Семинар 1.

1.1. Метод характеристических функций

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$, где U — универсальное множество, есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

(а) $\chi_A(x)^2 = \chi_A(x)$;

(б) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;

(в) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;

(г) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Задача 1.

Вывести формулы для вычисления характеристических функций

а) $A \setminus B$;

б) $A \triangle B$.

Ответ.

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B;$$
$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_b.$$

Характеристические функции множеств позволяют в некоторых случаях легко доказывать теоретико-множественные тождества. Метод характеристических функций доказательства теоретико-множественного тождества заключается в вычислении характеристические функции обеих его частей. Тождество верно тогда и только тогда, когда эти функции совпадают.

Пример.

Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливо ли тождество: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;

Решение.

С одной стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\triangle B)\cap C} &= \chi_{A\triangle B}\chi_C = \\ &= (\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\,\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)} &= \\ &= \chi_{A\cap C} + \chi_{B\cap C} - 2\chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C} = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_C\chi_B\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - 2\chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

Характеристические функции левой и правой части тождества совпадают. Следовательно, тоджество верно.

Задача 2.

Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:

(а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$;

(б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

(в) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Дом. задание.

Используя метод характеристических функций, выяснить, справедливы ли тождества:

(а) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

(в) $(A \triangle B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

1.2. Декартово произведение множеств

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат, то каждой точке плоскости можно поставить в соответствие **упорядоченную пару** $(a,\, b)$ действительных чисел — координаты этой точки.

В отличие от двухэлементного множества $\{a,\, b\}$, в упорядоченной паре важен порядок следования элементов и в общем случае $(a,\, b) \neq (b,\, a)$.

Определение 1.1. **Декартово** (**прямое**) **произведение множеств** A и B есть множество всех упорядоченных пар $(a,\, b)$, таких, что первый элемент пары берется из множества A, а второй — из множества B :

$$A \times B = \{(a,\, b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Пример.
Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a,\, 1),\, (a,\, 2),\\ &(b,\, 1),\, (b,\, 2),\\ &(c,\, 1),\, (c,\, 2)\}. \end{aligned}$$

Задача 3.
Методом двух включений доказать тождество

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Решение.

Покажем первое включение.

$$\begin{aligned}
x = &(y, z) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C).
\end{aligned}$$

Покажем второе включение.

$$\begin{aligned} x = &(y, z) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ((y, z) \in A \times B) \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge ((y, z) \in A \times C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge z \in B) \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge (y \in A \wedge z \in C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \wedge z \in C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \in A \wedge (z \in B \cap C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y, z) \in (A \times (B \cap C). \end{aligned}$$

Тождество доказано.

Задачи

1.1. Привести пример, показывающий, что $A \times B \neq B \times A$. Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B отрезки числовой прямой.

1.2. Доказать, что если $(A \subseteq X)$ и $(B \subseteq Y)$, то

$$(A \times B) \subseteq (X \times Y).$$

Проиллюстрировать графически, приняв в качестве множеств A, B, X, Y отрезки числовой прямой.

1.3. Используя метод двух включений, доказать справедливость тождества:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

1.4. Показать, что

$$\overline{(A \times B)} \neq \overline{A} \times \overline{B}.$$

Вывести требуемое тождество. Проиллюстрировать полученное графически, приняв в качестве множеств A и B отрезки числовой прямой.

1.5. Проверить на примерах, справедливо ли тождество:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Если не удастся придумать пример, показывающий, что это не тождество, попробуйте доказать его методом двух включений.