С. Р. Насыров, Сходимость к ядру римановых поверхностей и их универсальных накрытий, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 82–95

С.Р.Насыров

СХОДИМОСТЬ К ЯДРУ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ НАКРЫТИЙ

Эта статья является непосредственным продолжением работы [I], мы используем в ней основные обозначения и определения [I]. Краткое изложение основного результата (теорема 2) опубликовано в [2, теорема 5].

Пусть $\sigma_m = (R_m, P_m, \pi_m), m \geq 1$, последовательность римановых поверхностей над $\overline{\mathbb{C}}$, $\pi_m(P_m) \to z_0$, $m \to \infty$. Рассмотрим множество $\mathcal{G}_1\{\sigma_m\}$ римановых поверхностей $\sigma = (R, P, \pi)$ таких, что а) $\sigma(S) \in \mathfrak{M}\{\sigma_m(S_m)\}$ для некоторых $S_m \in \hat{R}_m(\sigma_m)$, $S \in \hat{R}(\sigma)$, в) если j_m – канонические вложения, индуцированные а), то для любого $i: K_n(z_1, \delta) \hookrightarrow (R, T, \pi)$ образ $j_m \circ j(\{|\zeta| = r\})$, $r < 1$, разбивает σ_m на две части, одна из которых является n-листным односвязным сферическим кругом с центром в $z_1(m - as)$, с) если в пункте в) точка T совпадает с P, то этот n-листный круг содержит P_m $(m - as)$ $(m - as$ означает "асимптотически по m", т.е. "при больших m"). Отметим, что в отличие от определения $\mathcal{G}\{\sigma_m\}$ здесь в пункте в) требуется, чтобы n-листные круги были односвязными. Будем обозначать через $Ker_1\{\sigma_m\}$ множество максимальных элементов в $\mathcal{G}_1\{\sigma_m\}$, если это множество не пусто, в противном случае $Ker_1\{\sigma_m\}$ состоит по определению из единственного элемента z_0. Будем говорить, что последовательность σ_m сходится регулярно к $\alpha \in Ob(\mathcal{RP})$, и писать $\sigma_m \rightarrowtail \alpha$, если $\alpha \in Ker_1\{\sigma_{m_k}\}$ для любой подпоследовательности σ_{m_k} последовательности σ_m. Для регулярной сходимости справедливы аналоги всех тех результатов из [I], которые имеют место для обычной сходимости. Ясно также, что для односвязных римановых поверхностей, а также для поверхностей без точек ветвления регулярная сходимость равносильна обычной.

Пусть γ кривая в топологическом пространстве X, не обязательно замкнутая. Через $|\gamma|$ будем обозначать носитель кривой γ, а через $[\gamma]_X$ – гомотопический класс кривой γ в X (относительно концов). Гомотопический класс точечной кривой будем обозначать через e_X или просто e. Если $f: X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств, то через

$f_{\#}$ обозначим индуцированное им отображение фундаментальных группоидов. Пусть H – некоторое подмножество группы G. Оболочкой множества H называется подгруппа в G, порожденная всевозможными сопряжениями элементов множества H. Элементы оболочки называются следствиями элементов из H [3, гл. IУ, п.I].

Определение I. Последовательность римановых поверхностей $\mathcal{G}_m$ сходится к римановой поверхности $\mathcal{G}$ с сохранением связности, если выполняются условия: а) $\mathcal{G}_m \rightarrowtail \mathcal{G}$; в) если γ – замкнутая кривая в $\check{R}(\mathcal{G})$, $[\gamma]_R \neq e$, то $[j_m \circ \gamma]_{R_m} \neq e\,(m-a\mathfrak{z})$, где j_m – канонические вложения, определенные выше.

П р и м е р. $\mathcal{G}_m = (E, \frac{1}{2}, z + \frac{1}{mz})$ сходится регулярно к $\mathcal{G} = (E\setminus\{0\}, \frac{1}{2}, z)$, однако не сходится к $\mathcal{G}$ с сохранением связности, так как, к примеру, кривая γ, однократно обходящая точку 0 в $E\setminus\{0\}$, не гомотопна точечной в $E\setminus\{0\}$, в то время как $[j_m \circ \gamma]_E = e\,(m-a\mathfrak{z})$, так как E односвязно.

Справедлива

Лемма I. Если γ замкнутая кривая в $\check{R}(\mathcal{G})$, $[\gamma]_R = e$ и $\mathcal{G}_m \to \mathcal{G}$ с сохранением связности, то $[j_m \circ \gamma]_{R_m} = e\,(m-a\mathfrak{z})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что существует компакт Q в $\check{R}(\mathcal{G})$ и кривая β такие, что $|\gamma|, |\beta| \subset Q$, кривые γ и β гомотопны в Q, а кривая β является произведением петель $\alpha_k \beta_k^{n_k} \alpha_k^{-}$, $k = \overline{1, \ell}$, где β_k – простая замкнутая кривая в R, проекция которой на $\mathbb{C}$ есть n_k – кратно обходимая окружность, охватывающая некоторую точку ветвления T_k в $\mathcal{G}$, т.е. $|\beta_k^{n_k}| = i_k(\{|\zeta| = \varepsilon\})$, где $i_k : K_{n_k}(z_k, \delta) \hookrightarrow (R, T_k, \pi)$. В силу условия а) определения I $\mathcal{G}_m \to \mathcal{G}$ регулярно. Поэтому $j_m \circ \beta_k^{n_k}$ ограничивает односвязный круг в $R_m(m-a\mathfrak{z})$, т.е. $[j_m \circ \beta_k^{n_k}]_{R_m} = e\,(m-a\mathfrak{z})$. Значит, $[j_m \circ \beta]_{R_m} = \prod_k [j_m \circ \alpha_k]_{R_m} \times [j_m \circ \beta_k^{n_k}]_{R_m} [j_m \circ \alpha_k]^{-1}_{R_m} = e\,(m-a\mathfrak{z})$. Наконец, поскольку $[\gamma]_Q = [\beta]_Q$, имеем $[j_m \circ \gamma]_{j_m(Q)} = [j_m \circ \beta]_{j_m(Q)}\,(m-a\mathfrak{z})$, а значит $[j_m \circ \gamma]_{R_m} = [j_m \circ \beta]_{R_m} = e\,(m-a\mathfrak{z})$.

Сходимость с сохранением связности локально равномерна:

Лемма 2. Пусть $\mathcal{G}_m \to \mathcal{G}$ и Q – компакт в $\check{R}(\mathcal{G})$. Тогда существует номер N, зависящий только от Q, такой, что для любого $m \geq N$ и любой кривой γ, $|\gamma| \subset Q$,

I) $[\gamma]_R = e \Leftrightarrow [j_m \circ \gamma]_{R_m} = e$; II) $[\gamma]_R \neq e \Leftrightarrow [j_m \circ \gamma]_{R_m} \neq e$.

