

Модел на средите и изчислителни процеси

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2024/25 г.

11–18 октомври 2023 г.

Тази презентация е достъпна под лиценза Creative Commons Признание-Некомерсиално-Споделяне на споделеното 4.0 Международен 

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- Символите могат да има различни оценки в различни среди.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- **Символите могат да има различни оценки в различни среди.**
- При стартиране Scheme по подразбиране работи в глобалната среда.

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- **Символите могат да има различни оценки в различни среди.**
- При стартиране Scheme по подразбиране работи в **глобалната среда**.
- В глобалната среда са дефинирани символи за стандартни операции и функции.

Пример за среда

- `(define a 8)`

E
a : 8

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` \longrightarrow Грешка!

E
a : 8

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` \longrightarrow Грешка!
- `(define r 5)`

E
a : 8
r : 5

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` \longrightarrow Грешка!
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` \longrightarrow 8

E
a : 8
r : 5

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` \longrightarrow **Грешка!**
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` \longrightarrow 8
- `(define (f x) (* x r))`

E	
a :	8
r :	5
f :	<div> <div> Параметри : x Тяло : (* x r) Среда : E </div> </div>

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` \longrightarrow **Грешка!**
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` \longrightarrow 8
- `(define (f x) (* x r))`
- `(f 3)` \longrightarrow 15

E	
a :	8
r :	5
f :	<div> <div>Параметри : x</div> <div>Тяло : (* x r)</div> <div>Среда : E</div> </div>

Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` \longrightarrow **Грешка!**
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` \longrightarrow 8
- `(define (f x) (* x r))`
- `(f 3)` \longrightarrow 15
- `(f r)` \longrightarrow 25

E	
a :	8
r :	5
f :	<div> <div>Параметри : x</div> <div>Тяло : (* x r)</div> <div>Среда : E</div> </div>

Функции и среди

- Всяка функция f пази указател към средата E , в която е дефинирана.

Функции и среди

- Всяка функция f пази указател към средата E , в която е дефинирана.
- При извикване на f :

Функции и среди

- Всяка функция f пази указател към средата E , в която е дефинирана.
- При извикване на f :
 - създава се нова среда E_1 , която разширява E

Функции и среди

- Всяка функция f пази указател към средата E , в която е дефинирана.
- При извикване на f :
 - създава се нова среда E_1 , която разширява E
 - в E_1 всеки символ означаващ формален параметър се свързва с оценката на фактическия параметър

Функции и среди

- Всяка функция f пази указател към средата E , в която е дефинирана.
- При извикване на f :
 - създава се нова среда E_1 , която разширява E
 - в E_1 всеки символ означаващ формален параметър се свързва с оценката на фактическия параметър
 - тялото на f се оценява в E_1

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда E

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда E
 - първо се търси оценката му в E

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда E
 - първо се търси оценката му в E
 - ако символът не е дефиниран в E , се преминава към родителската среда

Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда E
 - първо се търси оценката му в E
 - ако символът не е дефиниран в E , се преминава към родителската среда
 - при достигане на най-горната среда, ако символът не е дефиниран и в нея се извежда съобщение за грешка

Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`

E
r : 5

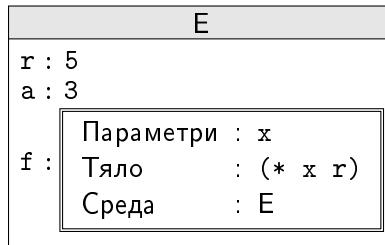
Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`

E
r : 5
a : 3

Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`



Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
 - `(define a 3)`
 - `(define (f x) (* x r))`
- `{E} (f a)`

E	
r :	5
a :	3
f :	<div> <div>Параметри : x</div> <div>Тяло : (* x r)</div> <div>Среда : E</div> </div>

Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`

`{E} (f a)`
 ↓
`{E} (f 3)`

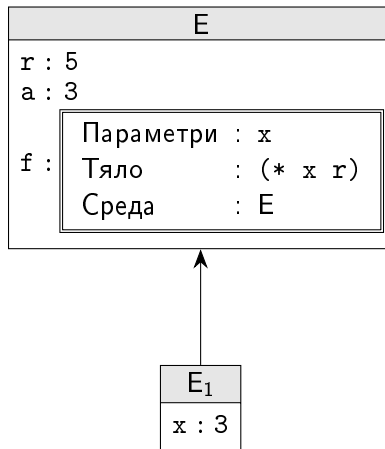


Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`

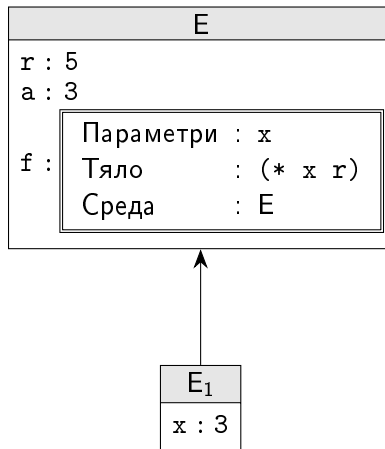
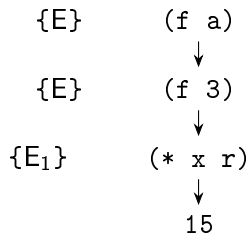
```

{E}      (f a)
      ↓
{E}      (f 3)
      ↓
{E1}    (* x r)
  
```



Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`



Какво е рекурсия?

Какво е рекурсия?



"Matryoshka dolls" от User:Fanghong (оригинал) и User:Gnomz007 (производна), CC BY-SA-3.0

Какво е рекурсия?



"Sierpinski triangle, the evolution in five iterations" от Salko11, Обществено достояние чрез Общомедия

Какво е рекурсия?

Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Рекурсивна функция: дефинира се чрез себе си

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(база)} \\ \text{(стъпка)} \end{matrix}$$

Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Рекурсивна функция: дефинира се чрез себе си

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(база)} \\ \text{(стъпка)} \end{matrix}$$

- Дава се отговор на най-простата задача (база, дъно)
- Показва се как сложна задача се свежда към една или няколко по-прости задачи от същия вид (стъпка)

Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

Да разгледаме *рекурсивното уравнение*, в което F е неизвестно:

$$F(n) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot F(n-1), & \text{при } n > 0. \end{cases}}_{\Gamma(F)(n)}$$

Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

Да разгледаме *рекурсивното уравнение*, в което F е неизвестно:

$$F(n) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot F(n-1), & \text{при } n > 0. \end{cases}}_{\Gamma(F)(n)}$$

$n!$ е “най-малкото” решение на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (най-малка неподвижна точка на Γ).

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

*Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (**най-малка неподвижна точка на Γ**). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща f чрез Γ .*

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (**най-малка неподвижна точка на Γ**). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща f чрез Γ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (**най-малка неподвижна точка на Γ**). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща f чрез Γ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Кое е **най-малкото** решение на уравнението $F(x) = F(x + 1) - 1$?

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (**най-малка неподвижна точка на Γ**). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща f чрез Γ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Кое е **най-малкото** решение на уравнението $F(x) = F(x + 1) - 1$?

```
(define (g x) (- 1 (g (+ x 1))))
(f 0) → ?
```

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (**най-малка неподвижна точка на Γ**). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща f чрез Γ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Кое е **най-малкото решение** на уравнението $F(x) = F(x + 1) - 1$?

```
(define (g x) (- 1 (g (+ x 1))))
(f 0) → ?
```

g е “празната функция”, т.е. $\text{dom}(g) = \emptyset$.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$ е рекурсивно дефинирана функция.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$ е рекурсивно дефинирана функция.

Коя е математическата функция f , която се пресмята от f ?

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$ е рекурсивно дефинирана функция.

Коя е математическата функция f , която се пресмята от f ?

Денотационна семантика

f е най-малката неподвижна точка на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека $(\text{define } (f\ x) \ \Gamma[f])$ е рекурсивно дефинирана функция.

Коя е математическата функция f , която се пресмята от f ?

Денотационна семантика

f е най-малката неподвижна точка на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Операционна семантика

Разглеждаме редицата от последователни оценки на комбинации

$(f\ a) \rightarrow \Gamma[f]\ [x \mapsto a] \rightarrow \dots$

Ако стигнем до елемент b , който не е комбинация, то $f(a) := b$.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека $(\text{define } (f\ x) \ \Gamma[f])$ е рекурсивно дефинирана функция.

Коя е математическата функция f , която се пресмята от f ?

Денотационна семантика

f е най-малката неподвижна точка на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Операционна семантика

Разглеждаме редицата от последователни оценки на комбинации

$(f\ a) \rightarrow \Gamma[f] [x \mapsto a] \rightarrow \dots$

Ако стигнем до елемент b , който не е комбинация, то $f(a) := b$.

