И. А. Кузьмина, Б. Н. Шапуков, Конформная и эллиптическая модели расслоения Хопфа, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 81–98

И.А. Кузьмина, Б.Н. Шапуков

КОНФОРМНАЯ И ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ РАССЛОЕНИЯ ХОПФА[1]

Аннотация

Расслоение Хопфа $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ является одним из самых известных примеров нетривиальных главных расслоений. Ограничиваясь случаем $n = 1$, мы рассматриваем в этой статье две модели этого расслоения. Первая из них, конформная, получается с помощью стереографического отображения $S^3 \to C^3$ на конформное пространство, вторая – стандартным 2-листным накрытием $S^3 \to \mathbb{B}^3$ эллиптического пространства. Построена связность расслоения в этих моделях и найдена ее кривизна.

Результаты двух первых параграфов получены И.А. Кузьминой, третий написан Б.Н. Шапуковым.

Abstract

I. A. Kuzmina, B. N. Shapukov **Conformal and elliptic models of Hopf bundle**

The Hopf bundle $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ is one of the most famous examples of nontrivial principal bundles. In this paper we consider two models of this bundle for $n = 1$. The first (conformal) model is obtained by the stereographic mapping of S^3 onto the conformal space, the second one is constructed with the use of the standard two-sheeted covering $S^3 \to \mathbb{B}^3$ of the elliptic space. We find the bundle connection in these models and find the curvature of this connection.

The results of the first two sections are obtained by I.A. Kuzmina, the third part is written by B.N. Shapukov.

---

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №00-01-00308.

1. Связность в расслоении Хопфа

1. Расслоение Хопфа $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ ([1], [3]) задается субмерсией сферы $z_1\bar{z}_1 + \ldots z_{n+1}\bar{z}_{n+1} = 1$ на комплексное проективное пространство

$$\pi(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1 : \ldots : z_{n+1}),$$

а действие структурной группы $SO(2, \mathbb{R})$ имеет вид

$$(z_1, \ldots, z_{n+1}) \to (e^{i\varphi} z_1, \ldots, e^{i\varphi} z_{n+1}). \tag{1}$$

Орбиты этого действия — большие окружности сферы.

Ограничиваясь в дальнейшем лишь случаем $n = 1$, мы будем рассматривать сферу $S^3 \subset \mathbb{E}^4$ евклидова пространства как группу Ли кватернионов единичного модуля. Тогда условие $\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = 1$, если учесть комплексную запись кватерниона $\mathbf{x} = z_1 + z_2 j$, дает уравнение

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1. \tag{2}$$

В области $U \subset S^3 : z_2 \neq 0$ проекцию $\pi : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ можно записать в виде

$$\pi(z_1, z_2) = z = \frac{z_1}{z_2}. \tag{3}$$

Как известно (см. [2],[9]), комплексную проективную прямую можно рассматривать как конформную плоскость C^2 и с помощью стереографического отображения отождествить с 2-мерной сферой S^2.

Если $\mathbf{a} \in S^3$, то преобразования вида $\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{a}$ являются вращениями в $\mathbb{E}^4$, которые характеризуются тем, что угол поворота не зависит от выбора вектора $\mathbf{x}$. Они называются *паратактическими поворотами* [9]. Называя их, соответственно, левыми и правыми, найдем матрицы этих преобразований.

Пусть $\mathbf{a} = a_1 + a_2 j$, $\mathbf{x} = z_1 + z_2 j$, где $a_1, a_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда, учитывая, что $j z_i = \bar{z}_i j$, получим

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x} = (a_1 + a_2 j)(z_1 + z_2 j) = (a_1 z_1 - a_2 \bar{z}_2) + (a_2 \bar{z}_1 + a_1 z_2) j$$

и, значит,

$$z_1' = a_1 z_1 - a_2 \bar{z}_2, \; \bar{z}_2' = \bar{a}_2 z_1 + \bar{a}_1 \bar{z}_2. \tag{4}$$

Матрица этого преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \quad \det A = |\mathbf{a}|^2 = 1.$$

Это специальная унитарная матрица.

Как известно, группа $SU(2)$ диффеоморфна S^3 и двулистно накрывает специальную ортогональную группу $SO(3)$. Найдем соответствующую вещественную ортогональную 4-матрицу. Пусть

$$z_1 = x^0 + x^1 i,\ z_2 = x^2 + x^3 i,\ a_1 = p^0 + p^1 i,\ a_2 = p^2 + p^3 i\,.$$

Тогда получим

$$A^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & -p^3 \\ p^1 & p^0 & -p^3 & p^2 \\ p^2 & p^3 & p^0 & -p^1 \\ p^3 & -p^2 & p^1 & p^0 \end{pmatrix}, \quad \det A^{\mathbb{R}} = 1. \tag{5}$$

Это ортогональная матрица первого рода.

