23.04.2024. ДИС 2

0. От миналия път - обобщение

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е степенен ред
- $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ e cx. $\}$ е област на сх.
- R - радиус на сх, $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$
- $(a-R, a+R)$
  $[a-R, a+R)$ + формула на Коши - Адамар
  $(a-R, a+R]$
  $[a-R, a+R]$
- $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $S: D \to \mathbb{R}$
  непр. в реалната част
  (Теорема на Абел)
- S е диф. в $(a-R, a+R)$ отворен!!! и
  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-a)^{n-1}$

0.1 в $(a-R, a+R)$: $\int_a^x S(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

0.2 Ако $f: \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отв. инт., $a \in \Delta$
$f^{(n)}$ същ. в Δ $\forall n \in \mathbb{N}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ е ред на Тейлър за f около a

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \iff R_f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

1. Развитие в ред на Маклорен

1.1 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ + от предната лекция

1.2 $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ в $\mathbb{R}$

Остатък за sin във формата на Лагранж:

$R^n_{\sin}(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, където $\theta \in (0,1)$

развиване около 0 $\sim$ точката x

$\Rightarrow 0 < \theta x < x$

$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ от ДИС 1

$\Rightarrow |R^n_{\sin}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1.3 $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ в $\mathbb{R}$ (аналогично на $\sin x$)

1.4 $(1+x)^{\alpha}$, където $\alpha \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ е развитието в Тейлор

$\boxed{\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}$

- $R = +\infty$, ако $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}$
- За $\alpha \notin \{0, 1, \dots\}$ крит. Даламбер:

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|} = |x| \cdot \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)} \right|$$

$$= |x| \cdot \frac{|\alpha - n|}{n+1} \underset{\text{за големи } n}{=} |x| \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

$\Rightarrow R = 1$

Нека $\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ и разгл. $x \in (-1,1)$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$

φ и f са диференцируеми:

• $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad | \cdot (1+x)$

$(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$

• $\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \quad | \cdot (1+x)$

$$(1+x)\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n} =$$

$$\overset{\text{смяна}}{\underset{\substack{\text{индекса}\\ m=n-1}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m+1}(m+1)x^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n =$$

първият член

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{\alpha} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right] x^n =$$

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha \cdot \varphi(x)$$

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = n+1 \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} + n \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \alpha\binom{\alpha}{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x)(1+x) = \alpha\varphi(x) \\ f'(x)(1+x) = \alpha f(x) \end{cases} \quad \text{в } (-1,1)$$

• Разгл. в $(-1,1)$ $\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)' = \frac{\varphi'(x)f(x) - \varphi(x)f'(x)}{f^2(x)} =$

$$= \frac{\varphi'(x)(1+x)^{\alpha} - \varphi(x)\cdot\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$= \frac{\varphi'(x)(1+x) - \alpha\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0$$ от предния смет $= 0$

$\frac{\varphi(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$ в $(-1,1)$

$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ в $(-1,1)$

за $\alpha=-1$ $\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n$

$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$

за $\alpha = \frac{1}{2}$ $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}.$

$= \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{n!.2^n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2n!!} x^n$ в $(-1,1)$

1.5 $\ln(1+x)$

$f(x) = \ln(1+x)$ и $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ в $(-1,1)$

$\overset{\int \text{за}}{\underset{\text{ф-ции } f}{\Rightarrow}}$ $\int f'(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ в $(-1,1)$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ в $(-1,1)$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

сменяме индекса:

$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

за $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ разходящ

за $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сх. по Лайбниц

$\Rightarrow$ за $x \in (-1, 1]$
- в $(-1, 1)$ от сметките
- в 1 от T_1 на Абел

пр: $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$\int f'(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x$ в $(-1, 1)$

за $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \Rightarrow$ сх. по ~~Лейбниц~~ Вайерщрас

от $a_n = \frac{1}{2n+1}$ намалява и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Същото важи за $x=1$. $\Rightarrow$

