1

（1）$(2x-1)^2-(x-3)(3x+5)$ を計算しなさい.

$=4x^2-4x+1-(3x^2+5x-9x-15)$

$=x^2+16$

補足　時間に余裕があれば，$x=1$ などを代入して確認するとよい。与えられた式に $x=1$ を代入すると

$$(2-1)^2-(-2\times8)=1+16=17$$

展開した式に代入すると

$$1^2+16=17$$

代入した結果が同じになったので確認ヨシ.

（2）$-ab^2+7ab+18a$ を因数分解しなさい.

$=-a(b^2-7b-18)$

$=-a(b-9)(b+2)$

解説　まず共通因数が a，先頭がマイナスであることから $-a$ でくくることを考える。$b^2-7b-18$ は，「たして -7，かけて -18 になる」二つの数を使って，$(b-9)(b+2)$ と因数分解する。因数分解した式を展開したり代入したりすることで確認してもよい。

（3）二次方程式 $3(x^2+4x-12)=4(x-9)$ を解きなさい。

すべて展開して解く.

$$3x^2+12x-36=4x-36$$
$$3x^2+8x=0$$
$$x(3x+8)=0$$
$$x=0,\ -\frac{8}{3}$$

（4）$\dfrac{\sqrt{3}+9}{\sqrt{48}+6}$ を計算しなさい。

$$=\frac{\sqrt{3}+9}{4\sqrt{3}+6}=\frac{(\sqrt{3}+9)(4\sqrt{3}-6)}{(4\sqrt{3}+6)(4\sqrt{3}-6)}=\frac{12-6\sqrt{3}+36\sqrt{3}-54}{48-36}$$

$$=\frac{30\sqrt{3}-42}{12}=\frac{5\sqrt{3}-7}{2}$$

解説 $\sqrt{48}$ を $4\sqrt{3}$ に直してから解く。

2

（1）$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めなさい。

756 を素因数分解する。

$756=2^2\times3^2\times21$ であるから，

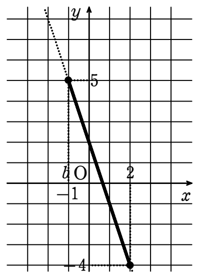
$$n=21,\ 21\times2^2,\ 21\times3^2,\ 21\times2^2\times3^2$$
$$=21,\ 84,\ 189,\ 756$$

解説　二乗の部分が残ればよい。たとえば，$n=21$ のとき，

$$\frac{756}{n}=2^2\times3^2=6^2$$

である。あとは，2^2 が残るとき，3^2 が残るときと，$n=756$ のとき（$n=756$ のとき，$\sqrt{\dfrac{756}{n}}=\sqrt{1}=1$）である。

（2）$a<0$ とする。一次関数 $y=ax+2$ は x の変域が $b\leqq x\leqq2$ のとき，y の変域が $-4\leqq y\leqq5$ である。このとき，定数 a,b の値をそれぞれ求めなさい。



$a<0$ より，$x=2$ のとき $y=-4$ であるから，$y=ax+2$ に代入して

$-4=2a+2$　　$\therefore a=-3$

よってこの一次関数の式は

$y=-3x+2$

$x=b$ のとき $y=5$ であるから，

$y=-3x+2$ に代入して

$5=-3b+2$　　$\therefore b=-1$

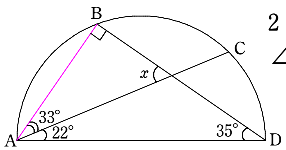
解説　$a<0$，つまり傾きが負だから，x と y は次のように対応することに注意。

$b\leqq x\leqq2$

$-4\leqq y\leqq5$

（3）右の図は AD を直径とする半円である。

$\angle\mathrm{ADB}=35^\circ$，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}:\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=3:2$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



