В. И. Данченко, М. А. Комаров, П. В. Чунаев, Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 12, 9–49

Известия вузов. Математика
2018, № 12, с. 9–49

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В. И. ДАНЧЕНКО, М. А. КОМАРОВ, П. В. ЧУНАЕВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ И АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

Аннотация. Наипростейшими дробями по предложению Е.П. Долженко в теории аппроксимаций называют логарифмические производные алгебраических многочленов. С ними связано много решенных и нерешенных задач экстремального характера, восходящих к работам Дж. Буля, А.Дж. Макинтайра, У.Х.Дж. Фукса, Дж.М. Марстранда, Е.А. Горина, А.А. Гончара, Е.П. Долженко. В настоящее время многими авторами систематически развиваются методы аппроксимации и интерполяции посредством наипростейших дробей и некоторых их модификаций и обобщений. Параллельно для наипростейших дробей возникают и смежные задачи, представляющие самостоятельный интерес: неравенства разных метрик, оценки производных, разделение особенностей и др.

Вводная часть обзора в какой-то мере систематизирует известные авторам задачи такого рода, а в основной части сформулированы основные результаты и по возможности намечены подходы к их доказательствам.

Ключевые слова: задачи Горина и Гельфонда, наипростейшие дроби, амплитудно-частотные операторы, альтернанс, наилучшие приближения, рациональные функции, аппроксимация, интерполяция, экстраполяция.

УДК: 517.53

1. Введение. История вопросов

Наипростейшими дробями (НД) порядка не выше $n = 0, 1, \dots$ называются рациональные дроби вида

$$\rho_0(z) \equiv 0, \quad \rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z, \quad z_k \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{1}$$

где при $z_k = \infty$ считаем $\frac{1}{z-z_k} \equiv 0$. Очевидно, НД $\rho_n(z)$ является логарифмической производной многочлена $Q_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$, где при $z_k = \infty$ считаем $z - z_k \equiv 1$. Приведем краткую информацию об основных задачах, связанных с НД.

1.1. **Оценки картановского типа.** Метрические свойста НД начали систематически изучаться в работах Дж. Буля [1], А.Дж. Макинтайра и У.Х.Дж. Фукса [2], Дж.М. Марстранда

Поступила 31.10.2017

Благодарности. Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (задание № 1.574.2016/1.4). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 16-31-00252 мол_а. Работа всех авторов выполнена при поддержке проекта Российского фонда фундаментальных исследований № 18-01-00744.

[3], А.А. Гончара [4]–[6], Е.П. Долженко [7]–[10]. Так или иначе, большинство исследований было связано с методом покрытий А. Картана [11]. Первые оценки картановского типа для НД были получены в [2]. При $\delta > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$E(\rho_n;\delta) = \{z : |\rho_n(z)| > \delta\}, \quad L(\rho_n;\delta) = \inf \sum \mathrm{diam}(d_j),$$

где нижняя грань берется по всем конечным покрытиям $E(\rho_n;\delta) \subset \cup d_j$ наборами кругов d_j. В [2] показано, что независимо от расположения полюсов НД

$$L(\rho_n;\delta) \le \mathrm{const} \cdot A(n)\,\delta^{-1}, \quad \mathrm{const} > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

с $A(n) = n(1 + \ln n)$. Если же рассматривать покрытия множества $E_0(\rho_n;\delta) = E(\rho_n;\delta) \cap \mathbb{R}$, то оценка (2) верна с $A(n) = n$ и точна по порядку величины n [1], [2]. Если к тому же все полюсы z_k конечны и лежат на $\mathbb{R}$, то $E_0(\rho_n;\delta)$ состоит из n интервалов и $\mathrm{mes}_1 E_0(\rho_n;\delta) = 2n\delta^{-1}$. Поэтому возник вопрос о точности величины $A(n)$ в общем случае (2): нужен ли логарифмический множитель [2]? Частично на этот вопрос дан ответ в [3], где приведен пример, когда справедлива оценка, противоположная (2) с $A(n) = n\sqrt{\ln n/\ln\ln n}$, $n \ge n_0$. В 2005 г. Дж.М. Андерсоном и В.Я. Эйдерманом [12], [13] была получена окончательная точная по порядку оценка (2) с $A(n) = n\sqrt{\ln n}$.

Разные модификации покрытий и оценок картановского типа применялись Е.П. Долженко [10], Н.В. Говоровым и Ю.П. Лапенко [14]; они сыграли важную роль в обратных теоремах теории рациональных аппроксимаций. Наиболее общие результаты по этой тематике недавно получены в работе В.Я. Эйдермана [15], где вместо НД оценивались потенциалы Коши $\int (z-\zeta)^{-1} d\mu(\zeta)$.

1.2. **Задача Горина.** Ряд задач для НД связан с проблемой Е.А. Горина [16] об оценке величин

$$d_n(\mathbb{R},p) = \inf\left\{Y(\rho_n) : \|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})} = 1\right\}, \quad 1 < p \le \infty, \tag{3}$$

где $Y(\rho_n) = \min\limits_{k=\overline{1,n}} |\mathrm{Im}\, z_k|$. При замене $\widetilde{\rho}_n(z) = c\rho_n(c\,z)$, $c = \|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^{-q}$, сохраняющей вид НД, имеем $\|\widetilde{\rho}_n\|_{L_p(\mathbb{R})} = 1$ и $Y(\widetilde{\rho}_n) = c^{-1}Y(\rho_n)$. Поэтому (3) можно переписать

$$d_n(\mathbb{R},p) = \inf_{\rho_n}\left\{Y(\rho_n)\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^q\right\}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

где инфимум берется по всем НД вида (1), не имеющим полюсов на $\mathbb{R}$. Следовательно, задачу Горина можно интерпретировать как задачу о величине наименьшего уклонения от нуля в $L_p(\mathbb{R})$ в классе НД ρ_n порядка $\le n$ при условии $Y(\rho_n) = 1$, или, что то же самое, при условии, что все они имеют общий фиксированный полюс, например, $z_1 = i$. В этом смысле задача Горина является аналогом классической задачи Чебышева о наименьшем уклонении от нуля унитарного многочлена фиксированной степени. Вследствие этого задачу об оценке $d_n(\mathbb{R},p)$ будем иногда называть задачей Горина–Чебышева.

Вопрос о принципиальной возможности оценки[1] $d_n(\mathbb{R},\infty) \ge A(n) > 0$ поставлен и положительно решен в 1962 г. Е.А. Гориным [16]. В 1965 г. Е. Г. Николаев [17] получил оценку

$$d_n(\mathbb{R},\infty) \ge 2\,(\sqrt{2}-1)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Он также поставил вопрос о точности этой оценки и сформулировал следующую проблему: *верно ли, что* $d_n(\mathbb{R},\infty) \to 0$ *при* $n \to \infty$? В связи с этим в [17] приведен принадлежащий

[1]Далее через $A(\cdot,\cdot,\dots)$ (с индексами и без них) обозначаются конечные положительные величины, зависящие лишь от указанных аргументов и индексов и, вообще говоря, различные в различных формулах.

А.Н. Колмогорову пример целой функции с *бесконечным* числом нулей $\pm\gamma+i\pi k/(2a)$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$f(z)=f(a,\gamma;z)=\left(e^{ia\,(z+i\gamma)}+e^{-ia\,(z+i\gamma)}\right)\left(e^{ia\,(z-i\gamma)}+e^{-ia(z-i\gamma)}\right),\quad a>0,\quad \gamma>0.$$

Легко проверить, что $\|f'/f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le 1$ при $a=\gamma^{-2}$, так что с сохранением этой нормировки расстояние γ от полюсов функции f'/f до $\mathbb{R}$ можно сделать сколь угодно малым.

В 1966 г. существенное уточнение оценки Е.Г. Николаева получено А.О. Гельфондом [18]:

$$d_n(\mathbb{R},\infty)>(17\ln n)^{-1},\quad n\ge n_0.$$

В.Э. Кацнельсон [19] получил некоторое уточнение этой оценки, но при том же логарифмическом порядке убывания миноранты. Вопросы, сформулированные Е.Г. Николаевым, оставались открытыми. В 1994 г. окончательный результат был установлен в [20]:

$$d_n(\mathbb{R},\infty)\asymp \ln\ln n\cdot \ln^{-1} n.$$

Кроме того, оказалось [20], что при конечных p величины $d_n(\mathbb{R},p)$ к нулю не убывают и

$$\inf_n d_n(\mathbb{R},p)\ge A(p),\quad A(p):=2^{q/p}p^{-1}\sin^q(\pi p^{-1}).\tag{4}$$

Эта оценка была несколько уточнена в [21] (см. (12)), вопрос о точности величины $A(p)$ (хотя бы по порядку величины p) остается открытым.

