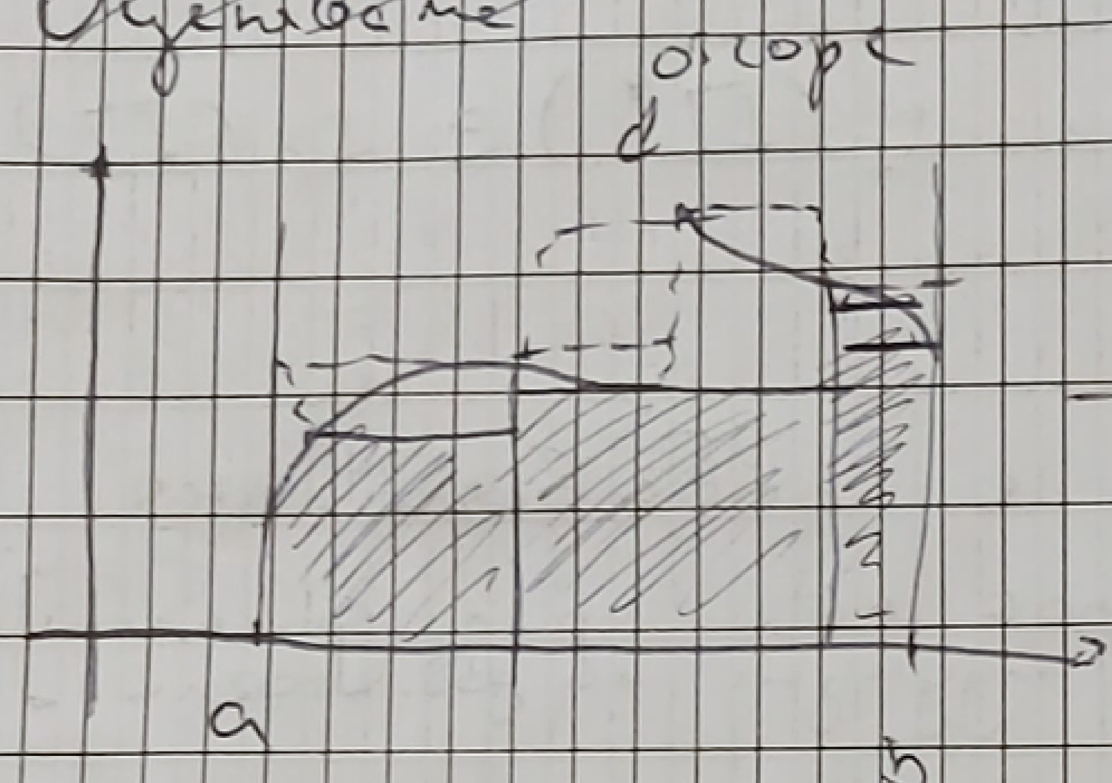
