$\boxed{1}$

（1） $3(a-2)^2-(3a-4)(2a+5)$ を計算しなさい。

$3(a-2)^2-(3a-4)(2a+5)$
$=3(a^2-4a+4)-(6a^2+15a-8a-20)$
$=3a^2-12a+12-6a^2-15a+8a+20$
$=-3a^2-19a+32$

$\boxed{補足}$ 　$a=1$ などを代入して確かめるとよい。

$3(a-2)^2-(3a-4)(2a+5)$ に $a=1$ を代入

$$3\times(-1)^2-(-1\times 7)=3+7=10$$

$-3a^2-19a+32$ に $a=1$ を代入

$$-3\times(-1)^2-19+32=-3+13=10$$

代入した結果が同じになったので，確認ヨシ.

（2） $7x^2+14xy-105y$ を因数分解しなさい。

$7x^2y+14xy-105y=7y(x^2+2x-15)=7y(x+5)(x-3)$

$\boxed{解説}$ 　まず共通因数でくくる。$x^2+2x-15$ は たして 2，かけて -15 になる 2 数を用いて，$(x+5)(x-3)$ と因数分解できる.

（3） $4x^2-y^2+6yz-9z^2$ を因数分解しなさい。

$4x^2-y^2+6yz-9z^2=(2x)^2-(y-3z)^2=(2x+y-3z)(2x-y+3z)$

$\boxed{方針}$ 　式の形をみると，

〈二乗〉－〈二乗〉＋〈2の倍数〉－〈二乗〉

となっている。「二乗」「2の倍数」「二乗」の部分には，

$$(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)$$

の公式が使える、ということを考える。

（4）2 次方程式 $3(x+2)^2=2(x+3)(x+2)$ を解きなさい。

$$3(x+2)^2=2(x+3)(x+2)$$
$$3(x^2+4x+4)=2(x^2+5x+6)$$
$$3x^2+12x+12=2x^2+10x+12$$
$$x^2+2x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x=0,\ -2$$

$\boxed{別解}$ 　展開せずに楽に解く.　（記述問題では最初の解き方のほうが無難）

$$3(x+2)^2=2(x+3)(x+2)$$

$x=-2$ のとき成立するから，解のうち1つは $x=-2$

$x\fallingdotseq -2$ のとき，$(x+2)\fallingdotseq 0$ だから

$$3(x+2)(x+2)=2(x+2)(x+3)$$
$$3(x+2)=2(x+3)$$
$$3x+6=2x+6$$
$$x=0$$

よって $x=-2, 0$

注意　**方程式を $(x+2)$ などの文字を含む因数で割る場合は割る因数が 0 ではないことを確認する.**

$\boxed{2}$

（1）

（i） $\dfrac{2}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$ の分母を有理化しなさい。

$\dfrac{2}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\dfrac{2(2\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{12-8}=\dfrac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{4}$
$=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

（ii）次の（ア）～（ウ）の 3つの数を，（ア）～（ウ）の記号を用いて，左から順に並べなさい。

（ア）$\sqrt{10}$ 　（イ）$\dfrac{2}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$ 　（ウ）3.2

まず $\sqrt{10}$ と 3.2 を比較する.

$3.2^2=10.24$

$\sqrt{10}<\sqrt{10.24}$ 　$\sqrt{10}<\sqrt{3.2^2}$ 　$\therefore \sqrt{10}<3.2$

$\sqrt{10}$ と $\dfrac{2}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を比較する.

どちらも正の数である。二乗するとそれぞれ

$$10,\ 5+2\sqrt{6}$$

$2.5^2=6.25$ 　$\sqrt{6}<\sqrt{6.25}$ 　$\sqrt{6}<2.5$

2 倍して　$2\sqrt{6}<5$

5を足して　$5+2\sqrt{6}<10$

以上より　$\dfrac{2}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}<\sqrt{10}$

よって　（イ），（ア），（ウ）

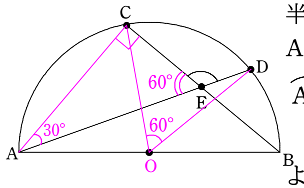
（2）直線 $y=ax+b$ は，x の変域が $-2\leqq x\leqq 3$，y の変域が $-3\leqq y\leqq 7$ であり，y 切片が 2 より大きい値である。このとき，定数 a,b の値をそれぞれ求めなさい。

$a>0$（a は正の数）のとき，直線 $y=ax+b$ は，2 点 $(-2,-3),(3,7)$ を通る。このとき，直線の式は，$y=2x+1$ であるが，「y 切片が 2 より大きい値」という条件に反するので適さない.