Аналогичным образом, для преобразований вида $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in S^3$, получим

$$z_1' = a_1 z_1 - \bar{a}_2 z_2,\ z_2' = a_2 z_1 + \bar{a}_1 z_2 \tag{6}$$

со специальной унитарной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -\bar{a}_2 \\ a_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \quad \det A = |\mathbf{a}|^2 = 1.$$

Теорема 1. *Расслоение Хопфа есть расслоение группы S^3 на правые смежные классы по подгруппе Ли S^1 кватернионов $\mathbf{x} = (z_1, 0)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = a_1 + a_2 j$, $\mathbf{b} = b_1 + b_2 j$ – произвольная пара кватернионов из S^3. Тогда $\mathbf{b}^{-1} = \bar{\mathbf{b}} = \bar{b}_1 - b_2 j$ и

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^{-1} = (a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)j.$$

Отсюда следует, что S^1 является подгруппой в S^3. Она изоморфна $SO(2,\mathbb{R})$. Кроме того, это замкнутое 1-мерное подмногообразие (большая окружность) в S^3 и следовательно, в силу теоремы Картана, подгруппа Ли. Кватернионы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ принадлежат одному и тому же правому смежному классу по S^1, если $\mathbf{a}\mathbf{b}^{-1} \in S^1$, т. е. если $\mathbf{a}\mathbf{b}^{-1} = e^{i\varphi}$ для некоторого φ. Тогда $\mathbf{a} = e^{i\varphi}\mathbf{b}$. Но в силу (1) действие структурной группы на S^3 имеет вид

$$z_1' = e^{i\varphi} z_1,\ z_2' = e^{i\varphi} z_2 \quad \text{или} \quad \mathbf{x}' = e^{i\varphi}\mathbf{x}. \tag{7}$$

Это означает, что кватернионы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ принадлежат одной орбите группы $SO(2,\mathbb{R})$. □

Отметим, что в силу (5) вещественная матрица преобразования (7) имеет вид

$$A(\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В частности, вращение на прямой угол будем обозначать как $\mathbf{x}=J\mathbf{x}$.

2. Введем на S^3 координаты, адаптированные к расслоению. В качестве таких координат возьмем стереографические координаты точки $z=\frac{z_1}{z_2}=u+iv\in S^2$ и угол паратактического поворота, отсчитанный от некоторой фиксированной точки орбиты $\mathbf{q}$. Тогда комплексные координаты точки $\mathbf{x}=e^{i\varphi}\mathbf{q}$ будут равны

$$z_1=e^{i\varphi}(q^0+q^1i), \quad z_2=e^{i\varphi}(q^2+q^3i).$$

Выберем теперь начальную точку орбиты в гиперплоскости $q^3=0$ и от нее будем отсчитывать параметр φ. Тогда $z_2=e^{i\varphi}q^2$ и

$$z=\frac{q^0+q^1i}{q^2}=u+iv.$$

Отсюда координаты начальной точки определяются

$$q^0=\frac{1}{R}u,\ q^1=\frac{1}{R}v,\ q^2=\frac{1}{R},\ q^3=0,$$

где $R=\sqrt{1+u^2+v^2}$. В результате получим следующие параметрические уравнения сферы S^3, отнесенной к адаптированным координатам (u,v,φ):

$$\begin{array}{rcl} x^0 &=& \frac{1}{R}(u\cos\varphi-v\sin\varphi), \\ x^1 &=& \frac{1}{R}(v\cos\varphi+u\sin\varphi), \\ x^2 &=& \frac{1}{R}\cos\varphi, \\ x^3 &=& \frac{1}{R}\sin\varphi. \end{array} \tag{9}$$

Найдем риманову метрику сферы S^3, отнесенную к адаптированным координатам (u,v,φ). Для этого найденные выше ее параметрические уравнения запишем в векторном виде. Если ввести пару ортогональных ортов

$$\mathbf{a}=\frac{1}{R}(u,v,1,0),\ \tilde{\mathbf{a}}=\frac{1}{R}(-v,u,0,1),$$

то уравнения сферы запишутся в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}\cos\varphi + \tilde{\mathbf{a}}\sin\varphi. \tag{10}$$

Найдем компоненты матрицы метрического тензора $g_{AB} = (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B)$, $(A, B = 1, 2, 3)$, где $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_\varphi$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{a}_u\cos\varphi + \tilde{\mathbf{a}}_u\sin\varphi, \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{a}_v\cos\varphi + \tilde{\mathbf{a}}_v\sin\varphi, \\ \mathbf{x}_\varphi &= -\mathbf{a}\sin\varphi + \tilde{\mathbf{a}}\cos\varphi. \end{aligned}$$

В результате матрица метрического тензора в адаптированных координатах принимает вид

$$(g_{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{1+v^2}{R^4} & \frac{-uv}{R^4} & \frac{-v}{R^2} \\ \frac{-uv}{R^4} & \frac{1+u^2}{R^4} & \frac{u}{R^2} \\ \frac{-v}{R^2} & \frac{u}{R^2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Это риманова метрика постоянной кривизны $K = 1$. Заметим, что элементы матрицы не зависят от φ. Это согласуется с тем, что вращения $\varphi \to \varphi'$ являются движениями трехмерной сферы S^3.

3. Теперь построим связность в расслоении Хопфа [3], [11], т.е. горизонтальное распределение, инвариантное относительно действия структурной группы. В адаптированных координатах действие группы $SO(2)$ имеет вид $u' = u$, $v' = v$, $\varphi' = \varphi + t$. Поэтому

$$V = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

есть фундаментальное (и, следовательно, вертикальное) векторное поле.