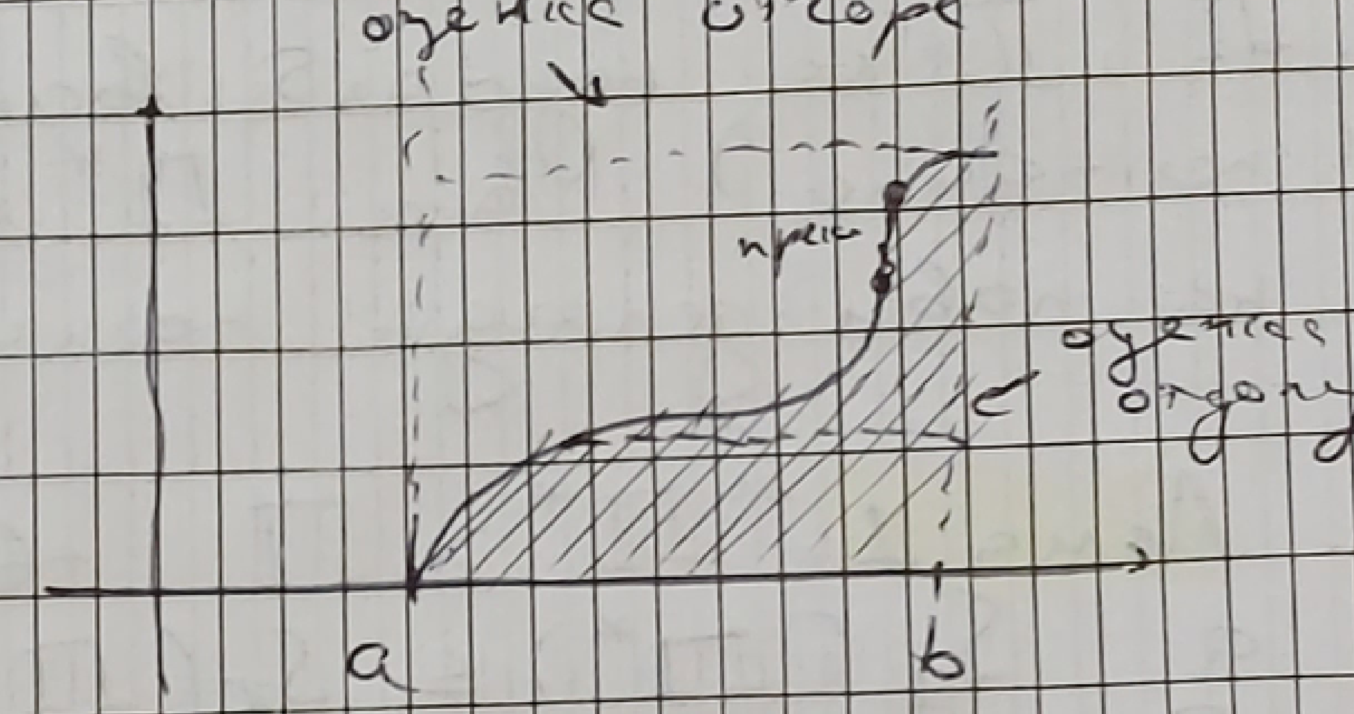
27.02.2024 ДИС 2. Определен интеграл

0. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена

Оценяваме





→ разделяме интервала на 3 и пак $\boxed{}$. Това пак е долна оценка. Правим и горна оценка.

1. Подразбиване на интервал. За краен брой точки, имаме подразбиване
$\Pi \to a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$
получаваме $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

2. Малка сума на Дарбу
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ за фиксирано подразбиване
$i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i (x_i - x_{i-1})}_{1 \text{ правоъгълник}}$ е малка сума на Дарбу за f и подразбиване Π

Ако вземем супремума на стойностите:
$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$S_f(\Pi) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ наричаме голяма сума на Дарбу за f и Π

3. Π^*, Π са подразбивания, $\Pi^* \geq \Pi$ (Π^* е по-дребно, по-фино), ако Π^* се получава от Π с добавяне на нови делящи точки.

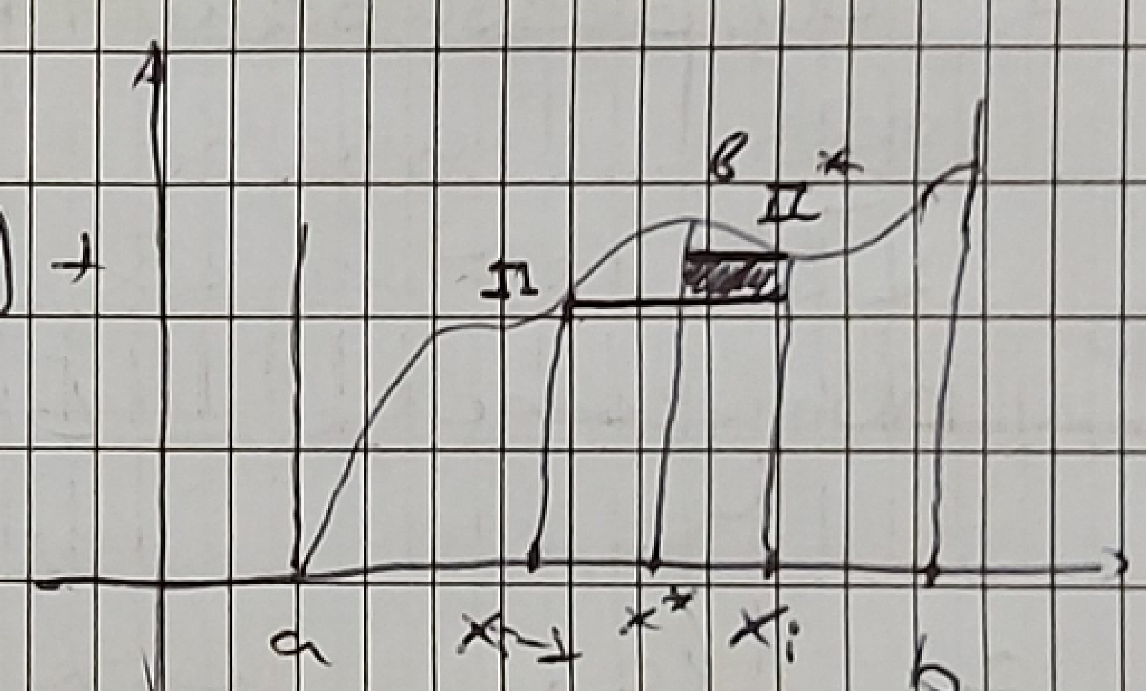
4. Лема 1: За $\Pi^* \geq \Pi$ твърдим, че $s_f(\Pi^*) \geq s_f(\Pi)$, а $S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$

Доказателство:

Б.о.о. Π^* се получава от Π с добавяне на 1 нова точка [иначе краен брой пъти прилагаме (чрез индукция по доб. точки)]

$\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\Pi^*: a = x_0 < \dots < x_{i-1} < x^* < x_i < \dots < x_n = b$



$$s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) = \sum_{j \neq i} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f\,(x_j - x_{j-1}) + \inf_{[x_{i-1}, x^*]} f\,(x^* - x_{i-1}) + \inf_{[x^*, x_i]} f\,(x_i - x^*) - \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f\,(x_j - x_{j-1}) =$$

① $\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf\limits_{[x_{i-1}, x^*]} f$

$$= \inf_{[x_{i-1}, x^*]} f\,(x^* - x_{i-1}) + \inf_{[x^*, x_i]} f\,(x_i - x^*) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1})$$

② $\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf\limits_{[x^*, x_i]} f$

$$\geq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x^* - x_{i-1}) + \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x^*) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1}) = 0$$

и сумата на долн. на малките интервали дава долн. на големите

5. Лема 2: За Π_1, Π_2 произволни подр. на $[a, b]$ имаме $s_f(\Pi_1) \leq S_f(\Pi_2)$

$\Pi_1, \Pi_2 \to \underset{\text{подр.}}{\Pi^*} \geq \Pi_1$ и $\Pi^* \geq \Pi_2$

$$s_f(\Pi_1) \underset{Л1}{\leq} s_f(\Pi^*) \underset{\inf\limits_{[\ldots]} f \leq \sup\limits_{[\ldots]} f}{\leq} S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi_2)$$

$\underline{\int_a^b} f = \sup\{ s_f(\Pi) : \Pi$ подразбиване на $[a,b]\}$ - долен интеграл на f

