А. В. Шутов, Неавтономные множества ограниченного остатка, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 12, 94–101

Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, №12, с. 94–101 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.В. ШУТОВ

НЕАВТОНОМНЫЕ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

Аннотация. Неавтономные множества ограниченного остатка представляют собой последовательности множеств, допускающих единую оценку остаточного члена проблемы распределения дробных долей линейной функции. В работе приводится полное описание неавтономных множеств ограниченного остатка в случае периодических последовательностей. Результат также обобщается на некоторые классы квазипериодических последовательностей множеств. Доказательства основаны на получении явных формул для остаточного члена в терминах сумм дробных долей. Метод является эффективным, т. е. позволяет получать явные оценки остаточного члена.

Ключевые слова: равномерное распределение, множество ограниченного остатка, суммы дробных долей.

УДК: 511.431

Введение

Пусть число α иррационально. Для произвольного открытого справа полуинтервала $I \subset [0,1)$ положим
$$N(\alpha,n,I) = \sharp\{k : 0 \le k < n, \{k\alpha\} \in I\}$$
— число точек последовательности $\{k\alpha\}$, $0 \le k < n$, попавших в некоторый фиксированный полуинтервал I. Хорошо известно [1], что для любого иррационального α последовательность дробных долей $\{k\alpha\}$ равномерно распределена по модулю 1. Иными словами, справедлива асимптотическая формула
$$N(\alpha,n,I) \sim n|I|. \tag{1}$$
Пусть $r(\alpha,n,I) = N(\alpha,n,I) - n|I|$ — остаточный член асимптотической формулы (1). Очевидная оценка
$$r(\alpha,n,I) = o(n) \tag{2}$$
не может быть улучшена без дополнительных предположений об I и α. Однако, для полуинтервалов I специального вида, а также для определенных иррациональностей α (например, в случаях алгебраических иррациональностей, а также иррациональностей с ограниченными неполными частными разложения в цепную дробь) возможно значительное усиление оценки (2) ([2]–[4]).

В частности, Э. Гекке [5] ввел класс полуинтервалов ограниченного остатка, для которых
$$r(\alpha,n,I) = O(1).$$

Поступила 02.11.2017

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант №14-11-00433.

Полное описание таких полуинтервалов было получено Х. Кестеном [6], а окончательные результаты об оценке $r(\alpha, n, I)$ в случае полуинтервалов ограниченного остатка были получены в работах [7], [8]. Кроме того, Орен [9] дал описание всех множеств ограниченного остатка, представимых в виде объединения конечного числа полуинтервалов. Эффективизация результата Орена обсуждается в [10].

В.Г. Журавлев в работе [11] ввел понятие неавтономных множеств ограниченного остатка и поставил задачу изучения таких множеств.

Пусть $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ — некоторая последовательность полуинтервалов, причем $X_k \subset [0, 1)$ для всех k. Определим величину

$$N(\alpha, n, \mathcal{X}) = \sharp\{k : 0 \le k < n,\ \{k\alpha\} \in X_k\},$$

являющуюся аналогом величины $N(\alpha, n, I)$. Тогда $\mathcal{X}$ называется неавтономным множеством ограниченного остатка, если существует постоянная $a_{\mathcal{X}}$, не зависящая от n и такая, что для остаточного члена $r(\alpha, n, \mathcal{X}) = N(\alpha, n, \mathcal{X}) - a_{\mathcal{X}} n$ имеет место асимптотическая формула $r(\alpha, n, \mathcal{X}) = O(1)$.

Классические множества ограниченного остатка возникают в случае, когда все множества X_k совпадают. В работе [11] были построены первые примеры неавтономных множеств ограниченного остатка, а также получены оценки для $r(\alpha, n, \mathcal{X})$ в этих примерах. В частности, был построен пример периодической последовательности $\mathcal{X}$ периода два, являющейся неавтономным множеством ограниченного остатка. В данной работе полностью решаем задачу о неавтономных множествах ограниченного остатка в классе периодических последовательностей. Кроме того, вводим новый класс квазипериодических последовательностей $\mathcal{X}$ и решаем задачу о неавтономных множествах ограниченного остатка для введенного класса последовательностей.

1. Вспомогательные результаты

В основе нашего метода будет лежать оценка величины $r(\alpha, n, \mathcal{X})$ через суммы вида

$$S_\alpha(J_1, \dots, J_m; n) = \sum_{i=1}^{m} r(\alpha, n, J_i),$$

где $J_1, \dots, J_m$ — некоторые открытые справа полуинтервалы. Обсудим условия ограниченности величины $S_\alpha(J_1, \dots, J_m; n)$, а также некоторые оценки для нее.

