Übungsblatt 7

Tobias Baake (247074), Dylan Ellinger (247316), Nikiforos Tompoulidis (247714)

June 3, 2024

1 Matrix-Vektor Multiplikation

a)

$$u \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten kann man auch als Vektoren darstellen. Die 3 Vektoren können als 3x3-Matrix dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b)

(1)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + (-4) \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 0 \\ -1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2 Matrix-Matrix Multiplikation

a) Wie bei 7.1 können wir die Koeffizienten umstellen. Hier als Matrix. Dasselbe mit den Ergebnisvektoren. Die Vektoren gruppieren wir zu einer 3x3-Matrix.

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ l & m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & a & r \\ y & b & s \\ z & c & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) (Zeile · Spalte)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 3\cdot 1 + (-4)\cdot(-1) & -1\cdot(-3) + 3\cdot 1 + (-4)\cdot 0 & -1\cdot(-4) + 3\cdot(-5) + (-4)\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot(-3) + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 2\cdot(-4) + 1\cdot(-5) + 2\cdot 2 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 1 + 1\cdot(-1) & -3\cdot(-3) + 5\cdot 1 + 1\cdot 0 & -3\cdot(-4) + 5\cdot(-5) + 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -19 \\ 3 & -5 & -9 \\ -2 & 14 & -11 \end{pmatrix}$$

3 Rotationsmatrix

3.1 a) Eigenschaften einer Rotationsmatrix

- Orthogonalität: Eine Rotationsmatrix R ist orthogonal, d.h. $R^T R = RR^T = I$, wobei R^T die transponierte von R und I die Einheitsmatrix ist
- Determinante: Die Determinante einer Rotationsmatrix ist immer gleich 1, d.h., $det(R) = 1$
- Erhaltung der Länge: Eine Rotationsmatrix verändert nicht die Länge eines Vektors, d.h., wenn v ein Vektor ist, dann bleibt $||Rv|| = ||v||$

3.2 b) Ergänzen Sie die fehlenden Einträge

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & ? \\ 0 & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Angenommen, wir betrachten eine Rotationsmatrix um die z-Achse, so hat sie die Form:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Angenommen, $\theta = 45°$ (oder $\frac{\pi}{4}$ im Bogenmaß), dann ist $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Also sieht die Matrix R_z so aus:

$$R_z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun ergänzen wir die Matrix A entsprechend:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Da diese Form jedoch nicht die Normale für Rotation um eine Achse ist, kann es besser sein, zu überprüfen, welche Form gegeben wird. In diesem Fall ist die 0 in der letzten Zeile besonders.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

In dieser Form bleibt nur die A_{22} und A_{23}. Somit wäre:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

3.3 c)

Um zu zeigen, dass zwei aufeinanderfolgende 2D-Rotationen additiv sind, müssen wir beweisen, das die Multiplikation von zwei Rotationsmatrizen $\mathbf{R}(\theta_1)$ und $\mathbf{R}(\theta_2)$ gleich der Rotationsmatrix $\mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2)$ ist.

Eine 2D-Rotationsmatrix $\mathbf{R}(\theta)$ für einen Winkel θ hat die Form:

$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Nun betrachten wir die Multiplikation von zwei solchen Matrizen:
$\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$

Durchführen der Multiplikation, unter Bestimmung der Einträge in der Matrix

$\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{pmatrix}$

Anwendung der Additiontheoreme für Cosinus und Sinus:

$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$
$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$
$-\sin(\theta_1 + \theta_2) = -(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)) = -\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$
$-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

Damiterhält man folgendes:

$\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2)$

Das zeigt, dass zwei aufeinanderfolgende 2D-Rotationen additiv sind, also $\mathbf{R}(\theta_1)\mathbf{R}(\theta_2) = \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2)$.

4 Ratios

a) Bestimmen Sie das Teilverhältnis $r = \textbf{ratio}(p_1, p_2, p_3)$ für die folgenden Punkte:

1. Für die Anordnung p_1, p_2, p_3:

$$r = \frac{p_1 - p_2}{p_3 - p_2} = \frac{0 - 1}{2 - 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

2. Für die Anordnung p_2, p_3, p_1:

$$r = \frac{p_2 - p_3}{p_1 - p_3} = \frac{1 - 2}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

3. Für die Anordnung p_3, p_1, p_2:

$$r = \frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{2-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

4. Für die Anordnung p_3, p_2, p_1:

$$r = \frac{p_3 - p_2}{p_1 - p_2} = \frac{2-1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

b) Bestimmen Sie das Doppelverhältnis cr = crossratio(p_1, p_2, p_3, p_4) für die folgenden Punkte:

1. Für die Anordnung p_1, p_2, p_3, p_4:

$$cr = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{(0-2)(1-3)}{(0-3)(1-2)} = \frac{(-2)(-2)}{(-3)(-1)} = \frac{4}{3}$$

2. Für die Anordnung p_1, p_3, p_4, p_2:

$$cr = \frac{(p_1 - p_4)(p_3 - p_2)}{(p_1 - p_2)(p_3 - p_4)} = \frac{(0-3)(2-1)}{(0-1)(2-3)} = \frac{(-3)(1)}{(-1)(-1)} = \frac{-3}{1} = -3$$

3. Für die Anordnung p_4, p_1, p_2, p_3:

$$cr = \frac{(p_4 - p_2)(p_1 - p_3)}{(p_4 - p_3)(p_1 - p_2)} = \frac{(3-1)(0-2)}{(3-2)(0-1)} = \frac{(2)(-2)}{(1)(-1)} = \frac{-4}{-1} = 4$$

4. Für die Anordnung p_1, p_4, p_3, p_2:

$$cr = \frac{(p_1 - p_3)(p_4 - p_2)}{(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)} = \frac{(0-2)(3-1)}{(0-1)(3-2)} = \frac{(-2)(2)}{(-1)(1)} = \frac{-4}{-1} = 4$$