1. Поточкова сходимост

$D \subset \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ако фиксираме $x \in D$, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ е числова редица

1.1 def: $\tilde{D} = \{ x \in D : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица $\}$ е област на сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

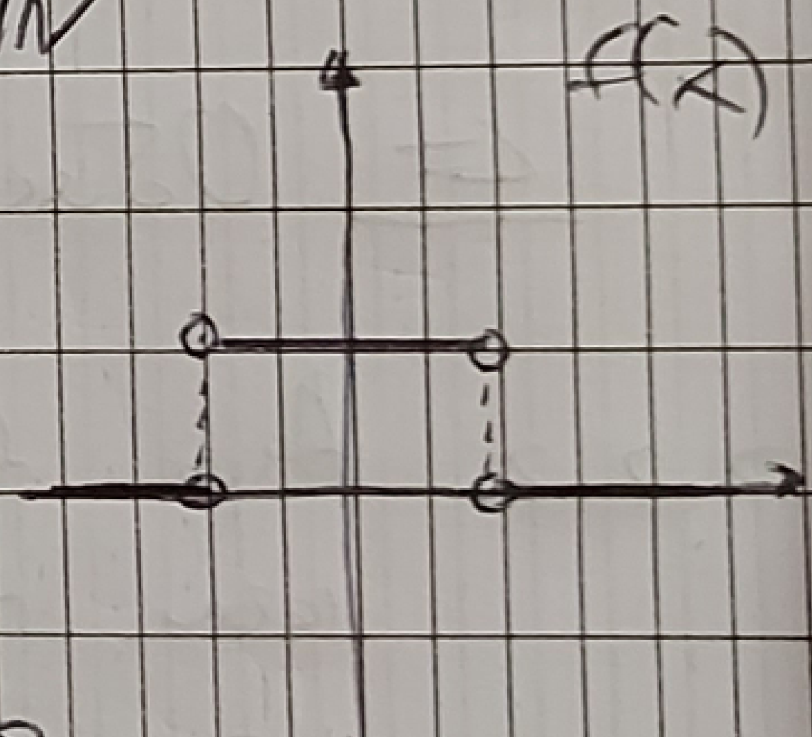
ако $x \in \tilde{D} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

$f : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ е гранична функция. Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е поточково сходяща към f в $\tilde{D}$

пр: • $\frac{\sin nx}{n}$ има ли поточкова сходимост? Фиксираме x и $\xrightarrow[n\to\infty]{}$: $\frac{\sin nx}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

фиксираме x: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } |x| < 1 \\ 1/2, & \text{ако } |x| = 1 \\ 0, & \text{ако } |x| > 1 \end{cases}$



• Коя е областта на сходимост на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$?

функционален ред: $x + x^2 + x^3 + \dots$ е геом. прогр.

$S_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n = x(1 + x + \dots + x^{n-1}) = \begin{cases} x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}, & x \neq 1 \\ n, & \text{ако } x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ областта на сходимост е $\tilde{D} = (-1, 1)$

$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{1-x}$ в $(-1, 1)$

2. Равномерна сходимост

2.1. def: Нека имаме:

- f
- $f_n : D \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно клони към f в D (и пишем $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D) ако:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

NB! За поточкова сходимост е: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони поточково към f в $D \equiv$

$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

т.е. n_0 зависи от x

2.2 Prop: $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в $D \iff \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in D\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2.2.1 Доказателство:

$\Rightarrow$ Нека $\varepsilon > 0 \overset{\text{def}}{\underset{\text{равн. сходимост}}{\Rightarrow}} \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Leftarrow$ Обясняваме какво озн. $\sup \to 0$ $\square$

2.2.2 Ако $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в $D \Rightarrow \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони поточково към f в D, то поточковата граница е единств. кандидат за равномерна граница.

пр: • $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ поточково клони към 0

за $x \in \mathbb{R}$ $\sup\left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

• $\sup\limits_{\text{за } x \in (-1,1)} \left|S_n(x) - x \cdot \frac{1}{1-x}\right| = \sup\limits_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ не е равномерно сходящ

3 Th: Равномерната граница на непр. функции е непр. По-точно:

$$\left.\begin{array}{l} f_n : D \to \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \\ f : D \to \mathbb{R} \\ f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ в } D \end{array}\right\}$$ Нека f_n са непр. в $x_0 \in D$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава f е непр. в x_0

2.3.1 Доказателство:

Нека $x \in D$. Интересуваме се от $|f(x) - f(x_0)| \leq$
$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

Нека $\varepsilon > 0$.

- $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в $D \overset{def}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall y \in D : |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

- Нека $n_0 \in \mathbb{N}$. f_{n_0} е непр. в $x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

за $x \in D : |x - x_0| < \delta$ имаме:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

<u>пр:</u> • x^n в $[0,1]$ $\left.\begin{array}{l} \text{в } [0,1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \text{в } x = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ не е равномерна гр.

- $f_n(x) = x^n(1-x)$ в $[0,1]$
$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow$ имаме единствен кандидат за равномерна граница.

