

Übungsblatt 2

Tobias Baake (247074), Dylan Ellinger (247316), Nikiforos Tompoulidis (247714)

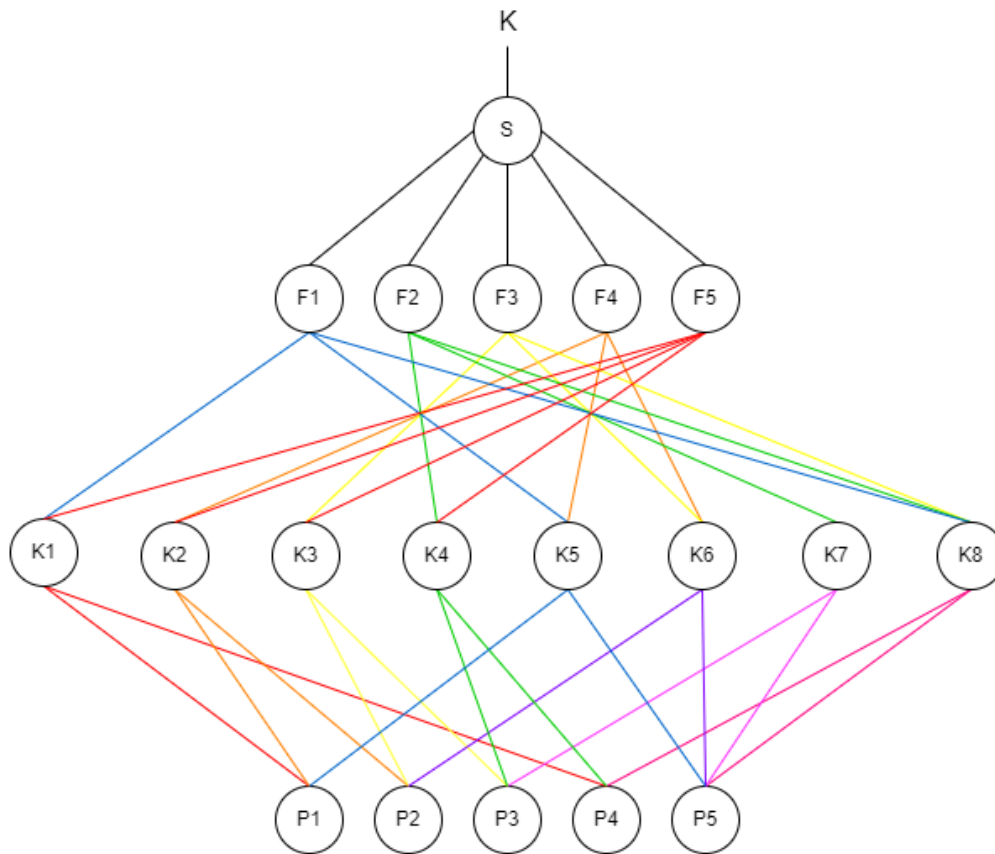
April 22, 2024

1 Aufgabe

$$G = V - E + F - (L - F) - 2 \cdot (S - 0)$$

	V (Vertices)	E (Edges)	F (Facette)	L (Loop)	S (Shell)	G (Genus)
a)	16	24	10	8	1	2
b)	24	36	13	12	1	0
c)	24	34	14	12	1	4
d)	32	46	16	16	1	4
e)	24	36	14	12	1	2
f)	32	48	16	16	1	2

2 Aufgabe



3 Aufgabe

a) Wenn der Normalenvektor der Ebene Senkrecht zum Richtungsvektor der Gerade ist, so sind Ebene und Gerade parallel zueinander. Andernfalls schneiden sie sich in einem Punkt.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}_0\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{4^2+1^2+2^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{4^2+1^2+2^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{13}{\sqrt{399}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{399}}\right) \approx \underline{\underline{49,397}}$$

Da der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Gerade in einem spitzen Winkel zueinander

stehen, schneidet die Gerade die Ebene in einem Punkt.

b)

