Л. И. Слепян, С. В. Сорокин, Система граничных интегральных уравнений колебаний составных оболочек и пластин, взаимодействующих с жидкостью, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 30–35

Удовлетворяя условиям (I.5), найдем постоянные интегрирования и неизвестные разности потенциалов. Результаты расчета приведены на рис. 3. Сплошной линией изображены усилия и прогибы с подбором электрической нагрузки, пунктиром – без электрической нагрузки.

Решения вышеперечисленных задач подтверждают эффективность гашения вибраций с помощью пьезоэффекта.

Литература

I. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезоактивные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т.I.– Ч.А. – С.204 – 326.

2. Рогачева Н.Н. Уравнения состояния пьезокерамических оболочек // ПММ. – 1981. – Т.45. – Вып.5. – С.902 – 911.

Л.И.Слепян, С.В.Сорокин

СИСТЕМА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим тонкостенную конструкцию конечных размеров, составленную из N частей. Соответствующие этим частям поверхности обозначим S_n, $n = 1, 2, \ldots, N$. Предположим, что каждая из них представляет собой часть неограниченной оболочки (цилиндрической или сферической) или плоской пластины. Пусть конструкция на участках S_n, $n = 1, 2, \ldots, M \leq N$ находится в контакте со сжимаемой жидкостью и подвержена действию монохроматической нагрузки q, являющейся источником колебаний.

Граничное интегральное уравнение, описывающее поведение жидкости, имеет вид [2 – 3]

$$(1-C)p(X)+\int_S [F_0(X,Y)p(Y) - i\rho\omega G(|X-Y|)u(Y)]dS_Y = 0, X,Y \in S \qquad (1)$$

Здесь зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$ и вре–

менный множитель опущен, ω – частота колебаний, ρ – плотность жидкости, X и Y – координаты точки наблюдения и "источника", S – граница области V, заполненной жидкостью (область V может быть полуограниченной), u – нормальная к S (внешняя по отношению к V) составляющая скорости частиц жидкости, p – контактное давление, $4\pi C$ – телесный угол, занимаемый жидкостью (там, где существует касательная к S плоскость, $C = 1/2$).

Функция $G(|X-Y|)$ представляет собой фундаментальное решение уравнения Гельмгольца – потенциал, отвечающий источнику единичной интенсивности в жидкости, $i\rho\omega G(|X-Y|)$ – соответствующее ему давление, $F_0(X,Y)$ – производная от G по нормали к S в точке Y

$$F_0(X,Y)=F(|X-Y|)\cdot\lambda,\quad F(|X-Y|)=dG(|X-Y|)/d|X-Y|,$$

$$\lambda=\mathrm{grad}_Y|X-Y|\cdot n(Y)=\frac{Y-X}{|X-Y|}\cdot n(Y),$$

где λ – проекция единичного вектора, направленного из X в Y на единичную нормаль к S, n – единичная внешняя нормаль к S.

Пусть движение каждой из частей конструкции описывается уравнениями (с суммированием по греческим индексам)

$$\begin{gathered}L_{n\alpha j}\cdot w_{n\alpha}(X)=q_{nj}(X)+\delta_{3j}\,p(X)H(X),\\ H(X)=1(X\in S),\ H(X)=0\ (X\bar{\in} S),\ X\in S_n,\\ n=1,2,\ldots,N;\ j,\alpha=1,2,\ldots,K\end{gathered}\tag{2}$$

и граничными условиями сопряжения на границе смежных участков S_m и S_n, выражающими алгебраическую связь между граничными перемещениями и (или) усилиями

$$\begin{gathered}A^{mn}_{\alpha j}w_{m\alpha}+A^{nm}_{\alpha j}w_{n\alpha}+B^{mn}_{\alpha j}Q_{m\alpha}+B^{nm}_{\alpha j}Q_{n\alpha}=0,\\ \alpha,j=1,2,\ldots,2K.\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь $w_{n\alpha}$ – компоненты вектора обобщенных перемещений на участке поверхности S_n, число которых K определяется математической моделью конструкции; $L_{n\alpha j}$ – дифференциальные операторы, определенные в области S_n; $A^{mn}_{\alpha j}$, $B^{m,n}_{\alpha j}$ – числовые коэффициенты. Условия (3) очевидным образом уточняются при переходе от линий сопряжения Γ_{mn}, для которых они написаны, к граничным линиям. Для определенности нормальную к поверхности S составляющую вектора перемещения обозначим w_3. Тогда при безотрывном движении связь между скоростью $u\,(X)$ и перемещением $w_3(X)$ будет иметь вид

$$u(X) = -i\omega w_3(X), \tag{4}$$

а уравнение (I) можно записать так:

