Grundlagen der Theoretischen Informatik

Stefan Schirra

Fakultät für Informatik
Otto-von-Guericke Universität
Magdeburg

Wintersemester 2024/25

Grau, teurer Freund,
ist alle Theorie.

Abzählbarkeit

Welche Menge enthält mehr Elemente?

$\{0, 17, 34, 51, 68, \ldots\}$ oder $\{0, 14, 28, 42, 56, \ldots\}$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ oder $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sie heißt *unendlich*, wenn sie nicht endlich ist.

Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A.

Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig ist zu $\mathbb{N}$.

Satz:
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar unendlich.*

Satz:
Die Vereinigungsmenge abzählbar unendlich vieler abzählbar unendlicher Mengen ist abzählbar unendlich.

Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar unendlich ist, heißt *überabzählbar*.

Satz:
$2^{\mathbb{N}}$ *ist überabzählbar.*

Satz: [Georg Cantor]
$\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

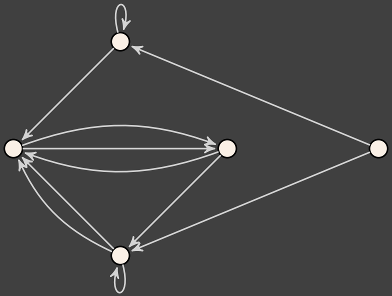
Graphen

Ein *gerichteter Multigraph* $G=(V,E)$ besteht aus einer Menge von *Knoten* V und einer Menge von *Kanten* E und zugehörigen Funktionen $source: E \to V$ und $target: E \to V$, die jeder Kante $e \in E$ einen initialen Knoten $source(e)$ und einen terminalen Knoten $target(e)$ zuordnen.

Zwei oder mehr Kanten mit gleichen initialen und terminalen Knoten heißen *Mehrfachkanten*.

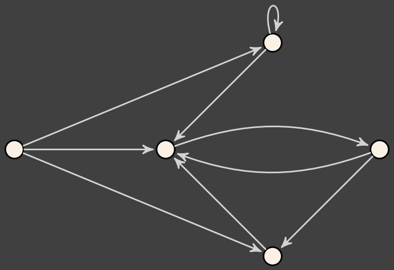
Eine Kante e mit $source(e) = target(e)$ heißt *Schlinge*.

Veranschaulicht werden Graphen durch eine Menge von Punkten, den Knoten, zwischen denen Linien, die Kanten, verlaufen. Die terminalen Knoten werden dabei durch Pfeilspitzen gekennzeichnet.



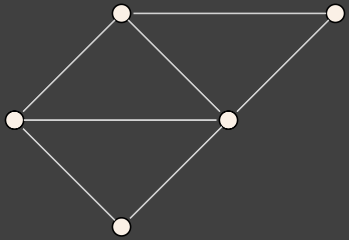
Ein *gerichteter Graph* ist ein gerichteter Multigraph ohne Mehrfachkanten. Die Kantenmenge E können wir nun als Teilmenge von $V \times V$ auffassen.

Gerichtete Graphen sind in natürlicher Weise isomorph zu binären Relationen auf ihren Knotenmengen.



Ein *ungerichteter Graph* besteht aus einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten E, deren Elemente zweielementige Teilmengen von V sind.

Bei einem ungerichteten Graphen sind die Knoten einer Kante nicht ausgezeichnet. Ferner gibt es keine Schlingen.



Ein *Pfad* in einem gerichteten Multigraphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ für ein $n \geq 0$, wobei $v_i \in V$ für alle $i = 0, \ldots, n$ und $e_j \in E$ mit $source(e_j) = v_{j-1}$ und $target(e_j) = v_j$ für für alle $j = 1, \ldots, n$.

Ein Pfad $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ heißt *einfacher Pfad*, falls $v_0, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind.

Ein Pfad $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ heißt *Kreis*, falls $v_0 = v_n$ und $n \geq 1$.

Ein Kreis $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ heißt *einfacher Kreis*, falls $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind.