2 点A, B を結ぶ。円周角の定理より，

$\angle\mathrm{ABD}=90^\circ\cdots$①　　$\therefore\ \angle\mathrm{BAD}=55^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}:\overset{\frown}{\mathrm{CD}}=3:2$ より

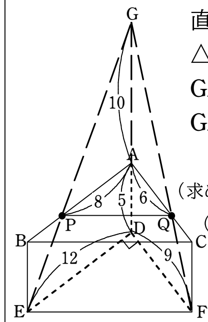
$\angle\mathrm{BAC}:\angle\mathrm{CAD}=3:2$

$\angle\mathrm{CAD}=22^\circ$ より　　$\angle\mathrm{BAC}=33^\circ$

これと（①）より　　$\angle x=57^\circ$

解説　いろいろな解き方があると思う。

（4）三角柱 ABC−DEF について，AB=12 cm, AC=9 cm, AD=5 cm, ∠BAC=90° である。辺AB上に点Pを AP=8 cm となるようにとり，辺AC上に点Qを AQ=6 cmとなるようにとる。4 点 P, E, F, Q を通る平面で三角柱を 2 つの立体に分けるとき，点Dをふくむ方の立体の体積を求めなさい。



直線EBと直線QFの交点をGとする。

△GPA∽△GED より

GA:GD=PA:ED　GA:(GA+5)=8:12

GA:(GA+5)=2:3　3GA=2GA+10

$\therefore$ GA=10

（求める立体の体積）＝

（三角錐 G−DEF の体積）−（三角錐 G−APQ の体積）

であるから

$$（求める立体の体積）=\left(\frac{1}{2}\times12\times9\right)\times15\times\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\times8\times6\right)\times10\times\frac{1}{3}$$

$$=54\times5-8\times10=270-80=190$$

解説　「相似な立体の体積比」を利用してもよい。

（5）a と b は正の偶数とする。二次方程式 $x^2+ax+b=0$ が二つの解をもち，1 つは $x=-2$ でもう 1 つは 3 の倍数である。このとき，a の値が最も小さくなる時の b の値を求めなさい。ただし，解き方も示すこと。

$x=-2$ は二次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の一つだから，

$(-2)^2-2a+b=0$　　　（$x=-2$ を代入した）

$b=2a-4$

これを $x^2+ax+b=0$ に代入

$x^2+ax+2a-4=0$

$x^2-4+a(x+2)=0$

$(x+2)(x-2)+a(x+2)=0$

$(x+2)(x+a-2)=0\cdots$①

また，$x=3k$（k は整数）も解の一つだから，

$(x+2)(3k+a-2)=0$　　　（$x=3k$ を一部代入した）

$\therefore x+2=0\cdots$②，$3k+a-2=0\cdots$③

②は解 $x=-2$ を示している。③について考える。

③より　　$3k=2-a\cdots$④

④の左辺は 3 の倍数なので，右辺も 3 の倍数になる必要がある。

これと仮定から，a は 3 で割ると 2 余る正の偶数である。

$a=2$ のとき $b=0$ となり，「b は正の偶数」という仮定に反す

るので不適。
$a=8$ のとき，$k=-2$，$b=12$ となるので問題に適する.

解説　いうまでもなく難問である。④を示した周辺を解説する。④の右辺，つまり $2-a$ が3の倍数になるときは，こう考える。「$2-a$」の「2」がジャマ。そこで，a を3で割ると2余る数にすることで，「2」と「a の3で割った余りである2」が打ち消しあい，結果として a の3の倍数の部分だけが残る。

$\boxed{3}$

2つの自然数 a, b に対して，〈a◎b〉は a を b で割った余りを表すものとする。（以下割愛）

（1）〈59◎b〉=7 をみたす b をすべて求めなさい。
59 を b で割った商を x とする。

$$59=bx+7 \qquad (b>7)$$
$$52=bx$$
$$bx=2\times2\times13$$
$$\therefore\quad (b,x)=(13,4),(26,2),(54,1)$$

