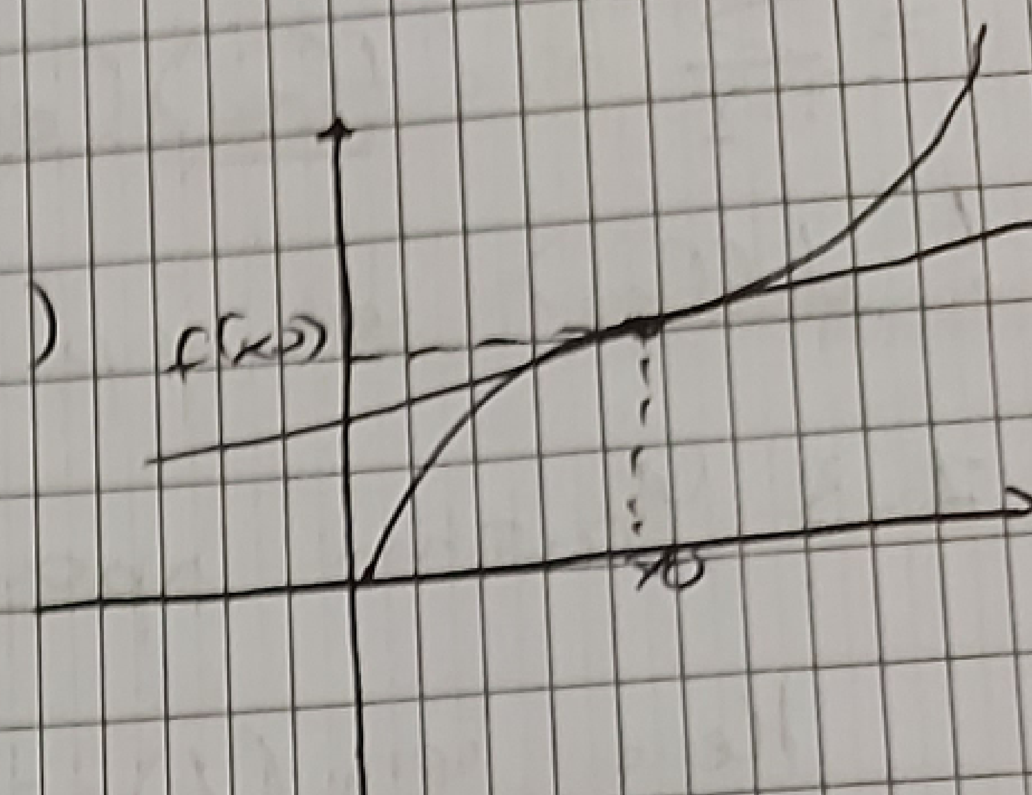
14.05.2024 ДИС 2. Диференцируемост в $\mathbb{R}^n$

