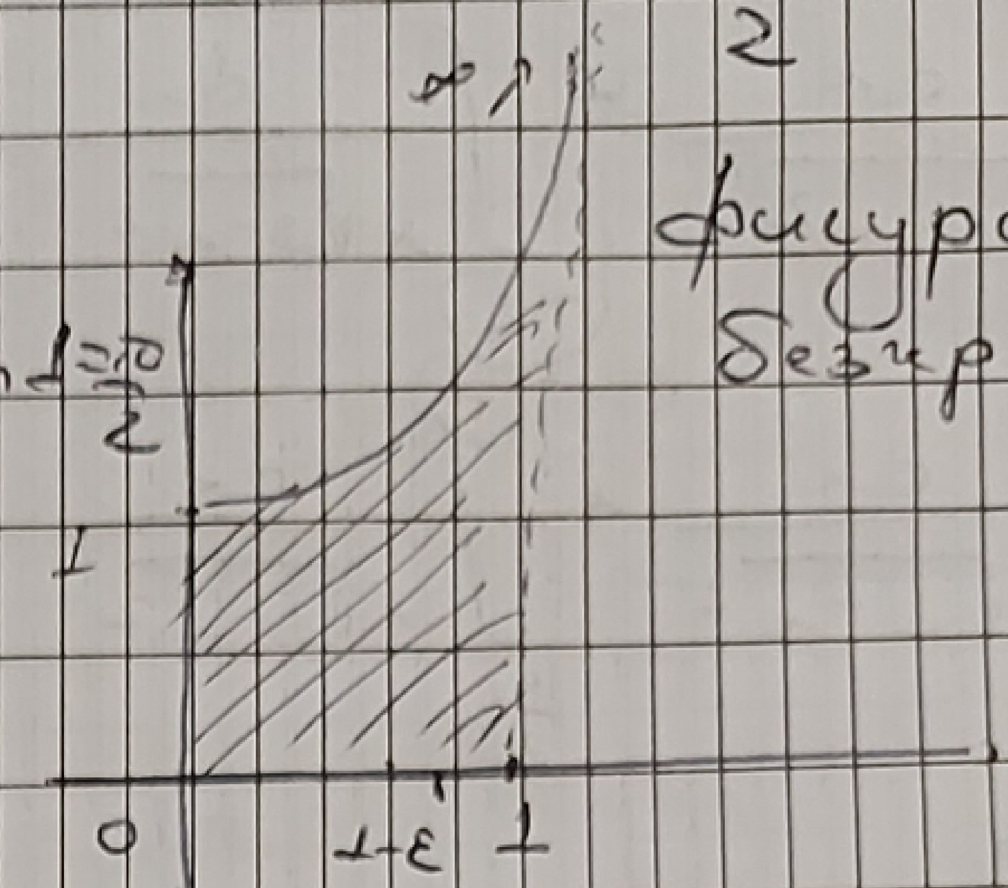
19.03.2024 Ойс 2. Несобствени интеграли

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

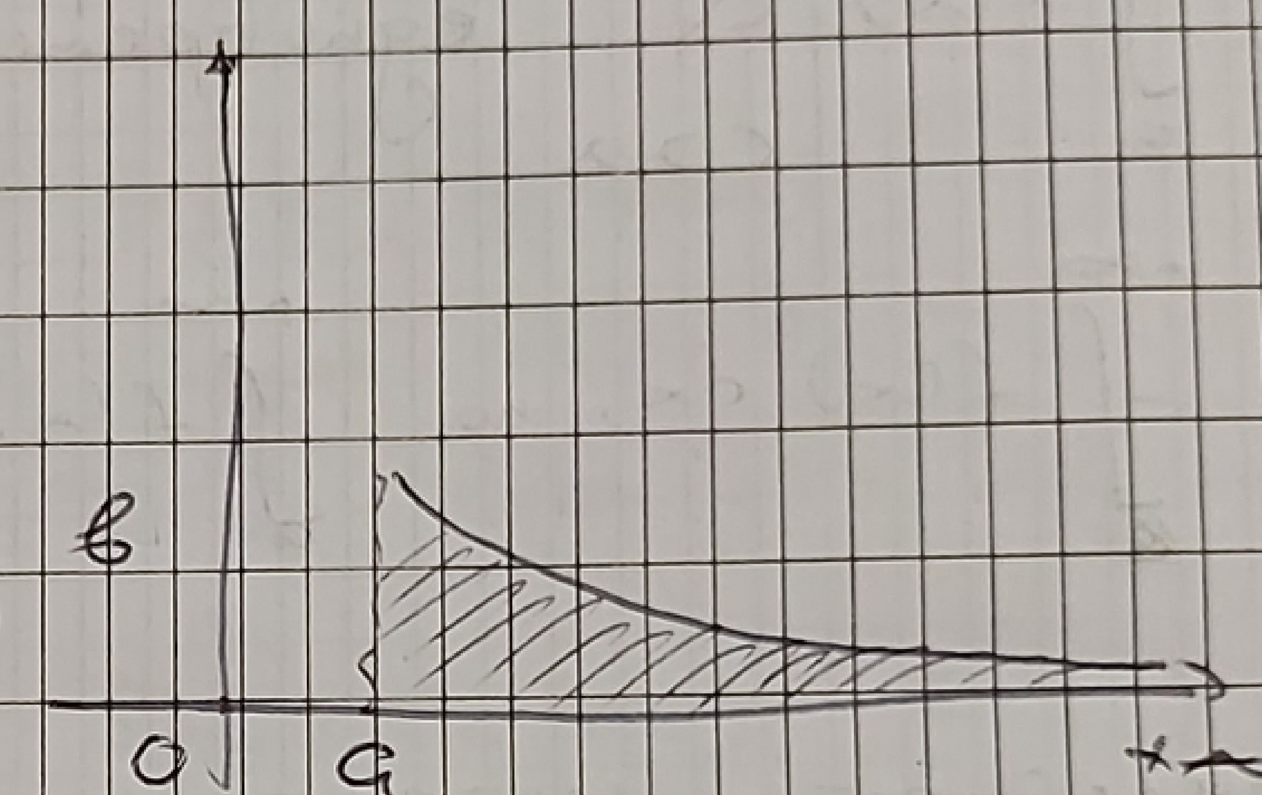
$1-\varepsilon$ ⊂ крайна фигура

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon>0]{\varepsilon\to 0} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

фигурата е безкрайна



• I род: Нека $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ е интегруема в $[a,p]$ за всяко $p\geq a$. Казваме, че $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, ако съществува границата $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^p f(x)\,dx$ (разходящ в противен случай). Пишем



$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{p\to+\infty}\int_a^p f(x)\,dx$$

• $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx := \lim_{p\to-\infty}\int_p^a f(x)\,dx$$

• def: Несобствен интеграл от втори род: Нека $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ е интегруема в $[a,p]$ за всяко $p\in[a,b)$. Тогава $\int_a^b f(x)\,dx$ се нарича сходящ, ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{p\to b\\ p<b}}\int_a^p f(x)\,dx$.

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \;;\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{p\to a\\ p>a}}\int_p^b f(x)\,dx$$

• при повече от една особеност:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

NB! Търсим къде ф-ята има вертикални асимптоти с/у особености (трудно!:( )

NB! разделяне на интеграли с по 1 особеност

• $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ едновременно сх. или разх. с $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$, $c > a$, но

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

• линейност – интегрирането и вземането на граница са линейни операции

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \longrightarrow \int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

, както и $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• смяна на променливите

$$\int_0^{\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx \longrightarrow \int_0^{+\infty} \dots$$

рац. ф-я на sin и cos

пол. $t = tg\frac{x}{2}$ смяна

- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема в $[a, p]$ $\forall p \geq a$

Нека $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$

$F : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(p) := \int_a^p f(x)\,dx$

$f \geq 0 \longrightarrow F$ растяща в $[a, +\infty)$

$p_1 \leq p_2 \longrightarrow F(p_2) - F(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} f(x)\,dx \geq 0$

- Lemma: $F : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ растяща. Тогава:

$\lim_{p \to +\infty} F(p)$ съществува $\longleftrightarrow$ F е огр. отгоре в $[a, +\infty)$

($\Rightarrow$) $l := \lim_{p \to +\infty} F(p) \longrightarrow F(p) \leq l$ $\forall p \in [a, +\infty)$

(ако допуснем противното лесно д-ще)

($\Leftarrow$) $l := \sup\{F(p) : p \in [a, +\infty)\}$. Ще док, че l е граница.

