Теория к экзу

Физика

1) Поступательное движение. Характеристики поступательного движения, примеры.

Осн. закон динамики поступательного движения:
Производная по времени от кол-ва движения мат. т-ки или системы мат. т-к относительно ИСО равна главному вектору всех внешних сил, приложенных к этой системе (мат. т-ке)

Поступательное движение - движение, при котором все малые части тела движутся по одинаковым параллельным траекториям.

Материальная т-ка - твердое тело, линейные размеры которого, много меньше линейных размеров траектории, по которой движется тело

Траектория - линия, которую описывает мат. т-ка в процессе своего движения.

Радиус в-р - в-р, соединяющий начало отсчета и тело в процессе его движения

Скорость - изменение радиус вектора за ед. времени:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Ск-ть направлена по касательной траектории.

Ускорение - изменение ск-ти за ед. времени:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

Перемещение - разница 2-х радиус векторов

Путь - длина участка траектории между 2-мя т-ками движения тела

Примеры:

1) $\bar{v} = const$, $t=0$, $\bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v}\,dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} d\bar{r} = \int_0^t \bar{v}\,dt \Rightarrow \bar{r}(t) - r_0 = \bar{v}t \Rightarrow \bar{r}(t) = r_0 + vt$$

2) $\bar{a} = const$, $t=0$: $\bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$, $v(t=0) = \bar{v}_0$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \Rightarrow d\bar{v} = \bar{a}\,dt = \int_{v_0}^{v(t)} d\bar{v} = \int_0^t \bar{a}\,dt$$

$$\bar{v}(t) - \bar{v}_0 = \bar{a}t \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t$$

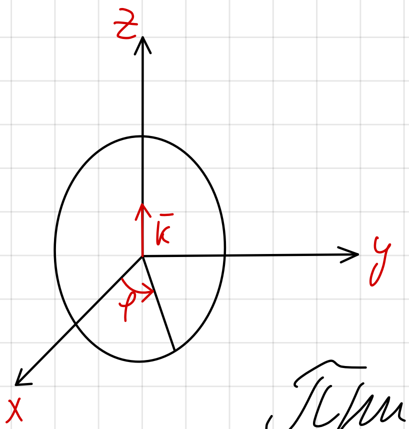
$$v = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = (\bar{v}_0 + \bar{a}t)\,dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} d\bar{r} = \int_0^t (\bar{v}_0 + \bar{a}t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2}}$$

2) Кинематика вращательного движения. Характеристики вращательного движения. Связь между линейными и угловыми характеристиками.

Вращательное движение вокруг оси — такое движение, при котором все малые части тела движутся по окружностям, плоскости которых ||, а центры окружностей лежат на одной прямой.

Угол поворота — угол на который поворачивается радиус в-р за время t



1) Угловая ск-ть: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$

$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{k}$

2) Угловое ускорение: $\bar{\varepsilon} = \lim \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{k}$

При равномерном движении по окр-ти вводят период (время одного полного поворота) и частоту (число оборотов в ед. времени)

$\nu = \frac{1}{T}$ - частота; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ - циклическая частота

$[\nu] = [Гц]$; $[\omega] = [\frac{1}{c}]$; $[\varepsilon] = [\frac{1}{c^2}]$

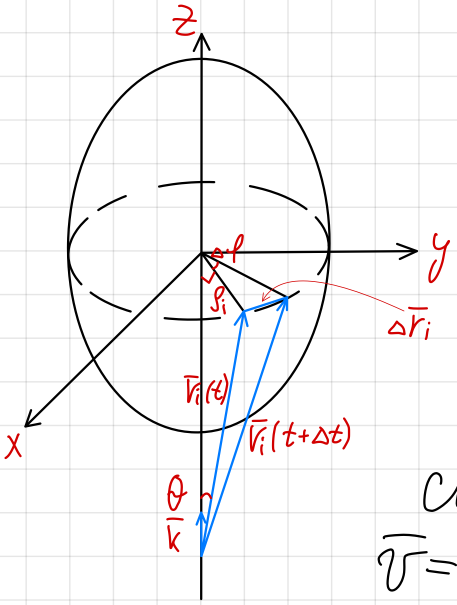
1) $\omega = const \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$

2) $\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t \end{cases}$ - равноускор.

$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t \end{cases}$ - равнозамед.

$$\boxed{\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_0 + \bar{\omega}_0 t + \frac{\bar{\varepsilon} t^2}{2}}$$

Связь между линейными и угловыми хар-ми:



1) $\bar{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$; $\Delta r_i = \rho_i \Delta \varphi = r_i \sin\theta_i \Delta\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow v_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_i}{\Delta t} = r_i \sin\theta_i \omega = \rho_i \omega$

т. е. $\boxed{v_i = \rho_i \omega}$

2) Т.к. направление лин. ск-ти служит по касательной, то получаем:

$\bar{v} = [\bar{\omega}, \bar{r}]$ - ф-ла Эйлера

$$\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{\omega}, \bar{r}] = \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}, \bar{r}_i\right] + \left[\bar{\omega}, \frac{d\bar{r}_i}{dt}\right] = [\bar{\varepsilon}, \bar{r}_i] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}, \bar{r}_i]] = a_\tau \cdot \bar{\tau} +$$

$$+ a_n \cdot \bar{n}, \quad a_\tau = \varepsilon r_i \sin\theta_i; \; a_n = \omega^2 \rho_i = \omega^2 r_i \sin\theta_i = \frac{v_i^2}{\rho_i}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\omega^4 \rho_i^2 + \varepsilon^2 \rho_i^2}$$

При движении по окружности a_n всегда отлично от 0, а a_τ появляется только при ускоренном движении $\Rightarrow$ движение по окружности всегда имеет ускорение

3) Понятие силы, импульса силы. Законы Ньютона

Пусть тело Б действует на тело А и в некоторой т-ке пространства передает телу А импульс. Тогда за промежуток Δt:

$$\Delta \bar{p}_A = \bar{F}_{AБ} \cdot \Delta t$$ – импульс силы

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{p}_A}{\Delta t} = \bar{F}_{AБ}$$

Сила – импульс, переданный телу А за ед. времени

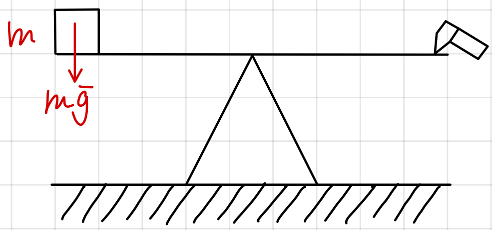
Хар-ки силы:

1) Величина (модуль)
2) Направление
3) Т-ка приложения

Если $F \to \infty$, то произв. $\neq 0$, поэтому вводят:

$$J = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ F \to \infty}} \bar{F} \Delta t$$ – сила удара

Ex: Импульсные весы Борна:



$$\Delta t: \Delta p \cdot N = F \Delta t = mg \Delta t$$

$$\Delta p = \lim_{\Delta t \to 0} F \Delta t = J \Rightarrow NJ = mg \Delta t \Rightarrow J = \frac{mg}{n}$$

$$n = \frac{N}{\Delta t}$$ n – частота

N – кол-во ударов.

Законы Ньютона:

1 З.Н: Во всех ИСО, если на тело не действуют другие тела либо их действие скомпенсировано, то тело находится в состоянии покоя либо равномерного прямолин. движения.

2ЗН: Во всех ИСО изменение импульса в ед. времени = сумме всех сил, действующих на тело:

$\frac{d\bar{p}}{dt} = \sum \bar{F}_i$ (Изменение импульса)

3ЗН: Во всех ИСО силы, с которыми 2 тела действуют друг на друга равны по величине, противоположны по направлению и приложены к разным телам:

$\Delta P_A = F_{AБ} \Delta t \Rightarrow \bar{F}_{AБ} = -\bar{F}_{БA}$

4) Закон сохранения импульса. Теорема об изменении импульса мех. системы.

ЗСИ:

Если на систему не действуют внешние силы, или их действие скомпенсировано, или оно происходит за б.м. промежуток времени, то импульс такой системы остается const:

$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$

Теорема об изменении импульса системы:

Пусть система — 1 тело. Разбиваем его на малые части. Такие, что каждая движется поступательно. Заменим действие малых частей друг на друга силами. Тогда внутр. силы — силы со стороны 1-й малой части на другую. Внеш. — силы, действующие на тело со стороны других тел, не входящих в систему.

i-я часть:

2ЗН: $\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{F}_i + \sum\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{F}_{ij} \Rightarrow \sum\limits_i \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \sum\limits_i \bar{F}_i + \sum\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{F}_{ij} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum\limits_i p_i\right)}_{\text{импульс системы}} = \sum\limits_i \bar{F}_i +$

$+ \sum\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} F_{ij} \Rightarrow \frac{d\bar{p}}{dt} = \sum\limits_i \bar{F}_i + \sum \bar{F}_{ij}$

$$\sum\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} F_{ij} = \sum\limits_{\substack{i,j \\ i<j}} F_{ij} + \sum\limits_{\substack{i,j \\ i>j}} F_{ij} = \{\text{меняем местами } i \text{ и } j\}$$

$$= \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \bar{F}_{ij} + \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \bar{F}_{ji} = \sum_{\substack{ij \\ i<j}} (\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji}) = \{\text{по 3 ЗН } \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}\} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\bar{p}}{dt} = \sum_i F_i}$$

Изменение импульса мех. системы в ед. времени = сумме внеш. сил, действующих на систему.

5) Центр масс мех. системы. Теорема о движении центра масс мех. системы.

Центр масс - т-ка, масса которой равна массе всей системы (или тела), а в-р ускорения ц. м. определяется только внеш. силами, действующими на систему (тело).

Теорема о движении ц. м. мех. системы.

$$\bar{r}_c = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

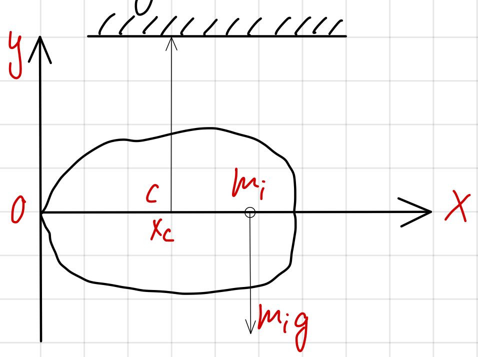
$$v_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \bar{v}_i}{\sum m_i}; \quad a_i = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\sum m_i \bar{a}_i}{\sum m_i}$$

$$\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \bar{v}_i}{\sum m_i}\right) = \frac{d\bar{p}}{dt}\cdot\frac{1}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum m_i \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \bar{p}_i\right) = \frac{d\bar{p}}{dt} = \sum \bar{F}_i, \text{ т.к.}$$

$$\sum m_i = M \Rightarrow \boxed{M\cdot\frac{d^2 r_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_i}$$

Т.е. ц.м. движется поступательно и только под действием внешних сил. Внутр. силы не могут изменить положение ц.м.

Центр тяжести - такая т-ка, подвесив за которую тело находится в покое в ∀ повернутом положении.



Относительно C:

$\mathcal{M}_i = m_i g h_i$, где $h_i = x_i - x_c$

$$\mathcal{M} = \sum_i \mathcal{M}_i = \sum_i m_i g (x_i - x_c) = g\sum_i m_i (x_i - x_c) =$$

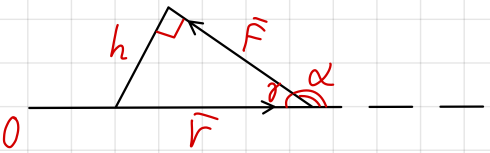
$$= g\left(\sum_i m_i x_i - x_c \sum m_i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad \bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$$

6) Момент силы, момент импульса системы, проекция момента импульса на ось. Теорема Гюйгенса-Штейнера, момент инерции

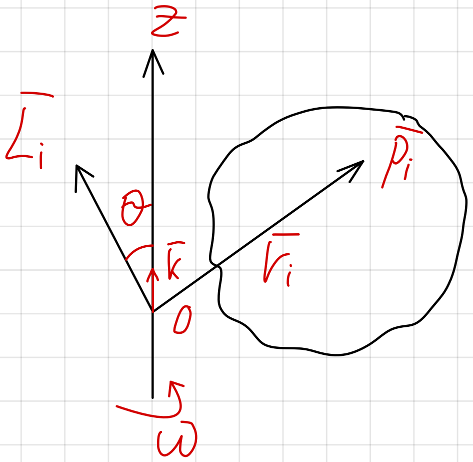
Мгновенный мех. мом. импульса: $\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i$; $\bar{L}_i = [\bar{r}_i, \bar{p}_i] = [\bar{r}_i, m_i \bar{v}_i] \Rightarrow \boxed{\bar{L} = [\bar{r}, m\bar{v}]}$

Мгновенный мом. силы : $\bar{M} = [\bar{r}, \bar{F}]$



$|M| = |[\bar{r}, \bar{F}]| = |\bar{r}||\bar{F}| \cdot \sin\alpha = |\bar{r}||\bar{F}|\sin(\pi - \gamma) = |\bar{F}||\bar{r}| \cdot \sin\gamma \Rightarrow \boxed{M = Fh}$

Проекция мом. импульса на ось:



$L_i = [r_i, p_i]$; $L_z = L\cos\theta = (\bar{L}, \bar{k}) = \sum_i ([\bar{r}_i, m_i \bar{v}_i], \bar{k}) = \sum_i ([\bar{k}, \bar{r}_i], m_i \bar{v}_i) = \frac{1}{\omega} \sum_i (\underbrace{[\omega\bar{k}, \bar{r}_i]}_{\substack{= v_i \\ \text{ф-ла} \\ \text{Эйлера}}}, m_i \bar{v}_i) = \frac{1}{\omega} \sum (v_i, m_i v_i) =$

$$= \frac{1}{\omega} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{\omega} \sum m_i (\omega \rho_i)^2 = \omega \sum \underbrace{m_i \rho_i^2}_{(*)}$$

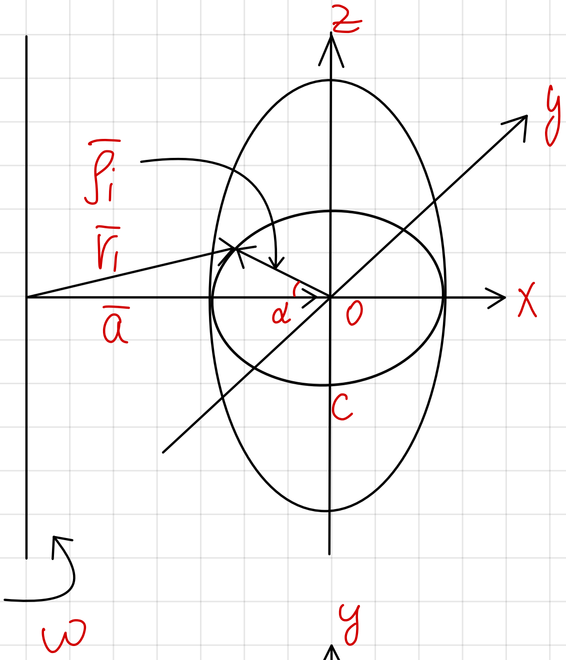
ρ_i - радиус окр-ти, по которой движется i-я частиц.

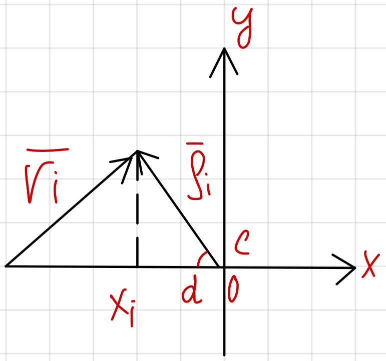
(*) - мом. инерции данного тела относительно данной оси.

Мом. инерции - мера инертности тела при вращательном движении:

$$\boxed{I_z = m r^2}$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера:





$$dJ = dm\,r^2$$

По т. cos:

$$r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\alpha$$

$$dJ = dm\,\rho^2 + dm\,a^2 - dm\cdot 2\rho a\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \int dm\,\rho^2 + \int dm\,a^2 - \int dm\,2\rho a\cos\alpha$$

Для $\int dm\,2\rho a\cos\alpha = 2a\int dm\,\rho\cos\alpha$

$$\rho\cos\alpha = x$$

$$\int dm\,\rho\cos\alpha = \int dm\,x = \left[x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right] =$$

$$= x_c\cdot m = 0! \Rightarrow J = J_c + a^2\int dm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = J_c + ma^2$$ ч.т.д.

7) Теорема об изменении мех. мом. импульса системы. Св-ва момента внутренних сил.