$a<0$（a は負の数）のとき，直線 $y=ax+b$ は，2 点 $(-2,7),(3,-3)$ を通る。このとき，直線の式は，$y=-2x+3$ である。これは，$a<0$ であり y 切片が 2 より大きい値であるので問題に適する。

$a=-2, b=3$ （答）

（3）問題文省略



半円の中心をOとする。

AC，OC，DOをそれぞれ結ぶ。

$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DB}=4:3:2$ より

$\angle COA:\angle COD:\angle DOB=4:3:2$

よって $\angle COD=180^\circ\times\dfrac{4}{4+3+2}$

$\angle COD=180^\circ\times\dfrac{3}{9}=60^\circ$

円周角の定理より　$\angle CAD=60^\circ\times\dfrac{1}{2}=30^\circ$，$\angle ACB=90^\circ$

よって　$\angle CAE=60^\circ$　　$\angle CED=120^\circ$

（4）問題文省略

「上の立体」と「全体」の相似比は　5:7

よって体積比は　$5^3:7^3=125:343$

「下の立体」＝「全体」－「上の立体」だから

「上の立体」と「下の立体」の体積比は

$$125:(343-125)=125:218$$

「下の立体」の体積が　$\dfrac{218}{5}\ \mathrm{cm}^3$ であるから

「上の立体」の体積は　$\dfrac{125}{5}=25\ \mathrm{cm}^3$

（5） 2 次方程式 $3x^2+7x-5=0$ の解のうち，大きいほうの解を a，小さいほうの解を b とする。このとき，$3a^2+7a$，$\left(3b-\dfrac{5}{b}\right)^2$ の値をそれぞれ求めなさい。

$x=a$ は 2 次方程式 $3x^2+7x-5=0$ の解の 1 つだから

$$3a^2+7a-5=0 \quad (x=a \text{ を代入})$$
$$3a^2+7a=5$$

$x=b$ も 2 次方程式 $3x^2+7x-5=0$ の解の 1 つだから

$$3b^2+7b-5=0$$
$$3b^2-5=-7b$$

$b\neq 0$ より
両辺を b でわる　$3b-\dfrac{5}{b}=-7$

両辺を 2 乗して　$\left(3b-\dfrac{5}{b}\right)^2=49$

3

自然数 n を 7 でわったときの余りを $<n>$ で表すものとする。たとえば…（以下略）

（1） $<3^3>$，$<3^4>$，$<3^5>$ の値をそれぞれ求めなさい。

$<3^3> = <27> =6$，　$<3^4> = <81> =4$

$<3^5> = <243> =5$

（2） $<3^{2020}>$ の値を求めなさい。

a, b, c, d, k を整数とする。

$<3^6> = <729> =1$，つまり 3^6 は 7 で割って 1 あまるから，

$3^6=7a+1$ …①　と表せる。この両辺を 2 乗すると

$$3^6\times3^6=(7a+1)(7a+1) \qquad 3^{12}=49a^2+14a+1$$

$3^{12}=7(7a^2+2a)+1$ よって $3^{12}=7b+1$ …②と表せる。

（$=3^{12}$ は 7 で割って 1 余る。）

①×②より

$$\begin{array}{rl} & 3^6=7a+1 \cdots ① \\ \times & 3^{12}=7b+1 \cdots ② \\ \hline & 3^{18}=(7a+1)(7b+1) \cdots ③ \end{array} \qquad \begin{aligned} 3^{18}&=49ab+7a+7b+1 \\ &=7(7ab+a+b)+1 \end{aligned}$$

よって　$3^{18}=7c+1$　（=7 で割って 1 余る）と表せる。

同様に　$3^{24}, 3^{30}, 3^{36}, 3^{42}, 3^{48}, \cdots\cdots, 3^{2016}, \cdots\cdots, 3^{6n}$　（n は整数）も 7 で割って 1 余る。

