Семинар 3.

3.1. Бинарные отношения

Определение 3.1. n **-арным (или** n **-местным) отношением** на множествах $A_1, \dots, A_n$ называется произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$:

$$\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n.$$

В частности, при $\rho = \varnothing$ получаем **пустое отношение**, а при ρ , совпадающем со всем указанным декартовым произведением — **универсальное отношение**.

Важный частный случай получаем при $n = 2$: тогда говорят **о соответствии из множества** A_1 **в множество** A_2 .

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то ρ называют n **-арным отношением на множестве** A ; при $n = 2$ получаем **бинарное отношение на множестве** A .

Рассмотрим более подробно соответствия и бинарные отношения. Любое соответствие — это множество упорядоченных пар. Например, если $A = \mathbb{R}^1$ (множество действительных чисел), то бинарное отношение на $\mathbb{R}^1$ — это некоторое множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 3.2. **Область определения соответствия** из множества A_1 в множество A_2 $\rho \subseteq A_1 \times A_2$ — есть множество

$$\operatorname{dom} \rho = \{x \,|(\exists y \in A_2)(x, y) \in \rho\}.$$

Область значения соответствия ρ — это множество

$$\operatorname{rng} \rho = \{y \,|(\exists x \in A_1)(x, y) \in \rho\}.$$

Из определения вытекает, что $\operatorname{dom} \rho \subseteq A_1$, $\operatorname{rng} \rho \subseteq A_2$. Соответствие называют **всюду определенным**, если $\operatorname{dom} \rho = A_1$.

Определение 3.3. Сечением соответствия ρ для фиксированного $x \in A_1$ называют множество

$$\rho(x) = \{y \,|\, (x, y) \in \rho\}.$$

Пример 3.1.

Пусть $\rho = \{(x, y) \,|\, x > y + 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$. Имеем $\rho = \{(3, 1), (4, 1), (4, 2)\}$.

Область определения отношения $\operatorname{dom} \rho = \{3, 4\}$, область значений — $\operatorname{rng} \rho = \{1, 2\}$. Построить график и граф отношения ρ.

3.1. Построить графики и графы следующих бинарных отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

(а) $x_1 \varphi x_2$, если $x_1 < x_2$;
(б) $x_1 \tau x_2$, если $x_1 \leq x_2$;
(в) $x_1 \rho x_2$, если $(x_1 - x_2) \geq 2$;
(г) $\{(a, b)|\; a + b$ — четное$\}$;

3.2. Определить, по какому принципу построено отношение, заданное графиком Φ на $M \times M$, где $M = \{\text{л}, \text{о}, \text{с}, \text{т}\}$,
а $\Phi = \{(\text{о}, \text{л}),\; (\text{с}, \text{л}),\; (\text{т}, \text{л}),\; (\text{с}, \text{о}),\; (\text{т}, \text{о}),\; (\text{с}, \text{т})\}$.

3.2. Операции над соответствиями

Поскольку соответствия являются множествами, то все операции над множествами (пересечение, объединение, разность, дополнение и т.д.) применимы и к соответствиям. Однако для соответствий можно определить специальные операции: композицию соответствий и получение обратного соответствия.

1) **Композиция соответствий**.

Если $\rho \subseteq A_1 \times A_2$, $\sigma \subseteq A_2 \times A_3$, то композиция (произведение) соответствий ρ и σ есть соответствие $\rho \circ \sigma$, определяемое как

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma = \{(x,z) \mid (\exists y)((x,y) \in \rho) \wedge \\ \wedge ((y,z) \in \sigma)\}. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Соответствие ρ берем из предыдущего примера, а соответствие $\sigma \subseteq \{1,2,3,4\}^2$ зададим непосредственно как множество пар $\sigma = \{(1,2),(1,3),(3,4)\}$. Построить граф композиции $\rho \circ \sigma$.

Композицию отношения с самим собой называют **квадратом отношения**.

Определение 3.4. Отношение $\mathrm{id}_A = \{(x,x) \mid \ \in A\}$ называют **диагональю множества** A .