Функциите в Scheme имат дуален, но еквивалентен смисъл:

- решения на рекурсивни уравнения
- изчислителни процеси, генериращи се при оценка

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(if (= 4 0) 1 (* 4 (fact (- 4 1))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (if (= 3 0) 1 (* 3 (fact (- 3 1)))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (if (= 2 0) 1 (* 2 (fact (- 2 1))))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (if (= 1 0) 1 (* 1 (fact (- 1 1))))))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (if (= 0 0) 1 (* 0 (fact (- 0 1))))))))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
↓
(* 4 (* 3 2))

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
↓
(* 4 (* 3 2))
↓
(* 4 6)

Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)
↓
(* 4 (fact 3))
↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
↓
(* 4 (* 3 2))
↓
(* 4 6)
↓
24

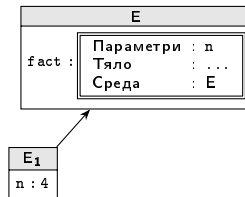
Оценка на рекурсивна функция в среда

{E} (fact 4)

E	
fact :	Параметри : n
	Тяло : ...
	Среда : E

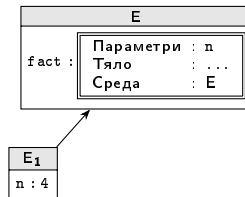
Оценка на рекурсивна функция в среда

$\{E\}$ $(\text{fact } 4)$
 \downarrow
 $\{E_1\}$ $(\text{if } (= n 0) 1 (* n (\text{fact } (- n 1))))$



Оценка на рекурсивна функция в среда

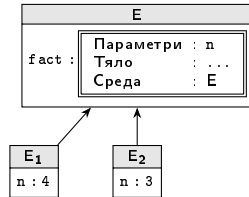
$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_1\}$ (* 4 (fact 3))



Оценка на рекурсивна функция в среда

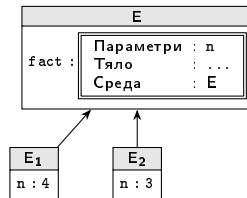
```

      {E}      (fact 4)
            ↓
      {E1}    (* 4 (fact 3))
            ↓
      {E2}    (* 4 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))
  
```



Оценка на рекурсивна функция в среда

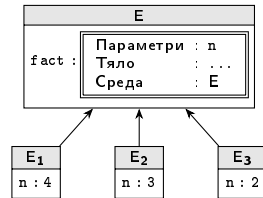
$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_1\}$ (* 4 (fact 3))
 ↓
 $\{E_2\}$ (* 4 (* 3 (fact 2)))



Оценка на рекурсивна функция в среда

```

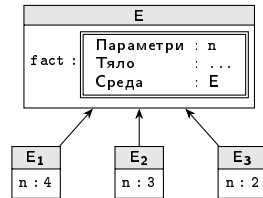
      {E}      (fact 4)
        ↓
    {E1}    (* 4 (fact 3))
        ↓
    {E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
    {E3}    (* 4 (* 3 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1))))))
  
```



Оценка на рекурсивна функция в среда

```

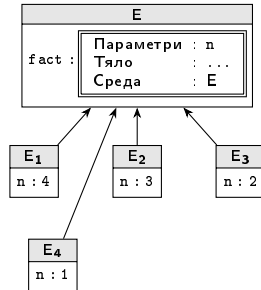
      {E}      (fact 4)
           ↓
    {E1}    (* 4 (fact 3))
           ↓
    {E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
           ↓
    {E3}    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  
```



Оценка на рекурсивна функция в среда

```

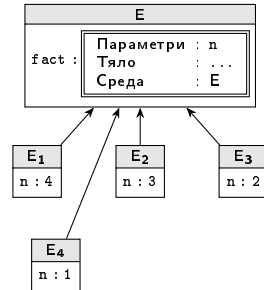
      {E}      (fact 4)
        ↓
    {E1}    (* 4 (fact 3))
        ↓
    {E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
    {E3}    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
    {E4}    (* 4 (* 3 (* 2 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))))
  
```



Оценка на рекурсивна функция в среда

```

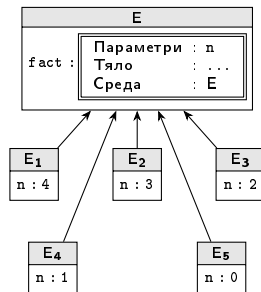
      {E}      (fact 4)
        ↓
    {E1}    (* 4 (fact 3))
        ↓
    {E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
    {E3}    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
    {E4}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
  
```



Оценка на рекурсивна функция в среда

```

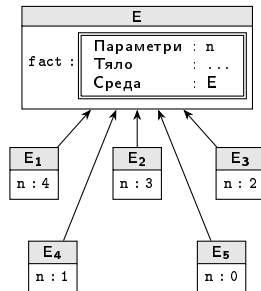
      {E}      (fact 4)
        ↓
    {E1}    (* 4 (fact 3))
        ↓
    {E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
    {E3}    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
    {E4}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
        ↓
    {E5}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1))))))))
  
```



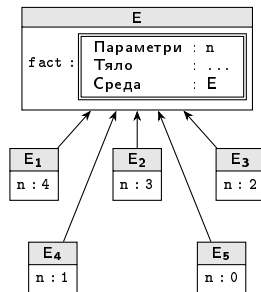
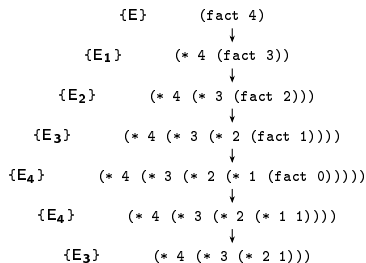
Оценка на рекурсивна функция в среда

```

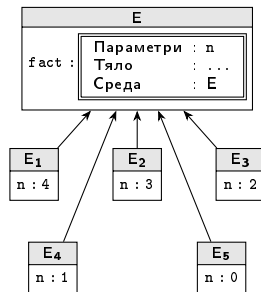
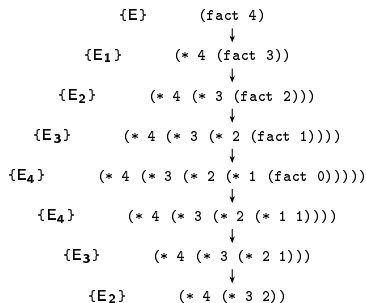
      {E}      (fact 4)
        ↓
    {E1}    (* 4 (fact 3))
        ↓
    {E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
    {E3}    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
    {E4}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
        ↓
    {E4}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
  
```



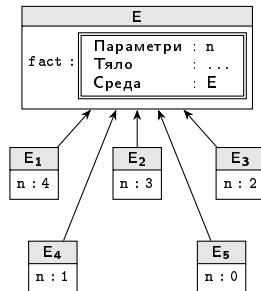
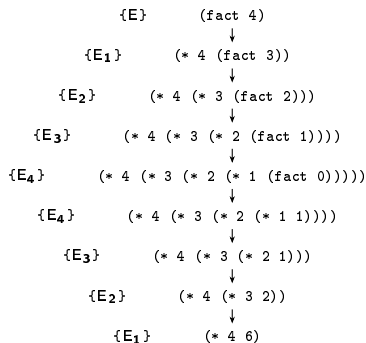
Оценка на рекурсивна функция в среда



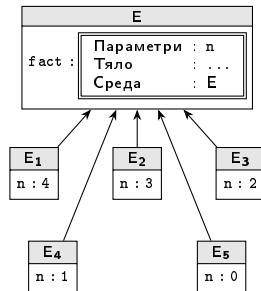
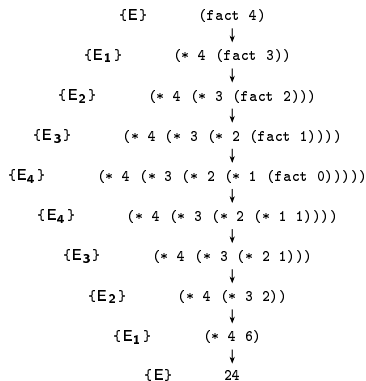
Оценка на рекурсивна функция в среда



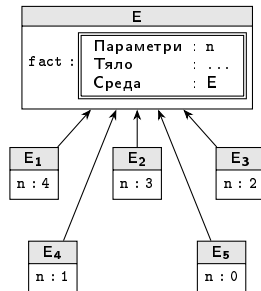
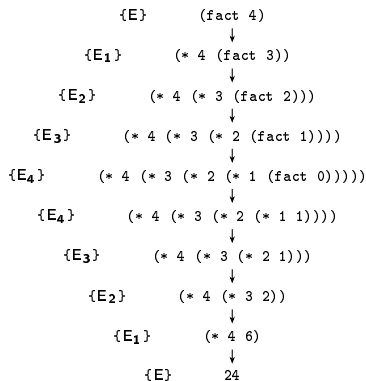
Оценка на рекурсивна функция в среда



