Г. Н. Бушуева, Связности высших порядков и поля геометрических объектов на многообразиях, зависящих от параметров, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 31–42

Г.Н. Бушуева

СВЯЗНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Аннотация

В настоящей работе изучаются многообразия, зависящие от N параметров, то есть расслоенные многообразия вида $p : E \to U$, где U — открытое подмножество $\mathbf{R}^N$. С расслоением Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{A}}(E)$ ассоциируется серия главных расслоений $\mathbf{A}$-аффинных реперов высших порядков, что позволяет рассматривать поля дифференциально-геометрических объектов на многообразии E как сечения соответствующих ассоциированных расслоений. Описывается конструкция полного лифта геометрического объекта с многообразия E на расслоение Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{B}}(E)$, где $\mathbf{B}$ — алгебра Вейля ширины N.

Abstract

G.N. Bushueva **Higher order connections and fields of geometric objects on manifolds depending on parameters**

In the present paper we study manifolds depending on N parameters, i.e. fibered manifolds $p : E \to U$, where $U \subset \mathbf{R}^N$ is an open subset in $\mathbf{R}^N$. To the Weil bundle $\widehat{T}^{\mathbf{A}}(E)$ we associate a sequence of principal $\mathbf{A}$-affine frame bundles of higher order, this makes it possible to consider fields of (vertical) differential geometric objects on E as sections of the corresponding associated bundles. In particular, we construct the bundle of $\mathbf{A}$-affine connections on E. We construct also complete lifts of geometric objects from E to the Weil bundle $\widehat{T}^{\mathbf{B}}(E)$, where $\mathbf{B}$ is the Weil algebra of width N.

Введение

Расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ над дифференцируемым многообразием M_n, определяемое локальной алгеброй Вейля $\mathbf{A}$ высоты q [14], [4], [7] ассоциировано с расслоением q-реперов B^qM_n, структурной группой которого является дифференциальная группа G^q_n. Структура $\mathbf{A}$-гладкого многообразия на $T^{\mathbf{A}}M_n$ [4], [12] приводит к появлению еще одного главного расслоения, ассоциированного с $T^{\mathbf{A}}M_n$, а именно, расслоения $\mathbf{A}$-аффинных реперов $B(\mathbf{A})M_n$, структурной группой которого является так называемая $\mathbf{A}$-аффинная группа $D_n(\mathbf{A})$ [13]. В частном случае алгебры дуальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon)$ группа $D_n(\mathbf{R}(\varepsilon))$ оказывается группой аффинных преобразований $\mathbf{R}^n$, а расслоение $B(\mathbf{R}(\varepsilon))M_n$ — расслоением аффинных реперов на M_n.

В работе [1] было построено обобщение функтора Вейля $T^{\mathbf{A}}$ на категорию многообразий $p : M_n \times U \to U$, $U \subset \mathbf{R}^N$, зависящих от N параметров, где N — ширина алгебры $\mathbf{A}$. Естественной структурной группой (обобщенного) расслоения Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{A}}(M_n \times U)$ является группа $D_n(\mathbf{A})$. В настоящей работе под объектами категории $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров, мы будем понимать расслоенные многообразия вида $p : E \to U$, где $U \subset \mathbf{R}^N$ — открытое подмножество $\mathbf{R}^N$. С расслоением Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{A}}(E)$ ассоциируется серия главных расслоений $\mathbf{A}$-аффинных реперов высших порядков, позволяющих рассматривать поля (вертикальных) дифференциально-геометрических объектов на многообразии E как сечения соответствующих ассоциированных расслоений, в частности построено расслоение объекта $\mathbf{A}$-аффинной связности на E. Затем описывается конструкция полного лифта геометрического объекта с многообразия E на расслоение Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{B}}(E)$, где $\mathbf{B}$ — алгебра Вейля ширины N.