ここで $3^{2016}=7d+1$ …④とおく。また，3^4 は 7 で割って 4 あまるから，$3^4=7k+4$ …⑤　とおく。

④×⑤より

$$\begin{aligned} 3^{2020}&=(7d+1)(7k+4) \\ &=49dk+28d+7k+4 \\ &=7(7dk+4d+k)+4 \end{aligned}$$

よって　3^{2020} は 7 で割って 4 余る。

解説　単純に $3^{●}$ を 7 でわった余りが $3\to2\to6\to4\to5\to1$ と循環することを用いてもよい。この解答では，高校数学の内容を使った。ちなみに，「高校数学式」に書くなら次の通り。

$$\begin{aligned} 3^6&\equiv1 \pmod 7 \\ (3^6)^{336}&\equiv1^{336} \\ 3^{2016}&\equiv1 \\ 3^{2020}&\equiv3^4 \\ &\equiv4 \end{aligned}$$

（3） $<3^m> =3$ となるような 1000 以下の自然数 m の値の個数を求めなさい。

（2）より　m は 6 で割って 1 余る数

1000 以下の 6 で割って 1 余る自然数の個数は，

$$1000\div6=166 \text{ 余り } 4 \qquad 166+1=167 \text{ より}$$

167 個.

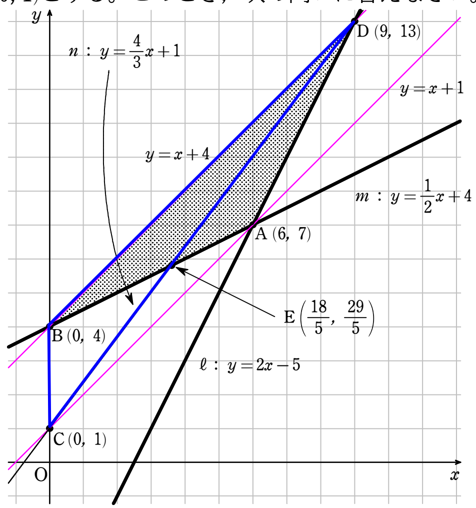
解説　「1000 以下の6 で割って 1 余る自然数の個数」について考えてみよう。6 で割って 1 余る自然数を $6k+1$ とおくと

$$6k+1\leqq1000 \ (k\text{は0か自然数})$$
$$6k\leqq999$$
$$k\leqq\frac{999}{6}=\frac{333}{2}=166.5$$

よって，$k=0, \underbrace{1, 2, 3, \cdots\cdots, 166}$
その個数は　1　＋　166　（個）。

4

O を原点とする座標平面上に，直線 $\ell : y=2x-5$ と直線 $m : y=\dfrac{1}{2}x+4$ がある。2 直線 ℓ と m の交点を A とし，B(0, 4)，C(0, 1)とする。このとき，次の問いに答えなさい。



（1） 点Aの座標を求めなさい。

連立方程式 $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=\dfrac{1}{2}x+4 \end{cases}$ を解くと，$x=6, y=7$

よって A(6, 7)

（2） 点C を通る直線を n とする。直線 n は 2 直線 ℓ, m とそれぞれ交点 D, E をもち，点D の x 座標は点A の x 座標よりも大きく，△ABD＝△BCDである。

（i） 直線 n の式を求めなさい。

点Dは点B を通り直線AC に平行な直線と直線AD との交点である。直線AC の傾きは　$\dfrac{7-1}{6-0}=1$

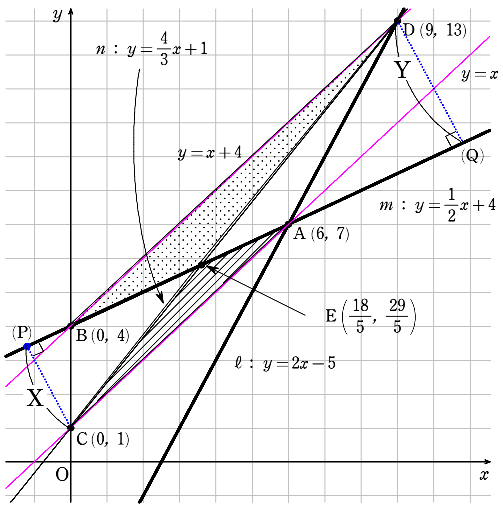
よって直線BD の式は $y=x+4$

この直線と直線ℓ との交点 D は，連立方程式 $\begin{cases} y=x+4 \\ y=2x-5 \end{cases}$ を解いて，D(9, 13)

