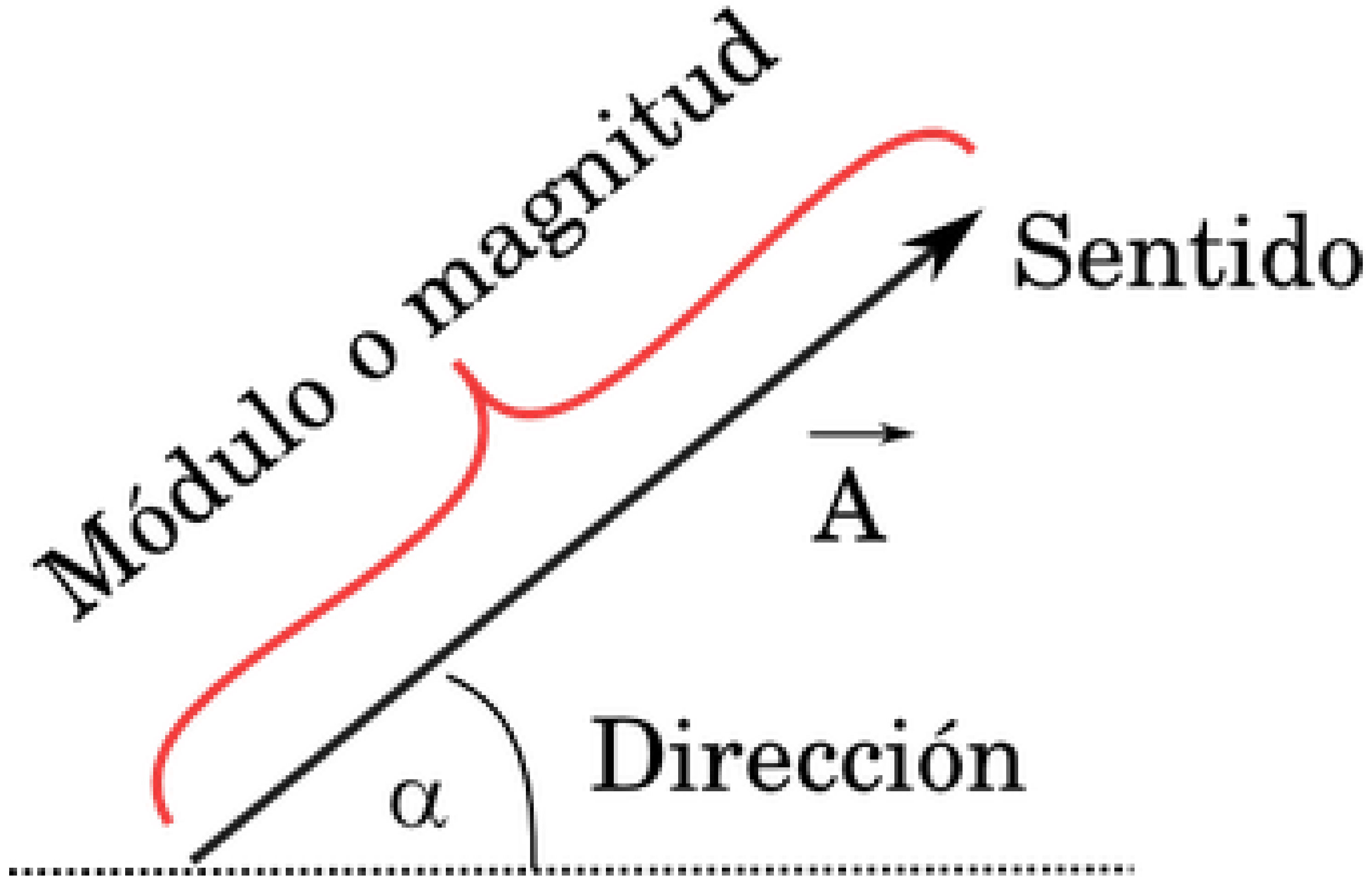
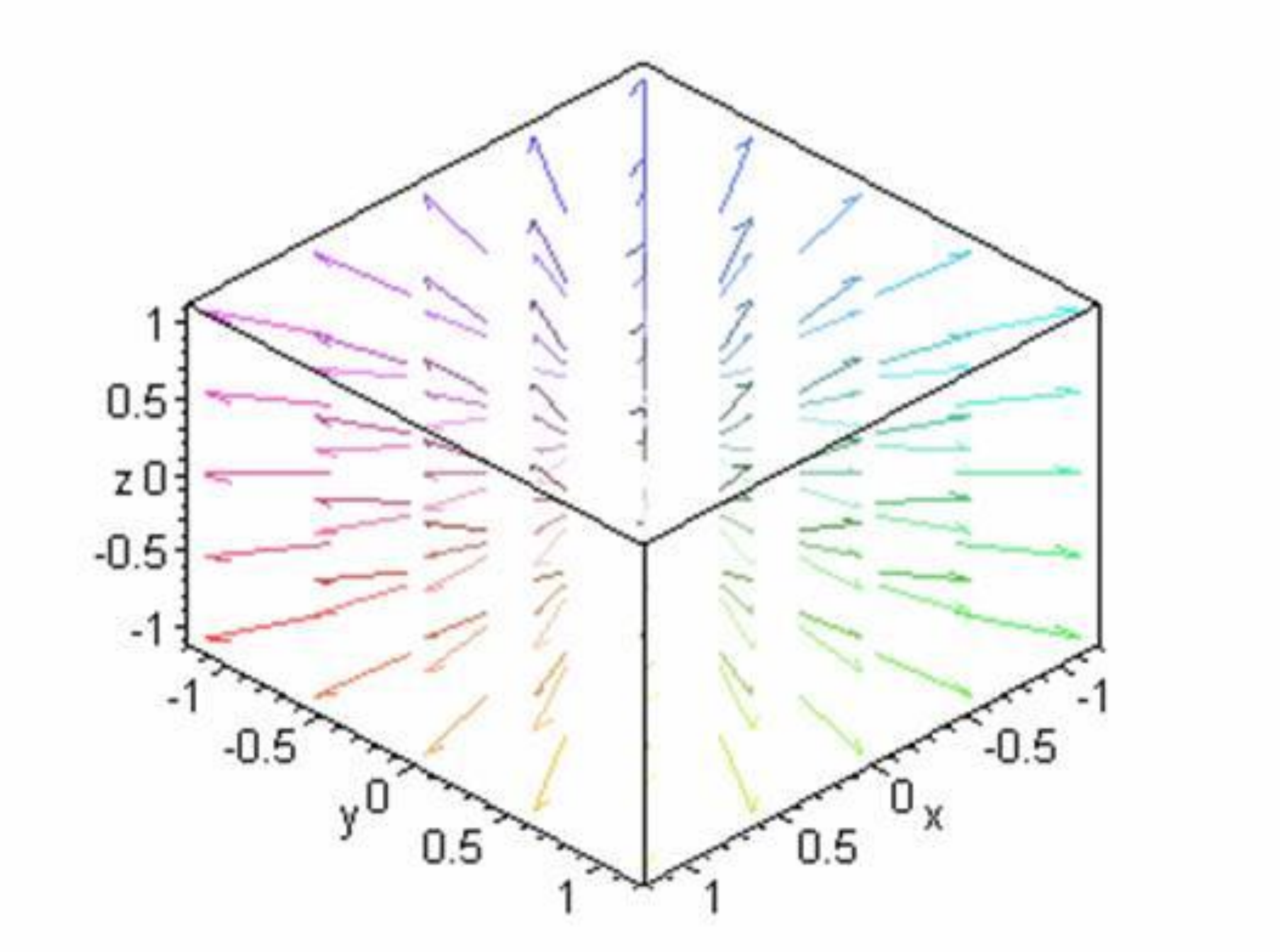
Breve repaso de algebra lineal

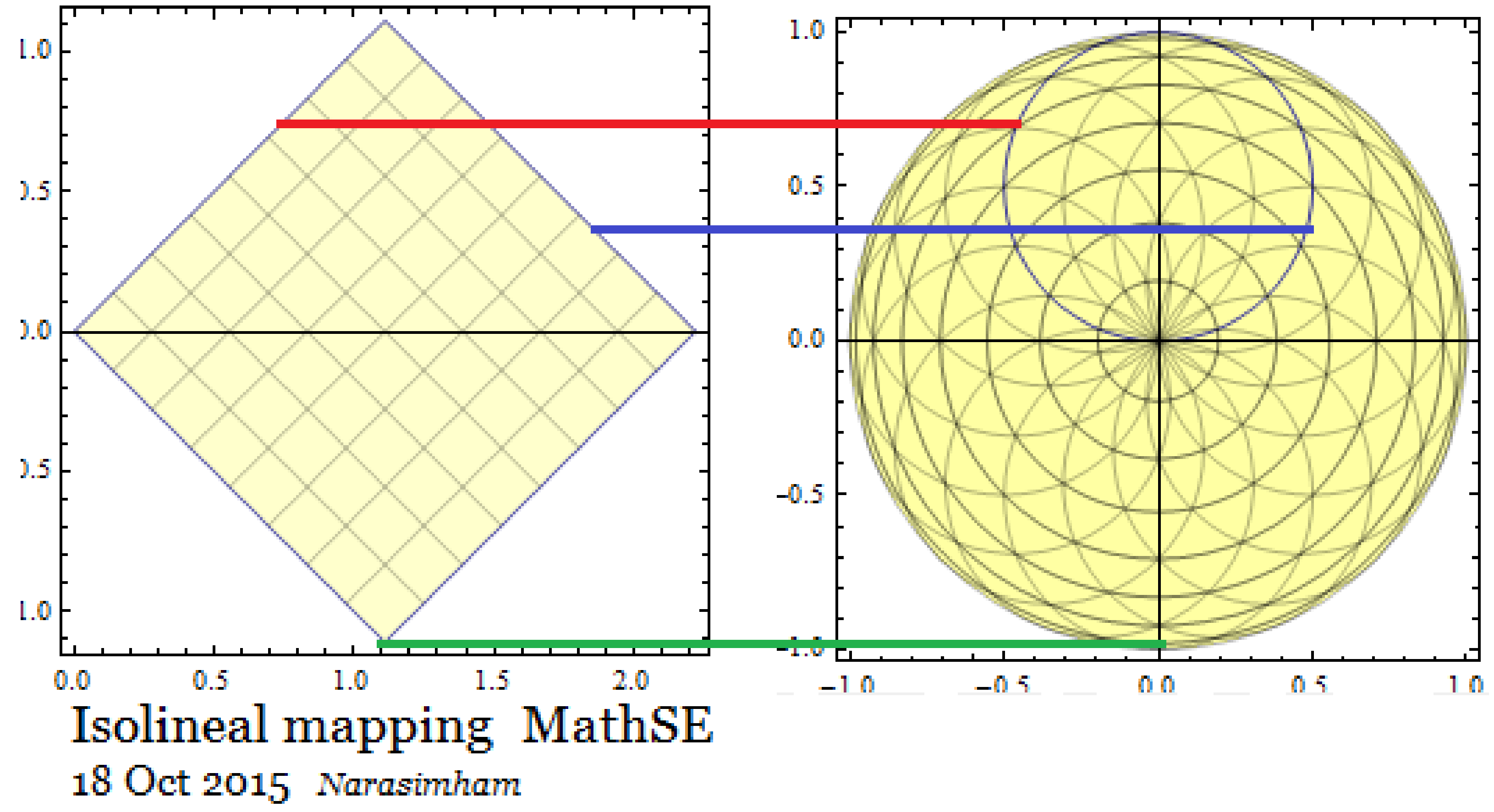
M.C. Ivan Alejandro García Ramírez

¿Qué es el álgebra lineal?

Es una área de las matemáticas que concierne a los conceptos de vectores, espacios y mapeos lineales.





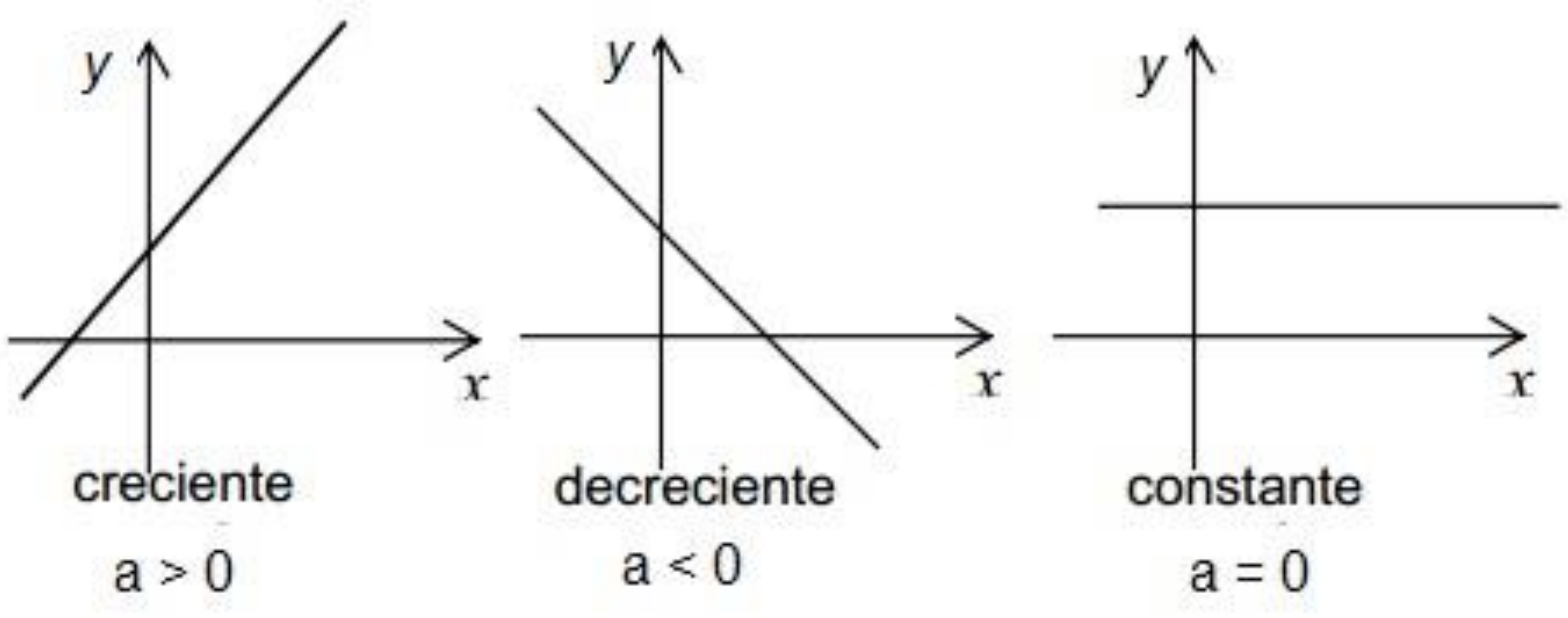


https://image.jimcdn.com/app/cms/image/transf/dimension=338x10000:format=png/path/sce1fe2a743ab0a00/image/i8e7406a06dd139ba/version/1374038153/vector.png

¿Qué es una función lineal?

Una función lineal f(x) debe satisfacer las siguientes dos propiedades:

- Aditiva: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Homogénea (grado 1): $f(ax) = af(x)$

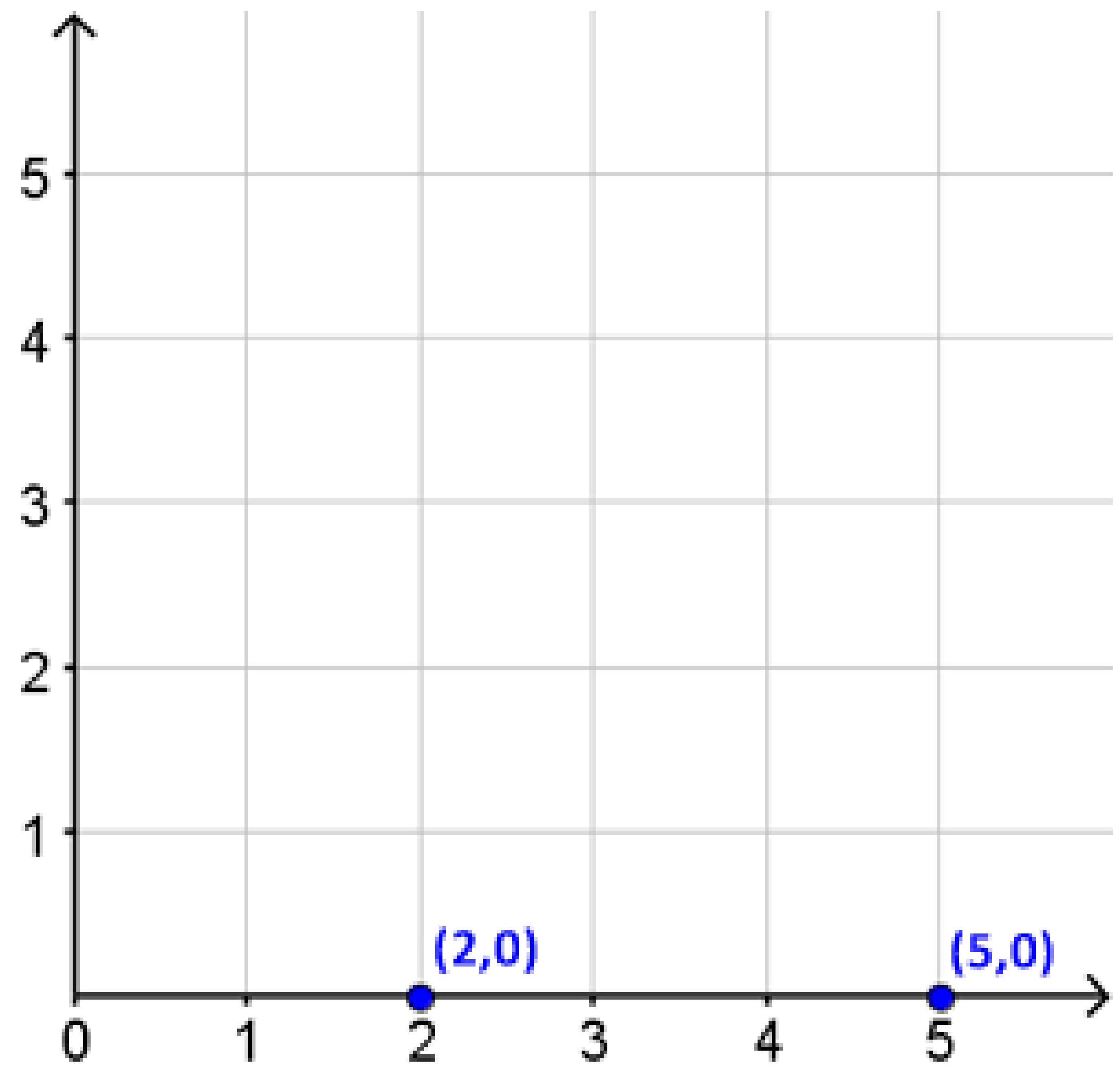


http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica3/pendiente.jpg

¿Qué es un punto?

Es una representación grafica (usualmente circular y diminuta) que le damos a una ubicación en el espacio.

Desde la perspectiva matemática, usualmente representamos un punto usando coordenadas cartesianas como un par ordenado (x,y,z…)



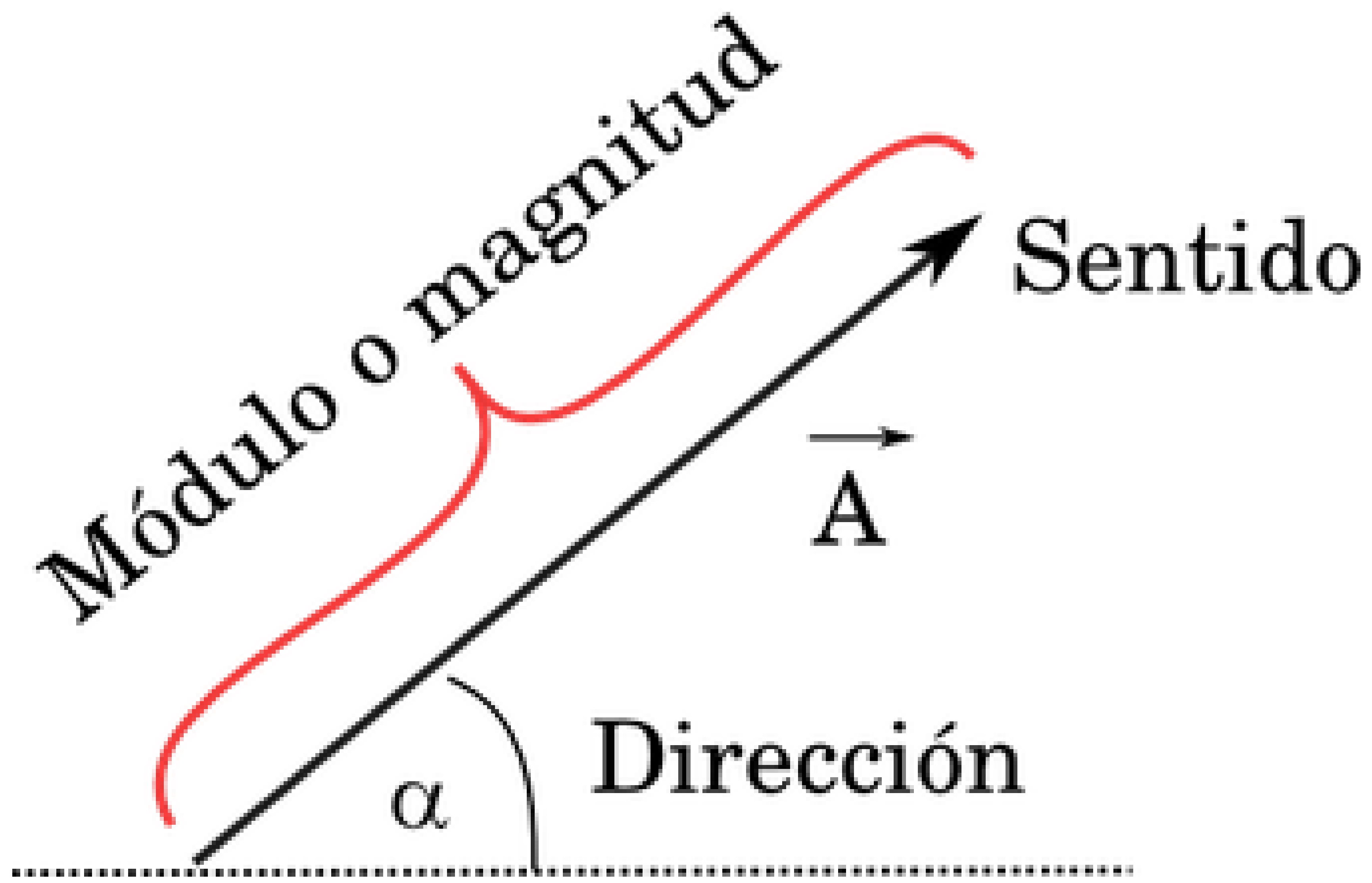
https://www.freemathhelp.com/images/lessons/distance7.png

¿Qué es un vector?