Лифты полей различных дифференциально-геометрических объектов с многообразия M_n на расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ изучались в работах П.Юэня [15], А.Моримото [10], Л.-Н.Паттерсона [11], А.П.Широкова [4], В.В.Шурыгина [5], А.Я.Султанова [3]. Теория лифтов геометрических объектов представляет собой раздел общей теории естественных операторов на дифференцируемых многообразиях [7], [9], [8]. Лифты связностей второго порядка на вертикальные расслоения Вейля над расслоенными многообразиями общего вида изучались А.Сабрас и И.Коларжем [6].

Символом $\mathcal{M}f^N$ будем обозначать категорию многообразий, зависящих от N параметров. Объектами этой категории являются расслоенные многообразия (сюръективные субмерсии) $p : E \to U$, где U — открытое подмножество арифметического пространства $\mathbf{R}^N$. На объект категории $\mathcal{M}f^N$ можно смотреть как на эволюционирующее в многомерном времени многообразие $p^{-1}(t^a)$, $a = 1 \dots N$. Под морфизмами в категории $\mathcal{M}f^N$ понимаются расслоенные отображения (коммутативные диаграммы)

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 & \xrightarrow{i} & U_2\,, \end{array}$$

где i — включение одного открытого подмножества в $\mathbf{R}^N$ в другое. Для обозначения морфизма часто будем использовать один символ f. Расслоенная координатная карта $h : W \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ на E (n — размерность слоев) может рассматриваться как морфизм в категории $\mathcal{M}f^N$:

$$\begin{array}{ccc} E \supset W & \xrightarrow{h} & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \supset U' & \xrightarrow{i} & \mathbf{R}^N\,. \end{array}$$

В локальных координатах (x^i, t^a) на E_1 и $(x^{i'}, t^a)$ на E_2 морфизм f задается уравнениями вида: $x^{i'} = f^{i'}(x^i, t^a)$.

Под локальной алгеброй А.Вейля (кратко, алгеброй Вейля) $\mathbf{A}$ высоты q и ширины N понимается факторалгебра $\mathbf{A} = \mathbf{R}(N, q)/\mathbf{I_A}$ алгебры $\mathbf{R}(N, q)$ вещественных многочленов от N переменных t^a, $a = 1, .., N$, степени $\leq q$ (срезанных многочленов) по некоторому идеалу $\mathbf{I_A} \subset \mathbf{R}[N, q]$ (см., например, [7], [12]). Символом $\nu_\mathbf{A} : \mathbf{R}[N, q] \to \mathbf{A}$ будем обозначать канонический эпиморфизм.

1. Расслоения A-аффинных реперов высших порядков на многообразии, зависящем от параметров

Расслоения реперов высших порядков и расслоения $\mathbf{A}$-аффинных реперов на гладком многообразии M_n являются открытыми подмногообразиями расслоений Вейля $T^{\mathbf{R}(n,q)}M_n$ и $T^{\mathbf{A}(n,q)}M_n$ соответственно (см. [12], [13]). Аналогичный факт имеет место и в случае многообразий, зависящих от параметров. Для изучения структуры расслоений реперов высших порядков, ассоциированных с многообразием, зависящем от параметров, нам потребуется определить некоторые серии алгебр Вейля.

Пусть $\{\tau^a\}$, $\{\tau_1^a\}$ и $\{\tau_2^a\}$, $a=1,\dots,N$ канонические системы образующих в алгебрах $\mathbf{R}(N,q+r)$, $\mathbf{R}(N,q)$ и $\mathbf{R}(N,r)$ соответственно. Определим мономорфизм

$$\Delta^r : \mathbf{R}(N,q+r) \to \mathbf{R}(N,q)\otimes\mathbf{R}(N,r),$$

полагая $\Delta^r(\tau^a) = \tau_1^a + \tau_2^a$. Рассмотрим идеал $\mathbf{I}_{\mathbf{A}_r} = (\Delta^r)^{-1}(\mathbf{I}_{\mathbf{A}}\otimes\mathbf{R}(N,r)$ в алгебре $\mathbf{R}(N,q+r)$ и определим локальную алгебру $\mathbf{A}_r$ как факторалгебру $\mathbf{A}_r = \mathbf{R}(N,q+r)/\mathbf{I}_{\mathbf{A}_r}$. Естественные эпиморфизмы $\mathbf{R}(N,q+r_2)\to\mathbf{R}(N,q+r_1)$ при $r_2>r_1$ индуцируют эпиморфизмы $\mathbf{A}_{r_2}\to\mathbf{A}_{r_1}$.