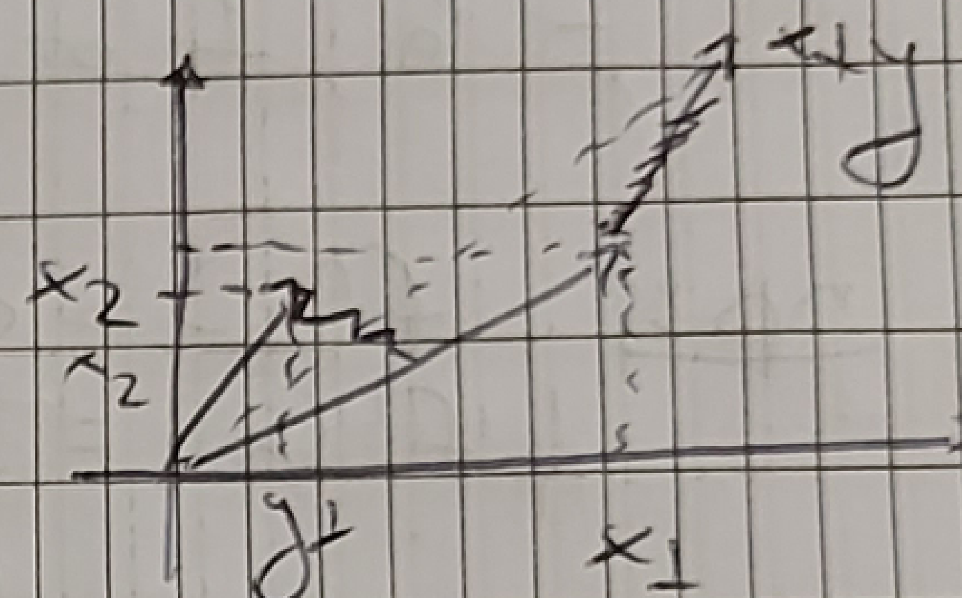
$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ в $[-1,1]$

Диференциално смятане на повече от 1 променлива

О. Алгебра

- $\mathbb{R}^n = \{x=(x_1,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R}\ \forall i\in\{1,\dots,n\}\}$
- $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \Rightarrow x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
  $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ $\quad \lambda x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

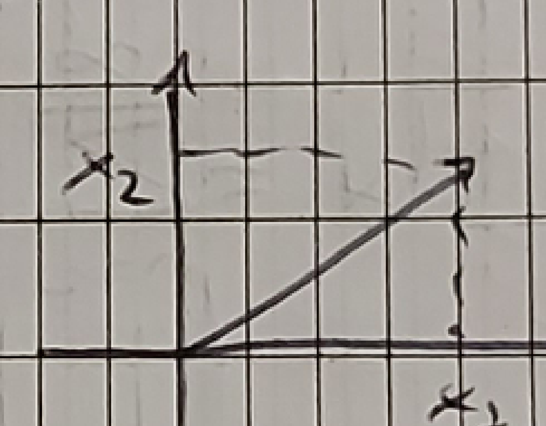
Разстояние $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ е
Питагоровата теорема (обобщена)



0.1 Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$



Питагорова теорема

$\Rightarrow \rho(x,y)=\|x-y\|$

Норма в $\mathbb{R}^n$ е всяко изображение $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ със следните свойства

- Свойства:

- $\|x\|=0 \iff x=\theta$
- $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ $\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}^n$
- $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ $\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^n$ (нер. на Δ)

- Скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$

  $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Неравенство на Коши - Буняковски - Шварц

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Доказателство:

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle$

$\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y^2\| \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$0 \leq$

$\Rightarrow D \leq 0$

$D = (2\langle x, y\rangle)^2 - 4\|y^2\| \cdot \|x\|^2 \leq 0$

$\Rightarrow (\langle x, y\rangle)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

и $\cos\angle(x, y) = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

- Тв: Евклидовата норма е норма

• $\|x\| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n \Rightarrow x = 0$

$\|\theta\| = 0$

• $\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2} = |\lambda| \cdot \|x\|$

• $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \underset{\text{К-Б-Ш}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$

