05.03.2024 ДИС 2

1. Th: Ако f е интегруема ($f: [a,b] \to \mathbb{R}$), по Риман, то
$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma_f(\Pi, \xi) = \int_a^b f$$

1.1 **Lemma:** Нека Π - подразбиване на $[a,b]$, $\Pi^* = \Pi \cup \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*\}$ (нови делящи точки, може да се повтарят). Тогава $0 \leq S_f(\Pi) - S_f(\Pi^*) \leq k(\widehat{M-m})\,d(\Pi)$

осцилации

където $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$, както и

$$0 \leq s_f(\Pi^*) - s_f(\Pi) \leq k(M-m)\,d(\Pi)$$

1.2 Доказателство на Th:

$\int_a^b f \quad \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \quad \int_a^b f + \varepsilon$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ интегруема

Нека вземем $\varepsilon > 0$ произволно. Ще разгл. големите суми на Дарбу, за малките е аналогично.

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \Pi_0$ такова, че $S_f(\Pi_0) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$ (тъй като $\int_a^b f$ е inf)

Нека Π - подразбиване, $d(\Pi) < \delta = \dots$

$\Pi_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ и $\Pi^* = \Pi \cup \Pi_0$

т.к. $\Pi^* \supseteq \Pi_0 \Rightarrow S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi_0) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

$S_f(\Pi) \leq S_f(\Pi^*) + k(M-m)\,d(\Pi) \leq$ от Lemma 1.1

$$\leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{k(M-m)\,d(\Pi)} \leq \quad \Rightarrow \delta_1 \leq \frac{\varepsilon}{2k(M-m+1)}$$

$$\leq \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + k(M-m) \cdot \frac{\varepsilon}{2k(M-m+1)} <$$

$$< \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0 \to \delta_2 > 0 \quad \forall \Pi$ - подр., $d(\Pi) < \delta_2$: $s_f(\Pi) > \int_a^b f - \varepsilon$

съвсем аналогично

за $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ за $\forall$ подразбиване Π с $d(\Pi) < \delta$

имаме $\int_a^b f - \varepsilon < s_f(\Pi)$ и $S_f(\Pi) < \int_a^b f + \varepsilon$

NB! Както и да изберем предст. точки сумите на Риман са между s_f и S_f за Π.

$\Rightarrow |\sigma(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon \quad \forall \Pi, d(\Pi) < \delta \quad \forall \xi$ предст. т. за Π

$\overset{def}{\Rightarrow} \lim\limits_{d(\Pi) \to 0} \sigma(\Pi, \xi) = \int_a^b f$

2. Основни свойства на интеграла

2.1 Линейност: $g, f: [a, b] \to \mathbb{R}$, интегруеми по Риман $\lambda \in \mathbb{R}$, тогава $f + g$, λf са интегруеми и:

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{и}$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

2.1.1 Доказателство:

$\sigma_{f+g}(\Pi, \xi) = \sigma_f(\Pi, \xi) + \sigma_g(\Pi, \xi)$

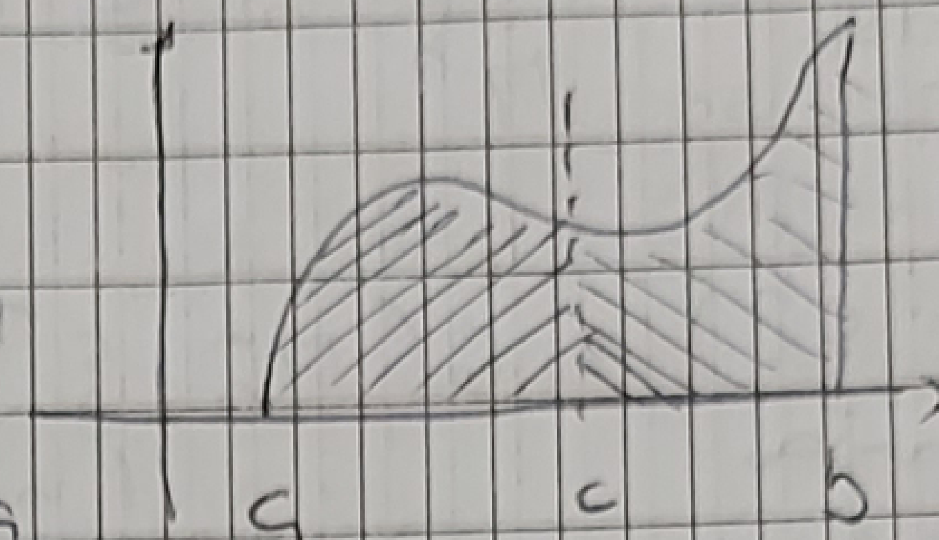
$\sigma_{\lambda f}(\Pi, \xi) = \lambda \sigma(\Pi, \xi)$