Рассматривалась аналогичная задача для потенциала Коши $\int(z-\zeta)^{-1}d\mu(\zeta)$ неотрицательной борелевской меры μ, $\operatorname{supp}\mu\subset\mathbb{C}^+$, и получена оценка снизу определенного усредненного расстояния от $\operatorname{supp}\mu$ до действительной оси [22].

1.3. **Модификации задачи Горина–Чебышева.** Представляют интерес модификации задачи об оценке величины (3) с заменой $\mathbb{R}$ на другие множества (окружности, ляпуновские кривые, отрезки, лучи и др.). В случае конечных p такие модификации мало изучены, но имеется ряд окончательных результатов в случае $p=\infty$. Например, в случае единичной окружности γ_1 и отрезка $[-1,1]$ получены слабые эквивалентности [23], [24]: $d_n(\gamma_1,\infty)\asymp n^{-1}\ln n$, $d_n([-1,1],\infty)\asymp n^{-2}\ln^2 n$ $(n\ge n_0)$. В [25] получена оценка *снизу* такого же порядка, как для отрезка, для так называемых спрямляемых компактов[2]. Во всех этих случаях, как и в случае прямой, проблему можно трактовать как задачу Горина–Чебышева о НД, наименее уклоняющейся от нуля в равномерной метрике при условии закрепленности одного полюса. Такие экстремальные и близкие к экстремальным НД в случае некоторых весовых пространств на отрезке $[-1,1]$ найдены в [26].

Представляет интерес и другая модификация — задача Горина–Чебышева о НД со *свободными полюсами*, наименее уклоняющейся от ненулевой константы (см. п. 8.2). Вместо констант в этой задаче рассматривались и дробно-линейные функции [27].

1.4. **Задача Гельфонда.** А.О. Гельфонд [18] рассматривал задачу об оценке расстояний $d'_n(\mathbb{R},\infty)$ типа (3), но с нормировкой производной: $\|\rho'_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\le 1$. В [18] была получена оценка снизу для $d'_n(\mathbb{R},\infty)$, но довольно неточная, носящая скорее качественный характер (см. п. 2.4). В [20] доказана слабая эквивалентность указанных расстояний с величиной $n^{-1/2}\ln n$, но при дополнительном условии, что все полюсы НД лежат в $\mathbb{C}^+$. В общем же случае известно [28], что $d'_n(\mathbb{R},\infty)$ ограничены снизу величиной порядка $\sqrt{n^{-1}\ln n}$. Вопрос о точности этой оценки по порядку остается открытым. Не изучен также вопрос об оценках расстояний $d'_n(\mathbb{R},p)$ с нормировкой производной: $\|\rho'_n\|_{L_p(\mathbb{R})}\le 1$ при конечных $p>1/2$.

[2] Компакт K называется спрямляемым, если он не разбивает плоскость и существует такая положительная величина $a(K)<\infty$, что любые две его точки можно соединить кривой $L\subset K$ длины $\le a(K)$.

1.5. **L_p-оценки НД и их производных на промежутках действительной оси.** Оценки $L_p(\mathbb{R})$-норм НД, зависящие явно от полюсов z_k, найдены В.Ю. Протасовым, И.Р. Каюмовым, А.В. Каюмовой и др. [29]–[34]. Интерес представляют и неравенства разных метрик (термин С.М. Никольского), т. е. оценки $L_p(K)$-норм НД через их $L_r(K)$-нормы на различных промежутках $K \subseteq \mathbb{R}$. Для алгебраических и тригонометрических многочленов такого рода оценки на ограниченных промежутках K при $p > r$ (только этот случай и представляет интерес, так как при $p < r$ оценки получаются из неравенства Гёльдера) хорошо известны благодаря классическим работам Д. Джексона, С.М. Никольского, Н.К. Бари, С.Б. Стечкина, В.В. Арестова, Л.В. Тайкова, Г. Сеге, А. Зигмунда, П.Л. Ульянова, М.К. Потапова, П. Борвейна, А.Ф. Тимана, И.И. Ибрагимова и многих других авторов (например, [35]–[37]). Напомним, что первым результатом такого рода является следующее (p, r)-неравенство Джексона–Никольского для алгебраических многочленов P_n степени $\leq n$:

$$\|P_n\|_{L_p(K)} \leq A(K, p, r) n^{2(1/r-1/p)} \|P_n\|_{L_r(K)}, \quad p > r \geq 1. \tag{5}$$

Сходные неравенства верны и для тригонометрических многочленов, причем в случае вещественных многочленов и $K = [-\pi, \pi]$ множитель 2 в показателе степени можно заменить единицей и положить $A(K, p, r) = 2$ ([35], [36]).

Первое неравенство разных метрик для НД было получено на $\mathbb{R}$ [20]:

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A(r) \cdot \|\rho_n\|^s_{L_r(\mathbb{R})}, \quad r > 1, \quad r^{-1} + s^{-1} = 1, \tag{6}$$

где $A(r) < 2r \sin^{-s}(\pi r^{-1})$. Эта оценка улучшалась и обобщалась на (p, r)-неравенства ($p > 1$ и $r > 1$) на ограниченных и неограниченных вещественных промежутках в работах [38]–[40]. В основе оценок лежит метод насечки для построения квадратурных формул с переменными узлами, который впервые был применен в работе [29], а затем развивался в работах [38], [41] (см. п. 3.1).

С неравенствами разных метрик тесно связаны оценки типа Маркова–Бернштейна для производных НД [20], [23], [29], [39]. Например, в [39] показано, что если на $[-1, 1]$ НД ρ_n вещественнозначна и ее модуль ограничен единицей, то

$$\sqrt{1 - x^2} |\rho_n'(x)| \leq n(1 + \varepsilon_n), \quad x \in [-1, 1], \tag{7}$$

для некоторых положительных ε_n, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, причем оценка является точной по порядку величины n.

1.6. **Интерполяция аналитических функций.** Установлено [43], [44], что *НД Паде* (НД n-кратной интерполяции с одним узлом) всегда существует и единственна. Предложены различные конструкции НД Паде и оценки погрешности. Например, в [43] применялось представление НД Паде в виде интеграла Эрмита, благодаря чему найдена явная формула для остаточного члена и получены его оценки.

В задаче интерполяции с *различными* узлами вопросы о разрешимости и единственности значительно усложняются и, вообще говоря, не имеют однозначного ответа. Связь особенностей этой задачи с алгебраической структурой интерполяционных таблиц исследовалась в [47]–[49] и других работах. Введено понятие *обобщенной* интерполяции таблиц, охватывающее и обычную интерполяцию [48], [50]. Достаточно общие результаты о существовании и единственности решения задачи интерполяции получены методом редукции к полиномиальной интерполяции [50].

1.7. **Аппроксимация посредством НД на компактах.** Методы, разработанные для исследования проблемы Горина (см. п. 1.2), позже использовались в более общей задаче аппроксимации непрерывных функций на различных множествах $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ ([44], [45], [51]).

Другими методами задача приближения посредством НД решалась в работах [52]–[55] (например, в интегральных пространствах Берса–Бергмана аналитических функций на ограниченных жордановых областях K). В них была предложена конструкция аппроксимирующих НД с полюсами, которые подбирались на фиксированных множествах с определенными свойствами по отношению к K. Аналогичный подход применялся в работах [56], [57].

Одна из мотивировок аппроксимации посредством НД заключена в их простом и важном физическом смысле: они задают (с точностью до постоянных множителей и операции комплексного сопряжения) плоские поля различной природы, создаваемые равновеликими источниками, расположенными в точках z_k. В этом смысле задачу аппроксимации посредством НД можно интерпретировать как задачу о размещении источников z_k, создающих заранее заданное поле.

Систематическое изучение НД со свободными полюсами как аппарата приближения началось в 1999 г., когда в [44], [45] для них был доказан следующий аналог полиномиальной теоремы С.Н. Мергеляна (ср. с [58], Д. 1).

Для любого компакта K со связным дополнением любую непрерывную на K функцию, аналитическую во внутренних точках на K (т. е. класса $AC(K)$), можно сколь угодно точно приблизить посредством НД в равномерной метрике.

При этом, как показал О.Н. Косухин [51], для широкого класса компактов и функций скорости равномерного приближения посредством НД и комплексных многочленов имеют одинаковый порядок. Это позволило О.Н. Косухину получить для НД ряд аналогов классических теорем Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В.К. Дзядыка, Дж.Л. Уолша. Из дальнейших исследований, однако, стало ясно, что имеются и значительные различия между аппроксимативными свойствами НД и полиномов (см. п. 8.1). Собственно, именно эти различия и вызывают дополнительный интерес к изучению НД.