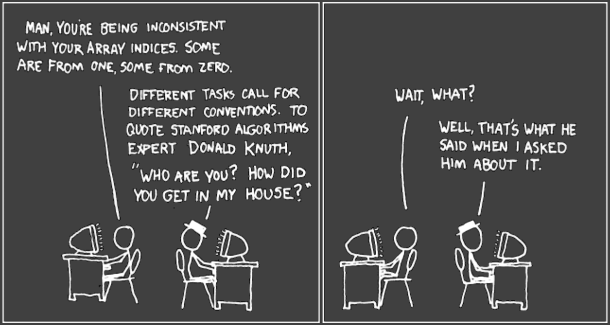
Ein *Pfad* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0, v_1, \ldots, v_n$ für ein $n \geq 0$, wobei $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$.

Ein Pfad in einem ungerichteten Graphen heißt *einfacher Pfad*, falls $v_0, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind.

Ein Pfad $v_0, v_1, \ldots, v_n$ in einem ungerichteten Graphen heißt *Kreis*, falls $n \geq 3$ und $v_0 = v_n$.

Ein Kreis in einem ungerichteten Graphen heißt *einfacher Kreis*, falls $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind.

Ein ungerichteter oder gerichteter Graph heißt *azyklisch*, falls er keinen Kreis enthält.


MAN, YOU'RE BEING INCONSISTENT WITH YOUR ARRAY INDICES. SOME ARE FROM ONE, SOME FROM ZERO.
DIFFERENT TASKS CALL FOR DIFFERENT CONVENTIONS. TO QUOTE STANFORD ALGORITHMS EXPERT DONALD KNUTH, "WHO ARE YOU? HOW DID YOU GET IN MY HOUSE?"
WAIT, WHAT?
WELL, THAT'S WHAT HE SAID WHEN I ASKED HIM ABOUT IT.

xkcd.com

Ein ungerichteter Graph heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Knoten des Graphen durch einen Pfad verbunden sind.

Der *Ausgangsgrad* eines Knotens v in einem gerichteten Multigraphen ist die Anzahl der Kanten, für die v initialer Knoten ist, also $|\{e \in E \mid source(e) = v\}|$.

Der *Eingangsgrad* eines Knotens v in einem gerichteten Multigraphen ist die Anzahl der Kanten, für die v terminaler Knoten ist, also $|\{e \in E \mid target(e) = v\}|$.

Der *Grad* eines Knotens v in einem ungerichteten Graphen ist $|\{e \in E \mid v \in e\}|$.

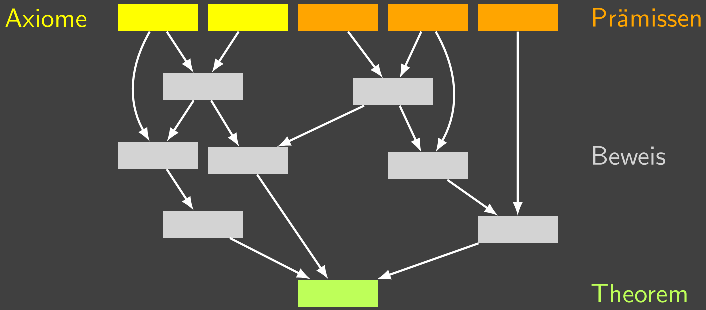
Ein *Baum* ist ein zusammenhängender, azyklischer, ungerichteter Graph.

Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, der einen ausgezeichneten Knoten enthält, der *Wurzel* genannt wird. Die von der Wurzel verschiedenen Knoten vom Grad 1 werden *Blätter* genannt.

In einem Wurzelbaum lassen sich die Kanten von der Wurzel zu den Blättern orientieren. Bezüglich dieser Orientierung gibt es für alle Knoten außer der Wurzel genau einen Vorgänger, der *Elterknoten* genannt wird, und für alle Knoten außer den Blättern Nachfolger, die *Kinder* genannt werden.