о Топология в $\mathbb{R}^n$



1 $f: \Delta \to \mathbb{R}$, Δ - отв. инт., $x_0 \in \Delta$

$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + R(x, x_0)$

$R(x, x_0) = o(|x-x_0|)$

е диференцируемост

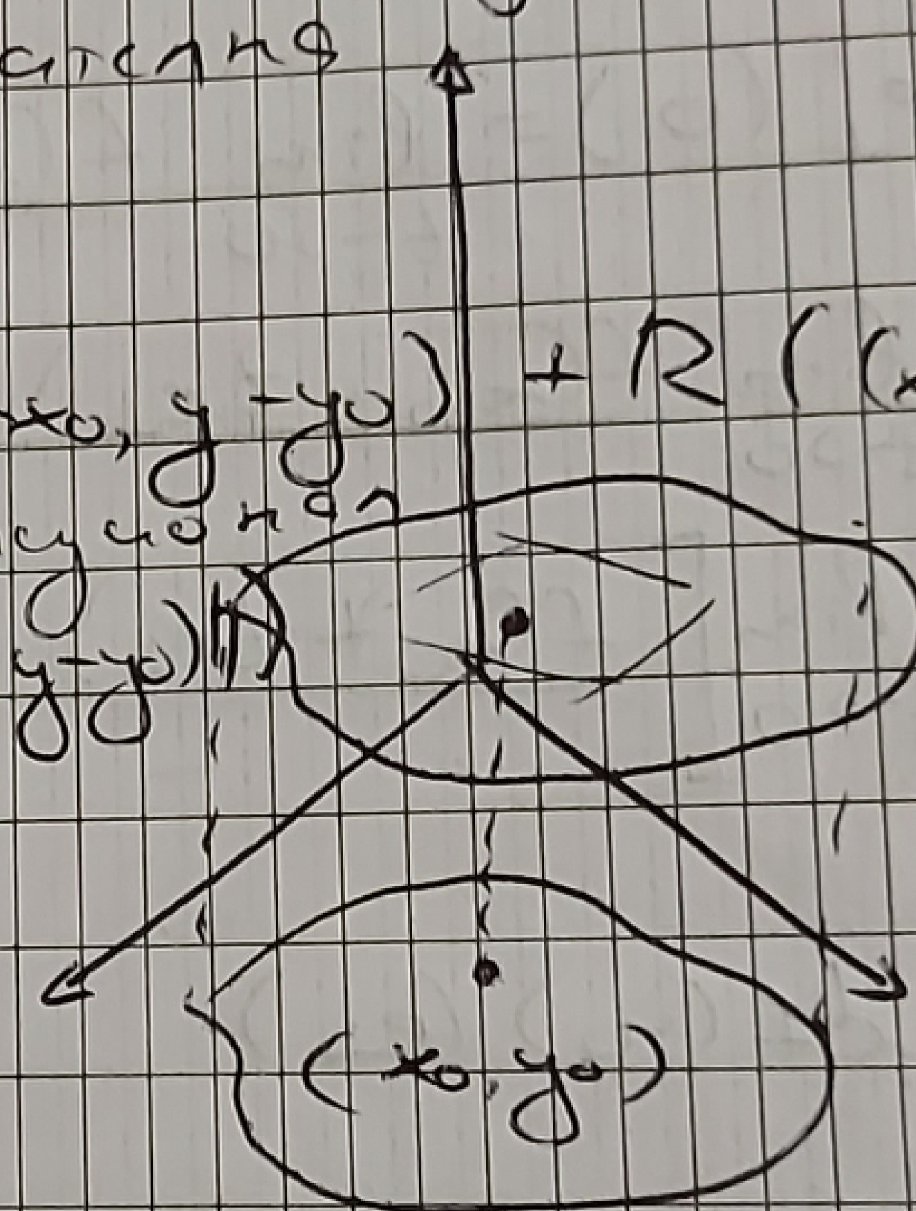
1.1 За две променливи:

Нека $f: U \to \mathbb{R}$ отв. в $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$

Тук вече търсим допирателна равнина, а не права.

$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0, y-y_0) + R((x,y),(x_0,y_0))$

- $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е линеен функционал
- $R((x,y),(x_0,y_0)) = o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$



* линеен функционал е линейно изображение

1.2 def: Нека U е отворено подмн. на $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$. Казваме, че f е диференцируема в x_0, ако съществува линеен оператор $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такъв, че:

$f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + o(\|h\|)$ или

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f(x_0)(h)}{\|h\|} = 0$ } това означава о-малко

• Действие на $df(x_0)$:

$df(x_0)(h) = df(x_0)(h_1, h_2, \dots, h_n) =$ $\qquad e_i = (0, \dots, 1, \dots)$