Отметим, что хотя скорости приближения посредством НД и многочленов на достаточно широком классе функций мало отличаются, НД часто имеют преимущество с точки зрения их вычислительной надежности. Это связано с тем, что в типичных случаях с ростом n относительная погрешность при вычислениях НД ρ_n растет незначительно (фактически только из-за многократных сложений), в то же время она быстро растет при вычислении многочленов Q_n (пропорционально n из-за многократных умножений) [59]. Это обстоятельство использовалось при вычислениях рациональных функций общего вида в [43] путем их аппроксимации посредством определенных модификаций НД.

1.8. **Аппроксимация другими аппаратами, основанными на НД.** Значительный интерес представляют разности НД $\rho_{n_1} - \rho_{n_2}$, т. е. логарифмические производные рациональных функций. Аппроксимативные свойства разностей НД исследованы еще довольно мало, а результаты носят скорее качественный характер. Примеры показывают, что в ряде случаев скорость аппроксимации разностями НД гораздо более высокая, чем у НД. Например, известен такой результат [45] об аппроксимации разностями НД рациональных функций, имеющих однозначный интеграл.

В [57] получены результаты о плотности в $AC(K)$ разностей НД с полюсами, расположенными на определенных предписанных множествах (без анализа скорости аппроксимации). В работе [60] построены некоторые оценки наилучшего весового (с весом $(x + c)^2$) приближения на $\mathbb{R}^+$ разностями НД функций, убывающих на $+\infty$ со скоростью $O(x^{-2})$.

Исследовались аппроксимативные свойства некоторых других конструкций. Например, в [23], [61] введены дроби вида

$$\rho_n(p, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{-p}}{z - z_k}, \quad \Theta(z) = \frac{\rho_{n_1}(z) - \rho_{n_2}(z)}{\rho_{n_3}(z) - \rho_{n_4}(z)},$$

где p — целое число, $z_k \neq 0, \infty$, так что $\rho_n(z) = \rho_n(0, z)$, ρ_{n_k} — НД. Показано, что при $p \geq 0$ для дробей $\rho_n(p, z)$ также справедлив аналог полиномиальной теоремы Мергеляна. При $p < 0$ это, вообще говоря, неверно (например, если K содержит некоторую окрестность точки $z = 0$) [61].

Что касается дроби Θ, то оказалось, что такое незначительное усложнение вида НД приводит к значительно более сильным аппроксимативным свойствам. Именно, в [23], [43] показано, что любая рациональная функция R степени m при каждом натуральном q может быть приближена некоторой дробью Θ, в которой все n_k не превосходят qm, так что

$$|\Theta(z) - R(z)| \leq 2e^{|R(z)|}\,|R(z)|^{q+1}/q! \quad \text{при условии} \quad |R(z)| \leq q/5.$$

Отсюда видно, что в общем случае скорость аппроксимации дробями Θ гораздо выше, чем многочленами (той же степени, что и Θ), и весьма близка по порядку к скорости аппроксимации рациональными функциями общего вида [23].

1.9. **Наилучшие приближения на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси.** Рассматривалась задача о наилучшем приближении вещественных непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ посредством вещественнозначных НД. В работах [47], [62], [63] показано, что НД ρ_n наилучшего равномерного приближения вещественной константы при достаточно больших n единственна, имеет порядок n и характеризуется чебышевским альтернансом, состоящим из $n + 1$ точек отрезка. Этот результат вполне аналогичен критерию наилучшего приближения констант посредством унитарных многочленов заданной степени.

Однако при аппроксимации произвольной непрерывной функции возможны существенные различия. Так, в отличие от случая многочленов НД наилучшего приближения может быть не единственна, соответствующие примеры были построены в [47], [64], [65]. Эти примеры, кроме того, показывают, что, вообще говоря, не существует прямой связи между альтернансом и наилучшим приближением посредством НД.

Тем не менее, для достаточно широкого класса непрерывных функций справедлив следующий аналог теоремы Чебышева об альтернансе [66], [70].

НД ρ_n наилучшего приближения характеризуется альтернансом из $n+1$ точек отрезка $[-1, 1]$ при условии, что все ее полюсы лежат вне замкнутого единичного круга, при этом дробь наилучшего приближения единственна.

Этот критерий усиливает результат Я.В. Новака из [68], где порядок НД равен n, а ее полюсы вещественны и попарно различны. Вопрос о единственности в [68] не затрагивался. В [70] получен также аналогичный критерий в случае приближения нечетных функций на симметричных отрезках с заметным ослаблением условий на полюсы (вместо круга $|z| \leq 1$ — замыкание внутренности лемнискаты $|2z^2 - 1| = 1$).

1.10. **Аппроксимация на неограниченных множествах.** В работах В.Ю. Протасова [34], П.А. Бородина и О.Н. Косухина [46], [71], И.Р. Каюмова [30], [31], В.И. Данченко [29] изучалось приближение посредством НД в разных метриках на неограниченных множествах: прямых, лучах и др. Например, установлено [71], что каждая непрерывная на действительной оси $\mathbb{R}$ функция f с нулевым значением на бесконечности (кратко, $f \in C_0(\mathbb{R})$) в равномерной метрике с любой точностью приближается НД. Аналогичное утверждение становится неверным, если вместо прямой рассматривать неразвернутый угол; примером может служить функция $f(z) = -\frac{1}{z-a}$, где a принадлежит внутренности угла [71].

В [71] доказана также следующая теорема о существовании функции f с заданными наилучшими приближениями $\mathcal{R}_n(f, \mathbb{R})$ посредством НД порядка не выше n на $\mathbb{R}$.

Для любой числовой последовательности $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$, строго убывающей к нулю, существует функция $f \in C_0(\mathbb{R})$ такая, что $\mathcal{R}_n(f, \mathbb{R}) = d_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Это аналог известной полиномиальной теоремы С.Н. Бернштейна [37]. Однако в отличие от полиномиального случая здесь условие строгого убывания существенно: доказано, что не существует функции $f \in C_0(\mathbb{R})$, для которой $\mathcal{R}_0(f,\mathbb{R}) = \mathcal{R}_1(f,\mathbb{R}) > 0$, $\mathcal{R}_2(f,\mathbb{R}) = \dots = \mathcal{R}_n(f,\mathbb{R}) = \dots = 0$.

Что касается интегральных пространств, то в [72] показано, что при $p \in [2,\infty)$ НД всюду плотны в $L_p(\mathbb{R}^+)$ на действительной полуоси $x \geq 0$ (и что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 < p < \infty$, при всяком $n \geq 1$ НД порядка $\leq n$ наилучшего в $L_p(\mathbb{R}^+)$ приближения существует, но, вообще говоря, неединственна).

Однако в случае всей оси класс функций, аппроксимируемых посредством НД в $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, резко сужается [34], в частности, он состоит из тех и только тех функций, которые представляются в виде сходящихся к ним в $L_p(\mathbb{R})$ рядов НД.

1.11. **Ряды НД.** Работы по аппроксимации на неограниченных множествах в немалой мере способствовали возникновению теории рядов НД. Точнее, были найдены различные условия и критерии сходимости в $L_p(\mathbb{R})$ бесконечных НД $\rho_\infty = \lim_{n\to\infty} \rho_n$ в терминах последовательностей их полюсов z_k ([29]–[31], [33], [34]). Например, при $1 < p < 2$ и $z_k \in \mathbb{C}^+$ такая сходимость эквивалентна следующему условию из [29] для частичных сумм ρ_n вида (1) (см. п. 9.2):

$$\sum_{k=1}^{n} |\rho_n(\overline{z_k})|^{p-1} \leq A(\{z_j\}_{j=1}^{\infty}) < \infty \quad \forall n. \tag{8}$$

1.12. **Обобщения НД.** Естественным обобщением НД являются так называемые *h-суммы* и *амплитудно-частотные суммы*, соответственно имеющие вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\lambda_k z), \qquad z, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C},$$

где h — аналитическая в окрестности начала функция. В виде h-суммы представляются НД, если взять, например, $h(z) = 1/(z-1)$, $\lambda_k = 1/z_k$. Эта связь явилась одной из мотивировок использования h-сумм в качестве аппарата аппроксимации [61]. Такие суммы эффективно использовались в численном анализе (А.В. Фрянцев [73]–[75], П.В. Чунаев и В.И. Данченко [43], [76], [77] и др.). Так, в работе [43] был предложен метод экстраполяции функций h их h-суммами. Ряд окончательных результатов о скорости и области сходимости экстраполяционных процессов установлен в [77], там также на примерах продемонстрированы некоторые преимущества метода h-сумм перед классическими полиномиальными методами.