Изменение механического момента импульса системы за единицу времени равно сумме моментов внешних сил, действующих на систему, и сумме моментов внутренних сил, действующих м/у малыми частями системы

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i [\bar{r}_i, \bar{F}_i] + M_{внутр.}$$

Док-во (для одного тела):

$$\stackrel{i:}{=} \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{F}_i + \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \bar{F}_{ij} \Rightarrow \left[\bar{r}_i \frac{d\bar{p}_i}{dt}\right] = [\bar{r}_i, \bar{F}_i] + \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}]$$

$$\frac{d}{dt}[\bar{r}_i, \bar{p}_i] = \Big[\underbrace{\cancel{\frac{d\bar{r}_i}{dt}, \bar{p}_i}}_{0 \text{ т.к } \bar{v}_i \text{ сонапр } c\,\bar{p}_i}\Big] + \left[\bar{r}_i \frac{d\bar{p}_i}{dt}\right] \Rightarrow \frac{d}{dt}[\bar{r}_i, \bar{p}_i] = [\bar{r}_i, \bar{F}_i] +$$

$$+ \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}] \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_i [\bar{r}_i, \bar{p}_i]}_{=L}\Big) = \sum_i [\bar{r}_i, \bar{F}_i] + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [\bar{r}_i, F_{ij}]$$

$$\sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [\bar{r}_j, \bar{F}_{ji}] = \{\text{по 3-му З. Н.}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [\bar{r}_i, \bar{F}_{ij}] - \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [\bar{r}_j, \bar{F}_{ij}]\Big) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} [(\bar{r}_i - \bar{r}_j), \bar{F}_{ij}] =$$

$$= \bar{M}_{внутр} \quad \text{ч.т.д.}$$

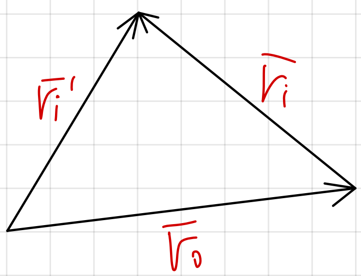
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i [\bar{r}_i, \bar{F}_i] + \bar{M}_{внутр} \quad \text{ч.т.д.}$$

Св-во момента внутр. сил: главный момент всех внутр. сил (относительно $\forall$ выбранного центра) в $\forall$ мом. времени $= 0$.

8) Теорема о независимости уравнения изменения мех. мом. импульса системы от выбора СО. У-е динамики вращательного движения

Изменение мех. мом. импульса имеет один и тот же вид во всех СО, которые покоятся относительно друг друга.

Док-во:



$r_i = const$

$\bar v_i' = \bar v_i$

$\bar r_i' = \bar r_i + \bar r_0$

$$\bar L' = \sum_i [\bar r_i' \bar p_i'] = \sum_i [(\bar r_i + \bar r_0), \bar p_i] = \sum_i [\bar r_i, \bar p_i] + \sum_i [\bar r_0, \bar p_i] = L + \sum_i [\bar r_0, p_i]$$

$$\frac{d\bar L'}{dt} = \frac{d\bar L}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_i [\bar r_0, p_i] = \frac{d\bar L}{dt} + \left[r_0, \frac{dp}{dt}\right] = \frac{d\bar L}{dt} + [\bar r_0, \bar F]$$

$$\bar M' = \sum [\bar r_i', \bar F_i'] = \sum_i [(\bar r_i + \bar r_0), F_i] = \sum [\bar r_i, \bar F_i] + \sum [\bar r_0, \bar F_i] = \bar M + [\bar r_0, \bar F] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\bar r_0, \bar F] = \bar M' - \bar M$$

$$\frac{d\bar L'}{dt} = \frac{dL}{dt} + \bar M' - \bar M$$

С учетом того, что мом. внутр. сил не зависит СО:

$$\frac{d\bar L'}{dt} - \bar M' = \frac{d\bar L}{dt} - \bar M \quad \text{ч.т.д.}$$

Если система — твердое тело, и оно вращается вокруг оси: $\bar L_z = J_z \omega$; $M_z = (\bar M, \bar k)$

Внутр. силы — центральные $\bar M_{внутр} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z \Rightarrow$

$\boxed{J_z \cdot \varepsilon = M_z = \sum_i M_{iz}}$ — осн. у-е динамики вращ. движения тела относ. Oz

9) Кинетическая энергия системы. Элементарная работа и мощность силы. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Кинетическая эн-ия — эн-ия видимого движения.

Кинет. эн-ия системы: $\bar{K} = \sum_i \bar{K}_i = \sum_i \frac{m v_i^2}{2}$

Если тело B действует на тело A с силой F_{AB}, и если т-ка приложения силы за время dt сместилась на $d\bar{r}$, то вместе с передачей импульса от тела B к телу A и независимо от него тело B передает эн-ию телу A в виде элементарной работы.

$\delta A = (\bar{F}_{AB}, d\bar{r})$, $[A] = [Дж]$

Мощность — работа, производимая действующей силой в ед. времени $[N] = [\frac{Дж}{с}] = [Вт]$, $N = \frac{F}{t}$

Теорема об изменении кинет. эн-ии:

Изменение кинет эн-ии системы за б.м. промежуток времени равно сумме элементарных работ внеш. и внутр. сил, действ. на систему

$$d\bar{K} = \sum(\bar{F}_i, d\bar{r}_i) + \sum_{\substack{i\,j \\ i \neq j}}(\bar{F}_{ij}, d\bar{r}_i), \text{ где } d\bar{r}_i = v_i dt$$

Док-во:

Разобьем тело на малые части, каждая из которых движется поступательно и заменим действие малых частей друг на друга силами:

2 ЗН для i-й части:

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{F}_i + \sum_j \bar{F}_{ij} \,\Big|\cdot \bar{v}_i \Rightarrow (v_i, \frac{dp_i}{dt}) = (F_i, v_i) + \sum_j (\bar{F}_{ij}, \bar{v}_i);$$

$$v_i \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{v}_i, m_i \bar{v}_i) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_i v_i^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{v}_i, m_i v_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{dv_i}{dt}, m_i v_i\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{v}_i, m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}\right) = \left(v_i, m_i \frac{dv_i}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum \frac{m_i v_i^2}{2}}_{\text{полная кинет эн-ия}} = \sum_i (\bar{F}_i, \bar{v}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, \bar{v}_i) \Rightarrow \frac{dk}{dt} = \sum_i (\bar{F}_i, \bar{v}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, \bar{v}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\bar{k} = \sum_i (\bar{F}_i, \bar{v}_i dt) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, \bar{v}_i dt) \Rightarrow d\bar{k} = \sum_i (\bar{F}_i, d\bar{r}_i) + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, d\bar{r}_i)$$

Замечание:

Работа внутр. сил:

$$\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, d\bar{r}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ij}, d\bar{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\bar{F}_{ji}, d\bar{r}_j) = \left\{\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} \bar{F}_{ij}\, d(r_i - r_j)$$

10) Потенциальные и непотенциальные силы. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел.

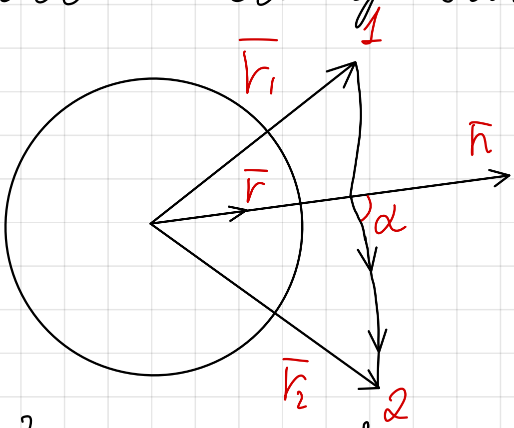
По тому, какую выполняют работу различные силы их можно разделить на 2 класса:

– Потенциальные (консервативные) – силы работа которых не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной т-ки $\Rightarrow$ работа потенц. силы по $\forall$ замкнутой траектории $= 0$.

Для потенц. силы элементарная работа равна полному дифф-лу со знаком – от некоторой ф-ции, которая называется потенц. э-ей.

– Непотенциальные – работа которых зависит от формы траектории

Работа сил гравитационного взаимодействия



$$\bar F = -G\frac{mM}{r^2}\cdot \bar n$$

$$\delta A = (\bar F, d\bar l) = -G\frac{mM}{r^2}(\bar n, d\bar l) = -G\frac{mM}{r^2}\cdot \underbrace{dl\cos\alpha}_{=dr} \Rightarrow \delta A = -G\frac{mM}{r^2}dr$$

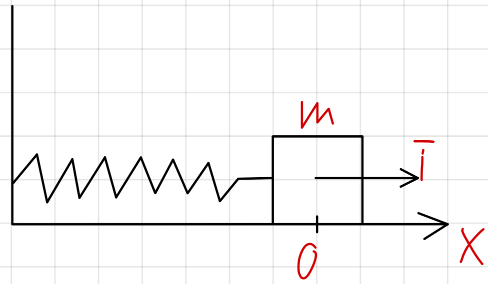
$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = -GMm\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$

$$\Delta K_{12} = A_{12} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{mM}{r_2} = \frac{mv_1^2}{2} - G\frac{mM}{r_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = -G\frac{mM}{r}$$

11) Потенциальная эн-ия упругой деформации пружины. Связь между потенциальной эн-ией и силой

Потенц. эн-ия упругой дефор пружины:



$$F = -kx\bar{i} \Rightarrow \delta A = (\bar{F}, d\bar{r}) = -kx\,dx$$

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = \frac{-kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2};$$

$$\Delta K_{12} = A_{12} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} \Rightarrow U = \frac{kx^2}{2}$$

Связь силы и потенциальной эн-ии:

$$\delta A = -dU(r);\ \delta A = (\bar{F}, d\bar{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dU(r) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

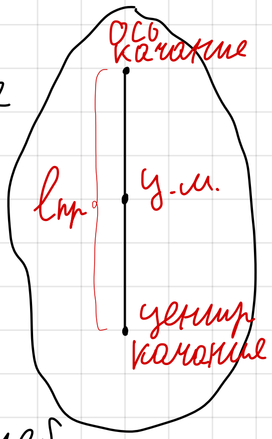
$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k} \Rightarrow \bar{F} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\bar{j} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\bar{k} = -\left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$$

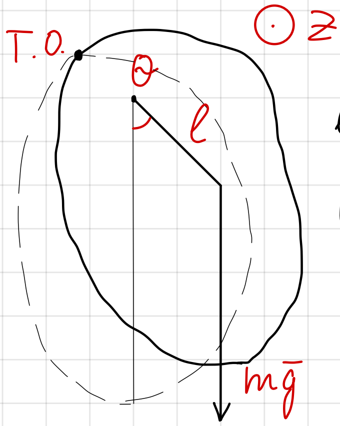
$$\cdot U(r) = -\nabla U(r) = -\operatorname{grad} U(r)$$

12) Физический маятник. Ось качаний, центр качаний, приведенная длина, период колебаний физического маятника.

Физ. маятник – ∀ твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси, не проходящей через ц.м.

$l_{пр}$ – длина такого матем. маятника, период колеб.



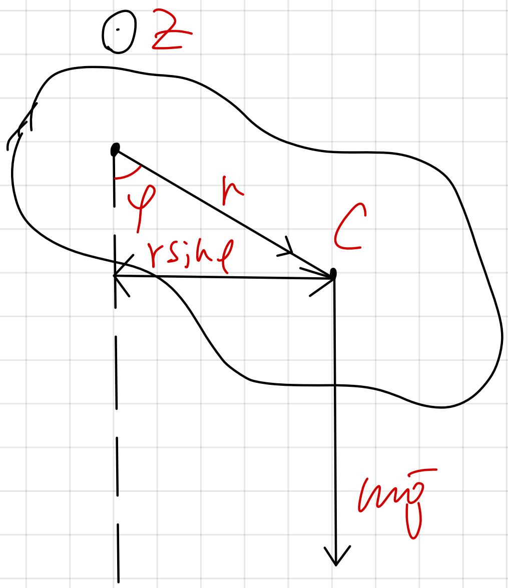


l – расстояние от оси подвеса до ц.м.

которого = периоду колебание данного физ. маятника.

Ось качание – ось, за которую подвесили маятник.

Период колебаний физ маятника:



Вывод:

$M = J\varepsilon$ – 2 3Н

$M = -mgr\sin\varphi \approx -mgr\varphi$

$J\cdot\ddot{\varphi} = -mgr\varphi \,|: J$

$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{mgr}{J}}_{\omega_0^2}\varphi = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{J}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}}$

13) Гармонические колебания. Их хар-ки. ДУ гармонических колебаний и его решение. Их энергия.

Гармонические колебания – колебания, у которых ∀ периодическая ф-ция представлена в виде определен. суперпозиции sin и cos.

$J\varepsilon_z = \sum_i M_{iz}$ $M_z = -mgl\sin\theta \Rightarrow J\varepsilon = -mgl\sin\theta \Rightarrow \{\varepsilon = \ddot{\theta}$ – 2-я производная угла$\} \Rightarrow J\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \{$т.к. θ – маленький, то $\sin\theta \approx \theta\} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ – ДУ гарм. колеб., с частотой ω_0

$\theta(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + B\sin(\omega_0 t + \varphi_0')$

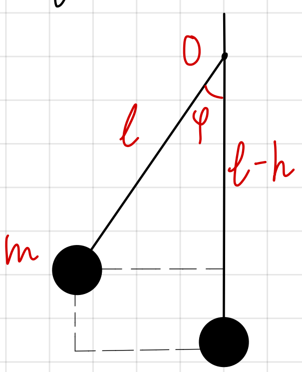
A – амплитуда колебаний, т.е. max отклонение физ. величины от положения равновесия.

ω_0 – цикл. частота колебаний – число колеб за 2π

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний – указывает положение физ. величины в данный момент времени.

Период $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ – промежуток времени, за который тело совершает 1 полное колебание.

Порядок ДУ, соотв. нач. усл. $(v_0 = 0, \theta = 0)$



$W_k + W_p = const$

$\frac{mv^2}{2} + mgh = const$

$v = \omega l = l\cdot\dot{\varphi}$

$l - h = l\cos\varphi \Rightarrow h = l(1-\cos\varphi) = l\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} =$

$= \left\{2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi^2}{2}\right\} = \frac{l\varphi^2}{2}$

$\frac{ml^2}{2}\cdot\dot{\varphi}^2 + mgl\cdot\frac{\varphi^2}{2} = E_0$ – энергия в нулевой момент времени =

$= const$; т.к. $W = const$, $W' = 0$

$ml^2\cdot\dot{\varphi}\cdot\ddot{\varphi} + mgl\varphi\cdot\dot{\varphi} = 0$

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$T_м = T_ф \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \Rightarrow l_{пр} = \frac{J}{ml}$;

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – решение ДУ

Замечание для полной энергии:

$\dot{\theta} = \omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow E = \frac{ml^2\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{mgl}{2}A^2\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$

$= \left\{\omega_0^2 = \frac{g}{l}\right\} = \frac{ml^2A^2g\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2l} + \frac{mglA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mglA^2}{2}$

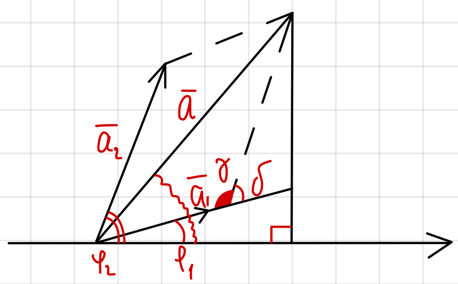
$\boxed{E \sim A^2}$

14) Сложение колебаний одного направления одинаковых и близких частот.

1) Сложение колебаний одного направления равных частот.

Складывать колебания будем с помощью векторной диаграммы.

$$+\begin{array}{l} x_1(t) = a_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2(t) = a_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \hline x(t) = a\cos(\omega t+\varphi) \end{array}$$



$\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2$; $\delta=\varphi_2-\varphi_1$

$\gamma=\pi-\delta$

$a^2=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\gamma=a_1^2+a_2^2-2\cdot$
$\cdot a_1a_2\cos(\pi-\delta)=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$

$$tg\,\varphi=\frac{a_1\sin\varphi_1+a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1+a_2\cos\varphi_2}$$

2) Сложение колебаний одного направления близких частот.