$$\begin{aligned}(1-C)p(X) + \sum_{n=1}^{M} \int_{S_n} [\lambda F(|X-Y|)\,p(Y) - \\ -\rho\omega^2 G(|X-Y|)\,w_{n3}(Y)]\,dS_Y = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Входящая в (5) нормальная к S_n компонента перемещениям конструкции определяется соотношением типа формулы Сомильяны (непосредственно следующим из теоремы Бетти)

$$\begin{aligned}w_{n3}(Y) = \int_{\Gamma_n} [W^0_{n3\alpha}(Y-Z_\Gamma)\,Q_{n\alpha}(Z_\Gamma) - \\ - Q^0_{n3\beta\alpha}(Y-Z_\Gamma)\,\nu_\beta(Z_\Gamma)\,w_{n\alpha}(Z_\Gamma)]\,d\Gamma_z + \\ + \int_{S_n} [q_\alpha(Z)\,W^0_{n3\alpha}(Y-Z) + \\ + p(Z)\,W^0_{n33}(Y-Z)\,H(Z)]\,dS_z\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $w_{n\alpha}(Z_\Gamma)$, $Q_{n\alpha}(Z_\Gamma)$ – обобщенные перемещения и усилия, возникающие на контуре Γ_n рассматриваемого участка S_n, $W^0_{n3\alpha}(Y-Z_\Gamma)$ – функция Грина безграничной конструкции, соответствующей данному участку, $Q^0_{n3\beta\alpha}(Y-Z_\Gamma)$ – тензор усилий, соответствующий фундаментальному решению $W^0_{n3\alpha}$, $\nu_\beta(Z_\Gamma)$ – компоненты вектора единичной внешней нормали к контуру Γ_n. Подстановка уравнения (6) позволяет записать основное интегральное уравнение взаимодействия составной конструкции с жидкостью в виде

$$\begin{aligned}(1-C)p(X) + \sum_{n=1}^{M} \Big\{ \int_{S_n} [F(|X-Y|)\lambda - \rho\omega^2 \Phi_{n33}(X,Y)]\,p(Y)\,dS_Y - \\ - \rho\omega^2 \int_{\Gamma_n} [Q_{n\alpha}(Z_\Gamma)\,\Phi_{n3\alpha}(X,Z_\Gamma) + w_{n\alpha}(Z_\Gamma)\,\Psi_{n3\beta\alpha}(X,Z_\Gamma)\,\nu_\beta(Z_\Gamma)]\,d\Gamma_z \Big\} = \\ = \rho\omega^2 \sum_{n=1}^{M} \int_{S_n} q_\alpha(Y)\,\Phi_{n3\alpha}(X,Y)\,dS_Y\,,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\Phi_{n3\alpha}(X,Y) = \int_{S_n} G(|X-Z|)\,W^0_{n3\alpha}(Y-Z)\,dS_z\,,$$

$$\Psi_{n3\beta\alpha}(X,Z_\Gamma) = \int_{S_n} G(|X-Y|)\,Q^0_{n3\beta\alpha}(Z_\Gamma - Y)\,dS_Y\,.$$

Граничные значения усилий и перемещений определяются, в свою очередь, граничными интегральными уравнениями, получающимися из (6), $n = 1, 2, \ldots, N$ (и аналогичными для остальных компонент вектора перемещения) в пределе при стремлении координаты Y к соответствующему контуру Γ_n

$$
\begin{aligned}
w_{nm}(Y_\Gamma) = \int_{\Gamma_n} [& Q_{n\alpha}(Z_\Gamma) W^0_{n\alpha m}(Y_\Gamma - Z_\Gamma) - \\
& - Q^0_{nm\alpha\beta}(Y - Z_\Gamma) \nu_\beta(Z_\Gamma) w_{n\alpha}(Z_\Gamma)] \, d\Gamma_z + \\
& + \int_{S_n} [q_\alpha(Z) W^0_{n\alpha m}(Y_\Gamma - Z) + \\
& + p(Z) W^0_{n3m}(Y_\Gamma - Z) H(Z)] \, dS_z .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Система граничных уравнений (7) – (8) замыкается условиями (3), представляющими собой контактные (для соседних участков конструкции) или граничные условия.

Выражение ядер интегральных уравнений в форме сверток фундаментальных решений для жидкости и отдельных частей конструкции дает достаточно ясное представление о роли параметров конкретной задачи и позволяет использовать асимптотические методы для ее упрощения.

В качестве основного примера рассмотрим задачу о колебаниях в сжимаемой жидкости гладкой упругой цилиндрической оболочки с плоскими концевыми переборками, нагруженной циклосимметричным боковым давлением. В точках сопряжения участков пластин и цилиндрической оболочки в дополнение к основному граничному интегральному уравнению (7), описывающему взаимодействие всей конструкции с жидкостью, сформулированы граничные уравнения для оболочки (по четыре в каждой точке) и для пластин (по два в каждой точке) вида (8). В этих уравнениях содержатся соответственно по восемь неизвестных краевых перемещений и обобщенных усилий для цилиндрического участка и по четыре для пластин.