Амплитудно-частотные суммы применялись в [78]–[80] для $2n$-кратной Паде-интерполяции (в точке $z = 0$) индивидуальных аналитических функций, а также в качестве операторов численного дифференцирования, интерполяции, экстраполяции и др., действующих на определенных классах функций. Оказалось, что возможность построения нужной амплитудно-частотной суммы обусловлена разрешимостью ассоциированной с ней задачи дискретных моментов

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^m = \alpha_m, \quad m = \overline{0, 2n-1},$$

относительно неизвестных μ_k и λ_k с заданными правыми частями α_m. Напомним, что задачам дискретных моментов посвящены классические труды Прони, Сильвестра, Рамануджана и работы многих современных авторов [81]–[86]. Эти задачи тесно связаны с ганкелевыми формами, ортогональными многочленами, квадратурными формулами Гаусса и аппроксимациями Паде.

В нашем случае особую трудность и интерес представляет случай несовместных задач дискретных моментов, когда соответствующая им амплитудно-частотная сумма не может быть построена. Для преодоления этой трудности в [78], [79] предложен метод аналитической регуляризации амплитудно-частотной суммы, состоящий в том, что к ней добавляется определенный бином вида $p\,z^{n-1} + q\,z^{2n-1}$. Оказывается, что правильный выбор параметров p и q приводит к новой ассоциированной задаче дискретных моментов, которая уже регулярно разрешима, а в ряде прикладных задач допускает весьма простой явный вид решений. В результате регуляризации соответствующие "подправленные" интерполяционные формулы с n узлами $\lambda_k z$ становятся точными на многочленах степени $2n-1$, что в два раза выше порядка обычной n-узловой интерполяции на основе многочленов Лагранжа и других сходных аппаратов.

При работе с тригонометрическими многочленами

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \quad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

и сходящимися тригонометрическими рядами вместо амплитудно-частотных сумм удобно применять их тригонометрический аналог — *амплитудно-фазовые суммы* [87]–[90]. Слагаемые таких сумм суть многочлены, *подобные* $T_n(t)$: они получаются из $T_n(t)$ умножением на вещественную константу X и сдвигом на вещественную фазу λ, т.е. $T_n(t) \to X \cdot T_n(t-\lambda)$. Показано, например, что существует амплитудно-фазовая сумма, выделяющая гармонику τ_μ заданного порядка μ:

$$\tau_\mu(t) = \sum_{k=1}^{m} X_k \cdot T_n(t-\lambda_k), \quad m = m(n,\mu), \tag{9}$$

причем параметры X_k, λ_k найдены явно и не зависят от многочлена T_n, а зависят лишь от μ, n. Получены аналогичные формулы для гармоник на достаточно широком классе сходящихся тригонометрических рядов.

Благодаря вещественности параметров в формуле (9) она имеет простой и важный физический смысл: из стационарного сигнала $T_n(t)$ выделяется гармоника $\tau_\mu(t)$ наложением не более m подобных сигналов, отличающихся лишь амплитудами и начальными фазами. Выделение гармоник наложением сигналов (без использования промежуточных спектральных замеров) позволяет эффективно применять амплитудно-фазовые суммы для оценок гармоник тригонометрических полиномов. С помощью таких сумм, например, получаются точные оценки L_p-норм гармоник через L_p-норму самого многочлена, а в случае неотрицательных полиномов $T_n \not\equiv 0$ — точные оценки их коэффициентов через свободный член (обобщение неравенства Фейера для первой гармоники). Отметим, что подобного рода оценкам посвящено много работ (например, работы А.С. Белова и С.В. Конягина [91], [92] и обширная библиография в них).

Отметим, что в отличие от ряда спектральных методов в конструкции амплитудно-фазовых сумм интегральные аппараты не применяются, формула (9) имеет чисто арифметический характер, из нее, например, при $a_0 = 0$ получаются арифметические формулы для коэффициентов Фурье:

$$a_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n(-\lambda_j), \quad b_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(\frac{\pi}{2\mu} - \lambda_j\right).$$

В [93], [94] рассматривалась задача выделения суммы двух гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовой суммой, в этом случае также получены точные оценки типа Фейера.

2. Задача Горина и родственные вопросы

2.1. **Оценки мнимых частей полюсов НД, нормированных в метрике $L_p(\mathbb{R})$ при $1 < p \le \infty$.** Пусть $H_p = H_p(\mathbb{C}^+)$ — пространство Харди аналитических на $\mathbb{C}^+$ функций f,

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

При $x \in \mathbb{R}$ через $f(x)$ обозначим некасательные угловые пределы функции $f \in H_p$ со стороны $\mathbb{C}^+$. Хорошо известно [95], [96], что $f(x)$ существуют почти всюду на $\mathbb{R}$, $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ и $\|f\|_p = \|f\|_{H_p}$. Здесь и далее применяется обозначение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R})}$.

Переформулируем задачу Е.А. Горина в несколько более общем виде. Через HL_n^p обозначим класс всех функций вида $\rho_n + f$, где ρ_n — НД вида (1), все конечные полюсы z_k которой лежат на $\mathbb{C}^+$, а $f \in H_p$. Положим

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf \left\{ Y(\rho_n) : \|\rho_n + f\|_p = 1, \ \rho_n + f \in HL_n^p \right\}, \quad 1 < p \le \infty. \tag{10}$$

Сохраняем обозначение (3), хотя здесь оно имеет несколько иной смысл: поскольку класс HL_n^p, очевидно, содержит все НД порядка $\le n$, то величина $d_n(\mathbb{R}, p)$ из (10) не превосходит одноименной величины из (3). По существу же оценки этих величин мало отличаются и имеют одинаковый порядок. Определение (10), как и в п. 1.2, можно переписать в виде

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf_{\rho_n + f \in HL_n^p} \left\{ Y(\rho_n) \|\rho_n + f\|_p^q \right\}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

При конечных p величины $d_n(\mathbb{R}, p)$ к нулю не убывают. Это получается из соотношения двойственности [95], [96]:

$$\inf_{f \in H_p} \|\rho_n + f\|_p = \sup_{g \in H_q, \, \|g\|_q \le 1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) g(x) \, dx \right| = 2\pi \left| \sum_{k=1}^n g(z_k) \right| \right\}. \tag{11}$$

Действительно, пусть $\rho_n + F \in HL_n^p$, $\|\rho_n + F\|_p = 1$, и iy_1 — один из полюсов ρ_n, $y_1 > 0$. Возьмем в качестве пробной функции $g_h(z) \cdot \|g_h\|_q^{-1}$, где $g_h(z) = (z + ih)^{-1}$, $h > 0$. Тогда, очевидно,

$$\left| \sum_{k=1}^n g_h(z_k) \right| \ge (h + y_1)^{-1}, \quad \|g_h\|_q = 2\pi \, A(p) \, h^{-1/p}, \quad A(p) := \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^{q/2}} \right)^{1/q}.$$

Отсюда и из (11) имеем $(h + y_1)^{-1} < h^{-1/p} A(p)$. Взяв $h = y_1(p-1)^{-1}$ и решив последнее неравенство относительно y_1, получим

$$y_1 = d_n(\mathbb{R}, p) \ge \frac{p-1}{p^q} \, A^{-q}(p). \tag{12}$$

Неравенство (12) другим способом найдено в [21], оно уточняет оценку (4). С использованием метода двойственности получается оценка из [29]

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^{-\varepsilon - 1/q} \le A(p) \cdot \varepsilon^{-1/q} (1 - p\varepsilon)^{-1}. \tag{13}$$

Недавно А.Е. Додонов [97] уточнил (13): сумма слева заменена им на

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{-\varepsilon} \ln^{-(1+\varepsilon)/q}(|z_k|+1)$$

при сохранении мажоранты того же порядка относительно малых ε.

В [34] найдено условие для мнимых частей полюсов z_k: при конечных $p > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{1-p} \le h_p^p \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+1)^p} \right)^{-1} \|\mathrm{Im}\, \rho_n\|_p^p, \quad z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C},$$

где h_p — норма оператора Гильберта (равная $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{2p}$ при $1 < p \le 2$ и $\mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{2p}$ при $p \ge 2$).

В случае $p = \infty$ методы двойственности не работают и оценки $d_n(\mathbb{R}, \infty)$ значительно усложняются. Сформулируем один результат, разными способами полученный в [20], [98]–[100].