Для доказательства леммы 2 нам понадобится

Лемма 3. Пусть $\sigma = (R, P, \pi)$, Q – связная область в R с компактным замыканием, ограниченная конечным числом простых замкнутых кривых $\beta_1, \ldots, \beta_s$ в R, $P \in Q$. Пусть кривая α_i соединяет точку P с началом кривой β_i в $\bar{Q}$, $i = \overline{1,s}$ и $\gamma_i = \alpha_i \beta_i \alpha_i^-$, $i = \overline{1,s}$. Если γ – кривая в $\bar{Q}$ с началом в точке P и $[\gamma]_R = e$, то $[\gamma]_{\bar{Q}}$ принадлежит оболочке элементов $[\gamma_i]_{\bar{Q}}$, $i \in A$, в фундаментальной группе $\bar{Q}$, где $A = \{1 \leq i \leq s \mid [\gamma_i]_R = e\}$.

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрытие $p: (\tilde{R}, \tilde{P}) \to (R, P)$ для (R, P). Пусть $\tilde{Q}$ – компонента связности множества $p^{-1}(Q)$, содержащая точку $\tilde{P}$. Тогда $\tilde{Q}$ ограничена в $\tilde{R}$ не более, чем счетным числом простых замкнутых кривых, носители которых – компоненты связности множества $B_1 = \bigcup_{i \in A} p^{-1}(|\beta_i|)$, и разомкнутых дуг – компонент связности множества $B_2 = \bigcup_{i \notin A} p^{-1}(|\beta_i|)$. Это следует из общих свойств накрывающих многообразий и теоремы о монодромии (см., напр., [4 – 6]). По той же теореме кривая $\tilde{\gamma}$, которая является поднятием кривой γ из точки $\tilde{P}$, замкнута. Пусть $\tilde{Q}'$ – компонента связности множества $\tilde{R} \setminus B_2$, содержащая точку $\tilde{P}$. Тогда $\tilde{Q}'$ односвязна и $\tilde{Q} \subset \tilde{Q}'$, причем $\tilde{Q}' \setminus \bar{\tilde{Q}}$ есть объединение не более, чем счетного числа жордановых областей, каждая из которых ограничена некоторой компонентой связности множества B_1. Отсюда следует, что фундаментальная группа $\mathcal{F}(\bar{\tilde{Q}})$ в точке $\tilde{P}$ есть свободная группа с образующими $[\tilde{\alpha}_{k\ell} \tilde{\beta}_{k\ell} \tilde{\alpha}_{k\ell}^-]_{\bar{\tilde{Q}}}$, где $\tilde{\beta}_{k\ell}$ – простая замкнутая кривая в $\bar{\tilde{Q}}$, являющаяся поднятием β_k из некоторой точки, $|\tilde{\beta}_{k\ell}| \subset \partial\tilde{Q}$, $\tilde{\alpha}_{k\ell}$ – кривая в $\bar{\tilde{Q}}$, соединяющая $\tilde{P}$ с началом $\tilde{\beta}_{k\ell}$. Поскольку $[p(\tilde{\alpha}_{k\ell} \tilde{\beta}_{k\ell} \tilde{\alpha}_{k\ell}^-)]_{\bar{Q}} = [p(\tilde{\alpha}_{k\ell}) \beta_k p(\tilde{\alpha}_{k\ell})^-]_{\bar{Q}} = [p(\tilde{\alpha}_{k\ell}) \alpha_k^-]_{\bar{Q}} \cdot [\gamma_k]_{\bar{Q}} \cdot [p(\tilde{\alpha}_{k\ell}) \alpha_k^-]_{\bar{Q}}^{-1}$, образ $p'_{\#}(\tilde{\alpha}_{k\ell} \tilde{\beta}_{k\ell} \tilde{\alpha}_{k\ell}^-)$, где $p' = p|_{\bar{\tilde{Q}}} : \bar{\tilde{Q}} \to \bar{Q}$, принадлежит оболочке $\mathcal{O}$ элементов $[\gamma_i]_{\bar{Q}}$, $i \in A$. Значит, $p'_{\#}(\mathcal{F}(\bar{\tilde{Q}})) \subset \mathcal{O}$. В частности, $p'_{\#}([\tilde{\gamma}]_{\bar{\tilde{Q}}}) = [\gamma]_{\bar{Q}} \in \mathcal{O}$. Лемма 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о **леммы** 2. Можно считать, что Q удовлетворяет условиям леммы 3, в противном случае расширим Q до нужной области.

I) Если $|\gamma| \in Q$, $[\gamma]_R = e$, то по лемме 3 в обозначениях той же леммы $[\gamma]_{\bar{Q}}$ принадлежит оболочке элементов $[\gamma_i]_{\bar{Q}}$, $i \in \in A$. Так как $[\gamma_i]_R = e$, $i \in A$, то по лемме I $[j_m \circ \gamma_i]_{R_m} = e(m-a_1)$, $i \in A$. Поскольку множество A конечно, это условие выполняется для всех $i \in A$ при $m \geqslant N = N(Q)$. Из этого вытекает, что j_m переводит O в единичную подгруппу фундаментальной группы $\mathcal{F}(R_m)$. Значит, $[j_m \circ \gamma]_{R_m} = e(m-a_1)$.

II) Предположим противное. Тогда существует последовательность кривых $\gamma^{(m_k)}$ в R, таких, что $|\gamma^{(m_k)}| \subset Q$, $[\gamma^{(m_k)}]_R \neq e$, но $[\gamma_{m_k}]_{R_{m_k}} = e$, где $\gamma_{m_k} = j_{m_k} \circ \gamma^{(m_k)}$. Пусть $Q_{m_k} = j_{m_k}(Q)$. В силу леммы 3 в ее обозначениях $[\gamma_{m_k}]_{\bar{Q}_{m_k}}$ является следствием элементов $[j_{m_k} \circ \gamma_i]_{\bar{Q}_{m_k}}$, $i \in A_{m_k}$, где $A_{m_k} = \{1 \leqslant i \leqslant s \mid [j_{m_k} \circ \gamma_i]_{R_{m_k}} = e\}$. Так как число различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, s\}$ конечно, то, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $A_{m_k} = A$ не зависит от k. В силу условия в) определения I отсюда следует, что $[\gamma_i]_R = e$, $i \in A$. Но так как j_{m_k} отображает гомеоморфно $\bar{Q}$ на $\bar{Q}_{m_k}$, то $[\gamma^{(m_k)}]_{\bar{Q}}$ есть следствие элементов $[\gamma_i]_{\bar{Q}}$, $i \in A$, а поскольку $[\gamma_i]_R = e$, $i \in A$, то $[\gamma^{(m_k)}]_R = j_\#([\gamma^{(m_k)}]_{\bar{Q}}) =$

$$= \prod_i j_\#([\delta_{n(i)}]_{\bar{Q}} [\gamma_{n(i)}]_{\bar{Q}} [\delta_{n(i)}]_{\bar{Q}}^{-1}) = \prod_i [\delta_{n(i)}]_R [\delta_{n(i)}]_R^{-1} = e,$$

где $j: \bar{Q} \to R$ – вложение. Лемма 2 доказана.