$\overline{\int_a^b} f = \inf\{ S_f(\Pi) : \Pi$ подразбиване на $[a,b]\}$ -

Тогава $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$

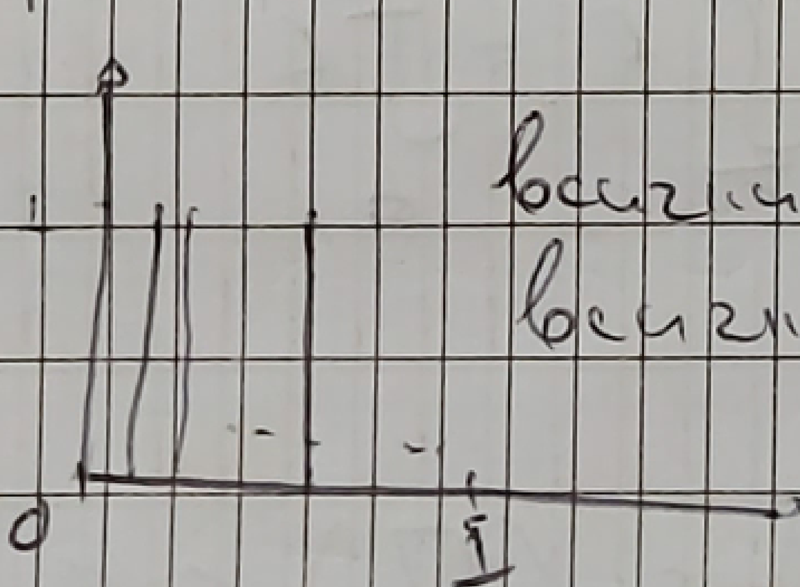
Знаем $s_f(\Pi_1) \le S_f(\Pi_2)$ за $\forall\, \Pi_1, \Pi_2$ подр

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le S_f(\Pi_2)$ $\forall\, \Pi_2$ подр.

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$

Деф: Ако $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена.
Ако $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, то казваме, че f е интегруема по Риман в интервала $[a,b]$ и общата стойност на долния и горния интеграл наричаме Риманов интеграл на f в $[a,b]$.
Бележим с $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \dots$

пример за неинтегруема функция (Дирихле)



всички sup са 1,
всички inf са 0, ...

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in [0,1] \cap \mathbb{J} \\ 1, & \text{ако } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} 1\,(x_i - x_{i-1}) = 1$$

$$s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} 0\,(x_i - x_{i-1}) = 0$$

$\Rightarrow$ не е интегруема

6. Критерий за интегруемост

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f ограничена

Тогава f е интегруема (по Риман) $\iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Pi_1, \Pi_2$ подр. на $[a,b]$: $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \varepsilon$

($\Rightarrow$) $\int_a^b f$ $\quad \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f$, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\int_a^b} = \inf\{S_f(\Pi): \Pi \text{ подр.}\}$

$\Rightarrow \exists \Pi_1$ подр.: $\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} > S_f(\Pi_1)$

аналогично $\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f = \sup\{s_f(\Pi): \Pi \text{ подр.}\}$

$\Rightarrow \exists \Pi_2$ подр.: $\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < s_f(\Pi_2)$

$\Rightarrow S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \left(\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$

($\Leftarrow$) $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) \quad \forall \Pi_1, \Pi_2$ подр. на $[a,b]$

т.к. sup и inf

$\Rightarrow 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

6.1 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Pi$ подр. на $[a,b]$: $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$

($\Rightarrow$) очевидно

($\Leftarrow$) $\Pi \supseteq \Pi_1$, $\Pi \supseteq \Pi_2$

от Лема 1 $\Rightarrow S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \leq S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_2) < \varepsilon$

6.2 Π подр. $\rightarrow S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1})$

Осцилация: $\omega(f, [a,b]) := \sup\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b]\}$
отчета

7. Лема: $\omega(f, [a,b]) = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$

$f(x) \leq \sup_{[a,b]} f \quad \forall x \in [a,b]$

$f(y) \geq \inf_{[a,b]} f \quad \forall y \in [a,b]$

$\Bigg\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$

$\forall x \in [a,b] \; \forall y \in [a,b]$

$\exists \omega(f, [a,b]) < \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$

