

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

4 семестр, спец. ИУ-5

## ЛИТЕРАТУРА

### *Основная литература (ОЛ)*

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина и А.П. Крищенко. – М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 743 с.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – 3-е изд.. – М: Высшая школа, 2001. – 384 с.
3. Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина. – М.: МЦНМО, 2009. – 408 с.
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 416 с.

### *Дополнительная литература (ДЛ)*

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматгиз, 2004. – 256 с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. - 2-е изд. - СПб.: «Питер», 2005. – 364 с.
3. Москина Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера. М.: Логос, 2007. – 240 с.
4. Лекции по теории графов./ В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич - 2-е изд., испр. – М.: УРСС, 2009. 392 с.

### *Методические и учебные пособия (МП)*

1. Виноградова М.С., Ткачев С.Б. Булевы функции. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 32 с.
2. Исмаилов Р.С., Калинин А.В., Станцо В.В. Графы: учеб. пособие по курсу «Дискретная математика» – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 40 с.
3. Белоусов А.И., Мартынов Б.В., Щетинин А.Н. Лекции по дискретной математике: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. – 95 с.
4. Белоусов А.И., Виноградова М.С., Ткачев С.Б. Сборник задач по курсу «Дискретная математика»: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 35 с.
5. Ахметова Ф.Х., Власов П.А. Дискретная математика: метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 53 с.

## ЛЕКЦИИ

### **МОДУЛЬ 1: Множества, отношения и булевы функции**

*Лекция 1.* Предмет и метод дискретной математики. Множества. Основные теоретико-множественные операции. Кортеж. Декартово произведение.

ОЛ-1 1.1, 1.2; ДЛ-2 1.1, 1.2; ДЛ-3 1.1-1.5; конспект лекций.

*Лекция 2.* Отображения и их классификация. Соответствие. График и граф соответствия, область определения, область значения. Композиция соответствий, обратное соответствие.  $n$ -арное отношение. Бинарное отношение.

ОЛ-1 1.3, 1.4; ДЛ-2 1.5, 1.6; ДЛ-3 3.1-3.4; конспект лекций.

*Лекция 3.* Специальные свойства бинарных отношений на множестве. Классификация бинарных отношений на множестве. Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-множество. Теорема о связи между разбиением и отношением эквивалентности.

*Лекции 4.* Отношение порядка. Частичный и линейный порядок. Наибольший, максимальные, наименьший и минимальные элементы. Точная нижняя и верхняя грани множества. Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке.

ОЛ-1 1.5-1.8; ДЛ-2 1.7, 1.8; конспект лекций.

*Лекция 5.* Булева функция. Таблица булевой функции. Основные функции двух переменных. Фиктивные переменные. Равенство булевых функций. Формулы. Функция, представляемая формулой. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ и СКНФ).

ОЛ-1 6.1 - 6.5; ОЛ-2 Ч.1 гл.1 §2-4, Ч.5 гл.1 §1; МП-1.

*Лекция 6.* Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Сокращенная ДНФ. Алгоритм Квайна—Мак-Клоски. Карта Карно.

ОЛ-1 6.5, 6.6, ОЛ-2 Ч.5 гл.1 § 2-7; ДЛ-2 3.4; МП-1; конспект лекций.

*Лекции 7.* Полное множество булевых функций. Стандартный базис. Полнота стандартного базиса. Теорема о полноте. Базис Жегалкина и его полнота. Полином Жегалкина. Единственность полинома Жегалкина.

ОЛ-1 6.7, ОЛ-2 Ч.1, гл.1 § 5-7; конспект лекций.

*Лекция 8.* Классы Поста. Замкнутость классов Поста. Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста).

ОЛ-1 6.8, ОЛ-2 Ч.5 гл. 2 § 1-8; конспект лекций.

## ***МОДУЛЬ 2: Графы, языки, конечные автоматы***

*Лекции 9.* Свойства бинарных операций на множестве. Алгебраические структуры. Полугруппы, моноиды. Обратный элемент. Группа. Элемент, обратный к произведению элементов. Законы сокращения в группе. Решение уравнений в группе. Группа подстановок  $S_n$ . Группа вычетов.

ОЛ-1 2.1-2.2; ДЛ-2 2.1 – 2.3; конспект лекций.

*Лекции 10.* Кольца. Тожества кольца. Тела и поля. Кольца вычетов. Область целостности. Поля вычетов. Подгруппы и подкольца.

ОЛ-1 2.2-2.4, 2.6; ДЛ-2 2.4; конспект лекций.