Определим далее алгебру Вейля $\mathbf{A}_r(n,q+r+s)$ [13], как факторалгебру алгебры $\mathbf{A}_r\otimes\mathbf{R}(n,q+r+s)$ по $(q+r+s+1)$-ой степени ее максимального идеала $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}_r\otimes\mathbf{R}[n,q+r+s])$. В результате получаем двойной спектр алгебр Вейля

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & & \dots & & \dots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{A}(n,q+s) & \leftarrow & \mathbf{A}_1(n,q+s+1) & \leftarrow\dots\leftarrow & \mathbf{A}_r(n,q+r+s) & \leftarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{A}(n,q+1) & \leftarrow & \mathbf{A}_1(n,q+2) & \leftarrow\dots\leftarrow & \mathbf{A}_r(n,q+r+1) & \leftarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbf{A}(n,q) & \leftarrow & \mathbf{A}_1(n,q+1) & \leftarrow\dots\leftarrow & \mathbf{A}_r(n,q+r) & \leftarrow & \dots .
\end{array}$$

Структура атласа на расслоении $p: E\to U$ позволяет рассматривать $\mathbf{A}_r(n,p)$-струи локальных карт $(p\geq q+r)$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}^n\times U & \xrightarrow{\varphi} & E \\
\downarrow & & \downarrow \\
U & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U.
\end{array} \tag{1}$$

Расслоение

$$\pi_{(s,\mathbf{A}_r)} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \to E, \tag{2}$$

образованное $\mathbf{A}_r(n,q+r+s)$-струями ростков локальных карт (1), является главным расслоением со структурной группой Ли $D_n^s(\mathbf{A}_r)$, состоящей из $\mathbf{A}_r(n, q+r+s)$-струй ростков изоморфизмов расслоений

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N, 0) & \longrightarrow & (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{R}^N, 0) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & (\mathbf{R}^N, 0) . \end{array} \tag{3}$$

Пусть $L : D_n^s(\mathbf{A}_r) \times F \to F$ — левое действие группы Ли $D_n^s(\mathbf{A}_r)$ на некотором гладком многообразии F. Тогда возникает правое действие

$$R : D_n^s(\mathbf{A}_r) \times (B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \times F) \to B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \times F$$

группы Ли $D_n^s(\mathbf{A}_r)$ на $B^{(s,\mathbf{A}_r)}E$ [2]. Ставя в соответствие каждой паре $(z, f) \in B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \times F$ ее орбиту относительно этого действия, получаем проекцию

$$\pi_{\mathrm{ass}} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \times F \to B^{(s,\mathbf{A}_r)}E[F, L],$$

и расслоение $\pi^{(s,\mathbf{A}_r)} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E[F, L] \to E$, присоединенное [2] к главному расслоению $\pi_{(s,\mathbf{A}_r)} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \to E$.

При этом естественная проекция $p^{(s,\mathbf{A}_r)} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E[F, L] \to U$ задает объект категории $\mathcal{M}f^N$.

Определение 1. *Расслоение $\pi^{(s,\mathbf{A}_r)} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E[F, L] \to E$ называется расслоением дифференциально-геометрических объектов $(s, \mathbf{A}_r, F)$-типа в категории $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от параметров. Сечение этого расслоения называется полем дифференциально-геометрических объектов на E в категории $\mathcal{M}f^N$.*