$\sup_{[a,b]} f - \frac{\varepsilon}{2} < \sup_{[a,b]} f \rightarrow \exists x_0 \in [a,b], \; f(x_0) > \sup_{[a,b]} f - \frac{\varepsilon}{2}$

$\inf_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2} > \inf_{[a,b]} f \rightarrow \exists y_0 \in [a,b], \; f(y_0) < \inf_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2}$

$|f(x_0) - f(y_0)| \geq$

$\Rightarrow f(x_0) - f(y_0) > \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f - \varepsilon$

6.3 $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Pi$ подр. на $[a,b]$: $\sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$

$\Pi: x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

8. Тв: Непрекъснатата функция $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интегруема по Риман в $[a,b]$

Доказателство:

f е непр. в $[a,b]$ $\Rightarrow$ f е инт. в $[a,b]$

Нека $\varepsilon > 0$. $\left\{ \begin{array}{l} \\ f \text{ непр. в } [a,b] \end{array} \right\} \overset{\text{Кантор}}{\Longrightarrow}$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (Вайерщрас)

Избираме подразбиване Π с $d(\Pi) < \delta$. Тогава

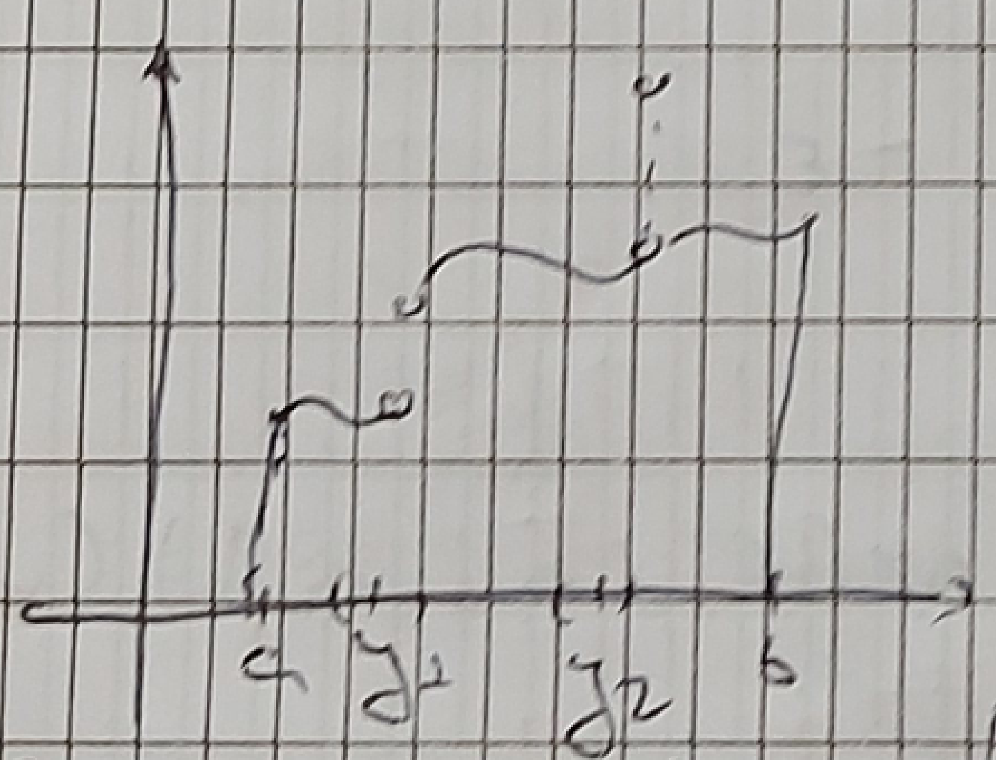
$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\omega(f, [x_{i-1}, x_i])}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} (x_i - x_{i-1})$$

Деф: Диаметър на подразбиване Π нарича се $d(\Pi) = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

9. Тв: Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и има краен брой точки на прекъсване. Тогава f е интегруема по Риман в $[a,b]$.

