ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

1. Основные определения

Определение 3.1. n**-арным (или** n**-местным) отношением** на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$$\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n.$$

1. Основные определения

Определение 3.1. n**-арным (или** n**-местным) отношением** на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$$\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n.$$

В частности, при $\rho = \varnothing$ получаем **пустое отношение**, а при ρ , совпадающем со всем указанным декартовым произведением — **универсальное отношение**.

1. Основные определения

Определение 3.1. n**-арным (или** n**-местным) отношением** на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$$\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n.$$

В частности, при $\rho = \varnothing$ получаем **пустое отношение**, а при ρ , совпадающем со всем указанным декартовым произведением — **универсальное отношение**.

Важный частный случай получаем при $n = 2$: тогда говорят **о соответствии из множества** A_1 **в множество** A_2 .

1. Основные определения

Определение 3.1. n**-арным (или** n**-местным) отношением** на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называется произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$$\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n.$$

В частности, при $\rho = \varnothing$ получаем **пустое отношение**, а при ρ , совпадающем со всем указанным декартовым произведением — **универсальное отношение**.

Важный частный случай получаем при $n = 2$: тогда говорят **о соответствии из множества** A_1 **в множество** A_2 .

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то ρ называют n**-арным отношением на множестве** A ; при $n = 2$ получаем **бинарное отношение на множестве** A .

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения.

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если $A = \mathbb{R}^1$ (множество действительных чисел), то бинарное отношение на $\mathbb{R}^1$ — это некоторое множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если $A = \mathbb{R}^1$ (множество действительных чисел), то бинарное отношение на $\mathbb{R}^1$ — это некоторое множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 3.2. **Область определения соответствия** из множества A_1 в множество A_2 $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ — есть множество

$$\mathcal{D}(\rho) = \{x \,|(\exists y \in A_2)(x, y) \in \rho\}.$$

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если $A = \mathbb{R}^1$ (множество действительных чисел), то бинарное отношение на $\mathbb{R}^1$ — это некоторое множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 3.2. Область определения соответствия из множества A_1 в множество A_2 $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ — есть множество

$$\mathcal{D}(\rho) = \{x \,|\, (\exists y \in A_2)(x, y) \in \rho\}.$$

Область значения соответствия ρ — это множество

$$\mathcal{R}(\rho) = \{y \,|\, (\exists x \in A_1)(x, y) \in \rho\}.$$

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если $A = \mathbb{R}^1$ (множество действительных чисел), то бинарное отношение на $\mathbb{R}^1$ — это некоторое множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 3.2. Область определения соответствия из множества A_1 в множество A_2 $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ — есть множество

$$\mathcal{D}(\rho) = \{x \,|\, (\exists y \in A_2)(x, y) \in \rho\}.$$

Область значения соответствия ρ — это множество

$$\mathcal{R}(\rho) = \{y \,|\, (\exists x \in A_1)(x, y) \in \rho\}.$$

Из определения вытекает, что $\mathcal{D}(\rho) \subseteq A_1$, $\mathcal{R}(rho) \subseteq A_2$.

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если $A = \mathbb{R}^1$ (множество действительных чисел), то бинарное отношение на $\mathbb{R}^1$ — это некоторое множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 3.2. Область определения соответствия из множества A_1 в множество A_2 $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ — есть множество

$$\mathcal{D}(\rho) = \{x \,|(\exists y \in A_2)(x, y) \in \rho\}.$$

Область значения соответствия ρ — это множество

$$\mathcal{R}(\rho) = \{y \,|(\exists x \in A_1)(x, y) \in \rho\}.$$

Из определения вытекает, что $\mathcal{D}(\rho) \subseteq A_1$, $\mathcal{R}(rho) \subseteq A_2$.

Соответствие называют **всюду определенным**, если $\mathcal{D}(\rho) = A_1$.

Определение 3.3. Сечением соответствия ρ для фиксированного $x \in A_1$ называют множество

$$\rho(x) = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Пример 1.
Пусть $\rho = \{(x, y) \,|\, x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$.

Определение 3.3. Сечением соответствия ρ для фиксированного $x \in A_1$ называют множество

$$\rho(x) = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Пример 1.
Пусть $\rho = \{(x, y) \,|\, x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$.
Имеем $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$.

Определение 3.3. Сечением соответствия ρ для фиксированного $x \in A_1$ называют множество

$$\rho(x) = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Пример 1.
Пусть $\rho = \{(x, y) \,|\, x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$.
Имеем $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$.
Область определения отношения $\mathcal{D}(\rho) = \{3, 4\}$,

Определение 3.3. Сечением соответствия ρ для фиксированного $x \in A_1$ называют множество

$$\rho(x) = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Пример 1.
Пусть $\rho = \{(x, y) \,|\, x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$.
Имеем $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$.
Область определения отношения $\mathcal{D}(\rho) = \{3, 4\}$,
область значений — $\mathcal{R}(\rho) = \{1, 2\}$.