1. Wenn der Graph die Ebene, die das Dreieck aufspannt schneidet, ist das eine hinreichende Bedingung dafür, das die Gerade das Dreieck schneidet. 2. Ist der Schnittpunkt mit der Ebene im Dreieck, dann sind alle baryzentrischen Koordinaten zwischen Punkt und Dreieck im Intervall $[0;1]$.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Kantenvektoren des Dreiecks

$$\vec{k}_{ac} = \vec{ac} = \begin{pmatrix} 1,3+1 \\ 1,5-1 \\ 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 1,5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_b = \vec{ab} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 0-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor des Dreiecks bestimmen

$$\vec{k}_{ab} \times \vec{k}_{ac} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 1 - 9 \cdot (-1) \\ 9 \cdot 3 - 2,3 \cdot 1 \\ 2,3 \cdot (-1) - 0,5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 24,7 \\ -3,8 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform der Ebene, in der das Dreieck liegt

$$E : 0 = 9,5x + 24,7y - 3,8z + a$$

Stützvektor \vec{a} einsetzen

$$E : 0 = 9,5(-1) + 24,7(1) - 3,8(-1) + a$$

$$0 = 19 + a \quad | -19$$

$$\underline{a = -19}$$

Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen

$$E : 0 = 9,5x + 24,7y - 3,8z - 19$$

$$0 = 9,5(-3 + 4t) + 24,7(t) - 3,8(2 + 2t)$$

$$0 = -55,1 + 55,1t$$

$$55,1 = 55,1t$$

$$\underline{t = 1}$$

Einsetzen von $t = 1$ in g

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(1|1|4)}}$$

Dreieck ABC mit $A(-1|1|-1)$, $B(2|0|0)$, $C(1,3|1,5|8)$

Schnittpunkt S mit $S(1|1|4)$

Bestimmung des Vektors vom Stützpunkt (der Ebene) zum Schnittpunkt

$$\vec{AS} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-1 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Flächenvektoren zu Bestimmung der Baryzentrischen Koordinaten

$$\vec{n}_0 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -9, 5 \\ -24, 7 \\ 3, 8 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}_0| = \sqrt{(-9, 5)^2 + (-24, 7)^2 + 3, 8^2}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AS} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -9, 5 \\ -24, 7 \\ 3, 8 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}_1| = \sqrt{(-2, 5)^2 + (-6, 5)^2 + 1^2}$$

$$\vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix} -9, 5 \\ -24, 7 \\ 3, 8 \end{pmatrix} \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{(-5)^2 + (-13)^2 + 2^2}$$

Bestimmung der baryzentrischen Koordinaten

$$u = \frac{|\vec{n}_1|}{|\vec{n}_0|} = \frac{10}{19}$$

$$v = \frac{|\vec{n}_2|}{|\vec{n}_0|} = \frac{5}{19}$$

$$w = 1 - u - v = 1 - \frac{10}{19} - \frac{5}{19} = \frac{4}{19}$$

$0 \leq u, v, w \leq 1 \Rightarrow$ Schnittpunkt liegt im Dreieck

c)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$K : (x+1)^2 + (y+1, 5)^2 + (z-2)^2 = 3^2$ (entspricht der Koordinatenform)

Die Gerade in die Formel der Kugel einsetzen

$$((-3+4t)^2 + (t+1, 5)^2 + (2t)^2) = 9$$

Klammern lösen und Zusammenfassen

$$21t^2 - 29t + 18, 25 = 9 \quad | -9$$

$$21t^2 - 29t + 9, 25 = 0 \quad | :21$$

$$t^2 - \frac{29}{21}t + \frac{37}{84} = 0 \quad | \text{pq-Formel mit } p = -\frac{29}{21} \text{ und } q = \frac{37}{84}$$

$$t_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{37}{42} \text{ und } t_2 = \frac{1}{2}$$

$0 \leq t_1, t_2 \leq 1 \Rightarrow$ Die Gerade schneidet die Kugel in zwei Punkten.