Ein Wurzelbaum heißt *geordneter Wurzelbaum*, falls unter den Kindern jedes Knotens eine Ordnung festgelegt ist.

Beweise und Beweistechniken



nach einer Wikipediaabbildung von Stephan Kulla

Implikation

$$P \quad \Rightarrow \quad K$$

Prämissen *Konklusion*

wenn P gilt, dann gilt auch K

wenn P, dann K

aus P folgt K

P impliziert K

P ist hinreichend für K

K ist notwendig für P

P nur dann, wenn K

$$\neg K \quad \Rightarrow \quad \neg P$$

Beweistechniken

- Direkter Beweis
- Indirekter Beweis: Beweis der Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch (reductio ad absurdum)
  - Diagonalisierung
- Induktion
  - vollständige Induktion
  - strukturelle Induktion
- Existenzbeweis
  - Konstruktive Beweise
  - Nichtkonstruktive Beweise
- Schubfachprinzip

Direkte Beweise

Satz: *Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.*

Seien $a = n$, $b = n+1$ und $c = n+2$ die drei Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned} a+b+c &= n+(n+1)+(n+2) \\ &= 3n+3 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

Also ist $a+b+c$ durch 3 teilbar.

Indirekte Beweise

Satz: *Sei $a \in \mathbb{N}$. Wenn a^2 gerade ist, dann ist auch a gerade.*

Wir zeigen: Falls a ungerade ist, so ist auch a^2 ungerade:

Falls a ungerade ist, so ist $a = 2n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $a^2 = 4n^2 - 4n + 1$. Da $4n^2 - 4n$ gerade ist,
ist a^2 also ungerade.

Beweise durch Widerspruch

Satz: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Nehmen wir an, die Anzahl der Primzahlen sei endlich. Sagen wir, es gäbe k Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Betrachte

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

Diese Zahl ist durch keine der k Primzahlen teilbar, also muss es Primzahlen geben, die wir nicht mitgezählt haben. Widerspruch!

Diagonalisierung

Satz: $2^{\mathbb{N}}$ *ist überabzählbar.*

Nehmen wir an, es gäbe eine Abzählung

$$2^{\mathbb{N}} = \{R_1, R_2, R_3, \ldots\}$$

Betrachten wir

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin R_n\}$$

Es ist $D \in 2^{\mathbb{N}}$, aber D ist von allen Mengen in der Aufzählung $R_1, R_2, R_3, \ldots$ verschieden. Widerspruch!

Induktive Beweise

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid E \text{ gilt für } n\}$$

Falls

(1) $1 \in A$

(2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

dann ist $A = \mathbb{N}$.

(1) *Induktionsverankerung*:
E gilt für $n = 1$

(2) *Induktionsannahme*:
Für beliebiges, aber festes n gilt E

Induktionsschritt:
Falls die Induktionsannahme gilt, dann gilt E auch für $n+1$

Satz: $1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsverankerung:
Für $n=1$ gilt $1=1^2$.

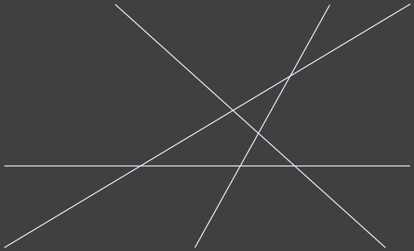
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+2n-1+2(n+1)-1 &= n^2+2(n+1)-1 \\
&= n^2+2n+1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

wobei die Gleichheit in der ersten Zeile nach Induktionsannahme gilt.

Anordnungen von Geraden (allgemeine Lage):

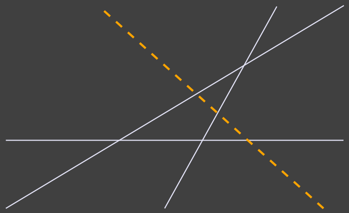
Gegeben seien n Geraden in der Ebene, so dass es unter diesen keine zwei parallelen Geraden gibt und keine drei, die sich in einem Punkt schneiden. Die Geraden unterteilen die Ebene in disjunkte Regionen.