$\to$ Нека $\varepsilon > 0$. $\to \exists \delta_f > 0$ така че за $\forall \Pi$ с $d(\Pi) < \delta_f$ и за всеки избор на ξ-предст. т. за Π имаме $|\sigma_f(\Pi, \xi) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}$, т.к. f е интегруема

Т.к. g е интегруема $\exists \delta_g > 0$ така че за $\forall \Pi$ с $d(\Pi) < \delta_g$ и за всеки избор на ξ-предст. точки за Π имаме $|\sigma_g(\Pi, \xi) - \int_a^b g| < \frac{\varepsilon}{2}$

Нека Π е подр. с $d(\Pi) < \delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ и ξ - предст. точки за Π. Тогава:

$$\left|\sigma_{f+g}(\Pi,\xi) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| = \left|\sigma_f(\Pi,\xi) - \int_a^b f + \sigma_g(\Pi,\xi) - \int_a^b g\right| \overset{\text{нер. на } \Delta}{\leq} \left|\sigma_f(\Pi,\xi) - \int_a^b f\right| + \left|\sigma_g(\Pi,\xi) - \int_a^b g\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



2.2 Адитивност

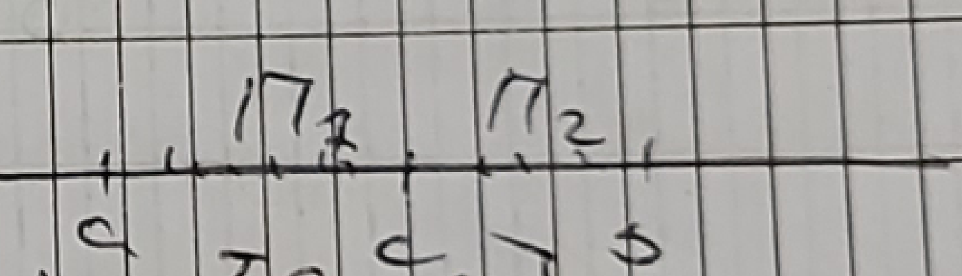
Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ и $a < c < b$. f е интегруема $\Leftrightarrow$ $f|_{[a,c]}$ и $f|_{[c,b]}$ са интегруеми и при това

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2.2.1 Доказателство:

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека f е интегруема и $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \exists\, \Pi$ подразб. на $[a,b]$ с $S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$

Нека $\Pi^* = \Pi \cup \{c\} \to S_f(\Pi^*) - s_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$



$\Pi^* = \Pi_1 \cup \Pi_2$, Π_1 подразбиване на $[a,c]$

Π_2 подразбиване на $[c,b]$

$$S_f(\Pi^*) = S_{f|[a,c]}(\Pi_1) + S_{f|[c,b]}(\Pi_2)$$

съответно $s_f(\Pi^*) = - - -$

$$\underbrace{\left[S_{f|[a,c]}(\Pi_1) - s_{f|[a,c]}(\Pi_1)\right]}_{\geq 0} + \underbrace{\left[S_{f|[c,b]}(\Pi_2) - s_{f|[c,b]}(\Pi_2)\right]}_{\geq 0} < \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $\varepsilon > 0$. Π_1 подр. на $[a,c]$, $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

