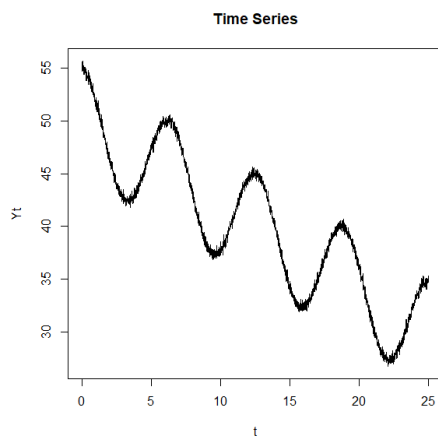


備註：附件的 Excel 檔案會自動產生隨機變數，故每次執行結果會有差異，但回歸表不會自動更新。以下報告是選許其中一組隨機變數的結果來撰寫。

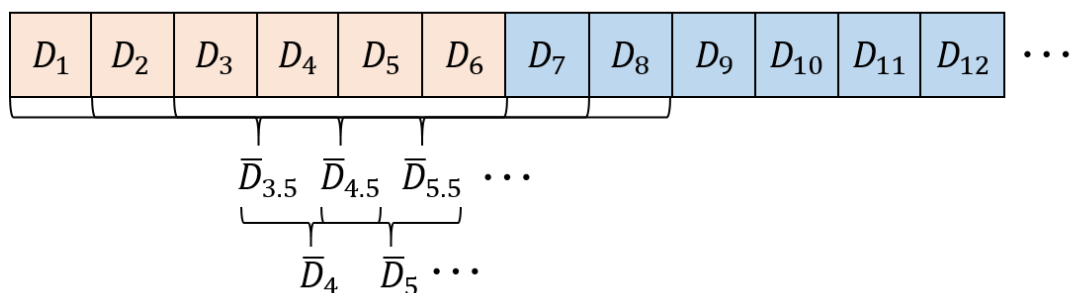
1.

(a) 透過加入 error 項 $\epsilon_t \sim N(0, 0.3^2)$ 來製造 disturbance，將 series 表示成下式：

$$Y_t = 5 \cos(t) - 0.8t + 50 + \epsilon_t \text{ for } t = 1, 2, \dots, 24$$



(b) 由圖中可見在 24 期中，共有 4 個 season 存在，故每季(season)的期數為 6 期 (periods)。接著進行 de-seasonalize，將各期的 demand 每 6 期計算一個平均值，得到 $\bar{D}_{3.5}$ 、 $\bar{D}_{4.5}$ 、 $\bar{D}_{5.5}$... $\bar{D}_{21.5}$ ，再將 $\bar{D}_{3.5}$ 和 $\bar{D}_{4.5}$ 取平均得 \bar{D}_4 ，依此類推，計算 \bar{D}_4 、 \bar{D}_5 ... \bar{D}_{21} ，結果如下表。



Period, t	Demand D_t	De-seasonalized \bar{D}_t
1	51.97	
2	46.26	
3	43.01	
4	43.66	46.81
5	47.76	46.21
6	50.06	45.54

7	48.19	44.63
8	42.89	43.54
9	38.34	42.47
10	37.45	41.63
11	40.81	41.00
12	44.26	40.34
13	43.90	39.55
14	39.59	38.63
15	33.79	37.68
16	32.46	36.90
17	34.79	36.26
18	38.84	35.67
19	39.97	34.97
20	35.81	34.07
21	30.45	33.06
22	27.49	
23	28.88	
24	32.63	

接著利用 de-seasonalized series 與期數 t 建立回歸模型 $\bar{D}_t = L + T_t$

摘要輸出									
迴歸統計									
R 的倍數	0.9988868								
R 平方	0.9977748								
調整的 R 平方	0.9976357								
標準誤	0.210261								
觀察值個數	18								
ANOVA									
	自由度	SS	MS	F	顯著值				
迴歸	1	317.172425	317.1724253	7174.273	1.18E-22				
殘差	16	0.70735515	0.044209697						
總和	17	317.87978							
	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%	
L	50.055304	0.12928112	387.1818649	3.3E-33	49.78124	50.3293681	49.78124	50.32937	
T	-0.809097	0.00955239	-84.70107889	1.18E-22	-0.82935	-0.7888473	-0.82935	-0.78885	