Таким образом, в 12 дополнительных уравнений, описывающих взаимодействие между собой частей конструкции, входят 24 неизвестных. Эта система замыкается очевидными 12 условиями неразрывности перемещений и усилий в точках сопряжения (деформация пластины в своей плоскости не учитывается). Полученная "двухуровневая" система содержит большое число параметров, характеризующих ее свойства: частоту, число окружных волн формы колебаний, толщину оболочки, толщину пластины и т.д. Построены асимптотические представления решения задачи при различных сочетаниях параметров.

Результаты асимптотического анализа сопоставляются с численным решением, которое состоит в кусочно-линейной аппроксимации контактного давления, формировании и решении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Порядок системы равен $N_1 + 12$, где N_1 – число узловых точек для определения давления. Использование алгоритма, в котором функции Грина строятся сразу для всей конструкции, уменьшило бы порядок СЛАУ до N_1. При достаточно подробной дискретизации поверхности конструкции (десятками узловых точек) разница в затратах машинного времени на решение СЛАУ в этих двух вариантах несущественна.

Принципиальным преимуществом предлагаемого варианта расчета является тот факт, что функции Грина конструкции зависят лишь от одного аргумента (расстояние между "источником" и "точкой наблюдения"), а не от двух, как при рассмотрении ее целиком. Таким образом, при формировании СЛАУ нет необходимости заполнять двумерный массив значений функций Грина в узловых точках, а достаточно пользоваться двумя одномерными (для цилиндрического и плоского участков). Кроме того, представление функций Грина конструкции в аналитическом виде облегчает вычисление их сверток с фундаментальным решением для жидкости и кусочно-линейной функцией p.

Литература

1. Слепян Л.И., Сорокин С.В. Граничные интегральные уравнения взаимодействия тонкостенных конструкций со сплошной средой // Докл. АН СССР. – 1989. – Т.294. – С.504-507.

2. Слепян Л.И., Сорокин С.В. Метод граничных интегральных уравнений в гидроупругости // Изв. АН СССР МТТ. – 1989. – № 4. – С.166 – 176.

3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

4. Васильев Д.Г., Гольденвейзер А.Л. Колебание и излучение оболочки вращения при действии кольцевой нагрузки // Изв. АН СССР МТТ. – 1983. – № 4. – С.184 – 193.

5. Гольденвейзер А.Л., Радовинский А.Л. Асимптотический анализ колебаний и излучение обо –

лочки вращения в жидкости // ИПМ АН СССР. - М., 1986. - № 3. - Т.275. - 61 с.

В.Н.Тарасов, А.А.Михайлов, А.С.Миляев, А.К.Тоболкин

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДОЙ

Дифракция нестационарных упругих волн на цилиндрической оболочке рассматривалась в [I] для условий жесткого контакта, в [2] - для условий проскальзывания.

В настоящей работе рассматривается нестационарное взаимодействие плоской продольной вязкоупругой волны с цилиндрической оболочкой при условиях жесткого контакта и трения.

На бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку набегает продольная ступенчатая вязкоупругая волна, фронт которой параллелен оси оболочки. Задача решается в полярных координатах r ,

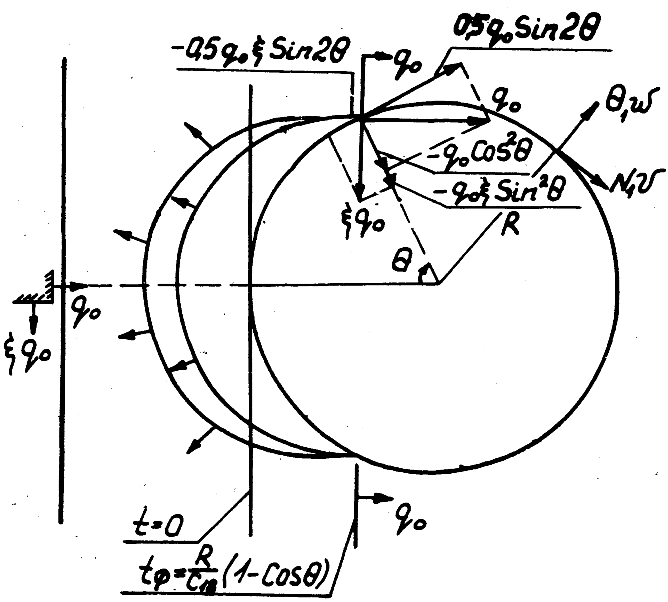

Рис.I