28.05.2024 ДИС 2. Локални екстремуми

Нека $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$:

1. def: Казваме, че f има локален минимум в x_0, ако $\exists\, \delta > 0$ такова, че $B_\delta(x_0) \subset D$ и за всяко $x \in B_\delta(x_0)$ е в сила: $f(x_0) \leq f(x)$

строг локален min: $B_\delta(x_0) \subset D$ и $f(x_0) < f(x)$
$\forall x \in B_\delta(x),\ x \neq x_0$

аналогично за max

2. Th на Ферма:
Нека $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ има локален екстремум в x_0 и нека $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ съществуват.
Тогава $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$.

2.1 Доказателство:
т.к. x_0 е лок. екстремум $\Rightarrow B_\delta(x_0) \subset D$ и б.о.о. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in B_\delta(x)$

за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ нека $\varphi_i(t) := f(x_0 + \underbrace{te_i}_{\text{в кълбото}})$, $t \in (-\delta, \delta)$

т.к. съществува частната производна за x_i
$\Rightarrow \varphi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

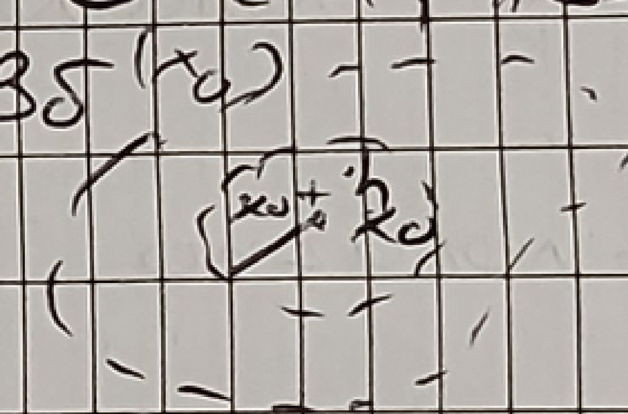
знаем, че $\varphi_i(0) = f(x_0) \leq \underbrace{f(x_0 + te_i)}_{= \varphi_i(t)}$ $\forall \underbrace{t \in (-\delta, \delta)}_{\text{в кълбото}}$

$\overset{\text{Th Ферма}}{\underset{\text{в } \mathbb{R}^1}{\Longrightarrow}} \varphi_i'(0) = 0$ $\square$

2.2 Заб: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, f – непр., D – компакт

Вайерщрас
$\Rightarrow$ НГС и НМС в D $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} \partial D \\ f \text{ не е диф в } x_0 \\ x_0 \text{ е критична т. за } f \end{array} \right.$

3. $f: U \to \mathbb{R}$, U е отв. в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ и
Нека $x_0 \in U$, $B_\delta(x_0) \subset U$ и $x_0 + h \in B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$
$\Rightarrow \|h\| < \delta$ (*)



$\stackrel{диф}{\Rightarrow} f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \underbrace{R_2(x_0, h)}_{остатък}$

нека $\varphi(t) = f(x_0 + th) \cancel{- f(x_0)}$, φ е дефинирано и 2 пъти диференцируемо в отв. интервал $\Delta \supset [0,1]$

$\varphi(t) = f(x_0 + th) \cancel{- f(x_0)} = f(x_1^0 + t h_1, \dots, x_n^0 + t h_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ // написано координатно

$\varphi'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x_0 + th), h \rangle =$
$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th) \cdot \underbrace{h_i}_{\text{не зависи от } t}$

$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th) \right]'_t h_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0 + th) h_j \right] \cdot h_i$

$\Rightarrow \varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + th) h_i h_j$

разл: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) \cdot (1-0) + \frac{1}{2!} \varphi''(\overbrace{\theta}^{0<\theta<1}) \cdot (1-0)^2$

заместваме:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).h_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0+\theta h).h_i.h_j$$

Връщаме се в началото и получаваме твърдението (при началните условия (*))

Тогава: $f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i +$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0+\theta_h h)h_i h_j, \quad 0<\theta_h<1$$

3.1 def: 2ри диференциал на f в x_0 нар. хомогенният полином от втора степен на $h_1, \dots, h_n$

$$d^2 f(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).h_i.h_j =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{n} = \langle f''(x_0)h, h\rangle \quad // \text{матрица}$$

