16.04.2024 Диференциално и интегрално смятане II

Сте

1. Степенни редове $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ – степенен ред около a

Партиалните суми са полиноми:

a_0

$a_0 + a_1(x-a)$

$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$

$\ldots\ldots$

пр.

– област на сходимост $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \text{ е сх.} \}$

(полиномите са деф. навсякъде)

пр: • $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ е геометрична прогр. (знаем от пр. лекции)

$D = (-1, 1)$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

изследваме за областта на сходимост:

за $x \neq 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \overset{\text{Даламбер}}{\Longrightarrow} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

и при $x = 0 \Rightarrow$ сх.

$\Rightarrow$ абс. сходимост в $(-\infty, +\infty)$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n} \underset{x\neq 0}{\overset{\text{Даламбер}}{\Longrightarrow}} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x| n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$

следствие от Даламбер $\Rightarrow$ при $|x| < 1$ сх.; при $|x| > 1$ разх.

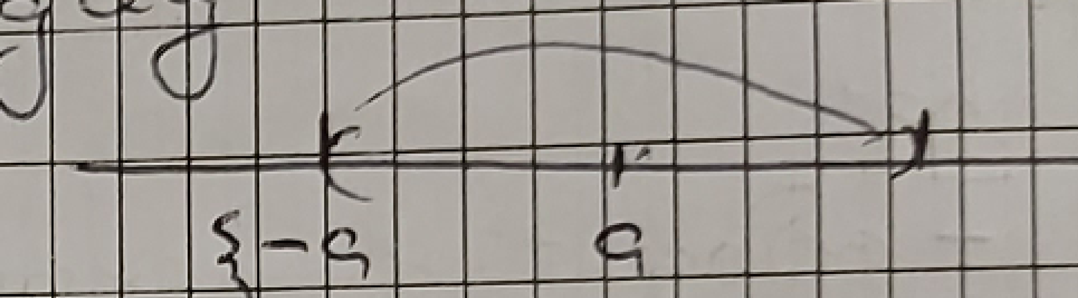
за $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разх.

за $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ е сх.

$\Rightarrow D = [-1, 1)$

1.1 def: Радиус на сходимост. Казваме, че R е
Нека $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.
радиус на сходимост на $\sum_{n=0} a_n(x-a)^n$, ако
$\sum_{n=0} a_n(x-a)^n$ е сходящ (абсол.) за $\forall x \in |x-a| < R$ и
$\sum_{n=0} a_n(x-a)^n$ е разходящ за $\forall x$ с $|x-a| > R$.

2. Лемма: Нека $\sum_{n=0} a_n(\xi-a)^n$ е сходящ. Тогава
$\sum_{n=0} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ ($\xi \neq a$)
в $\forall x \in \mathbb{R}$ с $|x-a| < |\xi-a|$



2.1 Доказателство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\xi-a)^n| \cdot \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n \le (1^*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\xi-a)^n| \text{ е сх.} \Rightarrow a_n(\xi-a)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\Rightarrow \exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: |a_n(\xi-a)^n| \le M$$

и $0 \le q = \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right| < 1$ геом. прогр.

$(1^*) \le \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n$, $q \in [0, 1) \Rightarrow$ (принцип за сравнение) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n|$ е сх.

3. Th: Всеки степенен ред има радиус на сходимост
3.1 Доказателство:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \to R := \sup\left\{ |\xi-a| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n \text{ е сх.} \right\}$$
$$A = \left\{ |\xi-a| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n \text{ е сх.} \right\}$$
$A \neq \emptyset$, т.к. $0 \in A$

$x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < R \Rightarrow \exists \xi$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - a)^n$ е сходящ
и $|x-a| < |\xi - a| \overset{\text{Лема}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е абс. сх.

Ако $|x-a| > R$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е разходящ ($|x-a| \notin A$)

Ч. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\ell = \lim\sup b_n$ е най-дясната (голямата) точка на сгъстяване на $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

- ℓ е точка на сгъстяване
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $b_n < \ell + \varepsilon$

b_n $\ell-\varepsilon$ ℓ $\ell+\varepsilon$

Ч.1 Формула на Коши-Адамар
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Тогава $R = \dfrac{1}{\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}}$ с бс

съглашение $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

Ч.3 Доказателство:
Нека $\ell := \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$
Нека $\ell \in (0, +\infty)$

Коши:
$\sqrt[n]{|a_n(x-a)|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-a|$

- $|x-a| < \dfrac{1}{\ell}$, $|x-a| \cdot \ell < 1$
$\Rightarrow \exists q$ с $|x-a| \cdot \ell < q < 1$
$\Rightarrow \ell < \dfrac{q}{|x-a|}$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{q}{|x-a|}$
$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-a| < q$, т.е.
$\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} < q$ $\forall n \geq n_0$ и $q < 1$!!!
$\overset{\text{Коши}}{\underset{\text{критерий}}{\Longrightarrow}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|$ е сходящ

- $|x-a| > \dfrac{1}{\ell} \Rightarrow \ell \cdot |x-a| > 1 \Rightarrow \ell > \dfrac{1}{|x-a|}$

$\Rightarrow \exists$ подредица на $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{1}{|x-a|}$
$\forall k \in \mathbb{N}$

1 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\,|x-a| = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}(x-a)^{n_k}|}$ $\Rightarrow$ разходящ е

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| \not\to 0$

косим $\Rightarrow$ $|a_n(x-a)^n| \not\to 0 \Leftrightarrow a_n(x-a)^n \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е разх.