$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{x^n(1-x) : [0,1]\}$
максимумът е или в краищата на интервала, или

в критична точка

2 $f_n'(x) = (x^n(1-x))' = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - x(n+1))$

$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{n}{n+1}$

$f_n(x_2) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > 0$

$\Rightarrow \sup\{x^n(1-x) : x \in [0,1]\} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ е ~~схо~~ равномерно сходяща в $[0,1]$

3. НДУ на Коши за равномерна сходимост (на функционална редица)

$f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Твърдим:

• $\exists f : D \to \mathbb{R}$ такава, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$

(като усл. за фунд. редица, но с равн. сходимост)

3.1 Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D

Нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Нека $x \in D$ - произволно, $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n + p \geq n_0$ и $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in D$: фиксираме x и разгл. числовата редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow$ тази редица е фунд. $\Rightarrow$ сходяща

4

озн. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $f: D \to \mathbb{R}$

Остава да проверим дали $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D.

Нека $\varepsilon>0$: $\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in D: |f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$

$f_{n+p}(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(x)$

$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon\ \forall n\ge n_0\ \forall x\in D \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ в D

4. НДУ на Коши за сходимост на функционални редове

$f_n: D\to\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$, имаме и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Твърдим:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ е равн. сх. $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in D: \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right|<\varepsilon$

5. Критерий на Вайерщрас

$f_n: D\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Нека $\exists$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n\ge 0$ такъв, че $|f_n(x)|\le a_n\ \forall x\in D$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ. Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ е равномерно (и абсолютно) сходящ в D.

5.1 Доказателство:

Нека $\varepsilon>0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сх. $\overset{\text{НДУ}}{\underset{\text{Коши}}{\iff}} \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \forall p\in\mathbb{N}: \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i\right|<\varepsilon$

за произволни $n\ge n_0,\ p\in\mathbb{N},\ x\in D$ $\Bigg\} \Rightarrow \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| \le \sum\limits_{i=n+1}^{n+p}|f_i(x)| \le \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$

□

~~Кр.~~

6. Th: Нека Δ е огр. интервал. Имаме редицата от функции: $f_n: \Delta\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, като вс. те са диф. в Δ. $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в Δ. Нека $x_0\in\Delta$: $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Тогава $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равн.

сходяща в Δ. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ е диф. и $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

6.1 Доказателство:

Искаме да оценим $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le$

$\le |(f_n(x) - f_{n+p}(x)) - (f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0))| + |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)|$

Th за средните стойности $=$ $|f_n'(\eta) - f_{n+p}'(\eta)| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)|$,

където η е м-у x и x_0

Δ е огр. $\Rightarrow \exists M > 0 : \Delta \subset [x_0 - M, x_0 + M] \Rightarrow$

$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le M |f_n'(\eta) - f_{n+p}'(\eta)| + |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)|$

където η е м-у $x \in \Delta$ и x_0

Нека $\varepsilon > 0$: $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow$ фунд.

$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_1 \ \forall p \in \mathbb{N} : |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\{f_n'\}_{n=1}^{\infty} \text{ е равномерно сх.} \\ \varepsilon > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_2 \ \forall p \in \mathbb{N}$

$\forall y \in \Delta : |f_n'(y) - f_{n+p}'(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\left.\begin{array}{l} n_0 := \max\{n_1, n_2\} \\ n \ge n_0 \\ p \in \mathbb{N} \\ x \in \Delta \end{array}\right\} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Озн. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$, $x \in \Delta$

Фиксираме $\xi \in \Delta$. дали $f'(\xi) \overset{?}{=} \varphi(\xi)$

(1) $\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - \varphi(\xi) \right| \le |f_n'(\xi) - \varphi(\xi)| + \left| \overbrace{\frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi}}^{\text{диф. частно на } f_n} - f_n'(\xi) \right|$

$+ \left| \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} - \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi)}{x - \xi} \right| + \left| \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi)}{x - \xi} - \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right|$

нека $\varepsilon > 0$

- $1^{во}$ събираемо: $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |f_n'(\xi) - \varphi(\xi)| < \frac{\varepsilon}{4}$
- $3^{то}$ събираемо Лагранж $\Rightarrow$

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x-\xi} - \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi)}{x-\xi} \right| = \left| \frac{(f_n(x) - f_{n+p}(x)) - (f_n(\xi) - f_{n+p}(\xi))}{x-\xi} \right|$$

$$\overset{\text{Лагранж}}{=} \left| \frac{(f_n'(\eta) - f_{n+p}'(\eta))(x-\xi)}{x-\xi} \right| = |f_n'(\eta) - f_{n+p}'(\eta)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\forall n \geq n_2\ \forall p \in \mathbb{N}$, където $\forall n \geq n_2\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall y \in \Delta : |f_n'(y) - f_{n+p}'(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$

- фиксираме $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x-\xi} - f_n'(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall x \in \Delta \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$$

$\Rightarrow 2^{рото} < \frac{\varepsilon}{4}$

- фиксираме $x \in \Delta \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$, $n \geq n_0$

$$\left| \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\xi)}{x-\xi} - \frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f_{n+p}(x) - f(x)}{x-\xi} \right| + \left| \frac{f_{n+p}(\xi) - f(\xi)}{x-\xi} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$ за достатъчно големи $p \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (1) < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \forall x \in \Delta \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$ $\square$

6.2 Следствие: Δ – ограничен интервал, $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, а f_n са диф. в Δ. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ е равномерно сходящ в Δ, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ е сходящ за $x_0 \in \Delta$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ е равномерно сходящ в Δ, сумата му е диф. и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

6.3 Доказателство:
$S_n'(x) = f_1'(x) + \dots + f_n'(x)$ и директно приложение на теоремата