Оценка на рекурсивна функция в среда



Оценка на рекурсивна функция в среда



Линеен рекурсивен процес

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```


Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1))  
      r))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i )  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1) )  
      r ))
```

```
(define (fact n)  
  (for n 1 1 ))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i )  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1) )  
      r ))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1 ))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1) )  
        r ))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i )  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1) )  
      r ))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1 ))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1))  
      r))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i )  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1) )  
      r ))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1 ))
```

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1))  
      r))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1))
```


Оценка на итеративен факториел

(fact 4)

Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)

Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(if (<= 1 4) (for 4 (* 1 1) (+ 1 1)) 1)
```

Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)
↓
(for 4 1 2)

Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(if (<= 2 4) (for 4 (* 1 2) (+ 2 1)) 2)
```

Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)
↓
(for 4 1 2)
↓
(for 4 2 3)

Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(if (<= 3 4) (for 4 (* 2 3) (+ 3 1)) 6)
```

Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)
↓
(for 4 1 2)
↓
(for 4 2 3)
↓
(for 4 6 4)

Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(if (<= 4 4) (for 4 (* 6 4) (+ 4 1)) 24)
```

Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)
↓
(for 4 1 2)
↓
(for 4 2 3)
↓
(for 4 6 4)
↓
(for 4 24 5)

Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
(if (<= 5 4) (for 4 (* 24 5) (+ 5 1)) 24)
```

Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)
↓
(for 4 1 2)
↓
(for 4 2 3)
↓
(for 4 6 4)
↓
(for 4 24 5)
↓
24

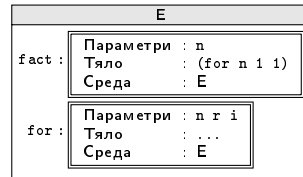
Оценка на итеративен факториел

(fact 4)
↓
(for 4 1 1)
↓
(for 4 1 2)
↓
(for 4 2 3)
↓
(for 4 6 4)
↓
(for 4 24 5)
↓
24

Линеен итеративен процес

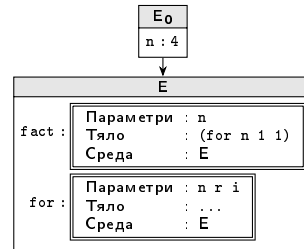
Оценка на итеративен факториел със среди

{E} (fact 4)

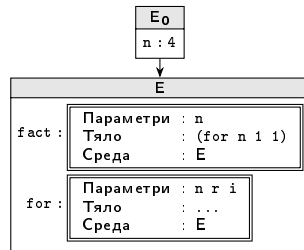


Оценка на итеративен факториел със среди

$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_0\}$ (for n 1 1)

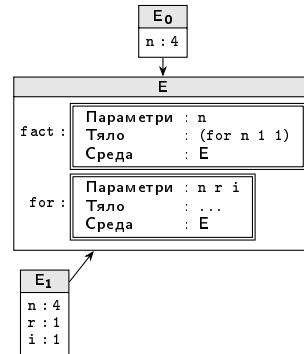


Оценка на итеративен факториел със среди

$$\begin{array}{ccc} \{E\} & & (\text{fact } 4) \\ & \downarrow & \\ \{E_0\} & & (\text{for } 4 \ 1 \ 1) \end{array}$$


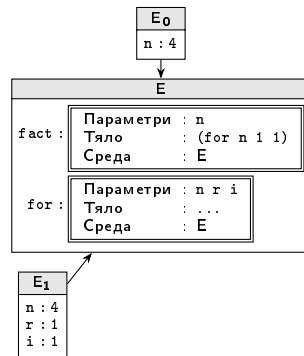
Оценка на итеративен факториел със среди

$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_0\}$ (for 4 1 1)
 ↓
 $\{E_1\}$ (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)



Оценка на итеративен факториел със среди

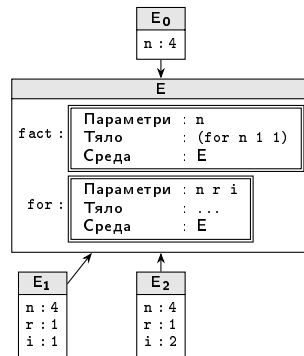
$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_0\}$ (for 4 1 1)
 ↓
 $\{E_1\}$ (for 4 1 2)



Оценка на итеративен факториел със среди

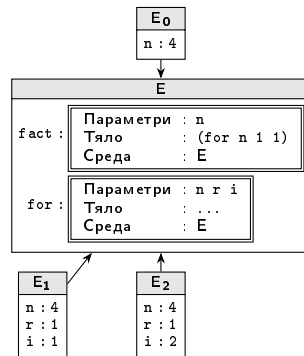
```

      {E}      (fact 4)
            ↓
    {E0}    (for 4 1 1)
            ↓
    {E1}    (for 4 1 2)
            ↓
    {E2}    (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел със среди

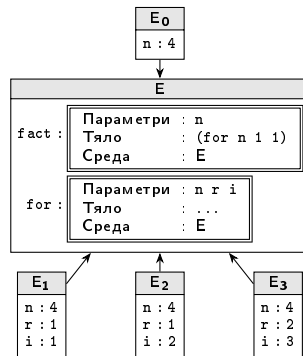
$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_0\}$ (for 4 1 1)
 ↓
 $\{E_1\}$ (for 4 1 2)
 ↓
 $\{E_2\}$ (for 4 2 3)



Оценка на итеративен факториел със среди

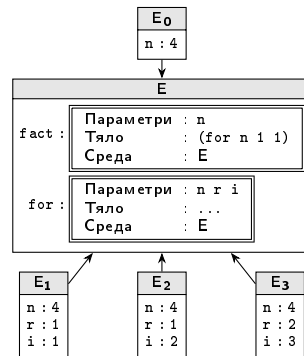
```

      {E}      (fact 4)
            ↓
    {E0}    (for 4 1 1)
            ↓
    {E1}    (for 4 1 2)
            ↓
    {E2}    (for 4 2 3)
            ↓
    {E3}    (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел със среди

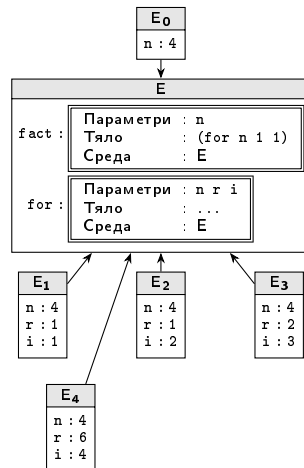
$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_0\}$ (for 4 1 1)
 ↓
 $\{E_1\}$ (for 4 1 2)
 ↓
 $\{E_2\}$ (for 4 2 3)
 ↓
 $\{E_3\}$ (for 4 6 4)



Оценка на итеративен факториел със среди

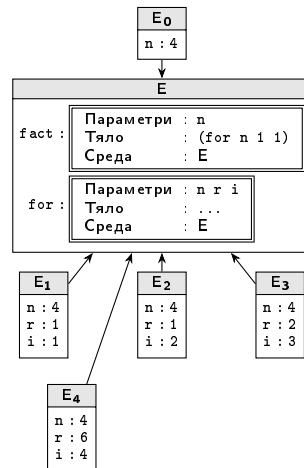
```

{E}      (fact 4)
      ↓
{E0}    (for 4 1 1)
      ↓
{E1}    (for 4 1 2)
      ↓
{E2}    (for 4 2 3)
      ↓
{E3}    (for 4 6 4)
      ↓
{E4}    (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел със среди

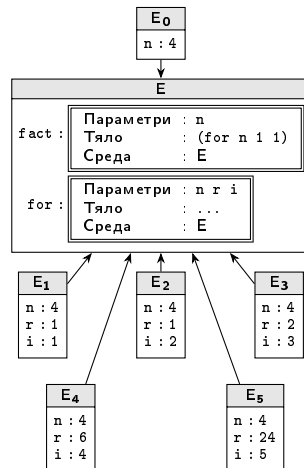
$\{E\}$ (fact 4)
 ↓
 $\{E_0\}$ (for 4 1 1)
 ↓
 $\{E_1\}$ (for 4 1 2)
 ↓
 $\{E_2\}$ (for 4 2 3)
 ↓
 $\{E_3\}$ (for 4 6 4)
 ↓
 $\{E_4\}$ (for 4 24 5)



Оценка на итеративен факториел със среди

```

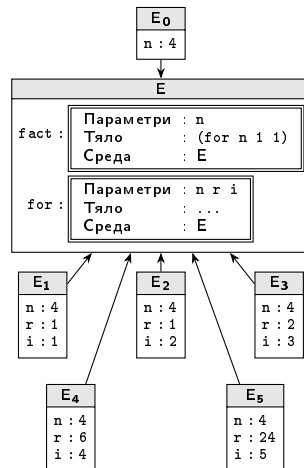
{E}      (fact 4)
      ↓
{E0}    (for 4 1 1)
      ↓
{E1}    (for 4 1 2)
      ↓
{E2}    (for 4 2 3)
      ↓
{E3}    (for 4 6 4)
      ↓
{E4}    (for 4 24 5)
      ↓
{E5}    (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел със среди