Отметим следующий интересный факт.

<u>Теорема I</u>. Римановы поверхности без точек ветвления сходятся с сохранением связности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma_m \to \sigma$, причем все σ_m и σ не имеют точек ветвления. Тогда $\sigma_m \rightarrowtail \sigma$ (в самом деле, n-листный круг без точек ветвления есть однолистный круг, т.е. односвязный). Итак, условие а) определения I выполнено. Докажем, что имеет место в). Предположим противное. Пусть γ – кривая в R, такая что $[\gamma]_R \neq e$, но $[\gamma_{m_k}]_{R_{m_k}} = e$, где $\gamma_{m_k} = j_{m_k} \circ \gamma$

для некоторой подпоследовательности. Пусть Q - область в R, удовлетворяющая условиям леммы 3, содержащая $|\gamma|$, $Q_{m_k}=j_{m_k}(Q)$. Выбирая в случае необходимости подпоследовательность (как и при доказательстве леммы 2, п.П), с использованием леммы 3 получаем, что существует такое множество A, что $[\gamma_{m_k}]_{\bar{Q}_{m_k}}$ лежит в оболочке элементов $[j_{m_k}\circ\gamma_i]_{\bar{Q}_{m_k}}$, $i\in A$, причем $[\beta^i_{m_k}]_{R_{m_k}}=e$, $i\in A$, где $\beta^i_{m_k}=j_{m_k}\circ\beta_i$. Так как кривые $\beta^i_{m_k}$ простые, замкнутые и гомотопны точечным в R_{m_k}, то они гомологичны нулю в R_{m_k}, $i\in A$. Значит, либо $\beta^i_{m_k}$, либо $(\beta^i_{m_k})^-$ является ориентированной границей односвязной подобласти R'_{m_k} в R_{m_k}. Отметим, что $\mathcal{T}_{m_k}(\beta^i_{m_k})=\mathcal{T}_{m_k}\circ j_{m_k}\circ\beta_i=\mathcal{T}\circ\beta_i$ не зависит от k. Используя лемму 3 из [I] и переходя в случае необходимости к под - последовательности, получаем, что римановы поверхности $\sigma'_{m_k}=$ $=(R'_{m_k},T_{m_k},\mathcal{T}_{m_k}|_{R'_{m_k}})$ (для некоторых точек T_{m_k}) попарно эквивалентны и их ориентированной границей в R является $\beta^i_{m_k}$ (случай $(\beta^i_{m_k})^-$ рассматривается аналогично). В силу того, что σ является максимальным элементом в $\mathcal{G}\{\sigma_m\}$, существует точка $T\in R$ и область R' в R такие, что $\sigma'=(R',T,\mathcal{T}|_{R'})$ эквивалентна всем σ'_{m_k}, причем граница R' в R есть $|\beta_i|$. Так как все σ_{m_k} односвязны, то и R' односвязна. Поэтому β_i стягиваема в R и $[\gamma_i]_R=[\alpha_i\beta_i\alpha_i^-]=e$, $i\in A$. Наконец, так как $[\gamma]_{\bar{Q}}$ есть следствие элементов $[\gamma_i]_{\bar{Q}}$, $i\in A$, то $[\gamma]_R$ есть следствие элементов $[\gamma_i]_R$, $i\in A$, т.е. $[\gamma]_R=e$. Теорема I доказана.

Пусть $\sigma=(R,P,\mathcal{T})$ - риманова поверхность над $\bar{\mathbb{C}}$, p : $\tilde{R}\to R$ универсальное накрытие абстрактной римановой поверхности R, $\tilde{P}$ - точка $\tilde{R}$, такая, что $p(\tilde{P})=P$. Универсальным накрытием σ назовем тройку $\tilde{\sigma}=(\tilde{R},\tilde{P},\tilde{\mathcal{T}})$, где $\tilde{\mathcal{T}}=\mathcal{T}\circ p$. Как известно, универсальное накрытие для R определяется с точностью до эквивалентности. Стандартной является реализация $\tilde{R}$ как множества гомотопических классов $[\gamma]_R$ кривых γ в R с началом в точке P с нетрудно определяемой топологической и комплексной структурой (см., напр., [4 - 6]). Отображение p : $\tilde{R}\to R$ определяется по формуле $p([\gamma]_R)=P'$, где P' - конечная точка γ.

Теперь установим теорему о связи сходимости последовательности римановых поверхностей со сходимостью последовательности их универсальных накрытий.

Теорема 2. Последовательность римановых поверхностей $\sigma_m = (R_m, P_m, \pi_m)$ сходится к римановой поверхности $\sigma = (R, P, \pi)$ с сохранением связности тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

I) последовательность универсальных накрытий $\tilde{\sigma}_m = (\tilde{R}_m, \tilde{P}_m, \tilde{\pi}_m)$ римановых поверхностей σ_m сходится к универсальному накрытию $\tilde{\sigma} = (\tilde{R}, \tilde{P}, \tilde{\pi})$ римановой поверхности σ;

II) канонические вложения j_m, индуцированные сходимостью $\tilde{\sigma}_m \to \tilde{\sigma}$, можно подобрать таким образом, что $p_m \circ \tilde{j}_m$ сходятся равномерно внутри $\tilde{R}(\tilde{\sigma})$ к p (где $p_m : \tilde{R}_m \to R_m$, $p : \tilde{R} \to R$ – накрывающие отображения) в том смысле, что для любой подобласти $Q \subset\subset \tilde{R}(\tilde{\sigma})$, содержащей точку $\tilde{S}$, римановы поверхности $(Q_m = p_m \circ \tilde{j}(\tilde{Q}), p_m \circ \tilde{j}(\tilde{S}), \pi_m|_{Q_m})$ эквивалентны $(Q = p(\tilde{Q}), p(\tilde{S}), \pi|_Q)(m - a s)$.

Перед доказательством теоремы отметим следующий почти очевидный факт. Если $\sigma_m = (R_m, P_m, \pi_m)$ сходятся к $\sigma = (R, P, \pi)$, j_m – канонические вложения, а $T \in R$ и $T_m \in R_m$ такие точки, что для любого круга $i : K(z, \varepsilon) \hookrightarrow (R, T, \pi)$ образ окружности $j_m \circ i(\{|\zeta| = 1/2\})$ разбивает R на две части, причем одна из них – R_{1m} является n-листным кругом, содержащим T_m, и $z \in \pi_m(R_{1m})$. Тогда $\sigma'_m = (R_m, T_m, \pi_m) \to \sigma' = (R, T, \pi)$ и канонические вложения, индуцированные сходимостями $\sigma_m \to \sigma$ и $\sigma'_m \to \sigma'$, можно выбрать совпадающими. В частности, это верно, если $T \in \check{R}(\sigma)$ и $T_m = j_m(T)(m - a s)$. Из этого замечания следует, что при доказательстве теоремы 2 можно считать, что P_m и P не являются точками ветвления и $P_m = j_m(P)\ (m - a s)$.