得回歸模型 $\widehat{\bar{D}}_t = 50.06 - 0.81t$

(c) 利用 $S_t = \frac{D_t}{\widehat{\bar{D}}_t}$ 以計算 seasonality factors

Period, t	Demand, D_t	Deseasonalized \bar{D}_t	Deseasonalized (regression) $\widehat{\bar{D}}_t$	Seasonality S_t
1	51.97		49.25	1.06
2	46.26		48.44	0.95

3	43.01		47.63	0.90
4	43.66	46.81	46.82	0.93
5	47.76	46.21	46.01	1.04
6	50.06	45.54	45.20	1.11
7	48.19	44.63	44.39	1.09
8	42.89	43.54	43.58	0.98
9	38.34	42.47	42.77	0.90
10	37.45	41.63	41.96	0.89
11	40.81	41.00	41.16	0.99
12	44.26	40.34	40.35	1.10
13	43.90	39.55	39.54	1.11
14	39.59	38.63	38.73	1.02
15	33.79	37.68	37.92	0.89
16	32.46	36.90	37.11	0.87
17	34.79	36.26	36.30	0.96
18	38.84	35.67	35.49	1.09
19	39.97	34.97	34.68	1.15
20	35.81	34.07	33.87	1.06
21	30.45	33.06	33.06	0.92
22	27.49		32.26	0.85
23	28.88		31.45	0.92
24	32.63		30.64	1.07

$$\bar{S}_1 = \frac{1.06 + 1.09 + 1.11 + 1.15}{4} \approx 1.10$$

$$\bar{S}_2 = \frac{0.95 + 0.98 + 1.02 + 1.06}{4} \approx 1.00$$

$$\bar{S}_3 = \frac{0.90 + 0.90 + 0.89 + 0.92}{4} \approx 0.90$$

$$\bar{S}_4 = \frac{0.93 + 0.89 + 0.87 + 0.85}{4} \approx 0.89$$

$$\bar{S}_5 = \frac{1.04 + 0.99 + 0.96 + 0.92}{4} \approx 0.98$$

$$\bar{S}_6 = \frac{1.11 + 1.10 + 1.09 + 1.07}{4} \approx 1.09$$

(d) Final model: $F_{t+k} = [50.06 - (t + k) \times 0.81] \times S_{t+k}$

t	D_t	\bar{D}_t	\hat{D}_t	S_t	F_t	E_t	MSE _t	MAPE _t
1	51.97		49.25	1.06	54.22	2.25	5.05	4.32

2	46.26		48.44	0.95	48.66	2.40	5.41	4.76
3	43.01		47.63	0.90	43.00	-0.01	3.61	3.18
4	43.66	46.81	46.82	0.93	41.57	-2.09	3.80	3.58
5	47.76	46.21	46.01	1.04	44.93	-2.83	4.64	4.05
6	50.06	45.54	45.20	1.11	49.31	-0.75	3.96	3.62
7	48.19	44.63	44.39	1.09	48.87	0.68	3.46	3.31
8	42.89	43.54	43.58	0.98	43.78	0.89	3.13	3.16
9	38.34	42.47	42.77	0.90	38.62	0.28	2.79	2.89
10	37.45	41.63	41.96	0.89	37.26	-0.18	2.51	2.65
11	40.81	41.00	41.16	0.99	40.19	-0.61	2.32	2.54
12	44.26	40.34	40.35	1.10	44.02	-0.24	2.13	2.38
13	43.90	39.55	39.54	1.11	43.53	-0.37	1.98	2.26
14	39.59	38.63	38.73	1.02	38.91	-0.68	1.87	2.22
15	33.79	37.68	37.92	0.89	34.24	0.45	1.76	2.16
16	32.46	36.90	37.11	0.87	32.95	0.49	1.66	2.12
17	34.79	36.26	36.30	0.96	35.45	0.66	1.59	2.11
18	38.84	35.67	35.49	1.09	38.72	-0.12	1.50	2.01
19	39.97	34.97	34.68	1.15	38.18	-1.79	1.59	2.14
20	35.81	34.07	33.87	1.06	34.03	-1.78	1.67	2.28
21	30.45	33.06	33.06	0.92	29.85	-0.60	1.61	2.26
22	27.49		32.26	0.85	28.64	1.15	1.60	2.35
23	28.88		31.45	0.92	30.71	1.83	1.67	2.52
24	32.63		30.64	1.07	33.42	0.79	1.63	2.52
25	34.77		29.83		32.84	-1.94	1.71	2.64
26	32.26		29.02		29.15	-3.11	2.02	2.91
27	27.30		28.21		25.47	-1.83	2.07	3.05
28	22.95		27.40		24.33	1.38	2.06	3.16
29	23.35		26.59		25.97	2.62	2.23	3.43
30	26.78		25.78		28.13	1.35	2.21	3.49