Satz: *Die Anzahl der Regionen in einer Anordnung von n Geraden mit obigen Eigenschaften ist $1+n(n+1)/2$.*

Induktionsverankerung:
Eine Gerade unterteilt die Ebene in zwei Regionen.

Induktionsschritt:
Gegeben seien nun $n+1 \geq 2$ Geraden, die unsere Bedingungen erfüllen. Wir entfernen eine der Geraden. Die entstehende Anordnung besitzt nach Induktionsannahme $1+n(n+1)/2$ Regionen.



Wir fügen nun die entfernte Gerade ℓ wieder hinzu. Dadurch werden manche Regionen in zwei Regionen unterteilt. Wieviele? Eine mehr als es Schnittpunkte zwischen ℓ und den übrigen Geraden gibt. Es gibt n solche Schnittpunkte und somit wächst die Anzahl der Regionen um $n+1$:

$$1+n(n+1)/2+n+1 = 1+(n+1)((n+1)+1)/2$$

Variationen:

Falls

(1) $1 \in A$

(2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq A \Rightarrow n+1 \in A$

dann ist $A = \mathbb{N}$.

Falls

(1) $k \in A$

(2) für alle $n \in \{k, k+1, \ldots\}$ gilt: $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

dann ist $\{k, k+1, \ldots\} \subseteq A$.

Strukturelle Induktion

(1) Jede Zahl ist ein Ausdruck

(2) Falls E_1 und E_2 Ausdrücke sind, dann ist $E_1 + E_2$ ein Ausdruck

(3) Falls E ein Ausdruck ist, dann ist (E) ein Ausdruck

Satz: *Jeder Ausdruck enthält die gleiche Anzahl von öffnenden und schließenden Klammern.*

Induktionsverankerung:
Eine Zahl enthält weder öffnende noch schließende Klammern.

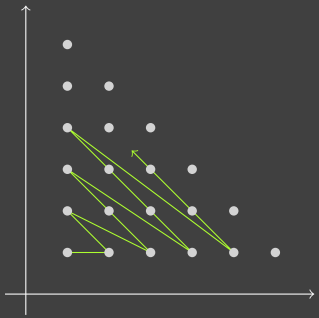
Induktionsschritt:
Falls der Ausdruck von der Form $E_1 + E_2$ ist, so enthalten E_1 und E_2 nach Induktionsannahme jeweils gleichviele öffnende und schließende Klammern, also auch $E_1 + E_2$.

Falls der Ausdruck von der Form (E) ist, so enthält E nach Induktionsannahme gleichviele öffnende und schließende Klammern. Da (E) von jeder Sorte genau eine Klammer mehr enthält als E, gilt die Behauptung auch für (E).

Konstruktive Beweise

Satz: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar unendlich.*

$$f((i,j)) = \frac{1}{2}(\,(i+j)^2 - 3i - j) + 1$$



Nichtkonstruktive Beweise

Satz: *Es gibt irrationale Zahlen* $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *mit* $a^b \in \mathbb{Q}$.

Fall 1: $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ ist irrational:

$$a = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}, \quad b = \sqrt{2}, \quad a^b = 3$$

Fall 2: $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ ist rational:

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}$$

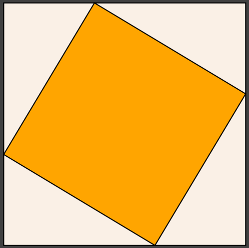
Schubfachprinzip

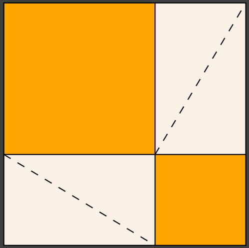
Seien A und B endliche Mengen und sei $|A| > |B|$. Dann gibt es keine injektive Funktion von A nach B.

Satz: *Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Dann enthält G einen Kreis genau dann wenn G einen Pfad der Länge mindestens n enthält.*

„Beweise“ ohne Worte

Satz: [Pythagoras]
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypothenusenquadrat.