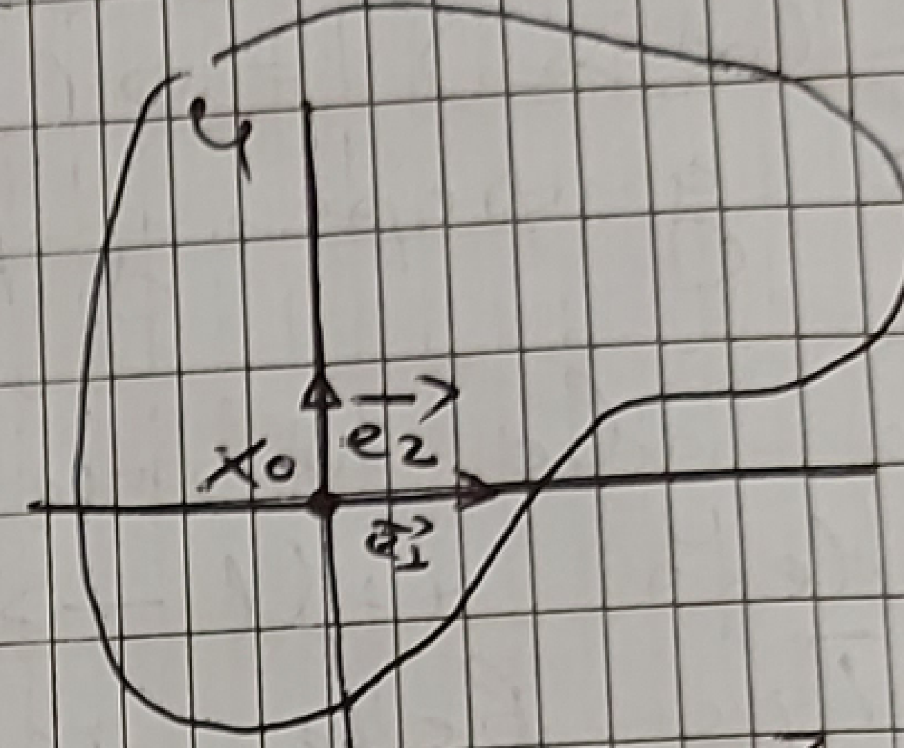
$= df(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) =$

от линейност $\qquad$ скаларно произведение

$= \sum_{i=1}^{n} h_i \, df(x_0)(e_i) = \langle h, (df(x_0)(e_1), \dots, df(x_0)(e_n)) \rangle$

! $df(x_0)$ се нар. диференциал на f в x_0

1.3 Частни производни



Нека $\varphi_1(t) := f(x_0 + te_1)$
$t \in (-\delta, \delta)$

$\varphi_1'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0)}{t} =$ от отместване да d | излиза отвън t

$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0) - df(x_0)(te_1) + df(x_0)(te_1)}{t} =$

$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0) - df(x_0)(te_1)}{|t|} \cdot \operatorname{sign}(t) + df(x_0)(e_1) \right]$

$\|te_1\| = |t|$ $\qquad$ ограничено

$= df(x_0)(e_1)$

Обобщаваме горното като вместо φ_1 пишем φ_i, e_1 пишем e_i и т.н. за $i \in \{1, \dots, n\}$

def: $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$

Частна производна на f в x_0 по x_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) се нарича $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$ (и в смисъл на съществуване)

Означава се с $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $f'_{x_i}(x_0)$ $\qquad$ частна пр.

NB! | Правим разлика между ∂ и d ← диференциал.

1.4 Твърдение: $U \underset{\text{об}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$
Ако f е диференцируема в x_0, то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ съществува за $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ и
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

* $\operatorname{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$ и се нарича градиент

$\Rightarrow df(x_0)(h) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), h \rangle$

1.5 Твърдение: $U \underset{\text{об}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$
Ако f е диференцируема в x_0, то f е непр. в x_0!

Доказателство:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] =$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) \right] + \lim_{x \to x_0} df(x_0)(x - x_0) =$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\| \right] + 0 = f(x_0)$$

Т.к. $|df(x_0)(h)| = |\langle \operatorname{grad} f(x_0), h \rangle| \leq \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \cdot \|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