Es un objeto que cuenta con magnitud y dirección

En un espacio euclidiano se puede visualizar a un vector como una flecha que conecta dos puntos

- Donde la longitud de la flecha representa la magnitud
- La dirección esta representada por el lugar donde apunta la flecha



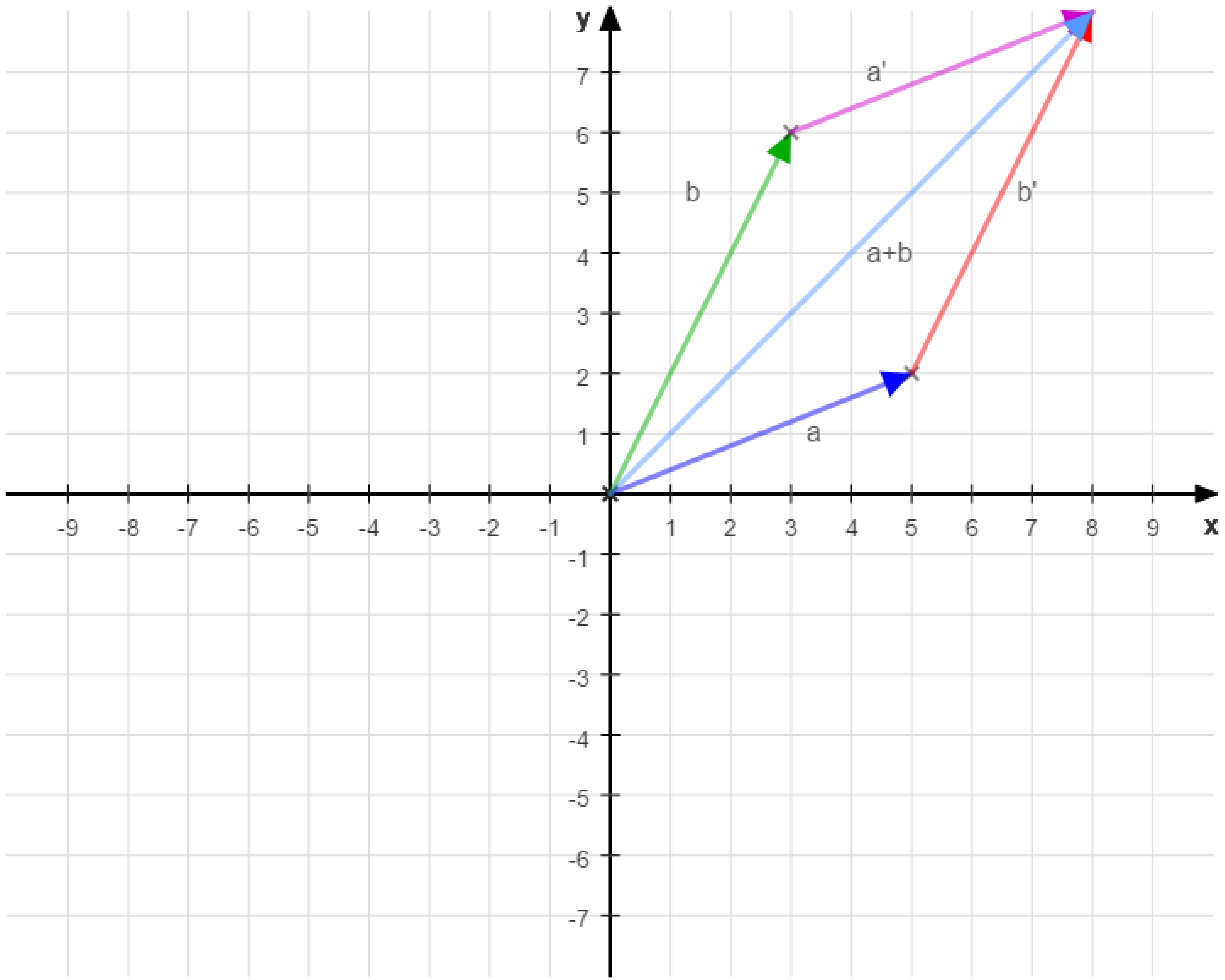
Propiedades de un vector

Magnitud

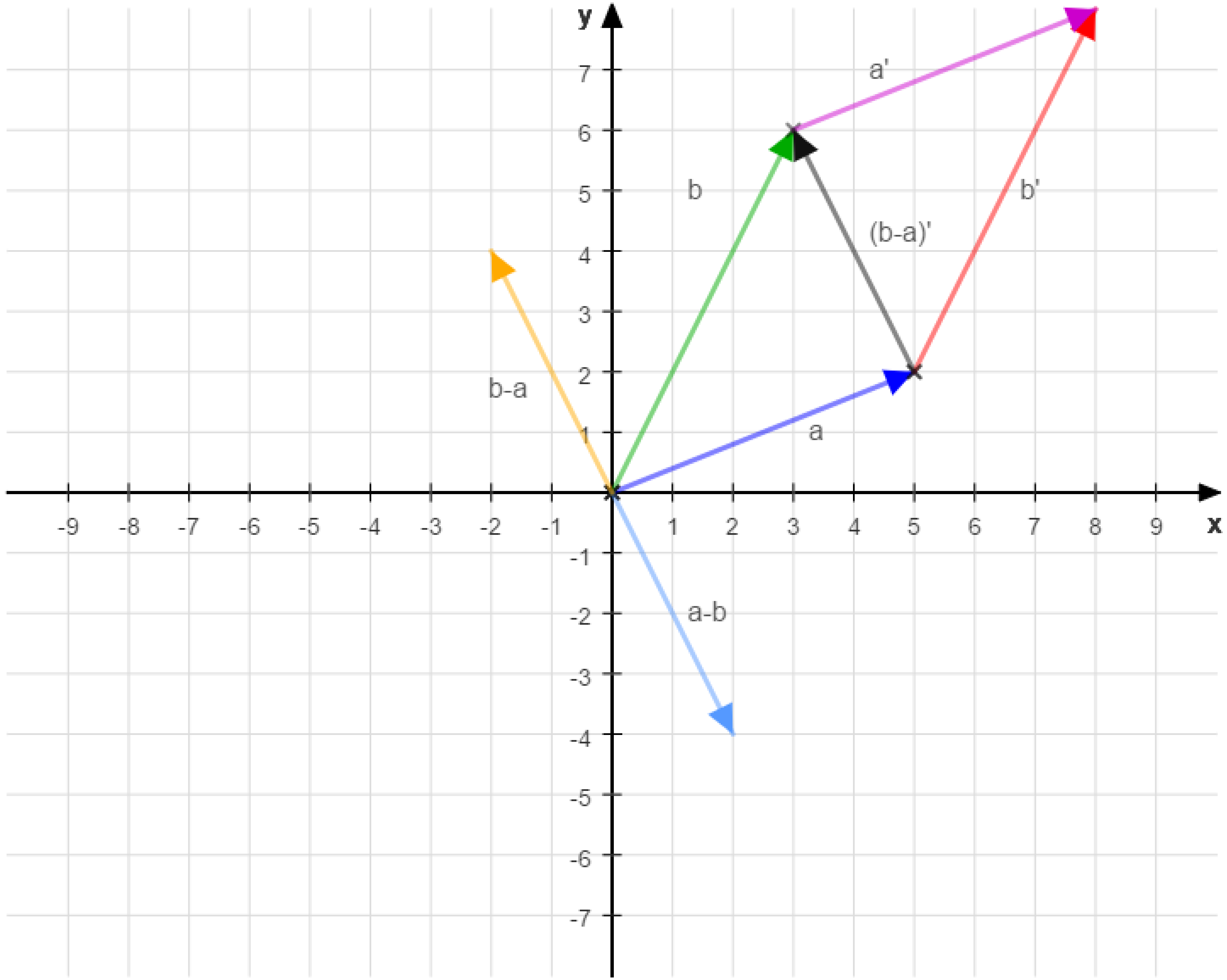
De manera informal, si vemos al vector como una flecha entre dos puntos, la magnitud se refiere a la longitud de dicha flecha.

$$a = \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \\ \hline \end{array} \qquad |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

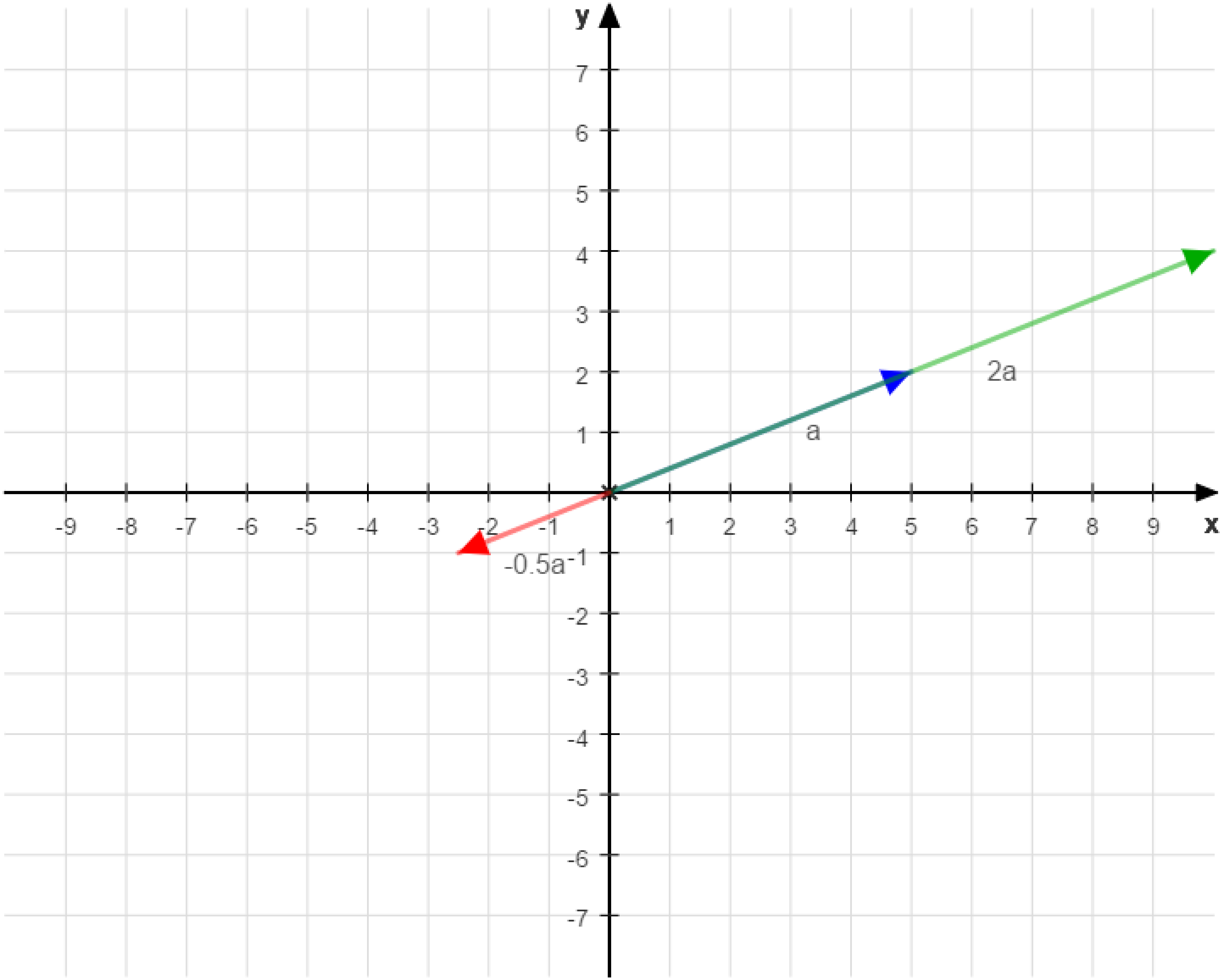
Suma de vectores



Resta de vectores



Escalamiento



Producto punto

Es la suma de la multiplicación de cada componente entre 2 vectores

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Alternativamente el producto punto se puede ver como el producto de las magnitudes de los vectores multiplicado por el cos(θ) donde θ es el ángulo menor entre los vectores

$$a \cdot b = |a| \; |b| \, cos(\theta)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Dice que el valor absoluto del producto punto de dos vectores esta acotado por la multiplicación de sus magnitudes

Demostración:

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

$$-|a|\,|b| \leq a \cdot b \leq |a|\,|b|$$

$$|a \cdot b| \leq |a|\,|b|$$

Interpretaciones

Qué quiere decir si:

$$a \cdot b = |a|\,|b|$$

$$a \cdot b = 0$$

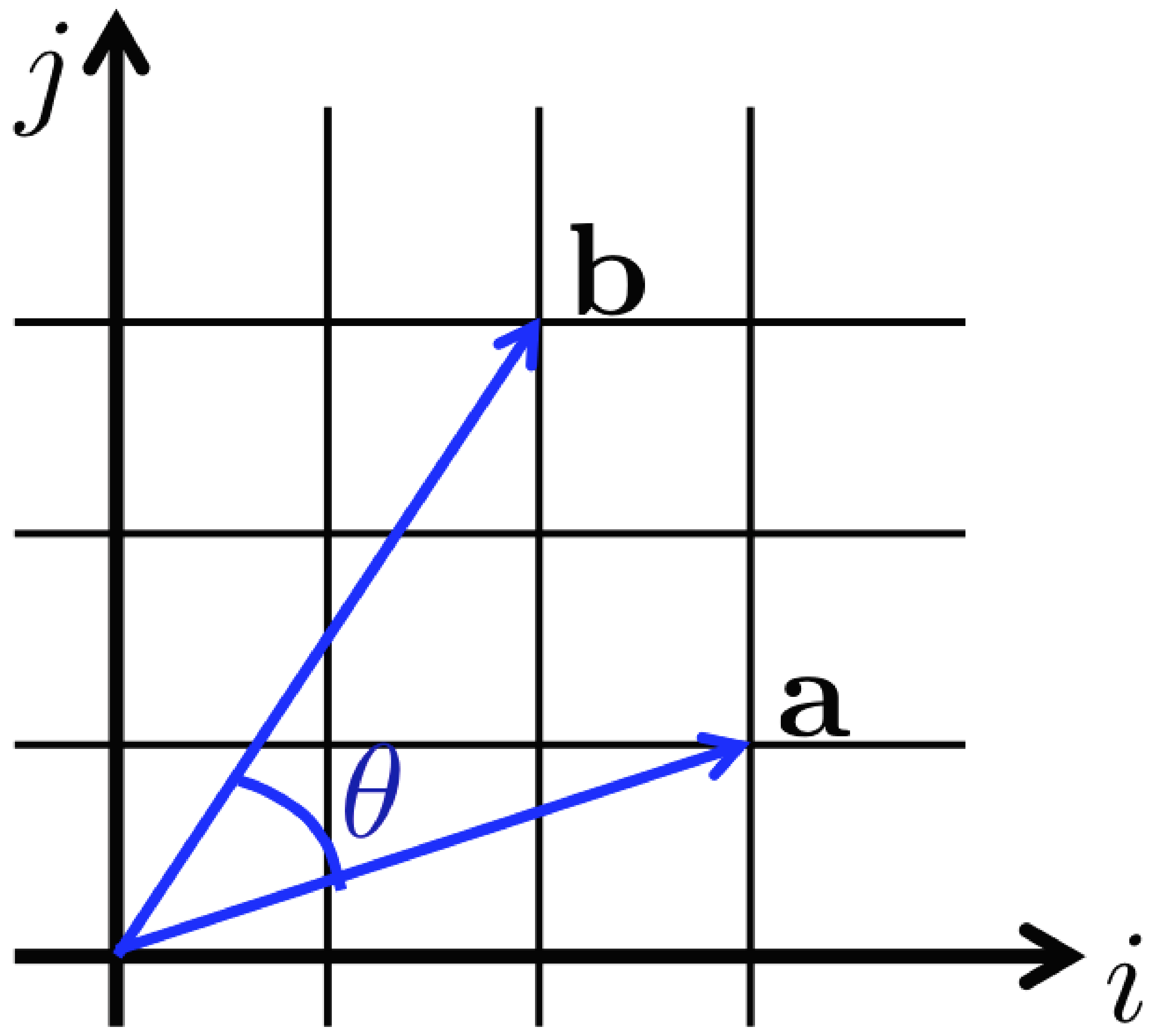
¿Cómo podemos calcular el ángulo entre vectores?

Pista:

$$a \cdot b = |a| \; |b| \, cos(\theta)$$

Propiedades de un vector

Ángulo entre vectores



$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

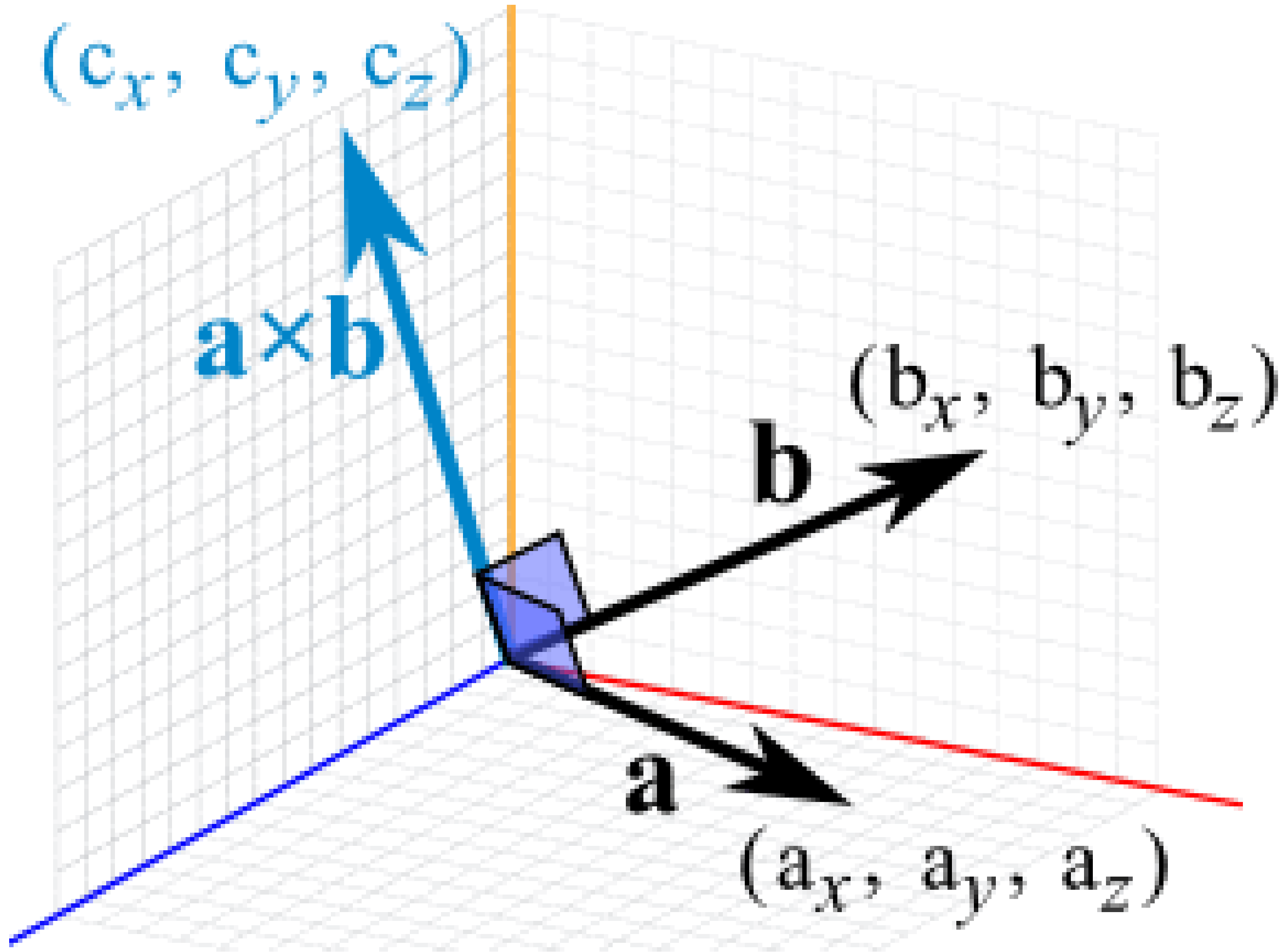
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{10}\sqrt{13}} \qquad \theta = 38^\circ$$

Producto cruz

Geométricamente, el producto cruz de 2 vectores es un vector que es ortogonal a ambos vectores.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad a \times b = \begin{bmatrix} (a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) \end{bmatrix}$$



Interpretaciones

Qué quiere decir si:

$$a \times b = \vec{0}$$

Bloque de ejercicio 1

1. Crear una función que realice la suma de 2 vectores
2. Crear una función que realice el producto punto entre 2 vectores (listas)
3. Crear una función que realice el producto cruz entre 2 vectores (3 elementos cada vector)

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad a \times b = \begin{bmatrix} (a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) \end{bmatrix}$$