Доказательство теоремы 2 проведем в два этапа.

A) Сначала докажем утверждение теоремы в предположении, что σ_m и σ не имеют точек ветвления.

Необходимость. I) Пусть $\tilde{\tau} \subset\hookrightarrow \tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau} = (\tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{\pi}|_{\tilde{Q}})$. Так как p непрерывно и образ компакта при непрерывном отображении есть компакт, то $\tau \subset\hookrightarrow \sigma$, где $\tau = (Q, P, \pi|_Q)$, $Q = p(\tilde{Q})$. Ясно, что $\tilde{Q} \subset \{[\gamma]_R \mid \gamma$ – кривая в Q, соединяющая P с некоторой точкой $P'\}$. Действительно, если $\tilde{P}_1 \in \tilde{Q}$ и $\tilde{\gamma}_1$ – кривая в $\tilde{Q}$, соединяющая точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$, то $\tilde{P}_1 = [p(\tilde{\gamma}_1)]_R$, а

$|p(\tilde{\gamma}_1)| < p(\tilde{Q}) = Q$. Теперь можно определить вложения $\tilde{j}_m : \tau \to \to \sigma_m \ (m-a\mathfrak{s})$ по формуле $\tilde{j}_m([\gamma]_R) = [j_m(\gamma)]_{R_m}$, где γ – кривая в Q . Это определение корректно в силу утверждения I) леммы 2 и инъективно в силу утверждения II) той же леммы. Очевидно, что $\tilde{j}_m$ непрерывно. Итак, $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$.

Покажем, что $\tilde{\sigma} \in Ker\{\sigma_m\}$. Пусть $\tilde{q}_m : \tilde{\tau} \subset\!\!\to \tilde{\sigma}_m \ (m-a\mathfrak{s})$, где $\tilde{\tau} = (\tilde{Q}, \tilde{S}, \tilde{\rho})$, $\tilde{Q}_m = \tilde{q}_m(\tilde{Q})(m-a\mathfrak{s})$. Установим, что $\tilde{\tau} \to \tilde{\sigma}$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tau}$ ограничена конечным числом аналитических кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, иначе рассмотрим компактное исчерпание $\tilde{\tau}$ такими поверхностями. Тогда каждая риманова поверхность $(\tilde{Q}_m, \tilde{P}_m, \tilde{\pi}_m|_{\tilde{Q}_m})$ также ограничена кривыми $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Отсюда следует, что $\tilde{Q}_m$ ограничена в $\tilde{R}_m$ кривыми $\Gamma_{m1}, \ldots, \Gamma_{mn}$, причем $\tilde{\pi}_m \circ \Gamma_{mi} = \Gamma_i$, $i = \overline{1,n}$. В силу односвязности $\tilde{R}_m$ носитель $|\Gamma_{mi}|$ кривой Γ_{mi} разбивает $\tilde{R}_m$ на две части, одна из которых односвязна; обозначим ее через $\tilde{Q}_{mi}$. Ясно, что либо $\tilde{Q}_{mi} \supset \tilde{Q}$, либо $\tilde{Q}_{mi} \cap \tilde{Q}_m = |\Gamma_{mi}|$, а риманова поверхность $\tilde{\tau}_{mi} = (\tilde{Q}_{mi}, \tilde{\pi}_m|_{\tilde{Q}_{mi}})$ ограничена в первом случае кривой Γ_i^- , а во втором – Γ_i . В силу леммы 3 из [I] среди $\tilde{\tau}_{mi}$ существует не более, чем конечное число различных (с точностью до эквивалентности). Поэтому, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что τ_{mi} не зависит от m для каждого $i = \overline{1,n}$. Если для некоторого i имеем $\tilde{Q}_m \subset \tilde{Q}_{mi}(m-a\mathfrak{s})$, то заменим $\tilde{\tau}$ на $\tilde{\tau}' = (\tilde{Q}_{mi}, \tilde{P}_m, \tilde{\pi}_m|_{\tilde{Q}_{mi}})$. Если для всех i имеем $\tilde{Q}_{mi} \cap \tilde{Q}_m = |\Gamma_{mi}|(m-a\mathfrak{s})$, то пусть $\tilde{\tau}' = (\tilde{Q}'_m = \tilde{Q}_m \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} \tilde{Q}_{mi}), \tilde{P}_m, \tilde{\pi}_m|_{\tilde{Q}'_m})$. И в том, и в другом случае $\tilde{\tau}'$ не зависит от m , ограничена одной кривой, односвязна, содержит $\tilde{\tau}$ и содержится во всех $\sigma_m \ (m-a\mathfrak{s})$. Поэтому, заменяя в случае необходимости $\tilde{\tau}$ на $\tilde{\tau}'$, можно сразу считать, что $\tilde{\tau}$ односвязна. Более того, в силу леммы 5 из [I], переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что все римановы поверхности $(Q_m, P_m, \pi_m|_{Q_m})$, где $Q_m = P_m(\tilde{Q}_m)$, эквивалентны некоторой фиксированной римановой поверхности $\tau = (Q, S, \rho)$. Тогда определены вложения $q_m : \tau \subset\!\!\to \sigma_m$, так как $\sigma_m \to \sigma$, то в силу следствия I из [I] существует $q : \tau \to \sigma$. Ясно, что существует единственный морфизм $p':\tilde{\tau}\to\tau$ в категории $\mathcal{RP}_1$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\tau} \arrow[r, "\tilde{q}_m"] \arrow[d, "p'"'] & \tilde{\sigma}_m \arrow[d, "\rho_m"] \\
\tau \arrow[r, "q_m"] \arrow[dr, "q"'] & \sigma_m \\
& \sigma \arrow[u, "j_m(loc,\, m-as)"']
\end{tikzcd}$$