Форму связности ω выберем так, чтобы выполнялись два условия. Во-первых, горизонтальное распределение H должно быть дополнительным к вертикальному, т. е. $\omega(V) \neq 0$. Но всякая линейная дифференциальная форма на S^3 имеет вид

$$\omega = \omega_1(u, v, \varphi)du + \omega_2(u, v, \varphi)dv + \omega_3(u, v, \varphi)d\varphi,$$

а ее значение на векторном поле V равно $\omega(V) = \omega_3$. Поэтому первое условие дает $\omega_3 \neq 0$. Потребуем, чтобы $\omega_3 = 1 \in \mathfrak{g}$, где 1 – базисный элемент алгебры Ли $\mathbb{R}$. Тем самым задана определенная нормировка формы связности.

Во-вторых, выберем H так, чтобы оно было инвариантным при действии структурной группы. Это возможно лишь тогда, когда коэффициенты ω_1 и ω_2 не зависят от φ, а только от базисных координат (u, v). При выполнении этих двух условий форма связности принимает вид

$$\omega = \Gamma_1(u, v)du + \Gamma_2(u, v)dv + d\varphi,$$

где Γ_1 и Γ_2 — произвольные функции базисных координат.Отметим, что 1-формы du, dv, ω образуют кобазис, адаптированный к расслоению. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Инвариантная связность расслоения Хопфа в адаптированных координатах имеет вид*

$$\omega = \Gamma_1(u,\ v)du + \Gamma_2(u,\ v)dv + d\varphi = 0, \qquad (12)$$

где $\Gamma_1(u, v)$, $\Gamma_2(u, v)$ *— произвольные гладкие функции на сфере* S^2.

Выберем теперь коэффициенты связности так, чтобы горизонтальное распределение было ортогонально слоям и при этом условии обозначим его $H^{\perp}$. Выбрав базис горизонтального распределения в виде $e_i = \partial_i - \Gamma_i\partial_\varphi$, подсчитаем коэффициенты связности. Тогда условие ортогональности горизонтального распределения слоям запишется в виде: $(e_1, V) = 0$, $(e_2, V) = 0$. В результате получим следующую систему уравнений

$$g_{13} - \Gamma_1 g_{33} = 0\,, \quad g_{23} - \Gamma_2 g_{33} = 0\,.$$

Так как согласно (11) $g_{33} = 1$, имеем

$$\Gamma_1 = g_{13} = \frac{-v}{(1 + u^2 + v^2)}\,, \quad \Gamma_2 = g_{23} = \frac{u}{(1 + u^2 + v^2)}\,.$$

Подсчитаем тензор кривизны этой связности. Его компоненты определяются по формуле [11]

$$R^{\alpha}_{ij} = e_i\Gamma^{\alpha}_j - e_j\Gamma^{\alpha}_i\,.$$

Так как тензор кривизны кососимметричен по нижним индексам, то его единственной существенной компонентой является R^3_{12}. Имеем

$$R^3_{12} = (\partial_u - \Gamma_1\partial_\varphi)\left(\frac{u}{(1 + u^2 + v^2)}\right) - (\partial_v - \Gamma_2\partial_\varphi)\left(\frac{-v}{(1 + u^2 + v^2)}\right)\,. \quad (13)$$

Сделав вычисления, приходим к следующему результату:

Теорема 3. *Единственная компонента тензора кривизны расслоения Хопфа равна*

$$R^3_{12} = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

Отметим, что так как тензор кривизны ненулевой, горизонтальное распределение не инволютивно.

§2. Конформная модель расслоения Хопфа

Построим конформную модель расслоения Хопфа. Для этого рассмотрим стереографическую проекцию сферы S^n

$$\mathbf{x}^2 = (x^0)^2 + \mathbf{r}^2 = 1$$

из ее полюса $\mathrm{N}(1,\ \mathbf{0})$ на экваториальную плоскость $\mathbb{E}^n\ :\ x^0 = 0$. Пусть $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ - ортонормированный репер в $\mathbb{E}^{n+1}$, где $\alpha = 0, \ldots, n$ и $\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha = x^0\mathbf{e}_0 + x^A\mathbf{e}_A$. Стереографическое отображение $f : S^n \to \mathbb{E}^n$ имеет вид [9]

$$\xi = \frac{\mathbf{r}}{1-x^0}, \tag{14}$$

где $\xi = \xi^A\mathbf{e}_A$, $A = 1, \ldots, n$ или в координатах

$$\xi^A = \frac{x^A}{1-x^0}. \tag{15}$$

Рассмотрим обратное отображение $f^{-1} : \mathbb{E}^n \to S^n$:

$$\mathbf{x} = \frac{(\xi^2-1)\mathbf{e}_0 + 2\xi}{\xi^2+1}, \tag{16}$$

где $\xi^2 = \sum_{A=1}^n (\xi^A)^2$ или в координатах

$$x^0 = \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}, \quad x^A = \frac{2\xi^A}{\xi^2+1}. \tag{17}$$

Стереографическое отображение - диффеоморфизм, если дополнить $\mathbb{E}^n$ до конформного пространства C^n бесконечно удаленной точкой, соответствующей полюсу сферы. Ограничиваясь случаем $n = 3$, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{f} & C^3 \\ & \searrow \pi \quad \swarrow p & \\ & S^2. & \end{array}$$

Отображение $p = \pi \circ f^{-1} : C^3 \to S^2$ определяется с помощью этой диаграммы. Найдем его координатное выражение. Полагая $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$, согласно (15) имеем при $x^0 \neq 1$

$$x = \frac{x^1}{1-x^0}, \quad y = \frac{x^2}{1-x^0}, \quad z = \frac{x^3}{1-x^0},$$

где $(x, y, z) \in C^3$, а координаты точки (x^0, x^1, x^2, x^3) на $S^3 \subset \mathbb{E}^4$ связаны условием $\sum_{i=0}^{3} (x^i)^2 = 1$.