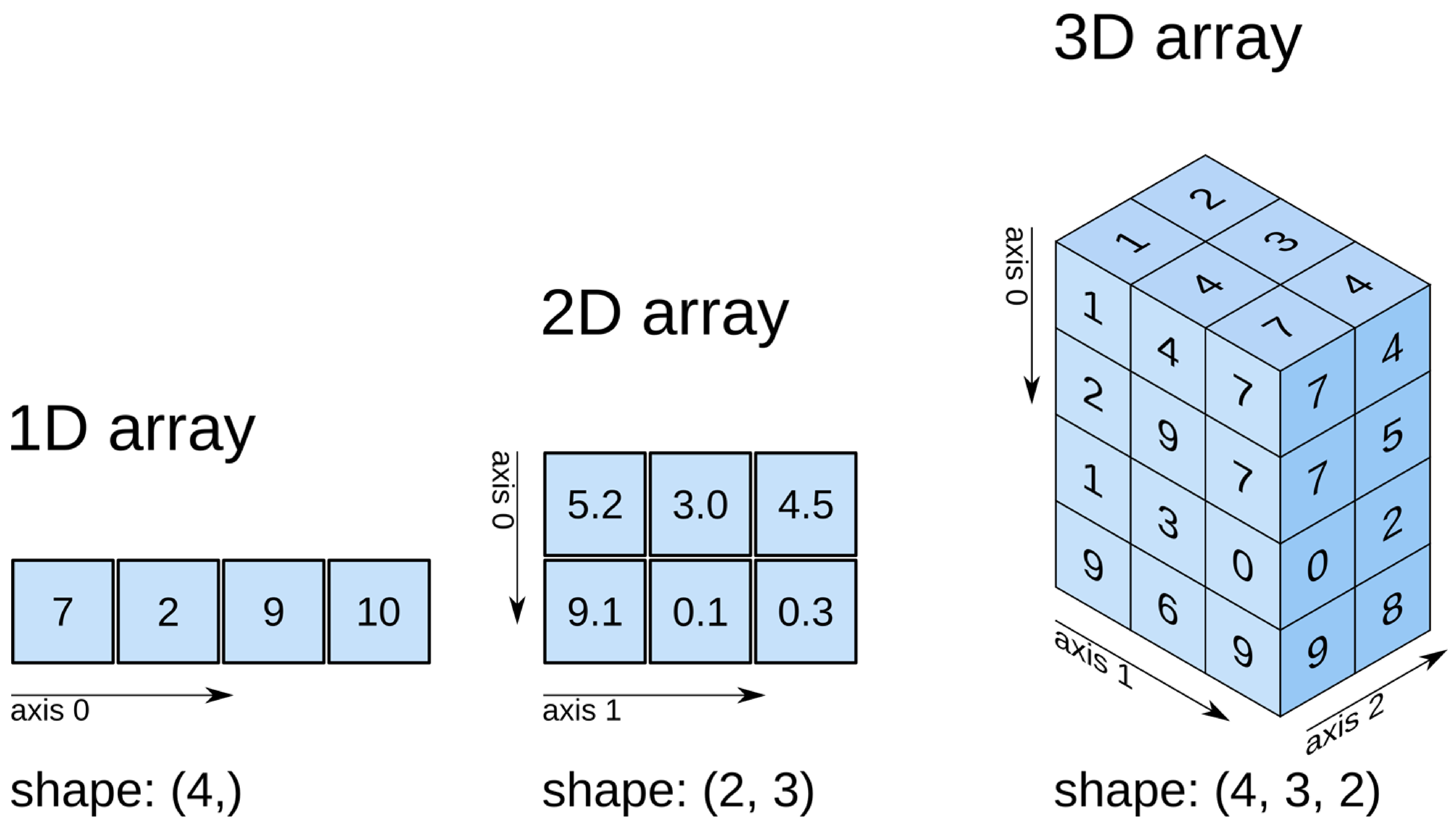
Graficar vectores con Matplotlib

```
import numpy as np
import math

def vsum(u,v):
	return u+v
def dot(u,v):
	return np.dot(u,v)
def cross(u,v):
	return np.cross(u,v)
def norm(u):
	return np.linalg(u)
def angle(u, v, degree=False):
	if(not degree):
		return math.acos(np.dot(u,v)/(np.linalg.norm(u)*np.linalg.norm(v)))
	else:
		return math.acos((np.dot(u,v)/(np.linalg.norm(u)*np.linalg.norm(v))))*57.2956
```

Numpy

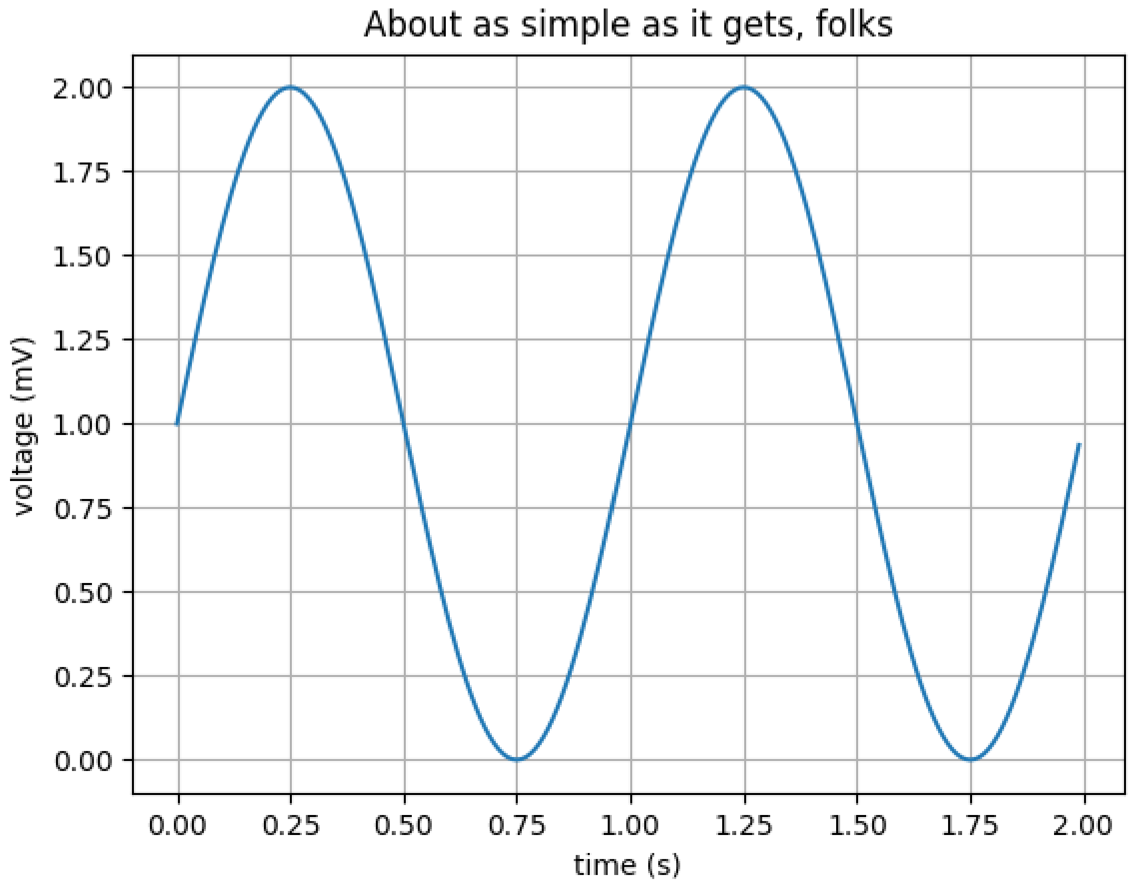
Es un paquete fundamental para la computación científica, tiene incorporado un gran número de funciones asociadas a algebra lineal.

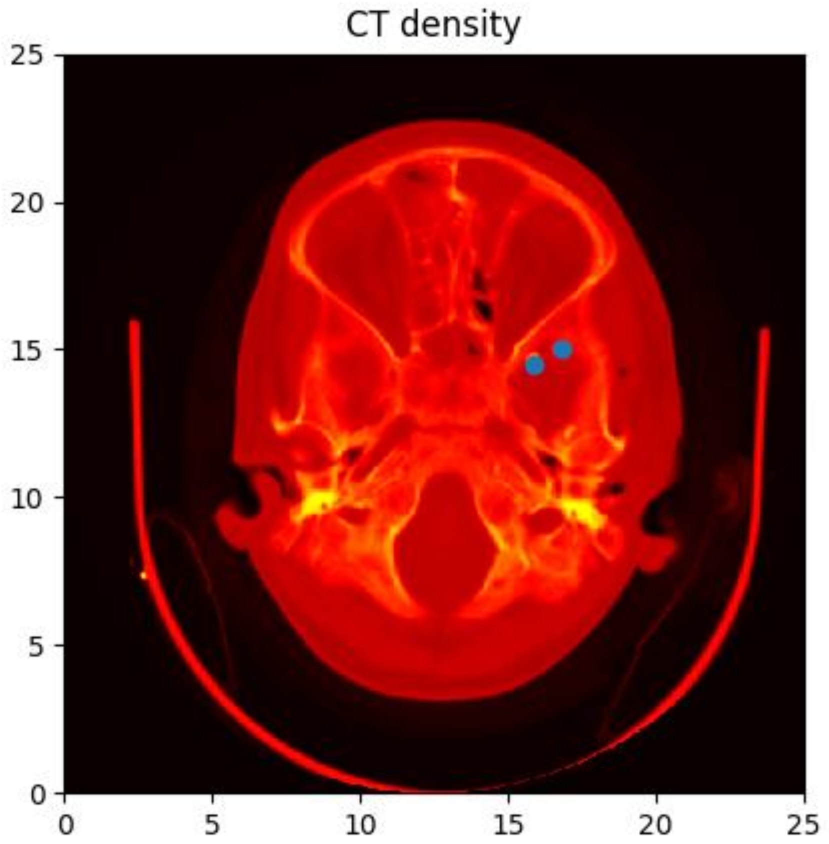


NumPy

Matplotlib

Es una librería para la generación de gráficos a partir de datos contenidos en listas.