Π_2 - подр. на $[c,b]$, $S_f(\Pi_2) - s_f(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$

$S_f(\Pi) = S_f(\Pi_1) + S_f(\Pi_2)$, $s_f = \dots$

$\Rightarrow S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Pi_n = \Pi_n^1 \cup \Pi_n^2$, Π_n^1 е подр. на $[a, c]$

$d(\Pi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad \Pi_n^2$ е подр. на $[c, b]$

ξ^n – пр. т. за Π^n

$$\Rightarrow \sigma_f(\Pi_n, \xi^n) = \sigma(\Pi_n^1, \xi_n^1) + \sigma(\Pi_n^2, \xi_n^2)$$

$$\downarrow_{n\to\infty} \qquad \downarrow_{n\to\infty} \qquad \downarrow_{n\to\infty}$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2.3 Съглашение (конвенция):

$f: \Delta \to \mathbb{R}$, Δ е интервал $a, b \in \Delta$

□ $\int_a^a f := 0$

□ $\int_a^b f := -\int_b^a f$, $a > b$

NB $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ остава в сила за произволно разположение на $a, b, c \in \Delta$

2.4 Позитивност: Ако $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема и $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(т.к. малките суми на Дарбу са $\geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$)

2.5 Следствие на 2.4: $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ са интегруеми и $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, тогава

$\int_a^b f \geq \int_a^b g$

2.5.1 Доказателство:

$$f - g \geq 0 \underset{\text{позитивност}}{\Rightarrow} \int_a^b (f-g)(x) \geq 0 \underset{\text{за } a<b}{\overset{\text{линейност}}{\Rightarrow}} \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x) \geq 0$$

2.6 Ако $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема, тогава $|f|$ е интегруема и $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ за $a < b$

2.6.1 Доказателство:

$$\big| |f(x)| - |f(y)| \big| \le |f(x) - f(y)|$$

$$\Rightarrow \omega(|f|, [x_{i-1}, x_i]) \le \omega(f, [x_{i-1}, x_i])$$

$$\Pi := a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Нека $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \Pi$ - подр. с $\varepsilon > S_f(\Pi) - s_f(\Pi) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{>0} \ge \sum_{i=1}^{n} \omega(|f|, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$$

$$= S_{|f|}(\Pi) - s_{|f|}(\Pi) \Rightarrow |f| \text{ е интегруема}$$

Знаем $-|f| \le f \le |f|$

$$\overset{2.5}{\Rightarrow} \underset{-\int_a^b |f|}{\underbrace{\int_a^b (-|f|)}} \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$$

2.7. Th за средните стойности

Нека $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, интегруеми и $g(x) \ge 0$ $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x) g(x)\,dx \le M \int_a^b g(x)\,dx$

2.7.1 Доказателство:

$$m = \inf_{[a,b]} f \le f(x) \le M = \sup_{[a,b]} f \quad (\text{т.к. интегруема} \Rightarrow \text{ограничена}) \;/\cdot g(x)$$

$$m g(x) \le f(x) g(x) \le M g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\overset{2.5}{\Rightarrow} \underset{m \int_a^b g(x)}{\underbrace{\int_a^b m g(x)}} \le \int_a^b f(x) g(x) \le \int_a^b M g(x) = M \int_a^b g(x)$$

2.9 Lemma: $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, интегруеми. Тогава $f \cdot g$ е интегруема

2.9.1 Доказателство:

Нека Π е подр. $\Rightarrow$ $\Pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

① $S_{fg}(\Pi) - s_{fg}(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f.g, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$

$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(x) + g(x)f(y) - f(y)g(y)| \le |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| + |f(y)| \cdot |g(x) - g(y)| \le$

$\le M_g |f(x) - f(y)| + M_f |g(x) - g(y)| \le$

$\le M_g \cdot \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) +$
$M_f \cdot \omega(g, [x_{i-1}, x_i])$