и.и Заб. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ сх. в отв. интервал D

Тогава $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ е сх.

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)(x-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-x)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(a-x)^n\right)$

5.0 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $S: D \to \mathbb{R}$

5. Тв: S е непрекъсната във вътрешността на областта на сходимост

$a-R \quad a \quad a+R$

5.1 Доказателство:

$x_0 \in (a-R, a+R)$

$0 < r$ такова, че $x_0 \in (a-r, a+r)$ и $[a-r, a+r] \subset (a-R, a+R)$

$|a_n(x-a)^n| = |a_n|\,|x-a|^n \le |a_n| r^n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n|$ се мажорира от $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходящ

критерий Вайерщрас $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е равномерно сх. в $[a-r, a+r]$

$\Rightarrow S\big|_{[a-r,a+r]}$ е непр. $\Rightarrow S$ е непр. в $x_0 \in (a-r, a+r)$

6. Th на Абел: S е непр. в D (без док!)

6.1 Тв: S е диф. във вътрешността на областта на сходимост и $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-a)^{n-1}$

6.2 Доказателство.

$x_0 \in (a-R, a+R)$, R е радиус на сх. на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

(*)

6.3 Лема: Редовете $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n (x-a)^{n-1}$ имат един и същ радиус на сх.

R_1 е рад. на сх. на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

R_2 е рад. на сх. на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1}$

$$|a_n \cdot n (x-a)^{n-1}| = \frac{n}{|x-a|} \cdot |a_n (x-a)^n| \geq \frac{1}{|x-a|} \cdot |a_n (x-a)^n|$$

$R_2 < |x-a|$

$\Rightarrow R_2 \leq R_1$. Доп., че $R_2 < R_1$ и нека $< |\xi - a| < R_1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (\xi - a)^n|$ е сходящ $\Rightarrow |a_n (\xi - a)|^n \leq M$

$0 < q = \left|\frac{x-a}{\xi - a}\right| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot n (x-a)^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n (\xi - a)^n| \cdot n \left|\frac{x-a}{\xi - a}\right|^n \cdot \frac{1}{|x-a|}$$

$\leq \frac{M}{|x-a|} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$ е сх. по Даламбер:

$$\frac{(n+1) q^{n+1}}{n \cdot q^n} = \frac{n+1}{n} \cdot q \xrightarrow[n\to\infty]{} q < 1$$

$\Rightarrow$ и вторият е сходящ. ↯ $\Rightarrow R_1 = R_2$

6-2 от Лемата => R - рад. на сх. и на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1}$ и $[a-r, a+r] \subset (a-R, a+R)$ нека r е такова, че $x_0 \in (a-r, a+r)$ и

$$|a_n \cdot n(x-a)^{n-1}| \le n|a_n| r^{n-1} = |a_n \cdot n((a+r)-a)^{n-1}|$$

сход.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1}$ е равн. сходящ в $[a-r, a+r]$ по Вайерщрас

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ сходящ. в a

От т. за почл. диф. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е равн. сх. в $[a-r, a+r]$, S е диф. в $(a-r, a+r)$ и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1} \quad \forall x \in (a-r, a+r)$$

В частност за $x = x_0$

6-3 Сл. S е n-кратно диф. за $\forall n \in \mathbb{N}$ във вътрешността на областта на сходимост

7. $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, R е рад. на сх.

$S(a) = a_0$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1}$

$S'(a) = a_1 \cdot 1$

$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2}$

$S''(a) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 = a_2 \cdot 2!$

$S'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$

$S'''(a) = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = a_3 \cdot 3!$

$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, т.к. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

def: $f:\Delta\to\mathbb{R}$,
$a\in\Delta$, Δ - отв. интервал
$f^{(n)}$ същ. в Δ $\forall n\in\mathbb{N}$
Тогава $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$ се нар. ред на Тейлър за f около a

(за $a=0$ -> ред на Маклорен)

8. Тв: Всеки степенен ред съвпада с реда на Тейлър за своята сума

пр: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\quad f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, се дф $\forall n\in\mathbb{N}$ върху $\mathbb{R}$ и $f^{(n)}(0)=0$

8.1 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ в $(-\infty,+\infty)$

$f(x)=T_f^n(x)+R_f^n(x)$

$T_f^n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}+R_f^n(x)$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \iff R_f^n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$e^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ Лагранж $\quad \theta_x\in(0,1)$

$R_f^n(x)=\frac{e^{\theta_x x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

$|R_f^n(x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\max\{1,e^x\}$