за $\varepsilon > 0$ $\quad l - \varepsilon < l \longrightarrow \exists p_0 \in [a, +\infty)$, $F(p_0) > l - \varepsilon$

$p \geq p_0$: $l - \varepsilon < F(p_0) \leq F(p) \leq l \leq l + \varepsilon \Rightarrow F(p) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

F растяща

за $\forall p > p_0$

$\longrightarrow \lim_{p \to +\infty} F(p) = l$

- Принцип на сравнение: Нека $f, g : [a, +\infty)$ са интегруеми в $[a, p]$ за всяко $p \geq a$. Нека $c > 0$ е такова, че $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq c$. Тогава:
  - Ако $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ.
  - Ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ, то $\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ е разходящ

$F : [c, +\infty) \to \mathbb{R}$

$F(p) = \int_c^p f(x)\, dx$

• доказателство:

б.о.о. $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$

$\Rightarrow f, g \geq 0 \Rightarrow F, G$ растящи

$F(x) \leq G(x) \quad \forall x \geq c$

$G : [c, +\infty) \to \mathbb{R}$

$G(p) = \int_c^p g(x)\, dx$

ако G е огр отгоре, то F е огр.

ако F не е огр, G не е огр

• следствие: $f, g : [a, +\infty)$ $\quad f(x) > 0, g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, +\infty)$. Тогава $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$

са едновременно сходящи или разходящи, т.е

$\int_c^{+\infty} f(x)\, dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$

• доказателство:

$(\frac{\ell}{2}, 2\ell)$ е околност на $\ell \Rightarrow \exists c$ за $\forall x \geq c$:

$\frac{\ell}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2\ell$, т.е $0 < \frac{\ell}{2} g(x) \leq f(x) \leq 2\ell g(x) \quad \forall x \geq c$

принцип за сравнение $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$

• Скала

I род $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ $\quad \int_1^p \frac{dx}{x^\lambda}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

II род

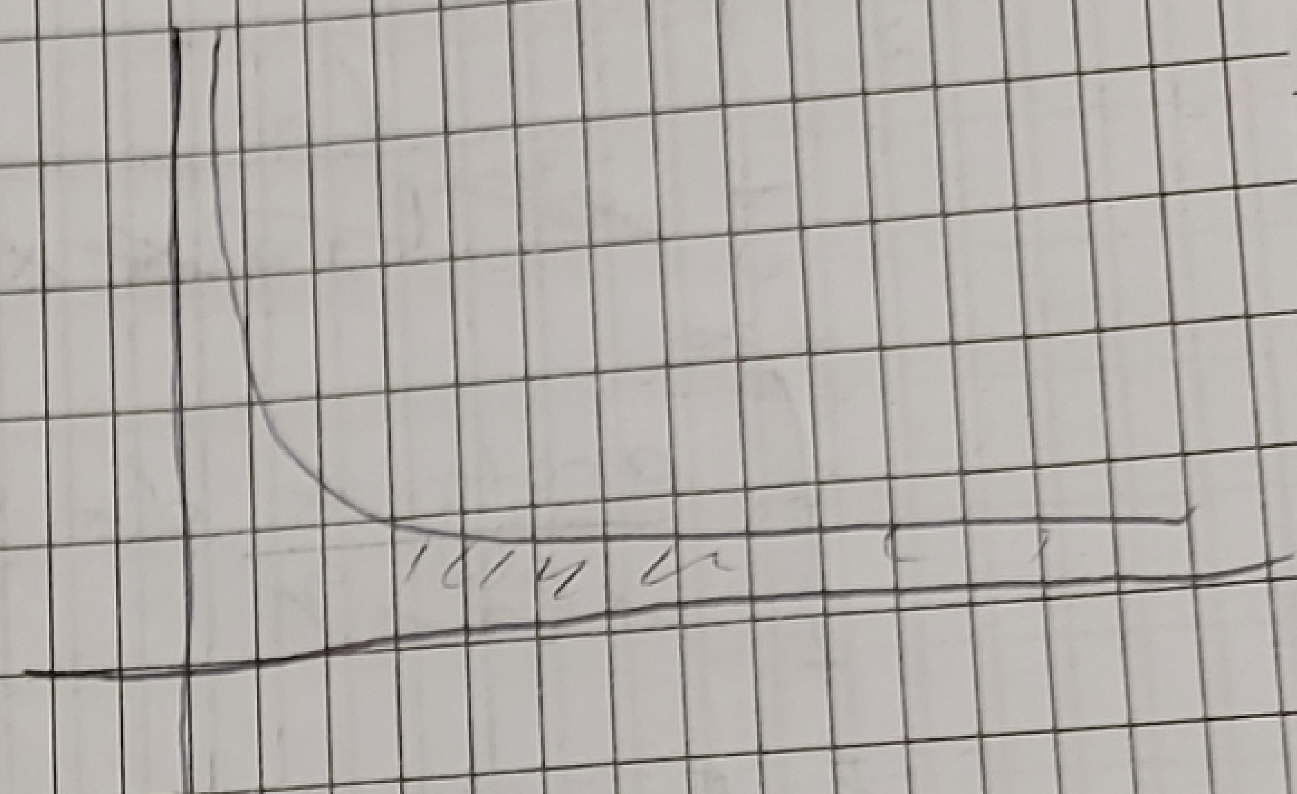
$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$