Нека $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ са точките на прекъсване на f.



Нека $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$.

$[y_j - \eta, y_j + \eta] \cap [a,b]$ е инт.

$$C = [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (y_j - \eta, y_j + \eta)$$

f е непр. в C $\overset{\text{Кантор}}{\Rightarrow}$ f е равномерно непр., т.к. C е крайно обединение от затворени интервали

$\overset{\text{Кантор}}{\Rightarrow}$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in C$ $|x - y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Π е подр. на $[a,b]$

$[y_j - \eta, y_j + \eta] \cap [a,b]$ е интервал от Π $\quad d(\Pi) < \delta$

$\Pi = x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ $\quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset C} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \not\subset C} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \varepsilon(b-a) + (M-m) \cdot n \cdot 2\frac{\eta}{2} \qquad M = \sup_{[a,b]} f \quad m = \inf_{[a,b]} f$$

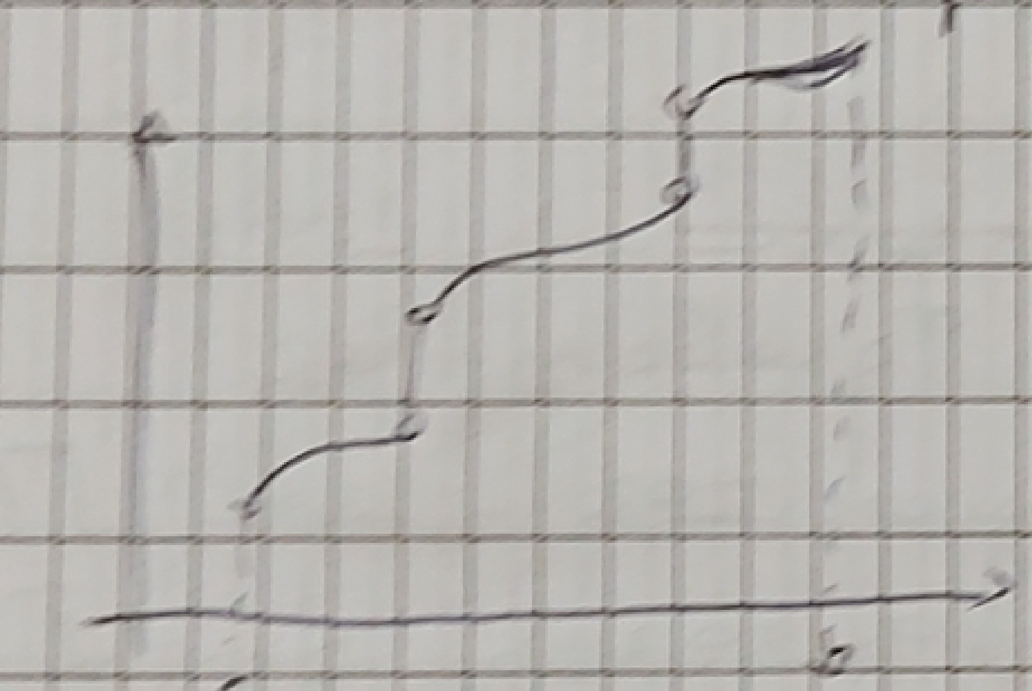
10. Критерий на Лебег за интегруемост по Риман

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ е инт. $\Leftrightarrow$ f е ограничена и

$R_f = \{ x : f$ прек. в $x \}$ е пренебрежимо по Лебег

11 Тв: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна (б.о.о. растяща)

$\Rightarrow f$ е интегруема по Риман (



f е ограничена

$\Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$

$\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ подразбиване

$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1})$, а $\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i)$ т.к. растяща

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\le d(\Pi)} \le d(\Pi) \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