Satz: $\binom{n}{2} = 1+2+3+\cdots+(n-1)$

Satz: $\forall L : (L^R)^* = (L^*)^R$

Beweis:

$$\left(L^R\right)^* = \bigcup_{k\geq 0} \left(L^R\right)^k \qquad \left(L^*\right)^R = \{u^R \mid u \in \bigcup_{k\geq 0} L^k\}$$

$$\begin{aligned}
w \in \left(L^R\right)^* &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists w_1, \ldots, w_k \in L^R :\ w = w_1 \cdots w_k \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists w_1, \ldots, w_k \in L^R :\ w^R = (w_1 \cdots w_k)^R \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists w_1, \ldots, w_k \in L^R :\ w^R = w_k^R \cdots w_1^R \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists w_1^R, \ldots, w_k^R \in L :\ w^R = w_k^R \cdots w_1^R \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists w_1^R, \ldots, w_k^R \in L :\ w = (w_k^R \cdots w_1^R)^R \\
&\Leftrightarrow \exists u\ \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists u_1, \ldots, u_k \in L :\ w = u^R \wedge u = u_1 \cdots u_k \\
&\Leftrightarrow \exists u \in L^* :\ w = u^R \\
&\Leftrightarrow w \in (L^*)^R
\end{aligned}$$

Sprachen und Probleme

Problem:

$$\mathcal{P} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}$$

Wortproblem:

$$\mathcal{P} : \Sigma^* \rightarrow \{\text{wahr}, \text{ falsch}\}$$

Gegeben eine Sprache L und ein Wort w, gilt

$$w \in L?$$

Formale Sprachen und Algorithmische Probleme

Wortprobleme sind spezielle Entscheidungsprobleme. Aber auch alle Entscheidungsprobleme sind Wortprobleme: Eingaben müssen irgendwie dargestellt werden, jede Eingabe ist ein Wort über einem fest gewählten, zugrundeliegenden Alphabet Σ.

$$L_{\mathcal{P}} = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{P}(w) = \text{wahr}\}$$

Beispiel:

$$\textsc{primes} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist die Binärdarstellung einer Primzahl}\}$$

$$10 \in \textsc{primes} \qquad 1000 \notin \textsc{primes} \qquad 1011 \in \textsc{primes}$$

Beispiel:

$$\text{HALTALL} = \{w \in \Gamma^* \mid w \text{ ist ein syntaktisch korrektes C-Programm, das bei allen Eingaben hält}\},$$

wobei Γ der ASCII Zeichensatz ist.

$$\texttt{int main() \{ return 0; \}} \in \text{HALTALL}$$

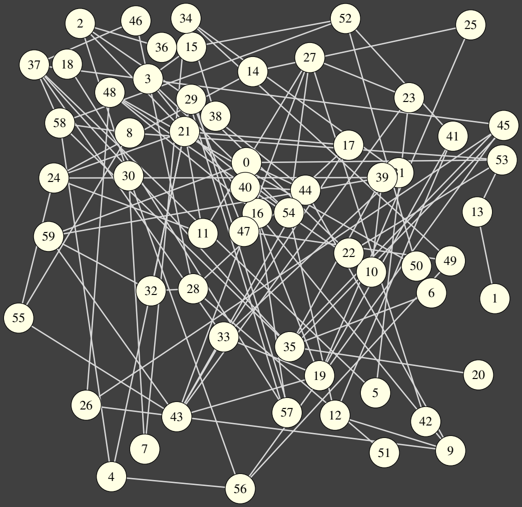
$$\texttt{int main() \{ while (1 == 1) \{\} \}} \notin \text{HALTALL}$$

Beispiel:

$\textsc{sum} = \{w \in \{0,1,2,\ldots,9,+,=\}^* \mid w$ ist von der Form $w_1 + w_2 = w_3$ wobei w_1, w_2, w_3 jeweils dezimal dargestelle natürliche Zahlen sind und die Summe der durch w_1 und w_2 dargestellten Zahlen die durch w_3 dargestellte Zahl ist$\}$

$$\begin{aligned} 1+1=2 &\quad \in \quad \textsc{sum} \\ 11+22=33 &\quad \in \quad \textsc{sum} \\ 1+01=2 &\quad \notin \quad \textsc{sum} \\ 23+22=42 &\quad \notin \quad \textsc{sum} \\ 19-8=11 &\quad \notin \quad \textsc{sum} \end{aligned}$$

Beispiel:


2
46
34
52
25
36
15
37
18
27
14
3
48
29
23
38
58
8
21
41
45
17
53
0
31
39
24
30
40
44
13
16
54
59
11
47
22
49
50
10
6
1
32
28
55
33
35
19
20
5
26
43
57
12
42
7
51
9
4
56

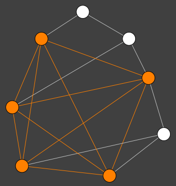
Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n.

$G = (\{1, 2, \ldots, n\}, E)$. Kante $e \in E$, die Knoten j und k verbindet, wird kodiert durch $\text{bin}(j)/\text{bin}(k)$ oder $\text{bin}(k)/\text{bin}(j)$.

$\textsc{Connected} = \{w \in \{0, 1, \#, /\}^* \mid$ das Wort w ist von der Form $\text{bin}(n)\#\#e_1\#e_2\#\cdots\#e_m$, wobei jedes Wort e_i aus der Binärdarstellung einer Zahl kleiner gleich n besteht, gefolgt von $/$ gefolgt von der Binärdarstellung einer Zahl kleiner gleich n, so dass der durch w kodierte ungerichtete Graph mit n Knoten zusammenhängend ist$\}$

Bei Optimierungsproblemen können wir korrespondierende Entscheidungsprobleme betrachten.

Beispiel:



$\text{CLIQUE} = \{w \in \{0,1,\#,/,\$\}^* \mid w$ ist von der Form $g\$u$, wobei $u = \text{bin}(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und g einen ungerichteten Graphen $G = (V,E)$ kodiert, der eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq k$ besitzt, so dass für alle $v_i, v_j \in V'$, $v_i \neq v_j$, die Kante zwischen v_i und v_j zu E gehört$\}$

$\{0,1\}^*$

Es genügt, das Alphabet $\{0,1\}$ zu betrachten.

Alles ist ein Wort

Alles ist eine Zahl

k-adische Zahldarstellung

Wir definieren eine Zahldarstellung bezüglich eines Alphabets von k Symbolen. Jedem Symbol wird bijektiv ein Wert in $\{1,2,\ldots,k\}$ zugeordnet. Wir bezeichnen die Symbole der Einfachheit halber mit $1,2,\ldots,k$.

Jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i\, k^i$$

für ein $m \geq 0$ und $a_i \in \{1,2,\ldots,k\}$ für alle $i = 0,\ldots,m$.
Die *k-adische Darstellung* von n ist dann $a_m a_{m-1} \cdots a_0$.

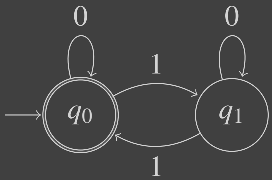
Wir erhalten eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}_0$ und $\{1,2,\ldots,k\}^*$, wenn wir zusätzlich festlegen, dass ε, das leere Wort, die Zahl 0 darstellt.

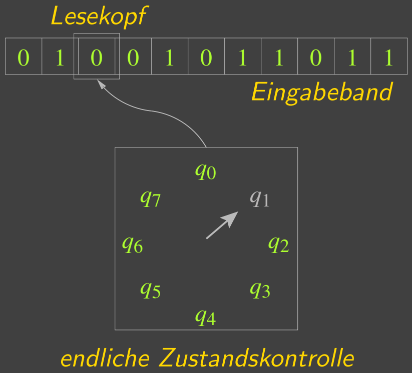
2

Automatentheorie und Formale Sprachen

Endliche Automaten

Betrachte $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist gerade}\}$.