$$\int_1^p \frac{dx}{x^{\lambda}} \underset{\lambda \neq 1}{=} \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Big|_1^p = \frac{1}{1-\lambda}\, p^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}$$

$$\lim_{p\to+\infty} \int_1^p \frac{dx}{x^{\lambda}} = -\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} \lim_{p\to+\infty} p^{1-\lambda}$$

$1-\lambda>0$ $\qquad$ 0 $\quad 1-\lambda<0$

$$\Rightarrow \int_1^{p} \frac{dx}{x^{\lambda}} \begin{cases} \text{разходящ не сходящ за } \lambda \leq 1 \\ \text{сходящ } \lambda > 1 \end{cases}$$



при $\lambda = 1$

$$\lim_{p\to+\infty} \int_1^p \frac{dx}{x} = \lim_{p\to+\infty} \ln x \Big|_1^p = +\infty$$

II род

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\lambda}} \begin{cases} \text{разходящ за } \lambda \geq 1 \\ \text{сходящ за } \lambda < 1 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \neq 1$

$$\lim_{\substack{p\to 0 \\ p>0}} \int_p^1 \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{\substack{p\to 0 \\ p>0}} \left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}\, p^{1-\lambda} \right) \begin{matrix} \text{сход. за } 1-\lambda>0 \\ \text{не сход. за } 1-\lambda<0 \end{matrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \lim_{\substack{p\to 0 \\ p>0}} \int_p^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{p\to 0 \\ p>0}} (-\ln p) = +\infty$$

2 особености

Зад

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p + x^q}\, dx = \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p + x^q}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p + x^q}\, dx =$$

$$\frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^p+x^q}}{\frac{x}{x^p+x^q}} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} $$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2} \overset{x\to 0}{=} 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p+x^q}\,dx \sim \int_0^1 \frac{x}{x^p+x^q} =$$

нол. $z := \min\{p, q\}$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^z(1+x^{\max-\min})} \approx \int_0^1 \frac{x}{x^{\min p,q}}\,dx \quad \left| \frac{\frac{x}{x^p+x^q}}{\frac{x}{x^{\min p,q}}} = \frac{1}{1+x^{\max-\min}} \xrightarrow[x\to 0]{} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2}\ (p=q) \end{array}\right. \right.$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^{z-1}(1+\cancel{x}\, x^{\min}-1}$$

сходящ за $\min \leq 2$ $\Rightarrow$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p+x^q}\,dx \sim \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q} \qquad \operatorname{arctg} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^{\max p,q}}} = \frac{1}{1+x^{\min-\max}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{1} = 1$$

$$\sim \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\max}} \quad \text{cxo}\Rightarrow \max > 1$$