```

{E}      (fact 4)
      ↓
{E0}    (for 4 1 1)
      ↓
{E1}    (for 4 1 2)
      ↓
{E2}    (for 4 2 3)
      ↓
{E3}    (for 4 6 4)
      ↓
{E4}    (for 4 24 5)
      ↓
{E5}    24
  
```



Рекурсивен и итеративен процес

```

      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
        ↓
  (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
        ↓
  (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
        ↓
      (* 4 (* 3 2))
        ↓
      (* 4 6)
        ↓
        24
  
```

```

(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
  
```

```

      (fact 4)
        ↓
    (for 4 1 1)
        ↓
    (for 4 1 2)
        ↓
    (for 4 2 3)
        ↓
    (for 4 6 4)
        ↓
    (for 4 24 5)
        ↓
        24
  
```

```

(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
  
```

```

(define (fact n)
  (for n 1 1))
  
```

Рекурсивен и итеративен процес

```

(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
  ↓
(* 4 (* 3 2))
  ↓
(* 4 6)
  ↓
24

```

```

(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))

```

```

(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
24

```

```

(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))

```

```

(define (fact n)
  (for n 1 1))

```

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли
- В Scheme опашковата рекурсия **по стандарт** се интерпретира като цикъл

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли
- В Scheme опашковата рекурсия **по стандарт** се интерпретира като цикъл
 - т.е. не се заделя памет за всяко рекурсивно извикване

Рекурсивен и итеративен процес

```

(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
  ↓
(* 4 (* 3 2))
  ↓
(* 4 6)
  ↓
24

```

```

(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))

```

```

(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
24

```

```

(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))

```

```

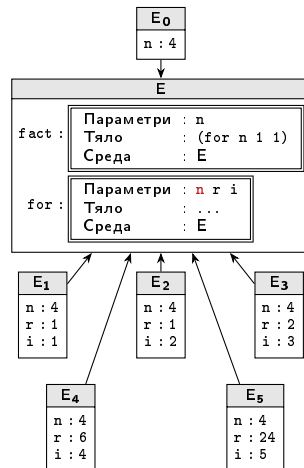
(define (fact n)
  (for n 1 1))

```

Оценка на итеративен факториел със среди

```

{E}      (fact 4)
      ↓
{E0}    (for 4 1 1)
      ↓
{E1}    (for 4 1 2)
      ↓
{E2}    (for 4 2 3)
      ↓
{E3}    (for 4 6 4)
      ↓
{E4}    (for 4 24 5)
      ↓
{E5}    24
  
```



Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на `<функция>` първо се оценяват всички `<дефиниция>` и след това се оценява `<тяло>`

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>}) {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на `<функция>` първо се оценяват всички `<дефиниция>` и след това се оценява `<тяло>`
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на `<функция>` първо се оценяват всички `<дефиниция>` и след това се оценява `<тяло>`
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите
 - След това се създава среда E_2 , която разширява E_1 , за вложените дефиниции

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на `<функция>` първо се оценяват всички `<дефиниция>` и след това се оценява `<тяло>`
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите
 - След това се създава среда E_2 , която разширява E_1 , за вложените дефиниции
 - В средата E_2 се записват всички символи от вложени дефиниции **без стойности**

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на <функция> първо се оценяват всички <дефиниция> и след това се оценява <тяло>
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите
 - След това се създава среда E_2 , която разширява E_1 , за вложените дефиниции
 - В средата E_2 се записват всички символи от вложени дефиниции **без стойности**
 - Всички вложени дефиниции се **оценяват** в E_2

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на <функция> първо се оценяват всички <дефиниция> и след това се оценява <тяло>
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите
 - След това се създава среда E_2 , която разширява E_1 , за вложените дефиниции
 - В средата E_2 се записват всички символи от вложени дефиниции **без стойности**
 - Всички вложени дефиниции се **оценяват** в E_2
 - Накрая получените оценки се **свързват** със съответните си символи в E_2

Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>}) {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на <функция> първо се оценяват всички <дефиниция> и след това се оценява <тяло>
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите
 - След това се създава среда E_2 , която разширява E_1 , за вложените дефиниции
 - В средата E_2 се записват всички символи от вложени дефиниции **без стойности**
 - Всички вложени дефиниции се **оценяват** в E_2
 - Накрая получените оценки се **свързват** със съответните си символи в E_2
- Пример:

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (define dx (- x2 x1))
  (define dy (- y2 y1))
  (define (sq x) (* x x))
  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
```

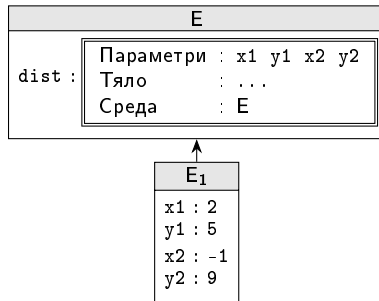
Оценка на вложени функции

{E} (dist 2 5 -1 9)

E										
dist :	<table><tr><td>Параметри</td><td>:</td><td>x1 y1 x2 y2</td></tr><tr><td>Тяло</td><td>:</td><td>...</td></tr><tr><td>Среда</td><td>:</td><td>E</td></tr></table>	Параметри	:	x1 y1 x2 y2	Тяло	:	...	Среда	:	E
Параметри	:	x1 y1 x2 y2								
Тяло	:	...								
Среда	:	E								

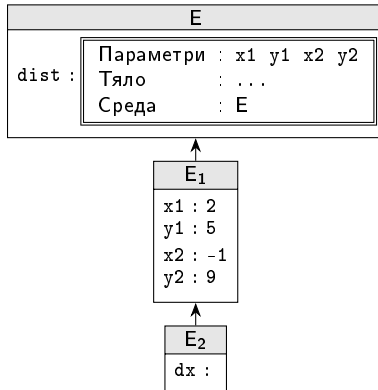
Оценка на вложени функции

{E} (dist 2 5 -1 9)



Оценка на вложени функции

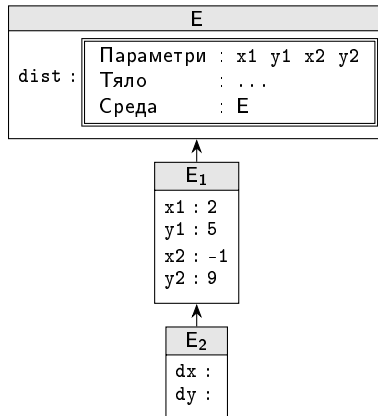
```
{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))
```



Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))
{E2}    (define dy (- y2 y1))
  
```



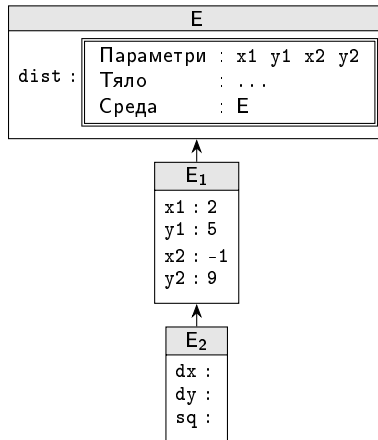
Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))
  
```



Оценка на вложени функции

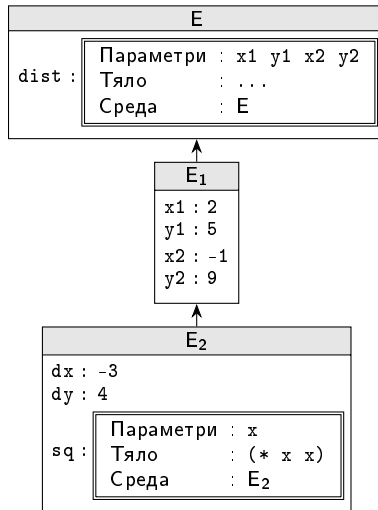
```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))

{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
  
```



Оценка на вложени функции

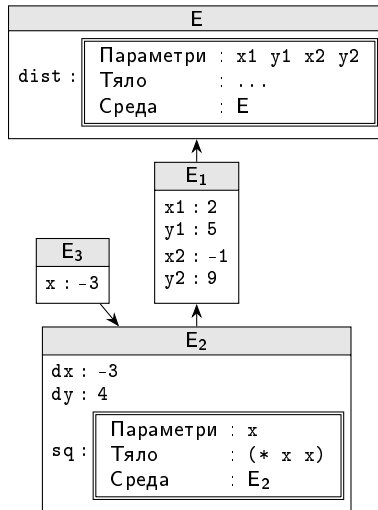
```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))

{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
  
