$\boxed{\text{MATEMATICA DISCRETA}}$ #5

FUNZIONE INIETTIVA: $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

(OPPURE) $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$\boxed{g: y = x^2}$ SE PENSO CON DOMINIO $\mathbb{R}$

NON È INIETTIVA $\quad g(-1) = g(1)$.

MA SE PENSO IL DOMINIO COME $\mathbb{R}^{>0} =$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ LA FUNZIONE È INIETTIVA

FUNZIONE SURIETTIVA: $\forall b \in B \quad \exists a \,/\, f(a) = b$

$y = x^2 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON È SURIETTIVA $(\nexists x \mid x^2 = -1)$

SE CONSIDERO $y = x^2$ COME $f \quad \mathbb{R} \to \{x \mid x \geq 0\}$
QUESTA È SURIETTIVA PERCHÉ
$\exists \sqrt{y}$ e $(\sqrt{y})^2 = y$

BIETTIVA : SURIETTIVA + INIETTIVA

FUNZIONI COMPOSTE $(a \in A)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \cdot f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad (g \cdot f)(a) = g(f(a))$$

• VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$$

ESERCIZIO $\quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

(1) f, g INIETTIVE $\to g \cdot f$ é INIETTIVA

(2) // SURIETTIVA $\to$ // é SURIETTIVA

QUINDI SE f, g SONO BIETTIVE $\Rightarrow g \cdot f$ é BIETTIVA

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

FATTO #1 $g \cdot f$ è INIETTIVA $\Rightarrow$ f INIETTIVA

FATTO #2 $g \cdot f$ è SURIETTIVA $\Rightarrow$ g SURIETTIVA

1# SE $a_1 \neq a_2 \Rightarrow (g \cdot f)(a_1) \neq (g \cdot f)(a_2)$

SUPPONIAMO CHE f <u>NON</u> INIETTIVA $f(a_1) = f(a_2) \in B$

$$\Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

$$\underbrace{(g \cdot f)(a_1) = (g f)(a_2)}_{\text{CONTRADDIZIONE}}$$

f INIETTIVA

2# $\forall c \in C \quad \exists a \in A \mid \underbrace{(g \cdot f)(a)}_{g(f(a))} = c$

PONGO $b = f(a) \in B$

$c = g(b)$

$id_A : A \to A \quad id(a) = a$

$A \xrightarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B \qquad f \cdot id_A = f$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{id_B} B \qquad id_B \cdot f = f$

<u>id È NEUTRA</u> NELLA COMPOSIZIONE.

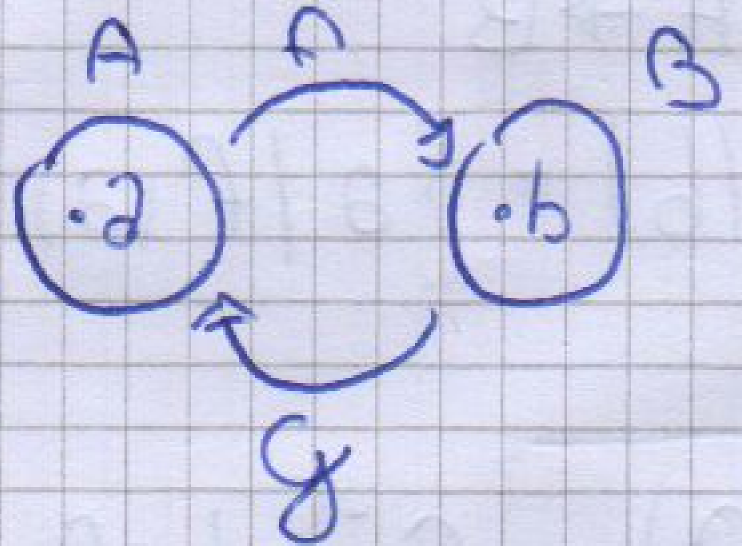
- $A \xrightarrow{f} B$ ESISTE UNA FUNZIONE g $\quad g : B \to A$

T.C. $g \cdot f = id_A \quad f \cdot g = id_B$

SE ESISTE UNA TALE g DIRÒ CHE f È <u>INVERTIBILE</u>

OSSERVAZIONE : id È SEMPRE BIETTIVA

TEOREMA DATA A, B $f: A \to B$ BIETTIVA ESISTE UN UNICA FUNZIONE INVERSA $g: B \to A$



$b = f(a)$

$g(b)$? VOGLIO CHE $g(f(a)) = a$

$\boxed{f(a) = b}$

$g(b) = a$

SE f NON È INIETTIVA

$f(a) = f(a') = b \qquad g(b) \to a, \; a'$

IN QUESTO CASO $g()$ NON È UNA FUNZIONE

SE f È SORIETTIVA OGNI $b \in B$ $\; b = f(a) \; \exists a \Rightarrow g$ è DEFINTA X OGNI b

PERCHÉ g È UNICA?

SOPPONIAMO CHE SIANO g, h FUNZIONI T.C. $\begin{cases} g \cdot f = h \cdot f = id \\ f \cdot g = f \cdot h = id \end{cases}$

CONSIDERIAMO $h \cdot f \cdot g$ — 1) $h \cdot (f \cdot g) = h \cdot id = h$

2) $(h \cdot f) \cdot g = id \cdot g = g$

CONTRADDIZIONE

I RISULTATI DOVEVANO ESSERE UGUALI X LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

L'INVERSA DI f È f^{-1} (ATTENZIONE C'È UN AMBIGUITÀ NOTAZIONALE CON LA CONTROIMMAGINE

$f: A \to B$

$f^{-1}(b) = \{a \mid f(a) = b\}$)

FORMULA (g, f SONO BIETTIVE)

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

$$\cancel{(g^{-1} f^{-1})} : (f^{-1} \cdot g^{-1})(g \cdot f) = f^{-1} \cdot id \cdot f = id$$

$\Downarrow$

id

$g \cdot f$

PORCO DIO

INSIEMI FINITI

UN INSIEME A SI DICE INFINITO SE ESISTE UNA FUNZIONE $f: A \to A$ INIETTIVA MA NON SURIETTIVA

$\mathbb{N}$ $f(n) = n+1$ $\quad n+1 = m+1 \Rightarrow n = m \quad 0 \notin Im(f)$

$\mathbb{Z}$ $f(n) = 2n$ $\quad 2m = 2n \Rightarrow m = n$

ESISTONO TANTI NUMERI PARI QUANTI ~~ESISTONO~~ NUMERI REALI

$\boxed{\text{A SI DICE FINITO SE NON È INFINITO}}$

A, B INSIEMI FINITI SUPPONIAMO $|A| > |B|$

ALLORA NON ESISTONO FUNZIONI INIETTIVE

PRINCIPIO DEI CASSETTI