Диаграмма I

Определим вложение $\tilde{q}:\tilde{\tau}\hookrightarrow\tilde{\sigma}$ следующим образом. Если $\tilde{T}\in\in\tilde{Q}$, $\tilde{\gamma}$ – кривая в $\tilde{Q}$, соединяющая $\tilde{S}$ с $\tilde{T}$, то пусть $\tilde{q}(\tilde{T})=[q\circ p'(\tilde{\gamma})]_R$. Покажем, что $\tilde{q}$ определено корректно. Если $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ – две кривые, соединяющие $\tilde{S}$ с $\tilde{T}$ в $\tilde{Q}$, то в силу односвязности $\tilde{Q}$ имеем $[\gamma_1]_{\tilde{Q}}=[\gamma_2]_{\tilde{Q}}$, поэтому $[q\circ p'(\gamma_1)]_R=(q\circ p')_\#([\gamma_1]_{\tilde{Q}})=(q\circ p')_\#([\gamma_2]_{\tilde{Q}})=[q\circ p'(\gamma_2)]$. Ясно, что $\tilde{q}$ непрерывно. Покажем, что $\tilde{q}$ инъективно. Если $\tilde{\gamma}_i$ соединяет $\tilde{S}$ с $\tilde{T}$, $i=1,2$, причем $\tilde{q}(\tilde{T}_1)=\tilde{q}(\tilde{T}_2)$, то в силу коммутативности диаграммы I $[\rho_m\circ\tilde{q}_m(\tilde{\gamma}_1)]_{R_m}=[j_m\circ q\circ p'(\tilde{\gamma}_1)]_{R_m}=(j_m)_\#(\tilde{q}(\tilde{T}_1))=(j_m)_\#$

$(\tilde{q}(\tilde{T}_2))=[j_m\circ q\circ p'(\tilde{\gamma}_2)]_{R_m}=[\rho_m\circ\tilde{q}_m(\tilde{\gamma}_2)]_{R_m}$ $(m-as)$. По теореме о монодромии кривые $\tilde{q}_m(\tilde{\gamma}_1)$ и $\tilde{q}_m(\tilde{\gamma}_2)$ оканчиваются в одной и той же точке $(m-as)$. Следовательно, $\tilde{q}_m(\tilde{T}_1)=\tilde{q}_m(\tilde{T}_2)$ $(m-as)$. Так как $\tilde{q}_m$ инъективны, то $\tilde{T}_1=\tilde{T}_2$. Итак, $\tilde{\tau}\hookrightarrow\tilde{\sigma}$. Значит, $\tilde{\sigma}\in\in Ker\{\tilde{\sigma}_m\}$. Так как это верно и для любой подпоследовательности $\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$, то $\tilde{\sigma}_m\to\tilde{\sigma}$ в силу определения I из [I].

П) Осталось показать, что $\rho_m\circ\tilde{j}_m$ сходятся равномерно внутри $\tilde{R}$ к ρ. Пусть $(\tilde{Q}_n)_{n\geq 1}$ – компактное исчерпание $\tilde{R}$, $\tilde{P}\in\tilde{Q}_n$, $\tilde{\tau}_n=(\tilde{Q}_n,\tilde{P},\tilde{\pi}|_{\tilde{Q}_n})$, $n\geq 1$. Тогда $\tilde{\tau}_n\subset\hookrightarrow\tilde{\sigma}$, и так как $\tilde{\sigma}_m\to\tilde{\sigma}$, то $\tilde{j}_m:\tilde{\tau}_n\hookrightarrow\tilde{\sigma}_m$ $(m-as)$. Рассуждая как и при доказательстве п. I), получаем, что существуют $\tau_n=(Q_n,P,\pi|_{Q_n})\hookrightarrow\sigma$ и отображение $\rho_n':\tilde{\tau}_n\to\tau_n$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\tau}_n & \xrightarrow{\tilde{j}/\tilde{Q}_n} & \tilde{\sigma}_m \\ {\scriptstyle p_n'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_m} \\ \tau_n & \xrightarrow{j_m/Q_n} & \sigma_m \end{array}$$

Диаграмма 2

Так как j_m инъективны, а $\tilde{Q}_n \subset \tilde{Q}_m$, $m \geq n$, то $p_m'|_{\tilde{Q}_n} = p_n'$, $m \geq n$. Следовательно, на $\tilde{R}$ определено отображение $p': \tilde{R} \to R$, такое, что $p'|_{\tilde{Q}_n} = p_n'$. Из коммутативности диаграммы 2 следует, что $\pi \circ p_n' = \pi_m \circ j_m \circ p_n' = \pi_m \circ p_m \circ \tilde{j}_m|_{\tilde{Q}_n} = \tilde{\pi}_m \circ \tilde{j}_m|_{\tilde{Q}_n} = \tilde{\pi}|_{\tilde{Q}_n}$. Значит, $\pi \circ p' = \tilde{\pi}$. Так как R односвязно и $p: (\tilde{R}, \tilde{p}) \to (R, p)$ – накрытие, то в силу [5] (гл.2, § 4, теорема 5) существует поднятие отображения $p': (\tilde{R}, \tilde{P}) \to (R, P)$, т.е. такое отображение $\tilde{p}': (\tilde{R}, P) \to (\tilde{R}, \tilde{p})$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\tilde{p}'}{\nearrow} & (\tilde{R}, \tilde{p}) \\ (\tilde{R}, \tilde{p}) & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & \underset{p'}{\searrow} & (R, P) \end{array}.$$

Тогда $\tilde{\tilde{\pi}} \circ \tilde{p}' = \pi \circ p \circ \tilde{p}' = \pi \circ p' = \tilde{\pi}$, $\tilde{p}'(\tilde{P}) = \tilde{P}$. Из этих соотношений с учетом голоморфности $\tilde{\pi}$ и $\tilde{p}$ и локальной инъективности $\tilde{\pi}$ нетрудно вывести, что $\tilde{p}': \tilde{R} \to \tilde{R}$ – тождественное отображение. Значит, $p' = p \circ \tilde{p}' = p$ в силу коммутативности диаграммы 2 $j_m \circ p|_{\tilde{Q}_n} = j_m \circ p'|_{\tilde{Q}_n} = j_m \circ p_n' = \pi_m \circ \tilde{j}_m|_{\tilde{Q}_n}$, что и завершает доказательство П).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Сначала введем одно обозначение и отметим два простых факта. Пусть $\sigma_i = (R_i, P_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$ – две римановы поверхности. Если $p: \sigma_1 \to \sigma_2$ – морфизм в категории $\mathcal{RP}_1$, то через $p(\sigma_1)$ будем обозначать риманову поверхность $(p(R_1), P_2, \pi|_{p(R_1)})$. Если p инъективно, то $p(\sigma_1)$ эквивалентна σ_1. Если $\sigma_1 = \bigcup_\alpha \sigma_\alpha\ (rel\,\sigma_1)$, и $j_\alpha: \sigma_\alpha \hookrightarrow \sigma_1$, а p инъективно на каждой $j(\sigma_\alpha)$, то $p(\sigma_1)=\bigcup_\alpha \sigma_\alpha (\mathrm{rel}\ \sigma_2)$. Перейдем теперь к доказательству.

