02.04.2024 ДИС 2

1. Критерий на Раабе - Дюамел

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$

$\alpha_n \left\{ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$. Тогава:

1.1 Ако $\exists\, \mu > 1$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такива, че $\alpha_n \geq \mu \ \forall n \geq n_0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

1.2 Ако $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че $\alpha_n \leq 1 \ \forall n \geq n_0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

Доказателство:

$$n a_n - (n+1) a_{n+1} = n a_n - n a_{n+1} - a_{n+1} = a_{n+1} \cdot \underbrace{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)}_{\alpha_n} - a_{n+1}$$

$$= a_{n+1}(\alpha_n - 1)$$

1.1 $\exists\, \mu > 1 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \alpha_n \geq \mu$

$n a_n - (n+1) a_{n+1} > a_{n+1} \underbrace{(\mu - 1)}_{>0 \text{ константа}} \quad \forall n \geq n_0$

$$\left.\begin{array}{l} n_0 a_{n_0} - (n_0+1) a_{n_0+1} > a_{n_0+1}(\mu - 1) \\ (n_0+1) a_{n_0+1} - (n_0+2) a_{n_0+2} > a_{n_0+2}(\mu - 1) \\ p-1 \text{ пъти} \quad \ldots \\ (n_0+p-1) a_{n_0+p-1} - (n_0+p) a_{n_0+p} > a_{n_0+p}(\mu - 1) \end{array}\right\} + \Rightarrow$$

$\Rightarrow n_0 a_{n_0} - (n_0+p) a_{n_0+p} > \left(\sum_{n=n_0+1}^{n_0+p} a_n\right)(\mu - 1) \quad / : \mu - 1 > 0$

$\Rightarrow \sum_{n=n_0+1}^{n_0+p} a_n < \frac{n_0 a_{n_0}}{\mu - 1} \Rightarrow$ прибавям първите по края

$\Rightarrow S_{n_0+p} = \sum_{n=1}^{n_0+p} a_n < \frac{n_0 a_{n_0}}{\mu - 1} + \sum_{n=1}^{n_0} a_n \quad \forall p \in \mathbb{N}$

дясната страна на нер. няма р => огр. отгоре
=> $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ огр. отгоре и растящa => сходящa

$\boxed{1.2}$ $\alpha_n \le 1 \quad \forall n \ge n_0$

$n a_n - (n+1) a_{n+1} = a_{n+1} (\alpha_n - 1) \le 0 \quad \forall n \ge n_0$

$n a_n \le (n+1) a_{n+1} \quad \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow n a_n \ge n_0 a_{n_0} \quad \forall n \ge n_0$ (т.к. растяща)

$a_n \ge (n_0 a_{n_0}) \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow \underbrace{(n_0 a_{n_0})}_{>0} \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}^{\text{конст.}}$ ~ хармоничен ред разходящ и принцип за сравнение

<u>пример</u> Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot 2^n}{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}$$

от Даламбер $\to 1^-$

Раабе - Дюамел

$$n\left(\frac{4n+3}{4n+2} - 1\right) = \frac{4n+3-4n-2}{4n+2} \cdot n = \frac{n}{4n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ разходящ

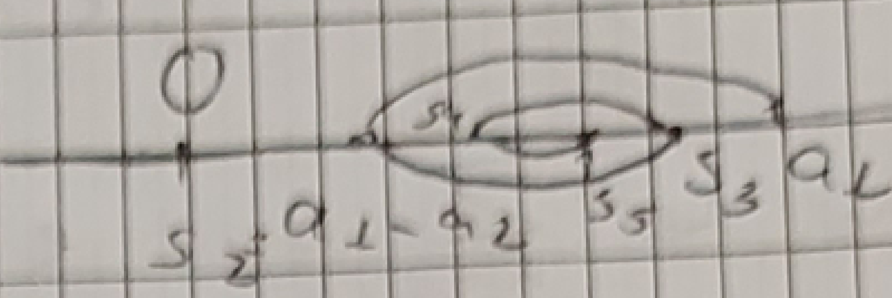
Редове с общ член, менящ си знака

1. Критерий на Лайбниц (редове с алтернативно сменящи се знаци)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

$a_n > 0 \quad \forall n \ge 1$

ДУ за сходимост на този ред: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща (съществено!) и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ.



Доказателство:

Твърдим $s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \dots \ge s_{2k+1} \ge \dots$ е намаляваща

$s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k} + a_{2k+1} \le 0$ (a_n намаляваща)

$s_2 \le s_4 \le s_6 \le \dots \le s_{2k} \le \dots$ е растяща ← s_1 е горна гр.