Graficar vectores con Matplotlib

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def drawVector(lv): #list of vectors
    maxV = 0
    colors = ['black', 'red', 'green', 'orange', 'grey', 'purple', 'brown', 'purple']
    for i in range(len(lv)):
        v = lv[i]
        plt.quiver(0, 0, v[0], v[1], color=colors[i%len(colors)], angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
        if(max(v) > maxV):
            maxV = max(v)
    plt.xlim(-maxV*1.1, maxV*1.1)
    plt.ylim(-maxV*1.1, maxV*1.1)
    plt.show()
```

Bloque de ejercicio 2

1. Grafiquen 2 vectores y su suma
2. Grafiquen 2 vectores y su resta
3. Generen una lista que contenga 100 vectores de dimensión 2 y grafíquenlos

Nota pueden crear un vector en numpy con : np.numpyasarray(lista)

¿Qué es un matriz?

Una matriz es una colección de números ordenados por filas y columnas.

Se acostumbra a representar matrices como números encapsulados por paréntesis o corchetes.

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 3 & 15 \\ 8 & 4 & 11 & 7 \\ 2 & 14 & 1 & 13 \\ 10 & 6 & 9 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, donde decimos que a es una matriz de tamaño m filas por n columnas

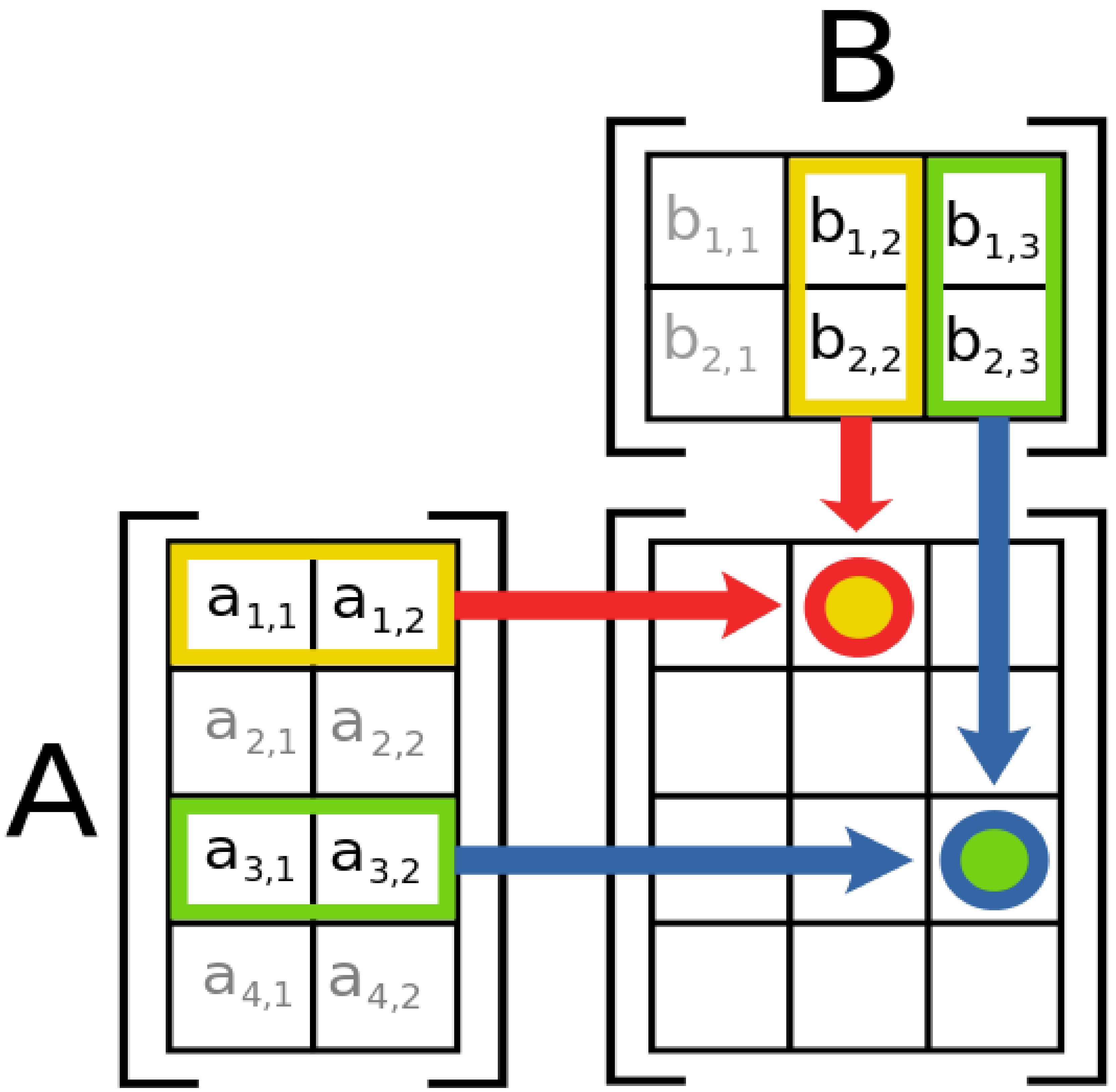
Producto de matrices

El producto de 2 matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m \times n}}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nxp}}$ es la matriz:

$$C = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

Donde:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication#/media/File:Matrix_multiplication_diagram_2.svg

Producto de matrices

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -4 & 10 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3\times 9 + -2\times -4 + -1\times -2 & -3\times -3 + -2\times 10 + -1\times 0 & -3\times -1 + -2\times 11 + -1\times 2 \\ 2\times 9 + 3\times -4 + 0\times -2 & 2\times -3 + 3\times 10 + 0\times 0 & 2\times -1 + 3\times 11 + 0\times 2 \\ 1\times 9 + 4\times -4 + 5\times -2 & 1\times -3 + 4\times 10 + 5\times 0 & 1\times -1 + 4\times 11 + 5\times 2 \\ 6\times 9 + 7\times -4 + 8\times -2 & 6\times -3 + 7\times 10 + 8\times 0 & 6\times -1 + 7\times 11 + 8\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -17 & -11 & -21 \\ 6 & 24 & 31 \\ -17 & 37 & 53 \\ 10 & 52 & 87 \end{bmatrix}$$

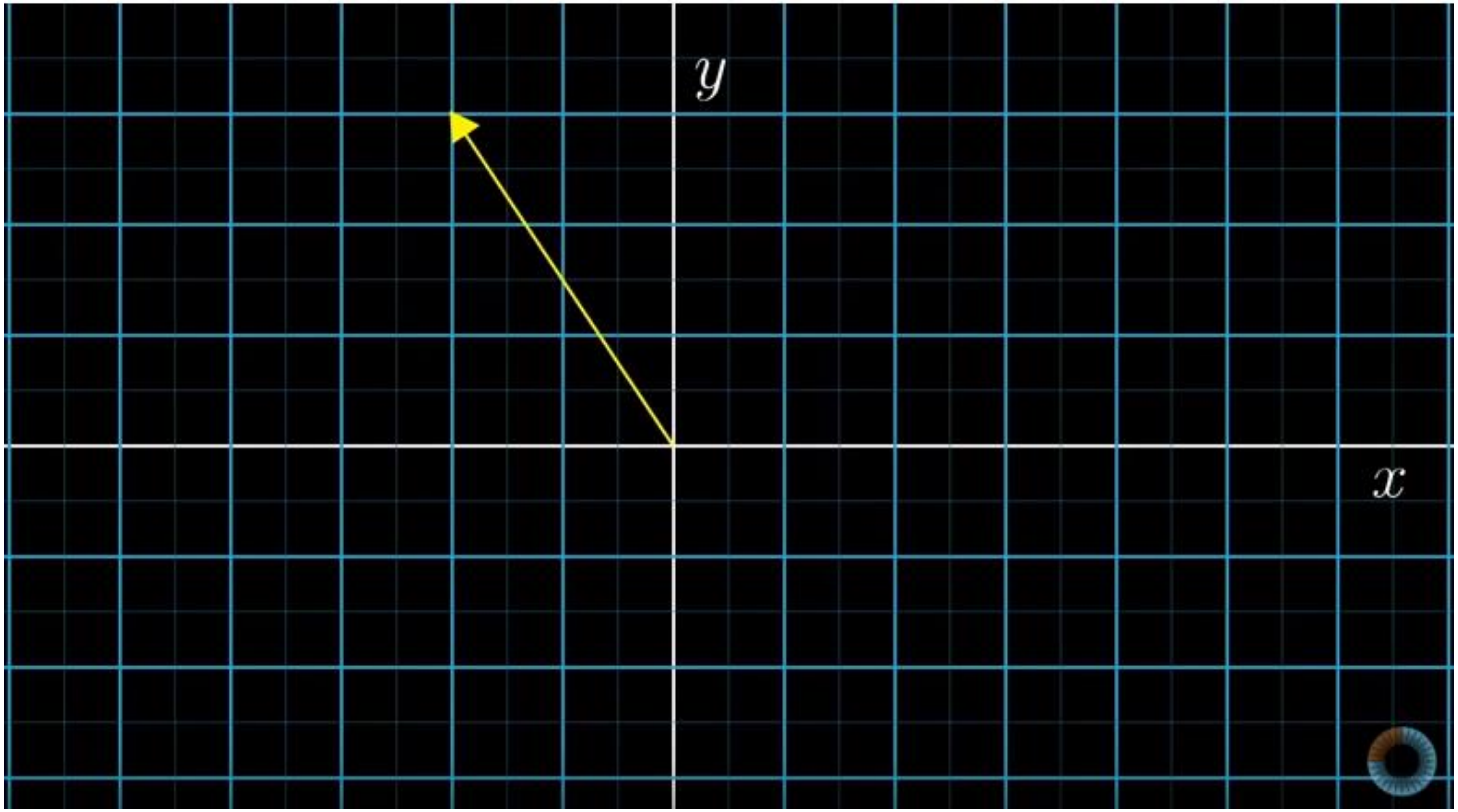
http://s3-ap-southeast-1.amazonaws.com/subscriber.images/maths/2016/08/05115330/Matrix-Multiplication-5.jpg