Endliche Automaten lesen Symbol für Symbol von einem Eingabeband. Automaten besitzen einen Zustand. Zustand ändert sich beim Lesen in Abhängigkeit vom gelesenen Symbol und dem bisherigen Zustand.

Deterministische endliche Automaten

Definition:
Ein deterministischer endlicher Automat *ist ein 5-Tupel* $(K, \Sigma, \delta, s, F)$, *wobei gilt:*

- K *ist eine endliche Menge von* Zuständen,
- Σ *ist ein Alphabet,*
- $\delta : K \times \Sigma \to K$ *ist die* Überführungsfunktion *oder auch* Übergangsfunktion,
- $s \in K$ *ist der* Startzustand, *und*
- $F \subseteq K$ *ist die Menge der* Endzustände.

Beispiel:

$$\begin{aligned} K &= \{q_0, q_1\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ s &= q_0 \\ F &= \{q_0\} \end{aligned}$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_0

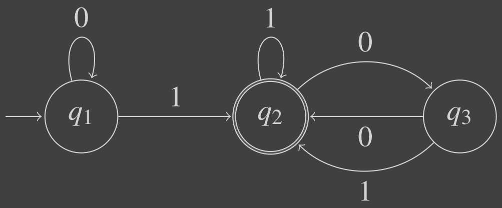
δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

Darstellung durch gerichteten Multigraphen:

Zustand | Startzustand | Endzustand

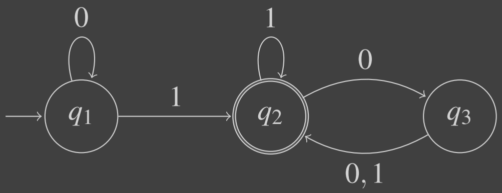
Gerichtete Kanten sind mit einem Symbol σ beschriftet und repräsentieren den Übergang unter σ von dem Zustand, bei dem die Kante beginnt, zu dem Zustand, bei dem die Kante endet.

Beispiel:



Mehrfachkanten fassen wir meist zu einer Kante zusammen, die mit den durch Kommata getrennten Symbolen der Mehrfachkanten beschriftet ist.

Beispiel:



Sei $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ ein deterministischer endlicher Automat.

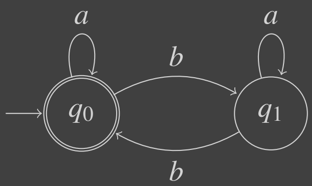
Ein Element von $K \times \Sigma^*$ heißt *Konfiguration* von M.

Wir definieren eine binäre Relation $\vdash_M$ auf den Konfigurationen von M. Seien (q, w) und (q', w') zwei Konfigurationen von M. Dann ist

$$(q, w) \ \vdash_M \ (q', w')$$

genau dann wenn es ein Symbol $\sigma \in \Sigma$ gibt, so dass $w = \sigma w'$ und $\delta(q, \sigma) = q'$. Wir sagen, (q, w) *geht in einem Schritt* in (q', w') *über*.

Beispiel:



$$\begin{aligned}
(q_0, ababbab) &\vdash_M (q_0, babbab)\\
&\vdash_M (q_1, abbab)\\
&\vdash_M (q_1, bbab)\\
&\vdash_M (q_0, bab)\\
&\vdash_M (q_1, ab)\\
&\vdash_M (q_1, b)\\
&\vdash_M (q_0, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Wie üblich sei $\vdash_M^*$ die reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$.

Ein Wort w *wird von* einem deterministischen endlichen Automaten, kurz DEA, $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ *akzeptiert* genau dann wenn es ein $f \in F$ gibt, so dass $(s, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon)$.