```



Оценка на вложени функции

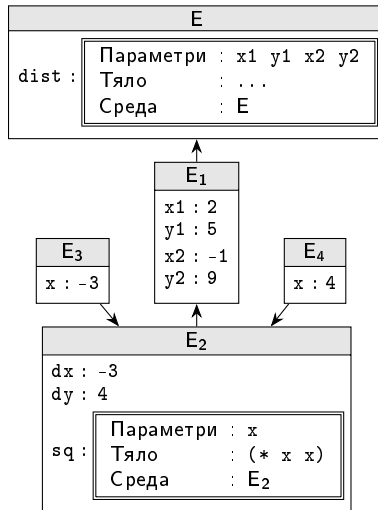
```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))

{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
  
```



Оценка на вложени функции

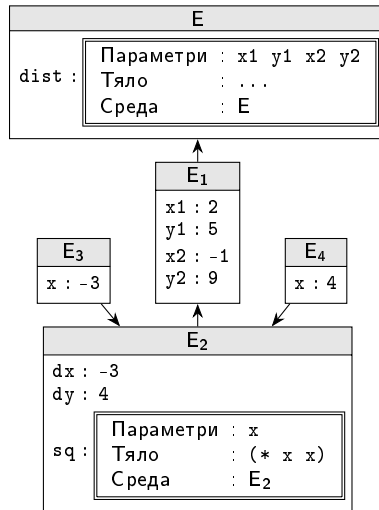
```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
      ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))

{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
      ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
      ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ 9 16))
  
```



Оценка на вложени функции

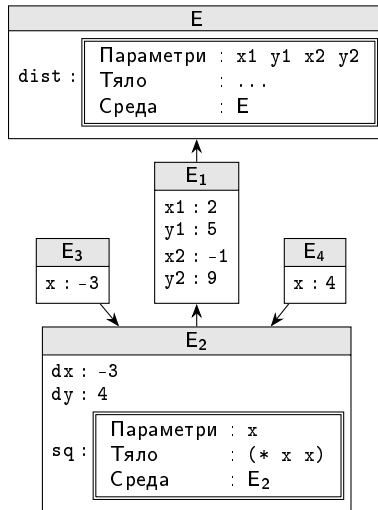
```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
      ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))

{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
      ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
      ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ 9 16))
      ↓
{E2}    (sqrt 25)
  
```



Оценка на вложени функции

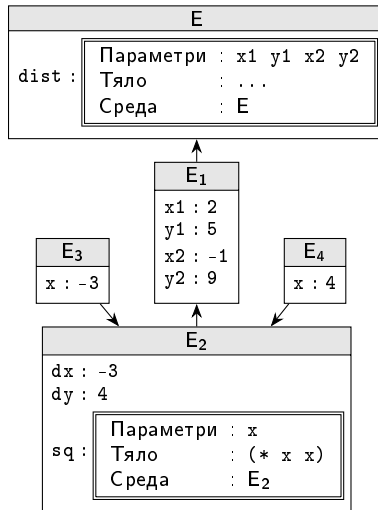
```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
      ↓
{E2}    (define dx (- x2 x1))

{E2}    (define dy (- y2 y1))

{E2}    (define (sq x) (* x x))

{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
      ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
      ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ 9 16))
      ↓
{E2}    (sqrt 25)
      ↓
{E2}    5
  
```



Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
```

```
(define (fact n)
  (for n 1 1))
```

Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

```
(define (fact n)
  (define (for r i)
    (if (<= i n)
        (for (* r i) (+ i 1))
        r))
  (for 1 1))
```

Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

```
(define (fact n)
  (define (for r i)
    (if (<= i n)
        (for (* r i) (+ i 1))
        r))
  (for 1 1))
```

Вложените дефиниции “виждат” символите на обхващащите им дефиниции.

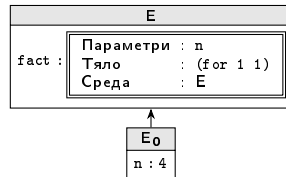
Оценка на итеративен факториел с вложена функция

{E} (fact 4)

E	
fact :	Параметри : n
	Тяло : (for 1 1)
	Среда : E

Оценка на итеративен факториел с вложена функция

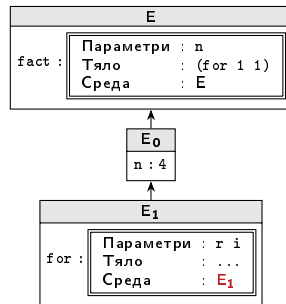
{E} (fact 4)
 ↓



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

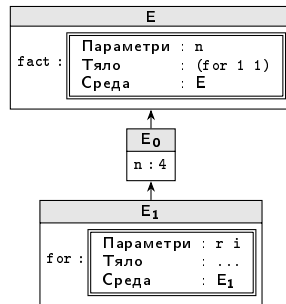
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

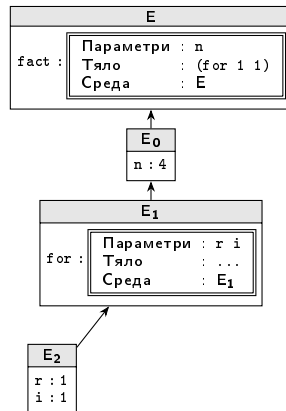
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}    (for 1 1)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

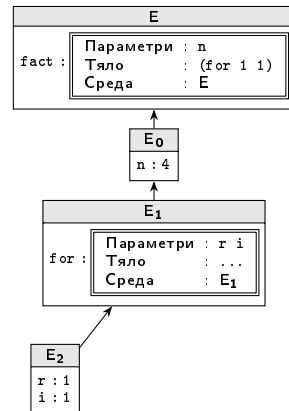
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}      (for 1 1)
      ↓
{E2}      (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

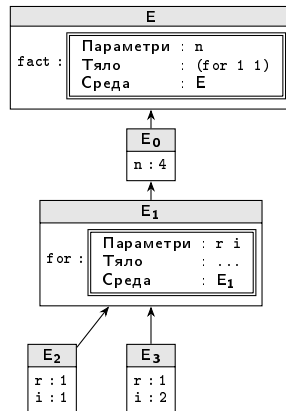
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}      (for 1 1)
      ↓
{E2}      (for 1 2)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

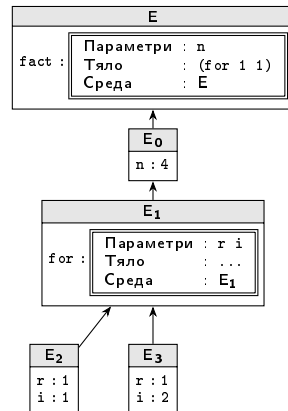
      {E}      (fact 4)
            ↓
{E1}      (define (for r i)...)
            ↓
      {E1}      (for 1 1)
            ↓
      {E2}      (for 1 2)
            ↓
{E3}      (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

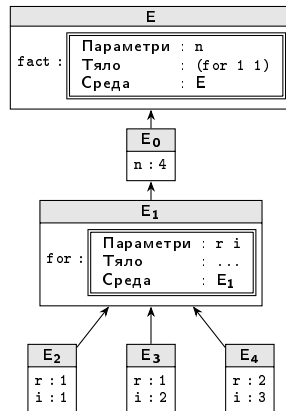
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}    (for 1 1)
      ↓
{E2}    (for 1 2)
      ↓
{E3}    (for 2 3)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

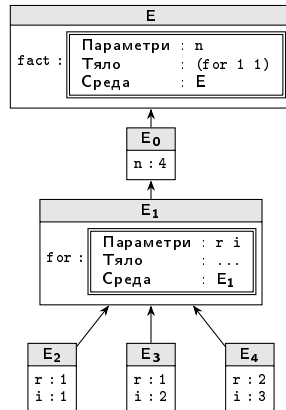
      {E}      (fact 4)
            ↓
{E1}      (define (for r i)...)
            ↓
      {E1}      (for 1 1)
            ↓
      {E2}      (for 1 2)
            ↓
      {E3}      (for 2 3)
            ↓
{E4}      (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}    (for 1 1)
      ↓
{E2}    (for 1 2)
      ↓
{E3}    (for 2 3)
      ↓
{E4}    (for 6 4)
  
```

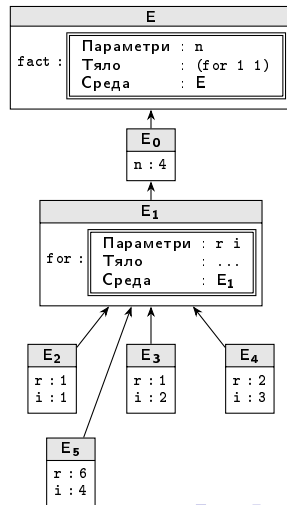


Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}    (for 1 1)
      ↓
{E2}    (for 1 2)
      ↓
{E3}    (for 2 3)
      ↓
{E4}    (for 6 4)
      ↓
{E5}    (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)

