Литература

1. Джексон Дж. *Классическая электродинамика*. – М.: Мир, 1965.

2. Таланов В.М., Житный Г.М. *Ионные равновесия в водных растворах*. – М.: Академия естествознания, 2007.

3. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. *Физика в техническом университете, т.5. Квантовая физика*. – М.: МГУ, 2012.

4. Заболоцкий В.И., Никоненко В.В. *Перенос ионов в мембранах*. – М.: Наука, 1996.

MATH MODEL OF AN ELECTROCHEMICAL PROCESS IN A LIQUID DIELECTRIC WITH A SEPARATING SELECTIVE MEMBRANE

I.A. Avdeyev

This paper discusses the construction of a math model for the process of transfer of ions through the selective membrane in a liquid dielectric, and finding the solutions of amperage and voltage, obtained from known external impedance and concentrations of the ions in the cells.

Keywords: selective membrane, dielectric, ion exchange, electric potential, ionic current, voltage, amperage, impedance.

УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Ю.Р. Агачев[1], А.В. Гуськова[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье исследуется задача Коши для одного класса линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной в главной части в случае, когда известные коэффициенты уравнения принадлежат классу Гельдера. Доказана корректность задачи в специальным образом построенной паре функциональных пространств. На основе аппарата алгебраических полиномов построены приближения к точному решению исследуемой задачи.

Ключевые слова: линейное уравнение, дробно–дифференциальное уравнение, задача Коши, корректная постановка, приближенное решение.

Пусть m – фиксированное натуральное число, вещественное число α подчинено условию $m-1<\alpha<m$.

В работе исследуется задача Коши

$$x^{(i)}(a)=0, \quad i=\overline{0,m-1}, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$Kx \equiv (D^{\alpha}_{a+}x)(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)x^{(m-i)}(t) = y(t),\ a < t \le b, \tag{2}$$

где $p_i(t), y(t)$ — известные, $x(t)$ — искомая функции на $[a,b]$; $D^{\alpha}_{a+}x$ есть левосторонняя производная Римана—Лиувилля (см., например, в [1, с. 44]) порядка α функции $x(t)$:

$$(D^{\alpha}_{a+}x)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{x(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}, \tag{3}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Существование этой производной обеспечивается условием

$$\int_a^t \frac{x(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} \in AC^{m-1}[a,b],$$

где $AC^{m-1}[a,b]$ означает класс функций $f(t)$, имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную $f^{(m-1)}(t)$ порядка $m-1$ $(f^{(m-1)} \in AC[a,b] \equiv AC^0[a,b])$. Поскольку искомая функция $x(t)$ в задаче (1), (2) имеет производную порядка $m-1$, известные свойства дробных производных позволяют преобразовать формулу (3):

$$(D^{\alpha}_{a+}x)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x^{(m-1)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}} = (D^{\{\alpha\}}_{a+}x^{(m-1)})(t), \tag{4}$$

где $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α.

Пусть $H_\beta \equiv H_\beta[a,b]$ – пространство функций, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Гельдера с показателем $\beta, 0 < \beta < 1$. Через $H_{0,\beta}$ обозначим его подпространство функций, обращающихся в нуль в точке a. Норму в пространстве H_β введем обычным образом:

$$\|f\|_\beta = \|f\|_C + H(f;\beta),\ f \in H_\beta.$$

Здесь $\|f\|_C$ – обычная max-норма в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, $H(f;\beta)$ – наименьшая постоянная Гельдера функции $f \in H_\beta$.

Введем в рассмотрение оператор дробного интегрирования Римана—Лиувилля $I^{\{\alpha\}}_{a+}$ порядка $\{\alpha\}$. Этот оператор, как известно, осуществляет взаимно-однозначное соответствие $H_{0,\beta}$ на $H_{0,\{\alpha\}+\beta}$, если $0 < \beta < \{\alpha\} + \beta < 1$. Тогда дробно—дифференциальный оператор $D^{\{\alpha\}}_{a+}$ переводит пространство $H_{0,\{\alpha\}+\beta}$ на $H_{0,\beta}$.

