В. И. Паньженский, М. В. Сорокина, Пространства финслерова типа, близкие к римановым, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 121–128

В.И. Паньженский, М.В. Сорокина

ПРОСТРАНСТВА ФИНСЛЕРОВА ТИПА, БЛИЗКИЕ К РИМАНОВЫМ

Аннотация

Известно большое число специальных финслеровых метрик, построенных с помощью римановых метрик (см., например, [1], [2]). В настоящей работе предлагается конструкция построения метрик финслерова типа, близких к римановым, основанная на разложении метрического тензора в ряд Тейлора.

Abstract

V.I. Panjenskii, M.V. Sorokina **Spaces of Finslerian type close to Riemannian spaces**

Many special Finslerian metrics are constructed on the base of Riemmanian metrics (see, e. g., [1], [2]). In the present paper, using decomposition of metric tensor in Taylor series, we construct metrics of Finslerian type, which are close to Riemmanian metrics.

1. Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, TM — касательное расслоение над M, (x^i) — локальные координаты на M, (x^i, y^i) — естественные локальные координаты на TM. Задание невырожденного симметрического тензорного поля $g = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$ определяет на M обобщенную лагранжеву структуру, а $\mathcal{L}^n = (M, g)$ называется обобщенным лагранжевым пространством. Если существует функция F на TM, порождающая метрический тензор g : $g_{ij} = F_{\cdot i \cdot j}$ ($F_{\cdot i} = \partial F / \partial y^i$), то мы имеем лагранжево пространство $L^n = (M, F)$. Если функции $g_{ij}(x,y)$ на TM являются однородными нулевой степени по слоевым координатам y^i, то обобщенное лагранжево пространство называется обобщенно финслеровым пространством $\mathcal{F}^n$, и если существует функция F на TM, порождающая метрический тензор g пространства $\mathcal{F}^n$, то мы получаем финслерово пространство F^n.

Компоненты метрического тензора пространства $\mathcal{L}^n$ разложим в ряд Тейлора по степеням координат касательного вектора:

$$g_{ij}(x,y) = g_{ij}(x,0) + g_{ij\cdot k_1}(x,0)y^{k_1} + \ldots + \frac{1}{p!}g_{ij\cdot k_1\cdot\ldots\cdot k_p}(x,0)y^{k_1}\ldots y^{k_p} + \ldots,$$

и в соответствии с этим разложением построим тензор

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk_1}y^{k_1} + \ldots + h_{ijk_1\ldots k_p}y^{k_1}\ldots y^{k_p}, \qquad (1)$$

где мы положили

$$h_{ij}(x,y) = g_{ij}(x,0), h_{ijk_1} = g_{ij\cdot k_1}(x,0), h_{ijk_1\ldots k_p} = \frac{1}{p!}g_{ij\cdot k_1\cdot\ldots\cdot k_p}(x,0).$$

Определение 1. *Метрика* (1) *называется обобщенной лагранжевой метрикой, близкой к римановой порядка p.*

При $p = 0$ мы имеем риманову метрику с метрическим тензором h_{ij}.

Функции $g_{ij}(x,y)$, определенные равенствами (1), не обладают однородностью по координатам касательного вектора и поэтому не могут служить компонентами финслерова или обобщенно финслерова метрического тензора. Однако, имея риманов метрический тензор h_{ij}, мы можем нормировать касательный вектор y и, обозначив через $||\, y|| = \sqrt{h_{ij}y^iy^j}$ длину вектора y в римановой метрике h, построить тензор

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk_1}\frac{y^{k_1}}{||\, y||} + \ldots + h_{ijk_1\ldots k_p}\frac{y^{k_1}\ldots y^{k_p}}{||\, y||^p}. \qquad (2)$$

Определение 2. *Метрику* (2) *будем называть обобщенной финслеровой метрикой, близкой к римановой порядка p.*

Аналогом связности Леви-Чивита для пространств финслерова типа является связность Картана.

Пусть $\Gamma^k_{ij}(x)$ — компоненты связности Леви-Чивита ∇ римановой метрики h, а $\Gamma^{*k}_{ij}(x)$ — компоненты усеченной связности Картана ∇^* обобщенной метрики g. Эта связность согласована с метрическим тензором и не имеет кручения: $\nabla^* g = 0$, $\Gamma^{*k}_{ij}(x) = \Gamma^{*k}_{ji}(x)$. Из этих условий следует, что коэффициенты связности Картана являются решениями системы уравнений

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{si} - \delta_s g_{ij}), \qquad (3)$$

где g^{ks} – контравариантные компоненты метрического тензора g, а $\delta_i = \partial_i - \Gamma^{*k}_{i0}\dot{\partial}_k$, $\partial_i = \partial_i/\partial x^i$, $\dot{\partial}_i = \partial_i/\partial y^k$, $\Gamma^{*k}_{i0} = \Gamma^{*k}_{ij}y^j$. Если система (3) имеет единственное решение, то метрику g называют регулярной.

