Logik

Übungsblatt 11 – Teil 1
(für die 25. Kalenderwoche)

zur Lehrveranstaltung von Prof. Dr. Till Mossakowski
im Sommersemester 2024

Bitte vor der Übung bearbeiten.

11.1.
a) Gegeben sei der atomare Satz $P(a, b)$ und eine PL1-Struktur. Formulieren Sie in eigenen Worten unter welchen Bedingungen $P(a, b)$ in der Strukur wahr ist.

b) Ist jede Tautologie auch PL1-Wahrheit? Wenn ja, erklären Sie weshalb. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

c) Ist jeder WT-erfüllbare Satz auch PL1-erfüllbar? Wenn ja, erklären Sie weshalb. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

11.2. Gegeben sei die Welt in der Datei a-06-01-w01.wld sowie die Teilsprache von *Bivalenz World*, die nur die Prädikatsymbole Cube und Larger sowie die Individuenkonstante c enthält.

a) Geben Sie (ohne Zuhilfenahme der Funktion „PL1 Structure View“ von *Bivalenz World*) eine PL1-Struktur $\mathfrak{M}$ an, die diese Welt bezüglich der obigen Teilsprache beschreibt.

b) Nutzen Sie jetzt die Funktion „PL1 Structure View“ von *Bivalenz World*, um Ihre PL1-Struktur $\mathfrak{M}$ aus der Teilaufgabe 11.2a) zu überprüfen und gegebenenfalls zu korrigieren .

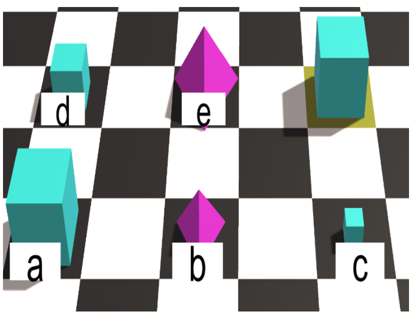
c) Wir betrachten folgende Veränderungsvorschläge für die gegebene Welt.

1. Bewegen Sie alles um eine Zeile nach hinten.
2. Vertauschen Sie die Positionen des Tetraeders und des großen Würfels.
3. Machen Sie aus dem Tetraeder ein Dodekaeder.
4. Fügen Sie der Welt einen Würfel hinzu.

Führen Sie von diesen Vorschlägen nur die Veränderungen durch, so dass die in Teilaufgabe 11.2a) betrachtete PL1-Struktur $\mathfrak{M}$ immer noch diese modifizierte Welt bezüglich der obigen Teilsprache beschreibt.

Hinweis: Alle Sätze in der Datei a-06-01-s01.sen müssen in dieser modifizierten Welt wahr sein.

11.3. Gegeben sei die Welt in der Datei aachen.wld sowie die Teilsprache von *Bivalenz World*, die nur die Prädikatsymbole Cube, Tet, Large, Larger, =, das Funktionssymbol fm sowie die Individuenkonstanten a - e enthält.



a) Geben Sie eine PL1-Struktur $\mathfrak{M}$ an, die diese Welt bezüglich der obigen Teilsprache beschreibt.

b) Überprüfen Sie durch sukzessives Anwenden der Definition des Wahrheitsbegriffs von A. Tarski, welche der folgenden Sätze S_i in der Struktur $\mathfrak{M}$ wahr sind und welche nicht, also ob jeweils $\mathfrak{M} \models S_i$ gilt oder nicht.