Обобщенный функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{A}}$, построенный в работе [1] (этот функтор обозначался в работе [1] символом $T^{\mathbf{A}}_{sec}$) соответствует главному расслоению $\mathbf{A}$-аффинных реперов $\pi_{\mathbf{A}} : B^{\mathbf{A}}E \to E$ и стандартному действию $\mathbf{A}$-аффинной дифференциальной группы $D_n(\mathbf{A})$ на $\mathbf{A}$-модуле $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$ [13]. Если рассматривать $\mathbf{A}$-модуль $\mathbf{A}^n$ как G_n^q-пространство со стандартным действием дифференциальной группы G_n^q, а саму группу G_n^q рассматривать как факторгруппу $\mathbf{A}$-аффинной группы $D_n(\mathbf{A})$ по нормальному делителю $\overset{\circ}{D}_n(\mathbf{A})$, образованному струями постоянных на слоях ростков (3), то получим вертикальный функтор Вейля $VT^{\mathbf{A}}$.

Поле геометрического объекта

$$\sigma : E \to B^{(s,\mathbf{A}_r)}E[F, L]$$

может быть задано также $D^s_n(\mathbf{A}_r)$-эквивариантным отображением:

$$\tilde{\sigma} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \longrightarrow F, \tag{4}$$

которому соответствует $\mathcal{M}f^N$-морфизм (обозначаем его тем же символом)

$$\begin{array}{ccc} B^{(s,\mathbf{A}_r)}E & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & F \times U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U. \end{array}$$

Действие функтора Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{B}}$ на главном расслоении (2) определяет $\mathbf{B}$-гладкое (послойно над U, см. [1]) главное расслоение

$$\widehat{T}^{\mathbf{B}}\pi_{(s,\mathbf{A}_r)} : \widehat{T}^{\mathbf{B}}B^{(s,\mathbf{A}_r)}E \to \widehat{T}^{\mathbf{B}}E \tag{5}$$

со структурной группой $\widehat{T}^{\mathbf{B}}_0(D^s_n(\mathbf{A}_r) \times \mathbf{R}^N) = T^{\mathbf{B}}D^s_n(\mathbf{A}_r)$.

Атлас на расслоении $p : E \to U$ индуцирует атлас на расслоении $p^{\mathbf{B}} : \widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to U$ такой, что ограничение на слои его функций склейки являются $\mathbf{B}$-гладкими отображениями [1]. $\mathbf{A}_r(n, q+r+s)$-струи $\mathbf{B}$-гладких ростков локальных карт этого расслоения образуют главное расслоение

$$B^{(s,\mathbf{A}_r)}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to \widehat{T}^{\mathbf{B}}E \tag{6}$$

слоевых $\mathbf{B}$-гладких $(s, \mathbf{A}_r)$-реперов на $p^{\mathbf{B}} : \widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to U$.

Предложение 1. *Главные расслоения* (5) *и* (6) *изоморфны в категории* $\mathcal{M}f^N$.

Доказательство. Обозначим через $VB^pE \to E$ расслоение слоевых p-реперов расслоения $p : E \to U$. Многообразие VB^pE является открытым подмногообразием в многообразии VT^p_nE слоевых (n,p)-скоростей расслоения $p : E \to U$ и образовано p-струями ростков диффеоморфизмов вида $(\mathbf{R}^n, 0) \to p^{-1}(t)$ при любом $t \in U$. Главное расслоение $(s, \mathbf{A}_r)$-реперов (2) изоморфно факторрасслоению расслоения $\widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}E \to E$, получающемуся из расслоения $\widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}E \to E$ переходом к струям порядка $(q+r+s)$.

Аналогично случаю функторов Вейля $T^{\mathbf{A}}$ на категории гладких многообразий (см., например, [7], [10]) имеют место следующие естественные эквивалентности для обобщенных функторов Вейля на категории $\mathcal{M}f^N$:

$$\widehat{T}^{\mathbf{A}} \circ \widehat{T}^{\mathbf{B}} \sim \widehat{T}^{\mathbf{B}} \circ \widehat{T}^{\mathbf{A}}, \quad \widehat{T}^{\mathbf{B}} \circ VT^p_n \sim VT^p_n \circ \widehat{T}^{\mathbf{B}}.$$