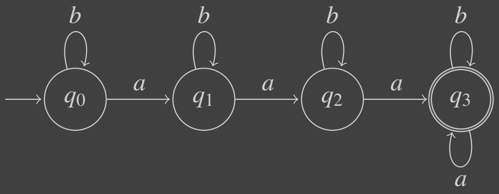
Die von M *akzeptierte Sprache* $L(M)$ ist die Menge aller Wörter über Σ^*, die von M akzeptiert werden:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists f \in F \text{ mit } (s, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon)\}$$

Ein deterministischer endlicher Automat M *akzeptiert eine Sprache* L genau dann wenn $L(M) = L$.

Definition:
Eine Sprache L heißt regulär, *wenn es einen endlichen Automaten M gibt mit $L = L(M)$.*

Beispiel:

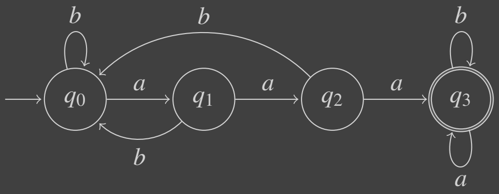


$$
\begin{aligned}
K &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
\Sigma &= \{a, b\} \\
s &= q_0 \\
F &= \{q_3\}
\end{aligned}
$$

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_1
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_3

$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält mindestens 3 } a\}$

Beispiel:

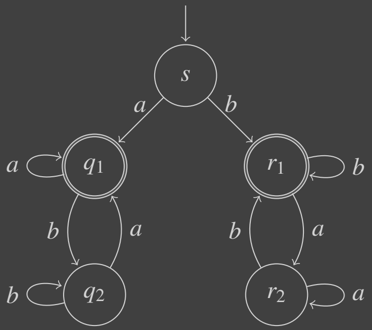


$$
\begin{aligned}
K &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
\Sigma &= \{a, b\} \\
s &= q_0 \\
F &= \{q_3\}
\end{aligned}
$$

δ	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_0
q_3	q_3	q_3

$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält 3 aufeinanderfolgende $a\}$

Beispiel:



$a \in L(M)$

$ab \notin L(M)$

$b \in L(M)$

$ba \notin L(M)$

$aa \in L(M)$

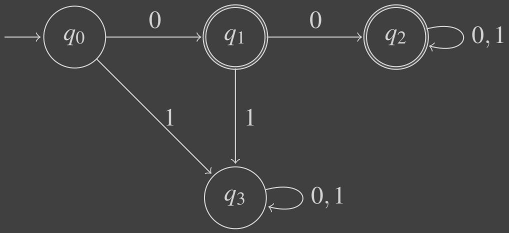
$aab \notin L(M)$

$bb \in L(M)$

$aba \in L(M)$

$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt und endet mit dem gleichen Symbol}\}$

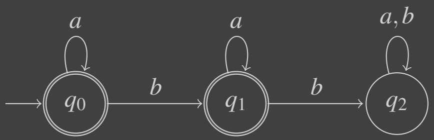
Beispiel:



$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0 \text{ oder } w \text{ beginnt mit } 00\}$$

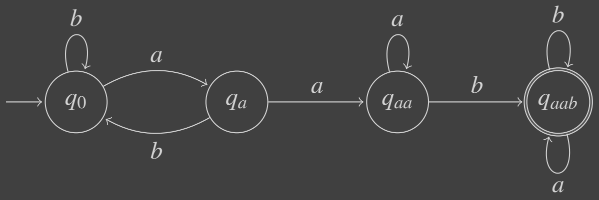
Beispiel:

$$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält höchstens ein } b\}$$



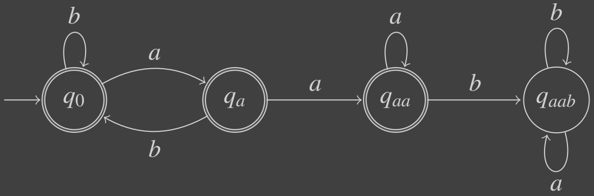
Beispiel:

$$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } aab\}$$



Beispiel:

$$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } aab\}$$



Beispiel:

$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält geradzahlig viele a und ungeradzahlig viele $b\}$