ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

(a) $\chi_A(x)^2 = \chi_A(x)$;

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0,1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

(а) $\chi_A(x)^2 = \chi_A(x)$;

(б) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0,1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

(а) $\chi_A(x)^2 = \chi_A(x)$;

(б) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;

(в) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

(а) $\chi_A(x)^2 = \chi_A(x)$;

(б) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;

(в) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;

(г) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Задача 1.

Вывести формулы для вычисления характеристических функций

а) $A \setminus B$.

Задача 1.
Вывести формулы для вычисления характеристических функций
а) $A \setminus B$.

Ответ.

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B.$$

Задача 1.
Вывести формулы для вычисления характеристических функций
а) $A \setminus B$.

Ответ.

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B.$$

б) $A \triangle B$.

Задача 1.
Вывести формулы для вычисления характеристических функций
а) $A \setminus B$.

Ответ.

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B.$$

б) $A\triangle B$.

Ответ.

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_b.$$

Задача 1.
Вывести формулы для вычисления характеристических функций
а) $A \setminus B$.

Ответ.

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B.$$

б) $A \triangle B$.

Ответ.

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_b.$$

Характеристические функции множеств позволяют в некоторых случаях легко доказывать теоретико-множественные тождества. Метод характеристических функций доказательства теоретико-множественного тождества заключается в вычислении характеристические функции обеих его частей. Тождество верно тогда и только тогда, когда эти функции совпадают.

Пример.

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
Решение.

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C} = \chi_{A\triangle B}\chi_C =$$

Пример.

Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;

Решение.

С одной стороны

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C} = \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C =$$

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C} = \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\ = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.$$

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\triangle B)\cap C} &= \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ &= \left(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B\right)\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

С другой стороны

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\triangle B)\cap C} &= \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ &= \left(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B\right)\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)} =$$

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A\triangle B)\cap C=(A\cap C)\triangle(B\cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\begin{aligned}&\chi_{(A\triangle B)\cap C}=\chi_{A\triangle B}\chi_C=\\&\quad=(\chi_A+\chi_B-2\chi_A\chi_B)\,\chi_C=\\&\quad=\chi_A\chi_C+\chi_B\chi_C-2\chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}&\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}=\\&\quad=\chi_{A\cap C}+\chi_{B\cap C}-2\chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C}=\end{aligned}$$

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\triangle B)\cap C} &= \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ &= \left(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B\right)\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)} &= \\ &= \chi_{A\cap C} + \chi_{B\cap C} - 2\chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C} = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_C\chi_B\chi_C =\end{aligned}$$

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\chi_{(A\triangle B)\cap C} = \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\ = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.$$

С другой стороны

$$\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)} = \\ = \chi_{A\cap C} + \chi_{B\cap C} - 2\chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C} = \\ = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_C\chi_B\chi_C = \\ = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.$$

Пример.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$;
Решение.
С одной стороны

$$\begin{aligned}
&\chi_{(A\triangle B)\cap C} = \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
&\quad = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\
&\quad = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
&\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)} = \\
&\quad = \chi_{A\cap C} + \chi_{B\cap C} - 2\chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C} = \\
&\quad = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_C\chi_B\chi_C = \\
&\quad = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

Характеристические функции левой и правой части совпадают. Следовательно, тоджество верно.

Задача 2.

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;
С одной стороны

$$\chi_{(A \cap B) \cup C} = \chi_{A \cap B} + \chi_C - \chi_{A \cap B}\chi_C =$$

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;
С одной стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cap B)\cup C} &= \chi_{A\cap B} + \chi_C - \chi_{A\cap B}\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;
С одной стороны

$$\chi_{(A\cap B)\cup C} = \chi_{A\cap B} + \chi_C - \chi_{A\cap B}\chi_C = \\ = \chi_A\chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C.$$