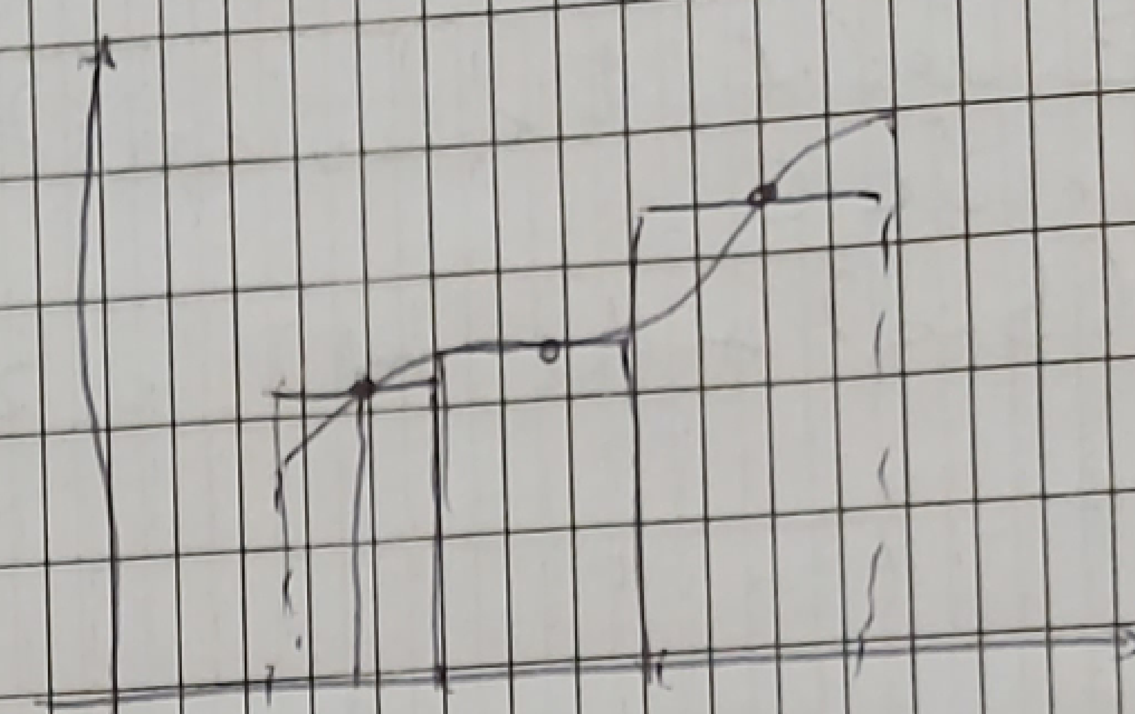
$$= d(\Pi)(f(b) - f(a))$$

Нека $\varepsilon > 0$. Избираме Π с $d(\Pi) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$

Тогава $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \le d(\Pi) \cdot [f(b) - f(a)] <$

$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} (f(b)-f(a)+1) = \varepsilon$

12. Сума на Риман



$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ е подр. на $[a,b]$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ представителни точки

$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

$\sigma_f(\Pi, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ е сума на Риман за f, подразбиване Π с представителни точки ξ

13. Тв: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f ограничена

Π е подразбиване на $[a,b]$. Тогава

$s_f(\Pi) = \inf\{\sigma_f(\Pi, \xi) \mid \xi$ предст. точки за $\Pi\}$

$S_f(\Pi) = \sup\{\sigma_f(\Pi, \xi) \mid \xi$ предст. точки за $\Pi\}$

Док:

ξ предст. т. за Π

$\Rightarrow \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f \le f(\xi_i) \le \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f \quad | \cdot (x_i - x_{i-1})$ и $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ (+)

$s_f(\Pi) \le \sigma_f(\Pi, \xi) \le S_f(\Pi)$

$\varepsilon > 0$ произв.