2

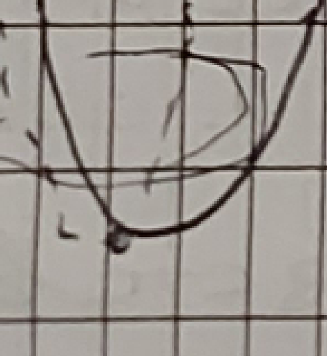
Тогава $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = f''(x_0)$ хесиан на f в x_0

$0<\theta_h<1$

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0+\theta_h h)(h)$$

4. Асиметрична матрица

$\xi(h) = \langle Ah, h\rangle$ квадратична форма

$h_1^2+h_2^2$ 

1) ξ се нар. положително дефинитна, ако $\xi(h)>0$ за $\forall h \neq 0$

2) ξ се нар. отриц. деф., ако $\xi(h)<0$ $\forall h \neq 0$

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + R(x, x_0)$$

3) ξ се нарича недефинитна (знакопроменлива), ако $\exists h', h'' \in \mathbb{R}$: $\xi(h') > 0$, $\xi(h'') < 0$

4) ξ се нарича положително полудефинитна, ако $\xi(h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

5) —"— отрицателно полудефинитна $\xi(h) \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

5. Критерий на Силвестър (за симетр. матр.)

Ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $\xi(h) = \langle Ah, h \rangle$

главни минори

1) ξ е пол. деф $\Leftrightarrow$ $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots$

2) ξ е отр. деф $\Leftrightarrow$ $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$ ...

т.е. се сменят алт. знаците

6. ДУ за локален екстремум

U е отв. в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ е двукратно гладка

x_0 е критична за f, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$

Твърдим, че:

6.1) Ако $d^2 f(x_0)$ е ⊕ деф. квадр. форма, то x_0 е точка на строг локален минимум за f

6.2) Ако $d^2 f(x_0)$ е ⊖ деф. квадр. форма, то x_0 е точка на строг локален максимум за f

NB! | Апроксимираме с параболоиди, затова са ни нужни квадр. форми

6.3) Ако $df^2(x_0)$ е знакопроменлива квадр. форма, то x_0 не е локален екстремум за f

<u>пр:</u>) $f_1(x,y) = x^2 + y^4$ в $(0,0) =: x_0$

$f_2(x,y) = x^2 - y^4$

$$\left.\begin{array}{l} (f_1)'_x = (f_2)'_x = 2x \\ (f_1)'_y = 4y^3 \\ (f_2)'_y = -4y^3 \end{array}\right\} \quad df_1(0,0) = df_2(0,0) = 0$$

$(f_1)''_{xx} = (f_2)''_{xx} = 2$

$(f_1)''_{xy} = 0 = (f_2)''_{xy}$

$(f_1)''_{yy} = 12y^2$, $(f_2)''_{yy} = -12y^2$

Хесиан: $f_1''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f_2''(0,0)$

$d^2 f_1(0,0)(h) = 2h_1^2 = d^2 f_2(0,0)(h)$

6.4 Доказателство:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{df(x_0)(h)}_{=0,\text{ защ. точката е критична}} + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta_h h)(h)$$

$$\Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + \theta_h h)(h) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) h_i h_j = \quad \text{за } h \neq 0$$

$$= \frac{1}{2} \|h\|^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) \cdot \frac{h_i}{\|h\|} \cdot \frac{h_j}{\|h\|} =$$

$$= \frac{1}{2} \|h\|^2 \left[d^2 f(x_0)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right) \cdot \frac{h_i}{\|h\|} \cdot \frac{h_j}{\|h\|} \right]$$

1) $S = \{ h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1 \}$ е компакт $\quad d^2 f(x_0)$ непр.

$\Rightarrow \min\limits_{S} d^2 f(x_0) = d^2 f(x_0)(\tilde{h}) > 0$
$\tilde{h} \in S$

$\Rightarrow d^2 f(x_0)(h) \geq \alpha \quad \forall h \in S \quad (\alpha > 0)$

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right) \frac{h_i}{\|h\|} \cdot \frac{h_j}{\|h\|} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \qquad \frac{|h_i|}{\|h\|} \leq 1$$

поради двукратната гладкост

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \cancel{\forall h} \; B_\delta(x_0) \subset U$

$\forall h, \; \|h\| < \delta : \sum_{i,j}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right) \frac{h_i}{\|h\|} \cdot \frac{h_j}{\|h\|} < \frac{\alpha}{2}$

$\{h\} = \theta$

$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{1}{2} \overbrace{\|h\|^2 \cdot \frac{\alpha}{2}}^{> 0 \text{ const}} \quad \forall h, \; \|h\| < \delta$