Предложение 1. *Связность Картана обобщенной метрики* (1) *совпадает со связностью Леви-Чивита римановой метрики h тогда и только тогда, когда входящие в* (1) *тензоры ковариантно постоянны.*

Доказательство. Пусть связность Картана совпадает со связностью Леви-Чивита: $\nabla^* = \nabla$. Так как связность ∇ стабильна, т.е. $\nabla y = 0$, то из (1) имеем

$$\nabla h_{ijk_1}y^{k_1} + \ldots + \nabla h_{ijk_1\ldots k_p}y^{k_1}\ldots y^{k_p} = 0,$$

откуда следует, что

$$\nabla h_{ijk_1} = 0, \ldots, \nabla h_{ijk_1\ldots k_p} = 0. \tag{4}$$

Обратно, пусть тензоры в (1) ковариантно постоянны относительно связности ∇, т.е. имеют место равенства (4), тогда и $\nabla g = 0$, откуда следует $\nabla^* = \nabla$. □

Предложение 2. *Если тензоры, входящие в метрику* (2), *ковариантно постоянны относительно связности Леви-Чивита ∇ римановой метрики h, то эта связность совпадает со связностью Картана ∇^* обобщенной финслеровой метрики* (2).

Доказательство. Действительно, так как

$$\nabla h_{ij} = 0, \nabla y = 0, \nabla||y|| = 0, \nabla h_{ijk_1} = 0, \ldots, \nabla h_{ijk_1\ldots k_p} = 0,$$

то из (2) следует, что $\nabla g = 0$, откуда и следует, что $\nabla = \nabla^*$.□

Рассмотрим обобщенную финслерову метрику (2), содержащую кроме h_{ij} еще только одно слагаемое, т.е.

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk_1\ldots k_p}\frac{y^{k_1}\ldots y^{k_p}}{||y||^p}. \tag{5}$$

Для метрики (5), очевидно, имеет место

Предложение 3. *Связность Картана обобщенной финслеровой метрики* (5) *совпадает со связностью Леви-Чивита метрики h тогда и только тогда, когда тензор $h_{ijk_1\ldots k_p}$ ковариантно постоянен.*

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Метрики первого порядка близости. В этом случае метрики (1) и (2) примут вид

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk}y^k, \tag{6}$$

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk}\frac{y^k}{||y||}. \tag{7}$$

Положив в (6) и (7) $h_{ij} = a_{ij}$, $h_{ijk} = a_{ij}b_k$, где a_{ij} – компоненты риманова метрического тензора, а b_k – компоненты дифференциальной формы на M, получим (α,β)-метрики близкие к римановым

$$g_{ij} = (1 + b_k y^k)a_{ij}, \tag{8}$$

$$g_{ij} = (1 + \frac{b_k y^k}{||y||})a_{ij}. \tag{9}$$

Представляют интерес и метрики первого порядка близости, если в качестве h_{ijk} взять $\nabla_k R_{ij}$, где R_{ij} — тензор Риччи метрического тензора h_{ij}, т.е.

$$g_{ij} = h_{ij} + \nabla_k R_{ij} y^k, \tag{10}$$

$$g_{ij} = h_{ij} + \nabla_k R_{ij}\frac{y^k}{||y||}. \tag{11}$$

Пример 2. Метрики второго порядка близости. В качестве примера рассмотрим обобщенные лагранжевы и обобщенные финслеровы метрики положив $h_{ijk} = 0$, $h_{ijkl} = a(x)h_{ik}h_{jl}$, где $a(x)$ — скалярная функция на M. Тогда

$$g_{ij} = h_{ij} + a(x)y_i y_j, \tag{12}$$

$$g_{ij} = h_{ij} + a(x)\frac{y_i y_j}{||y||^2}, \tag{13}$$

где $y_i = h_{ik}y^k$. Метрика вида (12), в частности при $a = \frac{1}{c^2}$, рассматривалась в работе [3], а метрика (13) является локально конической метрикой, введенной в работах [4], [5]. Из предыдущих предложений следует, что связность Картана для метрик (12) и (13) совпадает со связностью Леви-Чивита тогда и только тогда, когда $a(x) = \mathrm{const}$.