¿Cuál es el significado de…?

1. ¿Cuál es el significado de una matriz?
2. ¿Qué quiere decir multiplicar una matriz por un vector?
3. ¿Qué quiere decir la multiplicación de matrices?

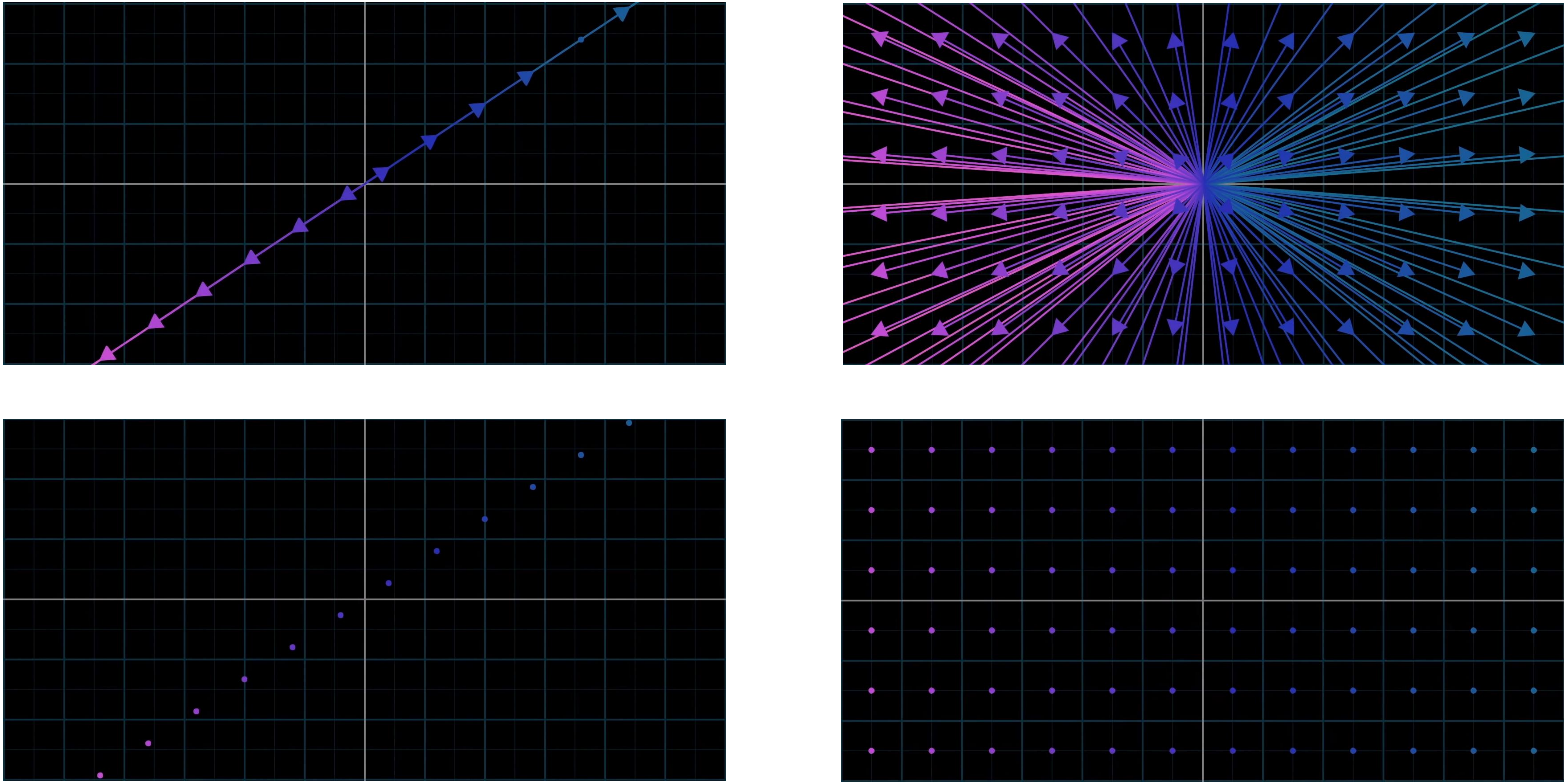
http://s3-ap-southeast-1.amazonaws.com/subscriber.images/maths/2016/08/05115330/Matrix-Multiplication-5.jpg

Breve repaso de algebra lineal

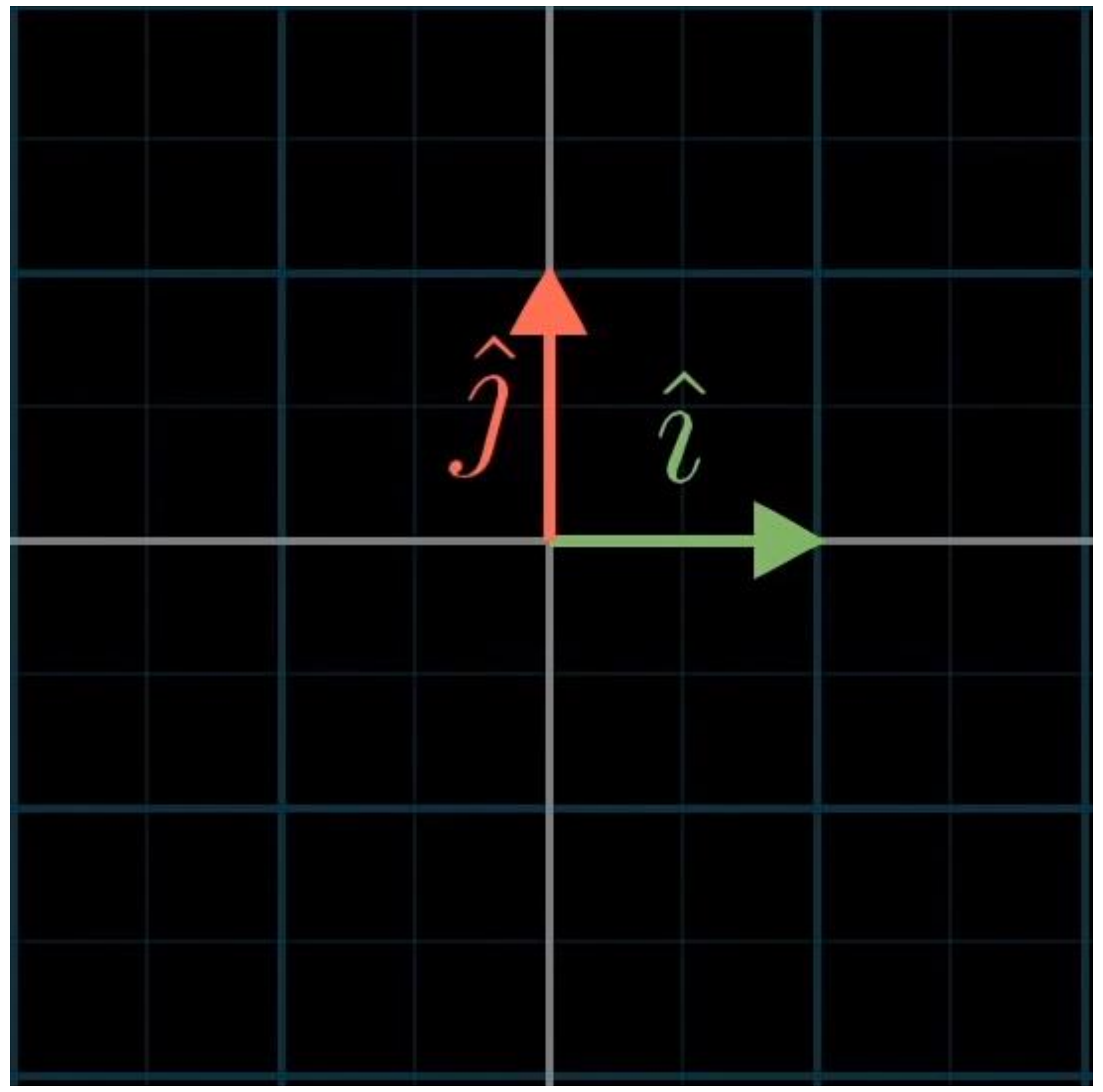


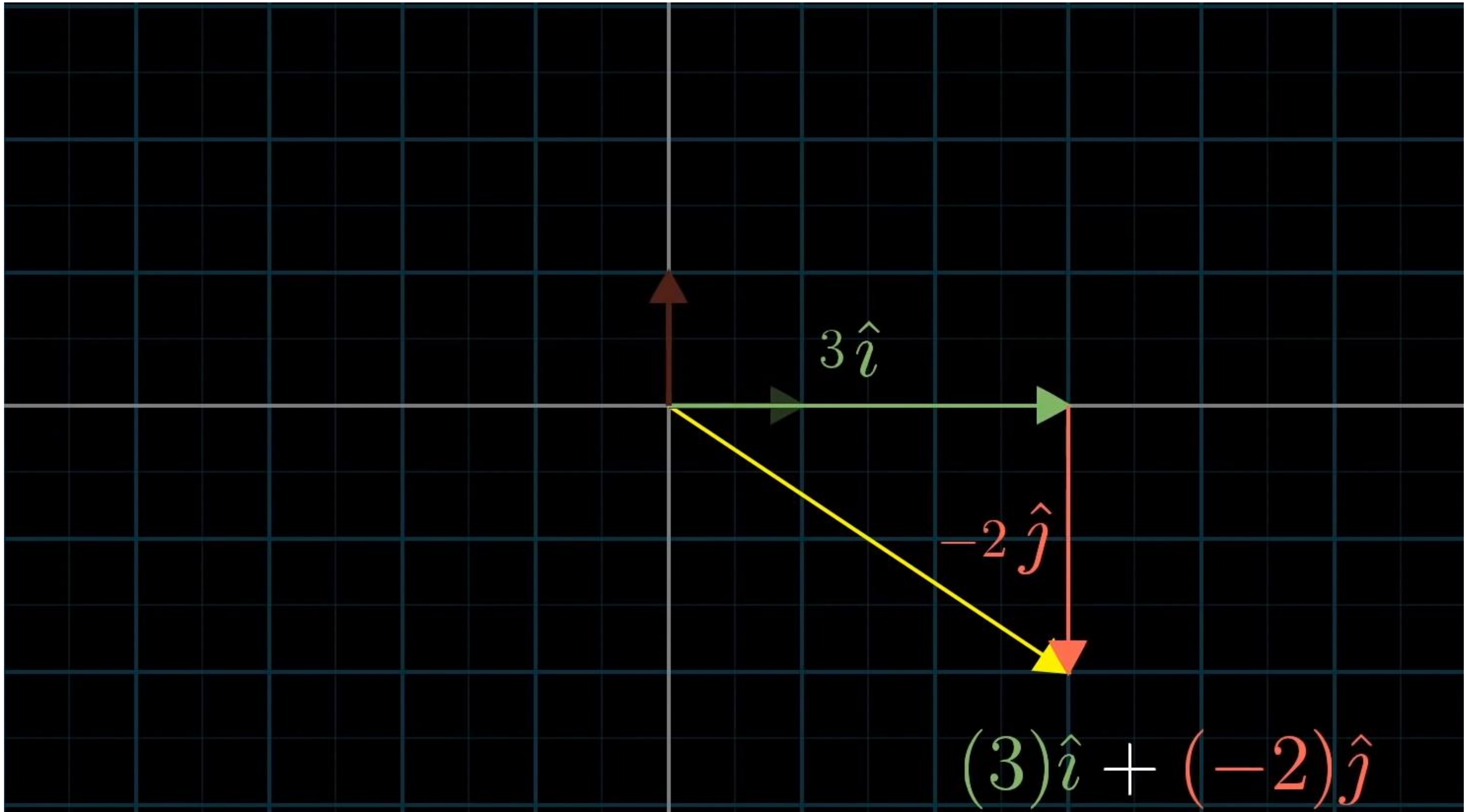
Canal: 3 Blue, 1 Brown
https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab

Breve repaso de algebra lineal

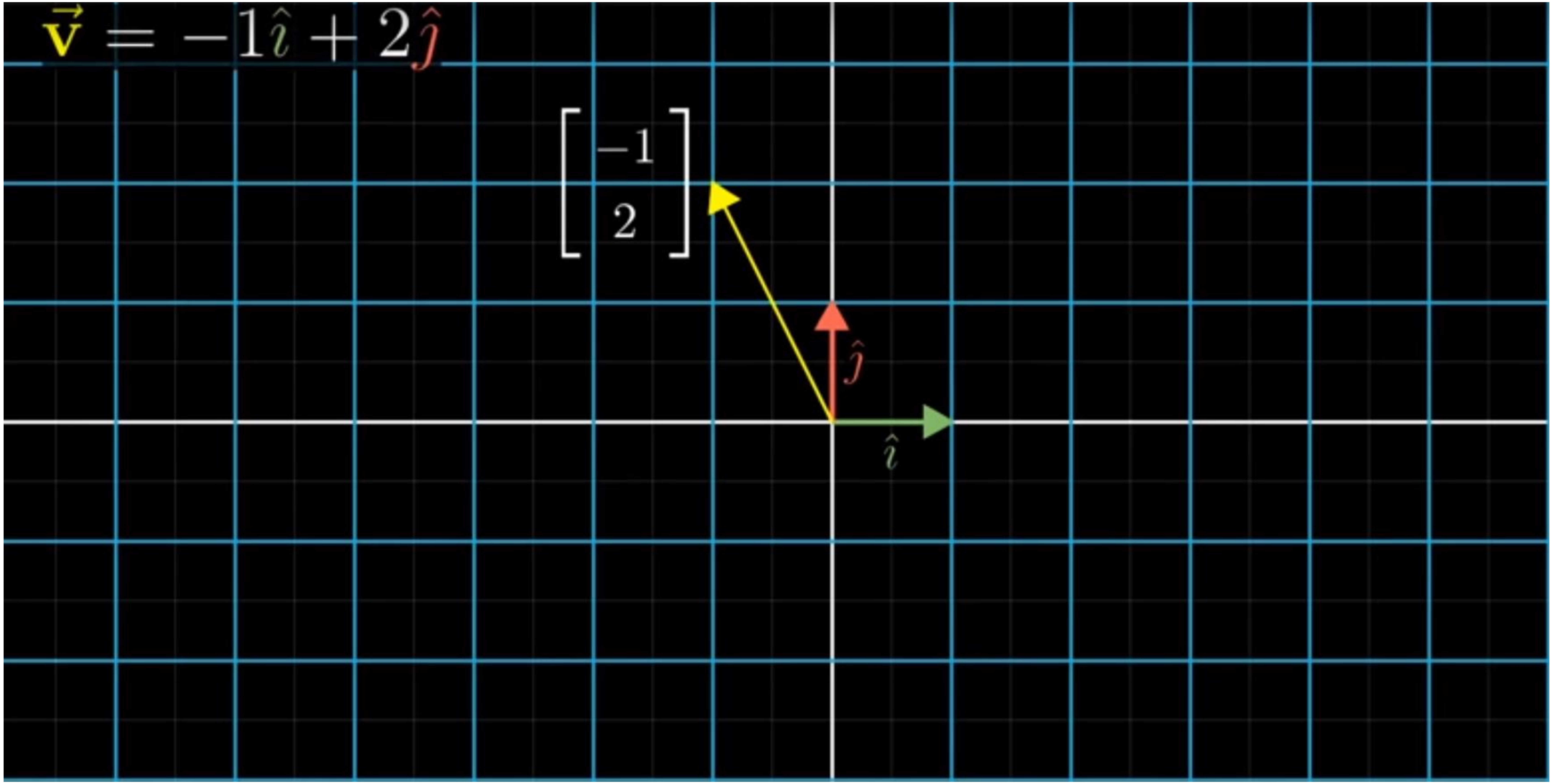


Breve repaso de algebra lineal

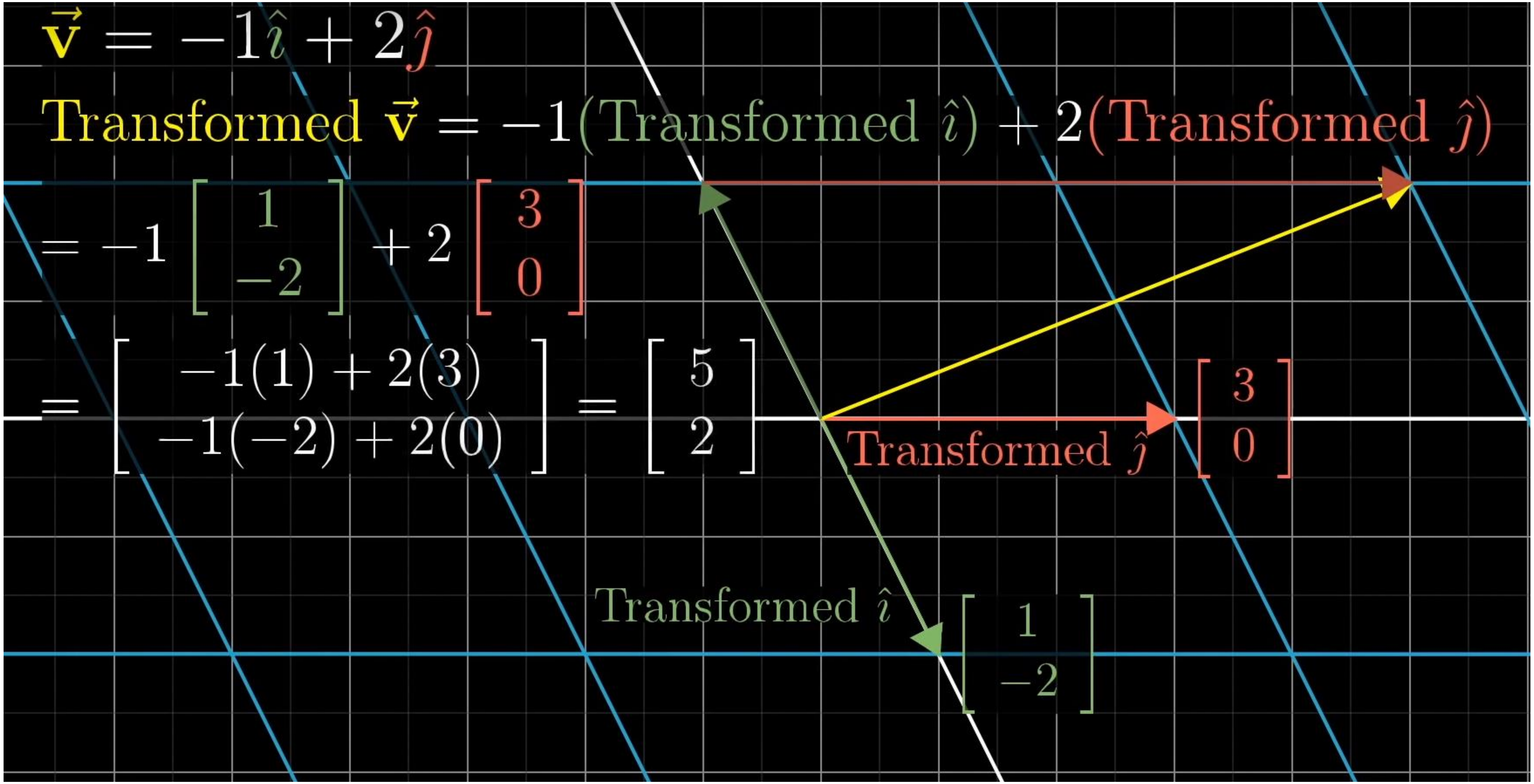




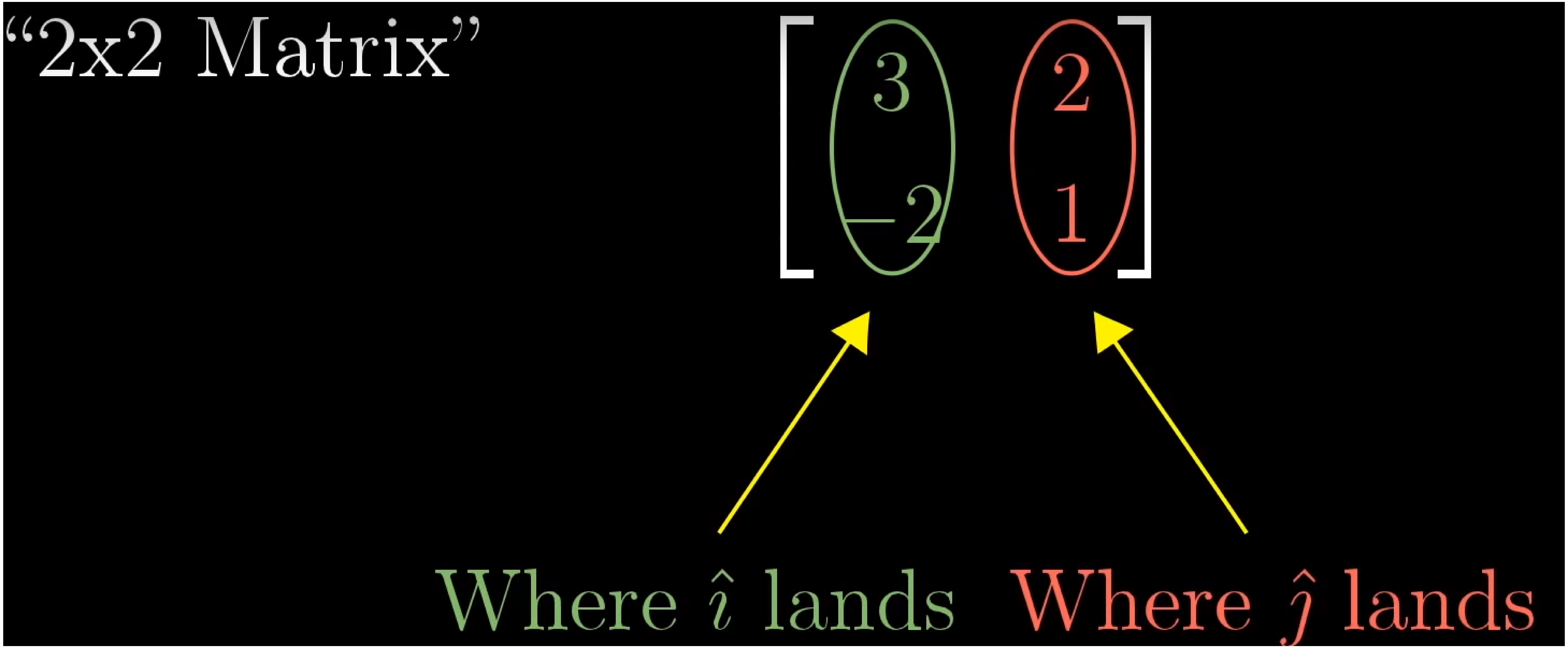
Breve repaso de algebra lineal



Breve repaso de algebra lineal



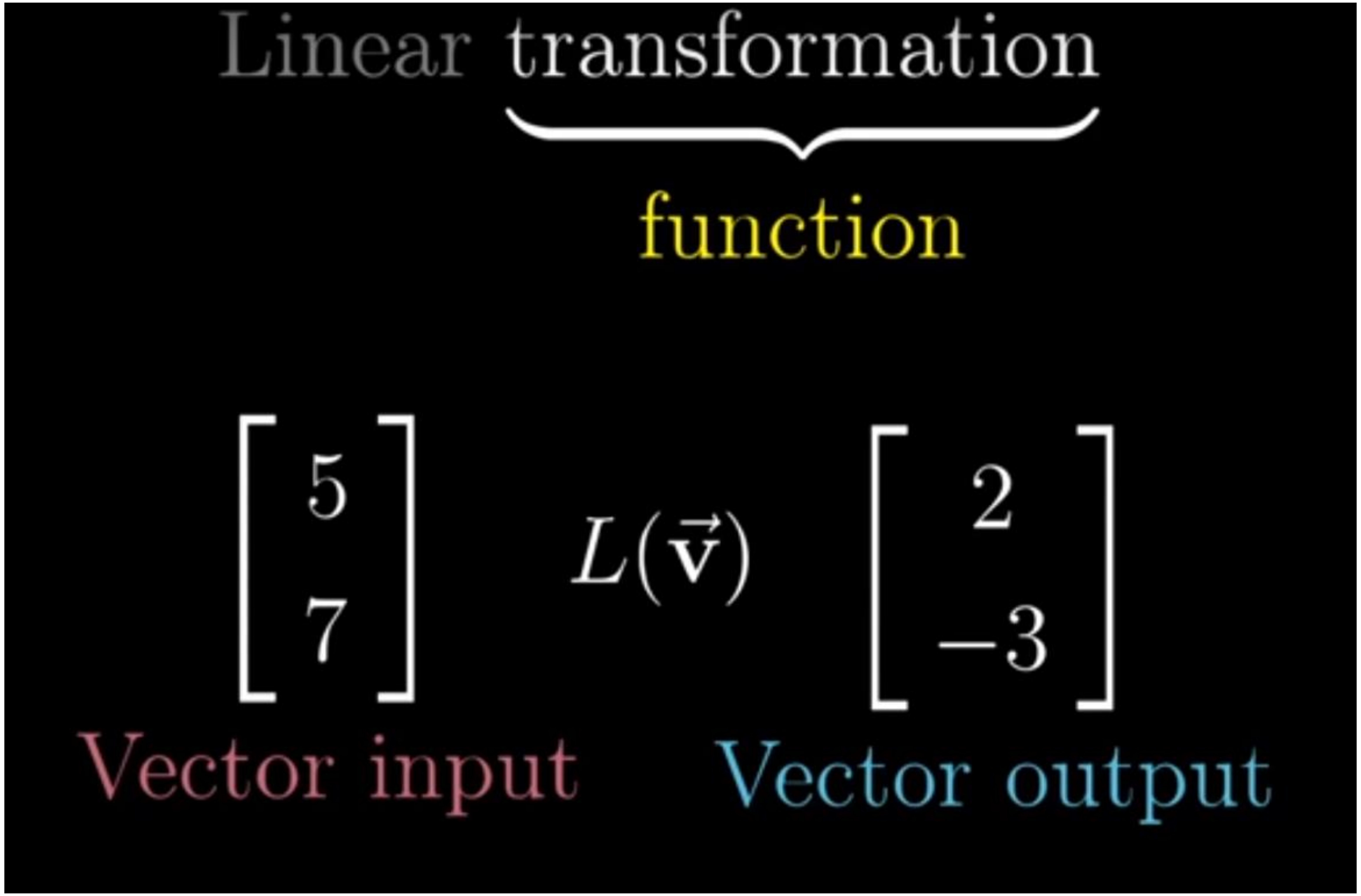
¿Cuál es el significado geométrico de la multiplicación de una matriz con un vector?



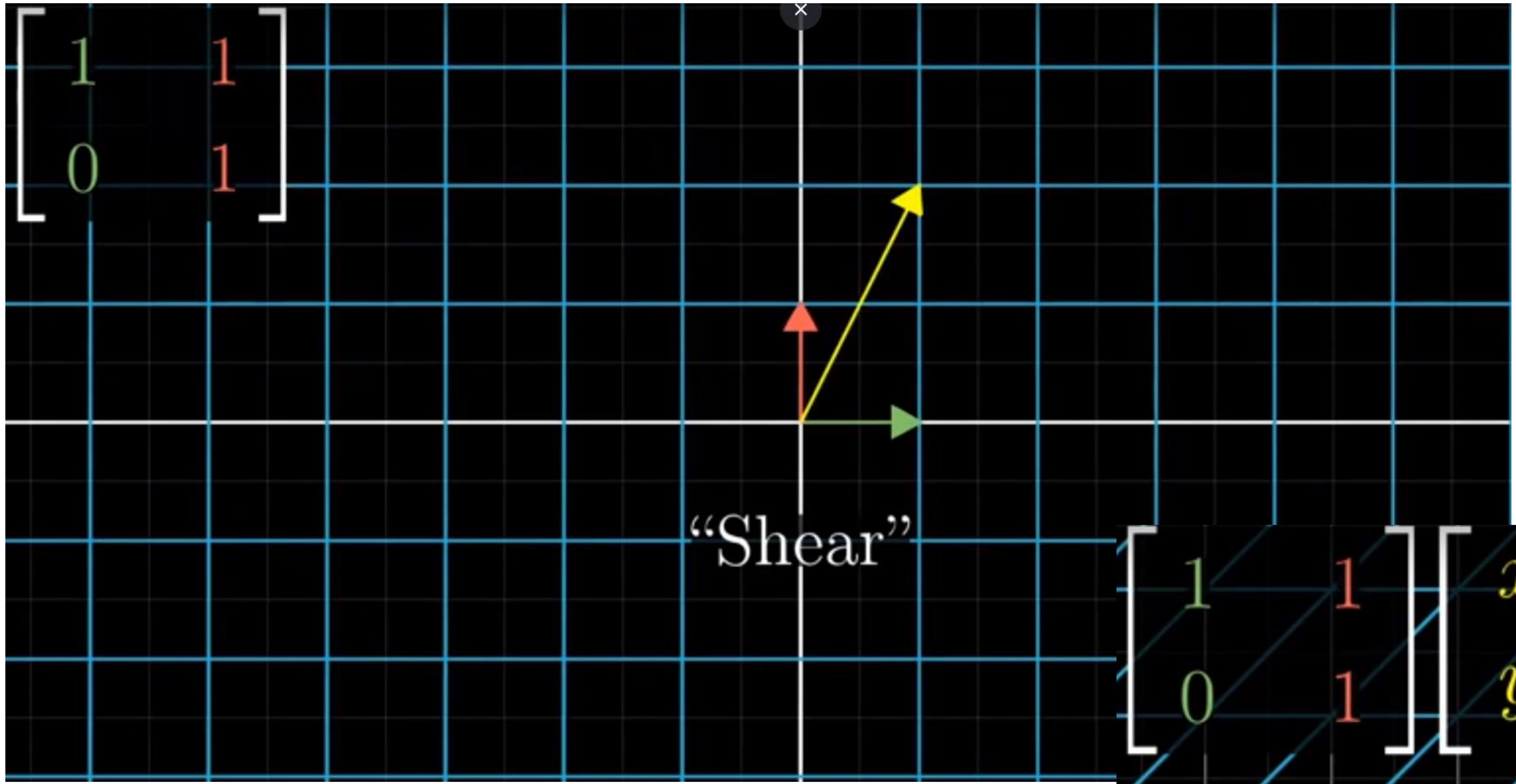
Breve repaso de algebra lineal

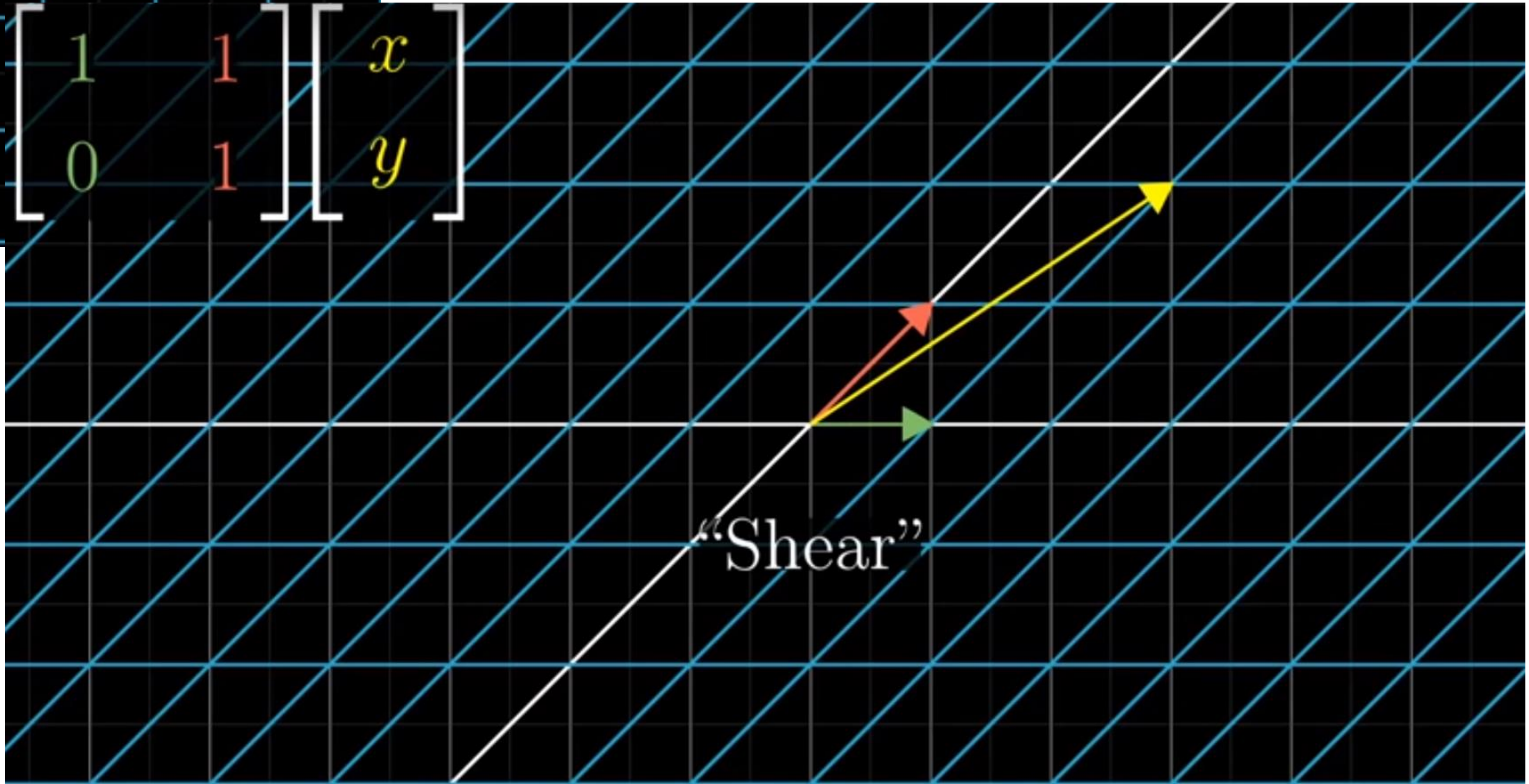
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}}_{\text{Where all the intuition is}} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

Breve repaso de algebra lineal



Breve repaso de algebra lineal

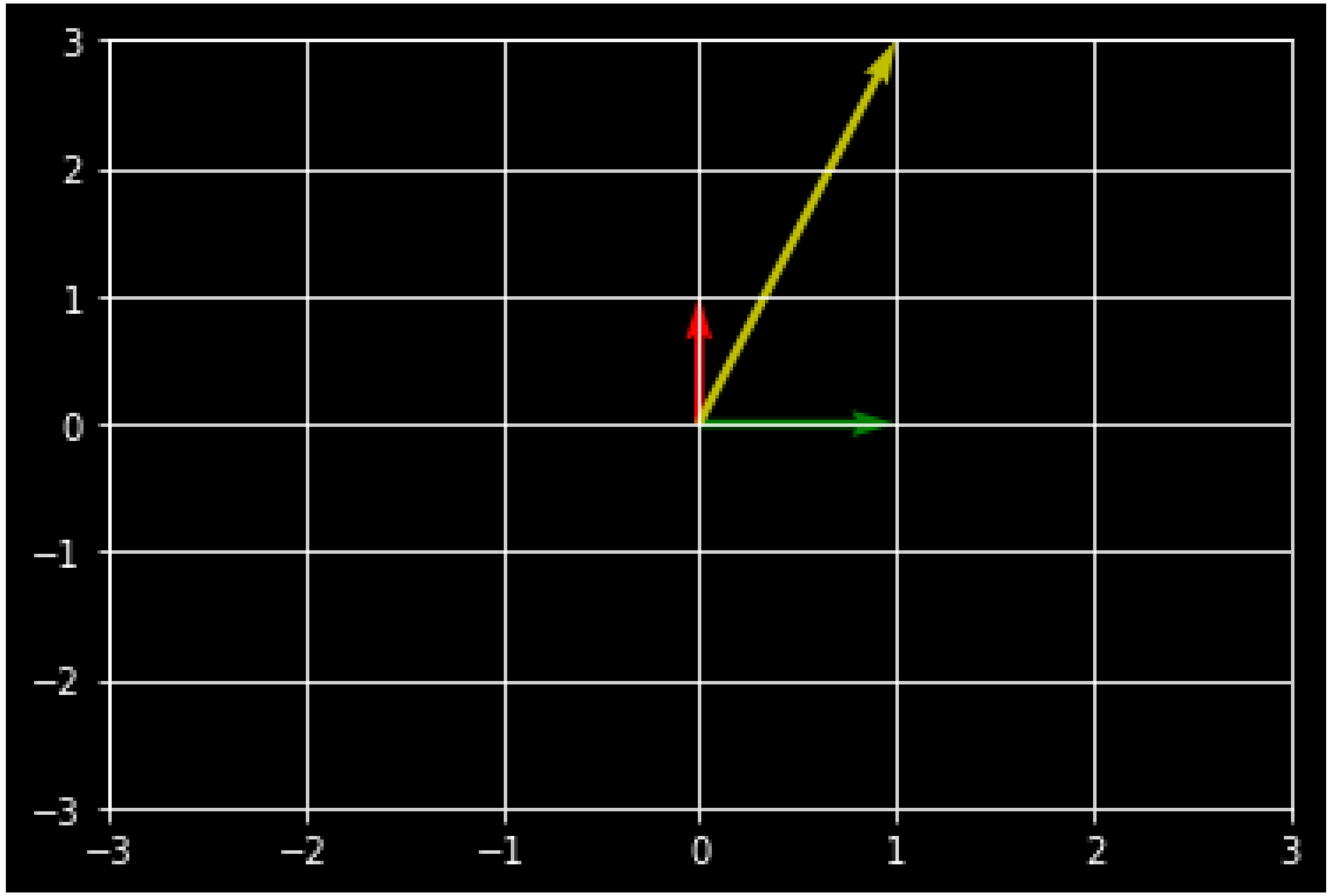




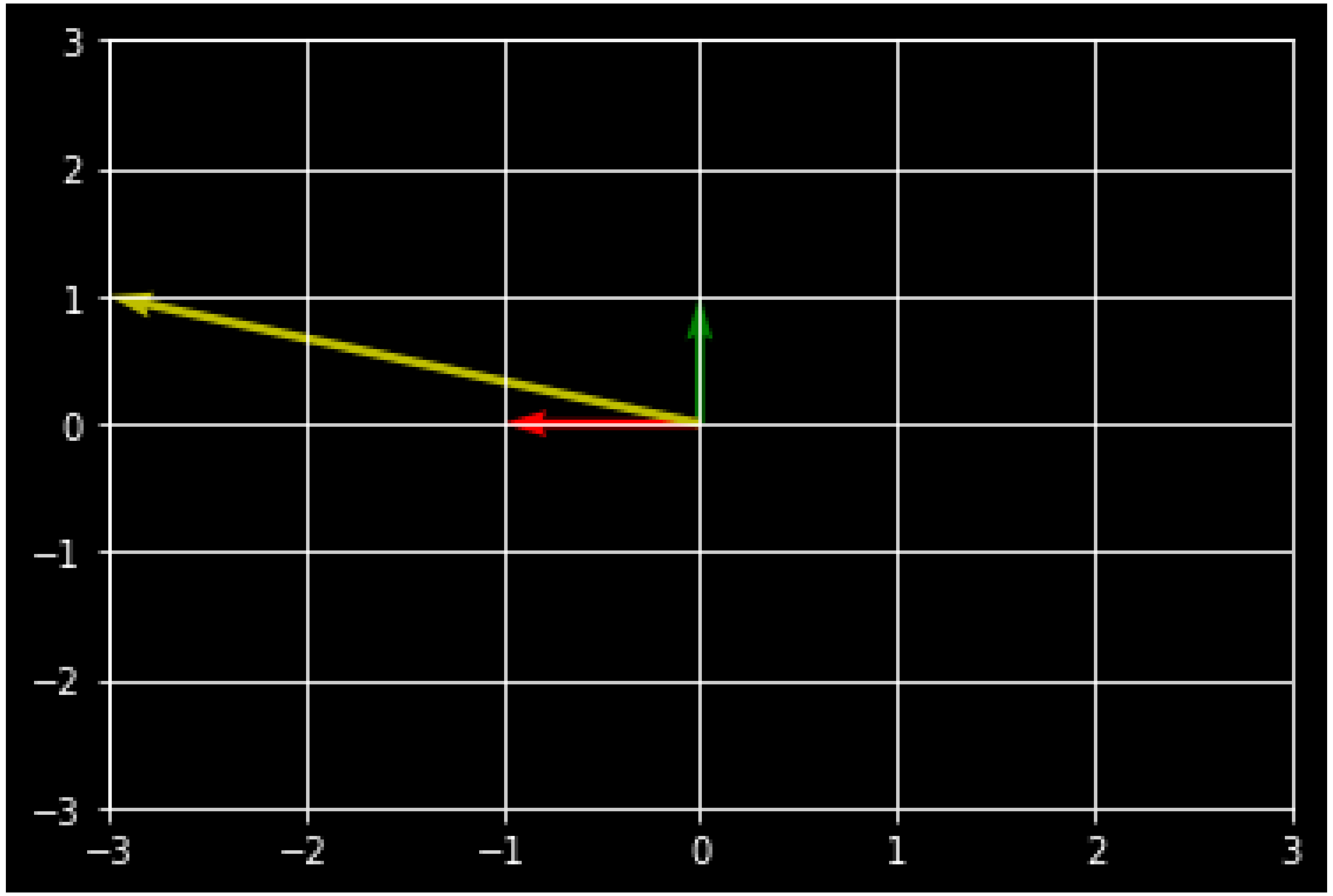
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Breve repaso de algebra lineal

¿Qué matriz nos ayudaría a rotar un vector 90 grados?



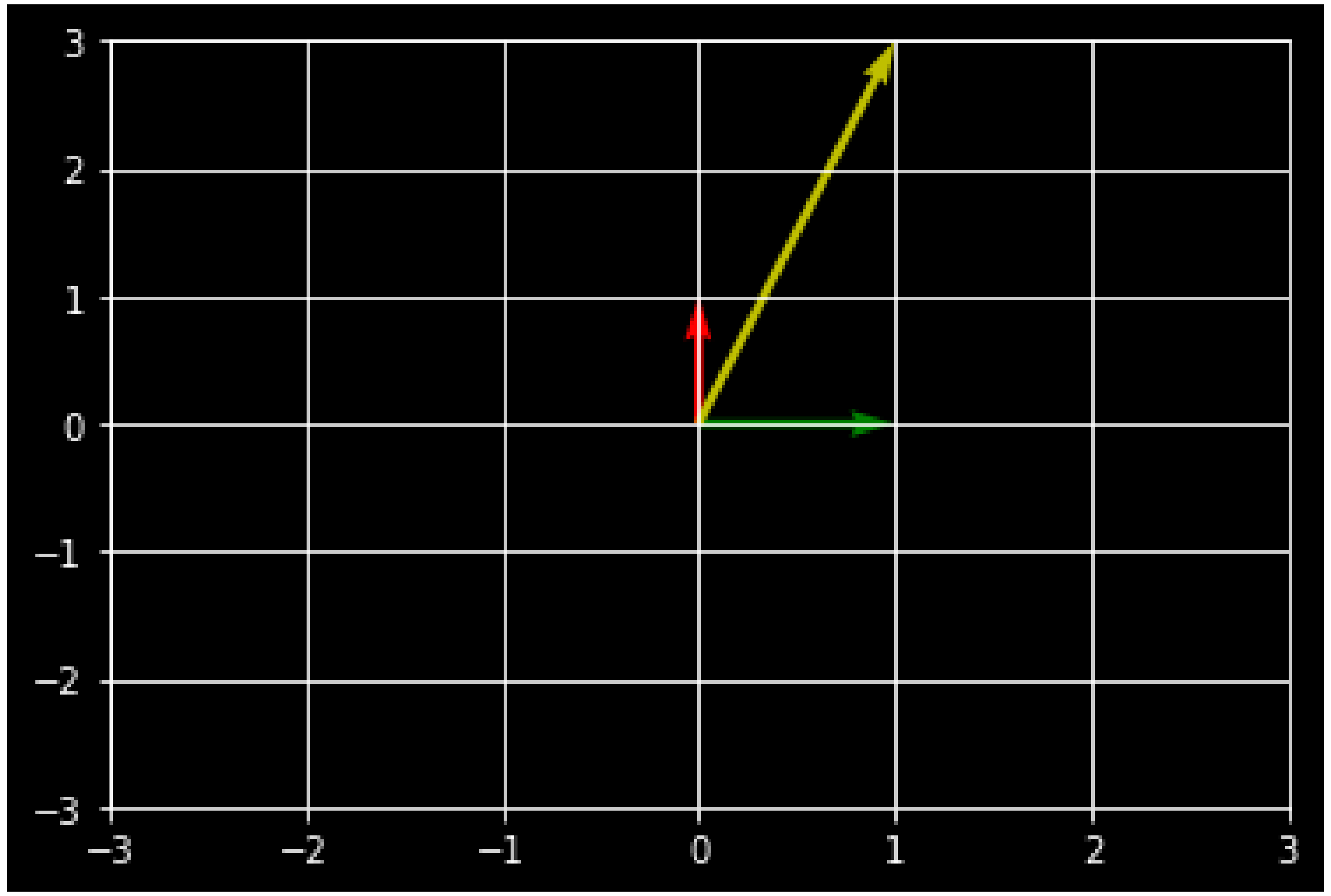
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

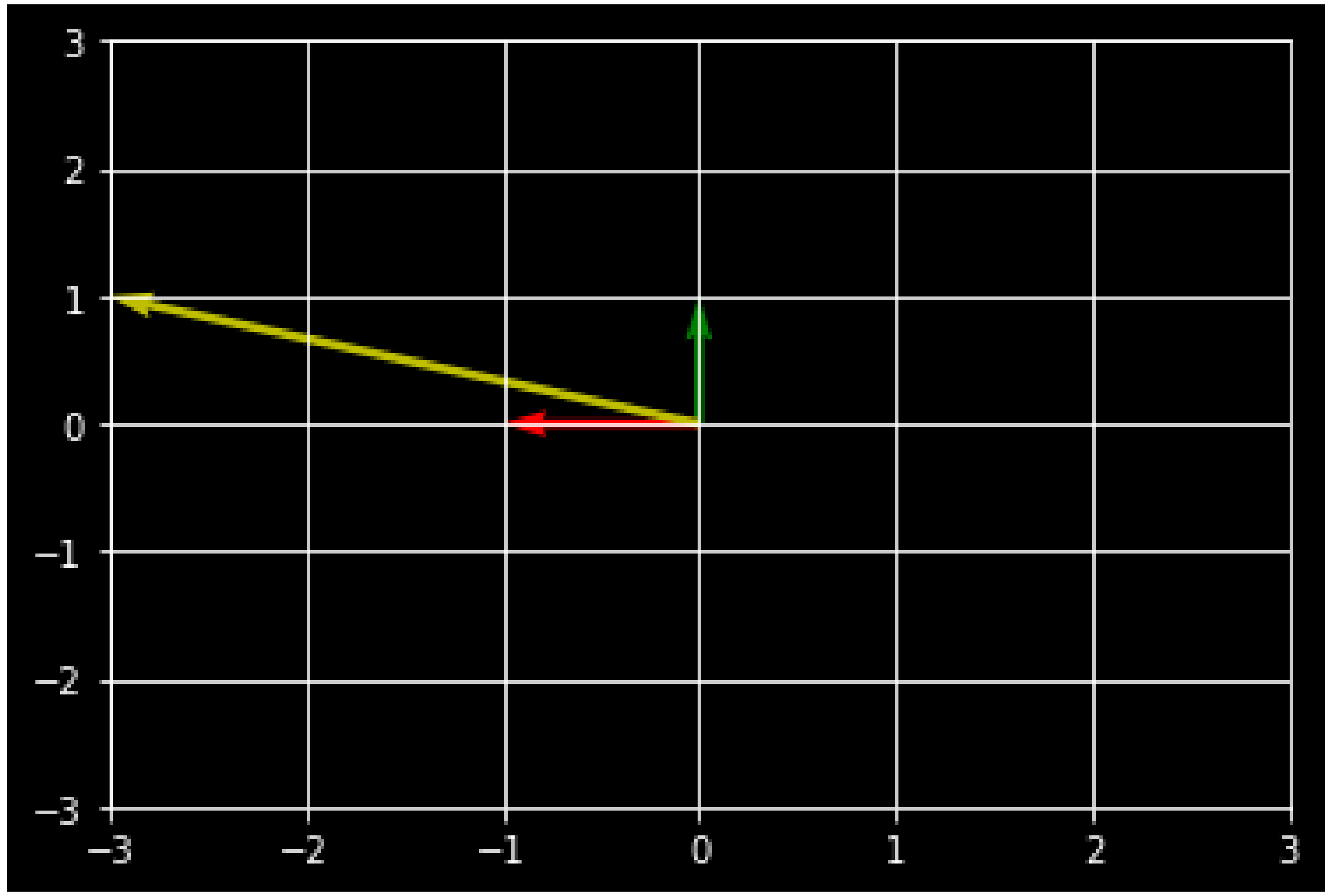


¿Cuál es el significado geométrico de la multiplicación de matrices?

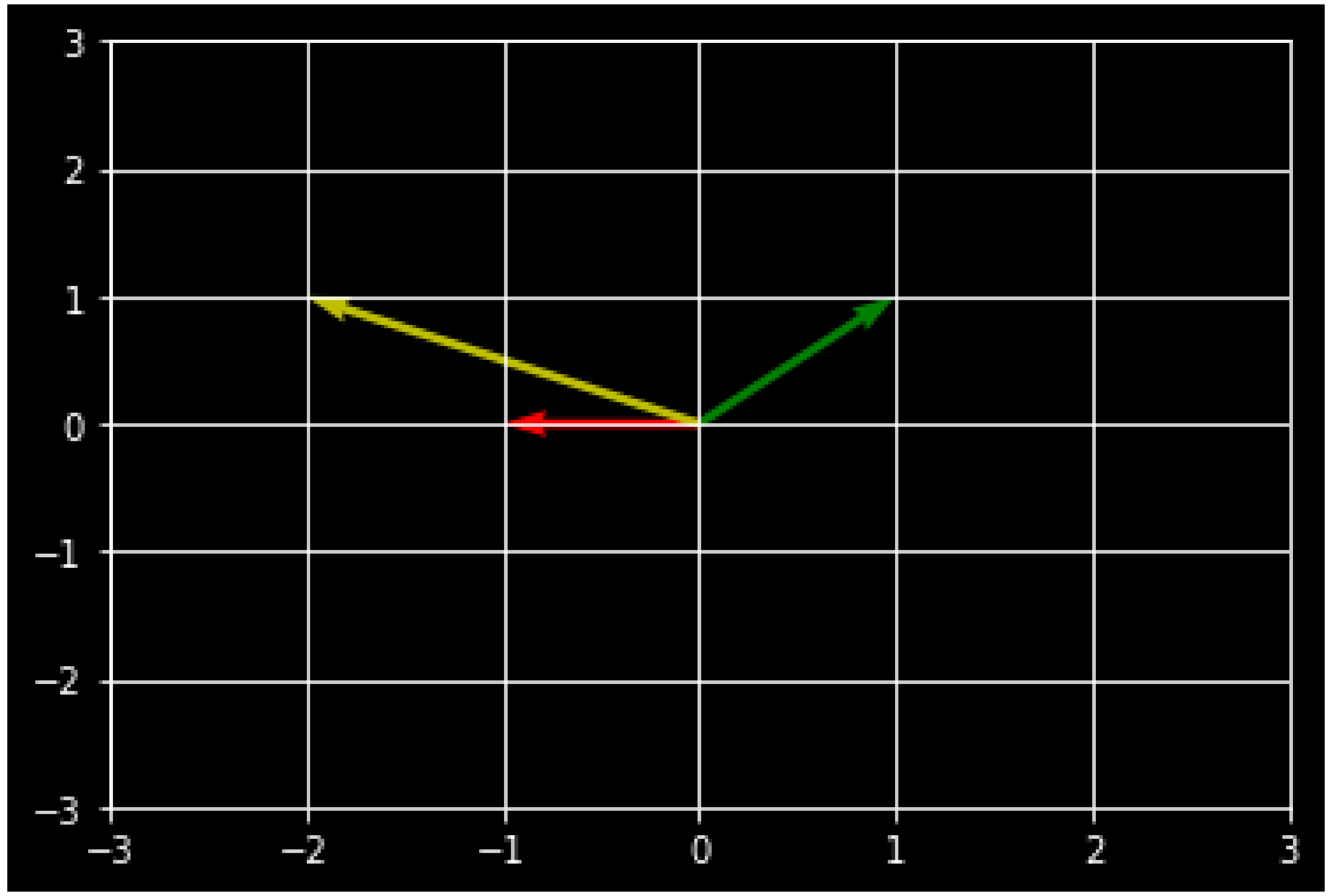
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Shear}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Composition}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Breve repaso de algebra lineal





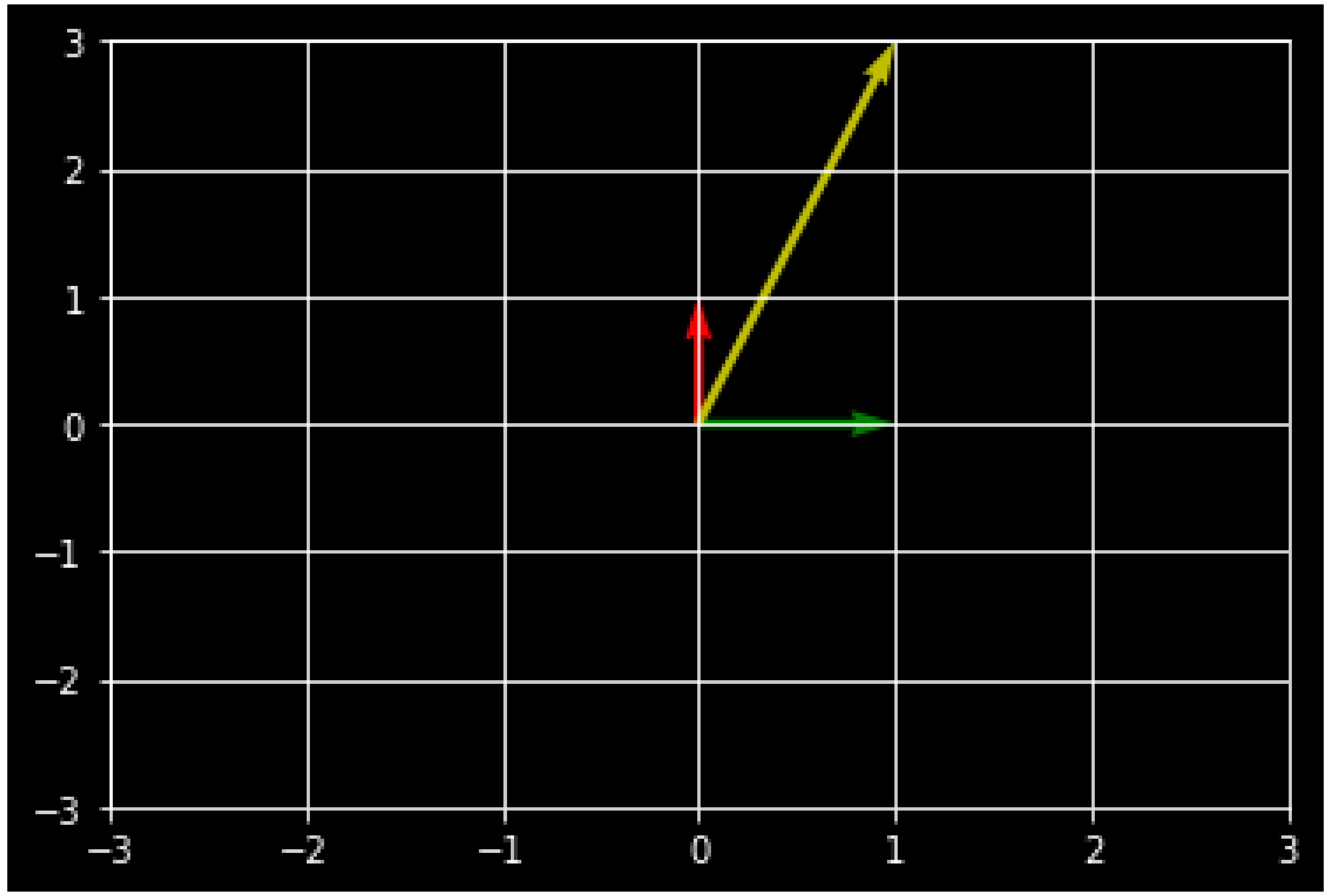
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

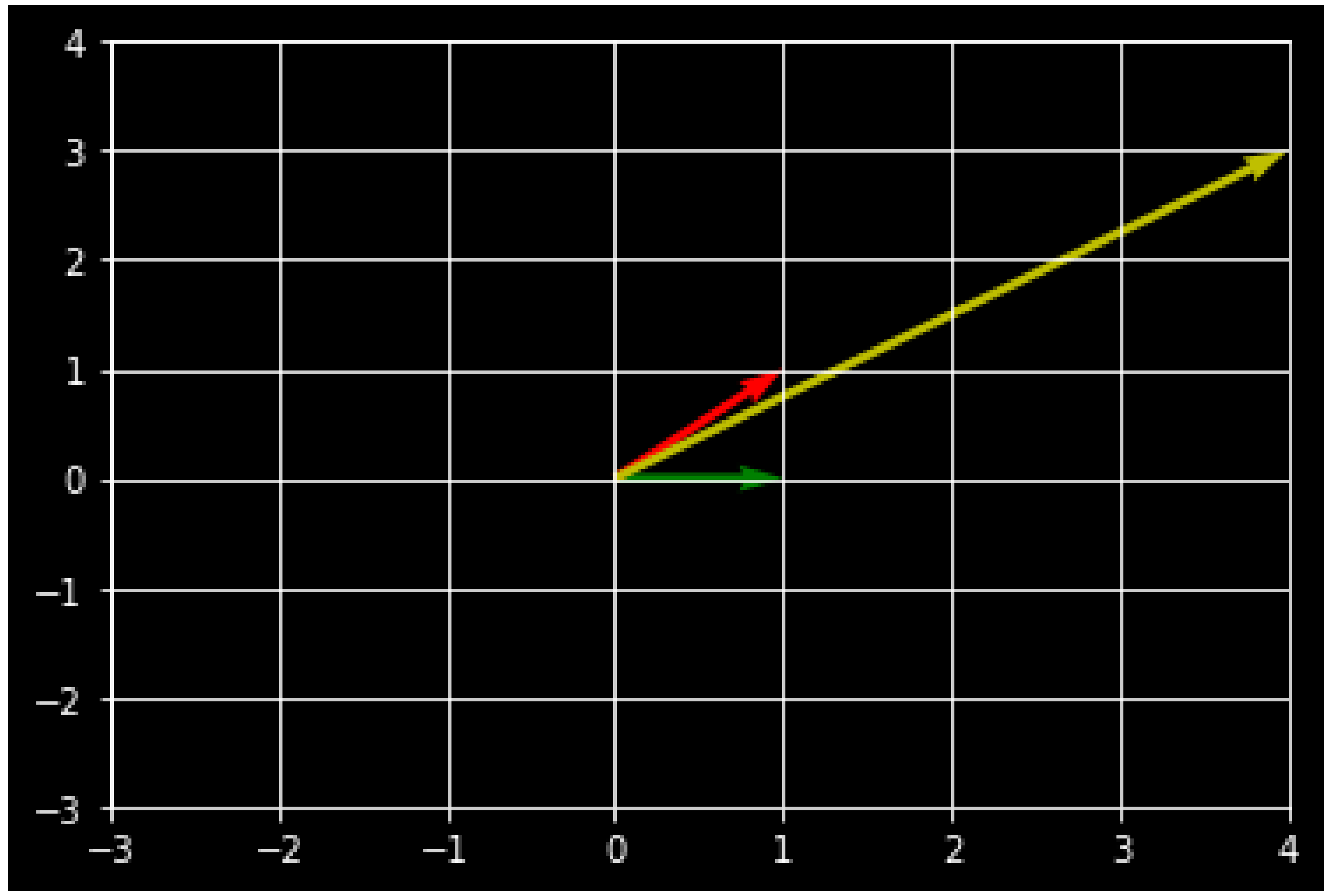


$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

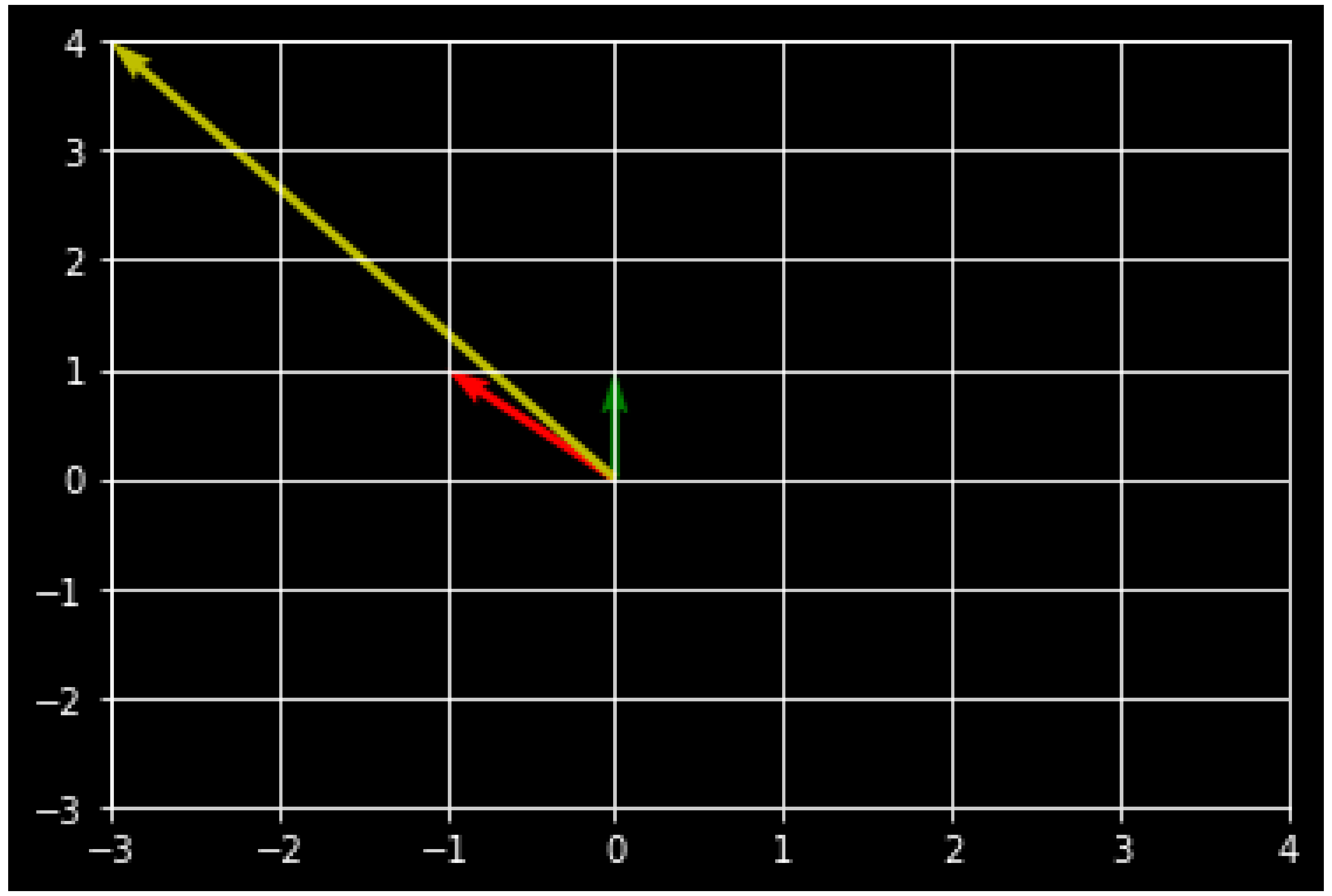
Breve repaso de algebra lineal

Si invertimos el orden de las transformaciones, ¿tendrá el mismo resultado?





$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bloque de ejercicios 3

