i\in I}$ называется **разбиением** множества A, если:

1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$,

2) если $i \neq j$, то $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Таким образом, разбиение множества A — это семейство попарно не пересекающихся подмножеств A, объединение которых равно A.

Например, множества $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$ и $[2/3, 1]$ образуют разбиение отрезка $[0, 1]$.

Теорема. Любое отношение эквивалентности определяет однозначно некоторое разбиение данного множества и обратно, любое разбиение множества однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности на нем.

Индексированное семейство множеств $\{B_i\}_{i\in I}$ называется **разбиением** множества A, если:

1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$,

2) если $i \neq j$, то $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Таким образом, разбиение множества A — это семейство попарно не пересекающихся подмножеств A, объединение которых равно A.

Например, множества $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$ и $[2/3, 1]$ образуют разбиение отрезка $[0, 1]$.

Теорема. Любое отношение эквивалентности определяет однозначно некоторое разбиение данного множества и обратно, любое разбиение множества однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности на нем.

Задача 4.11 Пусть A — конечное множество. Какое отношение эквивалентности на нем дает наибольшее число классов эквивалентности. Сколько? Сколькими способами можно задать отношение эквивалентности, разбивающее A на два класса?

Домашнее задание

4.12 Отношение σ связывает клетки шахматной доски: две клетки связаны, если с одной на другую можно перейти ходом коня. Записать отношение с помощью логических высказываний, исследовать его свойства.

4.13 Пусть π — отношение на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $(a,b)\,\pi\,(c,d)$, если $a\le c$ и $b\ge d$. Является ли π отношением порядка и почему?

4.14 Пусть A — произвольное множество и ρ — отношение на множестве $2^A\times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя).

$(P,Q)\rho(X,Y)$, если $(P\triangle Q)\subseteq(X\triangle Y)$;

Является ли ρ отношением порядка?

4.15 Пусть M —некоторое множество, а $2^M\setminus\{\varnothing\}$ — множество всех его подмножеств без пустого множества. Два множества из 2^M связаны отношением τ, если они имеют хотя бы одно непустое общее подмножество. Является ли в общем случае τ отношением порядка. Какими свойствами будет обладать отношение τ, если $M=\{a,b\}$

4.16 Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — отображение, и $x_1 \,\tau\, x_2$ если и только если $f(x_1) = f(x_2)$. Показать, что τ является отношением эквивалентности. Указать фактор-множество $\mathbb{R}/\tau$.