Свойства композиции:
(1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;
(2) $\rho \circ \varnothing = \varnothing \circ \rho = \varnothing$;
(3) $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = \rho \circ \sigma \cup \rho \circ \tau$;
(4) $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq \rho \circ \sigma \cap \rho \circ \tau$; (равенство в общем случае не имеет места!).
(5) $\rho \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ \rho = \rho$, где $\rho \subseteq A^2$ — бинарное отношение на A .

Рассмотрим доказательство свойства (1). Используем метод двух включений:

$$\begin{aligned}
&(x,z) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(((x,y) \in \rho) \wedge \\
&\qquad \wedge ((y,z) \in \sigma \circ \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y) \in \rho) \wedge (((y,t) \in \sigma) \wedge \\
&\qquad \wedge ((t,z) \in \tau))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y) \in \rho) \wedge ((y,t) \in \sigma)) \wedge \\
&\qquad \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists t)(((x,t) \in \rho \circ \sigma) \wedge ((t,z) \in \tau)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,z) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau.
\end{aligned}$$

Обратно:

$$
\begin{aligned}
&(x,z)\in(\rho\circ\sigma)\circ\tau \Rightarrow\\
&\Rightarrow (\exists t)(((x,t)\in\rho\circ\sigma)\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow\\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)((((x,y)\in\rho)\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge((y,t)\in\sigma))\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge((t,z)\in\tau)) \Rightarrow\\
&\Rightarrow (\exists y)(\exists t)(((x,y)\in\rho)\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge(((y,t)\in\sigma)\wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge((t,z)\in\tau))) \Rightarrow\\
&\Rightarrow (\exists y)(((x,y)\in\rho)\wedge((y,z)\in\sigma\circ\tau)) \Rightarrow\\
&\Rightarrow (x,z)\in\rho\circ(\sigma\circ\tau).
\end{aligned}
$$

2) **Обратное соответствие**.

Соответствие, обратное соответствию $\rho\subseteq A_1\times A_2$, есть соответствие из A_2 в A_1, обозначаемое ρ^{-1} и равное по определению

$$\rho^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in\rho\}.$$

Для соответствия ρ из примера **??**

$$\rho^{-1}=\{(1,3),(1,4),(2,4)\}.$$

Обратное соответствие обладает следующими свойствами:
(6) $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$
(7) $(\rho\circ\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$
Для фиксированного $y\in A_2$ положим $\rho^{-1}(y)=\{x\,|\,y\in\rho(x)\}$.

Задачи

3.1. Найти dom_ρ , rng_ρ , ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ для отношений:
(а) $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x = 0 \ (\mathrm{mod\,y})\}$;
(б) $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1],\ x + y \leq 1\}$
(в) $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1],\ 2x \geq 3y\}$.

3.2. Доказать, что для любого бинарного отношения $\rho \subseteq A \times A$:
(а) $\mathrm{dom}_{\rho^{-1}} = \mathrm{rng}_\rho$;
(б) $\mathrm{rng}_{\rho^{-1}} = \mathrm{dom}_\rho$;
(в) $\mathrm{dom}_{\rho_1 \circ \rho_2} = \rho_1^{-1}(\mathrm{rng}_{\rho_1} \cap \mathrm{dom}_{\rho_2})$;
(г) $\mathrm{rng}_{\rho_1 \circ \rho_2} = \rho_2(\mathrm{rng}_{\rho_1} \cap \mathrm{dom}_{\rho_2})$.

3.3. Доказать, что для любых бинарных отношений ρ_1 , ρ_2 , $\rho_3 \in A \times A$:
(а) $\rho_1 \cap \rho_1 = \rho_1 \cup \rho_1 = \rho_1$;
(б) $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$;
(в) $\rho_1 \circ id_A = id_A \circ \rho_1 = \rho_1$;
(г) $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$;
(д) $(\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1}$;
(е) $(\overline{\rho})^{-1} = \overline{(\rho^{-1})}$;
(ж) $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.