*Лекция 11.* Предмет теории графов. Неориентированный граф. Отношение достижимости. Компоненты. Ориентированный граф. Отношение достижимости и взаимной достижимости. Компоненты и бикомпоненты. Подграфы. Деревья.

ОЛ-1 5.1, 5.3, ДЛ-2 7.1; ДЛ-3 гл.2 §2, 3.

*Лекции 12.* Способы машинного представления графов: матрица смежности, списки смежности. Методы систематического обхода вершин графа. Поиск в глубину в неориентированном графе. Особенности поиска в глубину в ориентированном графе. Поиск в ширину в ориентированном графе.

ОЛ-1 5.2–5.5; ДЛ-2 7.4;

*Лекции 13.* Полукольцо. Идемпотентное полукольцо. Естественный порядок идемпотентного полукольца. Замкнутое полукольцо. Замкнутость конечного идемпотентного полукольца. Итерация элемента. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце. Решение систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах методом последовательного исключения переменных.

ОЛ-1 3.1-3.3; конспект лекций.

*Лекции 14.* Взвешенный ориентированный граф. Задача о путях. Вычисление матрицы стоимостей ориентированного графа, размеченного над замкнутым полукольцом. Полукольцо **B**. Вычисление матрицы достижимости. Полукольцо  $R^+$ . Вычисление матрицы стоимости кратчайших путей.

ОЛ-1 5.6; конспект лекций.

*Лекции 15–16.* Алфавит. Слово и язык в алфавите. Операция соединения слов. Соединение языков. Итерация языка. Полукольцо языков. Регулярные языки. Регулярные выражения. Полукольцо регулярных языков. Конечные автоматы (КА). Представление конечного автомата ориентированным графом, взвешенным над полукольцом регулярных языков. Язык, допускаемый КА.

ОЛ-1 7.1, 7.4, 7.5; конспект лекций.

*Лекции 17.* Теорема Клини. Синтез КА по заданному регулярному выражению. Детерминизация КА. Регулярность дополнения регулярного языка.

ОЛ-1 7.5, 7.6; конспект лекций.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

### **МОДУЛЬ 1: Множества, отношения и булевы функции**

*Занятие 1.* Множества. Доказательство теоретико-множественных равенств.

Ауд.: ОЛ-1 Дополнение 1.1, задачи 1.2 (стр. 35, тождества 4, 20, 22), 1.3 (а), 1.4, 1.5; МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 1.1, 1.2, 1.3 б, , 1.6; МРК; ДЛ-1 27, 28.

*Занятие 2.* Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 1.9 (а,б), 1.10 (б, в), 1.12, 1.14 (б, ж); МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 1.7 а, б, 1.8 (а, б, в), 1.9 (в,г), 1.10 (а), 1.13, 1.14 (а, в, г, е).

*Занятие 3.* Отношения эквивалентности и порядка. Диаграмма Хассе. Цепи и антицепи.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 1.21, 1.26, 1.29 (а,б), МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 1.20, 1.22, 1.24, 1.27; ДЛ-1 11, 29, 30.

*Занятие 4.* Рубежный контроль по модулю 1 (45 мин.).

*Занятия 4-5.* Булевы функции. Минимизация ДНФ.

Ауд.: ОЛ-1 задача 6.4 а), г), 6.7 а), 6.11 (а,в), 6.12.

Дома: ОЛ-1 задача 6.4 (б, г), 6.7 б), 6.9, 6.11 (б, г)

*Занятие 6-7.* Полные системы булевых функций. Реализация булевых функций схемами.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 6.21, 6.23 в), ОЛ-4 гл.2. задачи 2.1 1), 2.12 1)

Дома: ОЛ-1 задачи 6.13, 6.14, 6.23 (а,б,г), 6.25, ОЛ-4 гл.2. задачи 2.1 2), 2.12 2).

*Занятие 8.* Рубежный контроль по модулю 4.

### **МОДУЛЬ 2: Графы, языки, конечные автоматы**

*Занятия 8–9.* Алгебраические структуры. Решение уравнений в группах.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 2.1 (а,б,д), 2.2, 2.4, 2.6, 2.8 (а); МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 2.1 (в,г), 2.3, 2.7, 2.8 (б); ОЛ-3 55.1 (а,б,в), 55.3

*Занятие 10.* Кольца и поля. Решение систем линейных уравнений в полях вычетов.