Определение 3.3. Сечением соответствия ρ для фиксированного $x \in A_1$ называют множество

$$\rho(x) = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Пример 1.
Пусть $\rho = \{(x, y) \,|\, x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$.
Имеем $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$.
Область определения отношения $\mathcal{D}(\rho) = \{3, 4\}$,
область значений — $\mathcal{R}(\rho) = \{1, 2\}$.

Задание. Построить график и граф отношения ρ.

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(a) $x_1 \varphi x_2$, если $x_1 < x_2$;

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(а) $x_1 \, \varphi \, x_2$, если $x_1 < x_2$;

(б) $x_1 \, \tau \, x_2$, если $x_1 \leq x_2$;

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(а) $x_1 \varphi x_2$, если $x_1 < x_2$;

(б) $x_1 \tau x_2$, если $x_1 \leq x_2$;

(в) $x_1 \rho x_2$, если $(x_1 - x_2) \geq 2$;

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(а) $x_1 \varphi x_2$, если $x_1 < x_2$;

(б) $x_1 \tau x_2$, если $x_1 \leq x_2$;

(в) $x_1 \rho x_2$, если $(x_1 - x_2) \geq 2$;

(г) $\{(a, b) | \ a + b$ — четное$\}$;

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(а) $x_1 \,\varphi\, x_2$, если $x_1 < x_2$;

(б) $x_1 \,\tau\, x_2$, если $x_1 \le x_2$;

(в) $x_1 \,\rho\, x_2$, если $(x_1 - x_2) \ge 2$;

(г) $\{(a, b) |\; a + b$ — четное$\}$;

3.2. Определить, по какому принципу построено отношение, заданное графиком Φ на $M \times M$, где $M = \{\text{л}, o, c, m\}$, а $\Phi = \{(o, \text{л}),\ (c, \text{л}),\ (m, \text{л}),\ (c, o),\ (m, o),\ (c, m)\}$.

2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия.

2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия.

1) **Композиция соответствий**.

2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия.

1) **Композиция соответствий**.
Если $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, $\sigma \subseteq A_2 \times A_3$, то композиция (произведение) соответствий ρ и σ есть соответствие $\rho \circ \sigma$, определяемое как

$$\rho \circ \sigma = \{(x, z) \mid (\exists y)((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma)\}.$$

2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия.

1) **Композиция соответствий**.
Если $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, $\sigma \subseteq A_2 \times A_3$, то композиция (произведение) соответствий ρ и σ есть соответствие $\rho \circ \sigma$, определяемое как

$$\rho \circ \sigma = \{(x, z) \mid (\exists y)((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma)\}.$$

Пример 2. Соответствие ρ берем из предыдущего примера, а соответствие $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ зададим непосредственно как множество пар $\sigma = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$.

2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия.

1) **Композиция соответствий**.
Если $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, $\sigma \subseteq A_2 \times A_3$, то композиция (произведение) соответствий ρ и σ есть соответствие $\rho \circ \sigma$, определяемое как

$$\rho \circ \sigma = \{(x, z) \mid (\exists y)((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma)\}.$$

Пример 2. Соответствие ρ берем из предыдущего примера, а соответствие $\sigma \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ зададим непосредственно как множество пар $\sigma = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$.

Задание. Построить граф композиции $\rho \circ \sigma$.

Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

Определение 3.4. Отношение $\mathrm{id}_A = \{(x, x) \mid \in A\}$ называют **диагональю множества** A.

Свойства композиции:

(1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

Определение 3.4. Отношение $\mathrm{id}_A = \{(x,x) \mid \in A\}$ называют **диагональю множества** A.

Свойства композиции:

(1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

(2) $\rho \circ \varnothing = \varnothing \circ \rho = \varnothing$;

Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

Определение 3.4. Отношение $\mathrm{id}_A = \{(x,x) \mid \in A\}$ называют **диагональю множества** A.

Свойства композиции:

(1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau;$

(2) $\rho \circ \varnothing = \varnothing \circ \rho = \varnothing;$

(3) $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = \rho \circ \sigma \cup \rho \circ \tau;$

Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

Определение 3.4. Отношение $\mathrm{id}_A = \{(x,x) \mid \in A\}$ называют **диагональю множества** A.