$\omega_1,\ \omega_2,\ \dfrac{|\omega_1-\omega_2|}{\omega_1}\cdot 100\% \simeq 5-6\%$

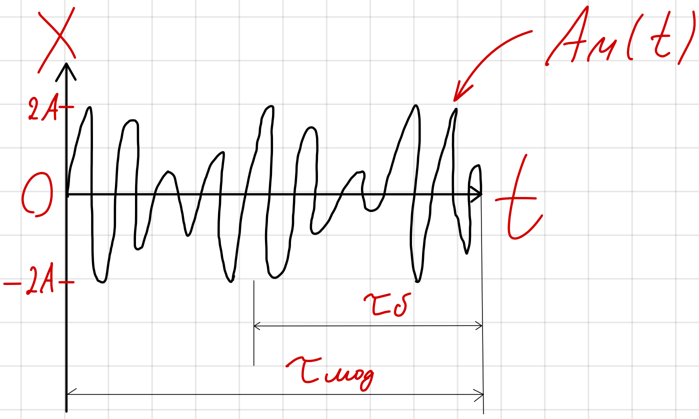
$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A[\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)]=2A\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot\right.$
$\left.\cdot t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$;

$\omega_{ср}=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ – средняя циклическая частота

$\omega_м=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$ – частота модуляции

$$x(t)=2A\cos(\omega_{ср}t)\cos(\omega_м t)$$

$x(t) = A_м(t)\cos(\omega_{ср} t)$, где $A_м(t) = 2A\cos(\omega_м t)$



$$\tau_{мод} = \frac{2\pi}{\omega_м}, \quad \tau_б = \frac{\tau_м}{2}$$

15) Сложение взаимоперпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$; $y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$, δ - разность фаз

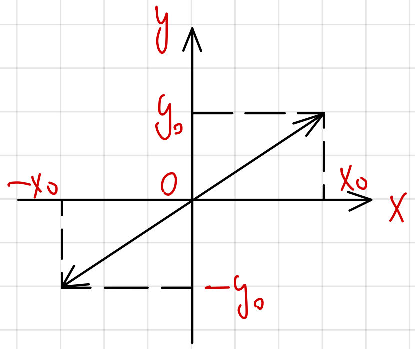
Если частоты кратные, то траектория движения - фигура Лиссажу

① δ (разность фаз) $= 0$

$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$

$y(t) = y_0 \cos\omega_0 t$

$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$

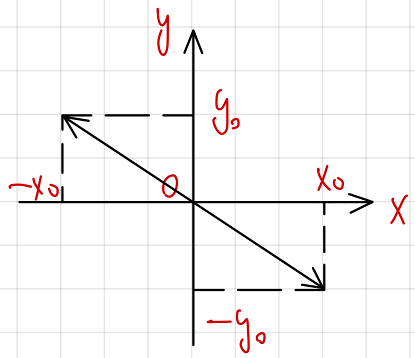


② $\delta = \Pi$

$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$

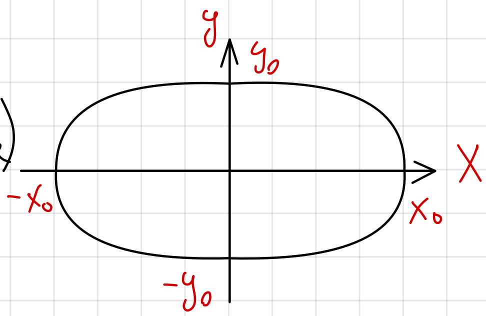
$y(t) = -y_0 \cos\omega_0 t$

$\frac{x}{y} = -\frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y = -\frac{y_0}{x_0} x$

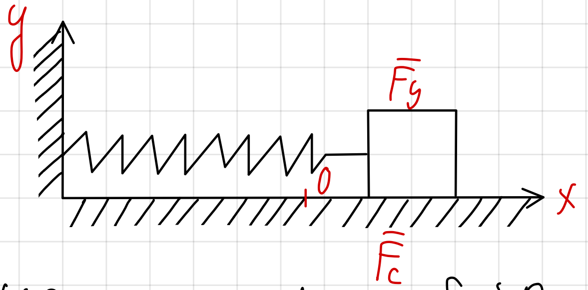


③ $\delta = \frac{\Pi}{2}$, $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$; $y(t) = -y_0 \sin\omega_0 t \Rightarrow \cos\omega_0 t = \frac{x}{x_0}$, $\sin\omega_0 t = -\frac{y}{y_0}$

$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$ (у-е эллипса)



16) Затухающие колебания. ДУ затухающих колебаний и его решение.



$\vec F_c = -b\vec v$

2 ЗН: $ma = -kx - bv \Rightarrow a + \frac{b}{m}v + \frac{k}{m}x = 0$

$\frac{b}{m} = 2\beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, ω_0 - частота незатух. колеб.; β - коэф. затухания.

$\ddot x + 2\beta\dot x + \omega_0^2 x = 0$, $x = Ce^{\lambda t}$, $\lambda, C = const \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

1) $\beta < \omega_0$

$\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - цикл. частота затух колеб.

$x(t) = e^{-\beta t}[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$

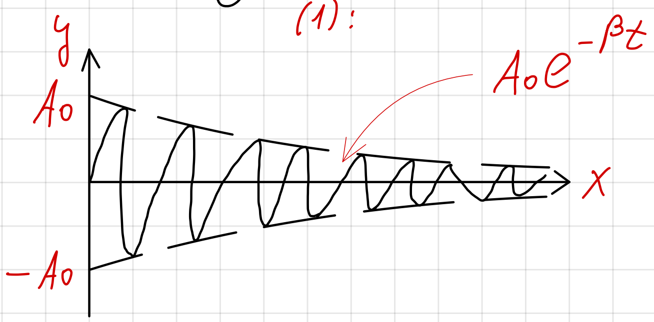
$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[C_1\cos\omega t + C_1 i\sin\omega t + C_2\cos\omega t - C_2 i\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1+C_2)\cos\omega t + i(C_1-C_2)\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1+C_2)\cdot \cos\omega t - i(C_2-C_1)\sin\omega t]$.

Пусть $C_1 + C_2 = A_0\cos\varphi_0$ и $i(C_2 - C_1) = A_0\sin\varphi_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[A_0\cos\omega t\cos\varphi_0 - A_0\sin\omega t\sin\varphi_0] = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

- у-е затух. колеб.

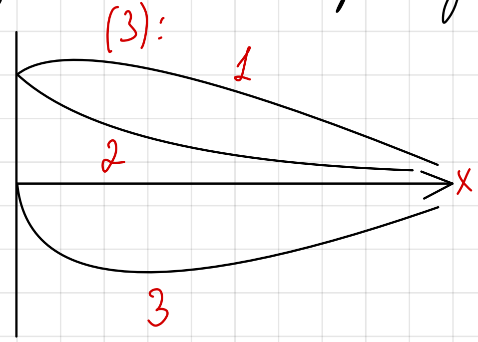
(1):



2) $\beta = \omega_0 \Rightarrow T \to \infty \Rightarrow$ колебание исчезают

3) $\beta > \omega_0 \Rightarrow x(t) = = e^{-\beta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$ - такое движение называется апериодичным.

(3):

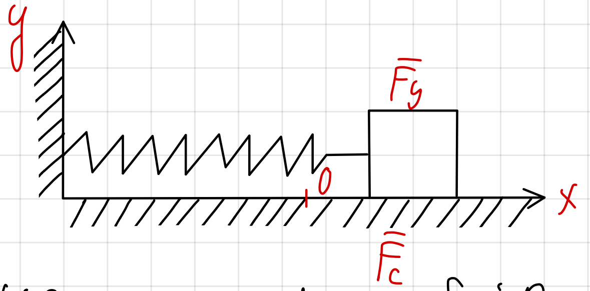


1: $v_0 > 0$

2: $v_0 \le 0$

3: $v_0 \ll 0$

17) У-е затухающих колебаний. Хар-ки затухающих колебаний



$\bar F_c = -b\bar v$

2 ЗН.: $ma = -kx - bv \Rightarrow a + \frac{b}{m}v + \frac{k}{m}x = 0$

$\frac{b}{m} = 2\beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, ω_0 – частота незатух. колеб.; β – коэф. затухания.

$\ddot x + 2\beta\dot x + \omega_0^2 x = 0$, $x = Ce^{\lambda t}$, $\lambda, C = const \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

1) $\beta < \omega_0$

$\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – цикл. частота затух колеб.

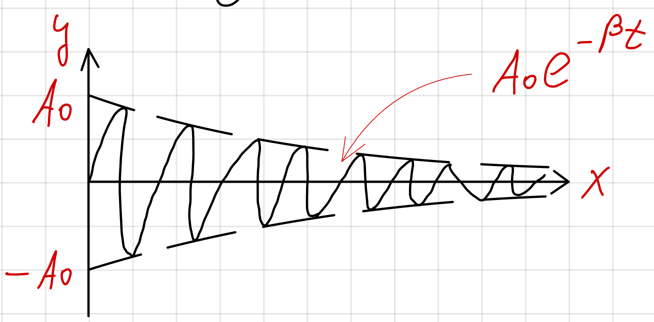
$x(t) = e^{-\beta t}[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$

$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[C_1\cos\omega t + C_1 i\sin\omega t + C_2\cos\omega t - C_2 i\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1+C_2)\cos\omega t + i(C_1-C_2)\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1+C_2)\cdot\cos\omega t - i(C_2-C_1)\sin\omega t]$.

Пусть $C_1 + C_2 = A_0\cos\varphi_0$ и $i(C_2 - C_1) = A_0\sin\varphi_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[A_0\cos\omega t\cos\varphi_0 - A_0\sin\omega t\sin\varphi_0] = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

– у-е затух. колеб.



Хар-ки затух. колеб.:

Амплитуда колебаний: $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$

Время затухания - время, за которое амплитуда уменьшается в e раз: $A_0 e^{-\beta t} = \frac{A_0}{e} \Rightarrow e^{-\beta t} = e^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$

Декремент затухания - во сколько раз A уменьшилась за T: $D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}$

Логарифмический декремент затух.: $\lambda = \ln D = \beta T$

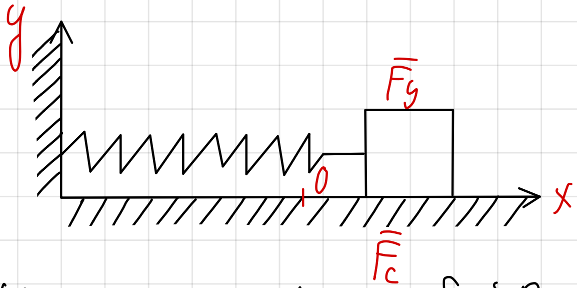
Число колебаний, за которое A уменьшится в e раз: $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}$

Добротность системы: $Q = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$ - для слабозатух. колеб.

$\beta << \omega_0 \Rightarrow Q = 2\pi \frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$; $e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T + \ldots +$;

$Q = \frac{2\pi}{1 - 1 + 2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$

18) Затухающие колебания. Их анализ.



$\bar{F}_c = -b\bar{v}$

2 ЗН: $ma = -kx - bv \Rightarrow a + \frac{b}{m}v + \frac{k}{m}x = 0$

$\frac{b}{m} = 2\beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, ω_0 – частота незатух. колеб.; β – коэф. затухания.

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $x = Ce^{\lambda t}$, $\lambda, C = const \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$\beta < \omega_0$

$\lambda = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – цикл. частота затух. колеб.

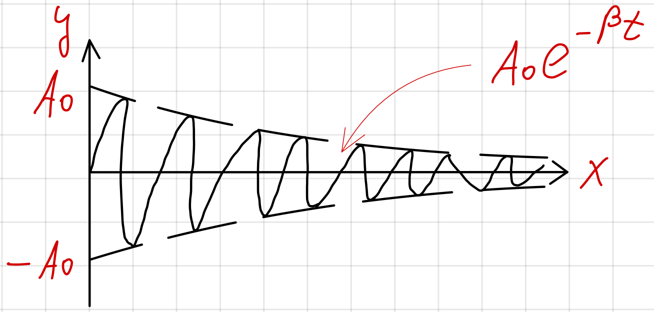
$x(t) = e^{-\beta t}[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$

$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[C_1\cos\omega t + C_1 i\sin\omega t + C_2\cos\omega t - C_2 i\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1+C_2)\cos\omega t + i(C_1-C_2)\sin\omega t] = e^{-\beta t}[(C_1+C_2)\cdot\cos\omega t - i(C_2-C_1)\sin\omega t]$.

Пусть $C_1 + C_2 = A_0\cos\varphi_0$ и $i(C_2 - C_1) = A_0\sin\varphi_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}[A_0\cos\omega t\cos\varphi_0 - A_0\sin\omega t\sin\varphi_0] = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$

– у-е затух. колеб.



Анализ затух. колеб.:

Амплитуда колебаний: $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$

Время затухания – время, за которое амплиту-

да уменьшается в e раз: $A_0 e^{-\beta\tau} = \frac{A_0}{e} \Rightarrow e^{-\beta\tau} = e^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$

Декремент затухания – во сколько раз A уменьшилась за T: $D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}$

Логарифмический декремент затух.: $\lambda = \ln D = \beta T$

Число колебаний, за которое A уменьшится в e раз: $N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}$

Добротность системы: $Q = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$ – для слабозатух. колеб.

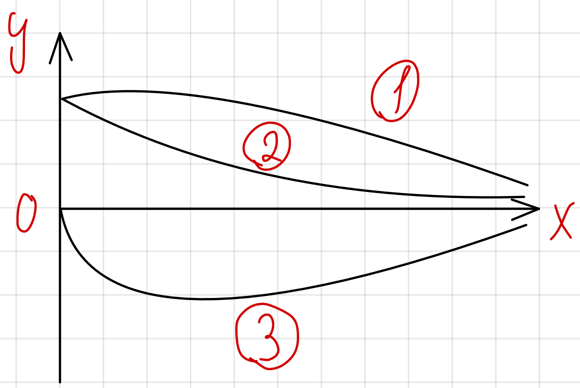
$\beta << \omega_0 \Rightarrow Q = 2\pi \frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$; $e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T + \ldots +$;

$Q = \frac{2\pi}{1 - 1 + 2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$

Чем выше добротность, тем ближе система к идеальной.

2) $\beta = \omega_0 \Rightarrow T \to \infty \Rightarrow$ колебания исчезают

3) $\beta > \omega_0 \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$, это такое движение называется апериодичным



① $v_0 > 0$

② $v_0 \leq 0$

③ $v_0 << 0$

19) Вынужденные колебания. Их ДУ, его решение и анализ

Вынужденные колебания происходят, когда на систему действует внешняя периодическая сила:

$ma = -b\upsilon - kx + F_0 \cos\omega t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\beta}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0}\cos\omega t$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$ – ДУ вынужд колеб.

Решение:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0 - \beta^2}\,t + \varphi_0)}_{\text{однород реш.}} + \underbrace{x_0\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{частное реш.}}$$

1-е слагаемое через некоторое время $\to 0$, поэтому установившиеся колеб. будут проходить по такому закону.

x_0 – амплитуда вынужд. колеб.

φ – сдвиг фаз между смещением x и вынужд. силой

$\frac{dx}{dt} = -x_0\omega\sin(\omega t + \varphi)$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$; $-x_0\omega^2\cos(\omega t+\varphi) - 2\cdot$

$\cdot\beta x_0\omega\sin(\omega t+\varphi) + \omega_0^2 x_0\cos(\omega t+\varphi) = f_0\cos\omega t$

Группировка:

$x_0(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t+\varphi) - 2\beta x_0\omega\sin(\omega t+\varphi) = \underline{x_0(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t\cos\varphi} -$

$- x_0(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t\sin\varphi - 2\beta x_0\omega\sin\omega t\cos\varphi - \underline{2\beta x_0\omega\cos\omega t\sin\varphi} =$

$= f_0\cos\omega t$

$[x_0(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega x_0\sin\varphi]\cos\omega t-[x_0(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi+x_0 2\beta\omega\cos\varphi]\cdot$

$\cdot\sin\omega t=f_0\cos\omega t$ – в $\forall$ мом. времени

2-я скобка должна быть $=0$

$$x_0[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi]=f_0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi+2\beta\omega\cos\varphi=0 \Rightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{f_0}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi} \\ tg\varphi=-\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{cases}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}};\quad \cos\varphi=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2-4\beta^2\omega^2}}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{z},\text{ где:}$$

$$z=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$$

$$\sin\varphi=\frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}=-\frac{2\beta\omega}{z}\Rightarrow x_0=\frac{f_0}{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{z}+\frac{4\beta^2\omega^2}{z}}=\frac{f_0 z}{z^2}=\frac{f_0}{z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

Анализ полученного решения:

1) $\omega\ll\omega_0$, $z\simeq\omega_0^2$; $\sin\varphi\to0$, $\cos\varphi\to1\Rightarrow\varphi=0$

В этом случае смещение совпадает с вынужд. силой по фазе

$$x_0=\frac{f_0}{\omega_0^2}=\frac{f_0 m}{k}=\frac{F_0}{k}=x_{ст}\text{ – статическое решение.}$$

2) $\omega\simeq\omega_0\Rightarrow\begin{cases}\sin\varphi\to-1\\ \cos\varphi\to0\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{2}$

Найдем частоту вынужд. силы, при которой амплитуда вынужд. колеб. – max.

$$\frac{dz}{d\omega}=0\Rightarrow-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\beta^2\omega=0\Rightarrow\omega^2=\omega_0^2-2\beta^2\Rightarrow\omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

резонансная частота

Резонанс - резкое возрастание амплитуды вынужд. колеб., когда частота вынужд. силы равна определенному значению, которое называется резонансной частотой.

