

ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

Специальные свойства бинарных отношений

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется: ■

1) **рефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \in \rho)$,

■ т.е. $\text{id}_A \subseteq \rho$. ■

2) **иррефлексивным**, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$,

■ т.е. $\text{id}_A \cap \rho = \emptyset$. ■

3) **симметричным**, если $(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$,

■ т.е. $\rho^{-1} = \rho$. ■

4) **антисимметричным**, если

$$(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow (x = y)) \quad \blacksquare$$

т.е. $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \text{id}_A$ ■ (в частности, м. б., что $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$!). ■

Эквивалентное определение:

$$(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \wedge x \neq y \Rightarrow ((y, x)) \notin \rho). \quad \blacksquare$$

5) **транзитивным**, если

$$(\forall x \forall y \forall z)((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow ((x, z) \in \rho),$$

т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

6) **плотным**, если

$$(\forall x \forall y)((x, y) \in \rho \Rightarrow (\exists z)((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge ((x, z) \in \rho) \wedge ((z, y) \in \rho))).$$

Бинарное отношение называется:

- 1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно; ■
- 2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично; ■
- 3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; ■
- 4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно; ■
- 5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно; ■
- 6) **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно; ■

Говорят: „отношение эквивалентности, толерантности, порядка, предпорядка ... “ и т.п.

Пример 1.

Рассмотрим отношение ρ на множестве всех подмножеств некоторого множества U : $A \rho B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ и $\emptyset \rho \emptyset$. ■

Покажем, что это отношение толерантности, т.е. рефлексивно и симметрично. ■

Поскольку для любого множества $A \in U$, $A \neq \emptyset$, $A \cap A = A \neq \emptyset$ и $\emptyset \rho \emptyset$, отношение ρ является рефлексивным. ■

Поскольку из $A \cap B \neq \emptyset$ следует, что $B \cap A \neq \emptyset$, отношение ρ является симметричным. ■

Вывод: это отношение толерантности. ■

Покажем, что ρ — не эквивалентность. ■

Поскольку из $A \cap B \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$ в общем случае не следует, что $A \cap C \neq \emptyset$, что легко видеть, что отношение ρ не транзитивно.

Пример 2.

Зададим на множестве натуральных чисел \mathbb{N} следующее отношение: $a \mid b$ в том и только том случае, когда „ a является делителем b “. ■

Это отношение рефлексивно, поскольку любое число является делителем самого себя. ■

Покажем антисимметричность. Пусть a делит b и, с другой стороны, b делит a . Тогда найдется натуральное число t_1 , такое, что $b = at_1$, и найдется t_2 , такое, что $a = bt_2$. Отсюда $b = bt_2t_1$, что на множестве натуральных чисел возможно только при $t_1 = t_2 = 1$. Следовательно, $a = b$. ■

Покажем транзитивность. Если a делит b , а b делит c , то найдутся такие натуральные числа t_1 , t_2 , такие, что $b = at_1$ и $c = bt_2$. Отсюда имеем $c = at_1t_2$, т.е. a — делитель c . ■

Таким образом, отношение делимости на множестве \mathbb{N} является отношением порядка. ■

Это отношение на множество целых чисел \mathbb{Z} будет только предпорядком, поскольку не будет антисимметричным. ■

Например, 2 делится на -2 , и -2 делится на 2, однако $2 \neq -2$.

Пример 3.

Рассмотрим множество всех подмножеств множества A — $2^{(A)}$. Покажем, что отношение включения \subseteq на множестве $2^{(A)}$ есть порядок. ■

Это отношение рефлексивно, т.к. для любого множества X справедливо $X \subseteq X$. ■

Поскольку для любых двух множеств X и Y из $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq X)$ следует, что $X = Y$, рассматриваемое отношение антисимметрично. ■

Из определения включения вытекает, что если $(X \subseteq Y)$ и $(Y \subseteq Z)$, то $X \subseteq Z$. Следовательно, отношение транзитивно. ■

Таким образом, отношение рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т. е. это отношение порядка.

Задачи.

4.1 Исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) следующих отношений:

(а) $M = \{a, b, c, d\}$,

$$\Phi = \{(a, a), (a, b), (c, a), (b, d), (a, d), (b, c)\};$$

■
(б) $x \varphi y$, если $(x - y) \leq 2$, $x \in R$, $y \in R$. ■

4.2 Пусть $X = \{x \mid x \in [0, 1]\}$, $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in X, x < y \text{ и } |x - y| < 0.5\}$. Построить графики отношений ρ и ρ^{-1} . Исследовать свойства отношения ρ . Что можно сказать о свойствах обратного отношения? ■

4.3 Пусть τ — отношение на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b) \tau (c, d)$, если $a \leq c$ и $b \leq d$. Является ли τ отношением порядка и почему? ■

4.4 Пусть v определено на множестве положительных рациональных чисел: $(a/b)v(c/d)$, если $ad \leq bc$. Показать, что v является отношением линейного порядка.

4.5 Пусть A — произвольное множество и σ — отношение на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя):

$$(P, Q)\sigma(X, Y), \text{ если } (P \subseteq X) \text{ и } (Q \subseteq Y);$$

Является ли σ отношением порядка? ■

4.6 Рассмотрим множество квадратных матриц размером 2×2 , элементами которых являются целые числа. Является ли заданное ниже отношение τ отношением порядка? Линейного порядка?

(а) $A\tau B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, 2$; ■

(б) $A\tau B$, если $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, 2$ и хотя бы для одной пары элементов неравенство строгое. ■

4.7 Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$. Исследовать свойства отношения τ :

$f(x)\tau g(x)$, если $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. Является ли τ отношением предпорядка? порядка?