Обратное отображение $f^{-1} : C^3 \to S^3$ имеет согласно формуле (17) вид

$$f^{-1} : x^0 = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \quad x^1 = \frac{2x}{\xi^2 + 1}, \quad x^2 = \frac{2y}{\xi^2 + 1}, \quad x^3 = \frac{2z}{\xi^2 + 1}, \tag{18}$$

где $\xi^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Таким образом, получаем

$$p(x, y, z) = \pi(f^{-1}(x, y, z)) = \pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2} =$$

$$\left(\frac{2xz + y(\xi^2 - 1)}{2(y^2 + z^2)}, \frac{2xy - z(\xi^2 - 1)}{2(y^2 + z^2)}\right) = (u, v)$$

при $y^2 + z^2 \neq 0$. В результате проекция $p : C^3 \to S^2$ принимает вид

$$u = \frac{2xz + y(\xi^2 - 1)}{2(y^2 + z^2)}, \quad v = \frac{2xy - z(\xi^2 - 1)}{2(y^2 + z^2)}. \tag{19}$$

Найдем метрику в C^3, соответствующую метрике сферы. Используя формулу (18), получим

$$ds^2 = \frac{4d\xi^2}{(\xi^2 + 1)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} = \lambda^2 ds_0^2.$$

Итак, метрика S^3 в стереографических координатах (x, y, z), т. е. метрика C^3, отличается от евклидовой конформным множителем $\lambda^2 = \frac{4}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

Используя параметрические уравнения сферы S^3 (9) и формулы стереографической проекции (15), получаем, что в адаптированных координатах

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{B}(v \cos\varphi + u \sin\varphi), \\ y &= \tfrac{1}{B}\cos\varphi, \\ z &= \tfrac{1}{B}\sin\varphi, \end{aligned}$$

где $B = R - u\cos\varphi + v\sin\varphi$. Отсюда нетрудно получить матрицу метрического тензора пространства C^3 в адаптированных координатах: $G' = \mu G$, где $\mu = (\frac{R}{B})^2$ - конформный множитель.

Найдем уравнения слоев в C^3. Пусть $z = (z_1 : z_2) \in S^2$ и $z = (u, v)$ – ее стереографические координаты в области $z_2 \neq 0$. Из $z = \frac{z_1}{z_2}$ получаем $z_1 - zz_2 = 0$ или

$$\begin{cases} x^0 - ux^2 + vx^3 &= 0\,, \\ x^1 - vx^2 - ux^3 &= 0\,. \end{cases} \tag{20}$$

Это уравнение 2-плоскости, в которой лежит окружность - слой над точкой $z \in S^2$. Подставив сюда выражения (x^0, x^1, x^2, x^3) через (x, y, z) из формул (18) стереографического отображения, получим

$$\begin{cases} x - vy - uz = 0\,, \\ x^2 + (y-u)^2 + (z+v)^2 = R^2\,, \end{cases} \tag{21}$$

где $R^2 = 1 + u^2 + v^2$. Мы имеем 2-параметрическое семейство больших окружностей - сечений 2-сфер их диаметральными плоскостями. Действительно, плоскости проходят через центры сфер $C(0, u, -v)$ и начало координат, т. е. через прямую OC. Они, кроме того, образуют угол α с осью OX : $\sin\alpha = \frac{1}{R}$. Для того, чтобы описать это семейство, выделим из него 1-параметрическое подсемейство условием $u^2 + v^2 = c^2 = \mathrm{const}$. Тогда плоскости системы (21) образуют постоянный угол с осью OX. Значит, они являются касательными плоскостями конуса с осью OX. Это 1-параметрическое семейство окружностей имеет радиусы $R = \sqrt{1 + c^2}$. Заметим, что если $c' > c$, и, следовательно, $R' > R$, то $\alpha' < \alpha$. Таким образом, чем меньший угол плоскости больших окружностей семейства (21) образуют с осью OX, тем больше их радиус. Назовем это семейство *букетом окружностей.*

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, когда $u = v = 0$, получаем окружность радиуса $R = 1$ в плоскости YOZ с центром в начале координат. С другой стороны, при $\alpha \to 0$ имеем $R \to \infty$.

Найдем преобразования структурной группы $SO(2)$ в C^3, соответствующие паратактическим поворотам в $\mathbb{E}^4$. Согласно (8) и (15) преобразования этой группы имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{A}((\xi^2 - 1)\sin\varphi + 2x\cos\varphi), \\ y' &= \tfrac{2}{A}(y\cos\varphi - z\sin\varphi), \\ z' &= \tfrac{2}{A}(y\sin\varphi + z\cos\varphi), \end{aligned}$$

где $A = (\xi^2 + 1) - (\xi^2 - 1)\cos\varphi + 2x\sin\varphi$. Оператор этой 1-параметрической группы имеет компоненты

$$V^1 = \frac{1}{2}(-x^2 + y^2 + z^2 - 1),\ V^2 = -(xy + z),\ V^3 = y - xz\,.$$

Следовательно, горизонтальное распределение $H^{\perp}$, ортогональное к векторному полю V, имеет уравнение

$$\omega = \frac{1}{2}(-x^2 + y^2 + z^2 - 1)dx - (xy + z)dy + (y - xz)dz\,. \tag{22}$$