(3) $\omega \gg \omega_0$

$$\left.\begin{aligned} &z \to \omega^2 \\ &\sin\varphi \to 0 \\ &\cos\varphi \to -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi \to -\pi \; ; \; x_0 = \frac{F_0}{\omega^2}$$

Смещение и вынужд. сила находятся в противофазе.

20) Механические волны, продольные и поперечные волны. У-е плоской волны. Характеристики волн. Волновое у-е.

Механическая волна - распространение возмущения в упругой среде

Продольные волны - если колебания малых частиц происходят вдоль распространения волны.

Поперечные - если направление колебаний малых частиц $\perp$ направлению распространению волны.

У-е плоской волны вдоль положительного направления Ox:

ω - частота колебаний, φ_0 - фаза, A - амплитуда

$\xi(0, t') = A\cos(\omega t' + \varphi_0)$; До коорд x колебания дойдут с опозданием на $\Delta t = \frac{x}{v}$, где v - ск-ть распространения фазы волны

$$\xi(x, t) = \varphi(0, t'), \text{ где } t = t' + \Delta t = t' + \frac{x}{v} \Rightarrow t' = t - \frac{x}{v}$$

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0)$$

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0)$$ - в полож направлении Ox

Характеристики волн

Амплитуда (A, м) - наибольшее отклонение ч-ки волны от линии распространения волны

Период (T, с) - время, за которое проходит одна волна

Частота (ν, Гц) - число волн за 1 секунду

Длина (λ, м) - расстояние, пройденное волной за 1 период колебаний ее частицы $\boxed{\lambda = vT}$

Скорость волны – скорость распространения колебаний $\boxed{v = \frac{\lambda}{T}}$

Волновое число (k, $\frac{рад}{м}$) – показывает, какое число длин волн укладывается на отрезке 2π $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Вывод волнового у-я:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right)$$

$$\alpha = t \mp \frac{x}{v} \Rightarrow \xi = f(\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\xi}{d\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{d\xi}{d\alpha} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{d\xi}{d\alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\alpha}\left(\mp\frac{1}{v}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp\frac{1}{v} \cdot \frac{d\xi}{dt}$$

– волновое у-е 1-го порядка.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{d t^2} &= \frac{d^2\xi}{d\alpha^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{d^2\xi}{d\alpha^2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \left(\mp\frac{1}{v}\right)\frac{d^2\xi}{d\alpha^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial \alpha^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Для общего случая, если волна распространяется под углом к декартовой С.К., то получим

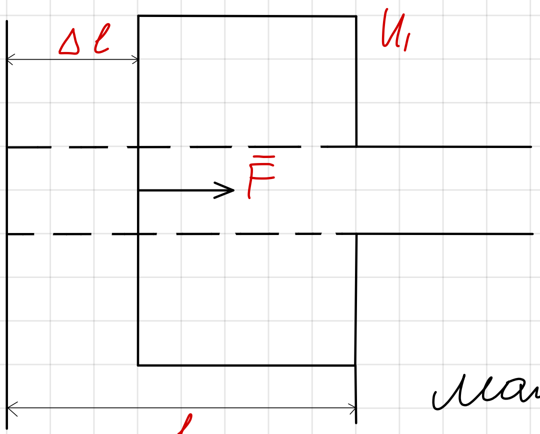
$$\underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}_{=\Delta} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – оператор Лапласа

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$ – волновое у-е 2-го порядка

21) Распространение продольной механической волны в твердом теле. Фазовая скорость, энергия волны, поток энергии, вектор Умова.

Ск-ть распространения волны в твердом стержне:



$\bar{F}$ - постоянная сила; малые части будут смещаться вдоль стержня => по стержню побежит волна. Будем считать, что все малые части движутся с постоянной ск-тью $\bar{u}$, а v (фазовая ск-ть) - ?

За время t торец стержня сместится на Δl, а за это время фронт волны сместится на l

Масса, участвующая в движении за время t - $M =$
$= \rho \Delta V = \rho S l = \rho S v t$

Импульс силы (2 з.Н.) = изменению импульса движения частей

$Ft = M \cdot u \Rightarrow F\cancel{t} = \rho S v \cancel{t} u$

По закону Гука: $F = \sigma \cdot S$, где σ - напряжение; $\boxed{\sigma = \frac{F}{S}}$

$F = \rho S v u \Rightarrow \sigma = \frac{\rho \cancel{S} v u}{\cancel{S}} = \rho v u$ $[\sigma] = [Па]$

Т.к. $\boxed{\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l}}$, где E - модуль Юнга $\Rightarrow E\frac{\Delta l}{l} = \rho v u \Rightarrow$
$\Rightarrow E\frac{\cancel{u}}{v} = \rho v \cancel{u} \Rightarrow v^2 = \frac{E}{\rho} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - ск-ть распространения волны в твердом теле

Энергия:

$$A = F \cdot \Delta l = \rho S \upsilon u \cdot ut = \rho u^2 \underbrace{S \upsilon t}_{=\Delta V} = \rho u^2 \cdot \Delta V$$

Эта работа ушла в потенциальную эн-ю упругих деформаций стержня и кинетическую эн-ю движения малых частей

$$K = \frac{mu^2}{2} = \frac{\rho S \upsilon t u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2} \Delta V$$

$$\Pi = \frac{k \Delta l^2}{2} = \left[F = \sigma S = E \frac{\Delta l}{l} S = \underbrace{\frac{ES}{l}}_{=k} \Delta l = k \Delta l \right]$$ связь коэф-та жесткости с модулем Юнга

$$= \frac{ES}{l} \cdot \frac{\Delta l^2}{2} = \frac{\rho}{2} \cdot \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{=\upsilon^2} \cdot \frac{S \Delta l^2 l}{l^2} = \frac{\rho \cancel{\upsilon^2} S l \Delta l^2}{2t^2 \cancel{\upsilon^2}} = \frac{\rho \Delta l^2}{2t^2} \cdot \underbrace{Sl}_{=\Delta V} =$$

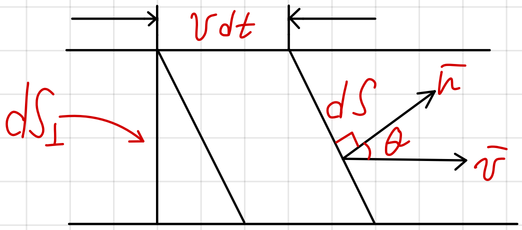
$$= \frac{\rho u^2}{2} \cdot \Delta V \Rightarrow E_{полн} = K + \Pi = \rho u^2 \Delta V$$

Поток энергии – энергия, пересекающая данную поверхность в ед. времени $\perp$-на этой пов-ти.

$$\Phi_S = \frac{dE}{dt}$$

Док-во:

Найдем эн-ию, пересекающую пов-ть dS за время dt



плотность энергии э.м. волны

$$d\bar{S} = dS \cdot \bar{n}; \; dE = \omega dS_\perp$$

$$dE = \omega \upsilon \, dt \, dS \cos\theta = \omega dt (d\bar{S}, \bar{\upsilon})$$

раскрытое скалярное произведение

Вектор Умова:

$$y = \frac{dE}{dS_\perp dt}$$ – плотность потока энергии $= \omega \upsilon \Rightarrow \bar{y} = \omega \bar{\upsilon}$

22) Стоячие волны. У-е стоячей волны, условие образования стоячей волны. Энергия стоячей волны.

В случае сложения когерентных волн происходит явление интерференции, т.е перераспределение энергии в разных т-ках пространства

Мех. волны являются когерентными, если у них одинаковые частоты.

При сложении волн, бегущих навстречу друг другу, возникает стоячая волна

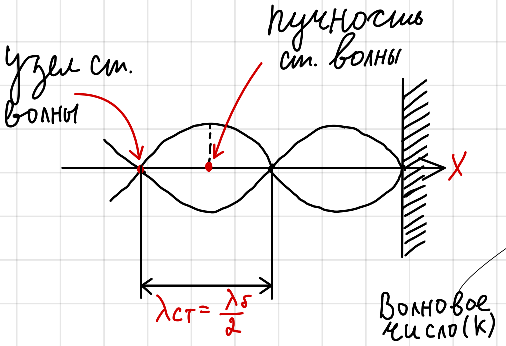
$$\xi_1(x,t)=A_0\cos(\omega t-kx)$$

$$\xi_2(x,t)=A_0\cos(\omega t+kx)$$

$$\xi(x,t)=\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)$$

$\xi(x,t)=2A_0\cos kx\cos\omega t$ – у-е стоячей волны, где

$A=2A_0\cos kx$ – амплитуда стоячей волны (*)



$\cos kx=0$ – Узел, где $kx=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n=0,1\ldots$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x=\frac{\cancel{\pi}(1+2n)}{2}\Rightarrow x=\frac{\lambda(1+2n)}{4}$$

Из (*)

$|\cos kx|=1$ – условие пучности

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x=\cancel{\pi}n\Rightarrow x=\frac{\lambda n}{2}$$

Расстояние м/у 2-мя соседними узлами называется длиной стоячей волны ($\lambda_{ст}$)

Энергия стоячей волны на примере струны:

Скорости малых частей:

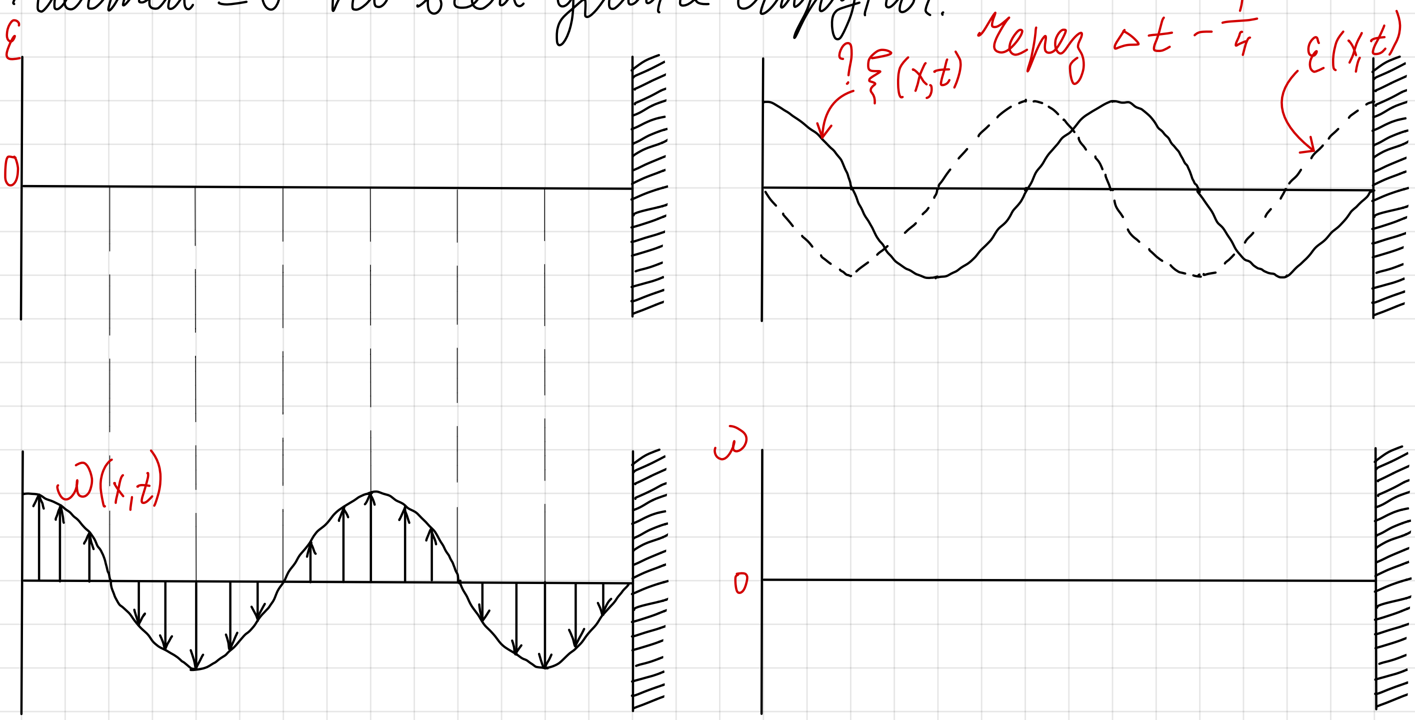
$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2A\omega \cos kx \sin \omega t = 2A\omega \cos kx \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

ε - деформация струны

$\varepsilon - \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2Ak \sin kx \cos \omega t = 2Ak \cos(kx + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos \omega t$

Узлы и пучности скорости совпадают со смещением, но опережают по времени на $\frac{\pi}{2}$, а узлы и пучность деформации сдвинуты на $\frac{\pi}{2}$ по координате.

В некоторый момент времени деформация малых частей $= 0$ по всей длине струны.



Когда ск-ти малых частей $= 0$, вся энергия волны - это эн-ия упругой деформации струны.

И наоборот: когда деформация отсутствует, вся энергия волны - это кинетическая эн-ия малых частей струны

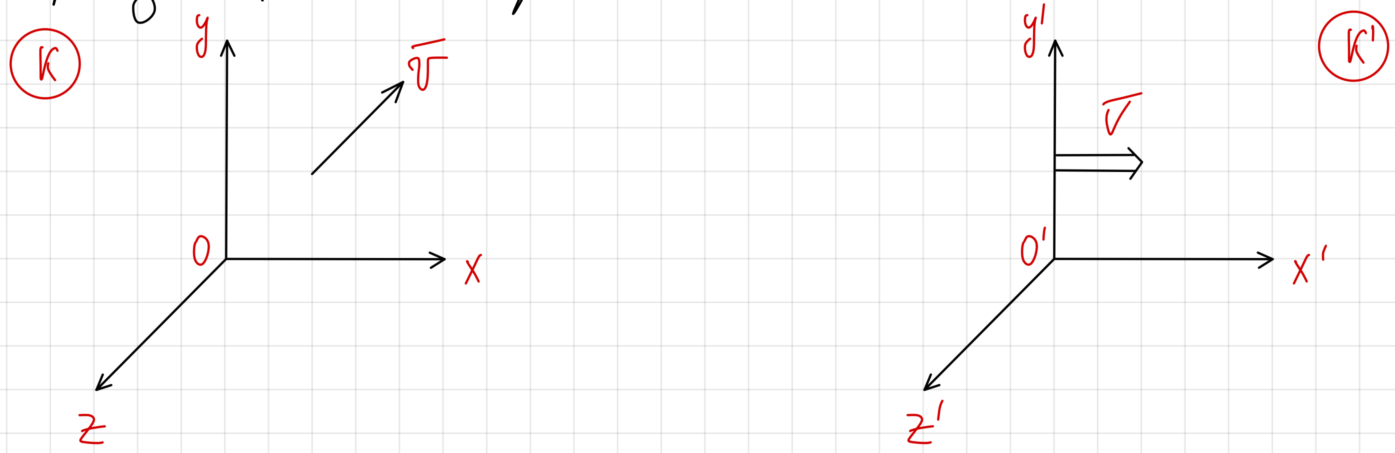
Таким образом, эн-ия перетекает из пучностей в узлы и наоборот $\Rightarrow$ поток эн-ии за период будет $= 0$

23) Инерциальные системы отсчета (ИСО). Преобразования Галилея. Механический принцип относительности.

Инерциальные системы отсчета - системы, в которых выполняется закон инерции (тело покоится или движется равномерно и прямолинейно.)

Преобразования Галилея:

Рассмотрим ИСО. Расстояние м/у 2-мя т-ками одинаковое во всех ИСО. Промежуток времени м/у 2-мя событиями одинаковый во всех ИСО. Если какая-то величина не зависит от выбора С.О, то ее называют инвариантной.



K - неподвижная С.О. ; K' - подвижная С.О.

В момент времени $t=0$ $0 \equiv 0'$

В любой другой момент:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x' = v_x - V \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = \vec{a}} \text{ - inv}$$

У-е 2 З.Н. имеет один и тот же вид во всех ИСО, т.е является инвариантом => вытекает:
Механический принцип относительности:
Никакими мех. экспериментами нельзя обнаружить, движется С.О. или покоится. Распространение волн не является инвариантом к преобразованиям Галилея. Лоренц создал преобразование, в котором волна является инвариантом.