Пусть $(\tilde{\tau}_n)_{n\geq 1}$ – компактное исчерпание $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}_n=(\tilde{Q}_n, \tilde{P}_n, \tilde{\Pi}_n|_{\tilde{Q}_n})$. Тогда $(\tau_n)_{n\geq 1}$ – компактное исчерпание σ, где $\tau_n=p(\tilde{\tau}_n)=(Q_n, P_n, \Pi_n|_{Q_n})$. В силу условия II) теоремы τ_n эквивалентна части σ_m, т.е. $\tau_n \subset \sigma_m (m-as)$. Отсюда следует, что $\sigma\in \mathfrak{M}\{\sigma_m\}$. Покажем, что $\sigma \in \mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$. Пусть $\tau \subset \sigma_m (m-as)$. Требуется доказать, что $\tau\subset\sigma$. Без ограничения общности можно считать, что τ ограничена конечным числом аналитических кривых. Тогда существует конечное число односвязных римановых поверхностей τ_i, таких, что $\tau=\bigcup\tau_i(\mathrm{rel}\,\tau)$. Так как τ_i односвязны, то по теореме о монодромии $\tau_i\subset\tilde{\sigma}_m\ (m-as)$, и так как в силу условия I) теоремы $\tilde{\sigma}_m\to\tilde{\sigma}$, то $\tau_i\subset\tilde{\sigma}$. Пусть $\tilde{\tau}= \bigcup\tau_i(\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma})=(\tilde{Q},\tilde{P},\tilde{\Pi}/_{\tilde{Q}})\subset\tilde{\sigma}$. Рассмотрим компактное исчерпание $(\tau_{ni})_{n\geq 1}$ для τ_i. Тогда, как и выше, получаем, что $\tilde{\tau}_n = \bigcup_i\tau_{ni}(\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma})$ – компактное исчерпание $\tilde{\tau}$. В силу условия II) теоремы, инъективности p_m на τ_{ni} и j_m внутри $\tilde{R}_m$ риманова поверхность $\tau_n=\bigcup_i\tau_{ni}(\mathrm{rel}\,\sigma)=p(\bigcup_i\tau_{ni}(\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma}))$ эквивалентна

$$p_m\circ\tilde{j}_m(\bigcup_i\tau_{ni}(\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma}))=p_m(\bigcup_i\tau_{ni}(\mathrm{rel}\,\tilde{\sigma}_m))=\bigcup_i\tau_{ni}(\mathrm{rel}\,\sigma_m).$$

Значит, $\tau_n\subset\sigma_m(m-as)$, а так как $(\tau_n)_{n\geq 1}$ – компактное исчерпание τ, то и $\tau\subset\sigma_m$. Итак, $\sigma\in\mathrm{Ker}\{\sigma_m\}$. Аналогично для любой $\{\sigma_{m_k}\}$ имеем $\sigma\in\mathrm{Ker}\{\sigma_{m_k}\}$, т.е. $\sigma_m\to\sigma$. Доказательство теоремы в случае А) закончено.

В) Доказательство для общего случая.

Отметим, что $p_m|_{\check{R}_m(\sigma_m)}=\check{p}_m:\tilde{\check{\sigma}}_m\to\check{\sigma}_m$ и $p|_{\check{R}(\sigma)}=\check{p}:\tilde{\check{\sigma}}\to\check{\sigma}$ являются накрытиями $\check{\sigma}_m$ и $\check{\sigma}$ соответственно.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\sigma_m\rightarrowtail\sigma$. Тогда $\check{\sigma}_m\to\check{\sigma}$. Построим универсальные накрытия $\tilde{p}:\tilde{\tilde{\sigma}}\to\tilde{\sigma},\tilde{p}_m:\tilde{\tilde{\sigma}}_m\to\check{\sigma}_m$ для $\check{\sigma}$ и $\check{\sigma}\ (m\geq 1)$ соответственно. Тогда $\tilde{\tilde{p}}=\check{p}\circ\tilde{p}:\tilde{\tilde{\sigma}}\to\check{\sigma}$ и $\tilde{\tilde{p}}_m=\check{p}_m\circ\tilde{p}_m:\tilde{\tilde{\sigma}}_m\to\check{\sigma}_m$ – накрытия $\check{\sigma}$ и $\check{\sigma}_m\ (m\geq 1)$, которые в силу односвязности $\tilde{\tilde{\sigma}}$ и $\tilde{\tilde{\sigma}}_m$ являются универсальными для $\check{\sigma}$ и $\check{\sigma}_m$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\tilde{б}} \arrow[dr, "\tilde p"] \arrow[dd, "\tilde{\tilde p}"'] & \\ & \check{\tilde{б}} \arrow[dl, "\check p"] \\ \check{б} & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \tilde{\tilde{б}}_m \arrow[dr, "\tilde p_m"] \arrow[dd, "\tilde{\tilde p}_m"'] & \\ & \check{\tilde{б}} \arrow[dl, "\check p_m"] \\ \check{б}_m & \end{tikzcd}$$

В силу доказанного в п. А) (необходимость) имеем $\tilde{\tilde{б}}_m \to \tilde{\tilde{б}} = (\tilde{\tilde{R}}, \tilde{\tilde{p}}, \tilde{\tilde{\pi}}\ )$ и $\tilde{\tilde{p}}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m$ сходятся равномерно внутри $\tilde{\tilde{R}}$ к $\tilde{\tilde{p}}$, где $\tilde{\tilde{j}}_m$ – канонические вложения, индуцированные сходимостью $\tilde{\tilde{б}}_m \to \tilde{\tilde{б}}$. Покажем, что $\tilde{p}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m$ сходятся к $\tilde{p}$ внутри $\tilde{\tilde{R}}$. Пусть $\tilde{\tilde{\tau}} = (\tilde{\tilde{Q}}, \tilde{\tilde{p}}, \tilde{\tilde{\pi}} \,|\, \tilde{\tilde{Q}}) \subset\!\!\to \tilde{\tilde{б}}$; без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tilde{\tau}}$ ограничена аналитической кривой и односвязна. В силу леммы 5 из [I] существует подпоследовательность m_k, такая, что все $\tilde{p}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\tau}}) = \tilde{\tau}_{m_k}$ эквивалентны некоторой фиксированной римановой поверхности $\tilde{\tau}$. Покажем, что $\tilde{\tau}$ эквивалентна $\tilde{p}(\tilde{\tilde{\tau}})$. Для этого достаточно установить, что для любых двух точек $\tilde{\tilde{T}}_1, \tilde{\tilde{T}}_2 \in \tilde{\tilde{Q}}$ равенства $\tilde{p}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{T}}_1) = \tilde{p}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{T}}_2)$ и $\tilde{p}(\tilde{\tilde{T}}_1) = \tilde{p}(\tilde{\tilde{T}}_2)$ равносильны (k - a_1). В силу того, что $p_m : \tilde{б}_m \to б_m$ – универсальное накрытие, первое равенство по теореме о монодромии имеет место тогда и только тогда, когда $[\tilde{\tilde{p}}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)]_{R_{m_k}} = [\tilde{\tilde{p}}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)]_{R_{m_k}}$, где $\tilde{\tilde{\gamma}}_1$ и $\tilde{\tilde{\gamma}}_2$ – некоторые кривые в $\tilde{\tilde{Q}}$, соединяющие $\tilde{\tilde{P}}$ с T_1 и T_2 соответственно. Так как $\tilde{\tilde{p}}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}$ сходятся равномерно к $\tilde{\tilde{p}}$ в $\tilde{\tilde{Q}}$, то предыдущее соотношение эквивалентно условию $[j_{m_k} \circ \tilde{\tilde{p}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)]_{R_{m_k}} = [j_{m_k} \circ \tilde{\tilde{p}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)]_{R_{m_k}}$. Так как $б_m \to б$ с сохранением связности, то в силу леммы 2 это равносильно равенству $[\tilde{\tilde{p}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)]_R = [\tilde{\tilde{p}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)]_R$. Так как $p : \tilde{б} \to б$ – – универсальное накрытие, то последнее равенство по теореме о монодромии означает, что концы кривых $\tilde{p}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)$ и $\tilde{p}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)$, которые являются поднятиями кривых $\tilde{\tilde{p}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_1)$ и $\tilde{\tilde{p}}(\tilde{\tilde{\gamma}}_2)$ на $\tilde{R}$, совпадают, т.е. $\tilde{p}(\tilde{\tilde{T}}_1) = \tilde{p}(\tilde{\tilde{T}}_2)$. Итак, мы показали, что из нашей последовательности можно выделить подпоследовательность m_k, такую, что $\tilde{p}_{m_k} \circ \tilde{\tilde{j}}_{m_k}$ сходятся к $\tilde{p}$ внутри $\tilde{\tilde{R}}$. Так как это верно и для любой подпоследовательнос –