Note: t 為期數， D_t 為第 t 期的實際需求， \bar{D}_t 為 de-seasonalized demand， \widehat{D}_t 為 L 與 T 回歸模型的預測值， S_t 為 seasonality， F_t 為需求預測值， E_t 為誤差項，而 MSE_t 與 $MAPE_t$ 則為評估標準。

其中 $F_{t+k} = [50.06 - (t+k) \times 0.81] \times S_{t+k}$ ，如 $F_1 = [50.06 - 1 \times 0.81] \times \bar{S}_1 \approx 54.22$ ； $E_t = F_t - D_t$ ，如 $E_1 = F_1 - D_1 = 54.22 - 51.97 = 2.25$ ； $MSE_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (E_i)^2$ ，故 $MSE_1 = \frac{1}{1} \times (2.25)^2 \approx 5.05$ ； $MAPE_t = \frac{100\%}{t} \sum_{i=1}^t \frac{|E_i|}{|D_i|}$

為評估預測模型的表現，計算 MSE_{24} 與 $MAPE_{24}$ 。詳細操作請見 excel file。

$$MSE_{24} = \frac{1}{24} \times [(2.25)^2 + (2.40)^2 + \dots + (0.79)^2] = 1.63$$

$$MAPE_{24} = \frac{100\%}{24} \times \left[\frac{|2.25|}{|51.97|} + \frac{|2.40|}{|46.26|} + \dots + \frac{|0.79|}{|32.63|} \right] = 2.52\%$$

(e)

預測第 25~30 期的需求如下：

$$F_{25} = (L + 25T)\bar{S}_1 = (50.06 - 0.81 \times 25) \times 1.10 \approx 32.84$$

$$F_{26} = (L + 26T)\bar{S}_1 = (50.06 - 0.81 \times 26) \times 1.00 \approx 29.15$$

$$F_{27} = (L + 27T)\bar{S}_1 = (50.06 - 0.81 \times 27) \times 0.90 \approx 25.47$$

$$F_{28} = (L + 28T)\bar{S}_1 = (50.06 - 0.81 \times 28) \times 0.89 \approx 24.33$$

$$F_{29} = (L + 29T)\bar{S}_1 = (50.06 - 0.81 \times 29) \times 0.98 \approx 25.97$$

$$F_{30} = (L + 30T)\bar{S}_1 = (50.06 - 0.81 \times 30) \times 1.09 \approx 28.13$$

利用從第一期開始的 error 來計算 MSE 與 MAPE，得 $MSE_{30} = 2.21$ ， $MAPE_{30} = 3.39\%$

t	D_t	\bar{D}_t	\hat{D}_t	S_t	F_t	E_t	MSE _t	MAPE _t
1	51.97		49.25	1.06	54.22	2.25	5.05	4.32
...
25	34.77		29.83		32.84	-1.94	1.71	2.64
26	32.26		29.02		29.15	-3.11	2.02	2.91
27	27.30		28.21		25.47	-1.83	2.07	3.05
28	22.95		27.40		24.33	1.38	2.06	3.16
29	23.35		26.59		25.97	2.62	2.23	3.43
30	26.78		25.78		28.13	1.35	2.21	3.49

(f)

將 disturbance 的分佈改為 $\epsilon_t \sim N(0, 1^2)$ ，讓 series 的 noise 變大。

首先，先做 de-seasonalized，每六期 demand 計算一個平均值，接著求得 \bar{D}_4 、

$\bar{D}_5 \dots \bar{D}_{21}$ ，並進一步得 Level 和 Trend 的回歸線 $\bar{D}_t = L + T_t = 49.86 - 0.81t$ 。之