Другой способ нахождения горизонтального распределения следует непосредственно из системы (21). Нормальные векторы плоскости и 2-сферы соответственно равны

$$\mathbf{N}_1 = (1, -v, -u), \quad \mathbf{N}_2 = (x, y - u, z + v)\,.$$

Их векторное произведение (взятое с точностью до множителя) дает 1-форму ω'

$$\omega' = \omega^{1'}dx + \omega^{2'}dy + \omega^{3'}dz =$$

$$(uy - vz - u^2 - v^2)dx + (-ux - z - v)dy + (vx + y - u)dz\,.$$

Выражая ее компоненты как функции от x, y, z согласно (19), снова получаем 1-форму, пропорциональную ω.

Подсчитаем тензор кривизны этой связности. Напомним, что его единственной существенной компонентой является величина R^3_{12}, значение которой в адаптированных координатах указано в теореме (3). Отсюда, согласно (19), получаем

$$R^3_{12} = 32\frac{(y^2 + z^2)^2}{(\xi^2 + 1)^4}\,. \tag{23}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Связность конформной модели расслоения Хопфа задается 1-формой* (22), *а ее тензор кривизны равен* (23).

§3. Эллиптическая модель расслоения Хопфа

Чтобы получить эллиптическую модель расслоения Хопфа, надо отождествить диаметрально противоположные точки сферы S^3, т.е. рассмотреть факторпространство $S^3/\mathbb{Z}_2$. Однако, удобнее либо задать гиперплоскость, не проходящую через центр сферы , пополнив ее несобственными точками, либо, что и предполагается в дальнейшем, расширить $\mathbb{E}^4$ до проективного пространства $\mathbb{P}^4$ введением несобственной гиперплоскости $\mathbb{B}^3$. В любом случае точки этой гиперплоскости задаются ненулевыми кватернионами $\mathbf{x}$, определенными с точностью до множителя или, что то же самое, ортами $\mathbf{x} \in S^3$, определенными с точностью до знака. Центральная проекция $\mathrm{pr} : S^3 \to \mathbb{B}^3$ индуцирует на этой гиперплоскости структуру 3-мерного эллиптического пространства с мнимым абсолютом $Q : \mathbf{x}^2 = 0$. Другими словами, мы имеем в $\mathbb{B}^3$ невырожденный поляритет эллиптического типа [8].

Отметим, во-первых, что указанная проекция является гладким отображением и 2-листно накрывает $\mathbb{B}^3$. Во-вторых, расслоение Хопфа определено с точностью до преобразований ортогональной группы $SO(4)$, переводящей как сферу, так и несобственную гиперплоскость в себя. Преобразования этой 6-параметрической группы с помощью кватернионов единичного модуля $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3$ могут быть представлены в виде композиции $\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{b}$ левого и правого паратактических вращений [9] и индуцируют в $\mathbb{B}^3$ связную группу движений этого эллиптического пространства.

Всякая большая окружность сферы S^3 может быть задана ее пересечением с диаметральной 2-плоскостью

$$\xi\mathbf{x} = 0, \quad \eta\mathbf{x} = 0.$$

В $\mathbb{B}^3$ ей соответствует несобственная прямая h и эта же система задает уравнение этой прямой.

Множество всех 2-плоскостей в $\mathbb{P}^4$, а значит, и множество всех прямых в $\mathbb{B}^3$, зависит от 4 параметров. Между тем, большие окружности в S^3, задающие расслоение Хопфа $\pi : S^3 \to S^2$, образуют лишь 2-параметрическое семейство. Следовательно, соответствующие им несобственные прямые h образуют некоторую конгруэнцию K пространства $\mathbb{B}^3$. В силу сказанного выше, эта конгруэнция определена с точностью до движений эллиптического пространства, т.е. преобразований группы $SO(4)/\mathbb{Z}_2$. Что это за конгруэнция?

Теорема 5. *K есть паратактическая конгруэнция эллиптического пространства.*

Доказательство. Как уже было отмечено в первой части, структурной группой расслоения Хопфа является 1-параметрическая группа левых паратактических вращений (7) пространства $\mathbb{E}^4$. Преобразуя слои в себя, она вместе с тем оставляет инвариантными соответствующие 2-плоскости (20), а следовательно, и конгруэнцию K.

Другими словами, прямые этой конгруэнции являются орбитами 1-параметрической группы, индуцированной в $\mathbb{B}^3$ левыми паратактическими вращениями. Это так называемые параллели Клиффорда. □

Указанные преобразования в $\mathbb{B}^3$ называются *паратактическими сдвигами* [10]. В частности, оператор $J = \mathbf{A}(\pi/2) : J^2 = -I$ определяет комплексную структуру в $\mathbb{E}^4$ и индуцирует в $\mathbb{B}^3$ инволюцию биаксиального пространства. Определяемое им сопряжение мы будем обозначать так: $\mathbf{x} \to \tilde{\mathbf{x}} = Jx$. Заметим, что указанная структура эрмитова, поскольку полярное произведение точек J-инвариантно: $(J\mathbf{x}, J\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Пусть $z = u + iv \in S^2$ и $S^1 = \pi^{-1}(z)$. Тогда 2-плоскость, в которой лежит эта окружность, задается системой уравнений (20). Эта же система задает и соответствующую прямую h конгруэнции K, если (x^i) рассматривать как однородные координаты в $\mathbb{B}^3$. Если $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^3$ и h - проходящая через нее прямая конгруэнции, то ее можно задать также парой базисных точек $\{\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}\}$, сопряженных относительно абсолюта: $\tilde{\mathbf{a}} = J\mathbf{a}$. Например, точки, задаваемые ортами

$$\mathbf{a} = \frac{1}{R}(u, v, 1, 0), \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{1}{R}(-v, u, 0, 1), \tag{24}$$