С другой стороны

$$\chi_{(A\cup B)\cap(B\cap C)} = \chi_{A\cup C}\chi_{B\cap C} =$$

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;
С одной стороны

$$\chi_{(A\cap B)\cup C} = \chi_{A\cap B} + \chi_C - \chi_{A\cap B}\chi_C = \\ = \chi_A\chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C.$$

С другой стороны

$$\chi_{(A\cup B)\cap(B\cap C)} = \chi_{A\cup C}\chi_{B\cap C} = \\ = \left(\chi_A + \chi_C - \chi_A\chi_C\right)\chi_B\chi_C =$$

Задача 2.
Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:
(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;
С одной стороны

$$\begin{aligned} \chi_{(A\cap B)\cup C} &= \chi_{A\cap B} + \chi_C - \chi_{A\cap B}\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \chi_{(A\cup B)\cap(B\cap C)} &= \chi_{A\cup C}\chi_{B\cap C} = \\ &= \left(\chi_A + \chi_C - \chi_A\chi_C\right)\chi_B\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C \end{aligned}$$

Тождество не справедливо, поскольку выражения не совпадают. Например, при $\chi_C = 1$ и $\chi_B = 0$ получаются различные значения: слева 1, а справа — 0.

(б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

С одной стороны

$$\chi_{(A \triangle B) \triangle C} =$$

(б) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

С одной стороны

$$\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C =$$

(б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

С одной стороны

$$\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C =$$
$$= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\,(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C =$$

(б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

С одной стороны

$$\begin{aligned}
\chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
&= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\,(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\
&= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C =
\end{aligned}$$

(б) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)\,.$

С одной стороны

$$\begin{aligned}
&\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
&\quad = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\,(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\
&\quad = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C = \\
&\quad = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

(б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

С одной стороны

$$
\begin{aligned}
\chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
&= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\,(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\
&= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C = \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}
$$

С другой стороны

$$
\chi_{A\triangle(B\triangle C)} = \chi_A + \chi_{B\triangle C} - 2\chi_A\chi_{B\triangle C} =
$$

(б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

С одной стороны

$$\begin{aligned}
\chi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
&= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\left(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B\right)\chi_C = \\
&= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C = \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
\chi_{A\triangle(B\triangle C)} &= \chi_A + \chi_{B\triangle C} - 2\chi_A\chi_{B\triangle C} = \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C - 2\chi_A\left(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C\right) =
\end{aligned}$$

(б) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

С одной стороны

$$\begin{aligned}
&\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
&\quad = (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\,(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\
&\quad = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C = \\
&\quad = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
&\chi_{A\triangle(B\triangle C)} = \chi_A + \chi_{B\triangle C} - 2\chi_A\chi_{B\triangle C} = \\
&\quad = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C - 2\chi_A\,(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C) = \\
&\quad = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

(б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

С одной стороны

$$\begin{aligned}
\chi_{(A\triangle B)\triangle C} = \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C = \\
= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B) + \chi_C - 2\,(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\
= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C = \\
= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
\chi_{A\triangle(B\triangle C)} = \chi_A + \chi_{B\triangle C} - 2\chi_A\chi_{B\triangle C} = \\
= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C - 2\chi_A\,(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C) = \\
= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_C - 2\chi_B\chi_C + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

Выражения совпадают, тождество доказано.

Дом. задание.

Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:

(а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

(б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

(в) $(A \triangle B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** (a, b) действительных чисел — координаты этой точки.

2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** (a, b) действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a, b) \neq (b, a)$.

2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** $(a,\, b)$ действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a,\, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a,\, b) \neq (b,\, a)$.

Определение 1.1. Декартово (прямое) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар $(a,\, b)$, таких, что первый элемент пары берется из множества A, а второй — из множества B:

$$A \times B = \{(a,\, b) \,|\, a \in A,\; b \in B\}.$$

2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** (a, b) действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a, b) \neq (b, a)$.