Верны соотношения $d_n(\mathbb{R}, \infty) \asymp \ln\ln n / \ln n$ *(двусторонние неравенства). Более точно, при достаточно больших* n *эти неравенства справедливы с константами* $1/9$ *и* 2.

Эта теорема легко распространяется на случай $\mathbb{R}^m$, $m \ge 3$ ([22]). Именно, пусть фиксированы некоторая прямая $L \subset \mathbb{R}^m$ и множество M_n, $n \in \mathbb{N}$, сумм вида

$$\varrho_n(x) = \varrho_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{x - \xi_k}{|x - \xi_k|^2}, \quad x,\, \xi_k \in \mathbb{R}^m,$$

с нормировкой $\|\varrho_n\|_{C(L)} \le 1$. Тогда для точной нижней грани $D_n(L)$ расстояний от всевозможных точек ξ_k до прямой L имеем $D_n(L) \asymp \ln\ln n / \ln n$.

2.2. **Оценки расстояний до полуоси $\mathbb{R}^+$ от полюсов НД, нормированных в метрике $L_p(\mathbb{R}^+)$ при $1 < p \le \infty$.** В случае полуоси $\mathbb{R}^+$ при $1 < p < 2$ показано [21], что полюсы нормированной в $L_p(\mathbb{R}^+)$ НД ρ_n, расположенные на полуоси $\mathbb{R}^-$ (если такие имеются), отделены от нуля некоторой величиной $A(p) > 0$. В [21] высказана гипотеза, что при $p \ge 2$ такие полюсы могут сколь угодно близко подступать к нулю. В общей постановке задача Горина для полуоси открыта.

Добавим [70], что в случае $p = \infty$ при нормировке $\|2\sqrt{x}\rho_n\|_\infty \le 1$ (более жесткой, чем $\|\rho_n\|_\infty \le 1$, на бесконечности, но более слабой вблизи нуля) и достаточно больших n полюсы отделены *от всей полуоси* $\mathbb{R}^+$ величиной α_n^2, где $\alpha_n := (\ln\ln(2n)) \cdot (9\ln(2n))^{-1}$.

2.3. **Оценки расстояний от полюсов НД до некоторых компактов.** Пусть K — компакт на $\mathbb{C}$, K^+ — наибольшая область из дополнения к K, содержащая бесконечно удаленную точку. Введем класс $SP_n(K)$, состоящий из функций $R_n = \rho_n + f$, где ρ_n — НД (1) с полюсами в K^+, а f — голоморфная и ограниченная на K^+ функция с $f(\infty) = 0$. При $m > 0$ через $\delta_n(K, m)$ обозначим расстояние до K от множества всевозможных полюсов функций $R_n \in SP_n(K)$ при условии нормировки

$$\|R_n\|_{\infty,K} := \limsup_{z \to K,\ z \in K^+} |R_n(z)| \le m. \tag{14}$$

Здесь, в принципе, можно обойтись нормировкой $\|R_n\|_{\infty,K} \le 1$, поскольку задача (14) сводится к этому случаю заменой R_n на $m^{-1} R_n(m^{-1} z)$, но с другим компактом $m \cdot K$.

Приведем некоторые оценки величин $\delta_n(K, m)$. В случае окружности $\gamma_1 : |z| = 1$ имеем слабую эквивалентность (т. е. двустороннюю оценку с абсолютными постоянными) [20]:

$$\delta_n(\gamma_1, m) \asymp n^{-1} \ln n, \quad n \ge n_0(m). \tag{15}$$

Отсюда легко получаем $\delta_n(\gamma_1, m) \ge A(m)n^{-1}\ln n$ уже при всех $n \ge 2$. Отметим, что оценка сверху в (15) получается с помощью простого примера Q'/Q, где $Q(z) = z^n - (n+m)/m$, $n \ge n_0(m)$. Из (15) легко получается аналогичная слабая эквивалентность для замкнутой обобщенно ляпуновской кривой γ (гладкой кривой, модуль непрерывности $\omega(s)$ угла наклона касательной к которой как функции длины s дуги удовлетворяет условию Дини $\int\limits_0 s^{-1}\omega(s)\,ds < \infty$) [23]:

$$\delta_n(\gamma, m) \asymp n^{-1}\ln n, \quad n \ge n_0(m). \tag{16}$$

Действительно, пусть $z = \varphi(w)$ — какое-либо конформное однолистное отображение внешности γ_1^+ единичного круга на внешность γ^+ кривой γ с условием $\varphi(\infty) = \infty$. Из результата С.Е. Варшавского [101] следует $|\varphi'(w)| \asymp 1$, $w \in \gamma_1^+$, где слабая эквивалентность зависит лишь от γ. Заметим, что

$$\varphi'(w) \cdot R_n(\varphi(w)) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - z_k} + \varphi'(w) f(\varphi(w)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w - w_k} + F(w), \quad F(\infty) = 0,$$

где использовано

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w - w_k} + g(w), \quad z_k = \varphi(w_k), \quad g(\infty) = 0,$$

с определенной голоморфной в γ_1^+ функцией g, $F(w) = g(w) + \varphi'(w) f(\varphi(w))$. Отсюда и из (15) получается оценка снизу в (16), поскольку из $|\varphi'(w)| \asymp 1$ имеем $|w_k| - 1 \asymp \operatorname{dist}(z_k, \gamma)$. Оценка сверху доказывается аналогично: с использованием обратного к $\varphi(w)$ отображения приведенный выше пример НД для случая γ_1^+ "переносится" на случай γ^+ (получается функция класса $SP_n(\gamma)$).

К случаю окружности сводится и следующая оценка:

$$\delta_n([-1,1], m) \asymp n^{-2}\ln^2 n, \quad n \ge n_0(m). \tag{17}$$

Действительно, пусть $R_n = \rho_n + f \in SP_n([-1,1])$, $\|R_n\|_{\infty,[-1,1]} \le m$. При замене Жуковского $z = (w + 1/w)/2$, $z_k = (w_k + 1/w_k)/2$ (для определенности считаем, что $|w_k| > 1$) непосредственной проверкой убеждаемся в равенстве

$$\rho_n(z) = \frac{2w^2}{w^2 - 1} F(w), \quad F(w) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w - w_k} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k}{w w_k - 1} - \frac{1}{w} \right). \tag{18}$$

Здесь $F \in SP_n(\gamma_1)$, а значит, и функция $\sigma(w) := R_n(z(w))(1-w^2)/(2w^2)$ также принадлежит классу $SP_n(\gamma_1)$ и ее sup-норма на γ_1 не превосходит m. Из (15) имеем $\min_k |w_k| - 1 \ge A_1(m)\, n^{-1}\ln n$. Таким образом, если выполнено (14), то полюсы НД ρ_n лежат во внешности эллипса [23], [24]

$$z = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cos t + \frac{i}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\sin t \tag{19}$$

с $a = 1 + A_1(m)\, n^{-1}\ln n$. Отсюда получаем нужную оценку снизу [24]. Оценку сверху получим, взяв для простоты изложения $m = 3$. Если в (18) числа w_k являются корнями уравнения $w^n - \omega = 0$ с некоторым $\omega > 1$, то после несложных преобразований имеем

$$\rho_n(\omega; z) = \frac{2nw}{w^2 - 1} \frac{\omega(w^{2n} - 1)}{(w^n\omega - 1)(w^n - \omega)}, \quad z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right). \tag{20}$$

Множество полюсов НД $\rho_n(\omega;z)$ лежит на эллипсе (19) с $a=\sqrt[n]{\omega}$, причем два полюса $z_{1,2}$ вещественны. Возьмем $\omega=n^2$. Несложно убедиться, что

$$\max_{x\in[-1,1]}|\rho_n(n^2;x)|=|\rho_n(n^2;1)|<3.$$

Значит,

$$\delta_n([-1,1],3)\le||z_1|-1|=\frac{(a-1)^2}{2a}\sim 2\,\frac{\ln^2 n}{n^2},\quad n\to\infty.$$

О.Н. Косухин [25] оценку снизу в (17) распространил на случай спрямляемых компактов:

$$\delta_n(K,1)\ge 4\,c(K)\frac{\ln^2 n}{n^2}(1+o(1)),\quad n\to\infty,$$

где $c(K)$ — гармоническая (логарифмическая) емкость компакта K.

В случае малых m зависимость оценок от n и m может быть уточнена. Например, если множество всех полюсов НД ρ_n лежит в γ_1^+ и $m<1/10$, то [24]

$$2\delta_n(\gamma_1,m)\ge m^{-\frac{1}{n+1}}-2,\quad n\ge 1.$$

Оценка дает порядок скорости удаления полюсов при $m\to 0$, причем, как показывает пример $Q(z)=z^n-(n+m)/m$, этот порядок точный.