пр: $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$

f не е непр. в $(0,0)$

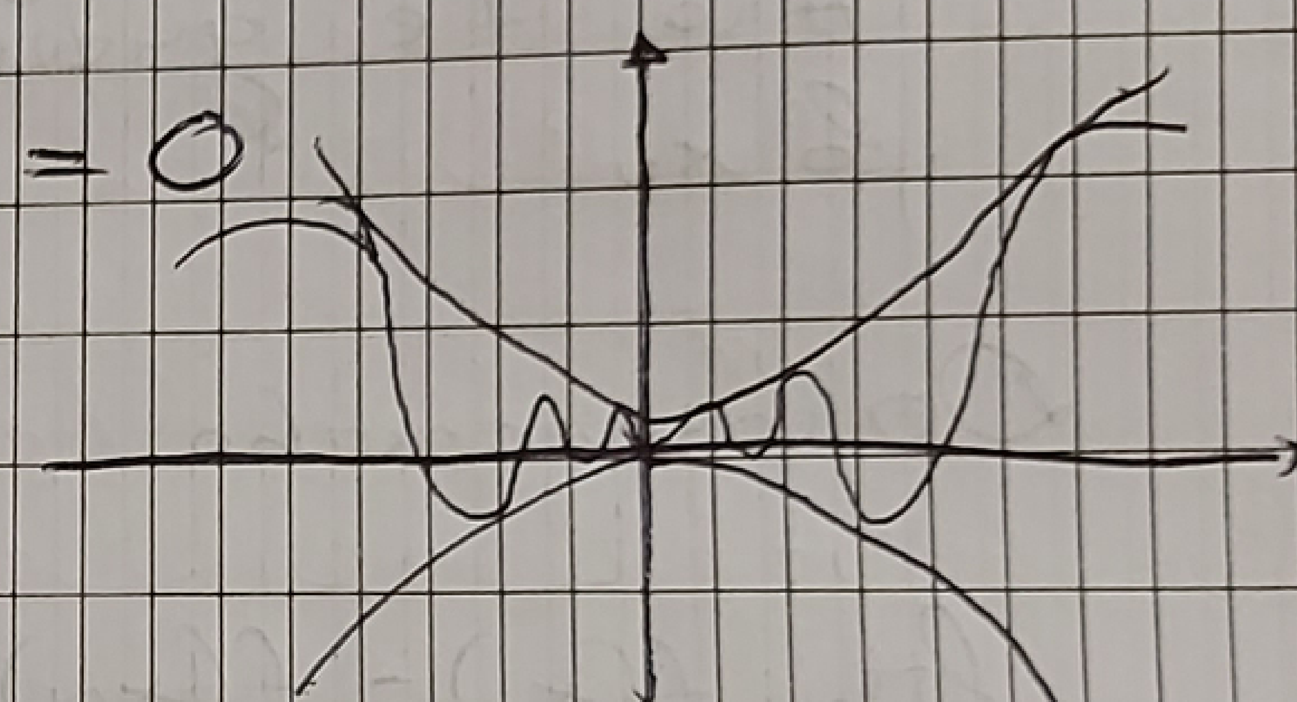
пр:

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2 \cdot \sin \frac{1}{\|x\|^2}, & x \neq \vec{0} \\ \vec{0}, & x = \vec{0} \end{cases} \quad \text{и} \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Дали f е диф. в $\vec{0}$?

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} t \sin \frac{1}{t^2} = 0$$

$$\boxed{\|x\|^2 \cdot \sin \frac{1}{\|x\|^2} = (x_1^2 + x_2^2) \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

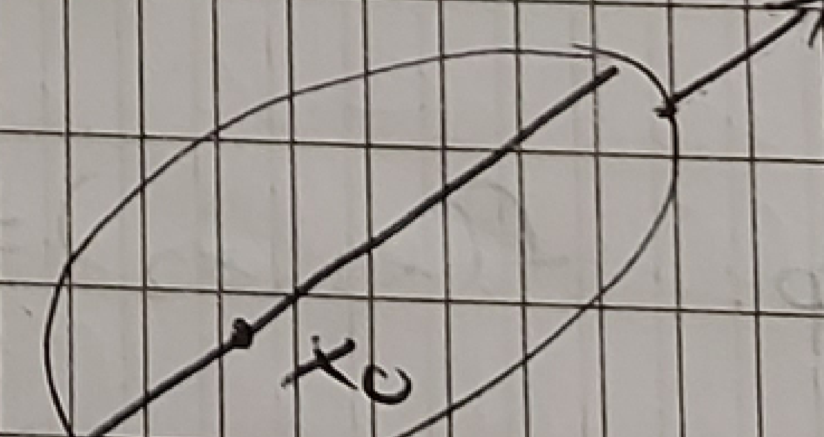
$$df(0,0)(h) = 0 \cdot h_1 + 0 h_2 = 0$$