Теорема 1 ([9]). *Пусть $f : [0; 1) \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная справа функция с конечным числом точек разрыва. Пусть $\delta_f(x) = f(x^+) - f(x^-)$ и $\Delta_f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta_f(\{x + k\alpha\})$. Пусть α иррационально и $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\{x + k\alpha\})$. Тогда последовательность $\{F_n(x) - n \int\limits_0^1 f(z)dz\}$ ограничена для некоторого (или каждого) x тогда и только тогда, когда $\Delta_f(x) \equiv 0$.*

Теорема 2. *Пусть $J_1, \dots, J_m$ — некоторые полуинтервалы, причем $J_i = [j_i'; j_i'')$. Тогда сумма $S_\alpha(J_1, \dots, J_m; n)$ ограничена константой, не зависящей от n, тогда и только тогда, когда существует перестановка $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ множества $(1, 2, \dots, m)$ такая, что $j''_{l_i} - j'_i = a_i + b_i\alpha$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le m$. Более того, в этом случае справедлива оценка*

$$|S_\alpha(J_1, \dots, J_m; n)| \le 2 \sum_{i=1}^{m} |b_i|. \tag{3}$$

Доказательство. Достаточность. Характеристическая функция полуинтервала $J=[c;d)$ может быть записана в виде $\chi_J(x)=(d-c)+\{x-d\}-\{x-c\}$. Ясно, что $r(\alpha,n,J)=\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_I(\{k\alpha\})-n|J|$. Отсюда

$$S_\alpha(J_1,\dots,J_m;n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\{k\alpha-j_i''\}-\{k\alpha-j_i'\}).$$

Поскольку $j_{l_i}''-j_i'=a_i+b_i\alpha$, имеем

$$S_\alpha(J_1,\dots,J_m;n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\{(k-b_i)\alpha-j_i'\}-\{k\alpha-j_i'\}).$$

Пусть $\Sigma_i=\sum\limits_{k=1}^{n}(\{(k-b_i)\alpha-j_i'\}-\{k\alpha-j_i'\})$. Предположим, что $b_i\geq 0$. Тогда

$$\Sigma_i=\sum_{k=1-b_i}^{0}\{k\alpha-j_i'\}-\sum_{k=n-b_i+1}^{n}\{k\alpha-j_i'\}. \tag{4}$$

Сумма Σ_i содержит не более $2b_i$ слагаемых вида $\{k\alpha-j_i'\}$. Так как $0\leq\{k\alpha-j_i'\}<1$, то $|\Sigma_i|\leq 2b_i$. Рассматривая аналогично случай $b_i<0$, получаем оценку $|\Sigma_i|\leq 2|b_i|$. Отсюда

$$|S_\alpha(J_1,\dots,J_m;n)|\leq\sum_{i=1}^{m}|\Sigma_i|\leq 2\sum_{i=1}^{m}|b_i|.$$

Таким образом, достаточность условий теоремы и оценка (3) доказаны.

Необходимость. Воспользуемся теоремой 1, взяв в качестве функции f сумму характеристических функций множеств J_i: $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}\chi_{J_i}(x)$. Тогда

$$F_n(x)-n\int_0^1 f(z)dz=S_\alpha(J_1,\dots,J_m;n).$$

Заметим, что $\delta_f(j_1')>0$. Поскольку $\Delta_f(j_1')=0$, существует целое k такое, что $\delta_f(\{j_1+k\alpha\})<0$. Но тогда $\{j_1'+k\alpha\}$ есть правый конец некоторого полуинтервала. Обозначим его номер через l_1. Получаем $j_{l_1}''=\{j_1'+k\alpha\}$, откуда $j_{l_1}''-j_1=a_1+b_1\alpha$ с целыми a_1, b_1. Далее рассмотрим функцию $\delta_f'(x)$, отличающуюся от $\delta_f(x)$ тем, что она принимает на единицу меньшие значения в точках j_1' и j_{l_1}''. Функция $\Delta_f'(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta_f'(\{x+k\alpha\})$ вновь тождественно равна нулю. Повторяя приведенные выше рассуждения для $j_2',j_3',\dots,j_m'$, получаем утверждение теоремы. □

Замечание. Поскольку добавление или исключение одной точки меняет величину $r(\alpha,n,I)$ не более, чем на единицу, аналог теоремы 2 справедлив также в случае, когда часть множеств J_i является интервалами, полуинтервалами, открытыми справа, а также отрезками. При этом неравенство (3) должно принять вид $|S_\alpha(J_1,\dots,J_m;n)|\leq 2\sum\limits_{i=1}^{m}(1+|b_i|)$.