2.4. **Задача Гельфонда об оценке мнимых частей полюсов НД с нормированными на $\mathbb{R}$ производными.** Задача о точном порядке величин

$$d_n'(\mathbb{R},\infty)=\inf\left\{Y(\rho_n):\ \|\rho_n'\|_\infty=1\right\}=\inf_{\rho_n}\left\{Y(\rho_n)\sqrt{\|\rho_n'\|_\infty}\right\}$$

сформулирована А.О. Гельфондом [18] (вместе с аналогичными задачами с нормировками производных более высоких порядков). Здесь первое равенство — определение, а второе получается из того, что для произвольной НД вида (1) при замене $\widetilde{\rho}_n(z)=\rho_n(z/c)/c$, $c=\sqrt{\|\rho_n'\|_\infty}$, сохраняющей вид НД, имеем $\|\widetilde{\rho}'\|_\infty=1$ и $Y(\widetilde{\rho}_n)=cY(\rho_n)$.

Эта задача еще не решена. В [18] показано, что $d_n'(\mathbb{R},\infty)\ge\lambda_0 2^{-n/4}$ с некоторой абсолютной постоянной $\lambda_0>0$. Введем сходные величины для НД вида (1), конечные полюсы которых лежат в $\mathbb{C}^+$:

$$d_n^+(\mathbb{R},\infty)=\inf\left\{Y(\rho_n):\ \|\rho_n'\|_\infty=1,\ \{z_k\}\subset\mathbb{C}^+\right\}.$$

В [20] показано, что справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{32}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\le d_n^+(\mathbb{R},\infty)\le\frac{5}{4}\frac{\ln n}{\sqrt{n}},\quad n\ge n_0.$$

Используя последнюю оценку снизу, для общего случая можно доказать [28], что $d_n'(\mathbb{R},\infty)\succ\sqrt{n^{-1}\ln n}$. Вопрос о точности порядка миноранты остается открытым.

2.5. **Аналоги задачи Горина–Чебышева в случае отрезка.** Из (20), как несложно проверить, вытекает, что значения функции

$$\sqrt{1-x^2}\rho_n(\omega;x)=2n\omega\,\frac{\sin n\varphi}{1-2\omega\cos n\varphi+\omega^2},\quad x=\cos\varphi,$$

альтернируют на отрезке $[-1,1]$, принимая в расположенных в порядке возрастания точках $x_k=\cos\varphi_k$, для которых $\cos(n\,\varphi_k)=2\omega(\omega^2+1)^{-1}$, попеременно максимальные и минимальные значения, равные по модулю $q_n:=2n\omega(\omega^2-1)^{-1}$ (число точек альтернанса равно n). Положим

$$\|f\|:=\max_{x\in[-1;1]}|f(x)|,\quad \|f\|^*:=\max_{x\in[-1;1]}\sqrt{1-x^2}\,|f(x)|,\quad f\in C([-1,1]).\tag{21}$$

В связи с указанным альтернансом возникает вопрос [23], [39]: *являются ли НД вида $\rho_n(\omega; z)$ экстремальными в задаче Горина–Чебышева о НД порядка $\le n$, наименее уклоняющимися от нуля по норме $\|\cdot\|^*$ при условии, что расстояние от множества их полюсов до отрезка $[-1,1]$ не превосходит заданной величины $\delta > 0$?*

При условии $\delta > \sqrt{2}-1$ положительный ответ на него получен в [26]: указанное наименьшее уклонение равно норме

$$\|\rho_n(\omega;\cdot)\|^* = \frac{n}{\sqrt{T_n^2(1+\delta)-1}} \sim \frac{n}{T_n(1+\delta)}, \quad n\to\infty, \quad \delta > \sqrt{2}-1,$$

при связи $2\delta+1 = \omega^{1/n}+\omega^{-1/n}$, где $T_n(z) = \cos(n\arccos z)$ — многочлены Чебышева первого рода. При $0<\delta<\sqrt{2}-1$ вопрос остается открытым.

Пока не решена аналогичная задача о НД, наименее уклоняющихся от нуля по норме $\|\cdot\|$. Однако в [26] найдены НД, близкие к экстремальным, и, в частности, показано, что наименьшее уклонение e_n от нуля в классе всех НД порядка $\le n$, имеющих один из полюсов в точке $x=\delta+1$, при $\delta > \sqrt{2}-1$ удовлетворяет соотношению

$$e_n \sim \frac{2n}{T_n(1+\delta)-T_{n-2}(1+\delta)}, \quad n\to\infty.$$

Это неравенство является асимптотически точным [26]: при $n\to\infty$ для многочлена $P_n(x)=T_n(x)-T_n(1+\delta)$ вместо знака $\ge$ можно поставить $\sim$.

Другой аналог задачи Горина–Чебышева для НД со *свободными* полюсами — наилучшее приближение отличных от нуля констант — приведен в п. 8.2.

2.6. **Аналоги задачи Золотарева о разделении компактов.** Пусть K_1, K_2 — произвольные непересекающиеся компакты на $\overline{\mathbb{C}}$. Скажем, что K_1 и K_2 разделяются некоторой рациональной функцией $R_n(z)$ (степени не выше $n\ne 0$), если

$$m_0 := \min_{z\in K_1}|R_n(z)|, \quad m := \|R_n\|_{C(K_2)}, \quad \sigma(K_1,K_2,R_n) := m_0/m > 1. \tag{22}$$

Здесь предполагаем, что $m_0 > 0$, $m<\infty$, и допускаем случай $m_0=\infty$ или (и) $m=0$ (когда K_1 или (и) K_2 состоит из конечного числа точек). Задачу Е.И. Золотарева можно сформулировать следующим образом: получить из условия (22) какую-либо метрическую характеристику отдаленности компактов друг от друга. Такая характеристика должна зависеть только от n, m, m_0. Первоначально задача формулировалась для двух отрезков K_1, K_2 действительной оси [102]. Для произвольных компактов со связными дополнениями она исследовалась А.А. Гончаром [103]. В работе [103] для гармонической емкости $c(K_1,K_2)$ конденсатора (K_1,K_2) с условиями (22) доказано неравенство

$$c = c(K_1,K_2) \le n\ln^{-1}\,\sigma(K_1,K_2,R_n). \tag{23}$$

Эта оценка точна [103]: при любом малом $\varepsilon>0$ существует рациональная функция R_n достаточно высокой степени такая, что $\sigma(K_1,K_2,R_n) \ge \exp\big(n(c+\varepsilon)^{-1}\big)$. Отсюда также следует, что любые непересекающиеся компакты K_1 и K_2 на $\overline{\mathbb{C}}$ со связными дополнениями разделяются некоторой рациональной функцией достаточно высокой степени.

В некоторых случаях из (22) или (23) можно получить оценку эвклидова расстояния $\operatorname{dist}(K_1,K_2)$ между K_1 и K_2. Например, в случае вещественных отрезков $K_1=[-1,-\delta]$, $K_2=[\delta,1]$, $0<\delta<1$, из (22) имеем оценку [102], [103]

$$\delta > \exp(-\pi^2 n\cdot\ln^{-1}\sigma(K_1,K_2,R_n)) \tag{24}$$

для любой рациональной функции R_n, разделяющей эти отрезки [103]. В общем случае из (22) оценку $\operatorname{dist}(K_1, K_2)$ получить невозможно, и применяются оценки определенных усредненных расстояний (например, типа (23)).

Однако при $R_n = \rho_n$ оценки $\operatorname{dist}(K_1, K_2)$ часто имеют место, причем при $m_0 = \infty$ получаем рассматривавшуюся в п. 2.3 задачу о расстоянии от полюсов НД до компакта K_2 при условии нормировки (22).

Приведем один результат. Если K_2 — континуум диаметра ≥ 1, а K_1 — произвольный компакт, то из (22) следует [104]

$$\ln\left(1 + \frac{A(m)}{\operatorname{dist}(K_1, K_2)}\right) < A_1 \cdot n\,\frac{\sigma^2}{\sigma^{3/2} - 1}.$$

Заметим, что при малых положительных $\sigma - 1$ отсюда получается оценка того же порядка, что и в (24).