Calcular las siguientes operaciones usando Python (pueden usar numpy), en caso de que no sea Posible, justificar su respuesta.

Vectores

A = [1,2,3]

B = [2,4,6]

C = [-1,2]

D = [2, -1]

E = [1,0,2,3,5]

F = [1,4,8,9,11]

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

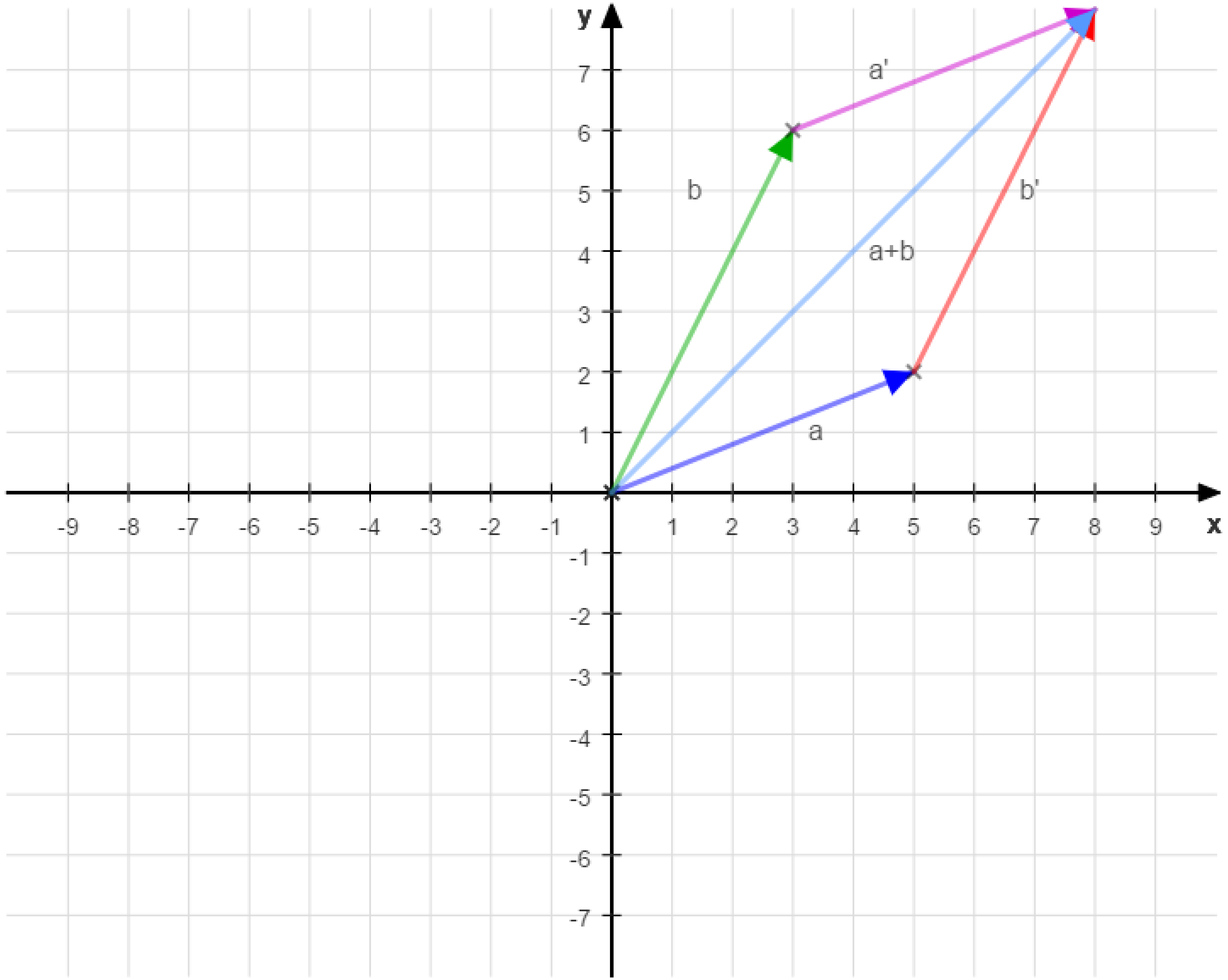
$$H = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios

1. A + B
2. B x A
3. A – C
4. C – D
5. D · C
6. E · F
7. |A| + |C|
8. (|E| |F| + |C|) A
9. Angulo entre C y D
10. CG
11. GC
12. GC^T

Descomposición vectorial

Cualquier vector puede representarse como la suma de 2 o más vectores



Descomposición vectorial

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0.3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0.7\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.8\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0.8\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0.2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Descomposición vectorial

Podríamos representar cualquier vector en términos de **u** y **v** (a los cuales llamaremos vectores base)

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Veamos…

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 3u + (-1.5)v$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 0u + (-1)v$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = -5u + 7.5v$$

Pero… ¿cómo calculamos estos coeficientes?

Pista… tenemos 2 incógnitas y 6 coeficientes

$3x + 2y = 0$

$x + 2y = 10$

$x = -5$ $\qquad$ $y = 7.5$

Descomposición vectorial

Entonces … con **u** y **v** ¿podemos representar cualquier vector?

Recordando (1° parte)… : *Cualquier vector puede representarse como la suma de 2 o más vectores.*

Recordando (2° parte)… : *Todos los gatos tienen garras, mi mascota tiene garras… por lo tanto mi mascota es un gato.*

¿El enunciado anterior es correcto?

Descomposición vectorial

Sean **u** y **v**

u= $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ v= $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Podemos representar:

$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ u+2v **Linealmente dependiente**

$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ¿? **Linealmente independiente**

Descomposición vectorial

Entonces … con **u** y **v** ¿podemos representar cualquier vector?

Recordando (1° parte)… : *Cualquier vector puede representarse como la suma de 2 o más vectores.*