Отметим, что оценка (3) может быть существенно усилена для некоторых классов иррациональностей. Пусть $C_r(\alpha,\gamma)=\sum\limits_{k=1}^{r}(\{k\alpha+\gamma\}-1/2)$ и $b_i>0$. Тогда (4) можно переписать в виде

$$\Sigma_i=C_{b_i}(\alpha,\gamma_1)-C_{b_i}(\alpha,\gamma_2)$$

с $\gamma_1 = -(b_i\alpha + j'_k)$ и $\gamma_2 = -(b_i\alpha - n\alpha + j'_k)$. Обозначая $C^*_n(\alpha) = \sup\limits_{\gamma} |C_n(\alpha,\gamma)|$, получаем

$$\Sigma_i \le 2C^*_{b_i}(\alpha).$$

Рассматривая аналогично случай $b_i < 0$, выводим оценку

$$|S_\alpha(J_1,\dots,J_m;n)| \le 2\sum_{i=1}^{m} C^*_{|b_i|}(\alpha). \tag{5}$$

Задача об оценке величины $C^*_n(\alpha)$ является классической задачей теории чисел. Отметим, что в настоящее время получены неулучшаемые по порядку оценки для $C^*_n(\alpha)$ в терминах разложения α в цепную дробь [2]. Например, если неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены, справедлива оценка $C^*_n(\alpha) \le C(\alpha)\ln n$ для некоторой константы $C(\alpha)$, не зависящей от n.

2. Периодический случай

Пусть $I_0,\dots,I_{d-1}$ — некоторые открытые справа полуинтервалы, причем $I_i = [\iota'_i;\iota''_i) \subset [0,1)$. Рассмотрим последовательность множеств $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$, определяемую условием

$$X_k = I_i,\ \ k \equiv i \pmod d.$$

Последовательность $\mathcal{X}$ будет периодической с периодом d. Цель данного раздела — получить необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\mathcal{X}$ было неавтономным множеством ограниченного остатка, и получить явную оценку $r(\alpha,n,\mathcal{X})$ для таких множеств.

Сначала предположим, что $n \equiv d-1 \pmod d$, т. е. $n = dn' - 1$ для некоторого n'. Тогда

$$N(\alpha,n,\mathcal{X}) = \sum_{k=0}^{n-1}\chi_{X_k}(\{k\alpha\}) = \sum_{i=0}^{d-1}\ \sum_{\substack{k=0,\\ i\equiv k \pmod d}}^{n'-1} \chi_{I_i}(\{(kd+i)\alpha\}).$$

Определим новые полуинтервалы $J_0,\dots,J_{d-1}$, $J_i \subset [0,1)$ условием $J_i \equiv I_i - i\alpha \pmod 1$. При этом считаем, что точки 0 и 1 склеены между собой и рассматриваем полуинтервал $[0,1)$ как окружность $\mathbb{S}^1$ длины 1. Тогда

$$N(\alpha,n,\mathcal{X}) = \sum_{i=0}^{d-1}\sum_{k=0}^{n'-1}\chi_{J_i}(\{kd\alpha\}) = \sum_{i=0}^{d-1} N(d\alpha,n,J_i).$$

В силу теоремы Вейля о равномерном распределении (1)

$$N(\alpha,n,\mathcal{X}) = \left(\sum_{i=0}^{d-1}|J_i|\right)n' + o(n).$$

Поэтому естественно положить $a_{\mathcal{X}} = \frac{1}{d}\sum\limits_{i=0}^{d-1}|J_i|$. Так как $n' = \frac{n+1}{d}$, получаем

$$N(\alpha,n,\mathcal{X}) = a_{\mathcal{X}}n + a_{\mathcal{X}} + \sum_{i=0}^{d-1} r\left(d\alpha, \frac{n+1}{d}, J_i\right),$$

$$r(\alpha,n,\mathcal{X}) = a_{\mathcal{X}} + \sum_{i=0}^{d-1} r\left(d\alpha, \frac{n+1}{d}, J_i\right).$$