В [23] рассматривался еще один вариант задачи Золотарева. Его можно сформулировать следующим образом. При $\delta \in (0, 1/2)$ положим

$$\lambda_n(\delta) = \sup_{\rho_n}\left\{\frac{\min\{|\rho_n(x)| : x \in [-1+\delta, -\delta]\}}{\max\{|\rho_n(x)| : x \in [\delta, 1-\delta]\}}\right\},$$

где sup берется по всем НД (1), имеющим степень не выше n. Требуется найти точный порядок роста величин $\lambda_n(\delta)$ при $n \to \infty$. С помощью примера (20) можно показать, что $\lambda_n(\delta)$ при любом фиксированном δ растет быстрее любой степени n^α, $\alpha > 1$. Для сравнения напомним, что аналогичная величина для рациональных функций общего вида растет со скоростью $e^{A(\delta)n}$, $A(\delta) > 0$ ([105]).

3. Неравенства разных метрик (задача Джексона–Никольского) для НД

Результаты, связанные с аппроксимацией в L_p и с рядами НД, опираются в основном на оценки L_p-норм НД. Такие оценки были найдены в [30]–[34], все они выражаются явно через полюсы НД. Возникает интерес к задачам другого типа — оценкам L_p-норм НД через их L_r-нормы на разных множествах при различных $p > 1$ и $r > 1$. Впервые такие задачи на определенных классах функций (алгебраические и тригонометрические многочлены, целые функции экспоненциального типа и др.) рассматривали Д. Джексон (1933) и С.М. Никольский (1951). Термин "неравенства разных метрик" предложен в [36].

3.1. **Оценки на действительной оси.** Если все полюсы z_k функции ρ_n лежат в верхней (нижней) полуплоскости $\mathbb{C}^+$ ($\mathbb{C}^-$), то будем писать для определенности $\rho_n(z) = \rho_n^+(z)$ ($\rho_n(z) = \rho_n^-(z)$). Положим

$$\mu_n(z) = \operatorname{Im}\rho_n^+(z) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k - y}{|z - z_k|^2}, \quad \nu_n(z) = \operatorname{Re}\rho_n^+(z) = \sum_{k=1}^n \frac{x - x_k}{|z - z_k|^2}. \tag{25}$$

Как и выше, будем применять обозначения $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$, $p \in (1, \infty]$. В основе следующих оценок лежит метод насечки, который впервые был применен в работе [29]. Его суть видна из следующей простой задачи. Пусть

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{z - \overline{z}_k}, \quad z_k \in \mathbb{C}^+.$$

Очевидно, при каждом фиксированном $\varphi \in (0, 2\pi)$ уравнение $B_n^2(x) = e^{i\varphi}$ имеет ровно $2n$ вещественных различных корней t_s. Будем называть их точками насечки. Отметим, что

$$2\mu_n(x) = -i\frac{B_n'(x)}{B_n(x)} = (\arg B_n(x))', \quad \int_{t_s}^{t_{s+1}} \mu_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Последнее равенство позволяет приближенно вычислять точки насечки, если известны значения $\mu_n(x)$ только при $x \in \mathbb{R}$.

В [29] получены точные квадратурные формулы для норм ρ_n^+, μ_n в L_2 с квадратурными узлами в точках насечки:

$$2\|\mu_n\|_2^2 = \|\rho_n^+\|_2^2 = \pi\sum_{s=1}^{2n}\frac{\nu_n^2(t_s)}{\mu_n(t_s)} = \pi\sum_{s=1}^{2n}\mu_n(t_s), \tag{26}$$

$\varphi \in (0, 2\pi)$ и $t_s = t_s(\varphi)$. Отсюда легко получить двустороннюю оценку [39]

$$(2n)^{-1}\left\|\rho_n^+\right\|_2^2 \le \pi\left\|\rho_n^+\right\|_\infty \le 2\left\|\rho_n^+\right\|_2^2. \tag{27}$$

Действительно, из (26) имеем

$$\pi\sum_{k=1}^{2n}|\nu_n(t_k)| \le \sqrt{\pi\sum_{k=1}^{2n}\nu_n^2(t_k)\mu_n^{-1}(t_k)}\sqrt{\pi\sum_{k=1}^{2n}\mu_n(t_k)} = \|\rho_n^+\|_2^2,$$

откуда с учетом (26) получаем

$$\|\rho_n^+\|_2^2 \le \pi\sum_{k=1}^{2n}|\rho_n^+(t_k)| \le \pi\sum_{k=1}^{2n}(|\nu_n(t_k)| + \mu_n(t_k)) \le 2\|\rho_n^+\|_2^2.$$

Отсюда сразу следует первое неравенство в (27). Далее, выбрав φ так, чтобы в одной из точек $t_k(\varphi)$ функция $|\rho_n(x)|$ принимала наибольшее значение, получим и второе неравенство в (27). Аналогичные неравенства справедливы и для ρ_n^-. Примеры показывают, что каждый из множителей 2 и 1/2 в (27) нельзя заменить величиной, меньшей единицы [39]. С применением метода насечки второе неравенство в (27) обобщено и доведено до точного в недавней работе [38]:

$$\|\rho_n^\pm\|_\infty \le \left(\frac{m_r}{\pi}\right)^{s/r}\|\rho_n^\pm\|_r^s, \quad r > 1, \quad m_r \in \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r + 1\right),$$

где $r^{-1} + s^{-1} = 1$ (при $r = 2$ множитель 2 в (27) заменяется на 1). Равенство может достигаться при $r = 2$ и $r = 4$.

Оценка (6) обобщалась на (p, r)-метрики [38], [39]. Наиболее точная оценка в настоящее время имеет вид [38]:

$$\|\rho_n\|_p^q \le 2^{q-s}\left(\frac{m_r}{\pi}\right)^{sq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}(1 + h_r)^s\|\rho_n\|_r^s, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1, \tag{28}$$

где $1 < r < p \le \infty$, $m_r \in \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r + 1\right)$, а h_r — норма преобразования Гильберта.

Заметим, что в отличие от случая многочленов в оценку (28) сравниваемые нормы входят нелинейно. Это естественно, поскольку при преобразовании $\widetilde{\rho}_n(x) := a\rho_n(ax)$, $a > 0$, сохраняющем вид НД, оцениваемые выражения зависят от a линейно: $\|\widetilde{\rho}_n\|_p^q = a\|\rho_n\|_p^q$.

Заметим еще, что для НД неравенства типа Джексона–Никольского содержательны без каких-либо условий на соотношение между параметрами p и r. Пусть $1 < p \le \infty$, $1 < r <$

∞, E — произвольный ограниченный или неограниченный промежуток на $\mathbb{R}$. Тогда, как установлено в [39],

$$\|\rho_n\|^q_{L_p(E)} \le A(p)\cdot n^{q/p}\ \|\rho_n\|_{L_\infty(E)}\,, \quad \|\rho_n\|^q_p \le A(p,r)\ n^{q/p}\ \|\rho_n\|^s_r\,.$$

Отметим, что $A(p)$ не зависит от E. Здесь в первом неравенстве порядок множителя $n^{q/p}$ является точным. Второе неравенство не является точным по порядку. При $p > r$ это следует из (28), но и при $p < r$ оно, по-видимому, может быть улучшено заменой показателя степени q/p на $(q/p) - (s/r)$.

3.2. **Оценки на отрезке.** Пусть все полюсы НД (1) лежат вне отрезка $[-1,1]$ симметрично относительно действительной оси (т. е. НД вещественнозначна на $\mathbb{R}$). Тогда, как показано в [39], при $p > r > 1$ и достаточно больших $n \ge n_0(\|\rho_n\|^*)$ имеем

$$\|\rho_n\| \le 64\, n^{2/r}\, \|\rho_n\|_{L_r[-1,1]}, \quad \|\rho_n\|_{L_p[-1,1]} \le A(p)\, n^{2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\ \|\rho_n\|_{L_r[-1,1]}. \tag{29}$$

Обозначение норм см. в (21). Можно взять, например, $n_0(x) = 10^3(x^2+1)$. Первое неравенство точно по порядку при $r > 2$: существует последовательность вещественнозначных НД $\widetilde{\rho}_n$ с $\|\widetilde{\rho}_n\| \asymp 1$, для которых выполняется противоположное неравенство (с заменой 64 на некоторую величину $A(r) > 0$). Оценки (29) по форме аналогичны оценке для многочленов (см. (5)). Однако здесь дополнительно накладывается ограничение на величину n. Это связано с несовпадением “размерностей”: отношение левой и правой частей при фиксированном n растет к бесконечности, когда один из полюсов приближается к отрезку. Наиболее естественной (без каких-либо условий на n) в данном случае представляется оценка вида

$$\|\rho_n\|^q_{L_p[-1,1]} \le A(r)\, n^{\vartheta}\, \|\rho_n\|^s_{L_r[-1,1]}, \quad p^{-1}+q^{-1}=1, \quad r^{-1}+s^{-1}=1,$$

с некоторой величиной $\vartheta = \vartheta(p,r)$ (вопрос открыт).

