В. Н. Пилипчук, Об особенностях разделения движений в задачах нелинейной динамики гибких упругих конструкций, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 20–25

На рисунке I представлены зависимости прогиба w от пространственной координаты x для различных моментов времени. Сплошные линии соответствуют прогибам оболочки с ребрами, а пунктирные – такой же оболочке без ребер; кривые I – 5 – временам $t = [40 + (i - 1)\,20] \cdot 10^{-6}$ с, $i = \overline{1,5}$; кривые 6 – 8 – временам $t = 40 \cdot 10^{-6}$, $t = 60 \cdot 10^{-6}$, $t = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ с. В местах расположения ребер прогибы более чем в два раза меньше по сравнению с гладкой оболочкой. На графиках отчетливо прослеживается значительное влияние ребер на характер колебаний подкрепленной оболочки. Шпангоут, установленный в непосредственной близости от защемленного края, служит как бы волноломом, за счет которого резко снижается эффект отражения от жесткой заделки.

Литература

I. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Т.2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 368 с.

2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., 1973. – 272 с.

3. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Неосесимметричные колебания ребристой цилиндрической оболочки с учетом сдвиговых деформаций // Прикладная механика. – 1989. – Т.25. – № 5. – С.50 – 55.

4. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Исследование ребристых взрывных камер при импульсной обработке материалов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 54. – С.79 – 82.

5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

В.Н.Пилипчук

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ГИБКИХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается метод разделения движений для нелинейных уравнений динамики гибких упругих конструкций типа пологих оболочек. Составляющие движения, связанные с изгибаниями и деформациями растяжения - сжатия ввиду существенного различия соответствующих жесткостей, рассматриваются в различных временных масштабах. При этом исходный этап состоит в преобразовании уравнений движения посредством введения в функциональном конфигурационном пространстве локальной подвижной системы координат на непрерывном множестве равновесных положений вырожденной, абсолютно гибкой системы [I]. Показано, что движение представляет собой дрейф по этому множеству (многообразию) области локализации высокочастотных осцилляций, связанных с нормальными отклонениями от множества. Осцилляции описываются квазилинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида, а дрейф - существенно нелинейной системой, на единицу меньше (по сравнению с исходной) размерности. В конечном счете, это позволяет исключить высокочастотную составляющую движения при помощи метода осреднения и тем самым облегчить численный анализ задачи, а если число учитываемых степеней свободы конструкции равно двум, то в ряде случаев все решение может быть получено аналитически в виде асимптотических рядов. В качестве примеров рассмотрена задача динамической устойчивости пологой арки при ступенчатом во времени нагружении, построены двухчастотные режимы нелинейных колебаний тонкостенного кругового кольца, описана динамика модели пологой оболочки.

Рассмотрим упругую систему с бесконечным числом степеней свободы. Положение точек системы будем определять функцией W из функционального конфигурационного пространства X_∞. Все функции из X_∞ определены в некоторой области $G \subset R^3$ и удовлетворяют на ее границе заданным краевым условиям (в частном случае область G может быть одно- или двумерной; характер краевых условий здесь конкретизировать не будем). Пусть в X_∞ определено скалярное произведение и евклидова норма

$$\langle X, Y \rangle = \langle X Y \rangle_G \; ; \; \|X\| = \sqrt{\langle X^2 \rangle_G} \; ;$$

$$X, Y \in X_\infty \, ,$$

где $\langle \; \rangle_G$ - оператор осреднения по области G.

Движению системы соответствует траектория изображающей точки в X_∞, при этом W зависит от параметра времени τ и при отсутствии внешних воздействий на систему подчиняется уравнению

$$\ddot{W}_{\tau\tau} + \nabla_W \Pi [W] = 0 \, , \qquad (I)$$

где $\nabla_W \Pi[W]$ – градиент функционала потенциальной энергии упругих деформаций системы; массовая плотность упругой среды предполагается равной единице. В форме (I) могут быть представлены уравнения колебаний некоторых моделей нелинейной теории пологих оболочек $(G \subset R^2)$, в частности, арок и колец $(G \subset R^1)$.