Поскольку $0 < a_{\mathcal{X}} < 1$, имеем

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \leq 1 + \left|\sum_{i=0}^{d-1} r\left(d\alpha, \frac{n+1}{d}, J_i\right)\right|. \tag{6}$$

Далее заметим, что $0 \leq N(d\alpha, n+1, J_i) - N(d\alpha, n, J_i) \leq 1$, и, вновь учитывая, что $0 < a_{\mathcal{X}} < 1$, получим

$$-1 \leq r(d\alpha, n+1, J_i) - r(d\alpha, n, J_i) \leq 1.$$

Поэтому задача об ограниченности суммы $\sum\limits_{i=0}^{d-1} r(d\alpha, \frac{n+1}{d}, J_i)$ эквивалентна задаче ограниченности суммы $S_{d\alpha}(J_0, \ldots, J_{d-1}; n)$ для произвольного n. При этом в случае ограниченности суммы $S_{d\alpha}(J_0, \ldots, J_{d-1}; n)$ для $n \equiv d-1 \pmod d$ имеет место оценка

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \leq 1 + |S_{d\alpha}(J_0, \ldots, J_{d-1}; n)|.$$

В случае произвольного n аналогично (6) имеем

$$-1 \leq r(\alpha, n+1, \mathcal{X}) - r(\alpha, n, \mathcal{X}) \leq 1,$$

откуда получаем, что в случае ограниченности суммы $S_{d\alpha}(J_0, \ldots, J_{d-1}; n)$ для произвольного n имеет место оценка

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \leq d + |S_{d\alpha}(J_0, \ldots, J_{d-1}; n)|.$$

Применяя теперь теорему 2 и оценку (5), получаем окончательный результат.

Теорема 3. *Пусть* $I_i = [\iota_i'; \iota_i'') \subset [0, 1)$, $0 \leq i < d$. *Последовательность множеств* $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$, *определяемая условием* $X_k = I_i$, *если* $k \equiv i \pmod d$, *является неавтономным множеством ограниченного остатка тогда и только тогда, когда существует перестановка* $(l_0, l_1, \ldots, l_{d-1})$ *множества* $(0, 1, \ldots, d-1)$ *такая, что*

$$\iota_{l_i}'' - \iota_i' + (i - l_i)\alpha = a_i + b_i d\alpha,$$

$a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i < d$. *Более того, в этом случае справедлива оценка*

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \leq d + 2\sum_{i=0}^{d-1} C_{|b_i|}^*(d\alpha).$$

В силу замечания справедлив также аналог теоремы 3, когда часть множеств I_i является интервалами, полуинтервалами, открытыми справа, а также отрезками. При этом неравенство (3) должно принять вид

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \leq 3d + 2\sum_{i=0}^{d-1} C_{|b_i|}^*(d\alpha).$$

3. Квазипериодический случай

Далее перейдем к рассмотрению ситуации, когда последовательность $\mathcal{X}$ не является периодической, но достаточно близка к ней. Вероятно, самыми близкими к периодическим являются квазипериодические последовательности Штурма [12], элементы которых определяются по правилу

$$s_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \{k\alpha\} \in [0, 1-\alpha); \\ 1, & \text{если } \{k\alpha\} \in [1-\alpha, 1). \end{cases}$$

Ввиду данного определения естественно рассмотреть последовательности $\mathcal{X}$, определяемые условием

$$X_k = \begin{cases} I_0, & \text{если } \{k\alpha\} \in [0, 1-\alpha); \\ I_1, & \text{если } \{k\alpha\} \in [1-\alpha, 1), \end{cases}$$

где I_0, I_1 — некоторые открытые справа полуинтервалы, лежащие внутри полуинтервала $[0, 1)$. Рассмотрим несколько более общую постановку задачи.

Пусть дано разбиение

$$[0; 1) = Z_0 \sqcup Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_{d-1}$$