ти, то $\tilde{p}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m$ сходятся к $\tilde{p}$ внутри $\tilde{\tilde{R}}$. Так как теорема 2 в случае А) нами уже установлена, то применяя ее утверждение к последовательности накрытий $\tilde{p}_m : \tilde{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\tilde{\sigma}}_m$, получаем, что $\check{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\tilde{\sigma}}$. Докажем, что $p_m \circ \tilde{j}_m$ сходится к p внутри $\tilde{\tilde{R}}(\tilde{\sigma})_\vee$, где j_m – канонические вложения, индуцированные сходимостью $\check{\tilde{\sigma}} \to \check{\tilde{\sigma}}$.

Пусть область $\tilde{Q} \subset \check{\tilde{R}}(\tilde{\sigma}), P \in \tilde{Q}, \tilde{\tau} = (\tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{\pi}|_{\tilde{Q}}) \subset\!\!\hookrightarrow \check{\tilde{\sigma}}$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\tau} = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i (\tau e \ell \tilde{\tau})$, где все $\tilde{\tau}_i$ одно – связны. По теореме о монодромии с учетом условия $\tilde{\tau}_i \subset\!\!\hookrightarrow \check{\tilde{\sigma}}$ получаем, что $\hat{\tau}_i \subset\!\!\hookrightarrow \tilde{\tilde{\sigma}}$. Пусть $\tilde{\tilde{\tau}} = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\tau}_i (\tau e \ell \tilde{\tilde{\sigma}})$, тогда $\tilde{\tilde{\tau}} \subset\!\!\hookrightarrow \tilde{\tilde{\sigma}}$. Так как $\tilde{\tilde{\sigma}}_m \to \tilde{\tilde{\sigma}}$, то $\tilde{\tilde{\tau}} \hookrightarrow \tilde{\tilde{\sigma}}_m$ и $\tilde{p}(\tilde{\tilde{\tau}}) = p \circ \tilde{p}(\tilde{\tilde{\tau}}) = p(\tilde{\tau})$ эквива – лентна $p_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{\tau}) = p_m \circ j_m \circ \tilde{p}(\tilde{\tilde{\tau}}) = \tilde{p}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m(\tilde{\tilde{\tau}})$ $(m - as)$., т.е. $p_m \circ \tilde{j}_m$ сходятся к p внутри ${}_\vee\tilde{R}$. ${}_\vee$Осталось установить, что $\tilde{\sigma}_m \to \tilde{\sigma}$. Мы уже показали, что $\check{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\tilde{\sigma}}$. Докажем сначала, что $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$.

Пусть $j : K_n(z_1, \delta) \subset\!\!\hookrightarrow (\tilde{R}, \tilde{T}, \tilde{\pi})$ – вложение n-листного односвязного круга с единственной точкой ветвления над точкой z_1 в $(R, \tilde{\pi})$, при котором точке ветвления соответствует точка $\tilde{T}$. Так как p – накрывающее отображение, то радиус круга можно считать настолько малым, что $p \circ \tilde{j}$ инъективно и $j = p \circ \tilde{j} : K_n(z_1, \delta) \subset\!\!\hookrightarrow (R, T, \pi)$, где $T = p(\tilde{T})$. Имеем $p_m \circ \tilde{j}_m \circ j(\{|\zeta| = r\}) = j_m \circ p \circ \tilde{j}(\{|\zeta| = r\}) = j_m \circ j(\{|\zeta| = r\})$, поэтому $\tilde{j}_m \circ j(\{|\zeta| = r\})$ является компонентой связности множества $p_m^{-1} \circ j_m \circ j(\{|\zeta| = r\}), 0 < r < 1$. Так как $\sigma_m \to \sigma$ регулярно, то $j_m \circ j(\{|\zeta| = r\})$ разбивает R_m на две части R_{m1} и R_{m2}, причем одна из них, скажем R_{m1}, такова, что $\sigma_{m1} = (R_{m1}, \pi_m|_{R_{m1}})$ – односвязный n-листный круг, причем $\pi_m(R_{m1})$ содержит точку z_1. По теореме о монодромии любая компонента связности множества $p_m^{-1} \circ j_m \circ j(\{|\zeta| = r\})$, в частности, и $\tilde{j}_m \circ \tilde{j}(\{|\zeta| = r\})$ разбивает $\tilde{R}_m$ на две части $\tilde{R}_{m1}$ и $\tilde{R}_{m2}$, причем $(\tilde{R}_{m1}, \tilde{\pi}_m|_{\tilde{R}_{m1}})$ эквивалентна σ_{m1}, т.е. является односвяз – ным n-листным кругом. Таким, образом, $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}\{\sigma_m\}$.

