Ткачев С.Б.

каф. Математического моделирования
МГТУ им. Н.Э. Баумана

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИУ5 — 4 семестр, 2015 г.

Семинар 11. ЗАДАЧА О ПУТЯХ ВО ВЗВЕШЕННЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Ориентированные графы

Ориентированный граф (орграф) G задается двумя множествами

$$G = (V, E),$$

где V — конечное множество, элементы которого называют **вершинами**, E — множество *упорядоченных пар* на V , т.е. подмножество множества $V \times V$, элементы которого называют **дугами**.

$u \to v$ —**дуга ведет** из вершины u в вершину v .

Вершины u и v, для которых $u \to v$, называют **смежными**,

u — **начало**, а v — **конец дуги** (u, v) .

Взвешенные графы

Определение 11.1. Взвешенным (или размеченным) орграфом называют пару $W=(G,\varphi)$, где
$G=(V,E)$ — обычный орграф,
$\varphi : E \to \mathcal{R}$ — **весовая функция** (или **функция разметки**) со значениями в некотором *полукольце*

$$\mathcal{R}=(R,+,\cdot,0,1)$$

причем $(\forall e \in E)(\varphi(e) \neq 0)$.

Будем говорить, что **орграф размечен над полукольцом** $\mathcal{R}$.
Пусть в орграфе фиксирована некоторая нумерация его вершин. Тогда взвешенный орграф может быть задан матрицей A следующего вида:

$$a_{ij}=\begin{cases}\varphi((i,j)), & \text{если } i \to j,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Эту матрицу будем называть **матрицей меток дуг**.

Решение общей задачи о путях для произвольного замкнутого полукольца $\mathcal{R}$.

Определение 11.2. Метка пути, ведущего из вершины v_i в вершину v_j, есть *произведение в полукольце* $\mathcal{R}$ меток входящих в путь дуг в порядке их следования (для пути ненулевой *длины*) и есть **1** (*единица полукольца* $\mathcal{R}$) для пути нулевой длины.

Определение 11.3. Стоимость прохождения из вершины v_i в вершину v_j (или между i-ой и j-ой вершинами) — это *сумма в полукольце* $\mathcal{R}$ меток всех путей, ведущих из вершины v_i в вершину v_j.

Теорема 1. Матрица стоимостей C орграфа G, размеченного над полукольцом с итерацией $\mathcal{R}$ (в частности, над замкнутым полукольцом), равна итерации матрицы A меток дуг, задающей орграф G.

Пример 11.1. Матрица A над полукольцом $\mathcal{B}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Изобразите орграф, которому соответствует матрица A.

2) Найдите матрицу достижимости (матрицу A^*) для этого графа.

Решение. Запишем систему уравнений в полукольце $\mathcal{B}$ для определения первого столбца матрицы A^*:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_4 + 1, \\ x_2 = + 1 \cdot x_4 + 0, \\ x_3 = 1 \cdot x_2 + 0, \\ x_4 = + 1 \cdot x_3 + 0. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в третье.

$$x_3 = 1 \cdot (1 \cdot x_4 + 0) + 0 = 1 \cdot x_4 + 0.$$

Подставив полученное выражение в четвертое уравнение $x_4 = 1 \cdot x_3 + 0$, получим

$$x_4 = 1 \cdot (1 \cdot x_4 + 0) + 0 = 1 \cdot x_4 + 0.$$

Следовательно, $x_4 = 1^* \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$.
Отсюда $x_3 = 1 \cdot 0 + 0 = 0$, $x_2 = 1 \cdot 0 + 0 = 0$ и $x_1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 = 1$.
Итак, первый столбец A^* есть

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что уравнение $x_4 = 1 \cdot x_4 + 0$ имеет два решения $x_4 = 0$ и $x_4 = 1$, причем $0 \le 1$. Найдено $x_4 = 0$ — наименьшее решение уравнения.

Второй столбец определяется из системы

$$\begin{cases} x_1 = & 1\cdot x_2 & & +1\cdot x_4+0, \\ x_2 = & & & +1\cdot x_4+1, \\ x_3 = & 1\cdot x_2 & & +0, \\ x_4 = & & +1\cdot x_3 & +0. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в третье .

$$x_3 = 1\cdot(1\cdot x_4+1)+0 = 1\cdot x_4+1.$$

Подставив полученное выражение в четвертое уравнение $x_4 = 1\cdot x_3+0$, получим

$$x_4 = 1\cdot(1\cdot x_4+1)+0 = 1\cdot x_4+1.$$

Следовательно, $x_4 = 1^*\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1$.
Отсюда $x_3 = 1\cdot 1+1 = 1$, $x_2 = 1\cdot 1+1 = 1$ и $x_1 = 1\cdot 1+1\cdot 1+0 = 1$.
Второй столбец A^*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Действуя аналогично, получаем матрицу A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 11.2. Над полукольцом $\mathcal{R}^+$ задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 5 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}.$$

1) Изобразить взвешенный ориентированный граф, которому соответствует матрица A.

2) Вычислить матрицу стоимости кратчайших путей для орграфа.

