Семинар 13. ЗАДАЧА О ПУТЯХ ВО ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФАХ

Взвешенные графы

Определение 13.1. Взвешенным (или размеченным) орграфом называют пару $W = (G, \varphi)$, где

$G = (V, E)$ — обычный орграф,

$\varphi : E \to \mathcal{R}$ — **весовая функция** (или **функция разметки**) со значениями в некотором *полукольце*

$$\mathcal{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$$

причем $(\forall e \in E)(\varphi(e) \neq 0)$.

Будем говорить, что **орграф размечен над полукольцом** $\mathcal{R}$.

Пусть в орграфе фиксирована некоторая нумерация его вершин. Тогда взвешенный орграф может быть задан матрицей A следующего вида:

$$a_{ij} = \begin{cases} \varphi((i,j)), \text{ если } i \to j, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Эту матрицу будем называть **матрицей меток дуг**.

Решение общей задачи о путях для произвольного замкнутого полукольца $\mathcal{R}$.

Определение 13.2. Метка пути, ведущего из вершины v_i в вершину v_j, есть *произведение в полукольце* $\mathcal{R}$ меток входящих в путь дуг в порядке их следования (для пути ненулевой *длины*) и есть $\mathbf{1}$ (*единица полукольца* $\mathcal{R}$) для пути нулевой длины.

Определение 13.3. Стоимость прохождения из вершины v_i в вершину v_j (или между i-ой и j-ой вершинами) — это *сумма в полукольце* $\mathcal{R}$ меток всех путей, ведущих из вершины v_i в вершину v_j.

Сумма, определяющая стоимость прохождения, есть „бесконечная сумма“ в замкнутом полукольце, т.е. *точная верхняя грань* соответствующей последовательности меток, так как множество всех путей, ведущих из одной вершины графа в другую, конечно или счетно.

Среди задач анализа *орграфов* весьма важными следующие задачи.

1) Вычисление для заданного орграфа его *матрицы достижимости.*

2) Вычисление наименьших расстояний между всеми парами вершин в орграфе, где каждой дуге орграфа сопоставлена числовая метка — расстояние между вершинами, соединяемыми этой дугой.

Эту задачу будем называть **задачей о кратчайших расстояниях**.

Вычисление *итерации* A^* *матрицы* A дает решение всех сформулированных выше задач, если для каждой задачи выбирать соответствующее полукольцо.

Теорема 13.1. Матрица стоимостей C орграфа G, размеченного над полукольцом с итерацией $\mathcal{R}$ (в частности, над замкнутым полукольцом), равна итерации матрицы A меток дуг, задающей орграф G.

Для вычисления $C = A^*$ можно решить в $\mathcal{R}$ при всех $j = 1, \ldots, n$ систему уравнений вида

$$\xi = A\xi + \varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_j \in \mathcal{R}^n$ — j-ый единичный вектор, т.е. вектор, все элементы которого, кроме j-ого, равны 0, а j-ый равен 1 полукольца $\mathcal{R}$.

$$\xi = A^* \varepsilon_j$$

есть j-й столбец матрицы A^*.

Смысл матрицы стоимостей $C = A^*$ для полуколец $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}^+$

В полукольце $\mathcal{B}$ метка отдельного пути всегда равна 1 (так как метка дуги в размеченном над полукольцом графе не может, согласно определению, быть нулем полукольца).

Следовательно, стоимость $c_{ij} = 1$, если существует хотя бы один путь из i-ой вершины в j-ую, и $c_{ij} = 0$ иначе.

Другими словами, для полукольца $\mathcal{B}$ матрица стоимостей совпадает с матрицей достижимости орграфа.

В полукольце $\mathcal{R}^+$ метка пути — это арифметическая сумма меток его дуг, так как умножение в $\mathcal{R}^+$ — это обычное арифметическое сложение.

Поскольку сложение в $\mathcal{R}^+$ — это взятие наименьшего из слагаемых, то стоимость c_{ij} — это наименьшая из меток пути среди всех путей, ведущих из i-ой вершины в j-ую, т.е. это и есть наименьшая длина пути между указанными вершинами.

Таким образом, в полукольце $\mathcal{R}^+$ матрица стоимостей является матрицей кратчайших расстояний, т.е. наименьших длин путей между всеми парами вершин орграфа.

Задачи

13.1. Для заданных графов решить задачу транзитивного замыкания (в полукольце B) и задачу вычисления кратчайших расстояний (в полукольце R^+) для графов, заданных списком дуг с весами. Каждый элемент списка имеет вид $(v_i, v_j, (\text{вес}))$:

(а) $(1,2,8)$, $(1,1,2)$, $(1,3,5)$, $(2,1,3)$, $(3,2,2)$;

(б) $(1,2,2)$, $(1,4,10)$, $(2,3,3)$, $(3,5,4)$, $(5,4,5)$, $(2,4,7)$, $(4,3,6)$;

(в) $(1,2,10)$, $(1,4,5)$, $(2,1,6)$, $(2,3,7)$, $(2,4,2)$, $(2,5,9)$, $(3,3,8)$, $(3,4,10)$, $(4,3,5)$, $(4,5,4)$, $(4,2,7)$, $(5,1,8)$, $(5,3,4)$;

(г) $(1,2,2)$, $(1,3,3)$, $(2,3,6)$, $(3,2,5)$, $(2,4,6)$, $(3,5,2)$, $(4,5,3)$, $(5,4,4)$, $(6,4,1)$, $(7,5,5)$, $(6,7,4)$, $(7,2,6)$;

(д) $(1,2,1)$, $(2,3,3)$, $(3,4,4)$, $(5,4,5)$, $(5,6,1)$, $(6,1,1)$, $(1,7,2)$, $(2,7,1)$, $(4,7,1)$, $(7,3,2)$, $(7,5,1)$, $(7,6,1)$;

13.2. Не используя интерпретации на графах, доказать, что для любой матрицы A $n \times n$ над полукольцом $\mathcal{B}$ $A^* = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$.

Рассмотреть A как матрицу смежности некоторого неориентированного графа и дать интерпретацию на графах матриц A^2, A^3, A^k.

Рассмотреть эти матрицы как матрицы бинарных отношений на n-элементном множестве и установить, как связаны эти бинарные отношения с бинарным отношением, задаваемым матрицей A?