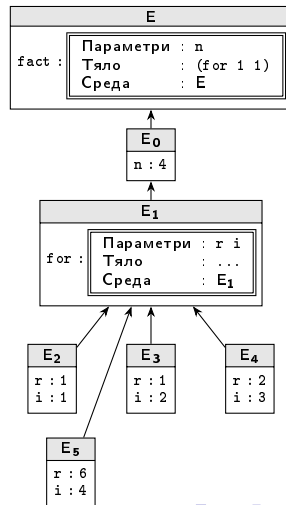
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

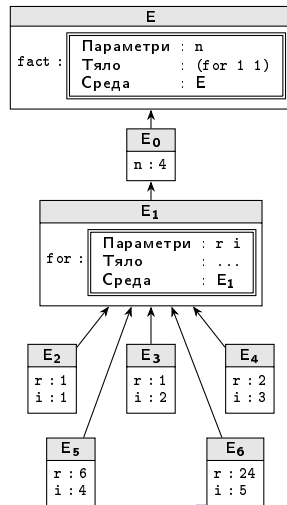
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}      (for 1 1)
      ↓
{E2}      (for 1 2)
      ↓
{E3}      (for 2 3)
      ↓
{E4}      (for 6 4)
      ↓
{E5}      (for 24 5)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

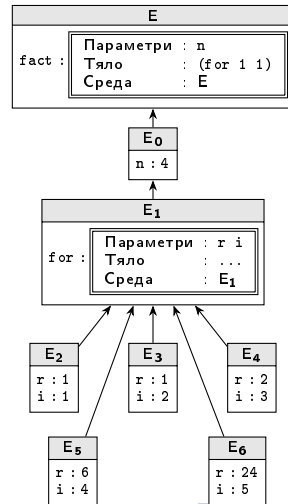
{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}      (for 1 1)
      ↓
{E2}      (for 1 2)
      ↓
{E3}      (for 2 3)
      ↓
{E4}      (for 6 4)
      ↓
{E5}      (for 24 5)
      ↓
{E6}      (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

{E}      (fact 4)
      ↓
{E1}    (define (for r i)...)
      ↓
{E1}    (for 1 1)
      ↓
{E2}    (for 1 2)
      ↓
{E3}    (for 2 3)
      ↓
{E4}    (for 6 4)
      ↓
{E5}    (for 24 5)
      ↓
{E6}    24
  
```



Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на let в среда E:

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на `let` в среда `E`:
 - Създава се нова среда `E1` разширение на текущата среда `E`

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E₁ разширение на текущата среда E
 - Оценката на <израз₁> в E се свързва със <символ₁> в E₁

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E₁ разширение на текущата среда E
 - Оценката на <израз₁> в E се свързва със <символ₁> в E₁
 - Оценката на <израз₂> в E се свързва със <символ₂> в E₁

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E₁ разширение на текущата среда E
 - Оценката на <израз₁> в E се свързва със <символ₁> в E₁
 - Оценката на <израз₂> в E се свързва със <символ₂> в E₁
 - ...

Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_1
 - ...
 - Оценката на $\langle \text{израз}_n \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_n \rangle$ в E_1

Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_1
 - ...
 - Оценката на $\langle \text{израз}_n \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_n \rangle$ в E_1
 - Връща се оценката на $\langle \text{тяло} \rangle$ в средата E_1

Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E₁ разширение на текущата среда E
 - Оценката на <израз₁> в E се свързва със <символ₁> в E₁
 - Оценката на <израз₂> в E се свързва със <символ₂> в E₁
 - ...
 - Оценката на <израз_n> в E се свързва със <символ_n> в E₁
 - Връща се оценката на <тяло> в средата E₁
- **let няма странични ефекти върху средата!**

Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))
```

Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))

(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let ((a (dist x1 y1 x2 y2))
        (b (dist x2 y2 x3 y3))
        (c (dist x3 y3 x1 y1))
        (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))

(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let ((a (dist x1 y1 x2 y2))
        (b (dist x2 y2 x3 y3))
        (c (dist x3 y3 x1 y1))
        (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

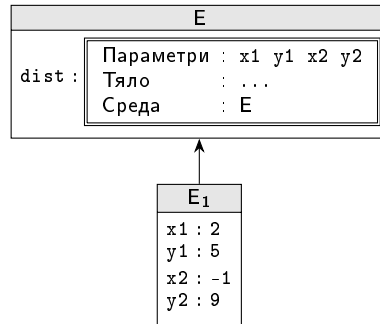
Оценка на let

{E} (dist 2 5 -1 9)

E							
dist :	<table><tr><td>Параметри</td><td>: x1 y1 x2 y2</td></tr><tr><td>Тяло</td><td>: ...</td></tr><tr><td>Среда</td><td>: E</td></tr></table>	Параметри	: x1 y1 x2 y2	Тяло	: ...	Среда	: E
Параметри	: x1 y1 x2 y2						
Тяло	: ...						
Среда	: E						

Оценка на let

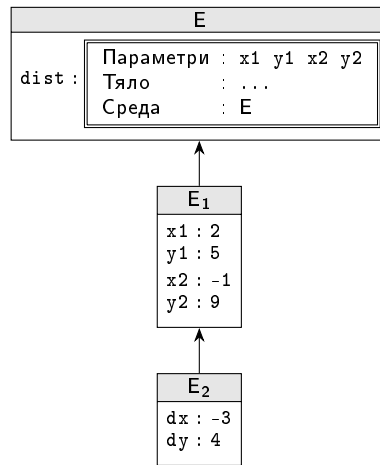
```
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
               (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
```



Оценка на let

```

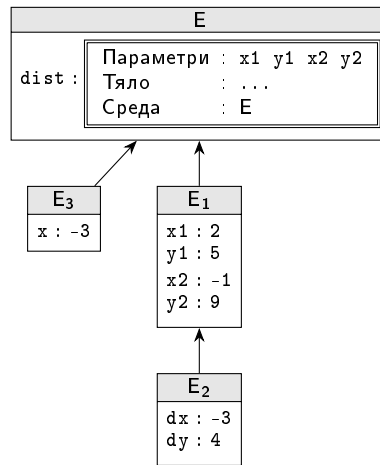
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
               (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
  
```



Оценка на let

```

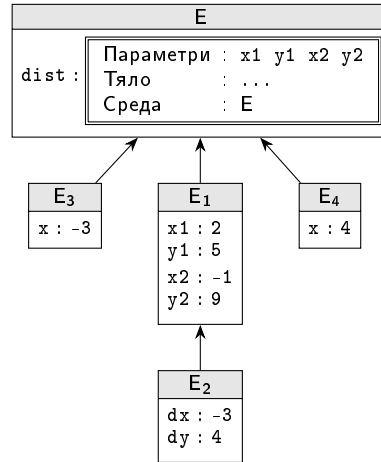
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
               (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
  
```



Оценка на let

```

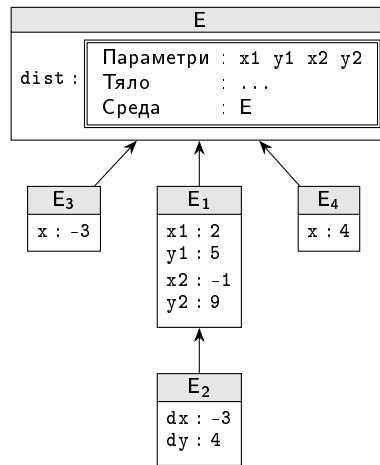
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
  
```



Оценка на let

```

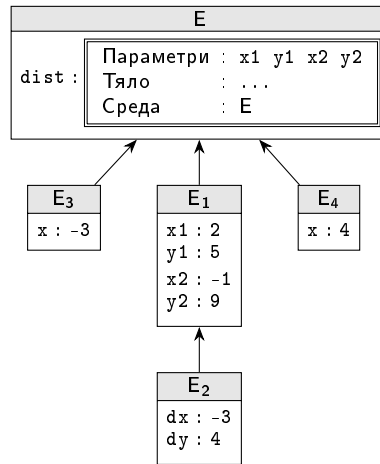
{E}      (dist 2 5 -1 9)
      ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
      ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
      ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ 9 16))
  
```



Оценка на let

```

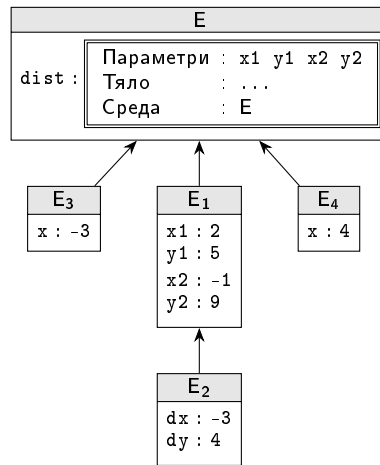
{E}      (dist 2 5 -1 9)
      ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
      ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
      ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ 9 16))
      ↓
{E2}    (sqrt 25)
  