24) Постулаты СТО. Преобразования Лоренца. Интервал, сокращение длины

Постулаты СТО:

① Все физические процессы протекают одинаково во всех ИСО

② Ск-ть света в пустоте одинакова во всех ИСО

Преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}};\quad y' = y;\quad z' = z;\quad t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Первый inv-интервал м/у 2-мя событиями ① и ②

① $t_1; x_1; y_1; z_1$ — произошла вспышка света

② $t_2; x_2; y_2; z_2$

K: $S_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ — путь, где $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$

K': $S'^2_{12} = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$

Д-ть: $S_{12} = S'_{12}$

Док-во:

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = \frac{c^2\left(t_2 - \frac{x_2V}{c^2} - t_1 + \frac{x_1V}{c^2}\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{(x_2 - Vt_2 - x_1 + Vt_1)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} =$$

$$= \left[\text{введем обозначение: } \beta = \frac{V}{c};\ t_{21} = t_2 - t_1;\ x_{21} = x_2 - x_1 \right] =$$

$$= \frac{c^2}{1-\beta^2}\left(t_{21} - \frac{V}{c^2}x_{21}\right)^2 - \frac{(x_{21} - Vt_{21})^2}{1-\beta^2} = \frac{c^2}{1-\beta^2}\left(t_{21} - \frac{V}{c^2}x_{21}\right)^2 -$$

$$- \frac{(x_{21} - Vt_{21})^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 t_{21}^2 + \frac{V^2 x_{21}^2}{c^2} \cancel{- 2Vt_{21}x_{21}} - x_{21}^2 \cancel{+ 2Vx_{21}t_{21}} -\right.$$

$$\left. - t_{21}^2 V^2 \right] = \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2 t_{21}^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - x_{21}^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] = c^2 t_{21}^2 - x_{21}^2 =$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \Rightarrow S'_{12} = S_{12} - inv$$

Сокращение длины:

Пусть есть стержень, движущийся вдоль Ox со скоростью V относительно лабораторной С.О. (K).

В С.О. (K'), которая также движется со ск-ью V относ. (K), этот стержень покоится и его длина $= l_0$

В (K): x_1 и x_2 - к-ты концов стержня.

В (K'): x_1' и x_2' время одно и то же

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

25) Постулаты СТО. Замедление времени, преобразование компонента скорости.

Постулаты СТО:

1) Все физические процессы протекают одинаково во всех ИСО

2) Скорость света в пустоте одинакова во всех ИСО

Изменение промежутка времени (замедление):

Пусть есть часы, которые движутся со ск-тью V вдоль OX относительно И.С.О (k). Тогда в системе (k'), которая тоже движется со ск-тью V относ. (k), часы покоятся $\Rightarrow x' = const$. Тогда промежуток времени м/у 2-мя событиями равен τ_0

Это же изменение времени в (k) происходит в разных т-ках x_1 и x_2 в соответствующий момент времени t_1 и t_2

$$\tau_0 = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{x_2 V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{x_1 V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} =$$

$$= (t_2 - t_1)\cdot\frac{\left[1 - \frac{V}{c^2}\boxed{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{=V}\right]}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{(t_2-t_1)\left[1-\frac{V^2}{c^2}\right]}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \tau\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Преобразование компонент ск-ти:

(k') движется относ (k) со ск-тью V. В (k) движется тело со ск-тью U. Компоненты его ск-ти:

$$U_x = \frac{dx}{dt};\ U_y = \frac{dy}{dt};\ U_z = \frac{dz}{dt}$$

$$U_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{dt - \frac{Vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{Vdx}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{Vdx}{dt\cdot c^2}} = \frac{U_x - V}{1 - \frac{VU_x}{c^2}} \Rightarrow U_x' = \frac{U_x - V}{1 - \frac{VU_x}{c^2}}$$

$$U'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{VU_x}{c^2}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{Vdx}{c^2 dt}} \Rightarrow U'_y = \frac{U_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{VU_x}{c^2}}$$

$$U'_z = \frac{U_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{VU_x}{c^2}}$$

26) СТО. Полная энергия частицы, энергия покоя. Связь м/у полной энергией и импульсом, кинетической энергией и импульсом

Постулаты СТО:

① Все физические процессы протекают одинаково во всех ИСО

② Ск-ть света в пустоте одинакова во всех ИСО

Энергия частицы: $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, m_0 – масса покоя частицы

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – релятив. масса

Энергия покоя: $E_0 = m_0 c^2$

Импульс: $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Связь между полной эн-ей и импульсом:

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2 - m_0^2 c^2 + m_0^2 c^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^2 - m_0^2 c^2 (1-\beta^2)}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^2}{1-\beta^2} - m_0^2 c^2 \Big| \cdot c^2$$

$$c^2 p^2 = \underbrace{\frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2}}_{=E^2} - m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4$$

Связь между кинет эн-ей и импульсом:

$$K = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 \text{ – кинет. эн-ия}$$

$$(K + E_0)^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4$$

$$(K + m_0 c^2)^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4$$

$$K^2 + 2K m_0 c^2 + \cancel{m_0^2 c^4} - c^2 p^2 = \cancel{m_0^2 c^4}$$

$$c^2 p^2 = K^2 + 2K m_0 c^2$$

27) Т.Д. системы. Равновесное состояние простой Т.Д. системы. У-е Менделеева Клапейрона. Т.Д. диаграммы. Работа идеального газа в изотермическом процессе.

Т.Д. системы бывают простые и сложные
Т.Д. система (Т.с.) называется простой, если состоит из одного хим. стабильного в-ва (Ex: вода в стакане)
Сложная (Ex: аккумулятор)

По взаимодействию с окружением системы м. б. открытыми и закрытыми
Открытая, если Т.С. может обмениваться с окружением массами в-ва, входящего в систему
Система, которая не может обмениваться массами - закрытая

По фазовому состоянию системы могут быть 1-фазными, 2-фазными, 3-фазными
Фаза - газообразная, жидкая и твердая.

Равновесное состояние простой Т.С.:
Разобьем систему на малые части, которые непрерывно примыкают друг к другу:
p_i - давление малой части $[p]=[Па]$
T_i - темп. малой части
v_i - скорость видимого движение малой части

Равновесное состояние простой Т.Д. системы

Характеризуется этими параметрами:

1) $v_1 = v_2 = \ldots = v_i = \ldots = 0$

2) $p_1 = p_2 = \ldots = p_i = \ldots = p$ (в пренебрежении $F_{тяж}$)

3) $T_1 = T_2 = \ldots = T_i = \ldots = T$

При выполнении всех этих условий Т.С. находится в состоянии внутреннего равновесия, а если кроме этого p и T системы совпадают с p и T окружения, то система находится во внешнем равновесии.

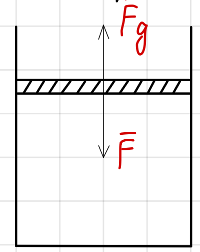
У-е Менделеева-Клапейрона:

Равновесное состояние можно однозначно описывать 2-мя параметрами pV, pT (VT - ф-ция первых 2-х)

$pV = \frac{m}{\mu}RT$, где p - давление газа, V - объем, m - масса, μ - молярная масса, T - температура (К), R - универсальная газовая постоянная $[\mu] = [кг/моль]$

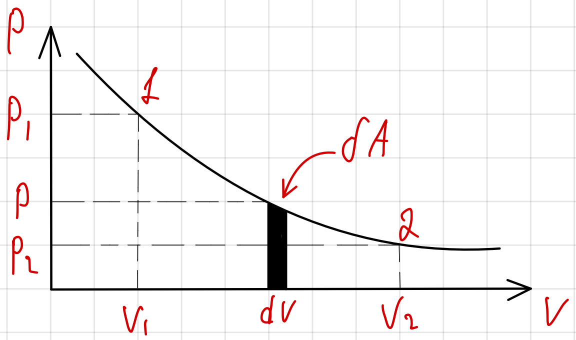
Работа идеального газа в изотермическом процессе:

$\delta A = p\,dV$; Нет трения и массы поршня. Поршень под действием F очень медленно двигается $\delta A = F_g\,dh = p\underbrace{S\,dh}_{=dV} = p\,dV$, F_g - сила давления $= pS$



Ex: $T = const$

$$\delta A = p\,dV \Rightarrow A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV$$



$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p(V) = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \{pV = const\} =$$

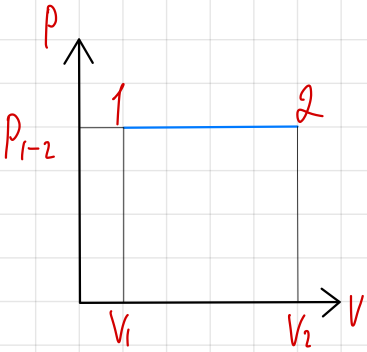
$$= \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Работа газа м. б. как >0, так и <0

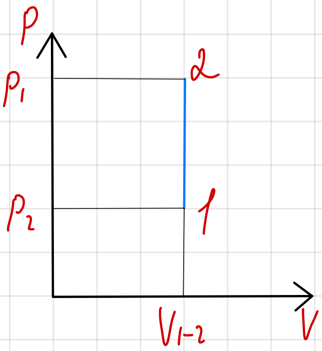
Работа, совершенная окружением над системой:

$\delta A' = -\delta A$, где δA - работа системы

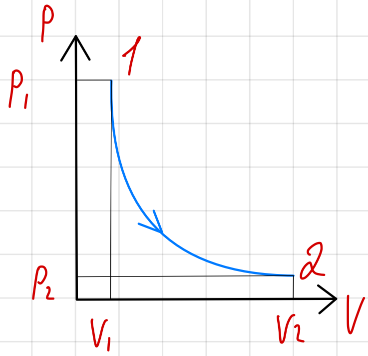
Т. Д диаграммы в системе PV:



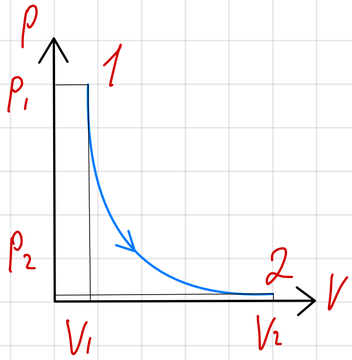
Изобарный ($P = const$)



Изохорный ($V = const$)



Изотермический ($T = const$)

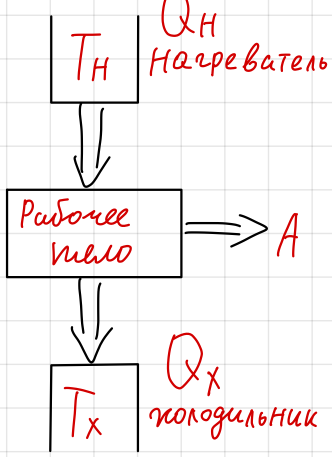


Адиабатический ($\delta Q = 0$)

28) Цикл Карно. Первое начало Т.Д. Механический эквивалент тепла. Эксперимент Джоуля

Цикл Карно:

Рассмотрим простую Т.С. (ид. газ под поршнем)



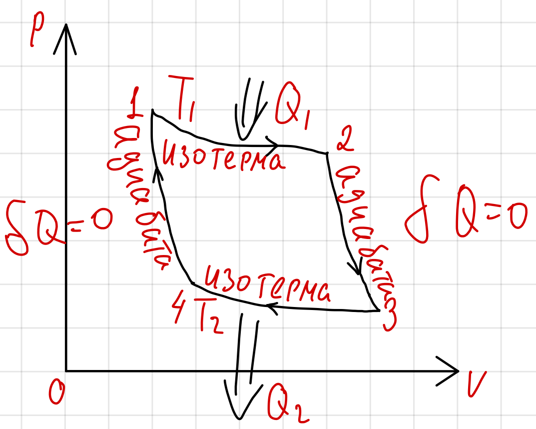
1) Приведем систему в соприкосновение с нагревателем и дадим газу поработать над окружением. При этом газ не имеет Т

2) Отводим рабочее тело от нагревателя. При этом газ продолжает работать над окружением, и его Т падает до $T_{хол}$.

3) Приводим систему в контакт с холодильником и совершаем работу над системой, не изменяя ее Т. При этом система отдает часть тепла хол-ку.

4) Отводим систему от хол-ка. При этом газ продолжает сжиматься => его Т увеличивается до T_H

Тепловая машина, работающая по такому цикл. процессу, называется машиной Карно



1-е начало Т.Д.:

По Томсону: невозможна тепловая машина, работающая с простой Т.С., которая бы за цикл совершила отличную от 0 работу над окружением и при этом за этот цикл не брала бы от окружения никакой теплоты.

$$\boxed{Q = \Delta U + A} \quad \text{или} \quad \boxed{\delta Q = dU + \delta A}$$

Мех. эквивалент тепла:

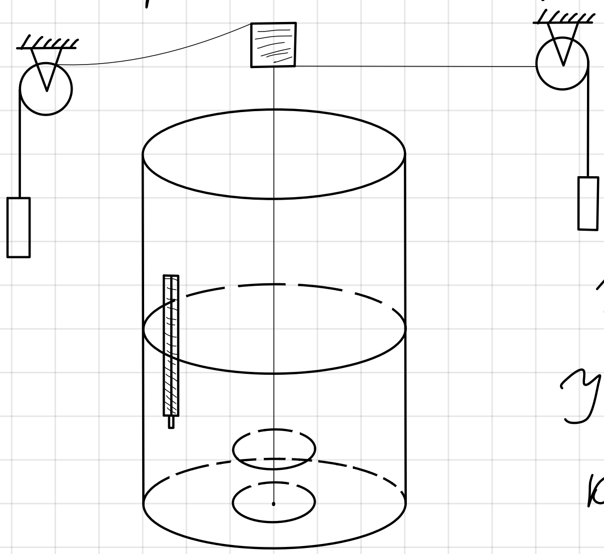
Для $\forall$ цикла Карно, совершаемого над простой Т.С., отношение работы, совершаемой системой над окружением, к теплу, полученному системой за цикл, - есть величина постоянная и имеет одно и то же значение

$$J = \frac{A}{Q_1' - Q_2'} = const \Rightarrow A = J(Q_1' - Q_2') = Q_1 - Q_2, \text{ где } Q = JQ'$$

$$[A] = [\text{Дж}], \quad [Q'] = [\text{кал}]$$

Вывод: работа и кол-во теплоты являются проявлением энергии.

Эксперимент Джоуля:



При движении грузов вниз $F_{тяж}$ совершает работу. При этом вода нагревается

$$J = 4{,}16 \frac{\text{Дж}}{\text{кал}} \quad J_{сов} = 4{,}19 \frac{\text{Дж}}{\text{кал}}$$

J - коэффициент перехода от Дж. к кал.

29) Второе начало Т.Д. Теорема Карно-Клаузиуса и теорема Томсона. Теорема 1 для квазиравновесного циклического процесса

2-е начало Т.Д.:

По Томсону: невозможна тепловая машина, работающая с простой Т.С., которая бы за 1 цикл совершила отличную от 0 работу над окружением, при этом брала бы тепло нагревателя и не отдавала бы части тепла холодильнику, при этом не производя никаких изменений в окр. среде

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}}$$

Теорема Карно-Клаузиуса:

Для $\forall$ цикл. процесса отношение теплоты, полученной от нагревателя к теплу отданному хол-ку, является ф-цией температур нагревателя к хол-ку.