Свойства композиции:

(1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

(2) $\rho \circ \varnothing = \varnothing \circ \rho = \varnothing$;

(3) $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = \rho \circ \sigma \cup \rho \circ \tau$;

(4) $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq \rho \circ \sigma \cap \rho \circ \tau$;
(равенство в общем случае не имеет места!).
(5) $\rho \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ \rho = \rho$, где $\rho \subseteq A^2$ — бинарное отношение на A.

Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

Определение 3.4. Отношение $\mathrm{id}_A = \{(x,x) \mid \in A\}$ называют **диагональю множества** A.

Свойства композиции:

(1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

(2) $\rho \circ \varnothing = \varnothing \circ \rho = \varnothing$;

(3) $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = \rho \circ \sigma \cup \rho \circ \tau$;

(4) $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq \rho \circ \sigma \cap \rho \circ \tau$;
(равенство в общем случае не имеет места!).
(5) $\rho \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ \rho = \rho$, где $\rho \subseteq A^2$ — бинарное отношение на A.

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow (\exists y)(((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow (\exists y)(((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x, y) \in \rho) \wedge (((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow (\exists y)(((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x, y) \in \rho) \wedge (((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x, y) \in \rho) \wedge ((y, t) \in \sigma)) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow (\exists y)(((x,y) \in \rho) \wedge ((y,z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y) \in \rho) \wedge (((y,t) \in \sigma) \wedge ((t,z) \in \tau))) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y) \in \rho) \wedge ((y,t) \in \sigma)) \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\exists t)(((x,t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) &\Rightarrow (\exists y)(((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x, y) \in \rho) \wedge (((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x, y) \in \rho) \wedge ((y, t) \in \sigma)) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x, t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x, z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau.
\end{aligned}
$$

Второе включение.

$$
(x, z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau \Rightarrow
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in{}& \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow (\exists y)(((x,y) \in \rho) \wedge ((y,z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y) \in \rho) \wedge (((y,t) \in \sigma) \wedge ((t,z) \in \tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y) \in \rho) \wedge ((y,t) \in \sigma)) \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x,t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau.
\end{aligned}
$$

Второе включение.

$$
(x,z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau \Rightarrow (\exists t)(((x,t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in \rho\circ(\sigma\circ\tau) &\Rightarrow (\exists y)(((x,y)\in\rho)\wedge((y,z)\in\sigma\circ\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y)\in\rho)\wedge(((y,t)\in\sigma)\wedge((t,z)\in\tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge((y,t)\in\sigma))\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,z)\in(\rho\circ\sigma)\circ\tau.
\end{aligned}
$$

Второе включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in (\rho\circ\sigma)\circ\tau &\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge((y,t)\in\sigma))\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in \rho\circ(\sigma\circ\tau) &\Rightarrow (\exists y)(((x,y)\in\rho)\wedge((y,z)\in\sigma\circ\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y)\in\rho)\wedge(((y,t)\in\sigma)\wedge((t,z)\in\tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge((y,t)\in\sigma))\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,z)\in(\rho\circ\sigma)\circ\tau.
\end{aligned}
$$

Второе включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in (\rho\circ\sigma)\circ\tau &\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge((y,t)\in\sigma))\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y)\in\rho)\wedge(((y,t)\in\sigma)\wedge((t,z)\in\tau))) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x, z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) &\Rightarrow (\exists y)(((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x, y) \in \rho) \wedge (((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x, y) \in \rho) \wedge ((y, t) \in \sigma)) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x, t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x, z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau.
\end{aligned}
$$

Второе включение.

$$
\begin{aligned}
(x, z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau &\Rightarrow (\exists t)(((x, t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x, y) \in \rho) \wedge ((y, t) \in \sigma)) \wedge ((t, z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x, y) \in \rho) \wedge (((y, t) \in \sigma) \wedge ((t, z) \in \tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений.

Первое включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in \rho\circ(\sigma\circ\tau) &\Rightarrow (\exists y)(((x,y)\in\rho)\wedge((y,z)\in\sigma\circ\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y)\in\rho)\wedge(((y,t)\in\sigma)\wedge((t,z)\in\tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge((y,t)\in\sigma))\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,z)\in(\rho\circ\sigma)\circ\tau.
\end{aligned}
$$

Второе включение.

$$
\begin{aligned}
(x,z) \in(\rho\circ\sigma)\circ\tau &\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge((y,t)\in\sigma))\wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y)\in\rho)\wedge(((y,t)\in\sigma)\wedge((t,z)\in\tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(((x,y)\in\rho)\wedge((y,z)\in\sigma\circ\tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,z)\in\rho\circ(\sigma\circ\tau).
\end{aligned}
$$

2) **Обратное соответствие**

2) **Обратное соответствие**.