$\mathsf{S}_1 : \mathsf{Larger}(\mathsf{b}, \mathsf{c})$
$\mathsf{S}_2 : \mathsf{Cube}(\mathsf{fm}(\mathsf{b}))$
$\mathsf{S}_3 : \neg(\mathsf{fm}(\mathsf{a}) = \mathsf{a})$
$\mathsf{S}_4 : \neg(\neg\mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \wedge \mathsf{Cube}(\mathsf{c}))$
$\mathsf{S}_5 : \mathsf{Cube}(\mathsf{a}) \rightarrow (\mathsf{Tet}(\mathsf{fm}(\mathsf{e})) \wedge \mathsf{Cube}(\mathsf{e}))$

Übungsblatt 11 – Teil 2

11.4. Es seien eine PL1-Sprache mit den zweistelligen Prädikatsymbolen Mag und $\mathsf{Nachbar}$, dem Funktionssymbol bf (für 'bester Freund') und den Individuenkonstanten a, b, c, d und e, die PL1-Struktur $\mathfrak{M}$ durch

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}^{\mathfrak{M}} &= \mathsf{D} = \{\mathsf{anna}, \mathsf{berta}, \mathsf{cyrel}, \mathsf{david}, \mathsf{ellen}\},\\
\mathfrak{M}(=) &= \{(\mathsf{anna}, \mathsf{anna}), (\mathsf{berta}, \mathsf{berta}), (\mathsf{cyrel}, \mathsf{cyrel}), (\mathsf{david}, \mathsf{david}), (\mathsf{ellen}, \mathsf{ellen})\}\\
\mathfrak{M}(\mathsf{Mag}) &= \{(\mathsf{anna}, \mathsf{anna}), (\mathsf{anna}, \mathsf{berta}), (\mathsf{anna}, \mathsf{ellen}), (\mathsf{berta}, \mathsf{anna}), (\mathsf{berta}, \mathsf{berta}), (\mathsf{berta}, \mathsf{ellen}), (\mathsf{cyrel}, \mathsf{cyrel}),\\
&\quad (\mathsf{cyrel}, \mathsf{david}), (\mathsf{cyrel}, \mathsf{ellen}), (\mathsf{david}, \mathsf{david}), (\mathsf{david}, \mathsf{ellen}), (\mathsf{ellen}, \mathsf{ellen})\}\\
\mathfrak{M}(\mathsf{Nachbar}) &= \{(\mathsf{anna}, \mathsf{cyrel}), (\mathsf{cyrel}, \mathsf{anna}), (\mathsf{anna}, \mathsf{david}), (\mathsf{david}, \mathsf{anna}),\\
&\quad (\mathsf{berta}, \mathsf{cyrel}), (\mathsf{cyrel}, \mathsf{berta}), (\mathsf{berta}, \mathsf{david}), (\mathsf{david}, \mathsf{berta})\}\\
\mathfrak{M}(\mathsf{bf}) &: \mathsf{anna} \mapsto \mathsf{berta}, \mathsf{berta} \mapsto \mathsf{anna}, \mathsf{cyrel} \mapsto \mathsf{david}, \mathsf{david} \mapsto \mathsf{ellen}, \mathsf{ellen} \mapsto \mathsf{ellen},
\end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{M}(\mathsf{a}) = \mathsf{anna}, \quad \mathfrak{M}(\mathsf{b}) = \mathsf{berta}, \quad \mathfrak{M}(\mathsf{c}) = \mathsf{cyrel}, \quad \mathfrak{M}(\mathsf{d}) = \mathsf{david}, \quad \mathfrak{M}(\mathsf{e}) = \mathsf{ellen}$$

sowie die Sätze

1. $\mathsf{S}_1 : \mathsf{Mag}(\mathsf{c}, \mathsf{d})$
2. $\mathsf{S}_2 : \mathsf{Mag}(\mathsf{c}, \mathsf{e}) \wedge \mathsf{Nachbar}(\mathsf{c}, \mathsf{e})$
3. $\mathsf{S}_3 : (\mathsf{Mag}(\mathsf{a}, \mathsf{d}) \vee \neg\mathsf{Mag}(\mathsf{b}, \mathsf{d})) \wedge \mathsf{Nachbar}(\mathsf{b}, \mathsf{c})$
4. $\mathsf{S}_4 : \mathsf{bf}(\mathsf{bf}(\mathsf{a})) = \mathsf{a}$
5. $\mathsf{S}_5 : \mathsf{Mag}(\mathsf{bf}(\mathsf{c}), \mathsf{e})$

gegeben. Überprüfen Sie durch sukzessives Anwenden der Definition des Wahrheitsbegriffs von A. Tarski, welche der Sätze S_i in der Struktur $\mathfrak{M}$ wahr sind und welche nicht, also ob jeweils $\mathfrak{M} \models S_i$ gilt oder nicht.