Покажем, что $\tilde{\sigma} \in Ker\{\tilde{\sigma}_m\}$. Пусть $\tilde{\tau} \in \mathfrak{S}\{\tilde{\sigma}_m\}_\vee$. Так как $\check{\tilde{\sigma}}_m \to \check{\tilde{\sigma}}$, то $\check{\tilde{\sigma}} \in Ker\{\check{\tilde{\sigma}}_m\}$. Кроме того, $\check{\tilde{\tau}} \in \mathfrak{M}\{\check{\tilde{\sigma}}_m\}$. Значит, $\check{h} : \check{\tilde{\tau}} \hookrightarrow \check{\tilde{\sigma}}$. Нам надо показать, что $\tilde{\tau} \hookrightarrow \tilde{\sigma}$. Для этого надо установить, что если $j : K_n(z_0, \varepsilon) \hookrightarrow \tilde{\tau}(\tilde{S})$, то $h \circ \tilde{j}(\{|\zeta| = r\})$ при

$r<1$ разбивает $\tilde{\sigma}$ на две части, одна из которых является односвязным кругом с центром в точке z_0. Пусть $\tilde{h}_{m_\nu}$ – канонические вложения, индуцированные включением $\tilde{\tilde{r}} \in \mathfrak{M}\{\tilde{\sigma}_m\}$. В силу того, что $\tilde{r} \in \mathfrak{S}\{\tilde{\sigma}_m\}$, с использованием условия в) определения $\mathfrak{S}\{\sigma_m\}$ получаем, что $\tilde{h}_m \circ \tilde{j}(\{|\zeta|=r\})$ при $r<1$ разбивает $\tilde{\sigma}_m$ на две части $(m - a\tau)$, одна из которых является односвязным n-листным кругом с центром в точке z_0. Ясно, что $\tilde{j}_m \circ \tilde{h} = \tilde{h}_m$ и тогда $\tilde{j}_m \circ \tilde{h} \circ \tilde{j}(\{|\zeta|=r\})$ – граница односвязного n-листного круга с центром в точке z_0. Тогда $p_m \circ \tilde{j}_m \circ \tilde{h} \circ \tilde{j}(\{|\zeta|=r\}) = j_m \circ p \circ \tilde{h} \circ \tilde{j}(\{|\zeta|=r\})$ – граница односвязного круга в σ_m $(m - a\tau)$. В силу того, что $\sigma_m \succ\!\!\rightarrow \sigma$, используя максимальность в $\mathfrak{S}_1\{\sigma_m\}$, получаем, что $p \circ \tilde{h} \circ \tilde{j}(\{|\zeta|=r\})$ – граница односвязного круга в σ с центром в z_0. Значит, $\tilde{h} \circ \tilde{j}(\{|\zeta|=r\})$ по теореме о монодромии является границей односвязного круга в $\tilde{\sigma}$ с центром в z_0. Это и означает, что $\tilde{h}$ может быть продолжено в любую точку ветвления $\tilde{S}$. Поэтому $\tilde{r} \subset \tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma} \in Ker\{\tilde{\sigma}_m\}$. Применяя точно такие же рассуждения к любой подпоследовательности $\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$, получаем, что $\tilde{\sigma} \in Ker\{\tilde{\sigma}_{m_k}\}$. Значит, $\tilde{\sigma}_m \to \tilde{\sigma}$.

Достаточность. Если $\check{\sigma}_m \to \check{\sigma}$, то $\tilde{\check{\sigma}}_m \to \tilde{\check{\sigma}}$ и в силу доказанного в п.А) $\tilde{\tilde{\sigma}}_m \to \tilde{\tilde{\sigma}}$ и $\tilde{p}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m \to \tilde{\tilde{p}}$ внутри $\tilde{\tilde{\sigma}}$. Так как по условию $p_m \circ j_m \to p$ внутри $\tilde{\tilde{\sigma}}$, то $\tilde{\tilde{p}}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m = p_m \circ \tilde{p}_m \circ \tilde{\tilde{j}}_m \to p \circ \tilde{p} = \tilde{\tilde{p}}$. Значит, используя опять п. А), получаем, что $\sigma_m \to \sigma$. Сходимость $\sigma_m \succ\!\!\rightarrow \sigma$ в окрестности точек ветвления обосновывается аналогично тому, как это было сделано при доказательстве необходимости для общего случая В). Наконец, покажем, что $\sigma_m \to \sigma$ с сохранением связности. Пусть γ – замкнутая кривая в $R(\sigma)$, $[\gamma]_R \neq e$, $\tilde{\gamma}$ – поднятие γ на $\tilde{R}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ не замкнута по теореме о монодромии. Значит, $\tilde{j}_m(\tilde{\gamma})$ также не замкнуты $(m - a\tau)$ в силу инъективности $\tilde{j}_m$. Применяя снова теорему о монодромии, получаем, что $[j_m(\gamma)] \neq e$, так как $j_m(\gamma) = p_m \circ \tilde{j}_m(\tilde{\gamma})$. Теорема доказана.

Литература

1. Насыров С. Р. Бикомпактность пространств римановых поверхностей в топологии, индуцированной сходимостью к ядру // Тр.семин. по краев. задачам. Казань, 1990. – Вып.24.

2. Н а с ы р о в С. Р. Топологическое пространство римановых поверхностей над сферой, связанное со сходимостью к ядру // ДАН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. - 1988.- № 5.- С.19 - 22.

3. К р о у э л л Р., Ф о к с Р. Введение в теорию узлов.- М.: Мир, 1967. - 348 с.

4. М а с с и У., С т о л л и н г с Д ж. Алгебраическая топология. Введение. - М.: Мир, 1977. - 343 с.

5. С п е н ь е р Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1971. - 680 с.

6. С п р и н г е р Д ж. Введение в теорию римановых поверхностей. - М.: ИЛ, 1960. - 343 с.

Р.Б.Салимов, Е.В.Стрежнева

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

1. Пусть $\mathcal{D}_z$ - односвязная конечная область, расположенная в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и ограниченная кривой $\mathcal{L}_z$, состоящей из двух жордановых линий - ломаной $\mathcal{L}_z^1$, содержащей $n-1$ прямолинейных звеньев, и кривой $\mathcal{L}_z^2$, соединяющей концы A_1, A_n ломаной $\mathcal{L}_z^1$.

Пусть $w = w(z)$ - функция, аналитическая в области $\mathcal{D}_z$ и отображающая конформно область $\mathcal{D}_z$ на однолистную область $\mathcal{D}_w$, расположенную внутри кривой $\mathcal{L}_w$ в плоскости переменного $w = \varphi + i\psi$; обозначим через $\mathcal{L}_w^1$ и $\mathcal{L}_w^2$ части $\mathcal{L}_w$, отвечающие соответственно $\mathcal{L}_z^1$ и $\mathcal{L}_z^2$ при указанном отображении.

Рассмотрим решение следующей задачи, называемой обратной смешанной краевой задачей. Дана часть кривой $\mathcal{L}_z$ в виде ломаной $\mathcal{L}_z^1$, остальная часть $\mathcal{L}_z^2$ неизвестна. На $\mathcal{L}_z^2$ заданы значения функции $w = w(z)$ в виде

$$w = \varphi(x) + i\psi(x) , \qquad (1)$$

где x - абсцисса точки $\mathcal{L}_z^2$. Задана кривая $\mathcal{L}_w^1$, которая вместе с кривой $\mathcal{L}_w^2$, определяемой уравнением (1), образует замкнутую жорданову кривую $\mathcal{L}_w$, причем положительному направлению обхода на $\mathcal{L}_z$, при котором область $\mathcal{D}_z$ остается слева,