```



Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
      ↓
{E1}    (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
      ↓
{E3}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
      ↓
{E4}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
      ↓
{E2}    (sqrt (+ 9 16))
      ↓
{E2}    (sqrt 25)
      ↓
{E2}    5
  
```



Специална форма let*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`

Специална форма let*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let* ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`

Специална форма let*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let* ((<символ1> <израз1>)
(<символ2> <израз2>)
...
(<символn> <изразn>))
<тяло>)`
- При оценка на let* в среда E:

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let* в среда E:
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E_1 се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_2

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E_1 се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_2
 - ...

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E_1 се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_2
 - ...
 - Създава се нова среда E_n разширение на текущата среда E_{n-1}

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E_1 се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_2
 - ...
 - Създава се нова среда E_n разширение на текущата среда E_{n-1}
 - Оценката на $\langle \text{израз}_n \rangle$ в E_{n-1} се свързва със $\langle \text{символ}_n \rangle$ в E_n

Специална форма let*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$
 ...
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let^* в среда E :
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E_1 се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_2
 - ...
 - Създава се нова среда E_n разширение на текущата среда E_{n-1}
 - Оценката на $\langle \text{израз}_n \rangle$ в E_{n-1} се свързва със $\langle \text{символ}_n \rangle$ в E_n
 - Връща се оценката на $\langle \text{тяло} \rangle$ в средата E_n

Пример за let*

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1))
         (p (/ (+ a b c) 2)))
```

Пример за let*

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1))
         (p (/ (+ a b c) 2)))
```

Редът има значение!

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((p (/ (+ a b c) 2))
         (a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

Оценка на let*

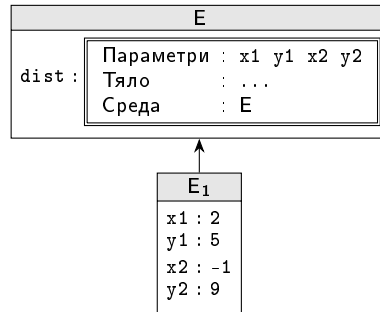
{E} (dist 2 5 -1 9)

E										
dist :	<table><tr><td>Параметри</td><td>:</td><td>x1 y1 x2 y2</td></tr><tr><td>Тяло</td><td>:</td><td>...</td></tr><tr><td>Среда</td><td>:</td><td>E</td></tr></table>	Параметри	:	x1 y1 x2 y2	Тяло	:	...	Среда	:	E
Параметри	:	x1 y1 x2 y2								
Тяло	:	...								
Среда	:	E								

Оценка на let*

```

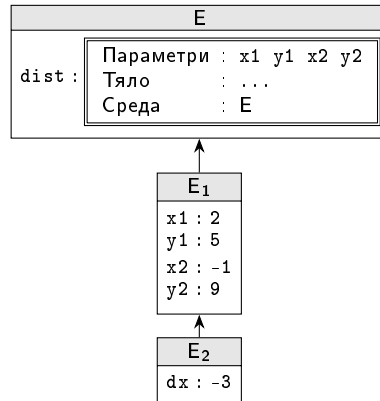
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                 (dy (- y2 y1)))
           (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
  
```



Оценка на let*

```

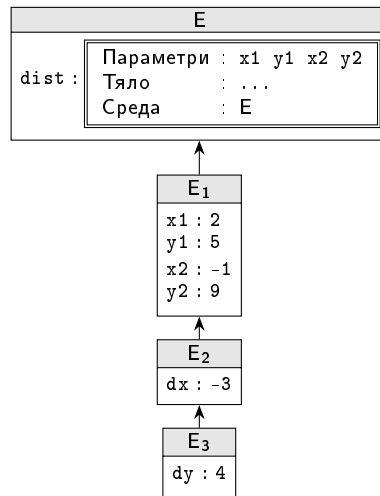
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                 (dy (- y2 y1)))
           (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
  
```



Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                (dy (- y2 y1)))
           (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
  
```

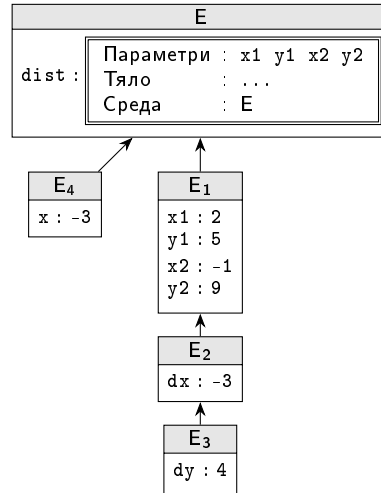


Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))

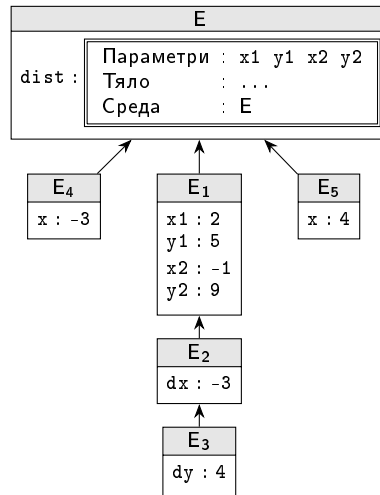
```



Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E5}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
  
```

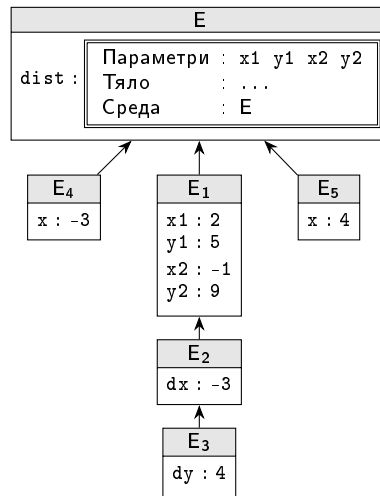


Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E3}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E4}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E5}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E3}    (sqrt (+ 9 16))

```

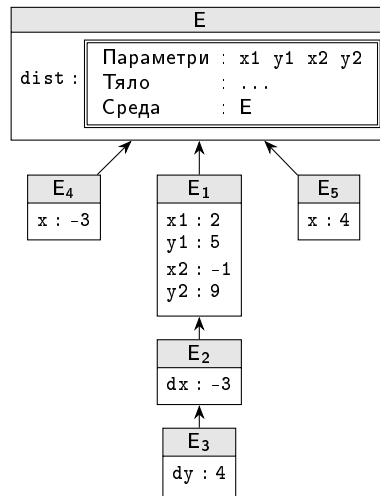


Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
               (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E3}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E4}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E5}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E3}    (sqrt (+ 9 16))
          ↓
{E3}    (sqrt 25)

```

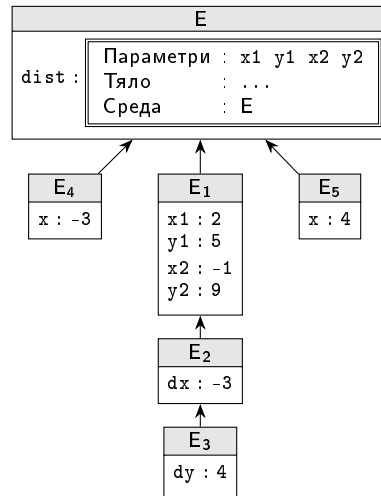


Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}    (let* ((dx (- x2 x1))
                (dy (- y2 y1)))
           (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E3}    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E4}    (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E5}    (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E3}    (sqrt (+ 9 16))
          ↓
{E3}    (sqrt 25)
          ↓
{E3}    5

```



Степенуване

Функцията x^n може да се дефинира по следния начин:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

Степенуване

Функцията x^n може да се дефинира по следния начин:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

```
(define (pow x n)
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (pow x (- n))))
        (else (* x (pow x (- n 1))))))
```

Оценка на степенуване

(row 2 6)

Оценка на степенуване

$$\begin{array}{c} (\text{pow } 2 \ 6) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5)) \end{array}$$

Оценка на степенуване

$(\text{pow } 2 \ 6)$
↓
 $(* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4)))$

Оценка на степенуване

$(\text{pow } 2 \ 6)$
↓
 $(* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4)))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 3))))$

Оценка на степенуване

$$\begin{array}{c} (\text{pow } 2 \ 6) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5)) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4))) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 3)))) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 2)))) \end{array}$$

Оценка на степенуване

$$\begin{array}{c} (\text{pow } 2 \ 6) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5)) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4))) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 3)))) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 2)))) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 1)))))) \end{array}$$

Оценка на степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{pow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5)) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 3)))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 2)))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 1)))))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 0))))))) \end{aligned}$$

Оценка на степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{pow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5)) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 3)))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 2)))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 1)))))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 0))))))) \\ & \downarrow \\ & (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ 1)))))) \end{aligned}$$

Оценка на степенуване

$(\text{pow } 2 \ 6)$
↓
 $(* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 4)))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 3))))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 2))))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 1))))))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 0)))))))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ 1))))))$
↓
 $(* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ (* \ 2 \ 2))))$

Оценка на степенуване