полуинтервала $[0, 1)$ на попарно непересекающиеся открытые справа полуинтервалы $Z_0, Z_1, \dots, Z_{d-1}$. Далее, пусть $I_0, I_1, \dots, I_{d-1}$ — набор открытых справа полуинтервалов, лежащих внутри полуинтервала $[0, 1)$. Определим последовательность множеств $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ следующим образом:

$$X_k = I_i, \quad \text{если} \quad \{k\alpha\} \in Z_i. \tag{7}$$

Предыдущее определение соответствует случаю $d = 2$, $Z_0 = [0, 1-\alpha)$, $Z_1 = [1-\alpha, 1)$. Цель данного раздела — выяснить, когда квазипериодические последовательности $\mathcal{X}$, определяемые условием (7), будут неавтономными множествами ограниченного остатка.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ — квазипериодическая последовательность множеств, заданная условием (7), $\{J_0, J_1, \dots, J_m\}$ — множество открытых справа полуинтервалов, получаемых как пересечения вида $I_i \cap Z_i$ и $J_i = [j_i'; j_i'')$. $\mathcal{X}$ является неавтономным множеством ограниченного остатка тогда и только тогда, когда существует перестановка $(l_0, l_1, \dots, l_{m-1})$ множества $(0, 1, \dots, m-1)$ такая, что $j_{l_i}'' - j_i' = a_i + b_i\alpha$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le i \le m-1$. Более того, в этом случае справедлива оценка*

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \le 2 \sum_{i=0}^{m-1} C_{|b_i|}^{*}(\alpha). \tag{8}$$

Доказательство. Определим характеристическую функцию $\chi_{\mathcal{X}}(x) = \chi_{I_i}(x)$, если $\{k\alpha\} \in Z_i$. Тогда

$$N(\alpha, n, \chi) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\mathcal{X}}(\{k\alpha\}). \tag{9}$$

Легко видеть, что

$$\chi_{\mathcal{X}}(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \chi_{I_i}(x)\chi_{Z_i}(x). \tag{10}$$

Кроме того, для любых множеств A и B справедливо равенство

$$\chi_A(x)\chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x). \tag{11}$$

Объединяя (9)–(11), имеем $N(\alpha, n, \mathcal{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{d-1} \chi_{I_i\cap Z_i}(\{k\alpha\}$. Меняя порядок суммирования и учитывая, что

$$N(\alpha, n, I_i \cap Z_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{I_i\cap Z_i}(\{k\alpha\},$$

находим $N(\alpha, n, \mathcal{X}) = \sum\limits_{i=0}^{d-1} N(\alpha, n, I_i \cap Z_i)$.

Таким образом, можно положить $a_{\mathcal{X}} = \sum\limits_{i=0}^{d-1} |I_i \cap Z_i|$. Тогда для остаточного члена $r(\alpha, n, \mathcal{X})$ справедлива формула

$$r(\alpha, n, \mathcal{X}) = \sum_{i=0}^{d-1} r(\alpha, n, I_i \cap Z_i)$$

и оценка $r(\alpha, n, \mathcal{X}) = o(n)$.

Для завершения доказательства остается заметить, что пересечение $I_i \cap Z_i$ либо пусто, либо представляет собой открытый справа полуинтервал, после чего применим теорему 2 и оценку (5). □

Далее кратко обсудим некоторые возможные пути обобщения теоремы 4.

Во-первых, так же, как и в периодическом случае, в качестве множеств $I_0, \ldots, I_{d-1}$ и $Z_0, \ldots, Z_{d-1}$ можно брать не только открытые справа полуинтервалы, но и обычные интервалы, открытые слева полуинтервалы и отрезки. В этом случае пересечение $I_i \cap Z_i$ может быть пустым множеством, точкой или парой точек, интервалом, полуинтервалом или отрезком. Предположим, что среди множеств $I_i \cap Z_i$ имеется m множеств $J_0, \ldots, J_{m-1}$, являющихся интервалами, полуинтервалами или отрезками, m' точек, а также m'' пустых множеств. Тогда легко получить аналог теоремы 4 с заменой (8) на оценку

$$|r(\alpha, n, \mathcal{X})| \leq 2m + m' + 2\sum_{i=0}^{m-1} C^*_{|b_i|}(\alpha).$$

Во-вторых, можно заменить определение (7) на

$$X_k = I_i, \quad \text{если} \quad \{k\beta\} \in Z_i, \tag{12}$$

где β — некоторое иррациональное число, вообще говоря, отличное от α. Поэтому задача о неавтономных множествах ограниченного остатка остается нерешенной. Тем не менее, использованные выше рассуждения можно обобщить, когда 1, α и β линейно зависимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В этом случае существуют целые числа C_1 и C_2 такие, что $C_1\alpha + C_2\beta \in \mathbb{Z}$. Положим $\gamma = \alpha/C_2$. Тогда $\beta = C_1' - C_2\gamma$ с некоторым целым C_1'. Определим отображения

$$m_\alpha : x \to \{C_2 x\}, \quad m_\beta : x \to \{-C_2 x\}.$$

Обратные отображения m_α^{-1} и m_β^{-1} являются многозначными и задаются формулами

$$m_\alpha^{-1}(x) = \bigcup_{j=0}^{|C_1|-1} \left\{ \frac{x+j}{C_1} \right\}, \quad m_\beta^{-1}(x) = \bigcup_{j=0}^{|C_2|-1} \left\{ -\frac{x+j}{C_2} \right\}.$$