直線 n は 2 点 C, D を通るから，直線 n の式は，$y=\dfrac{4}{3}x+1$

(i) の**解説**　△ABD と △BCD が，共通の辺BD を持つことに注目する。

=== (ii) ===



(ii) △EAC と △EBD の面積比 △EAC:△EBD を最も簡単な整数の比で表しなさい。ただし，解き方も示すこと。

まず点E の座標を求める。（解き方省略）E$\left(\frac{18}{5}, \frac{29}{5}\right)$ である。

EA:EB$=\left(6-\frac{18}{5}\right):\frac{18}{5}=2:3$　EA$=2a$，EB$=3a$ とおく。

△EAC で　底辺 EA に対する高さの長さを X，
△EBD で　底辺 ED に対する高さの長さを Y　とおくと

$$X:Y=CE:ED=\left(\frac{29}{5}-1\right):\left(13-\frac{29}{5}\right)=2:3$$

X$=2b$，Y$=3b$ とおくと

△EAC$=$EA×X×$\frac{1}{2}=2ab$，

△EBD$=$EB×Y×$\frac{1}{2}=\frac{9}{2}ab$

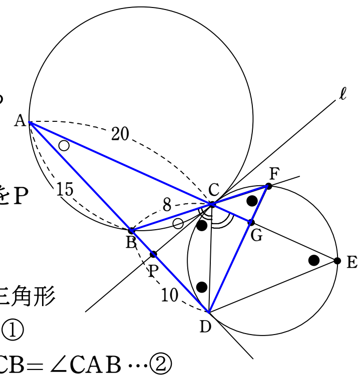
以上より　△EAC:△EBD$=2ab:\frac{9}{2}ab=4:9$

解説

X:Y＝CE:ED が成り立つのは，△ECP∽△EDQ が成り立つから。

5

（問題文略）



（1）∠BCD＝∠DCE であることを証明しなさい。

（証明）

直線ℓ と直線BD との交点をP とする。

接線の性質より　PC＝PD

よって　△PCD は二等辺三角形

故に　∠PCD＝∠PDC …①

また，接弦定理より　∠PCB＝∠CAB …②

さらに　∠BCD＝∠PCD＋∠PCB …③

外角･内角の性質より　∠DCE＝∠PDC＋∠CAB …④

①②③④より　∠BCD＝∠DCE

（終）

（2）線分BDと線分CEの長さをそれぞれ求めなさい。

△ACD∽△ADE より

CD : DE＝20:(15＋BD)　　20DE＝15CD＋CD×BD

40DE＝30CD＋2×CD×BD …①

△BCD∽△DCE　より

BD : DE＝8:CD　8DE＝BD×CD　　40DE＝5×BD×CD …②

①②より

30CD＋2×CD×BD＝5×BD×CD

CD ≒0 より　30＋2BD＝5BD　　BD＝10 cm.

方べきの定理より

AD^2＝AC×AE　　25^2＝20×(20＋CE)　　CE＝$\frac{45}{4}$ cm.

（3）直線BCと円Tの交点のうち，点Cでないほうを点F，弦DF と弦CE との交点を G とする。このとき，線分の長さの比 DG:GF を最も簡単な整数の比で表しなさい。

△BDC∽△BFD より　BD:BC＝BF:BD　　10:8＝BF:10

100＝8BF　　∴BF＝$\frac{25}{2}$

よって　CF＝BF−8＝$\frac{25-16}{2}=\frac{9}{2}$

メネラウスの定理より　$\frac{25}{15}\times\frac{GF}{DG}\times\frac{8}{\frac{9}{2}}=1$

$$\frac{5}{3}\times\frac{16}{9}\times\frac{GF}{DG}=1$$

$$\frac{80}{27}\times\frac{GF}{DG}=1$$

よって DG:GF＝80:27