Übungsblatt 4

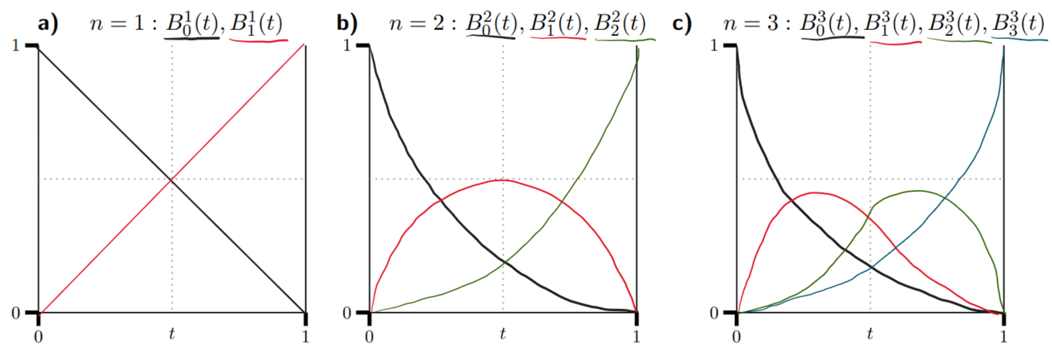
Tobias Baake (247074), Dylan Ellinger (247316), Nikiforos Tompoulidis (247714)

May 13, 2024

1 Aufgabe Bernstein-Polynome

Aufgabe 4.1: Bernstein Polynome **5 P**

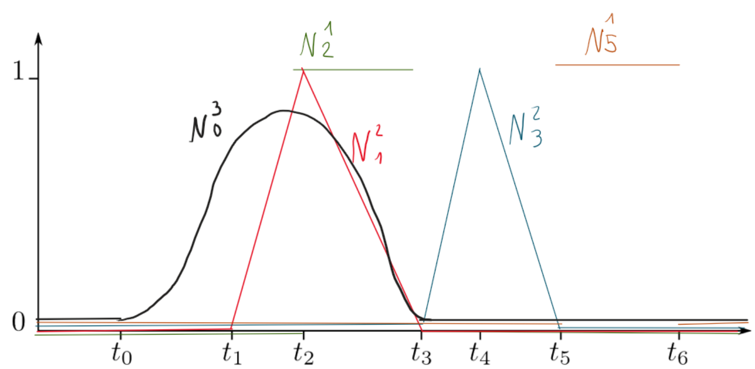
Skizzieren Sie die Bernsteinpolynome vom Grad:



2 Aufgabe B-Spline Basisifunktion

Aufgabe 4.2: B-Spline Basisfunktionen **4 P**

Skizzieren Sie folgende B–Spline-Funktionen über dem angegebenen Knotenvektor: N_0^3, N_1^2, N_2^1, N_3^2, N_5^1



3 Aufgabe Tensorproduktflächen

a)
$x(1,0) = b_{0,0}B_0^1(1) + +b_{1,0}B_1^1(1)B_0^1(0) + b_{0,1}B_0^1(1)B_1^1(0) + b_{1,1}B_1^1(1)B_1^1(0)$

mit $(B_0^1(1) = 1)$ und $(B_1^1(1) = 0)$
$x(1,0) = b_{0,0} + 0 + 0 + 0 = \underline{b_{0,0}}$

b)
$x(0.5, 0.5) = b_{0,0}B_0^1(0.5)B_0^1(0.5) + b_{1,0}B_1^1(0.5)B_0^1(0.5) + b_{0,1}B_0^1(0.5)B_1^1(0.5) + b_{1,1}B_1^1(0.5)B_1^1(0.5)$

mit $(B_0^1(0.5) = 0.5)$ und $(B_1^1(0.5) = 0.5)$
$x(0.5, 0.5) = \underline{0.25b_{0,0} + 0.25b_{1,0} + 0.25b_{0,1} + 0.25b_{1,1}}$

c)
$x\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right) = b_{0,0}B_0^1\left(\frac{2}{5}\right)B_0^1\left(\frac{1}{3}\right) + b_{1,0}B_1^1\left(\frac{2}{5}\right)B_0^1\left(\frac{1}{3}\right) + b_{0,1}B_0^1\left(\frac{2}{5}\right)B_1^1\left(\frac{1}{3}\right) + b_{1,1}B_1^1\left(\frac{2}{5}\right)B_1^1\left(\frac{1}{3}\right)$

mit $(B_0^1\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5})$, $(B_1^1\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5})$, $(B_0^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3})$ und $(B_1^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3})$
$x\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{3}{25}b_{0,0} + \frac{4}{25}b_{1,0} + \frac{2}{25}b_{0,1} + \frac{1}{25}b_{1,1}}$

4 Aufgabe Kreisbogen

Um zu beweisen, dass die gegebene rationale Bézierkurve $r(t)$ ein Viertel des Einheitskreises ist, müssen wir die Punkte auf der Kurve betrachten.

Ein Punkt auf einem Kreis mit Radius 1 (Einheitskreis) muss die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen.
Da wir einen Viertel des Einheitskreises betrachten müssen wir prüfen, dass die Punkte nur im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegen ($x \geq 0$ und $y \geq 0$).

geg. Kurve: $r(t)$:
$r(t) = (1-t)^2 \cdot b_0 + 2(1-t)t \cdot b_1 + t^2 \cdot b_2$

mit den Kontrollpunkten $b_0 = (1,0)$, $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (0,1)$ und den Gewichten $w_0 = 1$, $w_1 = \sqrt{2}/2$, $w_2 = 1$ im Intervall $t \in [0,1]$.

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
r(t) &= (1-t)^2 \cdot (1,0) + 2(1-t)t \cdot (1,1) + t^2 \cdot (0,1) \\
&= ((1-t)^2, 0) + 2(1-t)t \cdot (1,1) + (0, t^2) \\
&= ((1-t)^2 + 2(1-t)t, 2(1-t)t + t^2) \\
&= ((1-2t+t^2) + 2(t-2t^2), 2t-2t^2+t^2) \\
&= (1-2t+t^2+2t-4t^2, 2t-2t^2+t^2) \\
&= (1-2t+2t-4t^2, 2t-2t^2+t^2) \\
&= (1-4t^2, 2t-t^2)
\end{aligned}$$

Einsetzen der Bézierkurve in die Gleichung vom Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$:

$(1 - 4t^2)^2 + (2t - t^2)^2 = 1$
$17t^4 - 4t^3 - 4t^2 + 0 = 0$
$17t^4 - 4t^3 - 4t^2 = 0$

Lsg:
$t = 0$, $t = 1$, $t = \frac{2}{17}(1 + \sqrt{3})$ und $t = \frac{2}{17}(1 - \sqrt{3})$
Aufgrund des Intervalls betrachten wir nur die Lösungen $t = 0$ und $t = 1$.

Wenn $t = 0$, dann ist $r(t) = (1, 0)$, was auf dem Einheitskreis liegt.
Wenn $t = 1$, dann ist $r(t) = (0, 1)$, was ebenfalls auf dem Einheitskreis liegt.

$\Rightarrow$ Somit liegen die Endpunkte der Bézierkurve auf dem Einheitskreis.