В развитии этой теоремы Томсон доказал, что:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

работа за цикл

К.П.Д. тепловой машины: $\eta = \frac{A}{Q_H} \cdot 100\%$

суммарная теплота, поступившая в систему

Для цикла Карно:

$$A = Q_H - Q_X \Rightarrow \eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{Q_X}{Q_H}\right) \cdot 100\%$$

т.к. $\frac{Q_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H} \Rightarrow \eta = \left(1 - \frac{T_X}{T_H}\right) \cdot 100\%$

Выводы:

1) К.П.Д. не зависит от рабочего тела

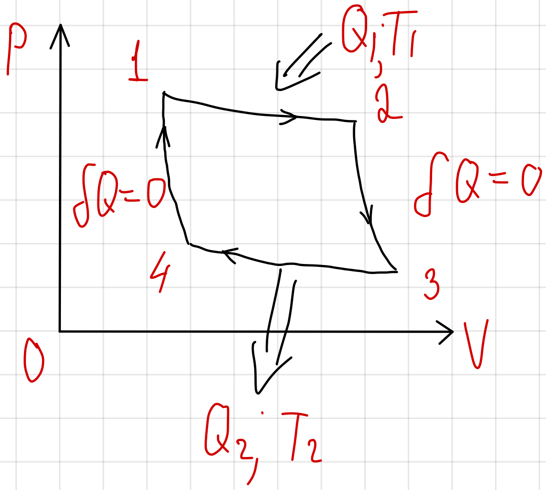
2) К.П.Д. не зависит от того, как идут адиабаты

и изотермы, т.е. можно рассматривать ∞-но малый цикл Карно

1-е Т.Д. теорема для квазиравновесного цикл. процесса:

Для $\forall$ квазиравновесного цикл. процесса сумма работы, совершенной окружением над системой и теплоты, полученной системой от окружения за цикл равна 0: $\oint(\delta A' + \delta Q) = 0$

Докажем сначала для цикла Карно:



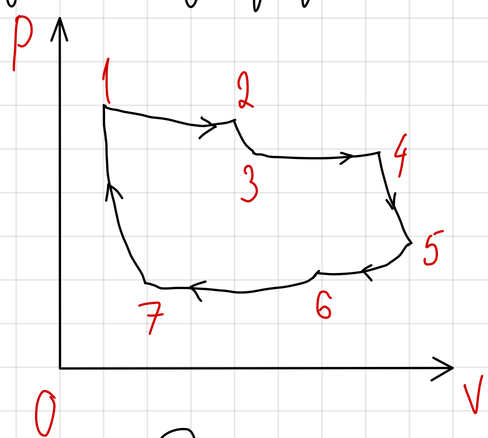
$$\begin{cases} \oint \delta A' = A_2' = -A \\ \oint \delta Q = \int_1^2 \delta Q + \cancel{\int_2^3 \delta Q}^{\,0} + \int_3^4 \delta Q + \cancel{\int_4^1 \delta Q}^{\,0} = Q_1 - Q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = -A + Q_1 - Q_2$$

По теореме о мех. эквиваленте тепла: $A = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = -A + A = 0$

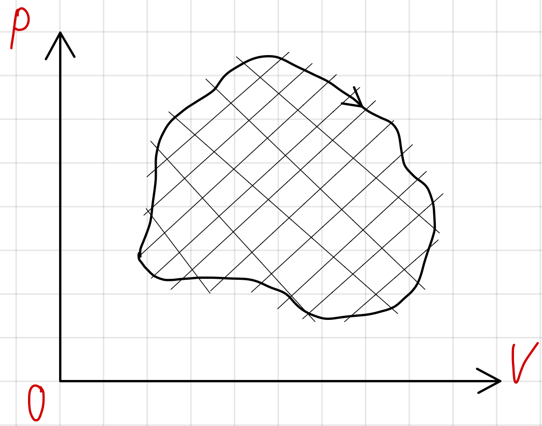
Докажем для 2-х циклов Карно, прикасающихся друг к другу



$$\left.\begin{aligned} &\oint \delta A' = -A_1 - A_2 \\ &\oint \delta Q = \underline{Q_{12}} + \underline{\underline{Q_{34}}} - \underline{\underline{Q_{56}}} - \underline{Q_{67}} = A_1 + A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = 0$

Разобьем на ∞ циклов Карно.



$$\oint(\delta A' + \delta Q) = \sum_{k=1}^{n}(\delta A' + \delta Q) = 0$$

При $n \to \infty$ мы доказали теорему

ч. т. д.

30) Второе начало Т.Д.. Теорема 2 для квазиравновесного процесса.

2-е начало Т.Д:

По Томсону: невозможна тепловая машина, работающая с простой Т.С., которая бы за 1 цикл совершила отличную от 0 работу, при этом брала бы тепло нагревателя и не отдавала бы части тепла холодильнику, при этом не производя никаких изменений в окр. среде

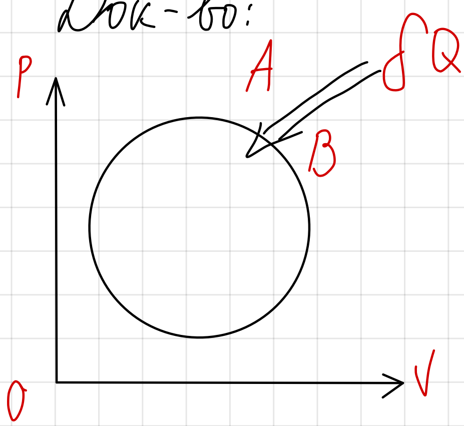
$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}} \qquad [S] = \left[\frac{Дж}{моль \cdot K}\right]$$

2-я Т.Д. теорема:

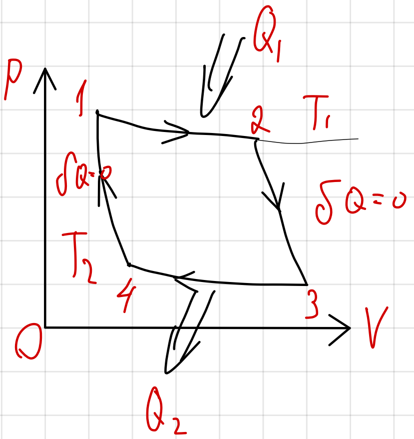
Для ∀-го циклического квазиравновесного процесса, совершаемого с простой Т.С., справедливо следующее равенство:

$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$, δQ - тепло, получаемое системой на ∞-но малом элементе этого процесса

Док-во:



$T_A \simeq T_B \simeq T$



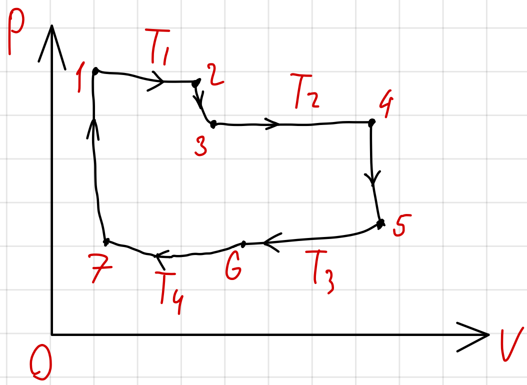
$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \cancelto{0}{\int_2^3 \frac{\delta Q}{T}} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \cancelto{0}{\int_4^1 \frac{\delta Q}{T}} =$$

$$= \frac{1}{T_1}\underbrace{\int_1^2 \delta Q}_{=Q_1} + \frac{1}{T_2}\underbrace{\int_3^4 \delta Q}_{=Q_2} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} =$$

$$= \frac{Q_1}{T_2}\left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_2}{Q_1}\right)$$

— по теореме Карно-Клаузиуса и в развитии Кельвина выражение в скобках $=0$ (для цикла Карно)

Для 2-х циклов Карно:

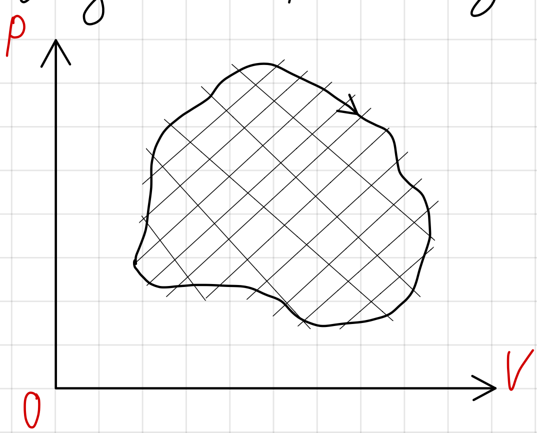


$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_5^6 \frac{\delta Q}{T} + \int_6^7 \frac{\delta Q}{T} =$$

$$\frac{1}{T_1}\int_1^2 \delta Q + \frac{1}{T_2}\int_3^4 \delta Q + \frac{1}{T_3}\int_5^6 \delta Q + \frac{1}{T_4}\int_6^7 \delta Q = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} +$$

$$- \frac{Q_3}{T_3} - \frac{Q_4}{T_4} = \frac{Q_1}{T_4}\left(\frac{T_4}{T_1} - \frac{Q_4}{Q_1}\right) + \frac{Q_2}{T_3}\left(\frac{T_3}{T_2} - \frac{Q_3}{Q_2}\right) = 0$$

Разобьем на ∞ циклов Карно:

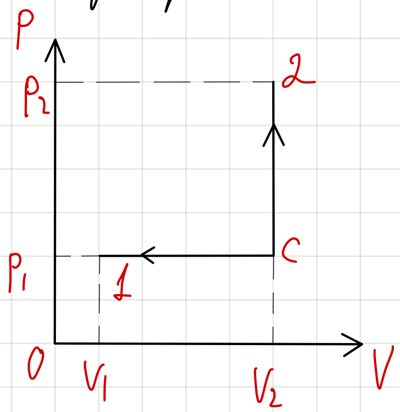


$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta Q}{T} = 0$$ Доказали теорему при $n \to \infty$ ч.т.д.

31) Идеальный газ. Внутренняя энергия идеального газа.

Идеальный газ - несуществующий в природе газ, который имеет только одну фазу. Газ является идеальным, если темп. конденсации намного меньше темп., при которой мы его наблюдаем

Внутренняя энергия ид. газа:



Т.к. U - есть ф-ция состояния, то не зависит от процесса перехода из т-ки 1 в т-ку 2:

$$U_2-U_1=\int_1^c(\delta A'+\delta Q)+\int_c^2(\delta A'+\delta Q)=-p_1(V_2-V_1)+$$

$$+\overbrace{\nu C_p\int_1^c dT}^{(*)}+\nu C_v\int_c^2 dT=-p_1V_2+p_1V_1+\nu C_p(T_c-T_1)+\nu C_v(T_2-T_c)=$$

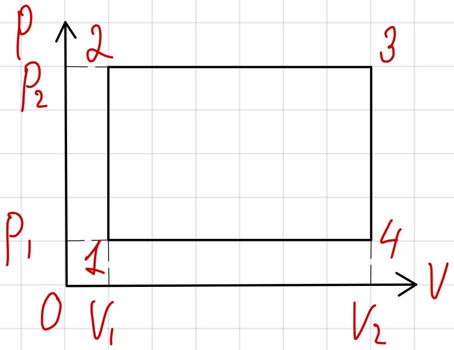
$$=-\nu RT_c+\nu RT_1+\nu C_pT_c-\nu C_pT_1+\nu C_vT_2-\nu C_vT_c=T_c\nu(\underbrace{-R+C_p-C_v}_{=0})+$$

$$+\nu T_1(\underbrace{R-C_p}_{=-C_v\ (\text{у-е Майера})})+\nu C_vT_2=\nu C_v(T_2-T_1)\Rightarrow U=\nu C_v\Delta T$$

Т.к. $C_v=\frac{iR}{2}$, то можно записать: $U=\frac{i}{2}R\nu T$ - для МКТ

(*) Из $C_p=\frac{\delta Q}{\nu\Delta T}$, $[C_v]=\left[\frac{Дж}{моль\cdot К}\right]$

32) Уравнение Майера для идеального газа



C_V - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, а C_p при пост. давлении

(*) У-е Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT$

(*) Молярная теплоемкость: $C_V = \dfrac{\delta Q}{\nu\, dT}$, $[C_V] = [\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})]$

(*) $\delta A = p\, dV$

По 1-й Т.Д. теореме:

$$\oint(\delta A' + \delta Q) = 0$$

$$\oint \delta Q = \int_1^2 \delta Q + \int_2^3 \delta Q + \int_3^4 \delta Q + \int_4^1 \delta Q \overset{(*)}{=} \int_1^2 C_V \nu\, dt + \int_2^3 C_p \nu\, dt + \int_3^4 C_V \nu\, dt + \int_4^1 C_p \nu\, dt = \nu C_V \int_1^2 dT + \nu C_p \int_2^3 dT + \nu C_V \int_3^4 dT + \nu C_p \int_4^1 dT = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2) + \nu C_V (T_4 - T_3) + \nu C_p (T_1 - T_4) = \nu (C_p - C_V)(T_3 - T_2 + T_1 - T_4);$$

$$\oint \delta A' \overset{(*)}{=} -(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = -p_2 V_2 + p_1 V_2 + p_2 V_1 - p_1 V_1 \overset{(*)}{=} -\nu R T_3 + \nu R T_2 + \nu R T_4 - \nu R T_1 = -\nu R (T_3 - T_2 - T_4 + T_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = \nu (C_p - C_V - R)(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) = \{\text{1-я Т.Д. теорема}\} = 0 \Rightarrow C_p - C_V - R = 0 \Rightarrow C_p = C_V + R$$

33) Т.Д. системы. Теорема з о существовании внутренней энергии системы

Т.С. бывают простые и сложные.

Простая - если состоит из одного хим. стабильного в-ва

По взаимодействию с окружением системы м.б. открытыми и закрытыми

Открытая - если может обмениваться с окружением массами в-ва, входящего в систему.

По фазовому состоянию системы м.б. 1-фазными, 2-фазными и 3-фазными

Фазы - газообразная, жидкая и твердая.

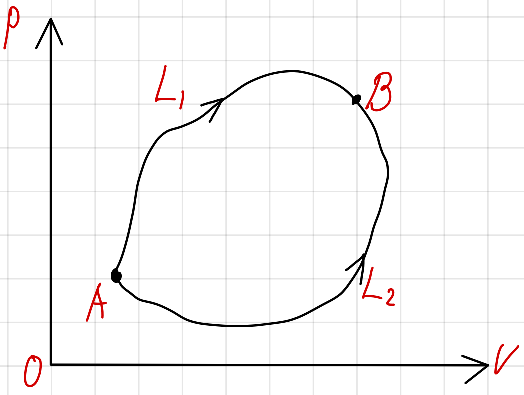
Теорема о $\exists$-ии внутренней энергии:

На множестве равновесных состояний простой Т.С. $\exists$ ф-ция, заданная с точностью до const так, что на $\forall$ элементе квазиравновесного процесса сумма элементарной работы, совершаемой окружением над системой и элемента тепла, полученного системой от окружения равно полному дифф-лу этой ф-ции, которая называется внутр. эн-ией системы.

$$\boxed{dU = \delta A' + \delta Q}$$

Док-во:

Пусть система находится в равновесном состоянии A. Примем этому состоянию значение внутр. эн-ии U_A



Рассмотрим квазиравновесный процесс, который приводит систему в состояние B (U_B)

$$U_B^{(1)} = U_A + \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q); \quad U_B^{(2)} = U_A + \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q)$$

Если U является ф-цией состояния системы, то ее значение не должно зависеть от вида квазиравновесного процесса

Докажем, что $U_B^{(1)} = U_B^{(2)}$:

По 1-й Т.Д. теореме: $\oint (\delta A' + \delta Q) = 0 \Rightarrow \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) +$
$+ \int_{\tilde{L}_2} (\delta A' + \delta Q) = 0, \quad \left(\int_{\tilde{L}_2} = \int_{L_2} \right)$

$$\int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) - \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q) = 0 \Rightarrow U_B^{(1)} = U_B^{(2)} \Rightarrow U_B = U_A + \int (\delta A' + \delta Q)$$

Если A и B близки:

$dU = \delta A' + \delta Q$ или $\delta Q = dU + \delta A$

34) Т.Д. системы. Теорема о существовании энтропии системы.

Т.С. бывают простые и сложные.

Простая - если состоит из одного хим. стабильного в-ва

По взаимодействию с окружением системы м.б. открытыми и закрытыми

Открытая - если может обмениваться с окружением массами в-ва, входящего в систему.

По фазовому состоянию системы м.б. 1-фазными, 2-фазными и 3-фазными

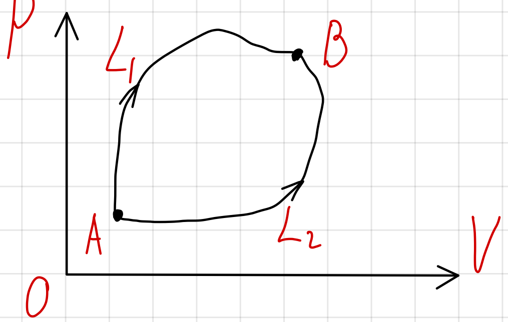
Фазы - газообразная, жидкая и твердая.

Теорема о $\exists$-ии энтропии:

На множестве равновесных состояний простой Т.С. $\exists$ ф-ция, заданная с точностью до const такая, что на $\forall$ эл-те квазиравновесного процесса, проводимого системой, отношение тепла, полученного системой на этом эл-те, к температуре - есть полный диф-л этой ф-ции, который называется энтропией.

$dS = \frac{\delta Q}{T}$; $S_B^{(1)} = S_A + \int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T}$; $S_B^{(2)} = S_A + \int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T}$; Докажем, что $S_B^{(1)} = S_B^{(2)}$

Док-во:



$$\oint \frac{\delta Q}{T} \overset{\text{по 2ТД теор}}{=} 0 \Rightarrow \int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\int\limits_{\bar{L}_2} \frac{\delta Q}{T} = -\int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T} \right] \Rightarrow \int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T} - \int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T} =$$

$$= 0 \Rightarrow \int_{L_1} \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_2} \frac{d Q}{T} \Rightarrow S_B^{(1)} = S_B^{(2)} \Rightarrow S_B = S_A + \int \frac{\delta Q}{T}$$

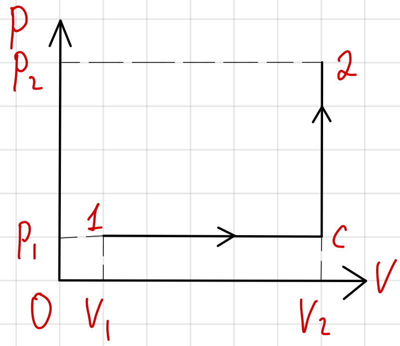
Если A и B близки, то:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

35) Идеальный газ. Энтропия идеального газа

Идеальный газ – не ∃-ющий в природе газ, который имеет только одну фазу. Газ, у которого темп. конденсации намного меньше темп., при которой мы его наблюдаем, называется идеальным.