Отсюда следует эквивалентность расслоений $\widehat{T}^{\mathbf{B}}\widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}E \to E$ и $\widehat{T}^{\mathbf{A}_r}\widehat{T}^{\mathbf{B}}VB^{q+r+s}E \to E$, а также расслоений $\widehat{T}^{\mathbf{B}}VT_n^{q+r+s}E \to E$ и $VT_n^{q+r+s}\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to E$. Гладкий росток $(\mathbf{R}^n, 0) \to ((p^{\mathbf{B}})^{-1}(t), X)$ однозначно продолжается до послойно (над U) $\mathbf{B}$-гладкого ростка $(\mathbf{B}^n, 0) \to ((p^{\mathbf{B}})^{-1}(t), X)$. Поэтому расслоение $VT_n^{q+r+s}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to E$ струй послойно (над U) $\mathbf{B}$-гладких ростков $(\mathbf{B}^n, 0) \to ((p^{\mathbf{B}})^{-1}(t), X)$ изоморфно расслоению $VT_n^{q+r+s}\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to E$. Поскольку $\mathbf{B}$-гладкий росток $(\mathbf{B}^n, 0) \to ((p^{\mathbf{B}})^{-1}(t), X)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим определяемый им росток $(\mathbf{R}^n, 0) \to (p^{-1}(t), \pi^{\mathbf{B}}(X))$ (см., например, [12]), то изоморфны главные расслоения $\widehat{T}^{\mathbf{B}}VB^{q+r+s}E \to E$ и $VB^{q+r+s}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to E$.

Из всего вышесказанного вытекает изоморфизм следующих расслоений над E:

$$\widehat{T}^{\mathbf{B}}\widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}E \longrightarrow \widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E. \tag{7}$$

Расслоенные многообразия в (7) являются послойно $\mathbf{B}\otimes\mathbf{A}_r\otimes\mathbf{R}(n, q+r+s)$-гладкими. Факторизуя их по $\mathbf{B}\otimes\mathrm{Rad}(\mathbf{A}_r\otimes\mathbf{R}(n, q+r+s))^{q+r+s}$-подмногообразиям [13], получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{T}^{\mathbf{B}}\widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}E & \longrightarrow & \widehat{T}^{\mathbf{A}_r}VB^{q+r+s}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{T}^{\mathbf{B}}B^{(s,\mathbf{A}_r)}E & \longrightarrow & B^{(s,\mathbf{A}_r)}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E,
\end{array}$$

в которой отображение в нижней строке является изоморфизмом расслоений над E. $\square$

2. A-аффинные связности на многообразиях, зависящих от параметров

Применяя теперь функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbf{B}}$ к отображению (4), задающему поле геометрического объекта на E, получим $T^{\mathbf{B}}D_n^s(\mathbf{A}_r)$-эквивариантное отображение

$$\widehat{T}^{\mathbf{B}}\tilde{\sigma} : B^{(s,\mathbf{A}_r)}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to T^{\mathbf{B}}F\,,$$

определяющему послойно $\mathbf{B}$-гладкое поле геометрического объекта

$$\widehat{T}^{\mathbf{B}}\sigma : \widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to B^{(s,\mathbf{A}_r)}(\mathbf{B})E[T^{\mathbf{B}}F, T^{\mathbf{B}}L]$$

$(s, \mathbf{A}_r, T^{\mathbf{B}}F)$-типа на многообразии $\widehat{T}^{\mathbf{B}}E$, которое будем называть $\mathbf{B}$-лифтом поля геометрического объекта σ.

Таким образом, для всякой локальной алгебры $\mathbf{B}$ ширины N определен естественный оператор $\widehat{T}^{\mathbf{B}}$ $\mathbf{B}$-лифта на категории $\mathcal{M}f^N$ многообразий, зависящих от N параметров.

В качестве приложения этой общей конструкции рассмотрим лифт $\mathbf{A}$-аффинной связности [1] с E на расслоение $\widehat{T}^{\mathbf{B}}E$.