11.5. Gilt folgende Folgerung in PL1? Wenn nicht, geben Sie eine PL1 Struktur als Gegenbeispiel an. Wenn ja, argumentieren Sie, weshalb es kein Gegenbeispiel geben kann.

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{b})\\
\neg(\mathsf{f}(\mathsf{a}) = \mathsf{a}) \wedge \neg(\mathsf{f}(\mathsf{b}) = \mathsf{a})\\
\hline
\mathsf{a} = \mathsf{b}
\end{array}$$

11.6. Wir betrachten eine PL1-Sprache mit dem einstelligen Prädikatsymbol P, dem zweistelligen Prädikatsymbol Q, dem einstelligen Funktionssymbol f sowie der Individuenkonstanten c.

Des Weiteren sei $\mathfrak{M}$ eine PL1-Struktur mit dem Gegenstandsbereich $\mathsf{D}^{\mathfrak{M}} = \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}(\mathsf{P}) = \{\mathsf{n}_1 \in \mathbb{N}_0 \mid \mathsf{n}_1 \text{ ist gerade}\},\\
&\mathfrak{M}(=) = \{(\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2) \mid \mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2 \in \mathbb{N}_0, \mathsf{n}_1 = \mathsf{n}_2\},\\
&\mathfrak{M}(\mathsf{Q}) = \{(\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2) \mid \mathsf{n}_1, \mathsf{n}_2 \in \mathbb{N}_0, 2 \cdot \mathsf{n}_1 = \mathsf{n}_2\},\\
&\mathfrak{M}(\mathsf{f})\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{M}(\mathsf{f})(\mathsf{n}_1) = \mathsf{n}_1 + 1 \quad \text{sowie}\\
&\mathfrak{M}(\mathsf{c}) = 0.
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie mittels der Definition die Werte $\mathfrak{M}(\mathsf{t})$ der Terme $\mathsf{t}_1 = \mathsf{c}$, $\mathsf{t}_2 = \mathsf{f}(\mathsf{c})$ sowie $\mathsf{t}_3 = \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}))$.

b) Welche der folgenden Sätze S_i sind in der Struktur $\mathfrak{M}$ wahr und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antworten mittels der Definition des Wahrheitsbegriffs von A. Tarski.

$\mathsf{S}_1 : \mathsf{P}(\mathsf{c})$
$\mathsf{S}_2 : \mathsf{Q}(\mathsf{c}, \mathsf{c})$
$\mathsf{S}_3 : \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{c})) \to \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c}), \mathsf{f}(\mathsf{c}))$
$\mathsf{S}_4 : \mathsf{Q}(\mathsf{f}(\mathsf{c}), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}))) \wedge \mathsf{P}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c})))$

11.7. Zeigen Sie, dass folgende Folgerung gilt, indem Sie zeigen, weshalb es kein Gegenbeispiel geben kann. (Bei einem Gegenbeispiel brauchen Sie nur die Symbole betrachten, die in der Folgerung vorkommen. Also in diesem Fall die Prädikatsymbole R, P, $=$ und die Individuenkonstanten a, b.)

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{R}(\mathsf{a}, \mathsf{b})\\
\mathsf{P}(\mathsf{b}, \mathsf{b}) \to \neg\mathsf{R}(\mathsf{b}, \mathsf{b})\\
\hline
\mathsf{a} = \mathsf{b} \to \neg\mathsf{P}(\mathsf{a}, \mathsf{a})
\end{array}$$