Ауд.: МРК; ОЛ-1 задачи 2.10, 2.18; ОЛ-3 63.1 (а, б, в, г, з), 63.2 (а, б, в, г).

Дома: МРК; ОЛ-1 задачи 2.9, 2.11, 2.12, 2.13, 2.19, ОЛ-3 66.20

*Занятия 8.* Основные понятия теории графов.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 5.1, 5.2, 5.6, 5.10, 5.11, МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 5.3, 5.5, 5.12, МРК.

*Занятия 9.* Поиск в глубину и ширину в ориентированном графе.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 5.29, 5.30, МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 5.28, 5.31, МРК.

*Занятия 10.* Задача о путях во взвешенных орграфах.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 5.32 (а, б), МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 5.32 (в, г, д) 5.33, 5.34

*Занятие 7.* Рубежный контроль по модулю 2 (45 мин.).

*Занятие 11.* Регулярные языки и регулярные выражения. Нахождения языка КА. Синтез КА по регулярному выражению.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 7.10 (а, б), 7.15, МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 7.10 (в), 7.16, 7.17, 7.22.

*Занятие 12.* Детерминизация конечных автоматов.

Ауд.: ОЛ-1 задачи 7.29, 7.31, 7.32, МРК.

Дома: ОЛ-1 задачи 7.30, 7.33.

*Занятие 13.* Рубежный контроль по модулю 4.

## ***МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ***

### ***МОДУЛЬ 1: Множества и отношения***

1. Свойства композиции соответствий. Свойства обратного соответствия. ОЛ-1 1.4.
2. Мощность множества. Счетные и континуальные множества. Свойства счетных и континуальных множеств. ОЛ-1 1.9.

### ***МОДУЛЬ 1: Булевы функции***

1. Булевы алгебры: аксиомы и следствия из них. ОЛ-1 3.4.
2. Таблица Квайна. Получение сокращенных и тупиковых ДНФ на основе таблицы Квайна. ОЛ-1 6.6., ОЛ-4 §3.

### ***МОДУЛЬ 2: Алгебраические системы, графы***

1. Циклические группы и подгруппы. ОЛ-1 2.2.
2. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Свойство группы простого порядка. Признак неразложимости конечной группы. ОЛ-1 2.7
3. Тело кватернионов. ОЛ-1 Д.2.1.
4. Изоморфизм графов. Группа автоморфизмов графа. ОЛ-1 5.7
5. Сети. Алгоритм Краскала. ОЛ-1 5.4
6. Матричная реализация алгоритма Флойда-Уоршала-Клини вычисления матрицы стоимости ориентированного графа. ОЛ-1 5.6

### ***МОДУЛЬ 2: Языки, конечные автоматы***

7. Минимизация конечных автоматов. ОЛ-1 7.7
8. Лемма о разрастании для регулярных языков. Незамкнутость полукольца регулярных языков. ОЛ-1 7.8.

## **МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ**

### **МОДУЛЬ 1: Множества и отношения**

#### *Вопросы для подготовки к рубежному контролю*

1. Как определяется объединение множеств?
2. Приведите свойства операции объединения множеств.
3. Как определяется пересечение множеств?
4. Приведите свойства операции пересечения множеств?
5. Как определяется разность множеств?
6. Приведите свойства операции нахождения разности множеств ?
7. Как определяется симметрическая разность множеств?
8. Приведите свойства операции нахождения симметрической разности множеств.
9. В чем заключается метод двух включений доказательства теоретико-множественных тождеств?
10. Приведите основные теоретико-множественные тождества для объединения, пересечения, дополнения множеств.
11. Приведите основные теоретико-множественные тождества для пересечения и симметрической разности множеств.
12. Что называют характеристической функцией множества?
13. В чем заключается метод характеристических функций доказательства теоретико-множественных тождеств?
14. В чем заключается метод эквивалентных преобразований доказательства теоретико-множественных тождеств?
15. Что такое кортеж? Длина кортежа?
16. Что называют декартовым произведением множеств?
17. Приведите свойства декартова произведения множеств.
18. Что называют отображением из множества  $A$  в множество  $B$ ?
19. Какое отображение называют инъективным?
20. Какое отображение называют сюръективным?
21. Какое отображение называют биективным?
22. Что называют соответствием из множества  $A$  в множество  $B$ ?
23. Что называют графиком и графом соответствия?
24. Что такое область определения соответствия?
25. Что такое область значения соответствия?
26. Что такое сечение соответствия по элементу  $x$ ?
27. В каком случае соответствие называют функциональным по компоненте?
28. Что называют бинарным отношением на множестве?
29. Что называют  $n$ -арным отношением на множествах?
30. Как определяется композиция соответствий?
31. Как определяется обратное соответствие?
32. Приведите свойства композиции соответствий и обратного соответствия.
33. Какое бинарное отношение на множестве называют рефлексивным?
34. Какое бинарное отношение на множестве называют иррефлексивным?
35. Какое бинарное отношение на множестве называют симметричным?
36. Какое бинарное отношение на множестве называют антисимметричным?
37. Какое бинарное отношение на множестве называют транзитивным?
38. Сформулируйте необходимые и достаточные условия рефлексивности.
39. Сформулируйте необходимые и достаточные условия иррефлексивности.
40. Сформулируйте необходимые и достаточные условия симметричности.
41. Сформулируйте необходимые и достаточные условия антисимметричности.
42. Сформулируйте необходимые и достаточные условия транзитивности.
43. Какое бинарное отношение на множестве называют эквивалентностью?
44. Какое бинарное отношение на множестве называют толерантностью?
45. Какое бинарное отношение на множестве называют порядком?
46. Какое бинарное отношение на множестве называют предпорядком?
47. Какое бинарное отношение на множестве называют строгим порядком?

