ON THE CORRECT FORMULATION
OF GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR CONDITIONALLY WELL-POSED
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FREDHOLM–VOLTERRA

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin

In this paper we investigate the general boundary-value problem for linear integrodifferential equations of Fredholm–Volterra, specified on a segment of the number line where the order of the internal differential operators is higher than that of the corresponding exterior differential operator. We prove well-posedness of this problem in the Hadamard sense in a specially selected pair of non-weighted Sobolev spaces.
Keywords: Sobolev space, integro-differential equation, general boundary-value problem, wellposedness.

УДК 517.928

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В МОДЕЛИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ГОРЮЧЕГО СПРЕЯ

А.Ж. Агатаева[1]

1 *aina2100@yandex.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

Работа посвящена геометрическому подходу к моделированию критических явлений в разнотемповых динамических моделях. Горение характеризуется наличием одновременно протекающих процессов с существенно различными скоростями (например, изменение температуры и расход реагирующего вещества), поэтому для моделирования таких явлений используются сингулярно возмущенные системы. На примере динамической модели воспламенения горючего спрея показано, что неустойчивые инвариантные многообразия сингулярно возмущенных систем могут применяться для моделирования критических явлений. Применение геометрической теории сингулярных возмущений позволило получить условия протекания критического режима в аналитической форме.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, инвариантное многообразие, устойчивость, критические явления, тепловой взрыв.

1. Введение

В статье рассматривается процесс воспламенения горючего газа, содержащего капли жидкого топлива. Для моделирования критических явлений в рассматриваемой системе применен метод интегральных многообразий сингулярно возмущенных систем. Особенности горения и теплового взрыва в газовой среде, хорошо известны и широко представлены различными публикациями. Тем не менее, влиянию капель жидкости на динамику такого процесса уделялось меньше внимания. По существу, поведение таких систем обусловлено двумя процессами: потери тепла за счет испарения горючей жидкой среды (капель) и выделением тепла, связанного с экзотермической реакцией окисления в газовой фазе. На основе геометрической теории сингулярно возмущенных систем изучена природа и получены условия протекания критических явлений в исследуемой химической системе.

2. Математическая модель

Математическая модель воспламенения горючего газа, содержащего капли жидкости, представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: уравнения энергии для реагирующего газа, массового уравнения для жидких капель и уравнения для концентрации горючего компонента газовой смеси. Модель построена при обычных для теории горения предположениях однородности химических процессов в каждой точке реакционного сосуда [1] и в безразмерной форме имеет вид [2]:

$$\gamma\frac{d\theta}{d\tau}=\eta\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)-\epsilon_1 r\theta(1+\beta\theta), \tag{1}$$

$$\frac{dr^3}{d\tau}=-\epsilon_1\epsilon_2 r\theta, \tag{2}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau}=-\eta\frac{1}{1+\beta\theta}\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)+\epsilon_1 r\psi\theta. \tag{3}$$

где θ — безразмерная температура горючего газа, r — безразмерный радиус капли, η — безразмерная концентрация горючего газа, τ — безразмерное время, γ — безразмерный параметр, равный конечной безразмерной адиабатической температуре термически изолированной системы после взрыва, β — приведенная начальная температура, ϵ_1, ϵ_2 характеризуют взаимодействие между газовой и жидкой фазами, ψ — параметр, характеризующий отношение энергии сгорания газовой смеси к жидкой энергии испарения. Начальные условия для уравнений (1)-(3):

$$\theta=0,\ \ \eta=1,\ \ r=1.$$

Соответствующая комбинация уравнений (1)-(3) и интегрирование по времени дает следующий интеграл энергии:

$$\eta-1+\frac{\gamma}{\beta}\ln(1+\beta\theta)+\frac{\psi-1}{\epsilon_2}(r^3-1)=0, \tag{4}$$

что позволяет уменьшить порядок системы (1)-(3):

$$\gamma\frac{d\theta}{d\tau}=\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\ln(1+\beta\theta)-\frac{\psi-1}{\epsilon_2}(r^3-1)\right)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)-\epsilon_1 r\theta(1+\beta\theta), \tag{5}$$

$$\frac{dr^3}{d\tau}=-\epsilon_1\epsilon_2 r\theta. \tag{6}$$

Таким образом, динамическое поведение системы зависит от пяти безразмерных параметров: $\beta << 1$, $\gamma << 1$, ϵ_1, ϵ_2, ψ. В работе [3] на основе анализа нулевого приближения медленного интегрального многообразия системы (медленной кривой) [4] установлено существование трех основных типов режимов химической реакции в зависимости от значений дополнительных параметров системы. Такими режимами являются безопасный медленный режим горения, быстрый режим (режим типичного теплового взрыва) и режим теплового взрыва с задержкой. В последнем режиме есть фаза медленного разогрева системы перед тем, как процесс перейдет во взрывную фазу. Установлено существование критического режима, который разделяет области безопасных медленных режимов и взрывные процессы. Применение геометрической теории сингулярных возмущений позволяет получить условия протекания критического режима в аналитической форме. Для этого воспользуемся предложенными в [5] асимптотиками для траектории на участке срыва с медленного интегрального многообразия системы (5)-(6):

$$1 = r^* + \gamma^{\frac{2}{3}}\gamma_0^{\frac{2}{3}}\omega \operatorname{sign} f(r^*,\theta^*) + \frac{1}{3}\gamma \ln\frac{1}{\gamma}\gamma_1 \operatorname{sign} f(r^*,\theta^*) + O(\gamma), \tag{7}$$

