Семинар 11. ЗАМКНУТЫЕ ПОЛУКОЛЬЦА

Определение 11.1. **Полукольцо** — это алгебра с двумя *бинарными* и двумя *нульарными операциями*

$$\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}),$$

такая, что для произвольных элементов a, b, c множества S выполняются следующие **аксиомы полукольца**:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$; 2) $a + b = b + a$; 3) $a + \mathbf{0} = a$;
4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; 5) $a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a$;
6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; 7) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;
8) $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot a = \mathbf{0}$.

Операцию $+$ называют **сложением полукольца**,
операцию $\cdot$ — **умножением полукольца**;
элементы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — **нулем** и **единицей полукольца** $\mathcal{S}$.

Выделяют два вида полуколец: **коммутативное полукольцо** с коммутативной операцией умножения; **идемпотентное полукольцо** с *идемпотентной* операцией сложения.

Пример 11.1. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = (\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1)$, в которой операции $+$ и $\cdot$ заданы *таблицами Кэли* (табл. 11.1 и 11.2).

Таблица 11.1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

Таблица 11.2

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Эта алгебра — идемпотентное коммутативное полукольцо. Проверку аксиом можно провести непосредственно по таблицам.

Операции полукольца $\mathcal{B}$ можно трактовать как логические операции „или“ и „и“, а элементы 0 и 1 — как „ложь“ и „истину“.

Пример 11.2. Алгебра

$$\mathcal{R}^+ = \big(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},\, \min,\, +,\, +\infty,\, 0\big),$$

где
$\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел,
min — операция взятия наименьшего из двух данных чисел,
$+$ — операция сложения действительных чисел,
$+\infty$ — „плюс бесконечность“,
0 — число „нуль“,

есть *идемпотентное коммутативное полукольцо*, носителем которого является полуось $\mathbb{R}^+ = \{x\colon x \geq 0\}$, пополненная элементом $+\infty$ (множество всех неотрицательных действительных чисел вместе с „плюс бесконечностью“).

Согласно *сигнатуре*, элемент $+\infty$ рассматривается как *нуль полукольца*, а элемент 0 как *единица полукольца*.

На носителе идемпотентного полукольца $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ может быть введено *отношение порядка*: для произвольных x, $y \in S$ положим $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$, т.е.

$$x \leq y \Leftrightarrow x + y = y. \tag{11.1}$$

Его называют **естественным порядком идемпотентного полукольца**.

Поскольку для любого элемента x произвольного идемпотентного полукольца $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ имеет место $\mathbf{0}+x = x$, то для любого $x \in S$ выполняется неравенство $\mathbf{0} \leq x$, т.е. нуль идемпотентного полукольца есть *наименьший элемент* относительно естественного порядка идемпотентного полукольца.

Теорема 11.1. Если A — конечное подмножество (носителя) идемпотентного полукольца, то точная верхняя грань множества A ($\sup A$) относительно естественного порядка этого полукольца равна сумме (в полукольце) всех элементов множества A.

Определение 11.2. *Полукольцо* $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ называют **замкнутым**, если:

1) оно идемпотентно;

2) любая последовательность элементов множества S имеет *точную верхнюю грань* относительно *естественного порядка* $\leq$ этого *идемпотентного полукольца*;

3) операция *умножения полукольца* $\mathcal{S}$ сохраняет *точные верхние грани последовательностей*, т.е. для любого $a \in S$ и любой последовательности $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементов множества S

$$a \sup X = \sup(aX), \quad (\sup X)a = \sup(Xa).$$

Теорема 11.2. Любое конечное идемпотентное полукольцо замкнуто.

В замкнутом полукольце точная верхняя грань последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть **сумма элементов последовательности**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}\,. \tag{11.2}$$

Итерация x^* элемента x определяется как точная верхняя грань последовательности всех *степеней элемента* x, т.е.

$$x^* = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

где, по определению, $x^0 = 1$, а $x^n = x^{n-1}x$, $n = 1, 2, \ldots$

Пусть матрицы A и B принадлежат полукольцу матриц $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ над некоторым замкнутым полукольцом $\mathcal{S}$.

Наименьшие решения уравнений

$$X = AX + B \quad \text{или} \quad X = XA + B \tag{11.3}$$

относительно неизвестной матрицы X есть

$$X = A^*B \quad \text{или} \quad X = BA^*. \tag{11.4}$$

Матрица A^* называется **итерацией**, или **замыканием**, **матрицы** A.

Для вычисления $C = A^*$ можно решить в $\mathcal{S}$ при всех $j = 1, \ldots, n$ систему уравнений вида

$$\xi = A\xi + \varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_j \in \mathcal{S}^n$ — j-ый единичный вектор, т.е. вектор, все элементы которого, кроме j-ого, равны $\mathbf{0}$, а j-ый равен $\mathbf{1}$ полукольца $\mathcal{S}$.

$\xi = A^*\varepsilon_j$ есть j-й столбец матрицы A^*.

