Logik

Übungsblatt 5 – Teil 1
(für die 19. Kalenderwoche)

zur Lehrveranstaltung von Prof. Dr. Till Mossakowski
im Sommersemester 2024

Bitte <u>vor</u> der Übung bearbeiten.

5.1. Es seien die atomaren Sätze A, B und C gegeben. Bestimmen Sie für jeden der folgenden Sätze, ob es sich um ein Literal, einen Satz in Negations-Normalform (NNF), einen Satz in Konjunktiver Normalform (KNF) oder/und einen Satz in Disjunktiver Normalform (DNF) handelt.
(Die Frage betrifft den gesamten Satz, nicht seine Bestandteile.)

a) $\neg A \vee (\neg B \wedge C)$
b) $\neg A \vee ((B \vee \neg C) \wedge A)$
c) A
d) $(\neg C \rightarrow B) \vee (D \rightarrow \neg B)$
e) $\neg A \vee D$

5.2. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen jeweils schrittweise durch eine Kette von bekannten (also in der Vorlesung genannten oder bereits formal bewiesenen) Äquivalenzen, also durch äquivalentes Umformen.

a) $\neg(\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{A}) \;\Leftrightarrow\; \perp$
b) $\mathsf{A} \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee \mathsf{A}$
c) $\neg(\mathsf{A} \rightarrow \neg\mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$
d) $(\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}) \vee (\mathsf{B} \rightarrow \mathsf{A}) \;\Leftrightarrow\; \neg\perp$

5.3. Es seien die atomaren Sätze A und B gegeben. Überführen Sie jeden der folgenden Sätze nachvollziehbar durch schrittweises äquivalentes Umformen jeweils in einen äquivalenten Satz in Negations-Normalform (NNF), in einen äquivalenten Satz in Disjunktiver Normalform (DNF) sowie auch in einen äquivalenten Satz in Konjunktiver Normalform (KNF).

a) $\neg(\neg\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$
b) $(\mathsf{A} \leftrightarrow \neg\mathsf{B})$
c) $\neg((\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{B}) \vee (\neg\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}))$

5.4. Es seien die atomaren Sätze A, B, C sowie D gegeben. Überführen Sie jeden der folgenden Sätze nachvollziehbar durch schrittweises äquivalentes Umformen jeweils in einen äquivalenten Satz in Negations-Normalform (NNF), in einen äquivalenten Satz in Disjunktiver Normalform (DNF).

a) $(\mathsf{A} \land \neg \mathsf{B} \land \neg \mathsf{C}) \lor (\mathsf{B} \land \mathsf{D})$

b) $((\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to \mathsf{A}) \to \mathsf{A}$

c) $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to ((\mathsf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathsf{A} \to \mathsf{C}))$

5.5. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen jeweils schrittweise durch eine Kette von bekannten (also in der Vorlesung genannten oder bereits formal bewiesenen) Äquivalenzen, also durch äquivalentes Umformen.

a) $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{C}) \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \to \mathsf{C}$

b) $\neg(\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; ((\mathsf{A} \land \neg \mathsf{B}) \lor (\neg \mathsf{A} \land \mathsf{B}))$

c) $(\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \lor (\mathsf{C} \land \mathsf{D}) \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A} \lor \mathsf{C}) \land (\mathsf{A} \lor \mathsf{D}) \land (\mathsf{B} \lor \mathsf{D}) \land (\mathsf{B} \lor \mathsf{C})$

5.6. Der zweistellige wahrheitsfunktionale Junktor NAND ist wie folgt definiert (A NAND B) ist falsch genau dann, wenn A und B wahr sind (ansonsten wahr). Zeigen Sie, dass { NAND } wahrheitsfunktional vollständig ist. (Hinweis: Sie können voraussetzen, dass $\{\lor, \neg\}$ und $\{\land, \neg\}$ wahrheitsfunktional vollständig sind.)

5.7. Auf den Folien wird das ausschliessende Oder erwähnt, den wir durch den zweistelligen wahrheitsfunktionalen Junktor XOR repräsentieren.

a) Geben Sie die Wahrheitstabelle für XOR an.

b) Zeigen Sie, dass { XOR $, \to\}$ wahrheitsfunktional vollständig ist. (Hinweis: Sie können voraussetzen, dass $\{\lor, \neg\}$ und $\{\land, \neg\}$ wahrheitsfunktional vollständig sind.)