Энтропия ид. газа:



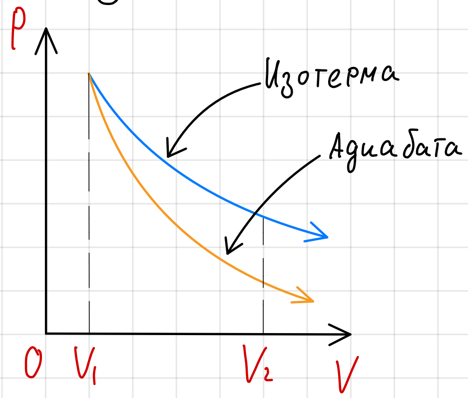
$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^c \frac{\delta Q}{T} + \int_c^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^c \frac{\nu c_p dT}{T} + \int_c^2 \frac{\nu c_v dT}{T} =$$

$$= \nu c_p \int_1^c \frac{dT}{T} + \nu c_v \int_c^2 \frac{dT}{T} = \nu c_p \ln \frac{T_c}{T_1} + \nu c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}; \quad \frac{T_2}{T_c} = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow S_2 - S_1 = \nu c_p \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu c_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

36) Адиабатный процесс. У-е Пуассона для адиабатного процесса

Адиабатный процесс – процесс, протекающий без теплообмена системы с окр. средой.



У-е Пуассона:

$$\delta Q = 0 \Rightarrow dS = 0 \Rightarrow \partial\left(C_p \ln\frac{V_2}{V_1} + C_v \ln\frac{P_2}{P_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{C_p}{C_v}\ln\frac{V_2}{V_1} + \ln\frac{P_2}{P_1} =$$

$= 0 \Rightarrow \left(\frac{C_p}{C_v} = \gamma\right.$ – показатель адиабаты$\left.\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln\frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} + \ln\frac{P_2}{P_1} = 0 \Rightarrow \ln\frac{P_2 V_2^\gamma}{P_1 V_1^\gamma} = 0 \Rightarrow P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow \boxed{pV^\gamma = const}$$

Политропические процессы – процессы, протекающие с постоянной теплоемкостью.

У-е политропы: $pV^n = const$, n – показатель политропы

$$\begin{cases} n = 1 \text{ – изотерма} \\ n = 0 \text{ – изобара} \\ n = \gamma \text{ – адиабата} \\ n = \pm\infty \Rightarrow p^{\frac{1}{n}} \cdot V = Const \Rightarrow V = const \text{ – изохора} \end{cases}$$

37) Неравновесные состояния. Виртуальные перемещения. Принцип Гиббса для нахождения условий равновесия. Условие равновесия 2-х фазной системы, химический потенциал

Неравновесное состояние состоит из множества равновесных состояний ее малых частей, но нет равновесия между малыми частями системы.

Виртуальное перемещение – перемещение из исходного в ∞-но близкое, которое удовлетворяет доп. условиям связи.

Принцип Гиббса:

Для того, чтобы изолированная система была в равновесии $\Longleftrightarrow$, чтобы для $\forall$ виртуальных перемещ., удовлетворяющих условиям связи, вариация внутр. эн-ии равнялась бы 0: $\delta U = 0$

Ex (условие равновесия 2-х фазной системы):

Пусть у нас есть двухфазная система: жидкость и пар в цилиндре под поршнем и пусть они находятся в состоянии внутреннего равновесия ($v_1 = v_2 = \dots = 0$, $P_1 = \dots P_n$, $T_1 = \dots = T_n$). Пусть пар имеет T и m, а жидкость T' и m'

Рассм. внутр. эн-ию системы:

u – удельная внутр. эн-ия пара, а u' – жидкости.

$U = mu + m'u'$

$\delta U = \delta m u + m\delta u + \delta m' u' + m'\delta u'$; $\{\delta m = -\delta m'\}$

$\delta U = \delta m(u - u') + m\delta u + m'\delta u'$; $\delta V = 0$ и $\delta S = 0$, где:

s и s' - удельная энтропия пара и воды
v и v' - объем пара и воды

$V = mv + m'v'$, $S = ms + m's'$

$\delta V = \delta m v + m\delta v + \delta m' v' + m'\delta v' = \delta m(v - v') + m\delta v + m'\delta v'$

$\delta S = \delta m s + m\delta s + \delta m' s' + m'\delta s' = \delta S = \delta m(s - s') + m\delta s + m'\delta s'$

Чтобы найти условный extr, воспользуемся методом неопр. коэффициентов Лагранжа:

1) $\delta U + \beta\delta V - \alpha\delta S = 0$, где α и β - неопр. множители, которые находятся из условий связи.

2) $\delta m(u - u') + m\delta u + m'\delta u' - \alpha\delta m(s - s') - \alpha m\delta s - \alpha m' d s' + \beta\delta m(v - v') + \beta m\delta v + \beta m'\delta v' = 0$

I-е начало ТД: $dU = \delta A' + \delta Q$, где $\delta A' = -p\,dV$ и $dQ = T\,dS$

3) $\begin{cases} \delta u = T\delta s - p\,dv \\ \delta u' = T'\delta s' - p' dv' \end{cases}$

$(3) \to (2)$:

$\delta m(u - u') + mT\delta s - mp\delta v + m'T'\delta s' - m'p' d v' - \alpha\delta m(s - s') - \alpha m \cdot \delta s - \alpha m'\delta s' + \beta\delta m(v - v') + \beta m\delta v + \beta m'\delta v' = 0$

$\delta m(u - u' - \alpha(s - s') + \beta(v - v')) + m(T - \alpha)\delta s - m(p - \beta)\delta v + m'(T' - \alpha)\delta s' - m'(p' - \beta)\delta v' = 0$

Это равенство должно выполняться при $\forall$ вариациях.

$\begin{cases} T - \alpha = 0 \text{ и } T' - \alpha = 0 \Rightarrow T = T' \\ p - \beta = 0 \text{ и } p' - \beta = 0 \Rightarrow p = p' \\ u - u' - \alpha(s - s') + \beta(v - v') = 0 \Rightarrow u - Ts + pv = u' - T's' + p'v' \end{cases}$

$u - Ts + pv = const$ - эта комбинация, относящаяся к ед.

Массы системы назыв. хим. потенциалом.

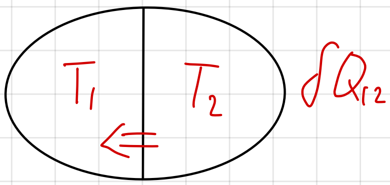
38) Неравновесные состояние. Неравенство Клаузиуса для системы в термостате.

Неравновесное состояние состоит из множества равновесных состояний ее малых частей, но нет равновесия между малыми частями системы.

Неравенство Клаузиуса:

Пусть система неравновесна и находится в термостате, температура термостата поддерживается (T_0). Система может обмениваться теплом с окружением. δS_i — энтропия малой части, T_i — ее темп.

Тепло идет от более нагретого тела к менее:



$$\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\delta Q_{12} \geq 0$$

$S=\sum_i S_i \Rightarrow dS=\sum_i dS_i;\ dS_i=\dfrac{\delta Q_i}{T_i}$, где δQ_i — тепло, которое поступает в i-ю часть:

$$\delta Q_i = \delta Q_{i0} + \sum_{\substack{ij\\ i\neq j}} \delta Q_{ij}$$

от окружения — от j-х частей

$$dS_i = \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_j \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} \Rightarrow dS = \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_{\substack{ij\\ i\neq j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} = \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_{\substack{ij\\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} +$$

$$+ \sum_{\substack{ij\\ i>j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} = \{i \Leftrightarrow j\} = \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_{\substack{ij\\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} + \sum_{\substack{ij\\ i<j}} \frac{\delta Q_{ji}}{T_j} = \{\text{т.к. } \delta Q_{ij} = -\delta Q_{ji}\} =$$

$$= \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \underbrace{\sum_{\substack{ij\\ i<j}} \left(\frac{1}{T_i}-\frac{1}{T_j}\right)\delta Q_{ij}}_{\geq 0} \Rightarrow dS \geq \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} \Rightarrow \left(\frac{1}{T_i}-\frac{1}{T_0}\right)\delta Q_{i0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} \geq \frac{\delta Q_{i0}}{T_0} \Rightarrow dS \geq \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_0} = \frac{\delta Q}{T_0} \Rightarrow dS \geq \frac{\delta Q}{T_0}$$

δQ – тепло, получаемое системой от окружения, а T_0 – температура окружения.

39) Идеальный газ. Основное у-е МКТ

Ид. газ состоит из атомов и молекул; он удовлетворяет следующим условиям:

1) Все молекулы движутся хаотически, нет выбранного направления движения. Давление во все стороны одинаково распространено

2) Пренебрегаем эн-ей, взаимодействующей между молекулами

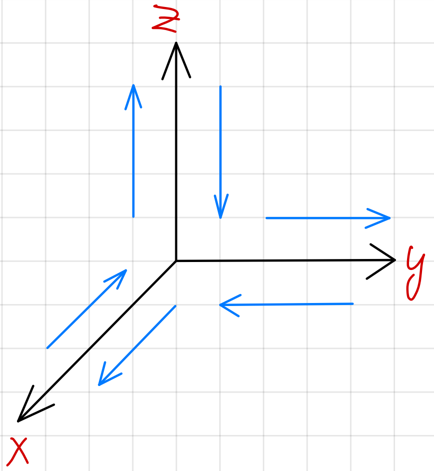
3) Соударение между молекулами и стенками сосуда происходит по законам АУУ

4) Собственный объем молекул намного меньше того объема, который занимает газ.

Задача: давление газа на стенки сосуда.

N_i - число молекул, которые имеют v_i ск-ть

$\sum N_i = N$ - берем какое-то приближенное значение. Т.к. молекулы движутся хаотически, будем считать, что они движутся по 3-м взаимоперпенд. осям, в одну сторону движется $\frac{1}{6}N$. При столкновениях одна молекула передает другой такой импульс:



$\Delta p_i = 2m_0 v_i$.

За время Δt: $\Delta N_i = n_i \Delta V_i \frac{1}{6}$, $n_i = \frac{N_i}{V}$

$\Delta V_i = \Delta S v_i \Delta t$ - объем цилиндра

$n_i = \frac{N_i}{V}$ (концентрация) $\Rightarrow \Delta N_i = \frac{1}{6} n_i \Delta S v_i \Delta t$

$\Delta P_i = \Delta N_i \cdot \Delta p_i = \frac{1}{3} n_i m_0 \Delta S v_i^2 \Delta t$

Тогда все молекулы за время Δt передадут стенке импульс:

$$\Delta P = \sum \Delta P_i = \frac{1}{3} m_0 \Delta S \Delta t \sum n_i v_i^2$$

$$v_{ср.} = \frac{1}{N} \cdot \sum_i N_i v_i \; ; \; v_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{\sum N_i v_i^2}{N}}$$

$$\sum_i n_i v_i^2 = \frac{1}{V} \sum_i N_i v_i^2 = \frac{N}{V} v_{ср.кв.}^2$$

$\Delta P = F \Delta t$; давление: $p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} m_0 n v_{ср.кв}^2$ – осн. у-е МКТ

$K_{пост} = \frac{m_0 v_{ср.кв}^2}{2}$; $\{ p = \frac{1}{3} m_0 n v_{ср.кв}^2 \} \Rightarrow p = \frac{2}{3} n K_{пост}$

40) Теорема Больцмана о равновероятном распределении эн-ии по степеням свободы. Внутренняя эн-ия идеального газа.

Теорема Больцмана:

$$K_{пост} = \frac{m_0 v^2_{ср.кв.}}{2} \Rightarrow \{осн. у\text{-}е\ МКТ\} \Rightarrow p = \frac{2}{3} n K_{пост}$$

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V} \cdot \frac{1}{\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT$$

$$p = \frac{m_0 n}{m_0 N_A} RT \Rightarrow \left[\frac{R}{N_A} = k\right] \Rightarrow p = nkT,$$ k - постоянная Больцмана

$$\frac{2}{3} K_{пост} = kT \Rightarrow K_{пост.} = \frac{3}{2} kT$$

$$K_{пост} = \frac{m_0 v_x^2}{2} + \frac{m_0 v_y^2}{2} + \frac{m_0 v_z^2}{2}$$ - на каждую часть (степень свободы) приходится $\frac{1}{2} kT$

$(*)$: $\mu = m_0 N_A$

$(*)$: $\rho = m_0 n$

где m_0 - масса мол-лы

Внутр эн-ия ид. газа:

$$K = \frac{i}{2} kT = K_{пост} + K_{вращ.}$$

$$\left.\begin{array}{l} U = \frac{m}{\mu} C_V T \\ Из\ МКТ: U = NK \end{array}\right\} \Rightarrow U = N \frac{i}{2} kT = \frac{N}{N_A} \frac{i}{2} \underbrace{N_A k}_{=R} T = \nu \frac{i}{2} RT,$$ где $\nu = \frac{N}{N_A}$ $\Rightarrow \nu C_V T = \nu \frac{i}{2} RT \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_V = \frac{i}{2} R$$

У-е Майера: $C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2} R \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$

41) Распределение Максвелла молекул по скоростям. Нахождение равновесного значения Т. Д. вероятности

Имеем ид. газ, который состоит из N мол-л, m - масса каждой молекулы. Находятся в сосуде объемом V с теплоизолир. стенками. $N, m, V = const$. Равновесное сост. харак-тся 2-мя параметрами: концентрация и темп.
Зададим кол-во грубых ячеек M. Они хар-тся ск-тью своей средней части, эн-ией: $\varepsilon_i = \frac{m}{2}(v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)$ и числом мол-л, попавших в ячейку N_i. $\sum_i^M N_i = N$
ТД вероятность - число способов, которыми можно N мол-л распределить по M ячейкам таким образом, чтобы в $1 - N_1$, $2 - N_2$, ..., $M - N_M$

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_M!}$$

Необходимо выполнение 2-х условий:

① $\sum_i N_i = N$ - неизменность числа мол-л

② $\sum_i N_i \varepsilon_i = E$ - суммарная эн-ия неизменна.

Больцман определил, что равновесн. будет состояние, для которого W принимает max значение. Нужно найти такое N_i^0, при котором: $\ln W_0 = max$. Ищем усл. extr, т.к. N_i удов 2-м условиям связи ① и ②. Для этого воспользуемся методом неопр коэф-в Лагранжа
Вариационное условие: $\delta(\ln W) - \alpha\,\delta(\sum N_i) - \beta\,\delta(\sum_i \varepsilon_i N_i) = 0$
$\ln W = \ln N! - \sum_i \ln N_i!$
Ф-ла Стирлинга: $\ln N! = N \ln N - N \Rightarrow \ln W = N \ln N - N - \sum_i N_i \ln N_i +$

$+\sum_i N_i \Rightarrow \delta \ln W = -\sum_i \delta N_i \ln N_i - \underbrace{\sum_i N_i \cdot \frac{1}{N_i}\delta N_i + \sum_i \delta N_i}_{=0} \Rightarrow \delta \ln W =$

$= -\sum_i \delta N_i \ln N_i$

$$-\sum_i \delta N_i \ln N_i^0 - \alpha \sum \delta N_i - \beta \sum_i \varepsilon_i \delta N_i = 0$$

$\sum_i \delta N_i (\ln N_i^0 + \alpha + \beta \varepsilon_i) = 0$ – это выполняется для $\forall$ вариац.

$(\delta N_i) \Rightarrow \ln N_i^0 + \alpha + \beta\varepsilon_i = 0 \Rightarrow N_i^0 = C e^{-\beta \varepsilon_i}$

Т.к $\sum_i N_i^0 = N \Rightarrow C = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}}$

$\sum \varepsilon_i N_i^0 = E \Rightarrow \sum_i \varepsilon_i C e^{-\beta\varepsilon_i} = N \cdot \frac{\sum \varepsilon e^{-\beta\varepsilon_i}}{\sum e^{-\beta\varepsilon_i}} = E$

$\ln W_0 = N\ln N - N - \sum_i N_i^0 \ln N_i^0 + \sum_i N_i^0 = N\ln N - \sum N_i^0 \ln(C e^{-\beta\varepsilon_i}) =$

$= N\ln N - \sum_i N_i^0 \cdot \ln C + \sum_i N_i^0 \beta\varepsilon_i = N\ln N - N\ln C + \beta E \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ln W_0 = N\ln N - N\ln C + \beta E}$ – равновесн. знач ТД вероят.