2. Рассмотрим подробнее обобщенное финслерово пространство $\mathcal{F}^n$ с (α, β)-метрикой первого порядка близости. Эту метрику запишем в следующем виде

$$g_{ij} = a_{ij} + 2\frac{b_0}{\sqrt{a_{00}}}a_{ij}, \tag{14}$$

где a_{ij} — компоненты риманова метрического тензора (α-метрика), b_i — компоненты дифференциальной формы β, а индексом 0 обозначается свертка с компонентами касательного вектора y. Обратный к g_{ij} тензор имеет вид

$$g^{jk} = \frac{\sqrt{a_{00}}}{\sqrt{a_{00}} + 2b_0}a^{jk}. \tag{15}$$

Предложение 4. *Метрический тензор* (14) *непотенциален, т.е. не является метрическим тензором финслерова пространства.*

Доказательство. Действительно, если бы существовала функция, порождающая метрический тензор, то тензор $g_{ij\cdot k}$ был бы симметричным по всем индексам. Для метрики (14) имеем

$$g_{ij\cdot k} = 2a_{ij}\frac{b_k a_{00} - a_{ok}b_0}{a_{00}\sqrt{a_{00}}}, \tag{16}$$

$$g_{ij\cdot k} - g_{ik\cdot j} = \frac{2}{a_{00}\sqrt{a_{00}}}[a_{ij}(b_k a_{00} - a_{ok}b_0) - a_{ik}(b_j a_{00} - a_{0j}b_0)]. \tag{17}$$

Тензор «нефинслеровости» (14) должен быть равен нулю. Приравняв (17) к нулю и свернув с y_j, получим

$$a_{i0}(b_k a_{00} - a_{0k}b_0) = 0,$$

но $a_{i0} \neq 0$, иначе $a_{ij} = 0$, следовательно,

$$(b_k a_{00} - a_{0k}b_0) = 0. \tag{18}$$

Тогда, как следует из (16), $g_{ij\cdot k} = 0$, следовательно метрика (14) является римановой.

К обобщенному финслерову пространству $\mathcal{F}^n$ присоединим финслерово пространство F^n с метрической функцией

$$F = \frac{1}{2}g_{ij}y^i y^j, \tag{19}$$

для (α,β)-метрики (14) имеем

$$F=\frac{1}{2}a_{00}+b_0\sqrt{a_{00}}. \tag{20}$$

Метрический тензор $f_{ij}=F_{\cdot i\cdot j}$ этого пространства имеет вид

$$f_{ij}=a_{ij}\left(1+\frac{b_0}{\sqrt{a_{00}}}\right)+\frac{a_{0i}b_j+a_{0j}b_i}{\sqrt{a_{00}}}-\frac{a_{0i}a_{oj}b_0}{a_{00}\sqrt{a_{00}}}. \tag{21}$$

Предложение 5. *Метрический тензор* (21) *ассоциированного финслерова пространства является невырожденным, и обратный тензор* f^{jk} *имеет вид:*

$$\begin{aligned} f^{jk} &= \frac{\sqrt{a_{00}}}{\sqrt{a_{00}}+b_0}\{a^{jk}+\frac{(\sqrt{a_{00}}+2b_0)(b^jy^k+b^ky^j)}{a_{00}(b_lb^l-1)+3b_0(\sqrt{a_{00}}+b_0)}- \\ &-\frac{a_{00}b_lb^l+b_0(\sqrt{a_{00}}+b_0)}{a_{00}}y^jy^k-a_{00}b^jb^k\}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $b^l=a^{lk}b_k$.

В справедливости данного утверждения можно убедиться перемножив матрицы (21) и (22). В результате получим, что $f_{ij}f^{jk}=\delta^k_i$.

Поставим задачу построения связности Картана ∇^* для метрики (14). Для получения явного выражения коэффициентов Γ^{*k}_{ij} необходим анализ системы (3), которая в развернутой записи имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{*k}_{ij} &= \tfrac{1}{2}g^{ks}(\partial_ig_{js}+\partial_jg_{is}-\partial_sg_{ij})- \\ &-\tfrac{1}{2}g^{ks}(\Gamma^{*p}_{0i}g_{js\cdot p}+\Gamma^{*p}_{0j}g_{is\cdot p}-\Gamma^{*p}_{0s}g_{ij\cdot p}). \end{aligned} \tag{23}$$

Свернув (23) с y^j, получим

$$\Gamma^{*l}_{0m}H^{km}_{li}=\frac{1}{2}(\partial_0g_{is}+\partial_ig_{0s}-\partial_sg_{0i}), \tag{24}$$

где

$$H^{km}_{li}=\delta^k_l\delta^m_i+\frac{1}{2}g^{ks}(g_{0s\cdot l}\delta^m_i+g_{is\cdot l}y^m-g_{0i\cdot l}\delta^m_s). \tag{25}$$

Таким образом, чтобы разрешить (24) относительно Γ^{*l}_{0m} необходимо и достаточно, чтобы матрица H^{km}_{li} была невырожденной. Для метрики (14) матрица (25) имеет вид

$$H^{km}_{li}=\delta^k_l\delta^m_i+\frac{b_la_{00}-b_0a_{0l}}{a_{00}(\sqrt{a_{00}}+2b_0)}(y^k\delta^m_i+y^m\delta^k_i-a^{km}a_{0i}). \tag{26}$$