где $R = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$, удовлетворяют системе (20) и соответствуют точкам большой окружности при значениях $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Тогда при каноническом нормировании мы получаем параметрическое уравнение этой прямой (ср. с уравнениями (10))

$$h : \mathbf{x} = \mathbf{a}\cos\varphi + \tilde{\mathbf{a}}\sin\varphi, \tag{25}$$

где φ - кратчайшее расстояние точки $\mathbf{x}$ от $\mathbf{a}$.

Конгруэнцию K естественно рассматривать вместе с сопряженной конгруэнцией $\tilde{K}$, дополнив прямые $h \in K$ их полярами $\tilde{h}$. Это позволяет подойти к расслоению Хопфа с двойственной точки зрения. Точкам поляры соответствует пучок гиперплоскостей, определяемый системой (20) и, следовательно, пучок 2-сфер, по которым они пересекают S^3. Большая окружность S^1, соответствующая прямой h, есть характеристическое многообразие этого пучка.

Пусть $\{\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{b}}\}$ – базис поляры, сопряженный относительно абсолюта. Как и базисные точки прямой h, зададим их в каноническом нормировании, т.е. ортами сферы S^3. Например, в качестве таких точек можно взять полюсы гиперплоскостей системы (20)

$$\mathbf{b} = \frac{1}{R}(1, 0, -u, v), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{R}(0, 1, -v, -u). \tag{26}$$

Тогда параметрическое уравнение поляры есть

$$\tilde{h} : \mathbf{y} = \mathbf{b}\cos\varphi + \tilde{\mathbf{b}}\sin\varphi. \qquad (27)$$

В итоге мы получили связанный с каждой прямой конгруэнции K автополярный проективный репер $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, $(\alpha = 0, \dots 3)$. Он удовлетворяет следующим условиям

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \ \mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_0, \ \mathbf{e}_3 = \tilde{\mathbf{e}}_2. \qquad (28)$$

Такие реперы, как и соответствующие координаты в $\mathbb{B}^3$, назовем *каноническими*. Они определены с точностью до *канонических преобразований*, образующих подгруппу Ли группы движений эллиптического пространства. Найдем эту подгруппу.

Теорема 6. *Движение пространства $\mathbb{B}^3$ является каноническим тогда и только тогда, когда оно коммутирует с инволюцией J этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, $\alpha = 0, ..., 3$ – канонический репер и g – каноническое преобразование. Тогда репер, образованный точками $\mathbf{e}'_\beta = g^\alpha_\beta \mathbf{e}_\alpha$ также канонический, т.е. наряду с (28) выполнены аналогичные условия $(\mathbf{e}'_\alpha, \mathbf{e}'_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\mathbf{e}'_1 = \tilde{\mathbf{e}}'_0$, $\mathbf{e}'_3 = \tilde{\mathbf{e}}'_2$. Из них получаем

$$\sum_\gamma g^\gamma_\alpha g^\gamma_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \ g^\alpha_1 = J^\alpha_\gamma g^\gamma_0, \ g^\alpha_3 = J^\alpha_\gamma g^\gamma_2.$$

Следовательно, кроме условий ортогональности, в который нужно отождествить преобразования g и $-g$, мы имеем еще следующие условия

$$g^0_1 = -g^1_0, \ g^1_1 = g^0_0, \ g^2_1 = -g^3_0, \ g^3_1 = g^2_0,$$
$$g^0_3 = -g^1_2, \ g^1_3 = g^0_2, \ g^2_3 = -g^3_2, \ g^3_3 = g^2_2.$$

Легко видеть, что они эквивалентны условию $gJ = Jg$. □

Нетрудно подсчитать, что группа G канонических движений пространства $\mathbb{B}^3$ зависит от 4 параметров.

В работе [12] А.П.Широков построил нормализацию расслоенного проективного пространства и, в частности, нормализацию паратактической конгруэнции эллиптического пространства $\mathbb{B}^{2n-1}$. Применим эти результаты к рассматриваемому случаю. Для этого присоединим к произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^3$ сопровождающий проективный репер следующим образом. Пусть h – прямая конгруэнции, проходящая через точку $\mathbf{x}$. За еще одну вершину репера примем сопряженную ей точку $\tilde{\mathbf{x}}$. Две оставшиеся вершины $\mathbf{y}_i$, $(i = 1, 2)$ выберем на поляре

$\tilde{h}$. Считая, что точки $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$ находятся в каноническом нормировании, положим

$$\mathbf{y}_i = \partial_i \mathbf{x} - \Gamma_i \tilde{\mathbf{x}}, \tag{29}$$

где Γ_i — функции криволинейных координат $(u^A) = (u, v, \varphi)$. Тогда условие $\mathbf{y}_i \in \tilde{h}$ будет выполнено, если $\Gamma_i = (\tilde{\mathbf{x}}, \partial_i \mathbf{x})$. Тем самым эти функции определены однозначно.