Далее рассмотрим случай, когда функционал Π имеет вид

$$\Pi[W] = \varepsilon^2 U[W] + \frac{1}{2} f^2[W],$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр; U, f – заданные функционалы, действующие на пространстве X_∞, при этом соотношение

$$f[W] = 0 \qquad (2)$$

определяет некоторое многообразие в X_∞. Предположим, что это многообразие допускает параметризацию посредством величин $S = (s_1, s_2, \ldots)^T$, такую, что

$$f[\tilde{W}(S;\eta)] \equiv 0; \ \eta \in G;$$

$$\langle \tilde{W}'_{s_i}, \tilde{W}'_{s_j} \rangle = \delta_{ij}; \ i, j = 1, 2, \ldots .$$

В каждом конкретном случае такая параметризация может быть выполнена после введения в X_∞ базиса и записи многообразия в координатной форме. Для пологой арки многообразие имеет структуру гиперэллипсоида, в случае кольца – эллиптического гиперпарабалоида [I]. Каждая точка многообразия отвечает положению конструкции без деформации растяжения – сжатия упругой линии, а перемещение от точки к точке – чистым изгибаниям. Ввиду гибкости конструкции, а это предположение отражает факт малости параметра ε, отклонения от многообразия в процессе движения относительно невелики. Такие представления о характере движения приводят к идее линеаризации уравнения (I) около всего многообразия (2), а не около одного из положений равновесия.

Обозначим через n единичный вектор нормали к многообразию

$$n = \frac{1}{\omega_0} \nabla_{\tilde{W}} f[\tilde{W}], \ \omega_0 = \| \nabla_{\tilde{W}} f[\tilde{W}] \| .$$

Следуя высказанным выше соображениям, представим уравнение траектории системы в X_∞ в виде (рис. I)

$$W = \tilde{W} + \varepsilon L H; \ L = (n, \tilde{W}_{s_1}, \tilde{W}_{s_2}, \ldots); \qquad (3)$$

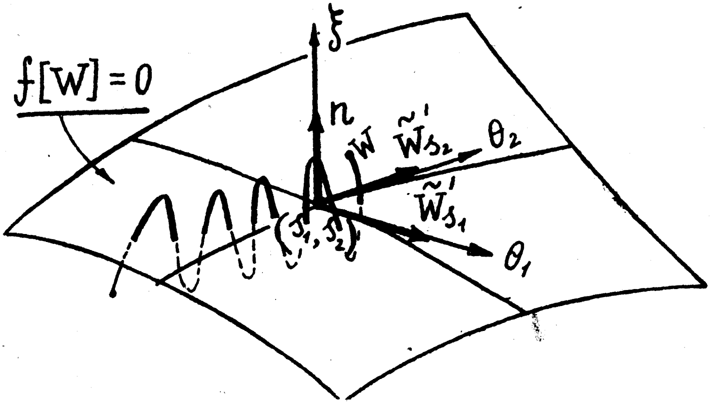

Рис.I. Траектория изображающей точки в конфигурационном пространстве и локальная подвижная система координат на множестве равновесных положений абсолютно гибкой системы (пространство показано схематически как трехмерное)

Подставляя (3) в (I) и проектируя полученное соотношение на элементы n, $\tilde{W}'_{s_i}$ $(i=1,2,\dots)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_{\tau\tau} + \omega_0^2 \xi = -\varepsilon \langle n, \left(\dfrac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^{02}} + 2 \dfrac{\partial L}{\partial t^0} \dot{H}_\tau + F_1 \right) \rangle + O(\varepsilon), & (4) \\ \ddot{\theta}_{i\tau\tau} = -\varepsilon \langle \tilde{W}_{s_i}, \left(\dfrac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^{02}} + 2 \dfrac{\partial L}{\partial t^0} \dot{H}_\tau + F_1 \right) \rangle + O(\varepsilon), & (5) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots),$$

где

$$F_1 = \nabla_{\tilde{W}} U[\tilde{W}] + \frac{\partial \nabla_W f[W]}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \omega_0 \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f[W]}{\partial \varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} n \omega_0 .$$

Подчеркнем, что система (4), (5) в отличие от исходного уравнения (I) имеет квазилинейный вид.