$|f(x)| \le M_f \quad \forall x \in [a, b]$

$|g(x)| \le M_g \quad \forall x \in [a, b]$

Нека $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow \omega(fg, [x_{i-1}, x_i]) \le$
$M_g\, \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) +$
$M_f\, \omega(g, [x_{i-1}, x_i])$

Обратно в ①:

$\sum_{i=1}^{n} \omega(f.g, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \le M_g \sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) + M_f \sum_{i=1}^{n} \omega(g, [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) =$

$= M_g (S_f(\Pi) - s_f(\Pi)) + M_f (S_g(\Pi) - s_g(\Pi))$ ②

Нека $\varepsilon > 0 \longrightarrow \Pi_1$ - подразбиване, $S_f(\Pi_1) - s_f(\Pi_1) < \frac{\varepsilon}{2(M_g + 1)}$

както и Π_2 $S_g(\Pi_2) - s_g(\Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2(M_f + 1)}$

Нека $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $\Pi \ge \Pi_1$ и $\Pi \ge \Pi_2$

$\Rightarrow$ ② $< \varepsilon$

2.10 Следствие: $\left.\begin{matrix} f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \\ \text{интегр. } g \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\inf_{[a,b]} f\right) \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x) g(x)\,dx \le \left(\sup_{[a,b]} f\right) \int_a^b g(x)\,dx$

+ f непрекъсната, тогава:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \text{ за някое } \xi \in [a,b]$$

2.10.1 Доказателство:

позитивност

$$g \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge 0$$

□ ако $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, избираме $\xi \in [a,b]$ произволно

□ ако $\int_a^b g(x)\,dx > 0 \Rightarrow$ Th за ср. стойност

$$\inf_{[a,b]} f \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le \sup_{[a,b]} f$$

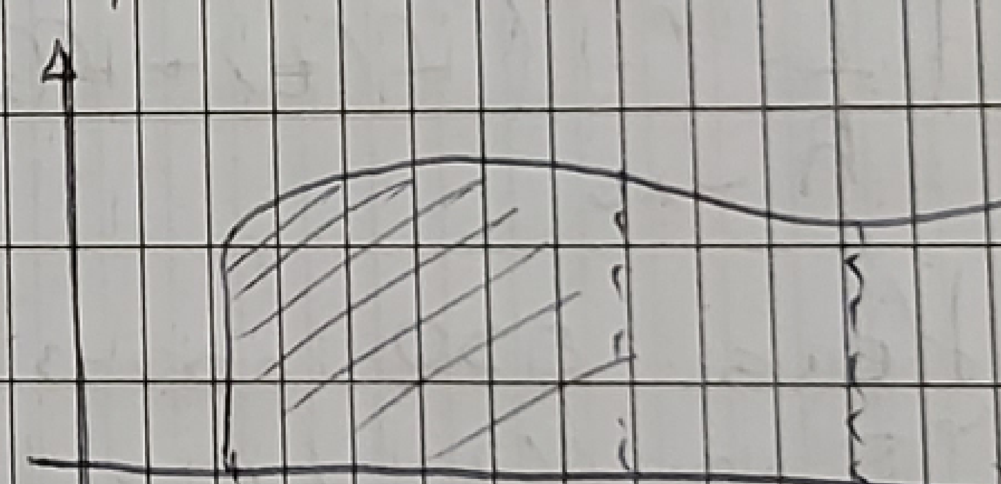
Прил. Th Болцано и Th Вайерщрас

$f([a,b]) = [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$,

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b],\ f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

3.0 Интегралът като функция на горната си граница

$f: \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е интервал, $a \in \Delta$. f е интегруема в $[a,x]$ $\forall x \in \Delta$



$$F(x) := \int_a^t f(t)\,dt,\quad F: \Delta \to \mathbb{R}$$

3.1 Тв: В горната постановка $F: \Delta \to \mathbb{R}$ е непрекъсната

$$x \in \Delta,\ \left.\begin{aligned}&\forall h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\\ &x + h_n \in \Delta\end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x+h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