Инволюция J эллиптического пространства индуцирует инволюцию эллиптического типа на каждой прямой этого пространства, в том числе на прямых конгруэнции K. Рассмотрим точки $\mathbf{y}_i \in \tilde{h}$ и положим $\tilde{\mathbf{y}}_i = \gamma_i^j \mathbf{y}_i$, где γ – аффинор, определяющий инволюцию на $\tilde{h}$: $\gamma_k^i \gamma_j^k = -\delta_j^i$.

Запишем теперь деривационные уравнения сопровождающего репера $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \tilde{\mathbf{x}}\}$. В силу условий $\mathbf{x}^2 = \tilde{\mathbf{x}}^2 = 1$, $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) = (\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i) = 0$ они имеют вид

$$\begin{array}{rclrcl}
a)\ \partial_i \mathbf{x} & = & \Gamma_i \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_i, & d)\ \partial_3 \mathbf{x} & = & \tilde{\mathbf{x}}, \\
b)\ \partial_j \mathbf{y}_i & = & -G_{ij}\mathbf{x} + \Gamma_{ij}^k \mathbf{y}_k + h_{ij}\tilde{\mathbf{x}}, & e)\ \partial_3 \mathbf{y}_i & = & \beta_i^k \mathbf{y}_k, \\
c)\ \partial_i \tilde{\mathbf{x}} & = & -\Gamma_i \mathbf{x} + \gamma_i^k \mathbf{y}_k, & f)\ \partial_3 \tilde{\mathbf{x}} & = & -\mathbf{x}.
\end{array} \tag{30}$$

Найдем коэффициенты этих уравнений и выясним их смысл. Заметим, прежде всего, что точки $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}_i\}$ определяют горизонтальное распределение $H^\perp$ расслоения $\pi : \mathbb{B}^3 \to S^2$, ортогональное прямым конгруэнции. При этом Γ_i являются компонентами внутренней связности этого расслоения [11], которые при допустимых преобразованиях адаптированных координат

$$u^i = f^i(u^{j'}),\ u^3 = f^3(u^{j'}, u^{3'})$$

преобразуются по закону

$$\Gamma_{i'} = f_{i'}^i \Gamma_i + f_{i'}^3.$$

Что касается других коэффициентов этих уравнений, то, как нетрудно установить, все они – тензорные величины, за исключением Γ_{ij}^k, которые являются компонентами линейной связности.

Умножая полярно деривационные уравнения на точки $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \tilde{\mathbf{x}}\}$, а также находя условия их интегрируемости, придем к следующим выводам:

1) Тензор G_{ij} равен

$$G_{ij} = (\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = g_{ij} - \Gamma_i \Gamma_j. \tag{31}$$

Он симметричен, невырожден, а его компоненты не зависят от слоевой координаты φ. Более того, он ковариантно постоянен относительно линейной связности Γ^k_{ij}: $\nabla_k G_{ij} = 0$.

2) Тензор h_{ij} равен

$$h_{ij} = \partial_{[i}\Gamma_{j]} \tag{32}$$

Он кососимметричен, ковариантно постоянен, а его компоненты не зависят от слоевой координаты. Как видно из этой формулы, он лишь множителем отличается от тензора кривизны внутренней связности (13):

$$R^3_{ij} = 2h_{ij}.$$

3) Аффинор γ^i_j совпадает с β^i_j. Он удовлетворяет соотношению $h_{ij} = \gamma^k_i G_{kj}$, из которого вытекает, что

$$\gamma^i_j = G^{ik} h_{jk}. \tag{33}$$

Отсюда следует, что этот инволютивный аффинор ковариантно постоянен: $\nabla_k \gamma^i_j = 0$, а его компоненты также не зависят от базисных координат.

4) Компоненты линейной связности равны

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} - \Gamma_i \gamma^k_j, \tag{34}$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ суть символы Кристоффеля метрики

$$(g_{ij}) = \frac{1}{R^4} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \end{pmatrix},$$

(ср. (11)). Поэтому компоненты Γ^k_{ij} не зависят от слоевой координаты и так как

$$\Gamma^k_{[ij]} = \gamma^k_{[i}\Gamma_{j]}$$

– это связность с кручением.

Выясним теперь смысл полученных объектов. Для этого рассмотрим преобразование F от натурального к адаптированному полю реперов. Оно задается соотношениями (29) и, следовательно, определяется аффинором с матрицей [11]

$$F = \begin{pmatrix} \delta^i_j & 0 \\ -\Gamma_j & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда мы получим, что матрица метрического тензора пространства $\mathbb{B}^3$, которая в натуральном репере имеет вид (11), в адаптированном репере равна

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, метрический тензор является G-проектируемым в смысле К.М.Егиазаряна [4], где в рассматриваемом случае $G = SO(2)$, а компоненты G_{ij} задают метрику сферы S^2, записанную в стереографических координатах.