$\Rightarrow x_0$ е точка на строг лок. минимум

за 2) е аналогично, резгл. максимум

3) $d^2 f(x_0)(h') > 0 \quad$ б.о.о. $\|h'\| = 1 = \|h''\|$

$d^2 f(x_0)(h'') < 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \|h\|^2 \left[d^2 f(x_0) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_h h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right) \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} \right]$$

За $h = th'$, $h > 0$:

$f(x_0 + th') - f(x_0) = \cancel{\frac{1}{2}\|h'\|^2}\ \frac{1}{2}t^2 \Big(\underbrace{d^2f(h') + }_{>0}$

$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta_n t \cdot h') - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0} h_i' \cdot h_j' \Big) > 0$ за все достатъчно малки t

Аналогично $f(x_0 + th') < f(x_0)$ за всяко достатъчно малки t

$\Rightarrow$ x_0 не е локален екстремум $\square$

пр.:) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$f'_x = 3x^2 - 3y$, $\quad \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$

$f'_y = 3y^2 - 3x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$(0,0) \quad (1,1)$

$\shortparallel \quad \shortparallel$

$M_1 \quad M_2$

$f''_{xx} = 6x$

$f''_{xy} = -3$

$f''_{yy} = 6y$

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$|0| = 0$

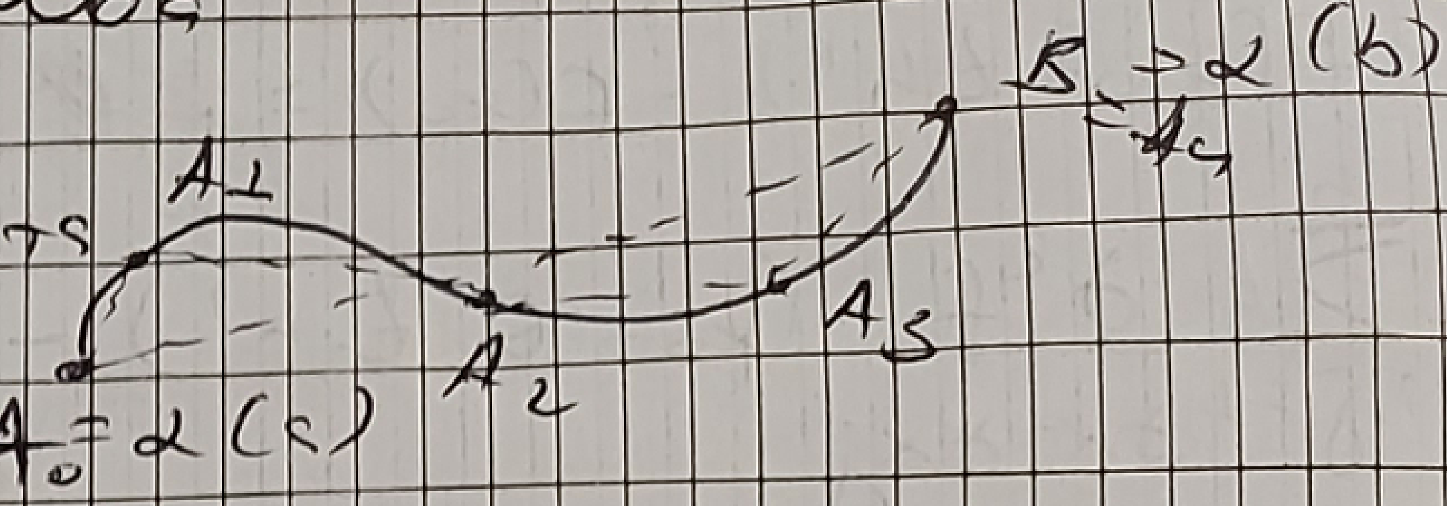
$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \xRightarrow{\text{Силвестър}} d^2f(0,0)$ е знакопроменлива

$d^2f(0,0)(h_1, h_2) = -6h_1 \cdot h_2 \qquad \langle Ah, h \rangle$

$\Rightarrow (0,0)$ не е екстремум

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Дължина на гладка крива



$\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ непрекъснато

$\Gamma_{AB} = \{ \alpha(t) : t \in [a,b] \}$

$A = \alpha(a), \ B = \alpha(b)$

$\Pi: t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$

$A_i = \alpha(t_i), \ i \in \{0, 1, \dots, m\}$

Нека L_Π е начупената, която минава през A_i

$$\Rightarrow \ l(L_\Pi) = \sum_{i=1}^{m} \|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\| = \sum_{i=1}^{m} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

1. def: α се нарича ректифицируема, ако $\{ l(L_\Pi) : \Pi$ подр. на $[a,b] \}$ е огр. отгоре. В такъв случай $l(\Gamma_{AB}) = \sup \{ l(L_\Pi) : \Pi$ подр. на $[a,b] \}$

2. Th: Нека $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ е гладко изображение и $\Gamma_{AB} = \alpha([a,b])$. Тогава Γ_{AB} е ректифицируема и $l(\Gamma_{AB}) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt$, където:

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

Знаем $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$ и $\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n(t) \end{pmatrix}$.