Соответствие, обратное соответствию $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

2) **Обратное соответствие**.
Соответствие, обратное соответствию $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Для соответствия $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$

$$\rho^{-1} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}.$$

2) **Обратное соответствие**.

Соответствие, обратное соответствию $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Для соответствия $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$

$$\rho^{-1} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}.$$

Обратное соответствие обладает следующими свойствами:

2) **Обратное соответствие**.

Соответствие, обратное соответствию $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Для соответствия $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$

$$\rho^{-1} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}.$$

Обратное соответствие обладает следующими свойствами:

(6) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

2) **Обратное соответствие**.

Соответствие, обратное соответствию $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Для соответствия $\rho = \{(3,1), (4,1), (4,2)\}$

$$\rho^{-1} = \{(1,3), (1,4), (2,4)\}.$$

Обратное соответствие обладает следующими свойствами:

(6) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

(7) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

2) **Обратное соответствие**.

Соответствие, обратное соответствию $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Для соответствия $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$

$$\rho^{-1} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}.$$

Обратное соответствие обладает следующими свойствами:

(6) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

(7) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

Для фиксированного $y \in A_2$ положим $\rho^{-1}(y) = \{x \,|\, y \in \rho(x)\}$.

Задачи

3.1. Найти $\mathcal{D}(\rho)$, $\mathcal{R}(\rho)$, ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ для отношения:

Задачи

3.1. Найти $\mathcal{D}(\rho)$, $\mathcal{R}(\rho)$, ρ^{-1}, $\rho\circ\rho$, $\rho^{-1}\circ\rho$, $\rho\circ\rho^{-1}$ для отношения:

$$\rho = \{(x,y)\,|\,x,y\in[0,1],\ 2x\geq 3y\}.$$

Задачи

3.1. Найти $\mathcal{D}(\rho)$, $\mathcal{R}(\rho)$, ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ для отношения:

$$\rho = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1],\ 2x \geq 3y\}.$$

3.2. Доказать, что для любых бинарных отношений ρ_1 , ρ_2 , $\rho_3 \in A \times A$:
(a) $\rho_1 \cap \rho_1 = \rho_1 \cup \rho_1 = \rho_1$;

Задачи

3.1. Найти $\mathcal{D}(\rho)$, $\mathcal{R}(\rho)$, ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ для отношения:

$$\rho = \{(x, y) \,|\, x, y \in [0, 1],\ 2x \geq 3y\}.$$

3.2. Доказать, что для любых бинарных отношений ρ_1 , ρ_2 , $\rho_3 \in A \times A$:

(а) $\rho_1 \cap \rho_1 = \rho_1 \cup \rho_1 = \rho_1$;

(б) $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$;

Задачи

3.1. Найти $\mathcal{D}(\rho)$, $\mathcal{R}(\rho)$, ρ^{-1}, $\rho\circ\rho$, $\rho^{-1}\circ\rho$, $\rho\circ\rho^{-1}$ для отношения:

$$\rho = \{(x,y)\,|\,x,y\in[0,1],\ 2x\geq 3y\}.$$

3.2. Доказать, что для любых бинарных отношений ρ_1, ρ_2, $\rho_3 \in A\times A$:

(а) $\rho_1\cap\rho_1 = \rho_1\cup\rho_1 = \rho_1$;

(б) $\rho_1\circ(\rho_2\circ\rho_3) = (\rho_1\circ\rho_2)\circ\rho_3$;

(в) $\rho_1\circ id_A = id_A\circ\rho_1 = \rho_1$.

Домашнее задание

3.1. Найти $\mathcal{D}(\rho)$, $\mathcal{R}(\rho)$, ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ для отношений:
(а) $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x = 0 \pmod{\mathrm{y}}\}$;
(б) $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1],\ x + y \leq 1\}$.

3.2. Доказать, что для любого бинарного отношения $\rho \subseteq A \times A$:
(а) $\mathcal{D}(\rho^{-1}) = \mathcal{R}(\rho)$;
(б) $\mathcal{R}(\rho^{-1}) = \mathcal{D}(\rho)$;
(в) $\mathcal{D}(\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_1^{-1}(\mathcal{R}(\rho_1) \cap \mathcal{D}(\rho_2))$;
(г) $\mathcal{R}(\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_2(\mathcal{R}(\rho_1) \cap \mathcal{D}(\rho_2))$
(д) $(\overline{\rho})^{-1} = \overline{(\rho^{-1})}$.

3.3. Доказать, что для любых бинарных отношений ρ_1 , $\rho_2 \in A \times A$:
(а) $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$;
(б) $(\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1}$;
(в) $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.