Избираме

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ така, че $f(\xi_i) > \sup f - \varepsilon$

$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ пр. точки за Π и $[x_{i-1}, x_i]$

$\sigma_f(\Pi, \xi) = \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1} (\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f - \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) =$

$= S_f(\Pi) - \varepsilon(b-a)$

Близо до сума на Дарбу можем да намерим сума на Риман

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Казваме, че сумите на Риман за f имат граница $I \in \mathbb{R}$, ако за произволно $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че при произволен избор на подразбиване Π на $[a, b]$ с $d(\Pi) < \delta$ и при произволен избор на представителни точки за Π е в сила $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$. Пишем $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = I$

Th: Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е такава, че съществува $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sigma(\Pi, \xi) = I$. Тогава f е огр., интегруема по Риман и интеграла $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Th: Ако $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема по Риман, то сумите на Риман имат граница и $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = \int_a^b f$

Док. на Th 1:

$\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = I$

$\varepsilon > 0 \to$ Същ. $\delta > 0$ $\forall \Pi$, $d(\Pi) < \delta$ $\forall \xi$ пр. за Π: $|\sigma_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon$

Фиксираме $\Pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ с $d(\Pi) < \delta$.

Тогава $I - \varepsilon < \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon$ $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$i \in \{1, \dots, n\}$

$\overline{\xi_j} \in [x_{j-1}, x_j]$ $j \neq i$

$\Rightarrow I - \varepsilon < \sum\limits_{j \neq i} f(\overline{\xi_j})(x_j - x_{j-1}) + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon$

$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\frac{I - \varepsilon - \sum\limits_{j \neq i} f(\overline{\xi_j})(x_j - x_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < f(\xi_i) < \frac{I + \varepsilon - \sum\limits_{j \neq i} f(\overline{\xi_j})(x_j - x_{j-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow f$ е ограничена върху $[x_{i-1}, x_i]$ $i \in \{1, \dots, n\}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ е ограничена върху $[a, b]$, т.к. интервалите са краен брой

$\varepsilon > 0$ произволно
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ $\forall \Pi$ подр. $d(\Pi) < \delta$ $\forall \xi$ предст. т. за Π:
$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_f(\Pi, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$
Фиксираме Π с $d(\Pi) < \delta$. Тогава
$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(\Pi, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall \xi$, ξ предст. т. за Π

$\underset{\text{Т6.}}{\Rightarrow} I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_f(\Pi) \le S_f(\Pi) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$ ①

$\Rightarrow S_f(\Pi) - s_f(\Pi) \le (I + \frac{\varepsilon}{3}) - (I - \frac{\varepsilon}{3}) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ е интегруема

$\Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_f(\Pi) \le \int_a^b f \le S_f(\Pi) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$
$\Rightarrow \left| \int_a^b f - I \right| \le \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall \varepsilon > 0$
$\Rightarrow \int_a^b f = I = \lim_{d(\Pi) \to 0} \sigma_f(\Pi, \xi)$ □

Лема: Π е подразбиване на $[a, b]$, Π^* е получено от Π с прибавянето на нови k на брой деления точки. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена. $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$

Тогава $0 \le S_f(\Pi) - S_f(\Pi^*) \le k(M - m)\, d(\Pi)$
и $0 \le s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) \le k(M - m)\, d(\Pi)$

Док:
$\Pi = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
Π^* ~~$= a = x_0$~~ $x_{i-1} < x^* < x_i$ $\Rightarrow \Pi^* = \Pi \cup \{x^*\}$

$$S_f(\Pi) - S(\Pi^*) = \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1}) - \left(\sup_{[x_{i-1}, x^*]} f\right)(x^* - x_{i-1}) -$$

$$\left(\sup_{[x^*, x_i]} f\right)(x_i - x^*) \le M \underset{(x_i - x_{i-1})}{d(\Pi)} - m(x^* - x_{i-1}) - m(x_i - x^*) =$$

$$= M \underset{(x_i - x_{i-1})}{d(\Pi)} - m(x_i - x_{i-1}) = (M - m)(x_i - x_{i-1}) \le$$

$$\Rightarrow S_f(\Pi) - S_f(\Pi^*) \le (M - m)\, d(\Pi)$$ (c f gruye touie)