Übungsblatt 4

Tobias Baake (247074), Dylan Ellinger (247316), Nikiforos Tompoulidis (247714)

May 20, 2024

1 Delaunay-Triangulierung

2 Dreiecksqualität

a)

Eckpunkte:

(A(0, 1, 0)), (B(0, 0, 1)), und (C(1, 0, 0)).

Seitenlängen:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Die Seitenlängen des Dreiecks ABC sind dann:
(a = —BC—), (b = —AC—), und (c = —AB—).

Berechnung:
$a = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$
$b = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$
$c = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

Da alle Seiten gleich lang sind (es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck), ist jede Seite die kürzeste Kantenlänge, also ist $\min a, b, c = \sqrt{2}$.
Der Halbumfang (p) des Dreiecks ist:
$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Nun können wir den Radius (r) des Umkreises mithilfe der gegebenen Formel berechnen:
$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$
Mit $a = b = c = \sqrt{2}$, erhalten wir:
$r = \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{2})}{\sqrt{(3\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{2})}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{6}} = \frac{2}{\sqrt[4]{6}}$

Schließlich ist die Qualität (q) des Dreiecks:
$q = \frac{r}{\text{kürzeste Kantenlänge}} = \frac{2/\sqrt[4]{6}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{6}}}}$

b)
Eckpunkte:
$A(2,1)$, $B(\frac{5}{2}, 2)$, und $C(0,3)$

Seitenlängen:

$a = \sqrt{(\frac{5}{2} - 0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$
$b = \sqrt{(2 - \frac{5}{2})^2 + (1-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
$c = \sqrt{(0-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
Die kürzeste Kantenlänge des Dreiecks ist $\min a, b, c = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Halbumfang p:
$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{2}}{2}$
$p = \frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{4}$

Der Umkreisradius r eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, und c ist gegeben durch:
$r = \frac{abc}{4A}$
wo A der Flächeninhalt des Dreiecks ist:
$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Hierbei ist p der Halbumfang des Dreiecks.

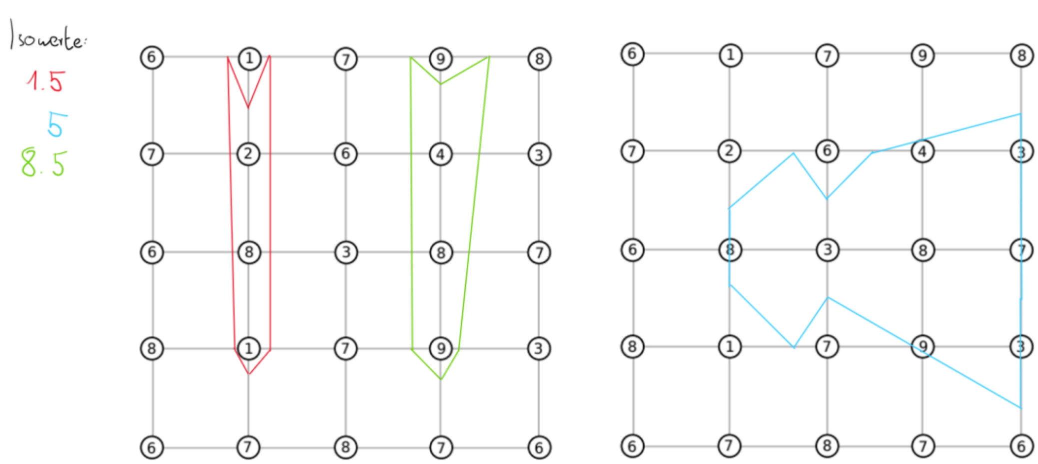
Kombiniert ergibt sich für r:
$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Schließlich ist die Qualität q des Dreiecks:
$p = \frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{4}$
$q = \frac{\sqrt{290}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}}$
$q = \frac{\sqrt{290}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{16\left(\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{29}+\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{4} - 2\sqrt{2}\right)}}$

3 Marching Viereck

Aufgabe 5.3: Marching-Viereck **5 P**
Gegeben ist ein diskretes skalares Feld abgetastet auf einem regulären Gitter. Die skalaren Werte sind in dem Bereich $\{0, \dots, 9\}$. Eine stückweise bilineare Interpolation wird in den Zellen angenommen.

Zeichnen Sie die stückweise linearen Approximationen der Isolinien für die Isowerte 1.5, 5 und 8.5 ein!
Lösen Sie dabei Mehrdeutigkeiten auf!



4 Marching Cubes

Aufgabe 5.4: Marching-Cubes **5 P**

Wenden Sie den Marching-Cubes Algorithmus für den Isowert 0 für die folgenden Zellen an!
Zeichnen Sie die Triangulierung der Schnitte der Isowerte mit den Zellenflächen ein, indem Sie (wenn nötig) Mehrdeutigkeiten innerhalb der Zellenflächen auflösen!