48. Какое бинарное отношение на множестве называют строгим предпорядком?
49. Что называют рефлексивно-транзитивным замыканием бинарного отношения на множестве?
50. Что называют классом эквивалентности?
51. Что называют фактор-множеством по заданному отношению эквивалентности?
52. Что называют разбиением множества?
53. Сформулируйте теорему о связи между отношением эквивалентности и разбиением множества.
54. Что называют двойственным порядком на упорядоченном множестве?
55. Какое бинарное отношение на множестве называют отношением доминирования?
56. Какой порядок на множестве называют линейным?
57. Какой порядок на множестве называют частичным?
58. Какой элемент множества называют наибольшим?
59. Какой элемент множества называют наименьшим?
60. Какой элемент множества называют максимальным?
61. Какой элемент множества называют минимальным?
62. Что такое точная верхняя грань множества?
63. Что такое точная нижняя грань множества?
64. Как строится диаграмма Хассе конечного упорядоченного множества?
65. Сформулируйте утверждение о количестве наименьших элементов.
66. Сформулируйте утверждение о количестве наибольших элементов.
67. Сформулируйте определение индуктивного упорядоченного множества.
68. Какое отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое индуктивное упорядоченное множество называют непрерывным?
69. Какое отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое индуктивное упорядоченное множество называют монотонным?
70. Сформулируйте теорему о связи монотонности и непрерывности отображения одного индуктивного упорядоченного множества в другое индуктивное упорядоченное множество.
71. Что называют неподвижной точкой отображения?
72. Сформулируйте теорему о неподвижной точке отображения индуктивного упорядоченного множества в себя.

*Типовые задачи итогового рубежного контроля (рк в конце семестра)*

1. Используя метод двух включений, для произвольных бинарных отношений  $\rho$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  выяснить, справедливо ли тождество  $(\rho \circ (\sigma \circ \tau))^{-1} = (\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}) \circ \rho^{-1}$ .
2. Покажите, что для произвольных бинарных отношений  $\rho$  и  $\sigma$  на множестве  $A$  справедливо тождество  $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}$ .
3. Пусть  $\tau$  — бинарное отношение на множестве  $N$ :  $(a, b) \tau (c, d)$ , если и только если  $a \leq c$  и  $b \leq d$ . Является ли  $\tau$  отношением порядка? Если да, установить, существует ли наименьший элемент по отношению  $\tau$ ? Является ли этот порядок линейным?
4. Пусть в  $\mathbb{R}^3$  задана плоскость  $ax+by+cz=0$ . Точки с радиус-векторами  $r_1$  и  $r_2$  связаны бинарным отношением  $\tau$ , если  $(r_1 - r_2, n)=0$ , где  $n$  — нормаль к указанной плоскости, а  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение векторов. Показать, что  $\tau$  есть отношение эквивалентности. Что будет классом эквивалентности точки из  $\mathbb{R}^3$ ?
5. Пусть на множестве  $P$  последовательностей длины 3, элементами которых являются натуральные числа, задано бинарное отношение  $\tau$ :  $a_1 a_2 a_3 \tau b_1 b_2 b_3$ , если и только если  $a_i$  делит  $b_i$  нацело,  $i=1,2,3$ . Установить, является ли  $\tau$  отношением порядка? Линейного порядка? Существует ли наименьший элемент?
6. Пусть  $A$  — конечное множество. Какое отношение эквивалентности на нем дает наибольшее число эквивалентных классов? Сколько? Сколькими способами можно задать отношение эквивалентности, разбивающее  $A$  на два класса?
7. Пусть  $F$  — множество функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , и на множестве  $F$  задано бинарное отношение  $\tau$ :  $f(x) \tau g(x)$ , если  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ . Установить, будет ли отношение  $\tau$  отношением толерантности? Эквивалентности? Если отношение является эквивалентностью, укажите классы эквивалентности по этому отношению.