$$\lim_{x \to \vec{0}} \frac{f(x) - \overbrace{f(\vec{0})}^{=0} - \overbrace{df(\vec{0})(x)}^{=0}}{\|x\|} = \lim_{x \to \vec{0}} \frac{f(x)}{\|x\|} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\|x\|^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{\|x\|^2}}{\cancel{\|x\|}} = 0 \Rightarrow f \text{ е диференцируема в } (0,0) \text{ и } df(0,0) = 0$$

2. Производна по направление

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$
отв.



Нека $\ell \in \mathbb{R}^n$. Разгл. правата $\{x_0 + t \cdot \ell : t \in \mathbb{R}\}$.
Казваме, че f има производна по направление ако същ. границата: $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot \ell) - f(x_0)}{t}$

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0) :=$$

$\Longleftarrow$ Частните производни са производни по направление по базисните вектори $e_i, i \in \{1, \dots, n\}$

2.1 Твърдение: Ако f е диференцируема в x_0, то f има производна по всяко направление $l \in \mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), l \rangle$

Доказателство:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tl) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tl) - f(x_0) - df(x_0)(tl) + df(x_0)(tl)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+tl) - f(x_0) - df(x_0)(tl)}{\|tl\|}}_{0} \cdot \overbrace{\|l\| \cdot \operatorname{sign}(t)}^{\text{огр.}} + df(x_0)(l) \right]$$

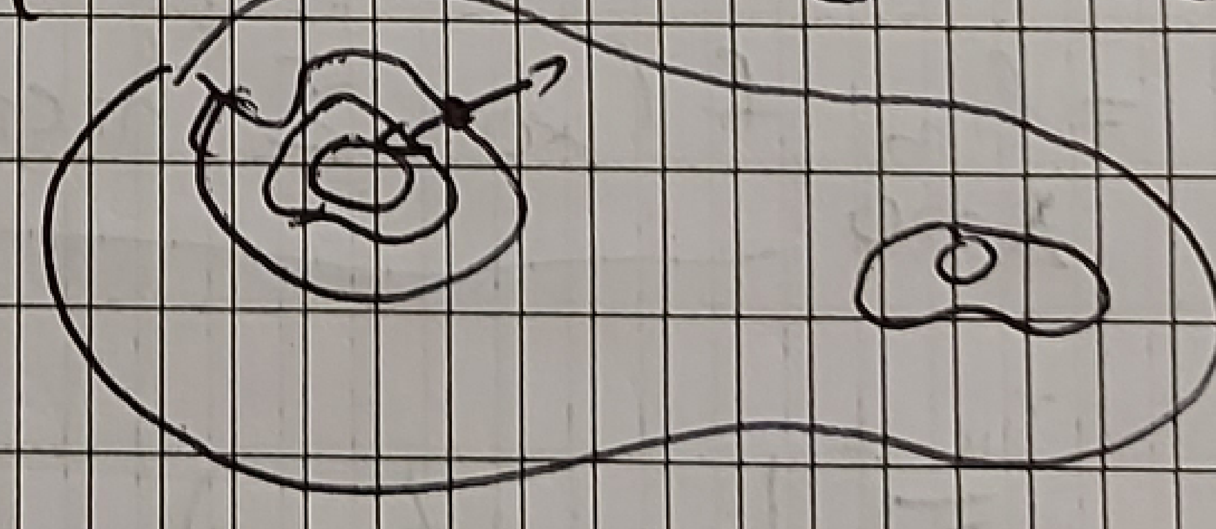
за $l \neq 0$

$\|t \cdot l\| = |t| \cdot \|l\|$

$$= df(x_0)(l) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), l \rangle$$

За $l = 0$ имаме тривиален случай

2.1.1 Следствие: $\max\left\{ \frac{\partial f(x_0)}{\partial l} : \|l\| = 1 \right\}$ се достига в $l = \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$ и $\min\left\{ \frac{\partial f(x_0)}{\partial l} : \|l\| = 1 \right\}$ се достига в $l = -\frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$



Доказателство:

Коши-Буняковски

$$\left| \frac{\partial f(x_0)}{\partial l} \right| = |\langle \operatorname{grad} f(x_0), l \rangle| \leq \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \cdot \underbrace{\|l\|}_{=1}$$

Градиента сочи посоката на най-бързо нарастване.
Антиградиента сочи посоката на най-бързо спадане.