解説　13÷4=3 あまり 1 という式は，13=4×3+1 と書くことができる。（←これ大事）
あまりが 7 であるから，$b>7$である。余りは割る数より大きくなることはない。たとえば，59=4×13+7 だからといって，59÷4=13 あまり 7 というのはおかしい。
59÷4=14 あまり 3 である。

（2）x を自然数とする。〈x◎3〉=1 と〈x◎4〉=1をともに満たす x で 100 以下のものの個数を求めなさい。
x を 3 で割った商を n，x を 4 で割った商を m とする。

$$x=3n+1,\ x=4m+1$$

である。ここで両辺から 1 を引くと

$$x-1=3n=4m$$

つまり $x-1$ は 3 の倍数でもあるし 4 の倍数でもあるから，12 の倍数である。$x-1=12k$（k は整数）とおくと

$$x-1=12k$$
$$x=12k+1$$

よって x を 12 で割ると 1 余る。100 以下の 12 で割って 1 あまる数は，次の 9 個である。

$$1,13,25,37,49,61,73,85,97$$

（3）x,y を自然数とする。〈x◎4〉=y と〈$(x+y)$◎7〉=$3y$ をともに満たす x,y のうち，x が 2 桁で最も大きくなる時の x の値を求めなさい。
$3y<7$ より，$y=1,2$ である。
x を 4 で割った商を n，$x+y$ を 7 で割った商を m とする。
$y=1$ のとき
$x=4n+1,\ x+1=7m+3$
よって x は 4 でわって 1 余り，$x+1$ は 7 で割って 3 あまる。
表にまとめてみる。

x (4で割ると1あまる数)	97	93
$x+1$	98	94
$x+1$を7で割った余り	0	3

よって $y=1$ のとき $x=93$

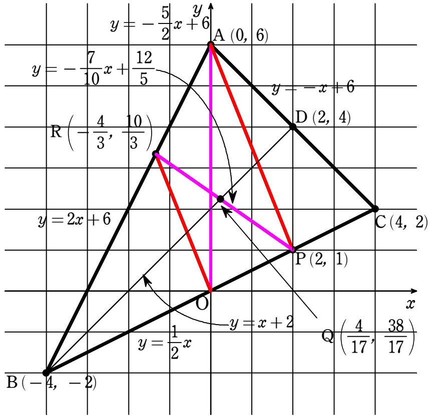
$y=2$ のとき
$x=4n+2,\ x+2=7m+6$
よって x は 4 でわって 2 余り，$x+2$ は 7 で割って 6 あまる。
表にまとめてみる。

x (4で割ると2あまる数)	98	94	90	86	82	78	74
$x+2$	100	96	92	88	84	80	76
$x+2$を7で割った余り	2	5	1	4	0	3	6

よって $y=2$ のとき $x=74$
故に求める答えは　$x=93,y=1$

$\boxed{4}$

右の図のように，O を原点とする座標平面上に，3 点 A(0, 6), B(−4, −2), C(4, 2) がある。このとき，次の問いに答えなさい。



（1）直線AB，直線BCの式をそれぞれ求めなさい。

（省略）AB; $y=2x+6$　　BC; $y=\frac{1}{2}x$

（2）線分BC上に x 座標が 2 である点Pをとり，線分AB上に点Rを直線PRが△ABCの面積を 2 等分するようにとる。

（i）BR : RAを最も簡単な整数の比で表しなさい。また，点Rの座標を求めなさい。

BCの中点は，$\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right)=$O(0, 0)