Распределение по скоростям:

$N_i^0 = \frac{C}{\omega} e^{-\beta\varepsilon_i} dv_x\, dv_y\, dv_z$. Будем считать, что ск-ти мол-л распределены непрерывно.

$\frac{N_i^0}{N} = \frac{dN}{N} = \underbrace{\frac{C}{N\omega}}_{=const} e^{-\beta\varepsilon} dv_x\, dv_y\, dv_z$, ω – объем грубой ячейки в см³

$C_1 = \frac{C}{N\omega}$

условие нормировки

Из ①: $\sum_i N_i^0 = N \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_i N_i^0 = 1 \Rightarrow \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta\varepsilon} dv_x\, dv_y\, dv_z = 1$

$\iiint_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta\frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x\, dv_y\, dv_z = C_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{m}{2}v_x^2} dv_x\right]^3 = \left\{\frac{\beta m}{2} = \gamma\right\} =$

$= C_1 \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_x^2} dv_x\right]^3}_{\text{инт-л Пуассона}} = C_1 \left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\right)^3 = C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\gamma^{\frac{3}{2}}} = C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = C_1 \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{C_1 = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$

Из ② : $\sum\limits_i N_i \varepsilon_i = E$, $E = N K_{пост} = N \cdot \frac{3}{2} kT$

$$N_i^0 \varepsilon_i = C\varepsilon_i e^{\beta\varepsilon_i} = \frac{C}{\omega}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i} dv_x\, dv_y\, dv_z = N\cdot\frac{C}{N\omega}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i} dv_x dv_y dv_z =$$
$$= N C_1 \varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}\cdot dv_x\, dv_y\, dv_z$$

Считаем, что ск-ти распределены непрерывно $\Sigma \to \int$, т.е.

$$NC_1 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} dv_x\, dv_y\, dv_z = E = N\frac{3}{2}kT$$

$$NC_1\frac{m}{2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z = NC_1\frac{m}{2}\cdot$$

$$\cdot\Big[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta\varepsilon} dv_x\, dv_y\, dv_z + \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 e^{-\beta\varepsilon}\, dv_x d v_y\, dv_z + \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 e^{-\beta\varepsilon}\cdot$$

$$\cdot dv_x dv_y dv_z\Big] = NC_1\,\frac{m\cdot 3}{2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2\, e^{-\beta\frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \frac{3}{2} m N C_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\gamma v_x^2} d v_x \Big[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_y^2} dv_y}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\Big(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_z^2} d v_z}_{\text{инт-л Пуассона} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\Big)\Big] \;=$$

$$= \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\gamma x^2} dx = -\frac{d}{d\gamma}\Big[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma x^2} dx}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\Big] = -\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{3}{2} m N C_1 \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{\gamma} = \frac{3}{2} m N C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}} = \left\{ C_1 = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} = \frac{3}{2} m N \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \underline{\frac{3}{2} m N \frac{1}{2\gamma} = N\frac{3}{2}Tk} \Rightarrow \frac{3}{2} m N \frac{1\cdot 2}{2\beta m} = N\frac{3}{2}kT \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{kT}}$$

$$\frac{dN_i^0}{N} = f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = C_1 e^{-\beta\varepsilon} dv_x\, dv_y\, dv_z = \boxed{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\cdot}$$

$\boxed{\cdot\, dv_x\, dv_y\, dv_z}$ – распределение Максвелла по проекциям ск-тей

42) Распределение Максвелла молекул по скоростям.

Нахождение коэф-тов C и β

1) $\sum_i N_i = N$ – неизменность число мол-л] необходимые

2) $\sum_i N_i \varepsilon_i = E$ – суммарная эн-ия неизменна] условия

Распределение по скоростям:

$N_i^0 = \frac{C}{\omega} e^{-\beta \varepsilon_i} d v_x \, d v_y \, d v_z$. Будем считать, что ск-ти мол-л распределены непрерывно.

$$\frac{N_i^0}{N} = \frac{dN}{N} = \frac{C}{\underbrace{N\omega}_{= const}} e^{-\beta \varepsilon} d v_x \, d v_y \, d v_z$$

$C_1 = \frac{C}{N\omega}$

условие нормировки

Из 1): $\sum_i N_i^0 = N \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_i N_i^0 = 1 \Rightarrow \iiint_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta\varepsilon} d v_x \, d v_y \, d v_z = 1$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta \frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} d v_x \, d v_y \, d v_z = C_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m v_x^2}{2}} d v_x\right]^3 = \left\{ \frac{\beta m}{2} = \gamma \right\} =$$

$$= C_1 \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_x^2} d v_x}_{\text{инт-л Пуассона}}\Big] = C_1 \left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\right)^3 = C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\gamma^{\frac{3}{2}}} = C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = C_1 \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$ – первый коэф.

Из 2): $\sum_i N_i \varepsilon_i = E$, $E = N K_{пост} = N \cdot \frac{3}{2} kT$

$$N_i^0 \varepsilon_i = C \varepsilon_i e^{\beta \varepsilon_i} = \frac{C}{\omega} \varepsilon_i e^{-\beta \varepsilon_i} d v_x \, d v_y \, d v_z = N \cdot \frac{C}{N\omega} \varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i} d v_x \, d v_y \, d v_z =$$

$$= N C_1 \varepsilon_i e^{-\beta \varepsilon_i} \cdot d v_x \, d v_y \, d v_z$$

Считаем, что ск-ти распределены непрерывно $\Sigma \to \int$, т.е.

$$N C_1 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d v_x \, d v_y \, d v_z = E = N \frac{3}{2} kT$$

$$N C_1 \frac{m}{2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} d v_x \, d v_y \, d v_z = N C_1 \frac{m}{2} \cdot$$

$$\cdot\left[\iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta\varepsilon} dv_x dv_y dv_z + \iiint_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 e^{-\beta\varepsilon} dv_x dv_y dv_z + \iiint_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 e^{-\beta\varepsilon}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot dv_x dv_y dv_z\right] = NC_1 \frac{m\cdot 3}{2}\iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta\varepsilon(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \frac{3}{2} mNC_1 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\gamma v_x^2} dv_x \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_y^2} dv_y}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma v_z^2} dv_z}_{\text{инт-л Пуассона} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\right)\right] =$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\gamma x^2} dx = -\frac{d}{d\gamma}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma x^2} dx}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\right] = \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{3}{2} mNC_1 \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{\gamma} = \frac{3}{2} mNC_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}} = \left\{C_1 = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{3}{2} mN\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \underline{\frac{3}{2} mN\frac{1}{2\gamma} = N\frac{3}{2}Tk} \Rightarrow \frac{3}{2} mN \frac{1\cdot 2}{2\beta m} = N\frac{3}{2}kT \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{kT}} \text{ — второй коэф.}$$

$$\frac{dN_i^0}{N} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = C_1 e^{-\beta\varepsilon} dv_x dv_y dv_z = \boxed{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\cdot}$$

$$\boxed{\cdot\, dv_x dv_y dv_z} \text{ — распределение Максвелла по проекциям ск-тей}$$

43) Распределение Максвелла молекул по проекциям скоростей и по модулям скоростей. Эксперимент Штерна

① $\sum\limits_i N_i = N$ – неизменность число мол-л ⎤ необходимые

② $\sum\limits_i N_i\varepsilon_i = E$ – суммарная эн-ия неизменна ⎦ условия

Распределение по скоростям:

$N_i^0 = \frac{C}{\omega} e^{-\beta\varepsilon_i} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z$. Будем считать, что ск-ти мол-л распределены непрерывно.

$$\frac{N_i^0}{N} = \frac{dN}{N} = \underbrace{\frac{C}{N\omega}}_{=const} e^{-\beta\varepsilon} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z$$

$C_1 = \frac{C}{N\omega}$

условие нормировки

Из ①: $\sum\limits_i N_i^0 = N \Rightarrow \frac{1}{N}\sum\limits_i N_i^0 = 1 \Rightarrow \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta\varepsilon} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z = 1$

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} C_1 e^{-\beta\frac{m}{2}(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z = C_1\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\frac{m}{2}\upsilon_x^2} d\upsilon_x\right]^3 = \left\{\frac{\beta m}{2} = \gamma\right\} =$$

$$= C_1\Big[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma\upsilon_x^2} d\upsilon_x}_{\text{инт-л Пуассона}}\Big] = C_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\right)^3 = C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\gamma^{\frac{3}{2}}} = C_1 \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = C_1\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{C_1 = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$ – первый коэф.

Из ②: $\sum\limits_i N_i\varepsilon_i = E$, $E = N K_{пост} = N\cdot\frac{3}{2}kT$

$$N_i^0\varepsilon_i = C\varepsilon_i e^{\beta\varepsilon_i} = \frac{C}{\omega}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z = N\cdot\frac{C}{N\omega}\varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z =$$

$$= N C_1 \varepsilon_i e^{-\beta\varepsilon_i}\cdot d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z$$

Считаем, что ск-ти распределены непрерывно $\Sigma \to \int$, т.е.

$$NC_1\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\upsilon_x\, d\upsilon_y\, d\upsilon_z = E = N\frac{3}{2}kT$$

$$NC_1\frac{m}{2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z = NC_1\frac{m}{2}\cdot$$

$$\cdot\left[\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta\varepsilon}dv_x dv_y dv_z + \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 e^{-\beta\varepsilon}dv_x dv_y dv_z + \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 e^{-\beta\varepsilon}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot dv_x dv_y dv_z\right] = NC_1\frac{m\cdot 3}{2}\iiint\limits_{-\infty} v_x^2 e^{-\beta\varepsilon(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \frac{3}{2}mNC_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\gamma v_x^2}dv_x\left[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma v_y^2}dv_y}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma v_z^2}dv_z}_{\text{инт-л Пуассона}=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\right)\right] \textcircled{=}$$

$$= \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\gamma x^2}dx = -\frac{d}{d\gamma}\Big[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma x^2}dx}_{=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}}\Big] = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\right\} =$$

$$\textcircled{=}\frac{3}{2}mNC_1\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{\gamma} = \frac{3}{2}mNC_1\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}} = \left\{C_1=\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{3}{2}mN\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}} =$$

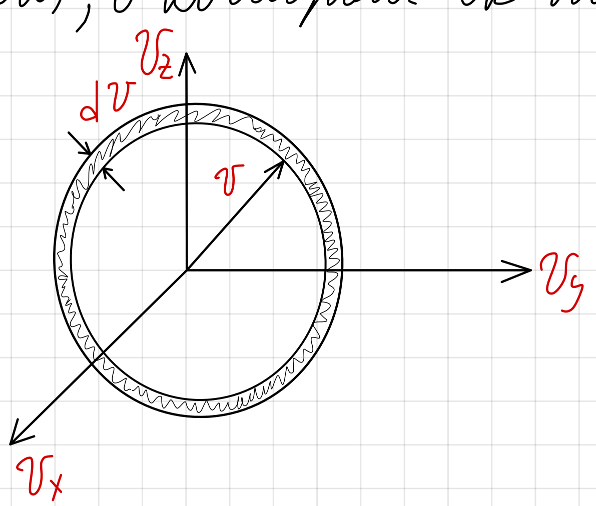
$$= \underline{\frac{3}{2}mN\frac{1}{2\gamma} = N\frac{3}{2}Tk} \Rightarrow \frac{3}{2}mN\frac{1\cdot 2}{2\beta m} = N\frac{3}{2}kT \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{kT}}$$

$$\frac{dN_i^0}{N} = f(v_x,v_y,v_z)dv_x dv_y dv_z = C_1 e^{-\beta\varepsilon}dv_x dv_y dv_z = \boxed{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\cdot}$$

$\boxed{\cdot\, dv_x dv_y dv_z}$ — распределение Максвелла по проекциям ск-тей.

Распределение по модулям ск-тей:

Рассмотрим в пр-ве ск-тей сферический (шаровой слой), в котором ск-ти мол-л меняются от v до $v+dv$



$$F(v)dv = \iiint f(v_x,v_y,v_z)\,dv_x dv_y dv_z$$

Т.к. в этом интервале: $v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2 \Rightarrow$

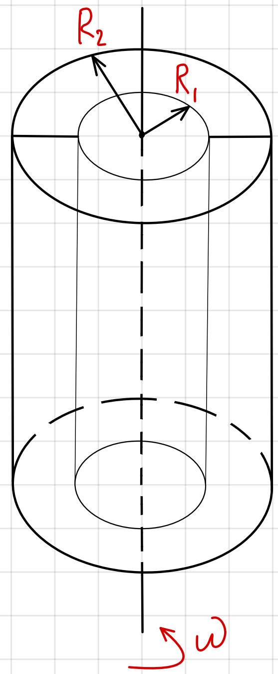
$\Rightarrow f(v_x,v_y,v_z) = const$

$$F(v)dv = f(v)\iiint dv_x dv_y dv_z = f(v)\cdot 4\pi\cdot$$

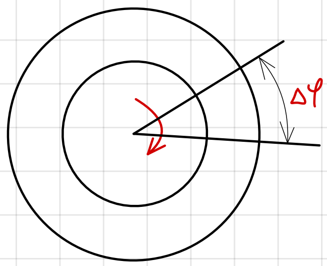
$$\cdot v^2 dv \Rightarrow \boxed{F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]4\pi v^2}$$

Эксперимент Штерна:

Бралась такая платиновая нить, на которую нано-сился слой серебра. Нить натянута и является осью 2-х коаксиальных цилиндров тесно скрепленных друг с другом. На внутреннем цилиндре делалась узкая щель. По нити пропускался ток, нить нагревалась ($T \approx 1200°C$), и атомы серебра испарялись и оседались на внутр. пов-ти малого цилиндра и через щель попадали на внутр части большого цилиндра



Если вращаем, то if $v = const$, то $\Delta t = \frac{R_2 - R_1}{v} = \frac{R}{v}$. За Δt: $\Delta\varphi = \omega \Delta t = \frac{\omega R}{v}$ — повернутся цилиндры



44) Ф-ла Больцмана для энтропии ТС

$\ln W_0 = N\ln N - N - \sum_i N_i^0 \ln N_i^0 + \sum_i N_i^0 = N\ln N - \sum_i N_i^0 \ln(const) = N\ln N -$

$- N\ln\frac{N\omega}{V} = N\ln N - N\ln N - N\ln\omega + N\ln V \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ln W_0 = -N\ln\omega + N\ln V}$ I

Из равновесного значения ТД вероятности:

$\ln W_0 = N\ln N - N\ln C + \beta E$

Т.к. $E = \frac{3}{2}kTN$; $C = N\omega C_1 = N\omega\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \rightarrow$ в ф-лу:

$\ln W_0 = N\ln N - N\ln\left[N\omega\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{\cancel{kT}}\frac{3}{2}\cancel{kT}N = N\ln N + \frac{3}{2}N - N\ln\left[N\omega\cdot\right.$
$\left.\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - N\ln T^{-\frac{3}{2}} = N\ln N + \frac{3}{2}N - N\ln\left[N\omega\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{3}{2}N\ln T \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ln W_0 = C_2 + \frac{3}{2}N\ln T}$ II

Из теор. вер.: $P = P_1 \cdot P_2 \Rightarrow \ln P = \ln P_1 + \ln P_2$

I + II: $\ln W_0 = -N\ln\omega + C_2 + \frac{3}{2}N\ln T + N\ln V \Rightarrow \ln W_0 = C_3 + \frac{3}{2}N\ln T +$
$+ N\ln V \,|\cdot k$ – постоянная Больцмана

$k\ln W_0 = kC_3 + \frac{3}{2}Nk\ln T + Nk\ln V = C_4 + \frac{N}{N_A}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}N_A\cdot k}_{=C_V}\ln T + \frac{N}{N_A}\underbrace{N_A\cdot k}_{=R\text{ - универс. газ пост.}}\cdot\ln V \Rightarrow$

$\Rightarrow k\ln W_0 = C_4 + \nu C_V\ln T + \nu R\ln V$ III

$\Delta S = \nu C_V\ln\frac{p_2}{p_1} + \nu C_p\ln\frac{V_2}{V_1}$

$S = \nu C_V\ln p + \nu C_p\ln V = \nu C_V\ln p + \nu C_V\ln V + \nu R\ln V = \nu C_V\ln(pV) + \nu R\ln V =$

$= \nu C_V\ln(\nu RT) + \nu R\ln V = \underbrace{\nu C_V\ln(\nu R)}_{=const} + \nu C_V\ln T + \nu R\ln V \Rightarrow \boxed{S = C_5 + \nu C_V\ln T + \nu R\ln V}$

IV

Сравнивая III и IV: (энтропия определена до const) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S = k\ln W_0}$. Таким образом, Больцман дал статист. толкование энтропии, т.е энтропия системы задаётся ТД вероятностью.