8. Пусть на множестве  $P$  последовательностей длины 2, элементами которых являются целые числа (кроме нуля), задано бинарное отношение  $\tau$ :  $a_1 a_2 \tau b_1 b_2$ , если и только если  $a_i$  делит  $b_i$  нацело,  $i = 1, 2$ . Установить, является ли  $\tau$  отношением предпорядка? порядка?
9. Пусть на множестве неотрицательных рациональных чисел определено бинарное отношение  $\rho$ :  $(a/b) \rho (c/d)$ , если и только если  $ad \leq bc$ . Показать, что  $\rho$  является отношением порядка. Существует ли наименьший элемент? Является ли этот порядок линейным?
10. Пусть  $F$  — множество функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , и на множестве  $F$  задано бинарное отношение  $\tau$ :  $f(x) \tau g(x)$ , если  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ . Установить, является ли  $\tau$  отношением предпорядка? порядка?
11. На множестве упорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ , задано отношение  $\tau$  по правилу  $(x_1, y_1) \tau (x_2, y_2)$  если и только если  $x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$ .
12. Показать, что  $\tau$  — отношение эквивалентности. Указать классы эквивалентности. Для точки  $(1, \sqrt{2})$  изобразить класс эквивалентности графически.
13. Пусть  $\leq_A$  есть отношение порядка на множестве  $A$ ,  $\leq_B$  — на множестве  $B$ . На множестве  $A \times B$  задано бинарное отношение  $\leq$ :  $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ , если и только если  $a_1 \leq_A a_2$  и  $b_1 \leq_B b_2$ . Доказать, что  $\leq$  есть отношение порядка на  $A \times B$ . Установить, является ли этот порядок линейным, если линейными являются порядки на множествах  $A$  и  $B$ ?
14. На множестве упорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ , задано отношение  $\pi$  по правилу  $(x_1, y_1) \pi (x_2, y_2)$  если и только если  $x_1 \leq x_2$  и  $y_1 \leq y_2$ . Показать, что  $\pi$  — отношение порядка. Установить, является ли этот порядок линейным? Найти множество нижних и верхних граней множества  $\{A, B\}$ , где  $A = (1, 2)$  и  $B = (2, 1)$ . Указать  $\inf\{A, B\}$  и  $\sup\{A, B\}$ , если последние существуют. Привести графическую иллюстрацию.

## **МОДУЛЬ 2: Алгебраические системы**

### *Вопросы для подготовки к рубежному контролю*

1. Что называется бинарной операцией на множестве.
2. Что называется  $n$ -арной операцией на множестве?
3. Какие формы записи  $n$ -арной операции вы знаете?
4. Что такое универсальная алгебра?
5. Что называют носителем алгебры?
6. Что такое сигнатура алгебры?
7. Что такое нульарная операция?
8. В каком случае бинарная операция называется ассоциативной?
9. В каком случае бинарная операция называется коммутативной?
10. В каком случае бинарная операция называется идемпотентной?
11. Какой элемент называется нулем относительно бинарной операции?
12. Какой элемент называется нейтральным элементом (единицей) относительно операции?
13. Какая алгебра называется группоидом?
14. Какая алгебра называется полугруппой?
15. Какая алгебра называется моноидом?
16. Какой элемент называется обратным к заданному элементу относительно бинарной операции?
17. Сформулируйте и докажите утверждение о количестве нейтральных элементов.
18. Сформулируйте и докажите утверждение о количестве элементов, обратных к данному.
19. Какая алгебра называется группой?
20. Сформулируйте и докажите теорему об обратном к произведению элементов.
21. Сформулируйте и докажите теорему об обратном к обратному элементу.
22. Сформулируйте и докажите законы сокращения в группе.
23. Сформулируйте и докажите теорему о решении уравнений в группе.
24. Что называют группой подстановок  $S_n$ ?
25. Что называют аддитивной группой вычетов?
26. Что называют мультипликативной группой вычетов?
27. Какая алгебра называется кольцом?
28. Какая алгебра называется коммутативным кольцом?

