Семинар 8. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ. МОНОИДЫ И ПОЛУГРУППЫ

1. Бинарные операции

Пусть на множестве A определена бинарная операция, обозначаемая $*$.

Определение 8.1. Бинарная операция $*$ называется:

1) **ассоциативной**, если для любых x, y, z

$$(x * y) * z = x * (y * z);$$

2) **коммутативной**, если для любых x, y

$$x * y = y * x;$$

3) **идемпотентной**, если для любого x

$$x * x = x.$$

а) Теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$ являются ассоциативными, так как

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

коммутативными, так как

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A;$$

и идемпотентными, так как

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A;$$

б) Операция $\setminus$ разности не является ассоциативной, так как

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C.$$

Определение 8.2.
Группоидом называется любое множество с одной бинарной операцией.
Группоид, операция которого ассоциативна, называется **полугруппой**.

Пример 1.
а) Множество натуральных чисел с операцией сложения будет полугруппой, поскольку

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

б) Множество 2^A всех подмножеств множества A с операцией теоретико-множественной разности $\setminus$ только группоид, но не полугруппа, поскольку операция $\setminus$ не ассоциативна.

Задача 4.1

Является ли алгебра $(M, \odot)$ полугруппой, если:

(а) $M = \mathbb{N}, \quad x \odot y = 2xy\,;$

(б) $M = \mathbb{R}, \quad x \odot y = \sin(x) \cdot \sin(y)\,.$

Определение 8.3. Элемент $\mathbf{1}$ множества A называется **левым (правым) нейтральным элементом** относительно данной операции, если для любого $x \in A$ $\quad \mathbf{1} * x = x \,(\, x * \mathbf{1} = x\,)$. Нейтральный элемент, который является одновременно левым и правым, называется просто **нейтральным элементом**.

Нейтральный элемент часто называют **единицей**.

Определение 8.4. Полугруппа, в которой существует нейтральный элемент относительно операции, называется **моноидом**.

Моноид часто называют *полугруппой с единицей*.

Пример 2.
Пустое множество $\varnothing$ является *единицей* относительно объединения, так как для любого множества X

$$X \cup \varnothing = X.$$

Алгебра $(2^A, \cup)$ — моноид.

Универсальное множество U есть *единица* относительно пересечения, так как для любого множества $X \subseteq U$

$$X \cap U = X.$$

Алгебра $(2^U, \cup)$ — моноид.

Задача 4.2. На множестве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Доказать, что $(M, \circ)$ — полугруппа. Что можно сказать о нейтральных элементах этой полугруппы?

Задача 4.3. Пусть S — полугруппа матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$ с операцией умножения. Существуют ли в этой полугруппе левый или правый нейтральные элементы?

Определение 8.5. Элемент $\mathbf{0}$ множества A называется **левым (правым) нулем** относительно данной операции, если для любого $x \in A$
$\mathbf{0} * x = \mathbf{0}$ ($x * \mathbf{0} = \mathbf{0}$).
Нуль, который является одновременно левым и правым, называется просто **нулем**.

Пример 3.
Пустое множество $\varnothing$ является *нулем* относительно пересечения, так как для любого множества X

$$X \cap \varnothing = \varnothing.$$

Универсальное множество U есть *нуль* относительно объединения так как

$$X \cup U = U.$$

Задача 4.4. Пусть S — полугруппа матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, с операцией умножения матриц. Существуют ли в этой полугруппе левый или правый нули? Сколько?

Домашнее задание.

Задача Д4.1 Является ли алгебра $(M, \odot)$ полугруппой или моноидом, если:

(а) $M = \mathbb{Z}, \quad x \odot y = x^2 + y^2$;

(б) $M = [0, 1], \quad x \odot y = \min x, y$;

(в) $M = \mathbb{R}, \quad x \odot y = x - y$.

Задача Д4.2. На множестве M^2 , где M — некоторое множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$.
Является ли $(M^2, \circ)$ полугруппой? Моноидом?

Задача Д4.3. Является ли группоид $(2^A, \triangle)$ полугруппой? Моноидом?