Определение 1.1. Декартово (**прямое**) **произведение множеств** A и B есть множество всех упорядоченных пар (a, b), таких, что первый элемент пары берется из множества A, а второй — из множества B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}.$$

Пример.

2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** $(a,\, b)$ действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a,\, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a,\, b) \neq (b,\, a)$.

Определение 1.1. Декартово (прямое) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар $(a,\, b)$, таких, что первый элемент пары берется из множества A, а второй — из множества B :

$$A \times B = \{(a,\, b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Пример.
Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$.

2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** $(a,\, b)$ действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a,\, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a,\, b) \neq (b,\, a)$.

Определение 1.1. Декартово (прямое) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар $(a,\, b)$, таких, что первый элемент пары берется из множества A, а второй — из множества B :

$$A \times B = \{(a,\, b)\,|\,a \in A,\; b \in B\}.$$

Пример.
Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$.
Тогда

$$\begin{gathered} A \times B = \{(a,\, 1),\, (a,\, 2), \\ (b,\, 1),\, (b,\, 2), \\ (c,\, 1),\, (c,\, 2)\}. \end{gathered}$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$x = (y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$x = (y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$\begin{aligned} x = &(y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \end{aligned}$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$\begin{aligned} x =&(y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \end{aligned}$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$
\begin{aligned}
x = &(y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$\begin{aligned} x = & (y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Решение.
Покажем первое включение.

$$
\begin{aligned}
x = &(y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C).
\end{aligned}
$$

Покажем второе включение.

Покажем второе включение.

$$x = (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow$$

Покажем второе включение.

$$\begin{aligned} x =& (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \end{aligned}$$

Покажем второе включение.

$$
\begin{aligned}
x =&(y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Покажем второе включение.

$$
\begin{aligned}
x = &(y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Покажем второе включение.

$$
\begin{aligned}
x = & (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\
& \Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\
& \Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \cap C) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Покажем второе включение.

$$\begin{aligned} x = &(y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \cap C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y, z) \in (A \times (B \cap C). \end{aligned}$$

Покажем второе включение.

$$
\begin{aligned}
x = &(y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y, z) \in (A \times (B \cap C).
\end{aligned}
$$

Тождество доказано.

Задачи

Задачи

1.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

Задачи

1.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

1.2. Доказать, что если $(A \subseteq X)$ и $(B \subseteq Y)$, то $(A \times B) \subseteq (X \times Y)$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, X, Y отрезки числовой прямой.

Задачи

1.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

1.2. Доказать, что если $(A \subseteq X)$ и $(B \subseteq Y)$, то $(A \times B) \subseteq (X \times Y)$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, X, Y отрезки числовой прямой.

1.3. Используя метод двух включений, доказать справедливость тождества:
$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Задачи

1.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

1.2. Доказать, что если $(A \subseteq X)$ и $(B \subseteq Y)$, то $(A \times B) \subseteq (X \times Y)$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, X, Y отрезки числовой прямой.

1.3. Используя метод двух включений, доказать справедливость тождества:
$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

1.4. Показать, что $\overline{(A \times B)} \neq \overline{A} \times \overline{B}$. Вывести требуемое тождество. Проиллюстрировать полученное графически, приняв в качестве множеств A и B отрезки числовой прямой.

Задачи

1.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

1.2. Доказать, что если $(A \subseteq X)$ и $(B \subseteq Y)$, то $(A \times B) \subseteq (X \times Y)$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, X, Y отрезки числовой прямой.

1.3. Используя метод двух включений, доказать справедливость тождества:
$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

1.4. Показать, что $\overline{(A \times B)} \neq \overline{A} \times \overline{B}$. Вывести требуемое тождество. Проиллюстрировать полученное графически, приняв в качестве множеств A и B отрезки числовой прямой.

1.5. Проверить на примерах, справедливо ли тождество:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Если не удастся придумать пример, показывающий, что это не тождество, попробуйте доказать его методом двух включений.