26.03.2024 ДИС 2. Числови редове

- Безкрайната сума $a_1 + a_2 + \dots$
- Парциални (частични суми) напр:

$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица на общия член, а $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редицата на парциалните суми на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$

- Разглеждането на редове и редици е екв.

- Примери
  - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ ако $|x|<1$ и разходящ за $|x| \geq 1$

$x \in \mathbb{R}$

$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \underset{x\neq 1}{\overset{за}{=}} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

$(s_n \text{ иначе } = n+1)$

$\lim_{n\to\infty} \underset{x\neq 1}{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$ съществува $\longleftrightarrow |x| < 1$

(пр) NB! | $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

(пр) хармоничен ред

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4}}_{2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$$\geq \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{\underbrace{2^{k-1}+2^{k-1}}_{2^k}} \geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

подредицата $S_{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow S_n$ е разходяща

- Свойства

1) НУ за сходимост (NB! Не е достатъчно усл.) пр: хармоничен ред

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Longrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к.:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

$\Rightarrow \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{a_n =} \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е едновременно сходящ или разходящ с $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$

3) Линейност

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи, то

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

($S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots b_n)$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ако $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$

• Редове с неотрицателен общ член

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$

• Принцип за сравнение

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с $0 \leq a_n \leq b_n$ за $\forall n \geq n_0$

Тогава: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ

Нека $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и б.о.о. $n_0 = 1$

$\sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$\Rightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ са растящи с $s_n \leq \sigma_n$

$\Rightarrow$ огр. отгоре и сходимост

• Следствие

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$0 \leq a_n$ $\forall n \geq n_0$, $b_n > 0$

$0 \leq b_n$

Ако $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ и $\ell \in (0, +\infty)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Т.к. $\frac{\ell}{2} < \ell < 2\ell < +\infty \Rightarrow \frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2\ell$ $\forall n \geq \tilde{n} \geq n_0$

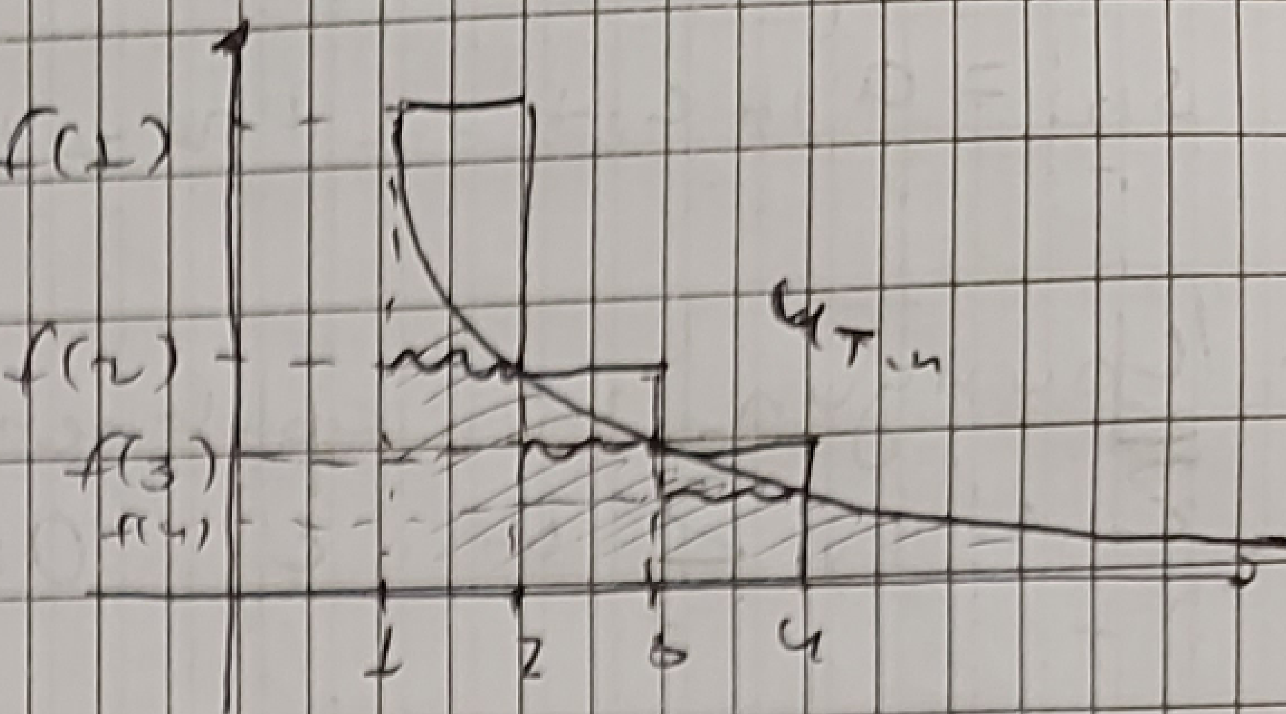
$\Rightarrow \frac{\ell}{2} b_n < a_n < 2\ell b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ разх.