Recordando (2° parte)… : *Todos los gatos tienen garras, mi mascota tiene garras… por lo tanto mi mascota es un gato.*

¿El enunciado anterior es correcto?

Descomposición vectorial parte 2

Si la base vectorial **i** y **j** son ortonormales

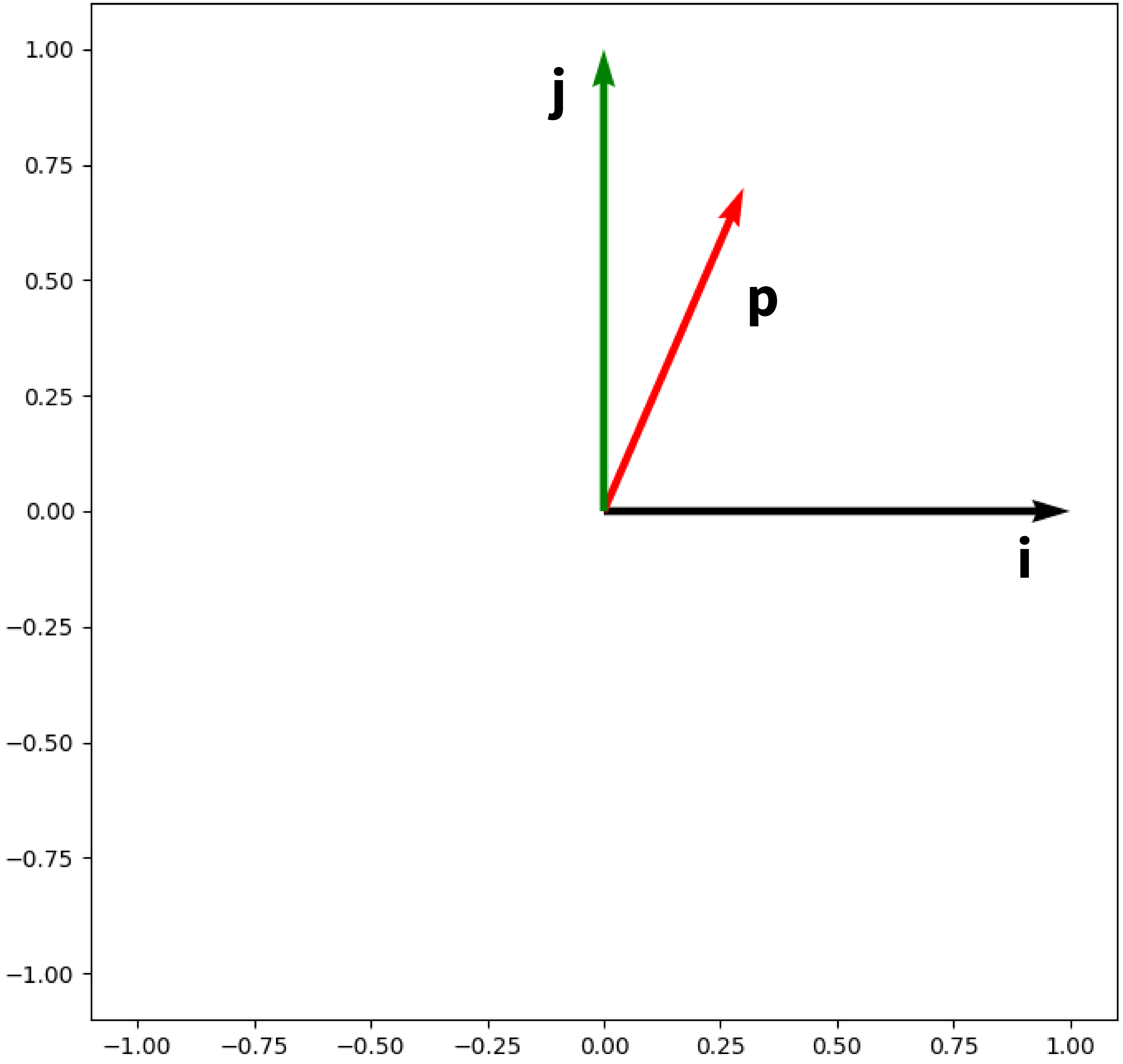
$$p = \alpha_1 i + \alpha_2 j$$

$$i \cdot p = i \cdot (\alpha_1 i + \alpha_2 j)$$

$$i \cdot p = \alpha_1 i \cdot i + \alpha_2 j \cdot i$$

$$\alpha_1 = i \cdot p$$

$$\alpha_2 = j \cdot p$$



Descomposición vectorial parte 2

Si la base vectorial **i** y **j** son ortogonales

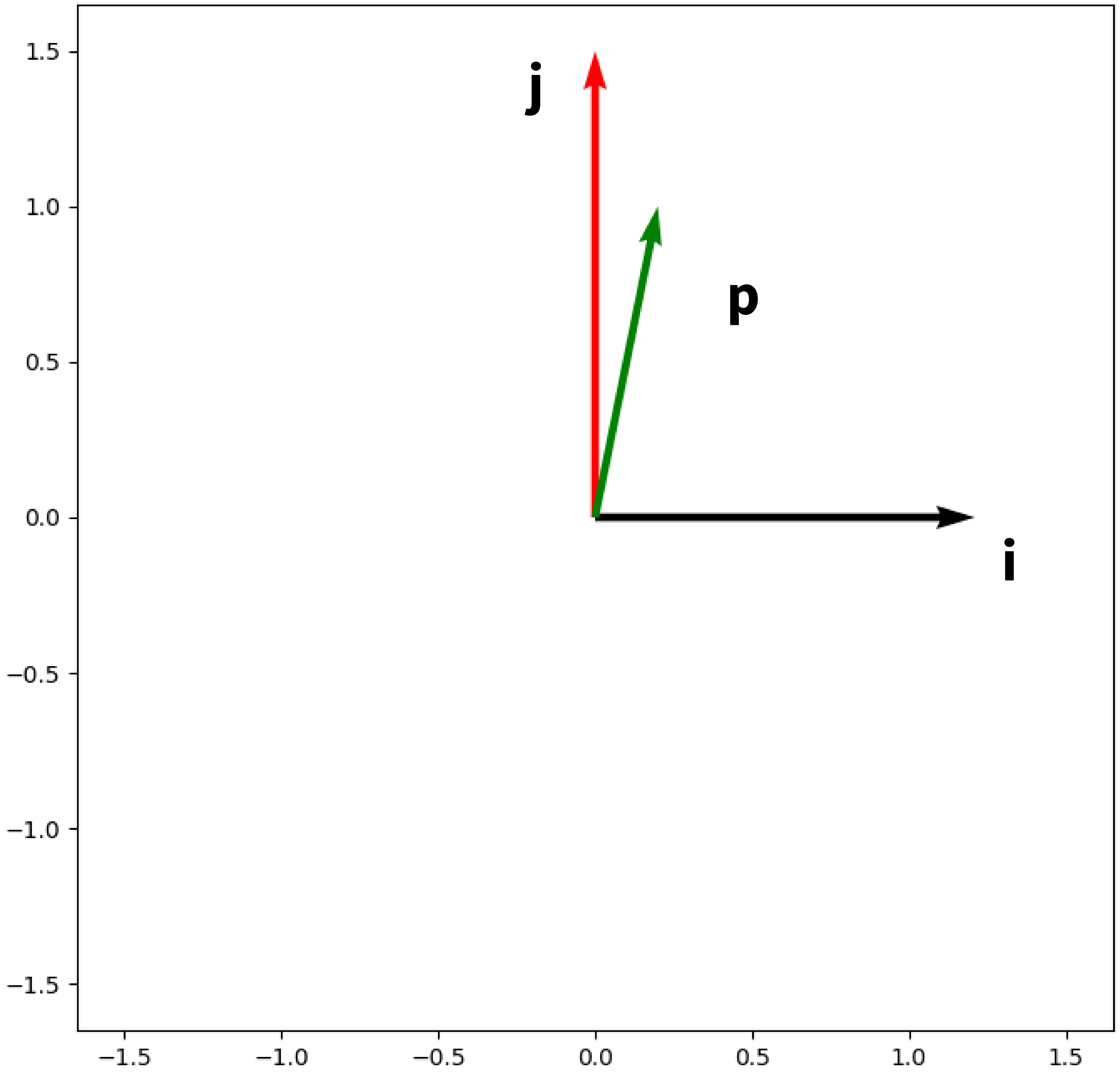
$$p = \alpha_1 i + \alpha_2 j$$

$$i \cdot p = i \cdot (\alpha_1 i + \alpha_2 j)$$

$$i \cdot p = \alpha_1 i \cdot i + \alpha_2 j \cdot i$$

$$\alpha_1 = \frac{i \cdot p}{i \cdot i}$$

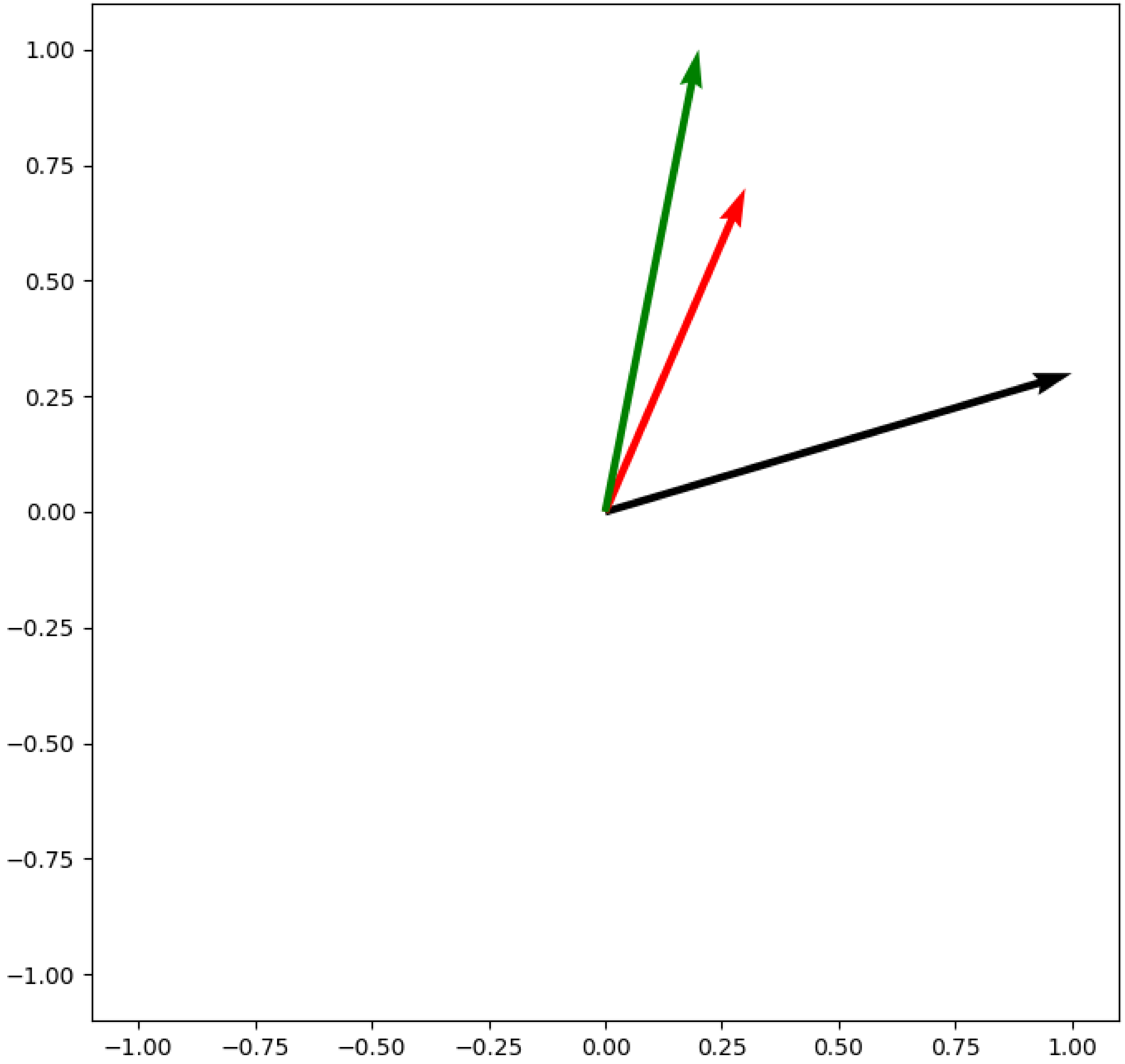
$$\alpha_2 = \frac{j \cdot p}{j \cdot j}$$



Descomposición vectorial parte 2

Si la base vectorial **i** y **j** son 2 vectores no paralelos

Pista… tenemos 2 incógnitas y 6 coeficientes



Proyección de vectores

$$q = \frac{|p|\cos(\theta)}{|i|}i$$

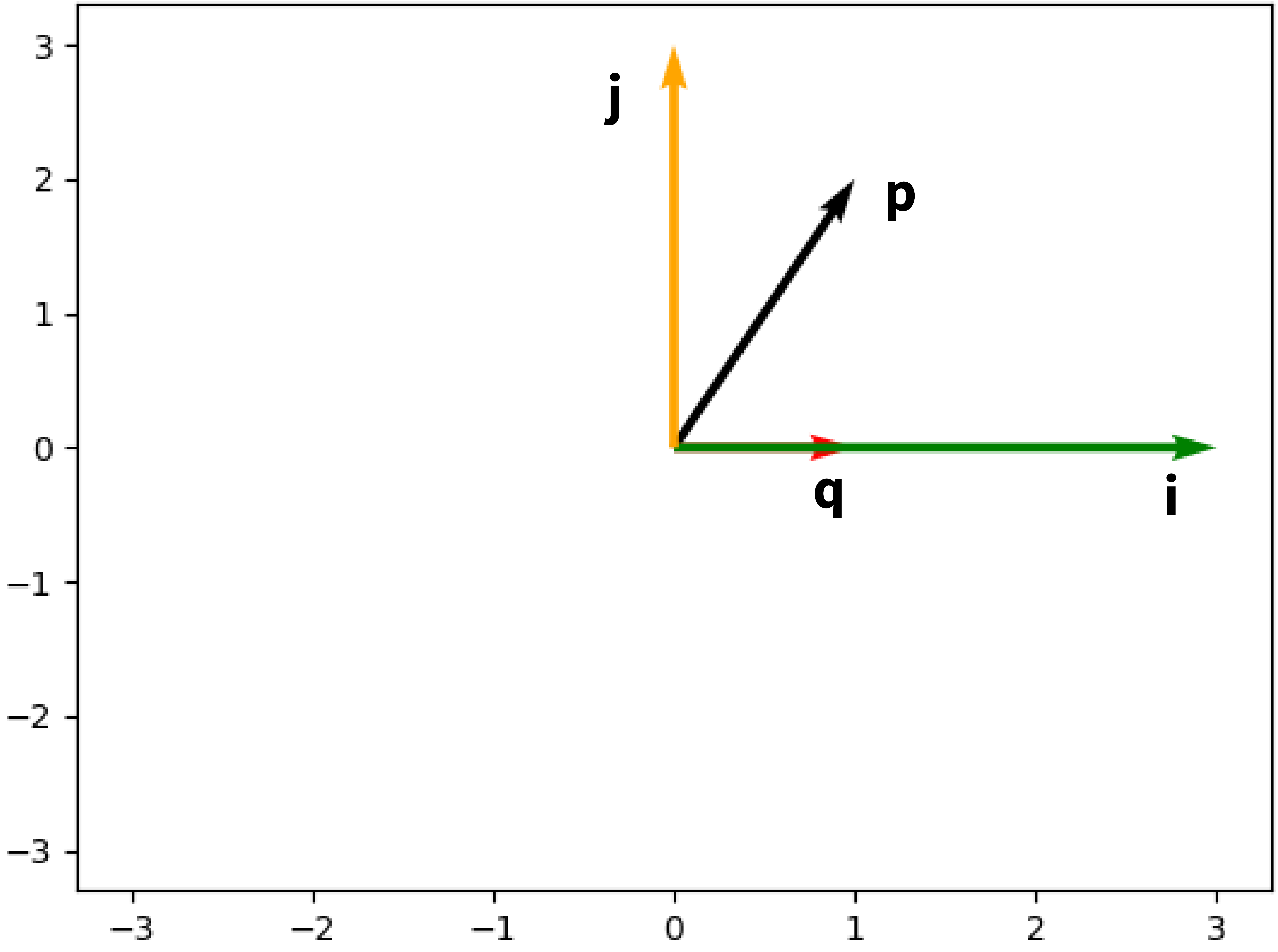
$$q = \frac{|p||i|\cos(\theta)}{|i||i|}i$$

$$q = \frac{p \cdot i}{i \cdot i}i$$

Proyección vectorial

$$|q| = \frac{p \cdot i}{i \cdot i}i$$

Proyección escalar

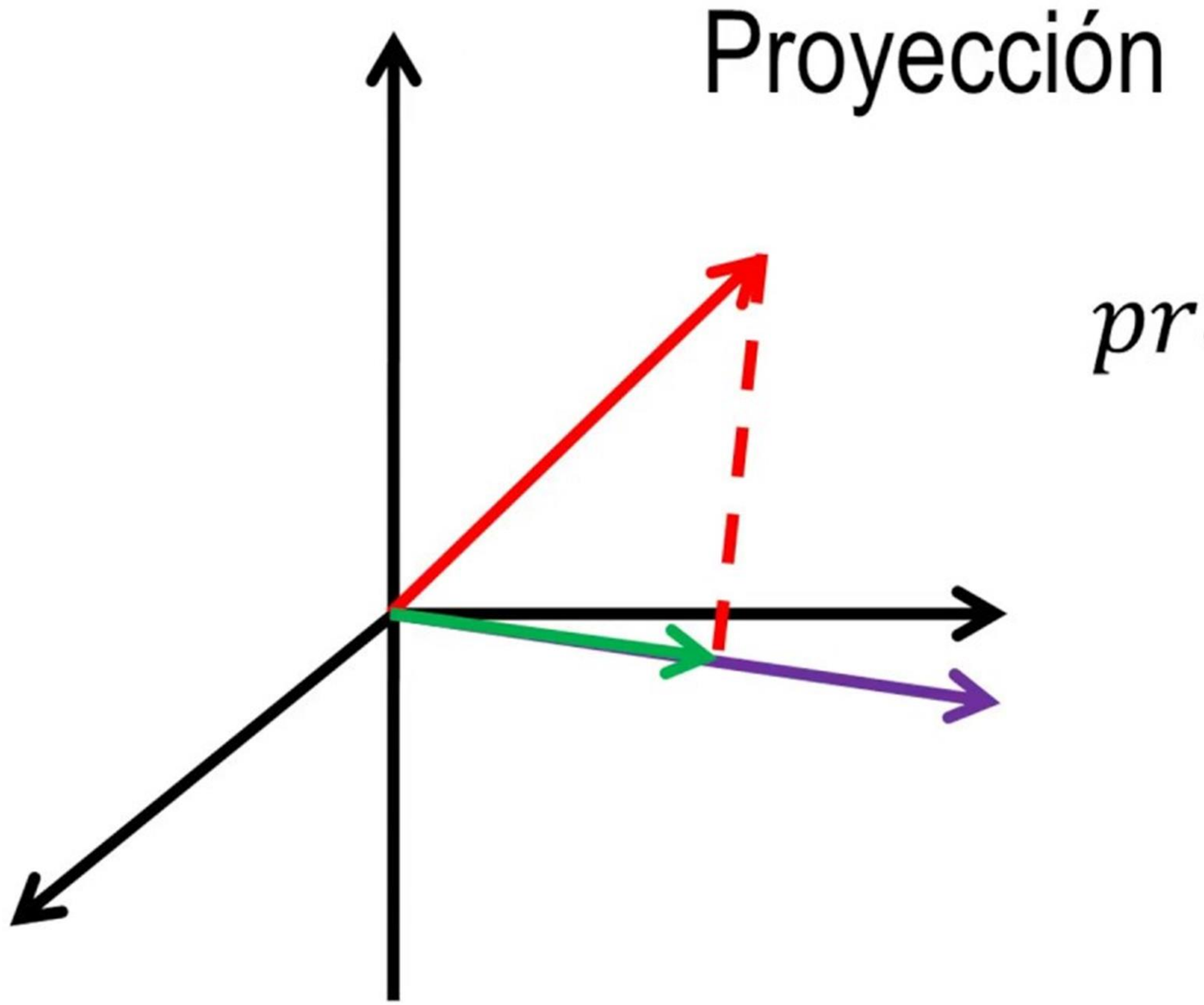


Proy$_v$u

Proyección de u(vector) **sobre v** (base)

Ejercicio 4

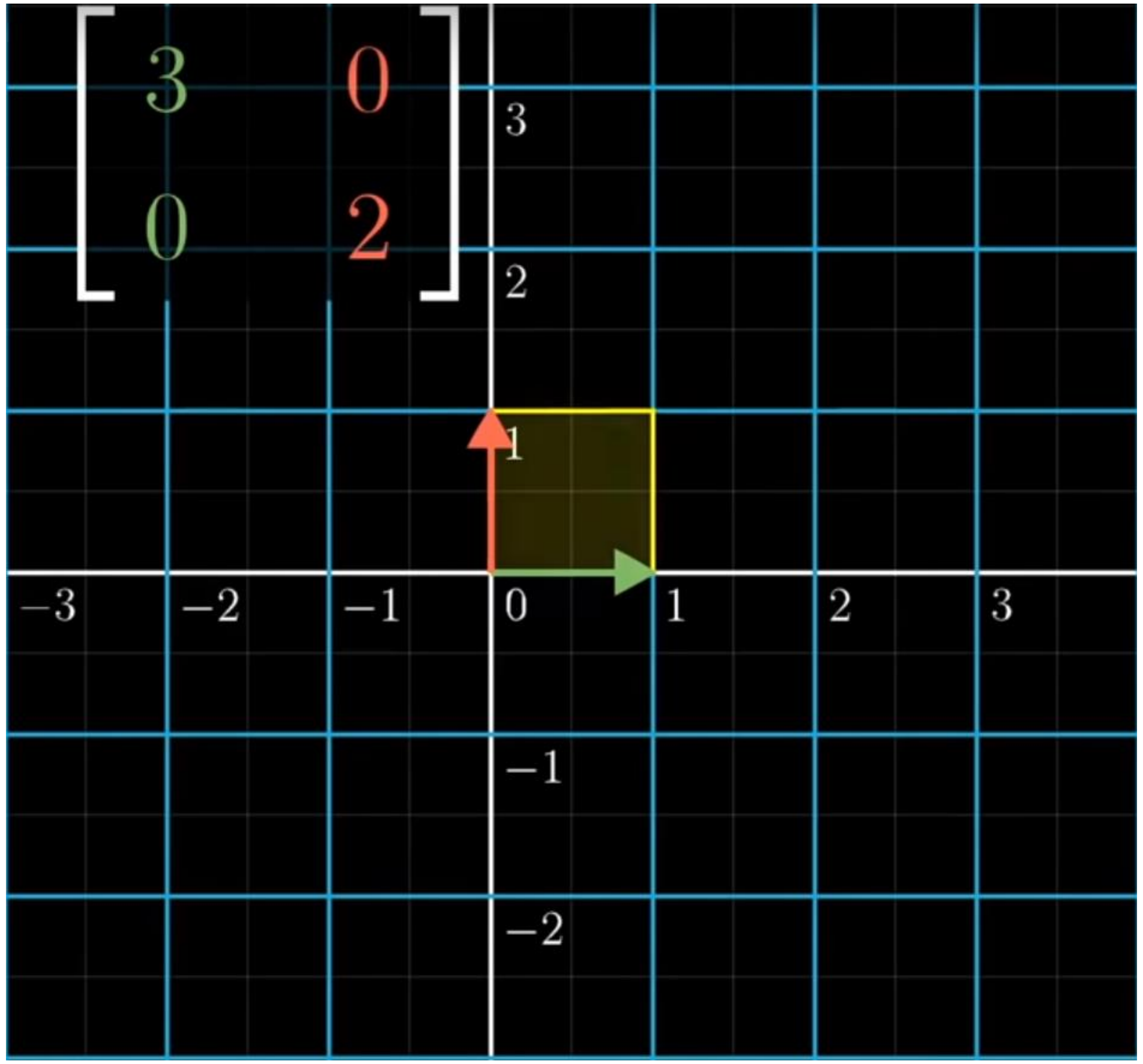
1. Crear una función que permita crear la proyección de un vector sobre otro.
2. Dibuja los 3 vectores (original, base y proyectado)

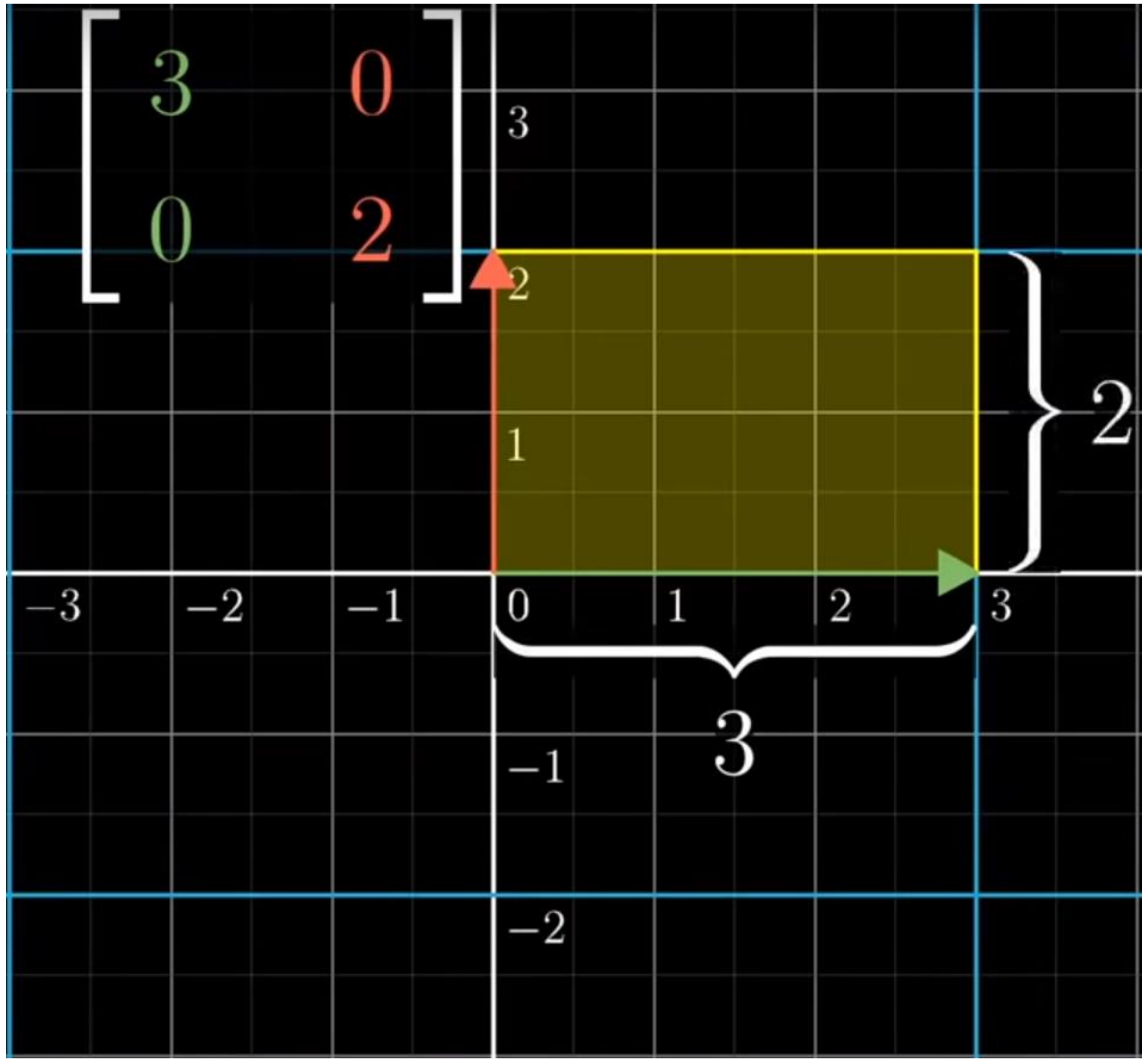


$$proy_v u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Determinantes

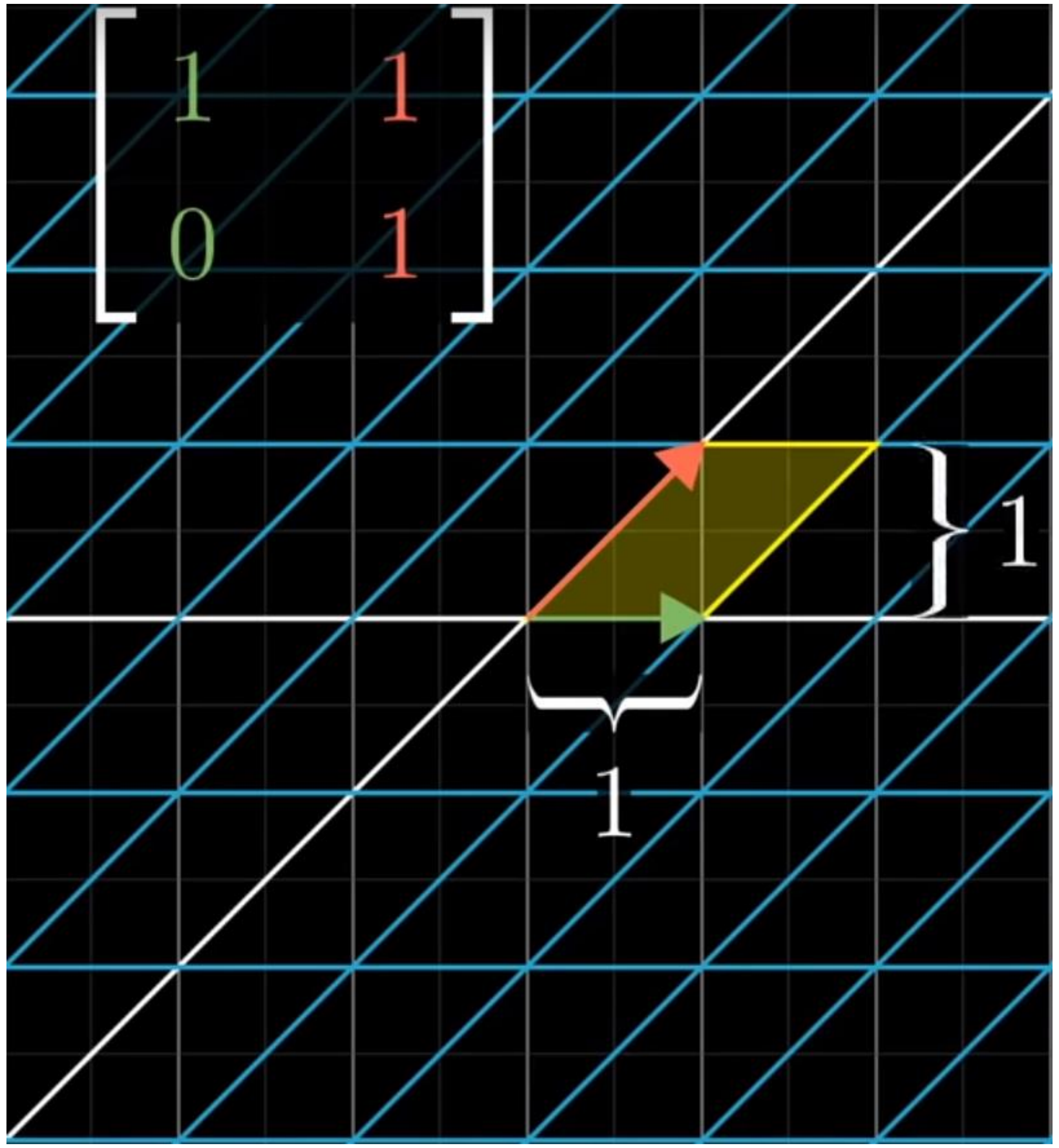
La determinante es un número que nos permite conocer con que factor se va modificar el área formada por la base vectorial con respecto a la original.

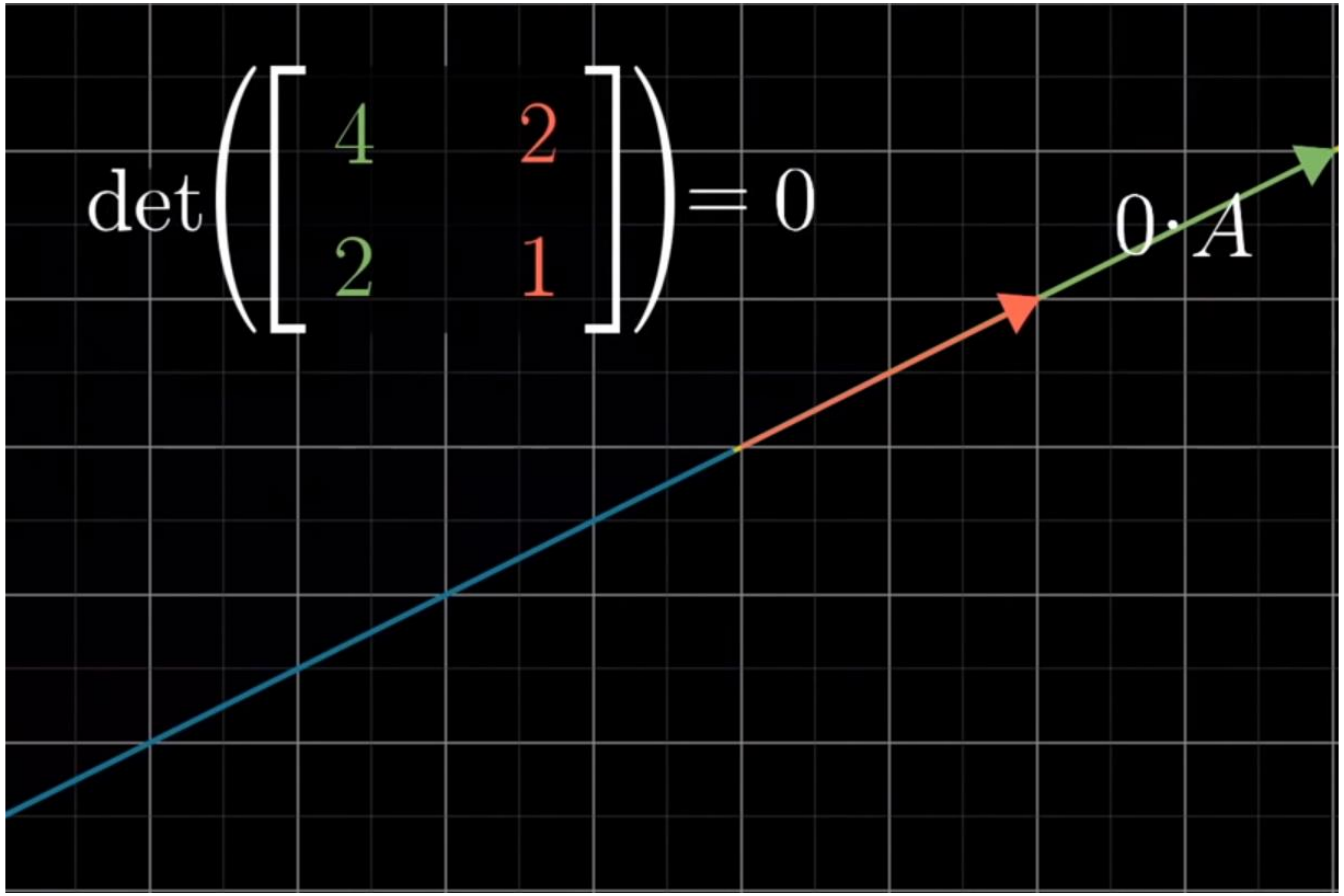




Determinantes

La determinante es un número que nos permite conocer con que factor se va modificar el área formada por la base vectorial con respecto a la original.





Función generadora de puntos

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from random import randrange as rr

def genData(lv):
    np.random.seed(seed)
    if(m==False):
        m = (rr(20)+1)/10
        X = np.random.random((n,2))
        y = ((X[:,1]/X[:,0])>m)
        return [X,y]
```