後利用公式 $S_t = \frac{D_t}{\bar{D}_t}$ 計算 seasonality 與 seasonality factors。

摘要輸出								
迴歸統計								
R 的倍數	0.9958221							
R 平方	0.9916617							
調整的 R 平方	0.9911405							
標準誤	0.4089878							
觀察值個數	18							
ANOVA								
	自由度	SS	MS	F	顯著值			
迴歸	1	318.290952	318.2909518	1902.846	4.61E-18			
殘差	16	2.67633576	0.167270985					
總和	17	320.967288						
	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
L	49.857626	0.25147026	198.2644996	1.48E-28	49.32453	50.390719	49.32453	50.39072
T	-0.810523	0.01858076	-43.6216249	4.61E-18	-0.84991	-0.7711334	-0.84991	-0.77113

t	D_t	\bar{D}_t	\hat{D}_t	S_t	F_t	E_t	MSE _t	MAPE _t
1	53.02		49.05	1.08	54.32	1.30	1.69	2.45
2	47.07		48.24	0.98	49.42	2.35	3.60	3.72
3	44.83		47.43	0.95	42.96	-1.88	3.58	3.88
4	44.22	47.23	46.62	0.95	41.48	-2.74	4.56	4.46
5	48.74	46.40	45.81	1.06	44.27	-4.47	7.63	5.40
6	48.37	45.41	44.99	1.07	49.82	1.45	6.71	5.00
7	47.34	44.21	44.18	1.07	48.93	1.60	6.12	4.76
8	42.78	42.84	43.37	0.99	44.43	1.65	5.69	4.65
9	37.18	41.69	42.56	0.87	38.55	1.37	5.27	4.54
10	37.54	41.13	41.75	0.90	37.15	-0.39	4.76	4.19
11	38.94	40.64	40.94	0.95	39.57	0.63	4.36	3.96
12	44.34	40.18	40.13	1.10	44.43	0.09	4.00	3.65
13	44.60	39.42	39.32	1.13	43.55	-1.05	3.78	3.55
14	39.74	38.48	38.51	1.03	39.45	-0.29	3.51	3.35
15	34.63	37.61	37.70	0.92	34.15	-0.49	3.29	3.22
16	31.00	36.71	36.89	0.84	32.82	1.83	3.30	3.39
17	34.17	36.06	36.08	0.95	34.87	0.70	3.13	3.31
18	38.73	35.38	35.27	1.10	39.05	0.32	2.96	3.17
19	39.40	34.66	34.46	1.14	38.16	-1.24	2.89	3.17
20	37.14	33.91	33.65	1.10	34.47	-2.67	3.10	3.37
21	29.07	33.10	32.84	0.89	29.74	0.67	2.97	3.32
22	27.90		32.03	0.87	28.50	0.59	2.85	3.26
23	28.21		31.22	0.90	30.17	1.96	2.90	3.42
24	34.99		30.41	1.15	33.66	-1.33	2.85	3.44

Seasonality factor 計算如下：

$$\bar{S}_1 = \frac{1.08 + 1.07 + 1.13 + 1.14}{4} \approx 1.11$$

$$\bar{S}_2 = \frac{0.98 + 0.99 + 1.03 + 1.10}{4} \approx 1.02$$

$$\bar{S}_3 = \frac{0.95 + 0.87 + 0.82 + 0.89}{4} \approx 0.91$$

$$\bar{S}_4 = \frac{0.95 + 0.90 + 0.84 + 0.87}{4} \approx 0.89$$

$$\bar{S}_5 = \frac{1.06 + 0.95 + 0.95 + 0.90}{4} \approx 0.97$$

$$\bar{S}_6 = \frac{1.07 + 1.10 + 1.10 + 1.15}{4} \approx 1.11$$

Final model: $F_{t+k} = [49.86 - (t + k) \times 0.81] \times S_{t+k}$

$$MSE_{24} = \frac{1}{24} \times [(1.30)^2 + (2.35)^2 + \dots + (-1.33)^2] = 2.85$$

$$MAPE_{24} = \frac{100\%}{24} \times \left[\frac{|1.30|}{|53.02|} + \frac{|2.35|}{|47.07|} + \dots + \frac{|-1.33|}{|34.99|} \right] = 3.44\%$$

與(d)中的 MSE_{24} 和 $MAPE_{24}$ 比較，可見當 disturbance 越大時，會讓 series 的起伏幅度變大，造成需求較難精準預測，使 MSE 與 MAPE 的值較高。