$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2} \ge 0$

$s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1}$

$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \ge s_{2k} \ge s_2$ ← долна граница

$s_{2k} = s_{2k+1} - a_{2k+1} \le s_1$ ← горна граница

Нека $s := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} + \overset{\to 0}{a_{2k+1}}) = \lim_{k\to\infty} s_{2k}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = s$ и редът е сходящ □

пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ

а. $a_1 + a_2 + \dots +$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ сх $\iff$ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ фунд

$\Updownarrow$ деф. $\Updownarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall p \ge n_0 : |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$

$\sum_{i=1}^{n+p} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right|$

2. НДУ Коши за числови редове

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$

Казваме, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, ако $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ. Казваме, че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ, ако е сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е разходящ.

3. Твърдение: От абсолютна сходимост следва сходимост, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

Доказателство:

Нека $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сх. $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| \right| < \varepsilon$

за $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| \underset{\Delta}{\leq} \overset{\text{нер.}}{\sum_{i=n+1}^{n+p}} |a_i| < \varepsilon \quad \square$$

4. def: Казваме, че за $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е в сила комутативният закон, ако за всяко „разместване" $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция на ест. числа е в сила, че $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ са едновременно сходящи или разходящи. Ако са сходящи, е в сила $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$

5. Th: Ако един ред е абсолютно сходящ, за него е в сила комутативният закон.

5.1 Доказателство:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходящи, $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ е сходящ

за $n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad \{k_1, k_2, \dots, k_{n_0}\} \supset \{1, 2, \dots n\}$

$|a_{k_1}| + |a_{k_2}| + \dots + |a_{k_{n_0}}| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ ← ограничени отгоре

парциалните суми на $a_{k_n} \Rightarrow \{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сх.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, $\quad s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sigma$, $\quad \sigma_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n}$ $\qquad$ Ще док. $s = \sigma$

$|s - \sigma| \leq |s - s_k| + |s_k - \sigma_n| + |\sigma_n - \sigma|$

нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : |s - s_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad$ т.к. граници

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |\sigma - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

Същ. $\tilde{k} \in \mathbb{N}\ \forall k \geq \tilde{k}\ \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{i=k+1}^{k+p} |a_i| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad$ НДУ Коши

Нека $k \geq \max\{k_0, \tilde{k}\}$ $\quad n \geq n_0$ и $\quad p \in \mathbb{N}$

$\{1, 2, \dots, k\} \subset \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \subset \{1, 2, \dots, k, k+p\}$

$|\sigma_n - s_k| \leq \sum_{i \in \{k_1, \dots, k_n\} \setminus \{1, \dots, k\}} |a_i| \leq \sum_{i=k+1}^{k+p} |a_i| < \frac{\varepsilon}{3}$

$(a_{k_1} + \dots + a_{k_n}) - (a_1 + \dots + a_k)$

$\Rightarrow |s - \sigma| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

6. Th на Риман

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

$\alpha \leq \beta$

Тогава съществува разместване $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $\mathbb{N}$ такова, че

$\liminf s_k = \alpha$, $\limsup s_k = \beta$, където s_k е к-тата

на разместени ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ $\lim\inf$ най лява точка
$\lim\sup$ дясна

1) $p_n = \max\{a_n, 0\} = \frac{|a_n| + a_n}{2} \geq 0$
$q_n = -\min\{a_n, 0\} = \frac{|a_n| - a_n}{2} \geq 0$

$p_n - q_n = a_n$
$p_n + q_n = |a_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ са разходящи

$\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$ е сходящ
$\sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$ е разходящ

Нека $\alpha_k < \beta_k$ $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$ $\beta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \beta$ p_1

7. Th: Нека $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ са абсолютно сходящи. Нека $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е биекция. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_1(n)} \cdot b_{\pi_2(n)}$ е абсолютно сходящ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{a_{\pi_1}(n) \cdot b_{\pi_2(n)}}^{\text{ком. закон}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_1(n)}| \cdot |b_{\pi_2(n)}|$$

$$S_{n_0} = |a_{\pi_1(1)}||b_{\pi_2(1)}| + \dots + |a_{\pi_1(n_0)}||b_{\pi_2(n_0)}| \leq \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{j_0} |a_i||b_j| =$$

$i_0 = \max\{\pi_1(1), \dots, \pi_2(n_0)\}$
$j_0 = \max\{\pi_2(1), \dots, \pi_2(n_0)\}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{i_0} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{j_0} |b_j|\right) \leq$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\right)$$

$\Rightarrow$ сходящ

σ_n е парциалната сума на произведението, разместено тв., че $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$

$\left.\begin{matrix} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \\ \sum_{j=1}^{\infty} b_j \end{matrix}\right\}$ и нека $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ (сумата от индексите е n)

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ се нарича ред-произведение на $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

8. Th на Мертенс

$\left.\begin{matrix} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ е абсолютно сходящ} \\ \sum_{j=0}^{\infty} b_j \text{ е сходящ} \end{matrix}\right\}$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ е сходящ и

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$

ред-произведение на $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$