Если мы аналогичным образом пересчитаем компоненты $\overset{\circ}{\Gamma}{}^A_{BC}$ римановой связности метрики (11) к адаптированному реперу, то получим

$$\Lambda^k_{ij} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} - \Gamma_i\gamma^k_j - \Gamma_j\gamma^k_i \qquad (35)$$

(остальные ее компоненты равны нулю). Эта риманова связность проектируема, а ее проекция на S^2 есть риманова связность спроектированной на S^2 метрики G_{ij} [4]. Она имеет постоянную кривизну

$$R^k_{mij} = \delta^k_i G_{jm} - \delta^k_j G_{im}$$

и допускает ковариантно постоянный аффинор γ^i_j. Геометрический смысл этой связности выяснен в работе А.П.Широкова [12]. Пусть в точке $\mathbf{x} \in S^2$ задано направление с помощью вектора $\mathbf{v} = v^i\partial_i$. В $\mathbb{B}^3$ поставим ему в соответствие точку $\mathbf{v} = v^i\mathbf{y}_i$ относительно репера $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \tilde{\mathbf{x}}\}$ (горизонтальный лифт). Тогда оказывается, что при параллельном перенесении заданного направления по закону

$$\delta v^k = dv^k + (\Gamma^k_{ij}du^j + \gamma^k_i d\varphi)v^i = \rho v^k$$

точка $\mathbf{v}$ смещается по кривой, касательная к которой принадлежит плоскости $\{\mathbf{v}, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}\}$. В частности, если эта кривая горизонтальна, т.е. $d\varphi = -\Gamma_j du^j$, то

$$\delta v^k = dv^k + \Lambda^k_{ij}v^i du^j$$

и параллельное перенесение происходит с помощью связности Λ.

Подсчитаем компоненты полученных объектов, учитывая выбор параметризации эллиптического пространства, соответствующий формулам (10). Прежде всего, так как $\Gamma_i = g_{i3}$, то из (11) имеем

$$\Gamma_1 = -\frac{v}{R^2}, \ \Gamma_2 = \frac{u}{R^2}. \qquad (36)$$

Тогда для метрического тензора в силу формулы (31) получаем

$$G_{ij} = \frac{1}{R^4}\delta_{ij}.$$

Тензор h_{ij} имеет единственную существенную компоненту

$$h_{12} = \frac{1}{R^4}\,,$$

а аффинор инволюции γ имеет матрицу

$$(\gamma^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь нетрудно подсчитать и риманову связность. Ее существенные компоненты равны

$$L^1_{11} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{11},\ L^1_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{12} - \frac{v}{R^2},\ L^1_{22} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22} + \frac{2u}{R^2}\,,$$

$$L^{21}_{11} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{11} + \frac{2v}{R^2},\ L^2_{12} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12} - \frac{u}{R^2},\ L^2_{22} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{11}\,.$$

В заключение заметим, что аналогично предыдущему можно было бы рассмотреть расслоение Хопфа второго рода $\pi' : S^3 \to S^2$ на левые смежные классы. Кватернионы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ принадлежат одному и тому же левому смежному классу, если $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \in S^1$. Так как

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} = (\bar{a}_1 b_1 + a_2\bar{b}_2) + (\bar{a}_1 b_2 - a_2\bar{b}_1),$$

то проекция этого расслоения имеет вид $\pi' : (z_1, z_2) \to (z_1 : \bar{z}_2)$ или при $z_2 \neq 0$

$$\pi'(z_1, z_2) = z = \frac{z_1}{\bar{z}_2} \in S^2.$$

Очевидно, оба расслоения изоморфны и связаны друг с другом инволюцией $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{-1}$, т.е. $z_2 \to \bar{z}_2$. Это обстоятельство естественным образом приводит к конформной модели второго рода, а также к паратактической конгруэнции в $\mathbb{B}^3$, образованной параллелями Клиффорда второго рода.

Литература

[1] Берже М. *Геометрия* - М.:, Мир. - 1984. - т.2. - 386 с.

[2] Бушманова Г. В., Норден А. П. *Элементы конформной геометрии* - Казань, изд-во Казанск. ун-та. - 1972. - 177 с.

[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. - *Современная геометрия. Методы и приложения* – М.:, Наука. - 1979. - 760 с.

[4] Егиазарян К.М. *Спроектированные инвариантные аффинные связности*//Тр. геометр. семин. - Казанск. ун-т. - 1980. - вып. 12. - С.27-37.

[5] Ибрагимова Р.Х., Шапуков Б.Н. *Метрические расслоения и некоторые их приложения*//Тр. геометр. семин. - Казанск. ун-т. - 1990. - вып. 20. - С.44-58.

[6] Клейн Ф. *Неевклидова геометрия* - М.-Л.: ОНТИ. - 1936. - 355 с.

[7] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* - М.:, Наука. - 1981. - т.1. - 344 с.

[8] Норден А.П. *Пространства аффинной связности* - М.: Наука. - 1976. - 432 с.

[9] Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства* - М.: Наука. - 1966. - 647 с.

[10] Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства* - М.: Наука. - 1969. - 547 с.

[11] Шапуков Б. Н. *Связности на дифференцируемом расслоении* //Тр. геометр. семинара. - Изд-во Казанск. ун-та. - 1980. - Вып. 12. - С. 97-109.

[12] Широков А.П. *О нормализациях в проективном пространстве с заданным расслоением*//Изв. вузов. Мат. - 1974. - No 5. - С. 216-221.

Адрес: *Казанский государственный университет, каф. геометрии, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Mathematical Department, Chair of Geometry, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Boris.Shapukov@ksu.ru; Irina.Kuzmina@ksu.ru*