29. Какая алгебра называется кольцом вычетов?
30. Приведите аксиомы кольца.
31. Сформулируйте и докажите основные тождества кольца.
32. Какая алгебра называется телом?
33. Какая алгебра называется полем?
34. Приведите аксиомы поля.
35. Что называется областью целостности?
36. В каком случае кольцо вычетов является полем?
37. Какую алгебру называют полукольцом?
38. Какое полукольцо называют идемпотентным?
39. Какое полукольцо называют коммутативным?
40. Приведите пример полукольца.
41. Приведите пример коммутативного полукольца.
42. Приведите пример идемпотентного полукольца.

### *Типовые задачи итогового рубежного контроля*

1. На множестве  $M$  определена бинарная операция  $*$  по правилу  $x * y = x$ . Установите, является ли алгебра  $(M, *)$  полугруппой. Существуют ли в ней правые (левые) нейтральные элементы?
2. Пусть на множестве  $M^2$ , где  $M$  — некоторое множество, определена бинарная операция  $*$  по правилу  $(x, y) * (z, t) = (x, t)$ . Является ли  $(M^2, *)$  полугруппой? Существует ли в ней нейтральный элемент?
3. На множестве целых чисел  $Z$  определена операция  $*$  по правилу  $a * b = a + b + ab$ . Покажите, что алгебра  $(Z, *)$  является коммутативным моноидом.
4. Является ли моноидом алгебра  $(2A, \cup)$ , где  $A$  — некоторое множество.
5. В аддитивной группе  $Z \oplus 7$  вычетов по модулю 7 решить уравнение  $4 \oplus 7 x = 2$ .
6. В мультипликативной группе вычетов по модулю 7 решите уравнение  $32011 x = 2$ .
7. В группе подстановок  $S_4$  решите уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .
8. Покажите, что алгебра  $(\mathcal{R} \setminus \{0\}, *)$ , где  $x * y = 3xy$ , является группой. Решите в этой группе уравнение  $3 * x = 5$ .
9. Установите, является ли кольцом алгебра  $(2A, \cap, \cup)$ ? Основные теоретико-множественные тождества считать известными.
10. Установите, является ли кольцом алгебра  $(2A, \Delta, \cap)$ , где  $A$  — некоторое множество?
11. Установите, являются ли полями следующие кольца вычетов:  $Z_4$ ,  $Z_5$ ,  $Z_{31}$ . Ответ обоснуйте.
12. В поле  $Z_7$  решите систему уравнений
13.  $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$ ,
14.  $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$ ,
15.  $4x_1 - 6x_3 = 2$ .

## **МОДУЛЬ 2: Графы, языки, конечные автоматы**

### *Вопросы для подготовки к рубежному контролю*

1. Что такое неориентированный граф?
2. Что такое ребро неориентированного графа?
3. Что такое степень вершины неориентированного графа?
4. Что такое цепь в неориентированном графе?
5. Что такое простая цепь в неориентированном графе?
6. Что такое цикл в неориентированном графе?
7. Что такое ориентированный граф?
8. Что такое дуга в ориентированном графе?
9. Что такое полустепень захода вершины ориентированного графа?
10. Что такое полустепень исхода вершины ориентированного графа?
11. Что такое степень вершины ориентированного графа?
12. Что такое путь в ориентированном графе?