Отношение эквивалентности.

Определение 4.1. Бинарное отношение называется: **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение 4.2. Пусть $\rho \subseteq A^2$ — эквивалентность. Множество

$$[x]_\rho = \{y \mid y\rho x\}$$

называют **классом эквивалентности элемента x по отношению ρ** .

Определение 4.3. Множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности ρ на множестве A называется фактор-множеством множества A по отношению ρ и обозначается A/ρ , т.е.

$$A/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in A\}.$$

Пример 4. На множестве целых чисел \mathbb{Z} определим отношение $m \equiv_{(\text{mod } 2)} n$ („ m равно n по модулю 2“) имеющее место тогда и только тогда, когда $m - n$ делится на 2: $2 \mid m - n$. ■

Это отношение рефлексивно и симметрично, поскольку $m - m = 0$ делится на 2, и из того, что $m - n$ делится на 2, вытекает, что $n - m$ делится на 2. ■

Покажем транзитивность. Пусть $m \equiv_{(\text{mod } 2)} n$ и $n \equiv_{(\text{mod } 2)} p$. ■ Если $m - n$ делится на 2 и $n - p$ делится на 2, то числа m , n и p либо все четные, либо нечетные. ■ Поэтому $m - p$ делится на 2, что означает $m \equiv_{(\text{mod } 2)} p$. ■

Таким образом, $\equiv_{(\text{mod } 2)}$ — транзитивность.

Найдем фактор-множество множества целых чисел \mathbb{Z} по данному отношению эквивалентности. ■

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\text{mod } 2)}$ с числом 0. Разность некоторого числа n и 0 будет нацело делиться на 2 только если число n — четное. Таким образом, $[0]_{\equiv_{(\text{mod } 2)}}$ — множество четных чисел. ■

Рассмотрим множество чисел, связанных отношением $\equiv_{(\text{mod } 2)}$ с числом 1. Разность некоторого числа m и 1 будет нацело делиться на 2 только если число m — нечетное. Таким образом, $[1]_{\equiv_{(\text{mod } 2)}}$ — множество нечетных чисел. ■

В итоге получаем ровно 2 попарно различных классов эквивалентности по данному отношению: $[0]_{\equiv_{(\text{mod } 2)}}$ и $[1]_{\equiv_{(\text{mod } 2)}}$. ■

Можем записать

$$\mathbb{Z}/\equiv_{(\text{mod } 2)} \sim \{0, 1\}.$$

Задача 4.8 На множестве рациональных дробей вида a/b , $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ задано бинарное отношение

$$\tau = \{(a/b, c/d) \mid ad = cb\}.$$

Показать, что τ является отношением эквивалентности. Что является фактор-множеством множества рациональных дробей по данному отношению? ■

Задача 4.9 Пусть в \mathbb{R}^3 задана плоскость $ax + by + cz = 0$. Точки с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 связаны отношением τ , если $((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{n}) = 0$, где \mathbf{n} — нормаль к плоскости, а (\cdot, \cdot) — скалярное произведение. Показать, что τ — отношение эквивалентности. На какие классы эквивалентности разбивается \mathbb{R}^3 . Что будет фактор-множеством множества \mathbb{R}^3 по данному отношению эквивалентности. ■

Задача 4.10 Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$. Исследовать свойства отношения τ :

$f(x)\tau g(x)$, если $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Является ли τ отношением эквивалентности?

Индексированное семейство множеств $\{B_i\}_{i \in I}$ называется **разбиением** множества A , если:

1) $\bigcup_{i \in I} B_i = A$,

2) если $i \neq j$, то $B_i \cap B_j = \emptyset$. ■

Таким образом, разбиение множества A — это семейство попарно не пересекающихся подмножеств A , объединение которых равно A . ■

Например, множества $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$ и $[2/3, 1]$ образуют разбиение отрезка $[0, 1]$. ■

Теорема. Любое отношение эквивалентности определяет однозначно некоторое разбиение данного множества и обратно, любое разбиение множества однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности на нем. ■

Задача 4.11 Пусть A — конечное множество. Какое отношение эквивалентности на нем дает наибольшее число классов эквивалентности. Сколько? Сколькими способами можно задать отношение эквивалентности, разбивающее A на два класса?

Домашнее задание

4.12 Отношение σ связывает клетки шахматной доски: две клетки связаны, если с одной на другую можно перейти ходом коня. Записать отношение с помощью логических высказываний, исследовать его свойства.

4.13 Пусть π — отношение на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a, b) \pi (c, d)$, если $a \leq c$ и $b \geq d$. Является ли π отношением порядка и почему?

4.14 Пусть A — произвольное множество и ρ — отношение на множестве $2^A \times 2^A$ (прямом произведении множества всех подмножеств A на себя).

$(P, Q) \rho (X, Y)$, если $(P \Delta Q) \subseteq (X \Delta Y)$;

Является ли ρ отношением порядка?

4.15 Пусть M — некоторое множество, а $2^M \setminus \{\emptyset\}$ — множество всех его подмножеств без пустого множества. Два множества из 2^M связаны отношением τ , если они имеют хотя бы одно непустое общее подмножество. Является ли в общем случае τ отношением порядка. Какими свойствами будет обладать отношение τ , если $M = \{a, b\}$

4.16 Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение, и $x_1 \tau x_2$ если и только если $f(x_1) = f(x_2)$. Показать, что τ является отношением эквивалентности. Указать фактор-множество \mathbb{R}/τ .