$\mathbf{A}$-аффинная связность на E задается [1] $D_n(\mathbf{A})$-эквивариантным сечением

$$\Gamma^{\mathbf{A}} : B^{\mathbf{A}}E \to J^1B^{\mathbf{A}}E \tag{8}$$

расслоения 1-струй сечений $E \to \mathbf{B}^{\mathbf{A}}E$ расслоения $\mathbf{A}$-аффинных реперов. На многообразии $J^1B^{\mathbf{A}}E$ индуцируется действие группы Ли $D_n(\mathbf{A})$. Положим $Q^{\mathbf{A}}E = J^1B^{\mathbf{A}}E/D_n(\mathbf{A})$. Отображение (8) индуцирует сечение $\Gamma' : E \to Q^{\mathbf{A}}$, которое представляет собой поле объекта $\mathbf{A}$-аффинной связности на E.

Предложение 2. *Расслоение $Q^{\mathbf{A}}E \to E$ объекта $\mathbf{A}$-аффинной связности ассоциировано с главным расслоением $\pi_{\mathbf{A}_1} : B^{\mathbf{A}_1}E \to E$ $\mathbf{A}_1$-аффинных реперов.*

Доказательство. На главном расслоении $B^{\mathbf{A}}E \to E$ $\mathbf{A}$-аффинных реперов имеется канонический атлас, образованный картами вида

$$\begin{array}{ccc} D_n(\mathbf{A}) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow{B^{\mathbf{A}}\varphi} & B^{\mathbf{A}}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow{\varphi} & E\,. \end{array} \tag{9}$$

Переходя к 1-струям сечений в диаграмме (9) и факторизуя по действию группы $D_n(\mathbf{A})$, получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} T^1_{n+N}D_n(\mathbf{A}) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow{J^1B^{\mathbf{A}}\varphi} & J^1B^{\mathbf{A}}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T^1_{n+N})_eD_n(\mathbf{A}) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow{Q^{\mathbf{A}}\varphi} & Q^{\mathbf{A}}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N & \xrightarrow{\varphi} & E\,, \end{array} \tag{10}$$

где $T^1_{n+N}D_n(\mathbf{A})$ — расслоение $(N+n,1)$-скоростей Эресмана [7] над $D_n(\mathbf{A})$. Здесь $Q^{\mathbf{A}}\varphi$ — факторотображение отображения $J^1B^{\mathbf{A}}\varphi$ относительно индуцированного действия группы $D_n(\mathbf{A})$.

Ограничение на слой над точкой $(0,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ ростка $J^1 B^{\mathbf{A}}\varphi$ зависит лишь от $\mathbf{A}_1(n,q+1)$-струи ростка φ. Очевидно, что тогда то же самое утверждение имеет место и для отображения $Q^{\mathbf{A}}\varphi$. Введем обозначения $B^{\mathbf{A}_1}E = B^{(0,\mathbf{A}_1)}E$, $D_n(\mathbf{A}_1) = D_n^0(\mathbf{A}_1)$. Группа $D_n(\mathbf{A}_1)$ действует на $(T^1_{n+N})_e D_n(\mathbf{A})$. Это действие определяется следующим образом: пусть $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ и $g = j_0^{\mathbf{A}_1(n,q+1)} f \in D_n(\mathbf{A}_1)$, а $j^1\kappa \in (T^1_{n+N})_e D_n(\mathbf{A})$, тогда $g(j^1\kappa) = j^1(B^{\mathbf{A}} f \circ \kappa)$. Росток карты $\varphi : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N, 0) \to E$ индуцирует росток карты (аналогично диаграмме (9))

$$B^{\mathbf{A}_1}\varphi : (D_n(\mathbf{A}_1) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N, (e,0)) \longrightarrow B^{\mathbf{A}_1}E.$$

Относя паре $j^1\varphi \in B^{\mathbf{A}_1}E$ и $j^1\kappa \in (T^1_{n+N})_e D_n(\mathbf{A})$ элемент $Q^{\mathbf{A}}\varphi(j^1\kappa)$, получим отображение

$$\Psi : B^{\mathbf{A}_1}E \times (T^1_{n+N})_e D_n(\mathbf{A}) \to Q^{\mathbf{A}}E.$$