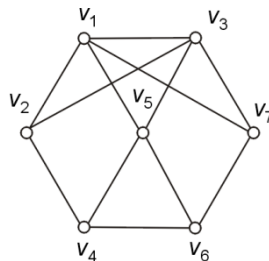


13. Что такое простой путь в ориентированном графе?
14. Что такое контур в ориентированном графе?
15. Что такое ассоциированный неориентированный граф для ориентированного графа?
16. Что такое подграф графа?
17. Что такое остовный подграф?
18. Как определяется отношение достижимости в неориентированном графе?
19. Что такое компонента связности неориентированного графа?
20. Как определяется отношение достижимости в ориентированном графе?
21. Как определяется отношение взаимной достижимости в ориентированном графе?
22. Что такое компонента связности ориентированного графа?
23. Что такое бикомпонента ориентированного графа?
24. Что такое компонента слабой связности ориентированного графа?
25. Что такое матрица смежности неориентированного графа?
26. Что такое матрица смежности ориентированного графа?
27. Как задается ориентированный граф списками смежности?
28. Что такое матрица достижимости ориентированного графа?
29. Что называют неориентированным деревом?
30. Что называют ориентированным деревом?
31. Что такое бинарное дерево?
32. Что такое полное бинарное дерево?
33. Сформулируйте задачу сортировки  $n$ -элементного множества.
34. Получите формулу для оценки трудоемкости задачи сортировки.
35. Опишите алгоритм поиска в ширину в ориентированном графе.
36. Опишите и обоснуйте алгоритм определения класса дуги при поиске в глубину в ориентированном графе по D-номерам и текущему состоянию стека.
37. Что такое ориентированный граф, взвешенный над полукольцом?
38. Что такое метка дуги в ориентированном графе, взвешенным над полукольцом?
39. Что такое метка пути в ориентированном графе, взвешенным над полукольцом?
40. Что такое стоимость прохождения между парой вершин в ориентированном графе, взвешенным над полукольцом?
41. В чем состоит задача о путях для взвешенного ориентированного графа?
42. Что называют матрицы стоимостей ориентированного графа?
43. Опишите метод вычисления матрицы стоимостей ориентированного графа, взвешенного над замкнутым полукольцом.
44. Сформулировать теорему о матрице стоимостей ориентированного графа, размеченного над полукольцом.
45. Сформулируйте теорему о замкнутости полукольца  $\mathbf{M}_n$ .
46. Определите полукольцо квадратных матриц  $\mathbf{M}_n$  над полукольцом  $S$ .
47. Сформулируйте и докажите лемму о свойствах  $k$ -й степени матрицы меток дуг.
48. Опишите метод последовательного исключения переменных решения систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах.
49. Сформулируйте и докажите теорему о высоте бинарного дерева с заданным числом листьев.
50. Сформулируйте и докажите теорему о количестве листьев в полном бинарном дереве заданной высоты.
51. Опишите алгоритм поиска в ширину в ориентированном графе.
52. Опишите и обоснуйте алгоритм определения класса дуги при поиске в глубину в ориентированном графе по D-номерам и текущему состоянию стека.
53. Что такое язык в алфавите  $V$ ?
54. Как определяется операция объединения языков?
55. Как определяется операция соединения языков?
56. Что называют итерацией языка  $L$ ?
57. Что называется дополнением языка  $L$ ?
58. Как определяется регулярный язык в алфавите  $V$ ?
59. Что такое конечный автомат как граф, взвешенный над полукольцом регулярных языков?
60. Что такое язык, допускаемый конечным автоматом?

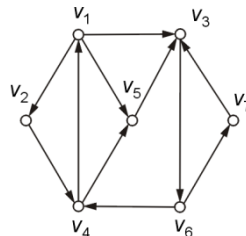
61. Какой конечный автомат называется детерминированным?
62. Сформулируйте этапы детерминизации конечного автомата.
63. Опишите основные приемы построения конечного автомата, эквивалентного исходному автомату, и не содержащего  $\lambda$  переходов.
64. В чем заключается метод вытягивания построения детерминированного автомата.
65. Как построить конечный автомат для объединения языков?
66. Как построить конечный автомат для соединения языков?
67. Как построить конечный автомат для итерации языка?
68. Как построить конечный автомат для дополнения конечного языка.
69. Сформулируйте теорему Клини.
70. Сформулируйте теорему о детерминизации
71. Сформулируйте теорему о разрастании.

### *Типовые задачи итогового рубежного контроля*

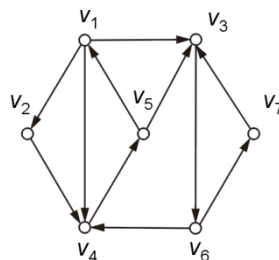
1. Выполнить поиск в глубину в неориентированном графе из вершины  $V_1$ . Записать списки смежности. Вершины в списке смежности расположить в порядке возрастания номеров. Привести протокол работы алгоритма, указать D-номера вершин. Построить глубинное остовное дерево.



2. Выполнить поиск в глубину в ориентированном графе из вершины  $V_5$ . Записать списки смежности. Вершины в списке смежности расположить в порядке возрастания номеров. Привести протокол работы алгоритма, указать D-номера вершин. Построить глубинное остовное дерево.