Пример 11.3. Пусть матрица A над полукольцом $\mathcal{B}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему уравнений в полукольце $\mathcal{B}$ для определения первого столбца матрицы A^*:

$$\begin{cases} x_1 = & x_2 + x_3 + x_4 + 1, \\ x_2 = & x_2 + x_3 \qquad + 0, \\ x_3 = & x_2 \qquad\qquad + 0, \\ x_4 = x_1 & \quad + x_3 \qquad + 0. \end{cases}$$

Подставим третье уравнение во второе. В силу идемпотентности сложения получим

$$x_2 = x_2 + (x_2 + 0) + 0 = x_2 + 0.$$

Следовательно, $x_2 = 1^* \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$. (Отметим, что $x_2 = 0$ — наименьшее решение уравнения.) Далее $x_3 = 0 + 0 = 0$.

Для x_1 и x_4 получим систему

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 1, \\ x_4 = x_1 + 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = x_1 + 1$, $x_1 = 1^* \cdot 1 = 1$ и $x_4 = 1$.

Итак, первый столбец A^* есть

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Второй столбец определяется из системы

$$\begin{cases} x_1 = & x_2 + x_3 + x_4 + 0, \\ x_2 = & x_2 + x_3 \qquad + 1, \\ x_3 = & x_2 \qquad\qquad + 0, \\ x_4 = x_1 & \quad + x_3 \qquad + 0. \end{cases}$$

Здесь $x_2 = x_2 + (x_2 + 0) + 1 = x_2 + 1$, $x_2 = 1^*1 = 1$ и $x_3 = x_2 = 1$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 1, \\ x_4 = x_1 + 1, \end{cases}$$

откуда $x_1 = (x_1 + 1) + 1 = x_1 + 1$, $x_1 = 1^*1 = 1$, а $x_4 = 1 + 1 = 1$.

Действуя аналогично, получаем матрицу A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть над полукольцом $\mathcal{R}^+$ задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 10 & 1 \\ \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

Система для вычисления первого столбца матрицы A^* имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = & 5x_2 + 10x_3 + 1x_4 + 0, \\ x_2 = & 2x_2 + \ 3x_3 \qquad\quad + \infty, \\ x_3 = & 1x_2 \qquad\qquad\qquad\ + \infty, \\ x_4 = 3x_1 & \qquad + \ 4x_3 \qquad\quad + \infty. \end{cases}$$

Поскольку сложение в $\mathcal{R}^+$ — взятие наименьшего из двух чисел, а умножение — обычное арифметическое сложение, то множитель 1 и слагаемое 0 существенны, т.к. $x \neq x + 0$ и $x \neq 1 \cdot x$ в общем случае.

При наличии слагаемого 0 (числа 0!) в любой сумме эта сумма равна числу 0. Слагаемое $+\infty$ можно не записывать (как ***ноль полукольца***.)

Из первого уравнения получаем $x_1 = 0$.

Напомним, что итерация любого элемента в рассматриваемом полукольце равна единице полукольца. Учитывая это, из второго уравнения получаем

$$x_2 = 2^*(3x_3 + \infty) = 3x_3.$$

Исключая x_2 из остальных уравнений системы, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 3x_3 + \infty, \\ x_3 = 1(3x_3) + \infty, \\ x_4 = 3(8x_3 + 10x_3 + 1x_4 + 0) + 4x_3 + \infty, \end{cases}$$

Так как в последнем уравнении в скобках стоит слагаемое 0, то вся скобка равна 0. Далее, из второго уравнения

$$x_3 = (1 \cdot 3)x_3 + \infty = 4x_3 + \infty,$$

откуда $x_3 = 4^* \cdot \infty = \infty$, и поэтому

$$x_4 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot \infty + \infty = 3 + 4 = 3.$$

Подставляя найденное значение x_3 в выражение для x_2, получим $x_2 = \infty$. Первый столбец матрицы A^* вычислен:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \end{pmatrix}$$

Аналогично вычисляются остальные столбцы матрицы A^*. В результате получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Задачи

11.1. Установить, является ли алгебра $(\{0,1\}, max, min, 0, 1)$ полукольцом? Замкнутым полукольцом?

11.2. Установить, является ли алгебра $([0,1], max, min, 0, 1)$ полукольцом? Замкнутым полукольцом?

11.3. Показать, что алгебра $(2^{\{0,1\}}, \cup, \cap)$ есть замкнутое полукольцо. Какие элементы являются нулем и единицей этого полукольца?

Решить в указанном полукольце уравнение

$$x = \{1\} \cap x \cup \{0\}.$$

11.4. Показать, что алгебра $(2^M, \cup, \cap)$ есть замкнутое полукольцо. Какие элементы являются нулем и единицей этого полукольца?

При $M = [0, 1]$ решить в указанном полукольце уравнение

$$x = A \cap x \cup B,$$

где $A = (0, 0.6)$, $B = [0.3, 0.8]$.

11.5. Найти матрицу A^* в полукольце $\mathcal{B}$, если матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.6. Найти матрицу A^* в полукольце $\mathcal{R}^+$, если матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

11.7. Доказать, что для любой матрицы A $n \times n$ над полукольцом $\mathcal{B}$ $A^* = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$.

Рассмотреть матрицы A^2, A^3 и A^k как матрицы бинарных отношений на n-элементном множестве и установить, как связаны эти бинарные отношения с бинарным отношением, задаваемым матрицей A.

Показать, что матрица A^* есть матрица рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения n-элементном множестве, заданного матрицей A.