3. Th: $\underset{\text{отворено}}{U \subset \mathbb{R}^n}$, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ съществува за $\forall x \in U$ и $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ е непр. в x_0 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

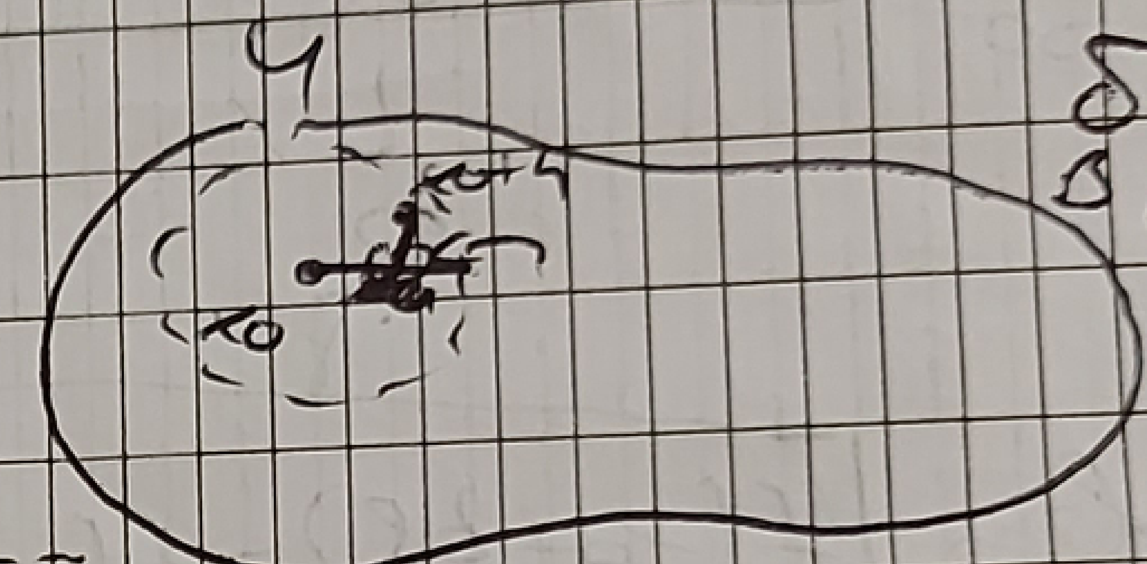
$\underset{\text{отв}}{U \subset \mathbb{R}^n}$

$C^1(U, \mathbb{R})$ гладките ф-ии $f: U \to \mathbb{R}$, т.ч. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ същ. и е непр. в U

Тогава f е диференцируема в x_0.

3.2 Сл: Гладките ф-ии са диф

3.1 Доказателство:



$\delta > 0$

$B_\delta(x_0) \subset U$

$\|h\| < \delta$

$$f(x_0+h) - f(x_0) =$$
$$= [f(x_0 + h_1 e_1) - f(x_0)] +$$
$$[f(x_0 + h_1 e_1 + h_2 e_2) - f(x_0 + h_1 e_1)] + \dots$$
$$\dots + \left[f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) - f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_i\right)\right] = (*)$$

$= (*)$

$$f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + h_k e_k\right) - f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i\right) = \varphi_k(h_k) - \varphi_k(0)$$

