Семинар 4.

Специальные свойства бинарных отношений

Определение 4.1. Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:
1) **рефлексивным**, если $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$, т.е.

$$(\forall x \in A)((x, x) \in \rho);$$

2) **иррефлексивным**, если $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$, т.е.

$$(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho);$$

3) **симметричным**, если $\rho^{-1} = \rho$, т.е.

$$(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho);$$

4) **антисимметричным**, если
$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$, т.е.

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x = y))$$

(в частности, м. б., что $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$!);
Эквивалентное определение:

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \wedge x \neq y) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((y,\, x)) \notin \rho).$$

5) **транзитивным**, если $\rho \circ \rho \subseteq \rho$, т.е.

$$(\forall x \forall y \forall z)(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((x, z) \in \rho));$$

6) **плотным**, если

$$(\forall x \forall y)(((x, y) \in \rho \Rightarrow (\exists z)((z \neq x) \wedge \\ \wedge (z \neq y) \wedge ((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \rho)).$$

Определение 4.2. Бинарное отношение называется:
1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;
2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично,
3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно;
5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
6) **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно;

Можно говорить: „отношение эквивалентности, толерантности, порядка, предпорядка ...“ и т.п.

Пример 4.1.

а) Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U: $A\,\rho\,B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$. Покажем, что это отношение толерантности:

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \varnothing$, $A \cap A = A \neq \varnothing$ и $\varnothing\,\rho\,\varnothing$, отношение ρ является рефлексивным.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ следует, что $B \cap A \neq \varnothing$, отношение ρ является симметричным.

Вывод: это отношение толерантности.

Покажем, что ρ — не эквивалентность.

Поскольку из $A \cap B \neq \varnothing$ и $B \cap C \neq \varnothing$, никак не следует, что $A \cap C \neq \varnothing$, что легко видеть из диаграммы, отношение ρ не транзитивно.

б) Зададим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующее отношение: $a\,|\,b$ = „a делит (является делителем) b “.

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя.

Покажем антисимметричнсть.

Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a. Тогда найдется натуральное число t_1, такое, что $b = at_1$, и найдется t_2, такое, что $a = bt_2$. Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$. Следовательно, $a = b$.

Покажем транзитивность.

Если a делит b, а b делит c, то найдутся такие натуральные числа t_1, t_2, такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$. Отсюда имеем $c = at_1t_2$, т.е. a — делитель c.

Таким образом, отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ является отношением порядка.

Если распространить это отношение на множество целых чисел, то оно будет уже только предпорядком, поскольку не будет антисимметричным. Например, 2 делится на -2, и -2 делится на 2, однако $2 \neq -2$.

в) Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $\mathcal{B}(A)$. Покажем, что отношение включения $\subseteq$ на множестве $\mathcal{B}(A)$ есть порядок.

Это отношение рефлексивно, т.к. для любого множества X справедливо $X \subseteq X$.

Поскольку для любых двух множеств X и Y из $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq X)$ следует, что $X = Y$, рассматриваемое отношение антисимметрично.

Из определения включения вытекает, что если $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq Z)$, то $X \subseteq Z$. Следовательно, отношение транзитивно.

4.1. Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:

(а) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a,\,a), (a,\,b), (c,\,a),\\ (b,\,d), (a,\,d), (b,\,c)\};$$

(б) $m\,\rho\,k$, если $m - k$ делится на n, где $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$;

(в) $x\,\varphi\,y$, если $(x - y) \leq 2$, $x \in R$, $y \in R$.

4.2. Пусть $X = \{x\,|\,x \in [0, 1]\}$, $\rho = \{(x,\,y)\,|\,x, y \in X, x < y$ и $|x - y| < 0.5\}$. Построить графики отношений ρ и ρ^{-1}. Исследовать свойства отношения ρ. Что можно сказать о свойствах обратного отношения?

4.3. Отношение σ связывает клетки шахматной доски: две клетки связаны, если с одной на другую можно перейти ходом коня. Записать отношение с помощью логических высказываний, исследовать его свойства.

4.4. Пусть τ и π — отношения на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b)\,\tau\,(c, d)$, если $a \leq c$ и $b \leq d$; $(a, b)\,\pi\,(c, d)$, если $a \leq c$ и $b \geq d$. Являются ли τ и π отношениями порядка и почему?

4.5. Пусть υ определено на множестве положительных рациональных чисел: $(a/b)\upsilon(c/d)$, если $ad \leq bc$. Показать, что υ является отношением линейного порядка.

4.6. Пусть A — произвольное множество и ρ, σ — отношения на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя).

(а) $(P, Q)\sigma(X, Y)$, если $(P \subseteq X)$ и $(Q \subseteq Y)$;

(б) $(P, Q)\rho(X, Y)$, если $(P \triangle Q) \subseteq (X \triangle Y)$;

Являются ли ρ и σ отношениями порядка?

4.7. Рассмотрим множество квадратных матриц размером 2×2, элементами которых являются целые числа. Является ли заданное ниже отношение τ отношением порядка? Линейного порядка?

(а) $A \tau B$, если $a_{ij} \le b_{ij}$, $i, j = 1, 2$;

(б) $A \tau B$, если $a_{ij} \le b_{ij}$, $i, j = 1, 2$ и хотя бы для одной пары элементов неравенство строгое.

4.8. Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$. Исследовать свойства отношения τ:

(а) $f(x) \tau g(x)$, если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Является ли τ отношением эквивалентности?

(б) $f(x) \tau g(x)$, если $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. Является ли τ отношением порядка?

4.9. Пусть M —некоторое множество, а $2^M \setminus \{\varnothing\}$ — множество всех его подмножеств без пустого множества. Два множества из 2^M связаны отношением τ, если они имеют хотя бы одно непустое общее подмножество. Является ли в общем случае τ отношением порядка. Какими свойствами будет обладать отношение τ, если $M = \{a, b\}$