и соответствующего значения бифуркационного параметра, в качестве которого рассмотрен параметр ϵ_1, где

$$\omega = 2.338107,\ \ \gamma_0 = \sqrt{\frac{2}{|g_{\theta\theta}(T)g_r(T)|}}|f(T)|,$$

$$\gamma_1 = \frac{6g_{\theta\theta}(T)f_\theta(T) - 2g_{\theta\theta\theta}(T)f(T)}{3g_{\theta\theta}^2(T)}.$$

Здесь T – точка срыва медленной кривой с координатами (r^*,θ^*):

$$\theta^* = 1 + 3\beta + \ldots,\ \ r^* = r_0^* + r_1^*\beta,$$

$$r_0^* = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\ p = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{e(\psi-1)},\ q = \frac{\epsilon_2 + \psi - 1}{\psi - 1},$$

$$r_1^* = \frac{2e(\psi-1)(1 - r_0^{*3}) - 4\epsilon_1\epsilon_2 r_0^*}{\epsilon_1\epsilon_2 + 3e(\psi-1)r_0^{*2}}.$$

На рисунках 1,2 приведены результаты численного исследования системы (5)-(6) для критического режима. Особенностью критического режима является то, что он играет роль границы между безопасными и взрывными процессами. Кроме того, реализация такого режима позволяет получить сравнительно высокие значения температуры горючей смеси в рамках безопасного процесса.

3. Заключение

Впервые для рассматриваемой модели благодаря учету малых возмущений удалось установить существование критического режима разделяющего области безопасных реакций и опасных взрывных процессов. Применение геометрической теории сингулярных возмущений позволило также получить условия протекания критического режима в аналитической форме.

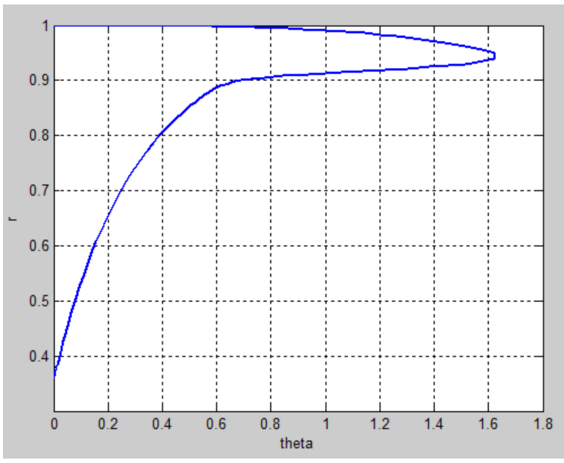

Рис. 1. Траектория системы в случае критического режима: $\epsilon_1 = \epsilon_1^*$, $\gamma = 0.01$, $\epsilon_1 = 2.2$, $\epsilon_2 = 0.8$, $\beta = 0.05$, $\psi = 0.19$.

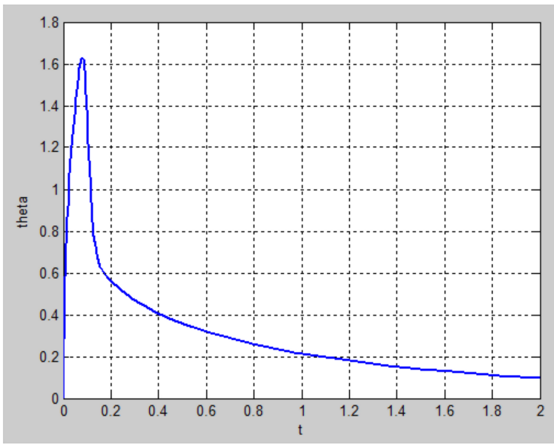

Рис. 2. Температура газа в случае критического режима: $\epsilon_1 = \epsilon_1^*$, $\gamma = 0.01$, $\epsilon_1 = 2.2$, $\epsilon_2 = 0.8$, $\beta = 0.05$, $\psi = 0.19$.

Литература

1. Semenov N.N. *Zur theorie des verbrennungs prozesses.* – Z. Physik. Chem., 1928. – P. 571-581.

2. Goldfarb I., Gol'dshtein V., Shreiber I., Zinoviev A. *Liquid Drop Effects on Self-Ignition of Combustible Gas* // Proceedings of the 26th Symposium (International) on Combustion. – 1996. – P. 1557–1563.

3. Agataeva A.Zh., Shchepakina E.A. *Critical conditions of ignition of fuel spray containing liquid fuel droplets* // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – P. 484–492.

4. Соболев В.А., Щепакина Е.А. *Редукция моделей и критические явления в макрокинетике.* – М.: Физматлит, 2010. – 320 с.

5. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.* – М.: Наука, 1975. – 247 с.

MODELLING OF THE CRITICAL PHENOMENA IN THE MODEL OF FUEL SPRAY IGNITION

A.Zh. Agataeva

The work is devoted to a geometric approach of the modelling of critical phenomena in multi-rate dynamic models. The crucial idea of such approach is that the unstable invariant manifolds of singularly perturbed systems can be used for critical phenomena modelling. As an illustration a dynamic model of ignition of a fuel spray is considered. The application of the geometric theory of a singular perturbations allowed us to obtain the realizability conditions for the critical regime in analytical form.

Keywords: invariant manifold, singular perturbations, stability, critical phenomena, ignition, thermal explosion.