ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Полугруппы и группы

Пусть на множестве A определена бинарная операция, обозначаемая $*$.

Определение 6.1. Бинарная операция $*$ называется:

1) **ассоциативной**, если для любых x, y, z

$$(x * y) * z = x * (y * z);$$

2) **коммутативной**, если для любых x, y

$$x * y = y * x;$$

3) **идемпотентной**, если для любого x

$$x * x = x.$$

а) Теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$ являются ассоциативными, так как

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

коммутативными, так как

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cap B = B \cap A;$$

и идемпотентными, так как

$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A;$$

б) Операция $\setminus$ разности не является ассоциативной, так как

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C.$$

Задача 1

Ассоциативна ли операция $\odot$ на множестве M, если:

(а) $M = \mathbb{N}, \quad x \odot y = 2xy$;

(б) $M = \mathbb{Z}, \quad x \odot y = x^2 + y^2$;

(в) $M = \mathbb{R}, \quad x \odot y = \sin(x) \cdot \sin(y)$;

(г) $M = \mathbb{R}, \quad x \odot y = x - y$.

Определение 6.2. Элемент $\mathbf{0}$ множества A называется **левым (правым) нулем** относительно данной операции, если для любого $x \in A$ $\mathbf{0} * x = \mathbf{0}$ $(x * \mathbf{0} = \mathbf{0})$. Нуль, который является одновременно левым и правым, называется просто **нулем**.

Определение 6.3. Элемент $\mathbf{1}$ множества A называется **левым (правым) нейтральным элементом** относительно данной операции, если для любого $x \in A$ $\mathbf{1} * x = x$ $(x * \mathbf{1} = x)$. Нейтральный элемент, который является одновременно левым и правым, называется просто **нейтральным элементом**. Нейтральный элемент часто называют **единицей**.

Пример 1. Пустое множество $\varnothing$ является *нулем* относительно пересечения, так как для любого множества A

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

и *единицей* относительно объединения, так как

$$A \cup \varnothing = A.$$

Универсальное множество U есть *нуль* относительно объединения так как

$$A \cup U = U,$$

и *единица* относительно пересечения, так как

$$A \cap U = A.$$

Определение 6.4. **Группоидом** называется любое множество с одной бинарной операцией.

Группоид, операция которого ассоциативна, называется **полугруппой**.

Пример 2.

а) Множество натуральных чисел с операцией сложения будет полугруппой, поскольку $(a+b)+c=a+(b+c)$.

б) Множество 2^A всех подмножеств множества A с операцией теоретико-множественной разности $\setminus$ только группоид, но не полугруппа, поскольку операция $\setminus$ не ассоциативна.

Задача 2. На множестве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Доказать, что $(M, \circ)$ — полугруппа. Что можно сказать о нейтральных элементах этой полугруппы? ▮

Задача 3. На множестве M^2, где M — некоторое множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Является ли $(M^2, \circ)$ полугруппой? Существует ли в ней нейтральный элемент?▮

Задача 4. Пусть S — полугруппа матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$ с операцией умножения. Существуют ли в этой полугруппе левый или правый нейтральные элементы.

Определение 6.5. Полугруппа называется **моноидом**, если в ней существует нейтральный элемент относительно операции (единица).

Пример 3. а) Алгебра $(2^A, \cup)$ является моноидом, поскольку операция $\cup$ ассоциативна и $\varnothing$ — нейтральный элемент относительно операции объединения множеств.
б) Множество всех бинарных отношений на множестве A с операцией композиции будет моноидом, поскольку операция композиции бинарных отношений ассоциативна ($(\rho \circ \tau) \circ \sigma = \rho \circ (\tau \circ \sigma)$), а единицей служит диагональ id_A ($\mathrm{id}_A \circ \rho = \rho \circ \mathrm{id}_A = \rho$).

Задача 5. Пусть $A = \{x, y, z\}$ — множество букв, а A^* — множество всех слов, которые можно составить из этих букв с повторениями. Конкатенацией двух слов называется слово, полученное их „склеиванием“, например: $xxy + yzxx = xxyyzxx$. Пустое слово обозначают λ . Показать, что $(A^*, +)$ — моноид.

Определение 6.6. Элемент y множества A называется **левым (правым) обратным** к элементу x относительно данной операции, если $y * x = \mathbf{1}$ ($x * y = \mathbf{1}$). Элемент y, который является одновременно левым и правым обратным, называется просто **обратным** к x относительно данной операции.

Определение 6.7. Моноид называется **группой**, если в нем для каждого элемента существует обратный.

Чтобы проверить, что алгебра $(A, *)$ является группой, нужно
1) проверить ассоциативность операции $*$ на множестве A;
2) найти элемент множества A – единицу относительно операции $*$;
3) убедиться, что для каждого элемента из A существует обратный.

Полугруппа (в частности, группа) называется **коммутативной** (**абелевой**), если ее операция коммутативна.

Пример 4. Рассмотрим алгебру $(2^A, \triangle, \varnothing)$.

Операция симметрической разности
1) ассоциативна ($(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$);
2) для любого $X \subseteq A$ $X \triangle \varnothing = X$, т.е. $\varnothing$ — единица относительно данной операции;
3) $X \triangle Y = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $X = Y$, т.е. каждый элемент X является обратным сам к себе.

Следовательно, данная алгебра является *группой*.

Поскольку операция $\triangle$ коммутативна ($A \triangle B = B \triangle A$), то данная алгебра является ***абелевой группой***.

Задача 6. Какие из указанных множеств с операциями являются группами:

(а) $(\mathbb{N}, +)$;

(б) $(\mathbb{Q}, +)$;

(в) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Задача 7. Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц образуют группу:

(а) множество невырожденных матриц относительно умножения?

(б) множество невырожденных матриц относительно сложения?

(в) множество диагональных матриц одного порядка (включая нулевую) относительно сложения?

(г) множество диагональных матриц одного порядка, исключая нулевую, относительно умножения?

Задача 8. Пусть M — некоторое множество. Является ли группой алгебра

(а) $(2^M, \cap)$;

(б) $(2^M, \cup)$?

1. Решение уравнений в группах

Теорема 1. В любой группе $\mathcal{G}$ любое уравнение вида $a \cdot x = b$ или $x \cdot a = b$ имеет единственное решение.

Решение имеет вид:

$$x = a^{-1} \cdot b \text{ или } x = b \cdot a^{-1}.$$

Пример 5.
В группе S_3 решим следующее уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение слева на

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее, умножая полученное уравнение справа на

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

окончательно получим

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3).$$

Задача 9. Решить уравнение в группе S_4 :

(а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)$;

(б) $(1\ 2)(3\ 4)X(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 10.

Выписать таблицу Кэли для множества подстановок $\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ с операцией композиции подстановок.