3.1.2 Доказателство:

$$|F(x+h_n) + F(x)| = \left|\int^{x+h_n} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_x^{x+h_n} f(t)\,dt\right| \le \int_{\min\{x,x+h_n\}}^{\max\{x,x+h_n\}} |f(t)|\,dt \le M\int_{\min\{x,x+h_n\}}^{\max\{x,x+h_n\}} 1 = M|h_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \int_a^b 1 = b-a$$

$$\exists\, M > 0\ \forall n \ge n_0 : |f(x+h_n)| \le M$$

4. Th на Нютон-Лайбниц

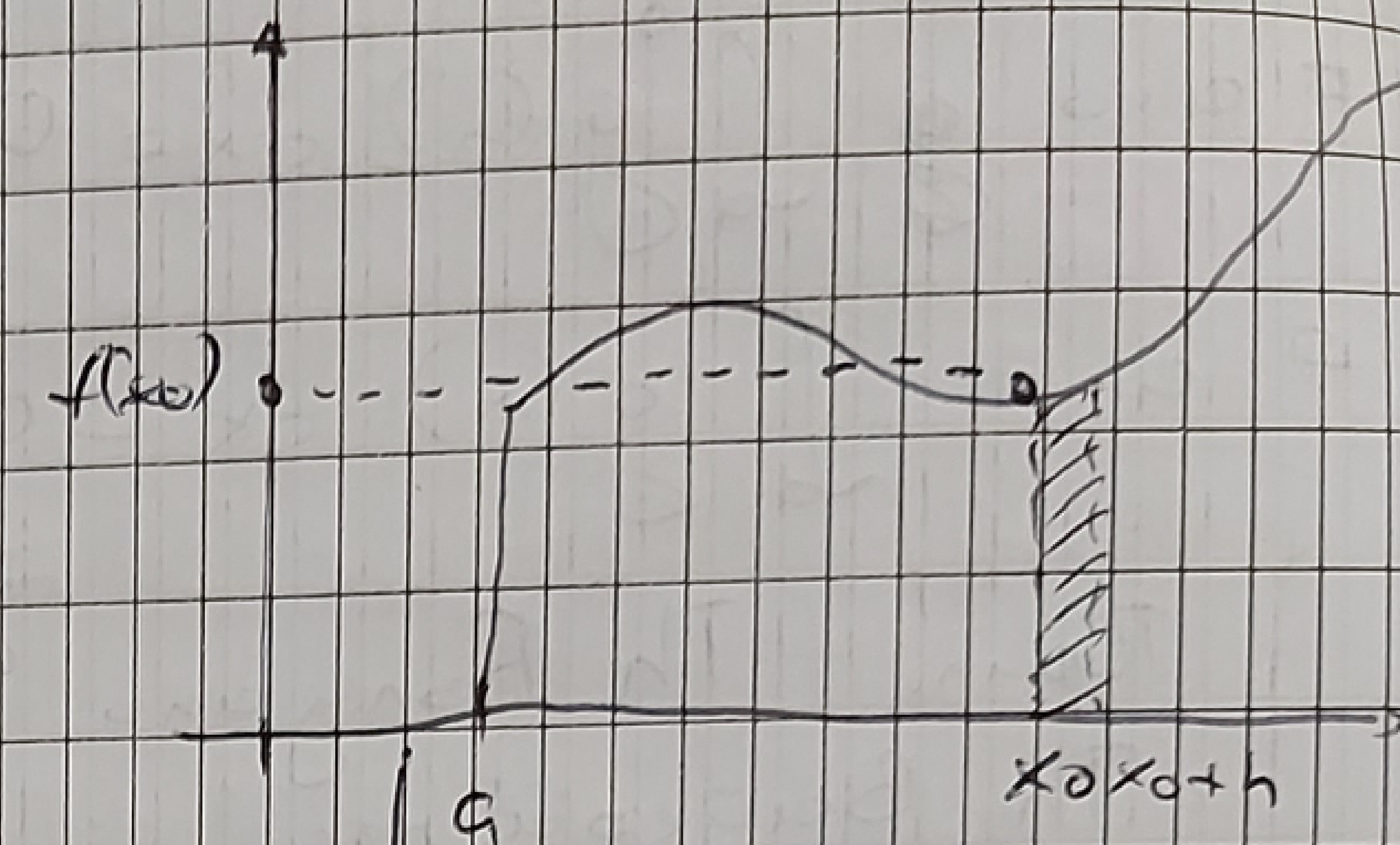
Δ - интервал, $a \in \Delta$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$