	MSE_{24}	$MAPE_{24}$
$\epsilon_t \sim N(0, 0.3^2)$	1.63	2.52%
$\epsilon_t \sim N(0, 1^2)$	2.85	3.44%

2. Holt-Winter's model

利用以下公式建立模型，並設初始 L_0, T_0, S_0 為上述 Static Model 的值。

$F_{t+1} = (L_t + T_t)S_{t+1}$ and $F_{t+k} = (L_t + T_t)S_{t+k}$
<ul style="list-style-type: none"> ● $L_t = \alpha \left(\frac{D_t}{S_t} \right) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$ <ul style="list-style-type: none"> ● $0 < \alpha < 1$: smoothing constant for LEVEL ● $T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$ <ul style="list-style-type: none"> ● $0 < \beta < 1$: smoothing constant for TREND ● $S_t = \gamma \left(\frac{D_{t-p}}{L_{t-p}} \right) + (1 - \gamma)S_{t-p}$ <ul style="list-style-type: none"> ● $0 < \gamma < 1$: smoothing constant for SEASONALITY

t	D_t	L_t	T_t	S_t	F_t	Error	MSE	MAPE
		50.06	-0.81					
1	51.97	49.20	-0.85	1.10	53.18	1.21	1.47	2.33
2	46.26	48.30	-0.90	1.00	46.50	0.24	0.77	1.43
3	43.01	47.41	-0.89	0.90	40.26	-2.75	3.03	3.08

4	43.66	46.58	-0.83	0.89	38.48	-5.18	8.98	5.28
5	47.76	45.81	-0.77	0.98	41.13	-6.63	15.99	7.00
6	50.06	45.06	-0.75	1.09	44.22	-5.84	19.01	7.78
7	48.19	44.30	-0.76	1.10	42.88	-5.31	20.33	8.24
8	42.89	43.52	-0.77	1.00	37.33	-5.56	21.65	8.83
9	38.34	42.75	-0.78	0.90	32.17	-6.17	23.47	9.64
10	37.45	41.97	-0.78	0.89	30.46	-6.99	26.02	10.54
11	40.81	41.21	-0.77	0.98	32.13	-8.68	30.50	11.52
12	44.26	40.44	-0.76	1.09	34.12	-10.14	36.52	12.47
13	43.9	39.69	-0.76	1.10	32.84	-11.06	43.13	13.45
14	39.59	38.95	-0.74	1.00	28.56	-11.03	48.74	14.48
15	33.79	38.19	-0.76	0.90	24.16	-9.63	51.68	15.41
16	32.46	37.41	-0.78	0.89	22.22	-10.24	55.00	16.42
17	34.79	36.61	-0.80	0.98	22.50	-12.29	60.66	17.53
18	38.84	35.80	-0.81	1.09	23.19	-15.65	70.89	18.80
19	39.97	35.02	-0.78	1.10	22.28	-17.69	83.62	20.14
20	35.81	34.28	-0.74	1.00	19.43	-16.38	92.85	21.42
21	30.45	33.55	-0.74	0.90	16.28	-14.17	97.99	22.61
22	27.49	32.77	-0.78	0.89	13.92	-13.57	101.91	23.83
23	28.88	31.93	-0.83	0.98	12.48	-16.40	109.16	25.26
24	32.63	31.07	-0.86	1.09	11.36	-21.27	123.46	26.92

利用 Excel Solver 規劃求解，目標將 MSE_{24} 最小，得參數 $\alpha = 0.0222$, $\beta = 0.9999$, $\gamma = 0.0001$ 。 $MSE_{24} = 123.46$, $MAPE_{24} = 26.92$ 。

總結模型表現如下表：

	MSE_{24}	$MAPE_{24}$
Static Model $\epsilon_t \sim N(0, 0.3^2)$	1.63	2.52%
Static Model $\epsilon_t \sim N(0, 1^2)$	2.85	3.44%
Holt-Winter's model ($\alpha = 0.0222, \beta = 0.9999, \gamma = 0.0001$)	123.46	26.92%

由上表可見 Holt-Winter's model 的預測表現並沒有 Static model 來的好，代表越複雜的模型不一定會有較好的表現。在建立預測模型時，應盡可能的簡單化，並同時保有不差的預測表現，故在此範例中，應採用 Static model。