よって　$\frac{1}{2}$△ABC=△AOC=△AOP+△APC

また　$\frac{1}{2}$△ABC=（四角形ARPCの面積）=△ARP+△APC

よって　△AOP=△ARP

故に　RはAPと並行でOをとおる直線上に R がある。

直線APの式は $y=-\frac{5}{2}x+6$

よって直線ORの式は $y=-\frac{5}{2}x$

これと直線ABの式との交点は

$$2x+6=-\frac{5}{2}x \qquad \therefore x=-\frac{4}{3}, y=\frac{10}{3}$$

よってR $\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$

さらに

2 点B, Rの x 座標の差は

$$-\frac{4}{3}-(-4)=\frac{8}{3}$$

2 点R, Aの x 座標の差は

$$0-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

以上より　BR : RA$=\frac{8}{3}:\frac{4}{3}=2:1$

（ii）線分ACの中点を D とし，直線BDと直線PRとの交点を Q とする。点 Q の座標を求め，四角形 CDQPの面積を求めなさい。ただし，解き方も示すこと。

BDの式は　$y=x+2$，　　PRの式は　$y=-\frac{7}{10}x+\frac{12}{5}$

よって直線BDと直線PRとの交点 Q の座標は

$$x+2=-\frac{7}{10}x+\frac{12}{5} \qquad \therefore x=\frac{4}{17}, y=\frac{38}{17}$$

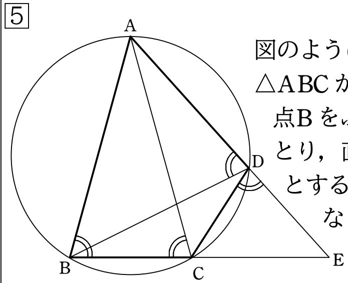
故に　Q $\left(\frac{4}{17}, \frac{38}{17}\right)$

（四角形 CDQPの面積）

$=$△DQP+△DPC

$=\frac{1}{2}\times 3\times\left(2-\frac{4}{17}\right)+\frac{1}{2}\times 3\times 2=\frac{3}{2}\times\frac{30}{17}+3=\frac{45}{17}+3=\frac{99}{17}$

$\boxed{5}$



図のように AB=ACの二等辺三角形 △ABC が円に内接している。また，点B をふくまない弧 AC 上に点D をとり，直線ADと直線BCとの交点を E とする。このとき，次の問いに答えなさい。

（1）△ABE∽△ADB を証明しなさい。

（証明）

△ABE と △ADB において

∠BAE=∠DAB（共通）…①

仮定より

二等辺三角形の底角は等しいので　∠ABE=∠ACB …②

円周角の定理より　∠ACB=∠ADB …③

②③より ∠ABE=∠ACB …④

①④より　2 組の角がそれぞれ等しいので

△ABE∽△ADB　　（終）

（2）BD=12 cm，CD=6 cm，DE=$4\sqrt{3}$ cm とする。

（i）線分ADと線分ABの長さを求めなさい。

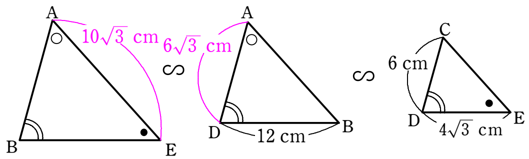
△ABE と △CDE において，

∠AEB=∠CED（共通）…⑤

円に内接する四角形の性質より　∠ABE=∠CDE …⑥

⑤⑥より　△ABE∽△CDE　である。

これと（1）のことより　△ABE∽△ADB∽△CDE



△ADB∽△CDE で　AD : 6=12 : $4\sqrt{3}$　　$4\sqrt{3}$ AD=72

$$\text{AD}=\frac{72}{4\sqrt{3}}=\frac{18}{\sqrt{3}}=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

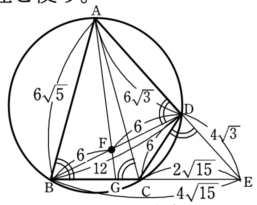
また　AE=AD+DE=$4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$ cm

△ABE∽△ADB で　AB : $6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$: AB　　$\text{AB}^2=180$