3. Выполнить поиск в ширину в ориентированном графе из вершины  $V_5$ . Записать списки смежности. Привести протокол работы алгоритма (работу с очередью, изменения массива меток на каждом шаге). На графе указать номера вершин, присваиваемых им в соответствии с порядком посещения при работе алгоритма. Отметить на графе кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные, используя массив «предков», сформированный при работе алгоритма.



4. Решив систему уравнений в полукольце  $B$ , найти матрицу достижимости ориентированного графа. Матрица  $A$  смежности вершин графа задана таблицей. Решение подробно описать.

0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0

5. Решив систему уравнений в полукольце  $\mathcal{N}^+$ , найти матрицу стоимости ориентированного графа. Матрица A меток дуг графа задана таблицей. Решение подробно описать.

$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	6
$\infty$	5	$\infty$	$\infty$	2
2	$\infty$	$\infty$	6	4
$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	3
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1

6. Построить конечный автомат в алфавите  $\{0,1\}$ , который допускает множество всех цепочек, не заканчивающихся подцепочкой 00.
7. Найти язык, допускаемый конечным автоматом
- $$M = \{ \{a,b\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1\}, \{q_3\}, \delta(q_1, a) = \{q_3\}, \delta(q_2, a) = \{q_1\}, \delta(q_2, b) = \{q_3\}, \delta(q_3, a) = \{q_2\} \}.$$
- ( $M = \{ \{ \text{Алфавит} \}, \{ \text{мн-во состояний} \}, \{ \text{начальное состояние} \}, \{ \text{заклучит. состояния} \}, \text{функция переходов} \} \}$ )
8. Детерминизировать конечный автомат
- $$M = \{ \{0,1\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1\}, \{q_3\}, \delta(q_1, 0) = \{q_1, q_3\}, \delta(q_1, 1) = \{q_2, q_3\}, \delta(q_2, 1) = \{q_1\}, \delta(q_3, 0) = \{q_2\} \}.$$
- Установить, допускает ли автомат цепочку 00110.
9. Найти регулярное выражение для дополнения языка  $L = (ab+ab)^*b$ . (Указание: Построить КА по регулярному выражению, детерминизировать, построить КА для дополнения, найти язык построенного КА).

## МОДУЛЬ 1: Булевы функции

### Вопросы для подготовки к рубежному контролю

1. Что такое булева функция?
2. Как определяется булев порядок
3. Что такое булев куб?
4. Как задать булеву функцию с помощью таблицы?
5. Что называют фиктивной переменной булевой функции?
6. Как найти фиктивную переменную по таблице?
7. Какие булевы функции называют равными?
8. Как определяется суперпозиция булевых функций?
9. Определите понятие формулы над заданным множеством F булевых функций.
10. Как определяется функция, представляемая формулой?
11. Что такое дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)?
12. Что такое конъюнктивная нормальная форма (КНФ)?
13. Что такое совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)?
14. Что такое совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)?
15. Какая ДНФ называется сокращенной?
16. Какая ДНФ называется тупиковой?
17. Какая ДНФ называется кратчайшей?
18. Какая ДНФ называется минимальной?
19. В чем состоит задача минимизации булевых функций в классе ДНФ?
20. В чем заключается тождество склейки?
21. В чем заключается тождество поглощения?
22. Назовите основные этапы алгоритма Квайна—Мак-Клоски.

23. Как тождества склейки и поглощения используются для получения сокращенной ДНФ из СДНФ?
24. Как применимость тождества склейки можно увидеть на карте Карно?

*Типовые задачи итогового рубежного контроля*

1. Показать, что функция  $f=(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$  не является монотонной. Указать все соседние наборы, на которых нарушается монотонность. С использованием констант 0 и 1 реализовать отрицание. Задать отрицание формулой над  $\{f, 0, 1\}$
2. Показать, что функция  $f=(0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$  не является самодвойственной. С использованием отрицания реализовать константы 0 и 1. Задать их формулами над  $\{f, \neg\}$ .
3. Показать, что функция  $f = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$  не является линейной. С использованием констант 0, 1 и отрицания реализовать конъюнкцию. и задать ее формулой над  $\{f, 0, 1, \neg\}$
4. Минимизировать функцию  $f=(0111101011011010)$  с использованием карты Карно. (Заданы значения функции на всех возможных наборах переменных.)
5. Минимизировать функцию  $f=(1110001111010011)$  с использованием карты Карно

Кафедра  
Ответственный по кафедре  
Авторы документа  
Телефон

ФН-12  
А.Н. Канатников  
С.Б. Ткачёв, Н.В. Безверхний  
(499) 263-62-88