Función graficadora de puntos

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def grapPhoints(lv):
    maxV = 0
    colors = ['black', 'red', 'green', 'orange', 'grey', 'purple', 'brown', 'purple']
    for v in range(0,X.shape[0]):
        p = X[i,0:2]
        if(y[i]):
            plt.scatter(p[0], p[1], color='green')
        else:
            plt.scatter(p[0], p[1], color='black')
    plt.show()
```

Preguntas abiertas

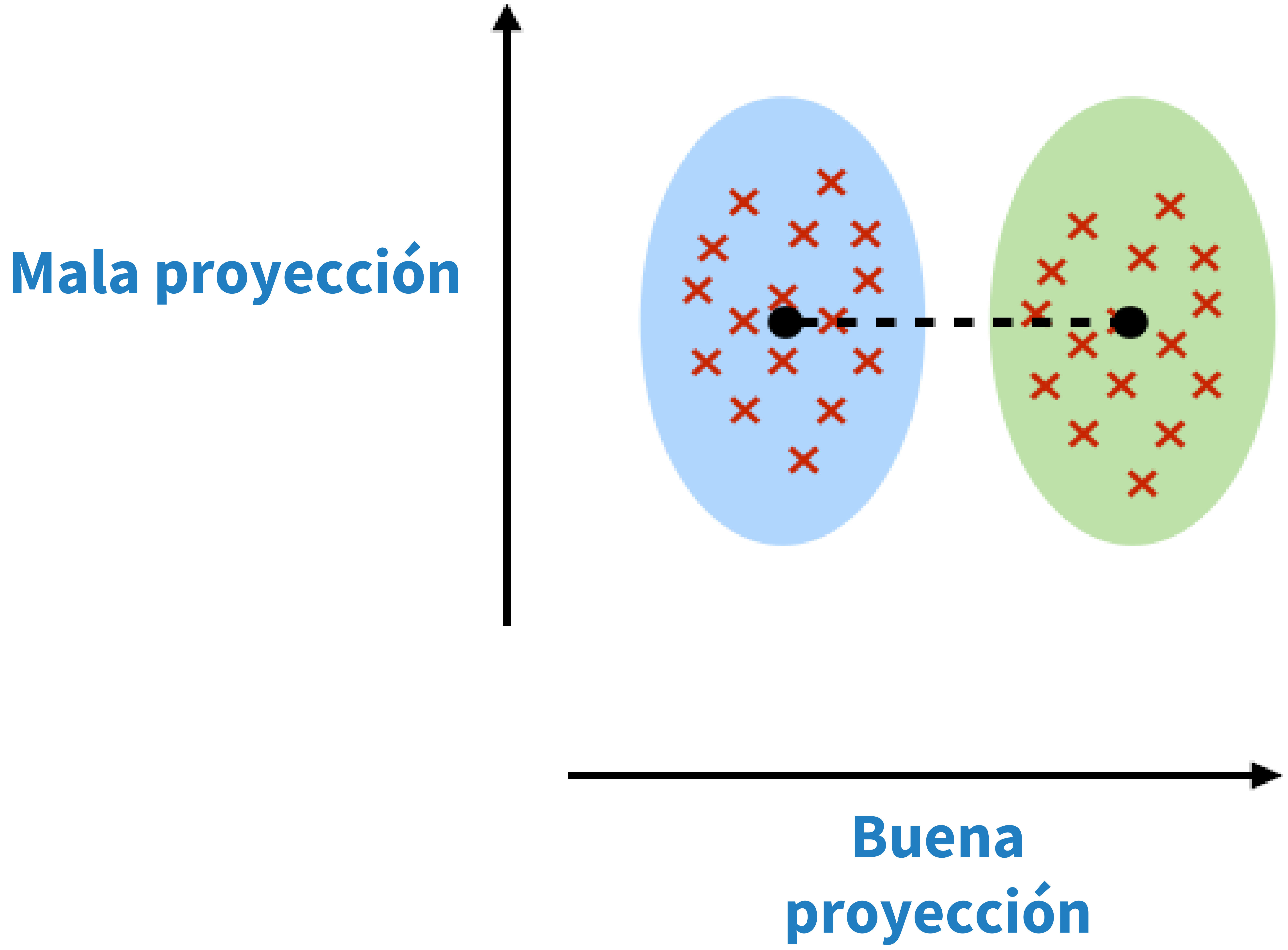
¿Qué significa la transpuesta de una matriz?

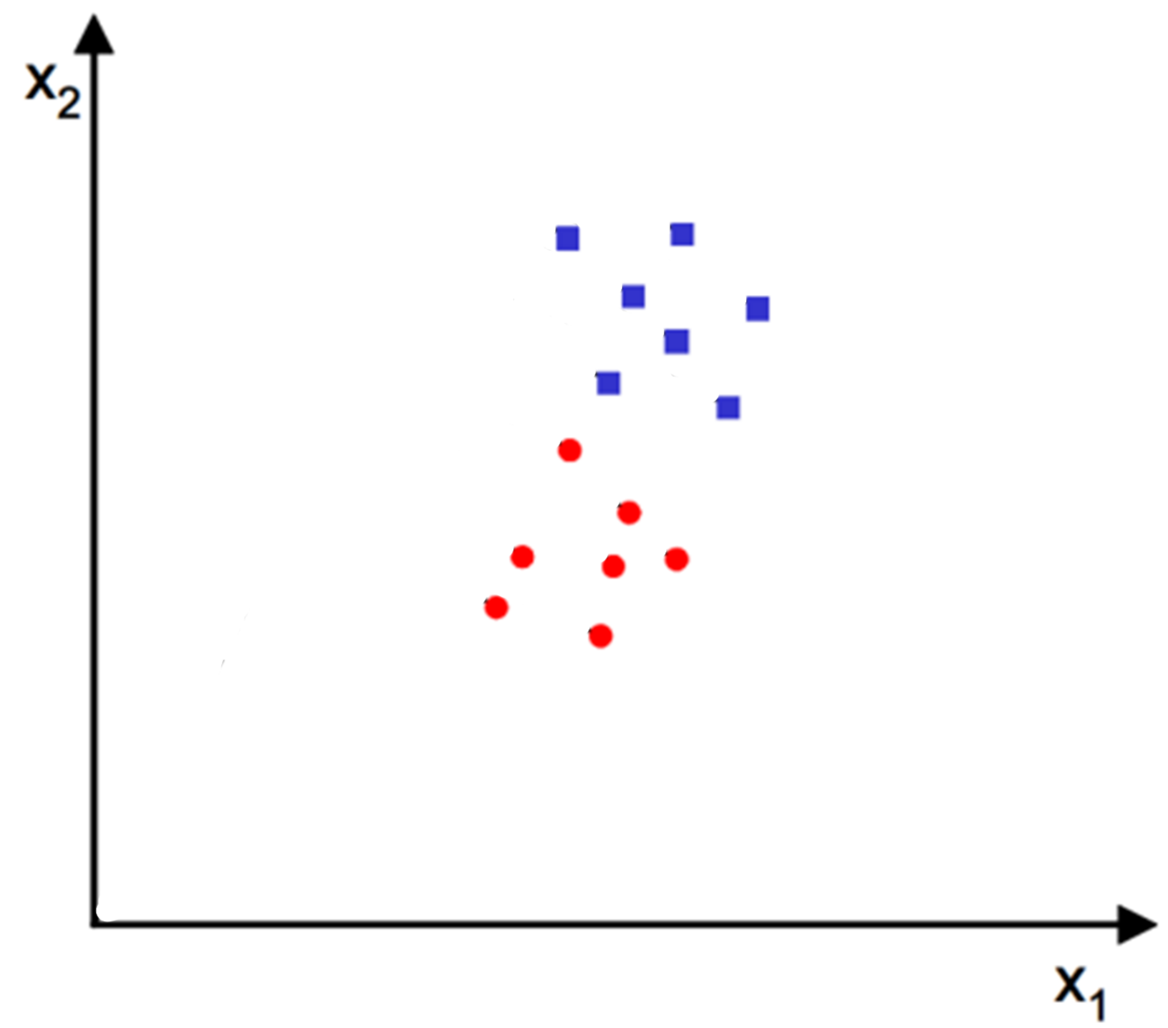
¿Cómo se relacionan los sistemas de ecuaciones lineales con el algebra lineal?

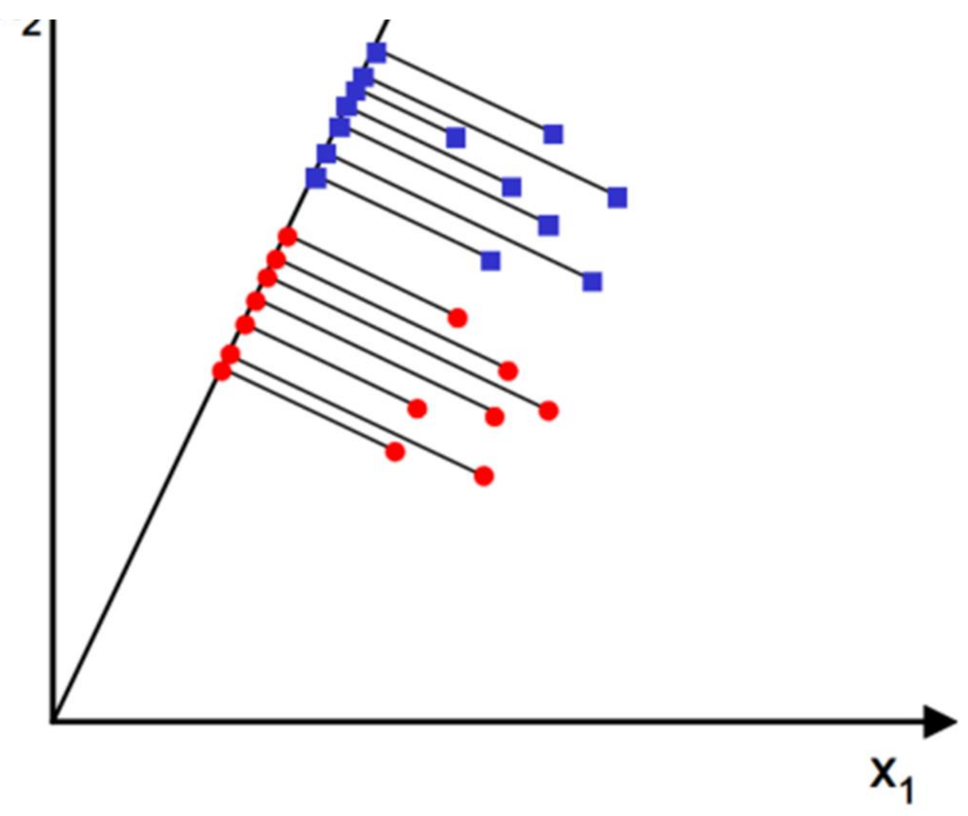
¿Qué es la diagonal principal de una matriz?

Reto 1

1. Crea una función que permita encontrar y proyectar los puntos (de la función generadora de puntos) de tal forma que los puntos queden separados por clase







Reto 1

1. Crear una función que genere puntos de 2 clases diferentes y los cuales sean linealmente separables.
2. Crea una función que permita encontrar un vector, que al proyectar los puntos queden separados por clase.
3. Grafica los puntos proyectados
4. Rota los puntos al eje horizontal