$\min < 2$

(пр) $$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^1 \frac{dy}{\ln(y+1)} \sim \int_0^1 \frac{dy}{y} \quad \text{разходящ}$$

особена $\quad x = y+1$

(пр) $$\int_0^1 \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{-\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{-\ln \sin x}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$\frac{1}{2}-\lambda \geq 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\ln \sin x}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} \overset{\text{Лопитал}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\frac{1}{\sin x}\cos x}{(\frac{1}{2}-\lambda)x^{-\lambda-\frac{1}{2}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\frac{1}{\frac{1}{2}-\lambda}}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} \quad 0$$

$\frac{1}{2}-\lambda < 0$

т.е $\lambda > \frac{1}{2}$ $\quad \dfrac{\frac{-\ln \sin x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \dfrac{-\ln \sin x}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} +\infty$

$0 < \dfrac{\frac{-\ln \sin x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\lambda}} < \ell \quad \forall x \in (0, x_0)$, ако $\frac{1}{2}-\lambda < 0$, $\lambda > \frac{1}{2}$

$0 < \dfrac{\frac{-\ln \sin x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^\lambda}} > \ell \quad \forall x \in (a, x_0)$ ако $\frac{1}{2}-\lambda \geq 0$ $\quad \lambda \leq \frac{1}{2}$

$\ell > 0$

т.к. $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$ $\quad \dfrac{-\ln \sin x}{\sqrt{x}} < \ell \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda (\ln x)^\mu} \begin{cases} \lambda > 1,\ \mu \in \mathbb{R} & \text{сход} \\ \lambda = 1,\ \mu > 1 & \text{сход} \\ \lambda < 1,\ \mu \in \mathbb{R} & \text{разх} \\ \lambda = 1 \leq \mu \leq 1 & \text{разх} \end{cases}$$

- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е $\underline{|\text{за}\quad f}$ с непостоянен знак от гул насатбіс нарича абсолютно сходящ, ако $\int_a^{+\infty} |f(x)|$ е сходящ. Нарича се ~~абсолютно~~ условно сходящ, ако $\int_a$ е сходящ, но $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ е разходящ.
- абсол

• НДУ на Коши за сходимост на интеграли

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists p_0 \geq a\ \forall p' > p_0\ \forall p'' \geq p' : \left| \int_{p'}^{p''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lim_{p \to +\infty} F(p)$, където $F(p) := \int_a^p f(x)\,dx$

$\overset{\text{НДУ Коши}}{\underset{\text{за функции}}{\Longleftrightarrow}} \forall \varepsilon > 0\ \exists p_0 \geq a\ \forall p' > p_0\ \forall p'' > p_0 : |F(p') - F(p'')| < \varepsilon$
(ок. на $+\infty$)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists p_0 \geq a\ \forall p' > p_0\ \forall p'' \geq p' : \left| \int_{p'}^{p''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$

• Тв: От абсолютна сходимост следва сходимост

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сх. $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сх.

док: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сход $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists p_0 \geq a\ \forall p' > p_0\ \forall p'' \geq p'$:

$\left| \int_{p'}^{p''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_{p'}^{p''} |f(x)|\,dx < \varepsilon$

$\begin{cases} \varepsilon > 0 \text{ от горното} \\ p' > p_0 \quad p'' \geq p' \end{cases}$

$\left| \int_{p'}^{p''} f(x)\,dx \right| \underset{p' \leq p''}{\leq} \int_{p'}^{p''} |f(x)|\,dx < \varepsilon$

$\Rightarrow$ НДУ Коши е в сила

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сх.

пр. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ е условно сходящ

1) сходимост: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{p \to +\infty} \int_1^p \frac{\sin x}{x}\,dx =$

$= \lim_{p \to +\infty} - \int_1^p \frac{1}{x}\,d\cos x = \lim_{p \to \infty} - \frac{\cos x}{x} \Big|_1^p + \int_1^p \cos x\,d\frac{1}{x}$

$$\cos 1 - \lim_{p\to+\infty} \int_1^{p} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{абс. сходящ}}$$

$\Rightarrow$ сх. с първонач.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сх.} \qquad 0 \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

2) не е абс. сх.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{разходящ}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx}_{\text{сходящ по същия метод}}}_{\text{разходящ}}$$