$\varphi_k(t) := f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t \cdot e_k\right)$ е дефинирана и диференцируема между 0 и h_k

$$\left\|\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t e_k\right) - x_0\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t e_k\right\| =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} h_i^2 + t^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} h_i^2 + h_k^2} \leq \|h\| < \delta$$

$$\varphi_k'(t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t e_k + \lambda e_k\right) - f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + \cdots\right.}{\lambda}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t e_k\right)$$

$\theta_k \in (0,1)$

$$(*) = h_k \cdot \varphi_k'(\theta_k \cdot h_k) = h_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big(\underbrace{x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + \theta_k h_k \cdot e_k}_{\xi_k \in B_\delta(x_0)}\Big)$$

$$(*) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1)\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi_n)\cdot h_n$$

Остатъка:

$$f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)(h) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i) h_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right) h_i = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \right), h \right\rangle$$

$\leq$ Коши Буняковски

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)(h)|}{\|h\|} \leq \frac{1}{\cancel{\|h\|}} \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots\right)\right\| \cdot \cancel{\|h\|}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right)^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Тъй като $\|\xi_k - x_0\| = \left\|\sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + \theta_k h_k\right\| \leq \|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\Rightarrow \xi_i \xrightarrow[h \to 0]{} x_0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

и $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ е непр. в x_0 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi_i) \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ $\square$

Ако $U \subset \mathbb{R}^n$ отв., $x_0 \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^k$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

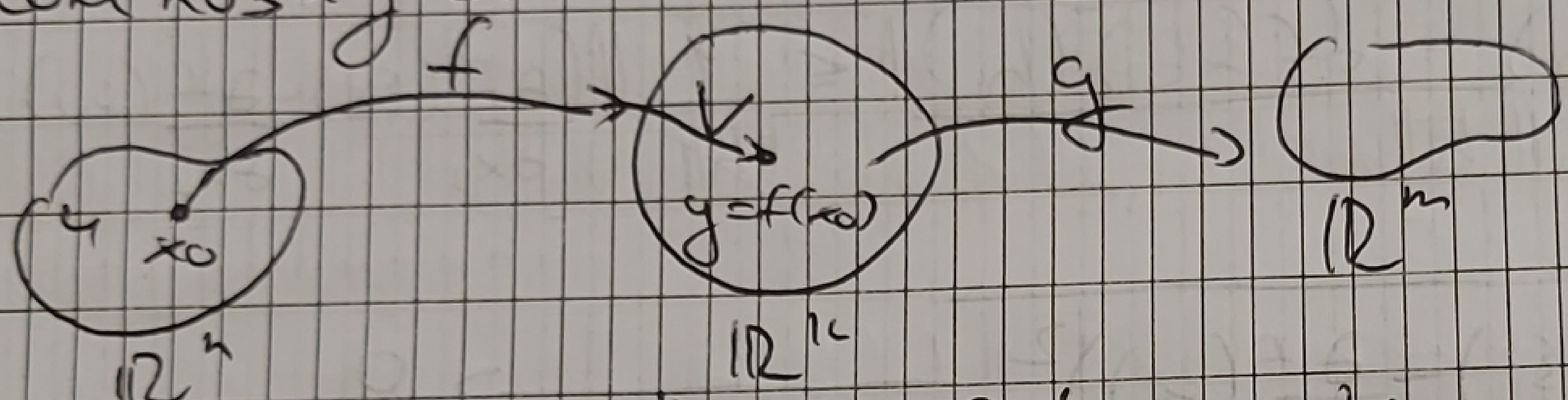
f е дифф в x_0 => $df(x_0) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такъв, че
линеен оператор

$f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + o(\|h\|)$ <=>
$f_1, \dots, f_k$ са диференцируеми в x_0

$$df(x_0)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_0), & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$k \times n$

4. Композиция



$x_0 \in U$ отв. в $\mathbb{R}^n$ $\quad f: U \to V$ дифф. в x_0
V отв в $\mathbb{R}^k$ $\quad g: V \to \mathbb{R}^m$ дифф в $y_0 = f(x_0)$

=> $g \circ f: U \to \mathbb{R}^m$ дифф в x_0 и

$d(g \circ f)$ е композиция на $df(x_0)$ и $dg(y_0)$, т.е
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) . f'(x_0)$