f интегруема в $[a, x]$ за $\forall x \in \Delta$

Деф. $F: \Delta \to \mathbb{R}$ с $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ \forall x \in \Delta$

Ако f е непрекъсната в $x_0 \in \Delta$, то F е диф. в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$

Доказателство:



$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \overbrace{f(x_0)}^{const}\,dt \right| \qquad \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt = f(x_0) \int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dt = f(x_0) \cdot h$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt \right|$$

Нека $\varepsilon > 0$ произволно. Т.к. f е непр. в $x_0 \Rightarrow$
$\exists \delta > 0 \ \forall t, |t - x_0| < \delta : |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

Нека $|h| < \delta$, $x_0 + h \in \Delta$. Тогава

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \le \qquad t \in [x_0, x_0+h] \quad |t - x_0| < h < \delta$$

$$\le \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt \right| \le \begin{cases} h > 0, \ \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \le \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dt = \varepsilon \\ h < 0, \ \frac{1}{-h} \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,dt \le \frac{1}{-h} \cdot \varepsilon \cdot (-h) = \varepsilon \end{cases}$$

$\Rightarrow \ldots \le \varepsilon \ \forall h \ne 0$ с $|h| < \delta$

4.2 Следствие: Непрекъснатите функции имат примитивни.

$$\left.\begin{array}{l} f: \Delta \to \mathbb{R},\ \Delta \text{ интервал} \\ f \text{ непрекъсната} \\ a \in \Delta \end{array}\right\} \overset{\text{Лайбниц}}{\underset{\text{Нютон}}{\Longrightarrow}} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ е диференцируема в } x \text{ за } \forall x \in \Delta \text{ и } F'(x) = f(x).$$

Тоест $\int_a^x f(t)\,dt$ е примитивна за f в Δ.

4.3 Следствие: Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Φ е примитивна за f в $[a,b]$. Тогава:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$$

4.3.1 Доказателство:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ е примитивна за f в $[a,b]$