При этом образ произвольного полуинтервала под действием отображений m_α^{-1} и m_β^{-1} представляет собой объединение непересекающихся полуинтервалов одинаковой длины, число которых равно $|C_1|$ или $|C_2|$ соответственно. Непосредственная проверка показывает, что $\{k\alpha\} \in I_i$ тогда и только тогда, когда $\{k\gamma\} \in m_\alpha^{-1}(I_i)$, а $\{k\beta\} \in Z_i$ тогда и только тогда, когда $\{k\gamma\} \in m_\beta^{-1}(Z_i)$. Таким образом, задача (12) фактически сводится к задаче (7) с заменой I_i на $m_\alpha^{-1}(I_i)$, Z_i на $m_\beta^{-1}(Z_i)$ и α на γ. Возникает дополнительная сложность, связанная с тем, что теперь $m_\alpha^{-1}(I_i)$ и $m_\beta^{-1}(Z_i)$ представляют собой не полуинтервалы, а конечные объединения непересекающихся полуинтервалов. Тем не менее, можно выделить множество $J_0, \ldots, J_{m-1}$ полуинтервалов, образующих объединение

$$\bigcup_{i=0}^{d-1} m_\alpha^{-1}(I_i) \cap m_\beta^{-1}(Z_i)$$

и, применив к нему теорему 2 и оценку (5), получить аналог теоремы 4. Таким образом, задача описания неавтономных множеств ограниченного остатка вида (12) оказывается алгоритмически разрешимой.

Литература

[1] Weyl H. *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. **77** (3), 313–352 (1916).
[2] Pinner C.G. *On sums of fractional parts* $\{n\alpha+\gamma\}$, J. Number Theory **65**(1), 48–73 (1997).
[3] Roçadas L., Schoißengeier J. *On the local discrepancy of* $(n\alpha)$*-sequences*, J. Number Theory **131** (8), 1492–1497 (2011).
[4] Шутов А.В. *Локальные отклонения в проблеме распределения дробных долей линейной функции*, Изв. вузов. Матем., № 2, 88–97 (2017).
[5] Hecke E. *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Sem. Hamburg Univ. **5**, 54–76 (1921).
[6] Kesten H. *On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution* mod 1, Acta Arithmetica **12**, 193–212 (1966).
[7] Шутов А.В. *Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка*, Вестн. СамГУ. Естеств. сер., № 7 (57), 168–175 (2007).
[8] Красильщиков В.В., Шутов А.В. *Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей*, Матем. заметки **89** (1), 43–52 (2011).
[9] Oren I. *Admissible functions with multiple discontinioutes*, Israel J. Math. **42** (4), 353–360 (1982).
[10] Шутов А.В. *Проблема Гекке–Кестена для нескольких интервалов*, Чебышевск. сб. **12** (1), 177–182 (2011).
[11] Журавлев В.Г. *Множества ограниченного остатка*, Записки научн. сем. ПОМИ **445**, 93–174 (2016).
[12] Morse M., Hedlund G.A. *Symbolic dynamics* II. *Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1), 1–42 (1940).

Антон Владимирович Шутов

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
ул. Губкина, д. 8, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: a1981@mail.ru

A.V. Shutov

Nonautonomous bounded remainder sets

Abstract. Nonautonomous bounded remainder sets are sequences of sets admitting a uniform estimate of the remainder term in the distribution of the fractional parts of linear function problem. In the paper we give a complete description of nonautonomous bounded remainder sets in the case of periodic sequences. The result is also generalized to certain classes of quasiperiodic sequences of sets. The proofs are based on obtaining explicit formulas for the remainder term in the terms of sums of fractional parts. The method is effective, i. e., it allows us to obtain explicit estimates of the remainder term.

Keywords: uniform distribution, bounded remainder set, sums of fractional parts.

Anton Vladimirovich Shutov

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
8 Gubkin str., Moscow, 119991 Russia,

e-mail: a1981@mail.ru