• Интегрален критерий на Коши - Маклорен

$f: [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ е монотонно намаляваща

твърдим, че $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ



Следв.:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ е сходящ $\Rightarrow \alpha > 1$

Доказателство:

Нека $n \le x \le n+1$. Т.к. f е намаляваща

$\Rightarrow f(n) \ge f(x) \ge f(n+1)$ $\forall x \in [n, n+1]$. Интегр. неравенства:

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,dx \ge \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1)$$

Сумиране: $\sum_{n=1}^{N} f(n) \ge \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$ адитивност на $\int$ $\sum_{m=2}^{N+1} f(m)$

$$\sum_{n=1}^{N+1} f(n) - f(1) \le \int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Ако $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, т.е. $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ $\forall N \in \mathbb{N}$

и $\Rightarrow \sum_{n=1}^{N+1} f(n) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$, редицата на парц. суми е огр. отгоре $\Rightarrow$ сходяща $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сх.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ако редът е сходящ, то $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N} f(n) \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\forall N \in \mathbb{N}$

т.к. $f(x) \ge 0 \Rightarrow F(p) = \int_1^{p} f(x)\,dx$ е растяща

$\Rightarrow F$ огр. отгоре $\Rightarrow \lim_{p \to +\infty} F(p)$ същ. $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ

□

пр $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n^4-3n+1}}{\sqrt[7]{n}\cdot(n^2+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}\sqrt[3]{5-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}{\sqrt[7]{n}\cdot n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \sim$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{2+\frac{1}{7}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(2+\frac{1}{7}-\frac{4}{3})}} \Rightarrow$ разходящ $\quad 2+\frac{1}{7}-\frac{4}{3} < 1$

NB!! Критерий на Даламбер

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

разгл. $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

1) Ако същ. $n_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0,1)$ такива, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ \forall n \geq n_0$, то $\sum_{n=1}^{\infty}$ е сходящ

2) Ако същ. $n_0 \in \mathbb{N}$ такива, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \geq n_0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разх.

Доказателства:

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq q, \ 0 < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq q \ \ldots \quad \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \leq q$

умн. неравенствата

$\frac{a_{n_0+1}}{\cancel{a_{n_0}}} \cdot \frac{\cancel{a_{n_0+2}}}{\cancel{a_{n_0+1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+k}}{\cancel{a_{n_0+k-1}}} \leq q^k$

$0 < a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k \Rightarrow a_{n_0} \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сход. защото $q \in (0,1)$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum_{n=n_0+1} a_n$ сходящ

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$

$a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• Следствие: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ същ. $\Rightarrow$ Ако $l > 1$ $\sum a_n$ е разх.
$l < 1$ $\sum a_n$ е сх.

(пр) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$
$x > 0$
$k \in \mathbb{N}$

$\frac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ако $x < 1$ сх.
ако $x > 1$ разх.
$x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^k$ разх.

(пр) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$

$$\frac{\frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n} e^n} = \frac{(n+1)\, e \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

> 1

$\Rightarrow$ разходящ

$\cancel{\frac{n}{1+n}}$

Критерий на Коши
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$

1) Ако същ. $q \in [0,1)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такива, че $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ $\forall n \geq n_0$
то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ
2) Ако $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ за безброй много стойности на индекса
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0$

$0 \leq a_n \leq q^n \quad \forall n \geq n_0 \overset{\text{принцип}}{\underset{\text{за сравн.}}{\Rightarrow}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходящ. $(q \in [0,1))$

2) $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, т.е.

$a_{n_k} \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Следствие:

Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ и $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ същ. Ако $\ell > 1$ разх.
$\ell < 1$ сх.

$\ell < q < 1$

$(-\infty, q)$ ок на $\ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q, \ \forall n \geq n_0$ прил. 1)

$\sqrt[n]{a_n}\ \ell > 1 \quad \forall n \geq n_0$ прил. 2)

Пр $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} \quad \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}$

$\cancel{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad = \frac{1+\frac{1}{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$ сх.

$a_n > 0$ и същ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Пр $p > 0, \ q > 0$

$p + pq + p^2 q + p^2 q^2 + \dots +$

$a_n \begin{cases} p^k q^k, & \text{ако } n = 2k \\ p^{k+1} q^k, & \text{ако } n = 2k+1 \end{cases}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cancel{p^{2}q}\ \frac{p^{n+1}q^{n}}{p^{n}q^{n}} = p$$

$a_n > 0$ $\quad p<1$ и $q<1 \Rightarrow$ сх.

$p>1$ и $q>1$ разх

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p^{n+1}q^{n+1}}{p^{[illegible]}q^{[illegible]}} = q$$