Это отображение Ψ ассоциирует расслоение $Q^{\mathbf{A}}E \to E$ с главным расслоением $B^{\mathbf{A}_1}E \to E$ $\mathbf{A}_1$-аффинных реперов. □

Пусть

$$\tilde{\Gamma}^{\mathbf{A}} : B^{\mathbf{A}_1}E \to (T^1_{n+N})_e D_n(\mathbf{A})$$

есть $D_n(\mathbf{A}_1)$-эквивариантное отображение (4), задающее объект $\Gamma^{\mathbf{A}}$ $\mathbf{A}$-аффинной связности на E. Лифт объекта $\Gamma^{\mathbf{A}}$ на расслоение Вейля $\pi^{\mathbf{B}} : \widehat{T}^B E \to E$ с помощью оператора $\widehat{T}^{\mathbf{B}}$ определяет послойно $\mathbf{B}$-гладкий объект $\mathbf{A}$-аффинной связности на многообразии $\widehat{T}^{\mathbf{B}}E$, задаваемый $\widehat{T}^{\mathbf{B}}(D_n(\mathbf{A}_1))$-эквивариантным отображением

$$\widehat{T}^{\mathbf{B}}\tilde{\Gamma}^{\mathbf{A}} : B^{\mathbf{A}_1}(\mathbf{B})\widehat{T}^{\mathbf{B}}E \to T^{\mathbf{B}}((T^1_{n+N})_e D_n(\mathbf{A})).$$

В качестве примера рассмотрим случай $N = 1$ и $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{R}(\varepsilon)$. В этом случае $\mathbf{A}_1 = \mathbf{R}(\varepsilon^2)$ — алгебра плюральных чисел высоты 2 ($\varepsilon^3 = 0$, $\widehat{T}^{\mathbf{R}(\varepsilon)}E$ — аффинное расслоение и $\Gamma^{\mathbf{R}(\varepsilon)} : E \to Q^{\mathbf{R}(\varepsilon)}E$ — аффинная связность [2]. Связность $\Gamma^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ задается $D_n(\mathbf{R}(\varepsilon^2))$-эквивариантным отображением

$$\tilde{\Gamma}^{\mathbf{R}(\varepsilon)} : B^{\mathbf{R}(\varepsilon)^2}E \to \mathfrak{ga}(n,\mathbf{R}) \otimes (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}),$$

где $\mathfrak{ga}(n,\mathbf{R})$ — алгебра Ли аффинной группы $GA(n,\mathbf{R})$. Объект связности (элемент стандартного слоя расслоения объекта связности $Q^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$) задается координатами $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{0k}, \Gamma^i_{j0}, \Gamma^i_{00}\}$, $i,j,k = 1,\dots,n$.

Далее, пусть на расслоении $B^{\mathbf{R}(\varepsilon)^2}E$ введены локальные координаты

$$(Z^i = x^i + z^i_j\tau^j + z^i_0\varepsilon + z^i_{j0}\tau^j\varepsilon + z^i_{jk}\tau^j\tau^k + z^i_{00}\varepsilon^2 \in \mathbf{R}(n+1,2)^n, \ t \in \mathbf{R},$$

где $\{\tau^i, i = 1, \ldots, n, \varepsilon, \}$ — система образующих в максимальном идеале $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(n+1,2)$ алгебры $\mathbf{R}(n+1,2)$. В этих координатах отображение $\tilde{\Gamma}^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ задается уравнениями