Матрица (26) является невырожденной, и обратная к ней имеет вид
$$\widetilde{H}^{pi}_{kq} = \delta^p_k \delta^i_q + \frac{b_k a_{00} - b_0 a_{0k}}{a_{00}(\sqrt{a_{00}} + 2b_0)}(P^{pi}_q - y^p \delta^i_q - a^{pi} a_{0q}), \tag{27}$$
где
$$P^{pi}_q = \frac{(y^i(\sqrt{a_{00}} + b_0) + b^i a_{00})(y^p b_q - a_{0q} b^p - \delta^p_q(\sqrt{a_{00}} + 2b_0))}{(\sqrt{a_{00}} + 2b_0))^2 + a_{00} b_l b^l - b_0^2}.$$

Умножая (24) на $\widetilde{H}^{pi}_{kq}$, находим коэффициенты Γ^{*q}_{0p}, а затем по формулам (23) вычисляем Γ^{*k}_{ij}:

$$\begin{aligned} \Gamma^{*k}_{ij} &= \Gamma^k_{ij} - \tfrac{1}{\sqrt{a_{00}}+2b_0}(\Gamma^l_{0p} b_l - \partial_p b_0)\{\delta^k_i \delta^p_j + \delta^k_j \delta^p_i - a_{ij} a^{kp} + \\ &+ \tfrac{b^p(\sqrt{a_{00}}+3b_0) - y^p b_l b^l}{a_{00} b_l b^l + (\sqrt{a_{00}}+3b_0)(\sqrt{a_{00}}+b_0)}(\delta^k_i a_{0j} + \delta^k_j a_{0i} - a_{ij} y^k) - \\ &- \tfrac{b^p a_{00} + y^p(\sqrt{a_{00}}+3b_0)}{a_{00} b_l b^l + (\sqrt{a_{00}}+3b_0)(\sqrt{a_{00}}+b_0)}(\delta^k_i b_j + \delta^k_j b_i - a_{ij} b^k)\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Тензорную часть связности Картана целесообразно определить так
$$C_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij \cdot k},$$
где $C_{ijk} = g_{ip} C^p_{jk}$. Для метрики (14)
$$C^i_{jk} = \delta^i_j \frac{b_k a_{00} - a_{0k} b_0}{a_{00}(\sqrt{a_{00}} + 2b_0)}. \tag{29}$$

В этом случае мы получаем регулярную связность (т.е. коэффициенты Γ^{*k}_{0i} являются коэффициентами нелинейной связности), так как матрица $M^i_k = \delta^i_k + C^i_{0k}$ является невырожденной. Действительно, в нашем случае эта матрица имеет следующий вид
$$M^i_k = \delta^i_k + y^i \frac{b_k a_{00} - a_{0k} b_0}{a_{00}(\sqrt{a_{00}} + 2b_0)}. \tag{30}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что обратная к ней есть матрица
$$\widetilde{M}^i_k = \delta^i_k - y^i \frac{b_k a_{00} - a_{0k} b_0}{a_{00}(\sqrt{a_{00}} + 2b_0)},$$
что и доказывает невырожденность матрицы M^i_k.

Предложение 6. *В обобщенном финслеровом пространстве с метрикой* (14) *связность Картана существует и единственна. Явное* *выражение коэффициентов этой связности определяется формулами* (28) *и* (29).

Заметим, что для тензорной части имеет место свертка $C^i_{jk}y^k = 0$, что вместе с соответствующими условиями однородности функций Γ^{*i}_{jk} и C^i_{jk} гарантирует инвариантность связности относительно слоевых гомотетий.

Литература

[1] Рунд Х. *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.* – М.:Наука. – 1981.

[2] Matsumoto M. *Foundation of Finsler geometry and special Finsler spaces.* – Kais.Press, Otsu, Japan, 1986.

[3] Kawaguchi T., Miron R. *On the generalized Lagrange spaces with the metric* $\gamma_{ij}(x) + (1/c^2)y_iy_j$.// Tensor. – 1989. – 48. – p.52-63.

[4] Паньженский В.И. *Некоторые вопросы геометрии метрических пространств линейных элементов.*/Ленингр. Гос. пед. ин-т. – Л., 1984. – 32 с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 11.12.84, N8179-84 Деп.

[5] Паньженский В.И. *Исследование локально конических многообразий с помощью соприкасающихся римановых метрик*// Геометрия погруженных многообразий. – М.: МГПИ, 1986. – с. 65-70.

Адрес: *Пензенский государственный педагогический университет, физико-математический факультет, 440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 37*

Address: *Penza State Pedagogical University, Department of Physics and Mathematics, ul. Lermontova, 37, Penza: 440026, RUSSIA*