$(\|x\| + \|y\|)^2$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

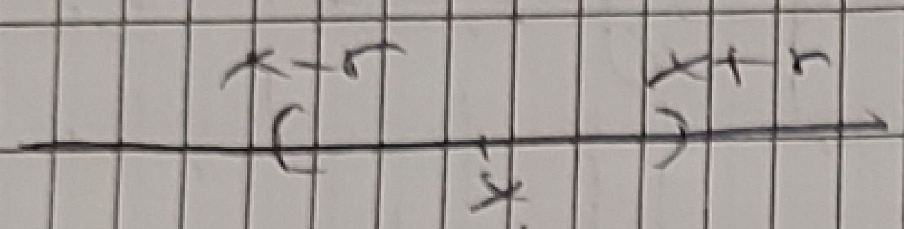
Топология в $\mathbb{R}^n$

1. def: ~~Околност на точка~~ Отворено кълбо

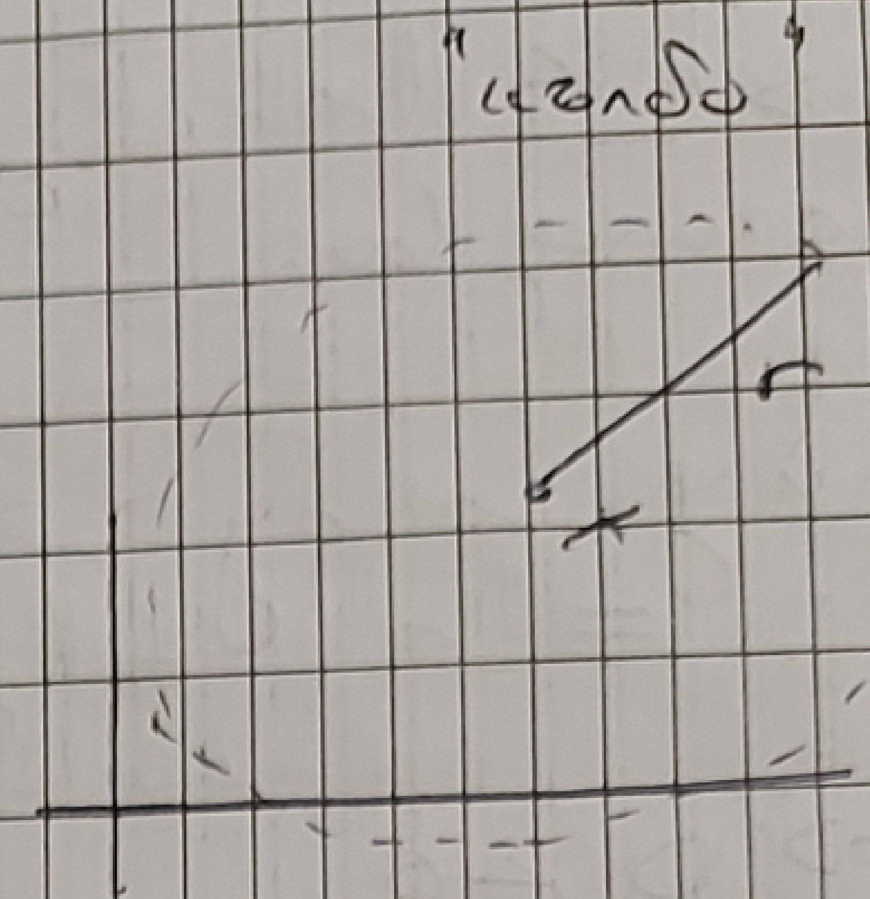
$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| < r\}$

за $r>0$

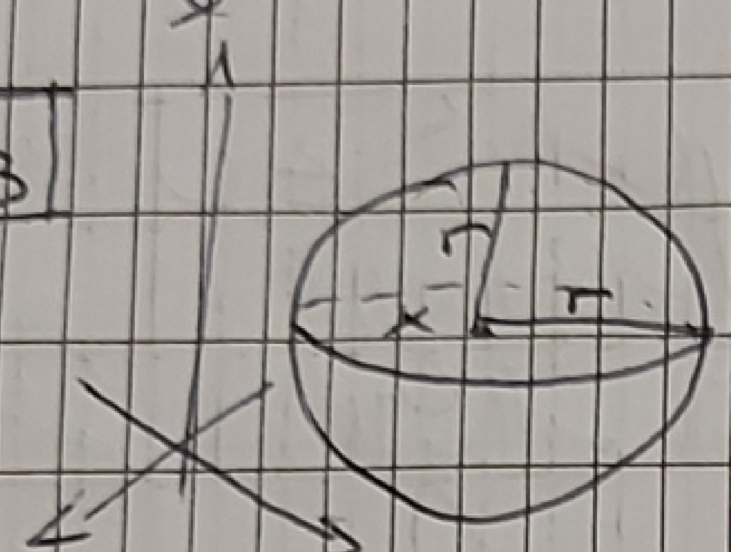
$\boxed{\text{за } n=1}$



$\boxed{\text{за } n=2}$



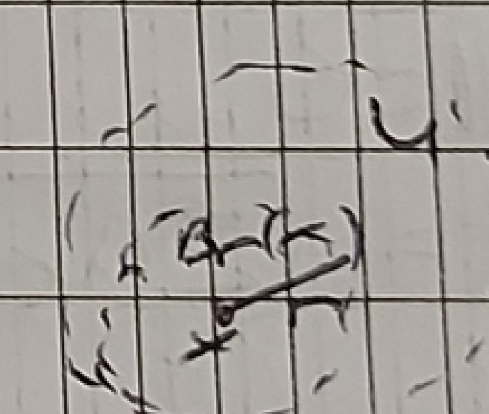
$\boxed{\text{за } n=3}$



1.1 def: Затворено кълбо:

$\overline{B_r}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \le r\}$

1.2 def: Околност на $x \in \mathbb{R}^n$ е всяко множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$, за което същ. $r>0$ и $U \supset B_r(x)$



1.4 $U \subset \mathbb{R}^n$ се нарича отворено, ако ~~за~~ ако е

$\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset U$