Решение. Система для вычисления первого столбца матрицы A^* имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \odot x_2 \oplus 3 \odot x_4 \oplus 0, \\ x_2 = \oplus 4 \odot x_4 \oplus \infty, \\ x_3 = 2 \odot x_2 \oplus \infty, \\ x_4 = \oplus 1 \odot x_3 \oplus \infty. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в третье.

$$x_3 = 2 \odot (4 \odot x_4 \oplus \infty) \oplus \infty = 6 \odot x_4 \oplus 2 \odot \infty \oplus \infty = 6 \odot x_4 \oplus \infty.$$

Заметим, что $2 \odot \infty = \infty$ в силу того, что ∞ есть нуль полукольца $\mathcal{R}^+$, а среди аксиом полукольца последняя аксиома устанавливает аннулирующее свойство нуля.
Подставив полученное выражение в четвертое уравнение $x_4 = 1 \odot x_3 \oplus \infty$, получим

$$x_4 = 1 \odot (6 \odot x_4 \oplus \infty) \oplus \infty = 7 \odot x_4 \oplus \infty.$$

Следовательно, $x_4 = 7^* \odot \infty = \infty$. Отметим, что

$$\begin{aligned} 7^* &= 7^0 \oplus 7^1 \oplus 7^2 \oplus \ldots = \\ &= \mathbf{1} \oplus 7 \oplus 14 \oplus \ldots = \min\{0, 7, 14, \ldots\} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда $x_3 = 6 \odot \infty \oplus \infty = \infty$, $x_2 = 4 \odot \infty \oplus \infty = \infty$ и $x_1 = 5 \odot \infty \oplus 3 \odot \infty \oplus 0 = 0$.
Итак, первый столбец A^* есть

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

Второй столбец определяется из системы

$$\begin{cases} x_1 = & 5 \odot x_2 & & \oplus 3 \odot x_4 \oplus \infty, \\ x_2 = & & & \oplus 4 \odot x_4 \oplus 0, \\ x_3 = & 2 \odot x_2 & & \oplus \infty, \\ x_4 = & & \oplus 1 \odot x_3 & \oplus \infty. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в третье .

$$x_3 = 2 \odot (4 \odot x_4 \oplus 0) \oplus \infty = 6 \odot x_4 \oplus 2 \odot 0 \oplus \infty = 6 \odot x_4 \oplus 2.$$

Подставив полученное выражение в четвертое уравнение $x_4 = 1 \odot x_3 \oplus \infty$, получим

$$x_4 = 1 \odot (6 \odot x_4 \oplus 2) \oplus \infty = 7 \odot x_4 \oplus 3.$$

Следовательно, $x_4 = 7^* \odot 3 = 0 \odot 3 = 3$.
Отсюда $x_3 = 6 \odot 3 \oplus 2 = 2$, $x_2 = 4 \odot 3 \oplus 0 = 0$ и $x_1 = 5 \odot 0 \oplus 3 \odot 3 \oplus \infty = 5 \oplus 6 = 5$.
Второй столбец A^*

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Действуя аналогично, получаем матрицу A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ \infty & 0 & 5 & 4 \\ \infty & 2 & 0 & 6 \\ \infty & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку сложение в $\mathcal{R}^+$ — взятие наименьшего из двух чисел, а умножение — обычное арифметическое сложение, то множитель 1 и слагаемое 0 существенны, т.к. $x \neq x + 0$ и $x \neq 1 \cdot x$ в общем случае.
При наличии слагаемого 0 (числа 0!) в любой сумме эта сумма равна числу 0. Слагаемое $+\infty$ можно не записывать (как **нуль полукольца**.)

Задачи

11.1. Для заданных графов решить задачу транзитивного замыкания (в полукольце B) и задачу вычисления кратчайших расстояний (в полукольце R^+) для графов, заданных списком дуг с весами. Каждый элемент списка имеет вид $(v_i, v_j, (\text{вес}))$:
(а) $(1,2,8)$, $(1,1,2)$, $(1,3,5)$, $(2,1,3)$, $(3,2,2)$;
(б) $(1,2,2)$, $(1,4,10)$, $(2,3,3)$, $(3,5,4)$, $(5,4,5)$, $(2,4,7)$, $(4,3,6)$;
(в) $(1,2,10)$, $(1,4,5)$, $(2,1,6)$, $(2,3,7)$, $(2,4,2)$, $(2,5,9)$, $(3,3,8)$, $(3,4,10)$, $(4,3,5)$, $(4,5,4)$, $(4,2,7)$, $(5,1,8)$, $(5,3,4)$;
(г) $(1,2,2)$, $(1,3,3)$, $(2,3,6)$, $(3,2,5)$, $(2,4,6)$, $(3,5,2)$, $(4,5,3)$, $(5,4,4)$, $(6,4,1)$, $(7,5,5)$, $(6,7,4)$, $(7,2,6)$;
(д) $(1,2,1)$, $(2,3,3)$, $(3,4,4)$, $(5,4,5)$, $(5,6,1)$, $(6,1,1)$, $(1,7,2)$, $(2,7,1)$, $(4,7,1)$, $(7,3,2)$, $(7,5,1)$, $(7,6,1)$;

11.2. Не используя интерпретации на графах, доказать, что для любой матрицы A $n \times n$ над полукольцом $\mathcal{B}$ $A^* = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$.

Рассмотреть A как матрицу смежности некоторого неориентированного графа и дать интерпретацию на графах матриц A^2, A^3, A^k .
Рассмотреть эти матрицы как матрицы бинарных отношений на n-элементном множестве и установить, как связаны эти бинарные отношения с бинарным отношением, задаваемым матрицей A?