Два приближения по методу двухмасштабных разложений относительно полученной системы (4), (5) дают решение в виде

$$\xi = \alpha\,\omega_0^{-\frac{1}{2}}\cos(t^* + \beta)\,;\quad \theta_i \equiv 0\,,\ (i = 1, 2, \dots)\,;$$

$$\frac{dt^*}{d\tau} = \omega_0\,;\quad \omega_0 = \|\nabla_{\tilde{W}} f[\tilde{W}]\|\,;\quad \alpha, \beta = \mathrm{const}\,;$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{dS_i}{dt^0}\right)^2 + U[\tilde{W}] + \frac{\alpha^2}{2}\omega_0 = \mathrm{const}\,.$$

Последнее соотношение - это интеграл энергии системы уравнений для функций $S_1(t^0)$, $S_2(t^0)$, ... Такие уравнения следуют из условия ограниченности координат θ_1, θ_2, ... по времени τ (условия локальности введенной подвижной системы координат) в результате соответствующего исключения среднего по τ правых частей в (5).

Если число учитываемых степеней свободы равно двум, то данный интеграл содержит только одну функцию $S_1(t^0)$, которая может быть выражена квадратурой (см. далее пример). В других случаях описанный прием облегчает численный анализ, поскольку переменные S_1, S_2, ... не содержат высокочастотных составляющих.

Примеры функционалов. Пологая арка

$$U[W] = \frac{1}{2} < (W''_{\eta^2} - W''_{0\eta^2})^2 >_G\,,$$

$$f[W] = -\frac{1}{2} < W W''_{\eta^2} - W_0 W''_{0\eta^2} >_G\,,$$

$W = W(\tau, \eta)$, $W_0 = W_0(\eta)$ - координаты деформированной и первоначальной упругих линий арки; $G = \{\eta : 0 \le \eta \le \pi\}$; τ - временной параметр.

Круговое пологое кольцо единичного радиуса

$$U[W] = \frac{1}{2} < (W''_{\eta^2})^2 >_G\,,$$

$$f[W] = < W + \frac{1}{2}(W'_\eta)^2 >_G\,,$$

$W = W(\tau, \eta)$ - нормальный прогиб, отсчитываемый в сторону внешней нормали; $G = \{\eta : 0 \le \eta \le 2\pi\}$.

Пример решения для свободных колебаний кольца:

$$W = \tilde{W} + \varepsilon^2 n\left[\tau + \bar{\tau}\sqrt{\frac{\bar{\omega}_0}{\omega_0}}\cos t^*\right] + O(\varepsilon^2)\,;$$

$$\tilde{w} = -\frac{1}{2} j^2 \varphi^2 + \sqrt{2}\,\varphi \cos j\eta \,; \quad \omega_0^2 = 1 + j^4 \varphi^2 \,;$$

$$\tau = \frac{j^2}{\omega_0^3}\left[\left(\frac{d\varphi}{dt^0}\right)^2 - j^4\varphi^2\right]; \quad \bar{\tau} = \tau\big|_{t^0=0} \,; \quad \bar{\omega}_0 = \omega_0\big|_{t^0=0} \,;$$

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\omega_0\, d\varphi}{\sqrt{2k - j^4\varphi^2}} = t^0 \,; \quad t^0 = \varepsilon \tilde{\tau} \,; \quad \frac{dt^*}{d\tau} = \omega_0 \,;$$

$k = const$; φ – параметр $(ds_1^2 = \|\tilde{w}'^2_{\varphi}\| d\varphi^2)$; $j \gg 1$ – целое число; величина ε пропорциональна толщине кольца.

Это решение описывает двухчастотные колебания – медленные изгибания по j-й форме в масштабе времени t^0 и быстрые осцилляции длины срединной линии (временной масштаб t^*). Как видно из решения частота осцилляций существенно зависит от амплитуды изгибной формы, определяемой параметром φ.

Литература

I. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. – 216 с.

Н.Н.Рогачева

АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ ВИБРАЦИЙ НА ОСНОВЕ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

В результате решения нескольких модельных задач показана возможность гашения вибраций пространственных конструкций с помощью порожденных электричеством вынужденных колебаний пьезокерамических или пьезокомпозитных материалов.

I. Пусть пьезокерамический стержень с продольной поляризацией совершает продольные колебания под действием приложенной к краям продольной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$, где t – время, ω – круговая частота колебаний. В дальнейшем все уравнения будем выписывать относительно амплитудных значений. Выпишем исходную систему уравнений [I – 2].