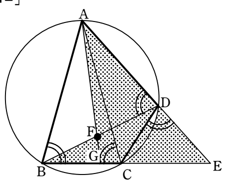
AB=$6\sqrt{5}$ cm

（ii）線分BD上に　BF＝CD となる点F をとり，直線AF と直線BCとの交点を G とする。このとき，面積の比
$\triangle ABC : \triangle BFG$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

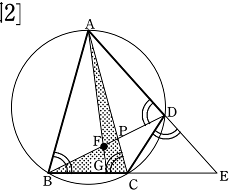
方針　BDとACの交点を P とする。
FG: AG，BG: BC を求めたい.
BG: BC は直接求めるのは厳しそうなので BG: GE をもとめて具体的な長さを求める.
FG: AGを求めるには[図2]の部分でメネラウスの定理を使えばよいが，AP: PCがわからない。AP: PCを求めるために，[図3]でメネラウスの定理を使う。



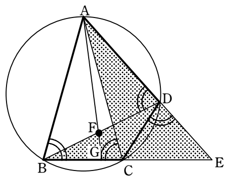
[図1]



[図2]



[図3]



[図1]でメネラウスの定理

$$\frac{AE}{DA}\times\frac{GB}{EG}\times\frac{FD}{BF}=1$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\times\frac{GB}{EG}\times\frac{6}{6}=1$$

$$\frac{GB}{EG}=\frac{3}{5}$$

$$GB:EG=3:5$$

また　$\triangle ABE \backsim \triangle ADB$ で　$6\sqrt{5}:6\sqrt{3}=BE:12$

$72\sqrt{5}=6\sqrt{3}\,BE$　　　$BE=\dfrac{72\sqrt{5}}{6\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{15}}{3}=4\sqrt{15}$

よって　$GB=4\sqrt{15}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$,

$EG=4\sqrt{15}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5\sqrt{15}}{2}$

$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$ で　$10\sqrt{3}:CE=4\sqrt{15}:4\sqrt{3}$

$120=4\sqrt{15}\,CE$　　　$CE=\dfrac{120}{4\sqrt{15}}=\dfrac{30}{\sqrt{15}}=\dfrac{30\sqrt{15}}{15}=2\sqrt{15}$

$GC=EG-CE=\dfrac{5\sqrt{15}}{2}-2\sqrt{15}=\dfrac{5\sqrt{15}-4\sqrt{15}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

故に　$BG:GC=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}:\dfrac{\sqrt{15}}{2}=3:1$,

$BG:BC=3:(3+1)=3:4$,　$\dfrac{BC}{BG}=\dfrac{4}{3}$

[図3]でメネラウスの定理

$$\frac{BE}{CB}\times\frac{DA}{ED}\times\frac{PC}{AP}=1$$

$$\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{15}}\times\frac{6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\frac{PC}{AP}=1$$

$$3\times\frac{PC}{AP}=1$$

$$\frac{PC}{AP}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AP}{PC}=\frac{3}{1}=3$$

[図2]でメネラウスの定理

$$\frac{BC}{BG}\times\frac{AP}{PC}\times\frac{FG}{AF}=1$$

$$\frac{4}{3}\times3\times\frac{FG}{AF}=1$$

$$\frac{FG}{AF}=\frac{1}{4}$$

$$FG:AF=1:4$$

$$FG:AG=1:(1+4)=1:5$$

FG: AG，BG: BC がもとまった.

$\triangle BFG:\triangle ABG=FG:AG=1:5$　　$\therefore \triangle BFG\times5=\triangle ABG$ …①

$\triangle ABG:\triangle ABC=BG:BC=3:4$　　$\therefore \triangle ABG\times\dfrac{4}{3}=\triangle ABC$ …②

②に①を代入

$$(\triangle BFG\times5)\times\frac{4}{3}=\triangle ABC$$

$$\triangle BFG\times\frac{20}{3}=\triangle ABC$$

よって　$\triangle BFG:\triangle ABC=\triangle BFG:\left(\triangle BFG\times\dfrac{20}{3}\right)=1:\dfrac{20}{3}=3:20$