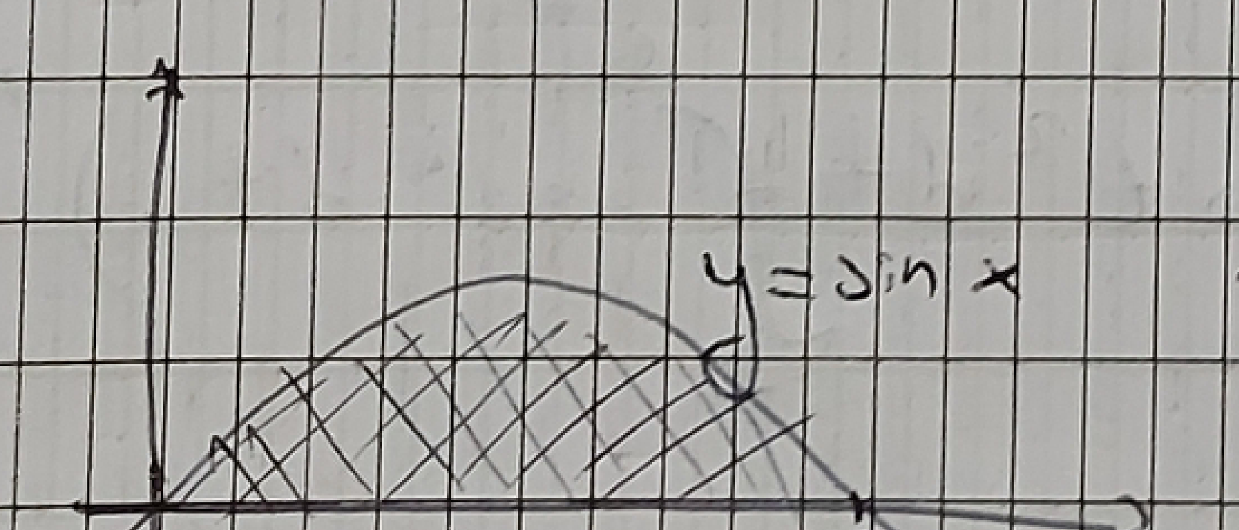
$\Phi(x)$ е друга примитивна за f

$\Rightarrow F(x) - \Phi(x) \equiv const$ в $[a,b]$, т.е. $F(x) = \Phi(x) + C$

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) = \Phi(a) + C$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Пример:



$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

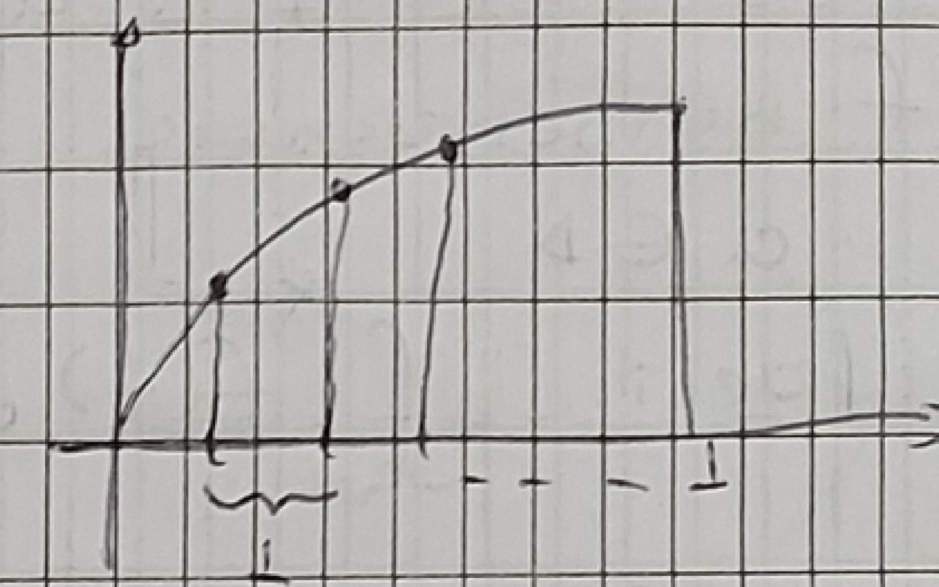
пример:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \qquad \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$$

Риманова сума за $f(x)=\sqrt{x}$ в $[0,1]$

за подр. $0=0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n}=1$ и

$\xi_i=\frac{i}{n}$



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{Лопитал}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1$$

слагаме на мястото на интеграционната променлива

пример: $F(x)=\int_0^{e^x}\cos t^2\,dt \qquad F'(x)=?$

$$G(y)=\int_0^y \cos t^2\,dt \Rightarrow G'(y)=\cos y^2$$

$$F(x)=G(e^x)\Rightarrow F'(x)=G'(e^x)(e^x)'=\cos e^{2x}\cdot e^x$$

пример: $\left(\int_{\ln x}^{1}\cos t^2\,dt\right)' = -\left(\int_1^{\ln x}\cos t^2\,dt\right)' =$

$= -\cos(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}$

пример: $\left(\int_{\ln x}^{e^x}\cos t^2\,dt\right)' = \left(\int_{\ln x}^{1}\cos t^2\,dt + \int_1^{e^x}\cos t^2\,dt\right)' =$

$= -\frac{\cos \ln^2 x}{x} + \cos e^{2x}\cdot e^x$

<11>

5. Техники за интегриране

5.1 Интегриране по части

$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx$ за f, g гладки

$= f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x)\, dx$

f - гладка $\Leftrightarrow$ f е диф, f' е непр

NB! Пресметнете $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$