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^i_{jk}(Z^i,t) & = & \tilde{z}^l_j\tilde{z}^m_k(z^i_n\gamma^n_{lm} + z^i_{lm}) \\ \Gamma^i_{0k}(Z^i,t) & = & \tilde{z}^l_k\left[z^i_n\gamma^n_l + z^i_{l0} - \tilde{z}^j_m z^m_0(z^i_n\gamma^n_{jl} + z^i_{jl})\right] \\ \Gamma^i_{j0}(Z^i,t) & = & \tilde{z}^l_j\left[z^i_n\overline{\gamma}^n_l + z^i_{l0} - \tilde{z}^k_m z^m_0(z^i_n\gamma^n_{lk} + z^i_{lk})\right] \\ \Gamma^i_{00}(Z^i,t) & = & z^i_n\gamma^n + z^i_{00} - \tilde{z}^k_m z^m_0\left[z^i_n(\gamma^n_k + \overline{\gamma}^n_k) + \right. \\ & & \left. +2z^i_{k0} + \tilde{z}^j_m z^m_0(z^i_n\gamma^n_{kj} + 2z^i_{kj})\right], \end{array} \qquad (11)$$

где $\gamma^i_{jk}(x^i,t), \gamma^i_k(x^i,t), \overline{\gamma}^i_j(x^i,t), \gamma^i(x^i,t)$ — произвольные функции (заданные в точках натурального сечения), а $(\tilde{z}^j_m)$ — матрица, обратная к (z^j_m). Применение функтора $\widehat{T}^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ к отображению $\tilde{\Gamma}^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ дает $\mathbf{R}(\varepsilon)$-гладкое отображение

$$\widehat{T}^{\mathbf{R}(\varepsilon)}\tilde{\Gamma}^{\mathbf{R}(\varepsilon)} : B^2(\mathbf{R}(\varepsilon))\widehat{T}^{\mathbf{R}(\varepsilon)}E \to \mathfrak{ga}(n,\mathbf{R}) \otimes (\mathbf{R}(\varepsilon)^n \oplus \mathbf{R}(\varepsilon)),$$

имеющее в индуцированных координатах имеет вид, аналогичный (11), с той лишь разницей, что координаты реперов и функции в правой и левой части принимают значения в алгебре $\mathbf{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел.

Литература

[1] Бушуева Г.Н. *Расслоения Вейля над многообразиями, зависящими от параметров.*//В сб. Движения в обобщенных пространствах. Пенза. 2002. 24–34.

[2] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основания дифференциальной геометрии.*, т. I, М., Наука, 1981, 344 с.

[3] Султанов А.Я. *Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля.* Изв. вузов. Математика., 1999, N 9, 81–90.

[4] Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ), т. 12. М., 1981, с. 61–95.

[5] Шурыгин В.В. *Проектируемые геометрические объекты на расслоении A-струй.* Труды геом. сем., вып. 20. Изд-во Казанск. ун-та, 1990, с.120–126.

[6] Cabras A., Kolář I. *Prolongation of second order connections to vertical Weil bundles.* Arch. Math., 2001, vol. 37, 333–347.

[7] Kolář I., Michor P., Slovák J. *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer-Verlag. 1993.

[8] Kurek J., Mikulski W.M. *The natural operators lifting* 1*-forms to some vector bundle functors.* Colloq. Math., 2002, vol. 93, no. 2, 259–265.

[9] Mikulski W.M. *The natural operators lifting vector fields to generalized higher order tangent bundles.* Arch. Math., 2000, vol. 36, 207–212.

[10] Morimoto A., *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points.* J. Different. Geom., 1976, vol. 11, no. 4, 479–498.

[11] Patterson L.-N. *Connexions and prolongations.* Canad. J. Math., 1975, vol. 27, no. 4, pp. 766–791.

[12] Shurygin V.V., *The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras.* Lobachevskii J. of Math., vol. 5, 1999, 29–55.

[13] Shurygin V.V., *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles.* J. of Math. Sci. vol. 108, no. 2, 2002, 249–294.

[14] Weil A. *Théorie des points proches sur les variététes différentiables.* Colloque internat. centre nat. rech. sci., vol 52, Strasbourg, 1953 , pp. 111–117.

[15] Yuen P.C. *Prolongements de G-structures aux espaces de prolongement.* C. r. Acad. sci., 1970, vol. 270, N 3, pp. A538–A540.

Адрес: *Казанский государственный университет, кафедра геометрии, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Mathematical Department, Chair of Geometry, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Galina.Bushueva@ksu.ru*