Как интегрираме векторни функции?

Нека $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и подр. $\Pi : t_0 = a < t_1 \dots < t_m = b$ и предст. точки $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

$$\sigma_\alpha(\Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

α се нарича интегруема по Риман в $[a, b]$, ако същ. $I \in \mathbb{R}^n$ такова, че
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall \Pi$ подр. $d(\Pi) < \delta$ $\forall \xi$ пр. т. за Π:
$\| \sigma_\alpha(\Pi, \xi) - I \| < \varepsilon$.

В сила е: α интегруема $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са интегр.
и $\int_a^b \alpha(t)\, dt = \begin{pmatrix} \int_a^b \alpha_1(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_a^b \alpha_n(t)\, dt \end{pmatrix}$

Следствие: Ако $\alpha = \dot{\beta}$ в $[a, b]$, то $\int_a^b \alpha(t)\, dt = \beta(b) - \beta(a)$

3. Тв: α интегруема $\Rightarrow$ $\|\alpha\|$ интегруема и

$$\left\| \int_a^b \alpha(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \overbrace{\|\alpha(t)\|}^{\text{скаларна ф-я}}\, dt$$

α непр. $\Rightarrow$ $\|\alpha\|$ непр. $\Rightarrow$ $\|\alpha\|$ интегруема

Доказателство:

Π_m, $d(\Pi_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$, ξ^m пр. т.

$\sigma_\alpha(\Pi_m, \xi^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} \int_a^b$

Доказателство на 2:

Нека

$\Pi : t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$

$l(\Gamma_\Pi) = \sum_{i=1}^{m} \| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \| =$ // ясно

$= \sum_{i=1}^{m} \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\alpha}(t)\, dt \| \leq$ // от Нютон - Лайбниц (т.к. $\dot{\alpha}$ е непр.)

$\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \| \dot{\alpha}(t) \| dt \overset{\text{адитивност}}{=} \int_a^b \| \dot{\alpha} \| dt$

$\Rightarrow \Gamma_{AB}$ е ректифицируема и $l(\Gamma_{AB}) \leq \int_a^b \| \dot{\alpha}(t) \| dt$

Нека $\varepsilon > 0$. Търсим Π подразбиване така, че

$l(\Gamma_\Pi) \geq \int_a^b \| \dot{\alpha}(t) \| dt - \varepsilon$

$\left.\begin{matrix} \dot{\alpha}\ [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \text{непр. + Кантор} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall t', t'' \in [a,b],\ |t' - t''| < \delta$

$|\dot{\alpha}(t') - \dot{\alpha}(t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Π подр. на $[a,b]$, $d(\Pi) < \delta$

$\Pi : t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$

фикс. $i \in \{1, \dots, m\}$

$\| \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \| = \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\alpha}(t)\, dt \| =$

$= \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\alpha}(t_i)\, dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(t_i))\, dt \| \geq$

$\geq \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\alpha}(t_i)\, dt \| - \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(t_i))\, dt \| =$

$$\Rightarrow \|\dot{\alpha}(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\underbrace{\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(t_i)}_{|t-t_i| \leq d(\pi) < \delta}\| \, dt \geq$$

$$\geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\alpha}(t_i)\| \, dt - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|-\dot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t_i) + \dot{\alpha}(t)\| \, dt - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \geq$$

$$\geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\|\dot{\alpha}(t)\| - \underbrace{\|\dot{\alpha}(t_i) - \dot{\alpha}(t)\|}_{} \right) dt - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} =$$

$$\Rightarrow \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(t_i - t_{i-1}) - \frac{3}{3(b-a)}(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt - \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}(t_i - t_{i-1})$$

$$\ell(L_\pi) = \sum_{i=1}^{m} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt - \sum_{i=1}^{m} \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt - \frac{2\varepsilon}{3\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} >$$

$$\int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \, dt - \varepsilon \quad \square$$