Logik

Übungsblatt 12 – Teil 1
(für die 26. Kalenderwoche)

zur Lehrveranstaltung von Prof. Dr. Till Mossakowski
im Sommersemester 2024

Bitte <u>vor</u> der Übung bearbeiten.

12.1. Geben Sie jeweils das Resultat der folgenden Substitutionen an.

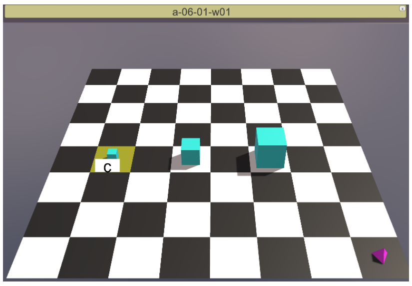
a) $\mathsf{Larger}(\mathsf{c}, \mathsf{x})[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{a}]$

b) $\mathsf{Between}(\mathsf{y}, \mathsf{x}, \mathsf{fm}(\mathsf{x}))[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{c}_1][\mathsf{y} \mapsto \mathsf{c}_2]$

c) $(\forall \mathsf{z}\ ((\mathsf{Smaller}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \land \mathsf{Smaller}(\mathsf{y}, \mathsf{z})) \to \mathsf{Smaller}(\mathsf{x}, \mathsf{z})))[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{c}_1][\mathsf{y} \mapsto \mathsf{c}_1]$

d) $(\exists \mathsf{x}\ \mathsf{Smaller}(\mathsf{a}, \mathsf{x}) \to \mathsf{Tet}(\mathsf{x}))[\mathsf{x} \mapsto \mathsf{c}_1][\mathsf{y} \mapsto \mathsf{b}]$

12.2. Gegeben sei die Welt in der Datei a-06-01-w01.wld sowie die Teilsprache von *Bivalenz World*, die nur die Prädikatsymbole Cube, Tet, Large, Larger und = sowie das Funktionssymbol lm und die Individuenkonstante c enthält.



a) Geben Sie eine PL1-Struktur $\mathfrak{M}$ an, die diese Welt bezüglich der obigen Teilsprache beschreibt.

b) Überprüfen Sie durch sukzessives Anwenden der Definition des Wahrheitsbegriffs von A. Tarski, welche der folgenden Sätze S_i in der Struktur $\mathfrak{M}$ wahr sind und welche nicht, also ob jeweils $\mathfrak{M} \models \mathsf{S}_i$ gilt oder nicht.

S_1: $\exists \mathsf{x}\ \mathsf{Cube}(\mathsf{x})$
S_2: $\forall \mathsf{x}\ (\mathsf{Large}(\mathsf{x}) \to \mathsf{Cube}(\mathsf{x}))$
S_3: $\exists \mathsf{x}\ (\mathsf{Cube}(\mathsf{x}) \land \mathsf{lm}(\mathsf{x}) = \mathsf{c})$
S_4: $\forall \mathsf{x}\ (\neg \exists \mathsf{y}\ \mathsf{Larger}(\mathsf{y}, \mathsf{x}) \to \mathsf{Cube}(\mathsf{x}))$

12.3. Angenommen bei der rechts stehenden Folgerung handelt es sich um gültige BW-Folgerung. Ist es auch eine gültige PL1-Folgerung? Wenn nein, gibt es eine Möglichkeit, sie in eine gültige PL1-Folgerung umzuwandeln?

$$\begin{array}{|l} \mathsf{P}_1 \\ \mathsf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathsf{P}_n \\ \hline \mathsf{Q} \end{array}$$

Diese Aufgaben werden in der Übung bearbeitet.

12.4. Überprüfen Sie, ob folgende Sätze PL1-Wahrheiten sind. Wenn nicht, geben Sie eine Struktur als Gegenbeispiel an, ansonsten begründen Sie, weshalb es kein Gegenbeispiel geben kann.

a) $(\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg P(a)) \rightarrow \neg Q(a)$

b) $\forall x\, R(x, a) \rightarrow \exists y\, R(y, y)$

12.5. Gilt nebenstehende Folgerung in PL1? Wenn nicht, geben Sie eine PL1 Struktur als Gegenbeispiel an. Wenn ja, argumentieren Sie, weshalb es kein Gegenbeispiel geben kann.

$$\begin{array}{|l} \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ f(a) = f(b) \\ P(b) \wedge P(f(b)) \\ \hline Q(a) \end{array}$$

12.6. Wir betrachten eine PL1-Sprache mit den zweistelligen Prädikatsymbolen Q und $=$ sowie der Individuenkonstanten b. Des Weiteren sei $\mathfrak{M}$ eine PL1-Struktur mit dem Gegenstandsbereich $D^{\mathfrak{M}} = \mathbb{N}_0$ sowie den Extensionen

$\mathfrak{M}(=) = \{(i, k) \mid i, k \in \mathbb{N}_0, i = k\}$ und
$\mathfrak{M}(Q) = \{(i, k) \mid i, k \in \mathbb{N}_0, 2 \cdot i = k\}$ und
$\mathfrak{M}(b) = 1.$

Überprüfen Sie durch sukzessives Anwenden der Definition des Wahrheitsbegriffs von A. Tarski, welche der folgenden Sätze S_i in der Struktur $\mathfrak{M}$ wahr sind und welche nicht, also ob jeweils $\mathfrak{M} \models S_i$ gilt oder nicht.

S_1: $\neg\exists x\, Q(x, b)$
S_2: $\forall x\, \exists y\, Q(x, y)$
S_3: $\forall x\, \exists y\, Q(y, x)$
S_4: $\exists x\, \forall y\, Q(x, y)$