```

      (pow 2 6)
      ↓
    (* 2 (pow 2 5))
      ↓
  (* 2 (* 2 (pow 2 4)))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
  
```


Оценка на степенуване

(pow 2 6)
↓
(* 2 (pow 2 5))
↓
(* 2 (* 2 (pow 2 4)))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 8)))

Оценка на степенуване

(pow 2 6)
↓
(* 2 (pow 2 5))
↓
(* 2 (* 2 (pow 2 4)))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 8)))
↓
(* 2 (* 2 16))

Оценка на степенуване

(pow 2 6)
↓
(* 2 (pow 2 5))
↓
(* 2 (* 2 (pow 2 4)))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
↓
(* 2 (* 2 (* 2 8)))
↓
(* 2 (* 2 16))
↓
(* 2 32)

Оценка на степенуване

```

      (pow 2 6)
      ↓
    (* 2 (pow 2 5))
      ↓
  (* 2 (* 2 (pow 2 4)))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 8)))
      ↓
(* 2 (* 2 16))
      ↓
(* 2 32)
      ↓
    64
  
```

Оценка на степенуване

```

      (pow 2 6)
      ↓
    (* 2 (pow 2 5))
      ↓
  (* 2 (* 2 (pow 2 4)))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 8)))
      ↓
(* 2 (* 2 16))
      ↓
(* 2 32)
      ↓
      64
  
```

Линеен рекурсивен процес

Бързо степенуване

Алтернативна дефиниция на x^n :

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ (x^{\frac{n}{2}})^2, & \text{ако } n > 0, n \text{ — четно,} \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0, n \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

Бързо степенуване

Алтернативна дефиниция на x^n :

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ (x^{\frac{n}{2}})^2, & \text{ако } n > 0, n \text{ — четно,} \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0, n \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

```
(define (qpow x n)
  (define (sqr x) (* x x))
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (qpow x (- n))))
        ((even? n) (sqr (qpow x (quotient n 2))))
        (else (* x (qpow x (- n 1))))))
```

Оценка на бързо степенуване

(qrow 2 6)

Оценка на бързо степенуване

$(\text{qpow } 2 \ 6)$
↓
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$

Оценка на бързо степенуване

$(\text{qpow } 2 \ 6)$
↓
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2)))$

Оценка на бързо степенуване

$(\text{qpow } 2 \ 6)$
↓
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2)))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1))))$

Оценка на бързо степенуване

$(\text{qpow } 2 \ 6)$
↓
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2)))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1))))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0)))))$

Оценка на бързо степенуване

$(\text{qpow } 2 \ 6)$
↓
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2)))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1))))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0)))))$
↓
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ 1))))$

Оценка на бързо степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{qpow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0))))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } 2))) \end{aligned}$$

Оценка на бързо степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{qpow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0))))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ 4)) \end{aligned}$$

Оценка на бързо степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{qpow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0))))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ 4)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } 8) \end{aligned}$$

Оценка на бързо степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{qpow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0))))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ 4)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } 8) \\ & \downarrow \\ & 64 \end{aligned}$$

Оценка на бързо степенуване

$$\begin{aligned} & (\text{qpow } 2 \ 6) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 0))))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (* \ 2 \ 1)))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } 2))) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } (* \ 2 \ 4)) \\ & \downarrow \\ & (\text{sqr } 8) \\ & \downarrow \\ & 64 \end{aligned}$$

Логаритмичен рекурсивен процес

Числа на Фибоначи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Числа на Фибоначи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

Числа на Фибоначи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fib (- n 1)) (fib (- n 2))))))
```

Числа на Фибоначи

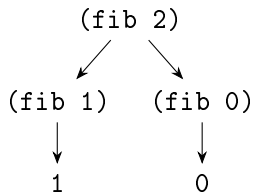
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

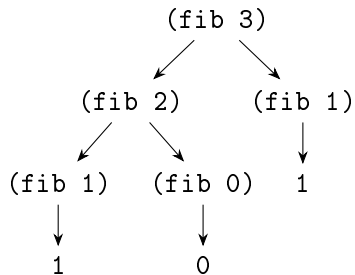
```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fib (- n 1)) (fib (- n 2))))))
```

$f_{40} = ?$

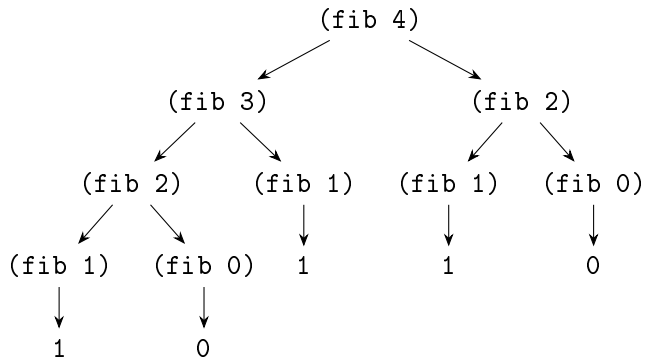
Дървовидна рекурсия



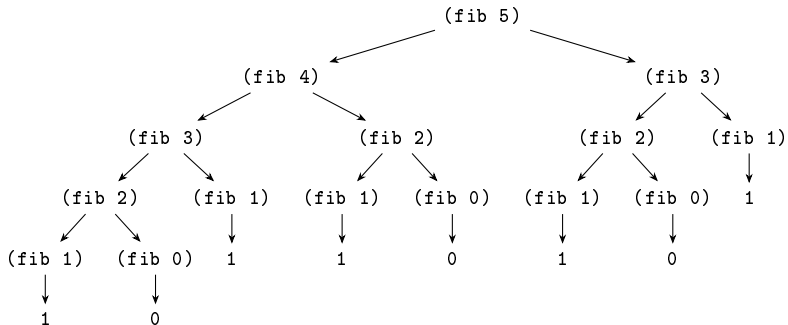
Дървовидна рекурсия



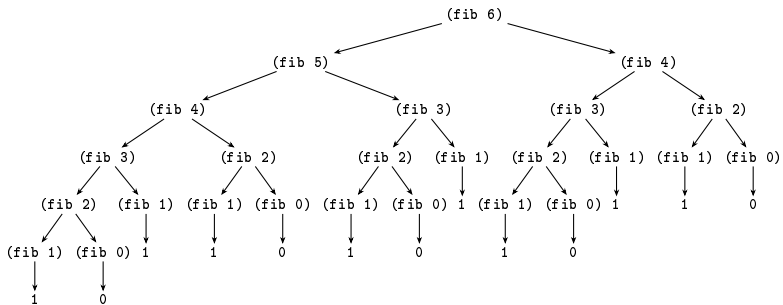
Дървовидна рекурсия



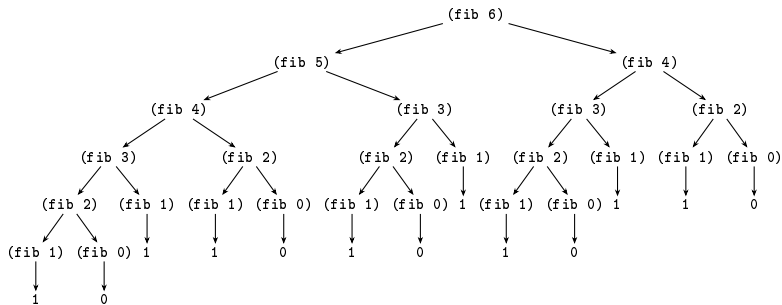
Дървовидна рекурсия



Дървовидна рекурсия



Дървовидна рекурсия



Дървовиден рекурсивен процес

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

За ефективна реализация обикновено са нужни странични ефекти.

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

За ефективна реализация обикновено са нужни странични ефекти.

Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

За ефективна реализация обикновено са нужни странични ефекти.

Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.

Нужно е да помним само последните две числа!

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

За ефективна реализация обикновено са нужни странични ефекти.

Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.

Нужно е да помним само последните две числа!

```
(define (fib n)
  (define (iter i fi fi-1)
    (if (= i n) fi
        (iter (+ i 1) (+ fi fi-1) fi)))
  (if (= n 0) 0
      (iter 1 1 0)))
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)  
  ↓  
(iter 1 1 0)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)  
  ↓  
(iter 1 1 0)  
  ↓  
(iter 2 1 1)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)  
  ↓  
(iter 1 1 0)  
  ↓  
(iter 2 1 1)  
  ↓  
(iter 3 2 1)  
  ↓  
(iter 4 3 2)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
  ↓
(iter 6 8 5)
```


Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
  ↓
(iter 6 8 5)
  ↓
(iter 7 13 8)
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
  ↓
(iter 6 8 5)
  ↓
(iter 7 13 8)
  ↓
13
```