Определим пару пространств, в которой будем рассматривать исходную задачу. Пусть $Y = H_{0,\beta}$, $X = \widetilde{W}^{m-1}H_{0,\{\alpha\}+\beta}$ – пространство функций, удовлетворяющих условиям (1) и имеющих на $[a,b]$ производную порядка $m-1$, принадлежащую $H_{0,\{\alpha\}+\beta}$. Норму в пространстве X зададим по формуле

$$\|x\|_X = \|x^{(m-1)}\|_{\{\alpha\}+\beta},\ x \in X.$$

В паре пространств (X,Y) задачу (1), (2) запишем в операторной форме

$$Kx \equiv Dx + Gx = y\ (x \in X, y \in Y), \tag{5}$$

где, с учетом формулы (4),

$$(Dx)(t) = (D_{a+}^{\{\alpha\}} x^{(m-1)})(t),\ (Gx)(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) x^{(m-i)}(t).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть вещественное число γ удовлетворяет условию $\{\alpha\} + \beta < \gamma \leq 1$ и выполнены предположения:*

1) $p_i \in H_{0,\gamma}[a,b], i = \overline{1,m}$;

2) $y \in H_{0,\beta}[a,b]$.

Тогда уравнение (5) (а, следовательно, и задача (1), (2)) в паре (X,Y) корректно поставлена по Адамару.

Заметим, что для дробной производной порядка α имеют место [1, с. 44] соотношения $(D_{a+}^{\alpha} x)(a) = 0$, если $x(t) = (t-a)^{\alpha - i}, i = 1, 2, \ldots, [\alpha] + 1$. С учетом этого свойства для дробных производных, приближенное решение уравнения (5) будем искать в виде

$$x_n(t) = (t-a)^{\alpha} \sum_{i=0}^{n} c_i t^i, \tag{6}$$

Пусть H_n есть подпространство алгебраических полиномов степени не выше n. Во введенных выше пространствах введем подпространства: X_n – подпространство обобщенных полиномов вида (6), $Y_n = H_n$. Пусть $P_n : Y \to Y_n$ – произвольно фиксированный оператор проектирования Y на Y_n.

Будем решать задачу (1), (2) общим полиномиальным проекционным методом, согласно которому неизвестные коэффициенты полинома (6) определяются из уравнения

$$K_n x_n \equiv D x_n + P_n G x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{7}$$

Отметим, что при конкретном выборе оператора проектирования P_n будем получать вычислительные схемы того или иного проекционного метода, в частности, методов Галеркина, коллокации, подобластей.

С помощью результатов по общей теории приближенных методов функционального анализа (см., например, [2, гл. I]) доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть γ – вещественное число, удовлетворяющее условию $\{\alpha\} + \beta < \gamma \leq 1$, и выполнены предположения:*

1) $y, p_i \in H_{0,\gamma}[a,b], i = \overline{1,m}$;

2) $P_n^2 = P_n$, $\|P_n\|_{C \to C} = O(\ln n)$;

3) задача (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t)$ при любой правой части из $H_{0,\beta}$.

Тогда уравнение (7) при всех натуральных n, начиная с некоторого, однозначно разрешимо. Приближения, найденные по формуле (6), сходятся по норме пространства X к точному решению со скоростью

$$\|x^* - x_n\|_X = O\left\{\frac{\ln n}{n^{\gamma - \beta}}\right\}.$$

Отметим, что результаты сохраняют силу, если в уравнении (2) добавлены слагаемые с младшими производными дробного порядка. Кроме того, при наличии у коэффициентов уравнения (2) дополнительных свойств гладкостного характера скорость сходимости найденных приближений к точному решению возрастает. Последнее вытекает из одного результата по приближению функций алгебраическими полиномами в пространствах гельдеровых функций (см., например, [3]).

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

3. Agachev J. R., Galimyanov A. F. *On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36, No. 2. – P. 97-102.

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE IN THE PRINCIPAL PART

J.R. Agachev, A.V. Guskova

The article studies the Cauchy problem for a class of linear ordinary differential equations with fractional derivative in the main part, in the case when known coefficients of the equation belong to the class of Holder. The correctness of the problem in a special way constructed pair of function spaces is proved. Approximations to exact solution of the investigated problem is constructed on the basis apparatus of algebraic polynomials.

Keywords: linear equation, fractional differential equation, Cauchy problem, correct statement, approximate solution.

УДК 517.968

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА–ВОЛЬТЕРРА

Ю.Р. Агачев[1], М.Ю. Першагин[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе исследуется общая краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма–Вольтерра, заданных на отрезке числовой прямой, в которых порядок внутреннего дифференциального оператора выше порядка соответствующего внешнего дифференциального оператора. Доказана корректная постановка указанной задачи в смысле Адамара в специальным образом выбранной паре невесовых пространств Соболева.

Ключевые слова: пространство Соболева, интегро-дифференциальное уравнение, общая краевая задача, корректная постановка.