3.3. **Оценки на окружности.** Пусть все полюсы НД (1) лежат во внешности окружности $\gamma_r:\ |z| = r$. Тогда при $s \in \mathbb{N}$ справедлива полученная в [42] оценка

$$\|\rho_n^{(s-1)}\|_{L_\infty(\gamma_r)} \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi r}}\|\rho_n^{(s-1)}\|_{L_2(\gamma_r)}\sqrt{2\|\rho_n\|_{L_\infty(\gamma_r)}+n}.$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера можно получить аналогичную оценку с заменой L_2 на L_p, $p > 2$.

4. Неравенства Маркова–Бернштейна для производных НД

Оценки производных функций разных классов — одна из наиболее известных классических экстремальных задач, возникающих, например, в теории полиномиальных и рациональных аппроксимаций. Обширная библиография по этой тематике имеется в [10], [35], [37]. Для НД оценки производных получены в [23], [39]. Приведем несколько таких оценок.

4.1. **Оценки на действительной оси.** Пусть конечные полюсы НД $\rho_n(z)$ лежат на $\mathbb{C}^+$. Тогда (см. обозначение (25))

$$|\rho_n'(x)| \le (|\rho_n(x)| + \|\rho_n\|_\infty)\ \mu_n(x), \quad |\nu_n'(x)| \le (\mu_n(x) + \|\mu_n\|_\infty)\ \mu_n(x),$$
$$|\mu_n'(x)| \le \chi(x), \quad |\rho_n'(x)| + |\mu_n'(x)| \le 2\,\chi(x), \tag{30}$$

где $\chi(x) := (|\nu_n(x)| + \|\nu_n\|_\infty)\ \mu_n(x)$. При этом соотношения в (30) обращаются в равенства для любой НД первого порядка (первое – в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$, а второе — всюду на $\mathbb{R}$).

4.2. **Оценки на окружностях и отрезках.** Пусть $r>0$ и полюсы НД вида (1) лежат во внешности окружности $\gamma_r: |z|=r$. Тогда имеем точную оценку

$$\|\rho_n'\|_{C(\gamma_r)} \le \|\rho_n\|_{C(\gamma_r)} \left(nr^{-1}+2\|\rho_n\|_{C(\gamma_r)}\right).$$

В дополнение к (7) приведем другую точную по порядку оценку из [23]: при условии $\|\rho_n\|^* \le 1$ (см. обозначение (21)) имеем

$$(1-x^2)|\rho_n'(x)| \le |x\rho_n(x)| + n\|\rho_n\|^*(1+\varepsilon_n), \quad 0<\varepsilon_n<12n^{-1}\ln n \to 0.$$

5. Разделение особенностей НД

Пусть K — компакт на $\mathbb{C}$. Для класса $SP_n(K)$ функций ρ_n+f с нормировкой (14) положим

$$\theta_n(K,m)=\sup\{\|\rho_n\|_{\infty,K} : \|\rho_n+f\|_{\infty,K}\le m, \quad \rho_n+f\in SP_n(K)\}. \tag{31}$$

Задача о разделении особенностей функций в классе $SP_n(K)$ состоит в оценке сверху величины $\theta_n(K,m)$ через m и n, или, другими словами, в оценке sup-норм компонент ρ_n и f через норму всей функции ρ_n+f.

Хорошо известна аналогичная задача для более широкого класса функций, имеющих вид r_n+f, где r_n — рациональные функции общего вида степени $\le n$, а f — те же, что и в $SP_n(K)$. В этом классе через $\theta_n^*(K,m)$ обозначим величину, аналогичную (31) с заменой ρ_n на r_n. В этом случае можно взять $m=1$, поскольку $\theta_n^*(K,m)$ в отличие от $\theta_n(K,m)$ зависит от m линейно.

Первоначально задача о разделении формулировалась для двух рациональных функций r_n и f в случае единичной окружности $K=\gamma_1 : |z|=1$ ([19]). Из результатов [19] следует $\theta_n^*(\gamma_1,1)\le A\,n^2$. В ряде последующих работ рассматривались более общие компакты K, но оценка оставалась по порядку величины n той же (А.М. Бочтейн, В.Э. Кацнельсон, С.И. Пореда, Е.Б. Сафф, Г.С. Шапиро, А.А. Гончар, Л.Д. Григорян и др., соответствующая библиография имеется в [106]–[108]). Позже Л.Д. Григорян [109] существенно понизил порядок мажоранты в случае гладких кривых $K=\gamma$: $\theta_n^*(\gamma,1)\le A(K)\,n$. Он же показал, что порядок оценки точный. Окончательно в [106] такая оценка установлена для произвольного компакта K с устранением зависимости A от K.

Возникает аналогичная задача для НД. Естественно ожидать, что порядок роста $\theta_n(K,m)$ относительно n должен быть значительно меньше порядка роста $\theta_n^*(K,m)$. Для произвольных компактов K вопрос оценки $\theta_n(K,m)$ остается открытым. В простейших случаях (окружности, ляпуновские замкнутые кривые и др.) оказалось, что порядок роста логарифмический, и этот порядок точный. Например, в случае $K=\gamma_1$ имеем $\theta_n(\gamma_1,m)\le 3\,m\ln n$ при $n\ge n_0(m)$ ([23]).

Аналогичную задачу об оценке компонент можно ставить на неограниченных множествах и в разных метриках, простейший случай см. в (55) и (56) из п. 9.1.

6. Интерполяция посредством НД

6.1. **Задача интерполяции посредством НД.** Рассмотрим задачу построения НД ρ_n порядка $\le n$, удовлетворяющей равенствам

$$\rho_n^{(s)}(\xi_j)=b_{j,s}, \quad \xi_j, b_{j,s}\in\mathbb{C} \quad (j=\overline{1,k}, \quad s=\overline{0,m_j-1}, \quad m_j\ge 1, \quad m_1+\dots+m_k=M), \tag{32}$$

где $\xi_1,\dots,\xi_k$ — различные узлы, $m_1,\dots,m_k$ — их кратности, M — суммарная кратность узлов, а $b_{j,s}$ — заданные значения. В случае $M<n$ либо $M>n$ будем называть задачу (32) соответственно *неполной* либо *переопределенной* задачей интерполяции. Случай $M=n$ для нас является основным. В этом случае, если не оговорено противное, будем называть

(32) просто *задачей интерполяции* (иногда для уточнения будем применять термин “*полная* задача интерполяции”).

Если все узлы в (32) *простые*, то приходим к задаче *простой* интерполяции:

$$\rho_n(\xi_j) = b_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{33}$$

В противном случае (32) назовем задачей *кратной* интерполяции. При интерполяции регулярной функции f в (32) и (33) естественным образом полагают $b_{j,s} = f^{(s)}(\xi_j)$, $b_j = f(\xi_j)$.

Как известно, в классе алгебраических полиномов степени $\le n-1$ полная задача интерполяции вида (32) всегда имеет решение, причем единственное. Напротив, интерполяционная НД может не быть единственной или не существовать [47], [49], [50], [68]. Тем не менее, при определенном ограничении на суммарную кратность M узлов задача (32) всегда (т.е. независимо от значений ξ_j и $b_{j,s}$) разрешима. А именно, справедливо утверждение [50].

Задача (32) *всегда разрешима, если* $M \le n - k + 1$. *В частности, задача простой интерполяции всегда разрешима, если число* k *узлов удовлетворяет условию* $2k \le n+1$. *Эта оценка неулучшаема.*

Таким образом, при $k > 1$ не все полные задачи разрешимы, а при $k = 1$ полная задача (с одним n-кратным узлом) всегда разрешима (*Паде-интерполяция*). Впервые разрешимость такой задачи была установлена иными методами в [45] (см. § 6.6).

В [64], [66] рассматривался вопрос о минимальном $M > n$, гарантирующем единственность решений переопределенных задач (32). Показано, что такое минимальное M равно $2n - 1$. Другие признаки разрешимости и единственности решения задачи интерполяции имеются в пп. 6.4, 8.5.

6.2. **Редукция к полиномиальной интерполяции.** В [50] для исследования задачи интерполяции посредством НД предложен метод редукции к полиномиальной интерполяции. В основе редукции лежит следующая элементарная лемма пересчета производных [50]. (Аналогичные формулы применялись также, например, в [46], [110].)

Производные аналитической функции $u(z)$ *удовлетворяют равенствам*

$$u^{(s+1)} = uF_s(w), \quad w = w(z) = u'(z)/u(z), \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\{F_s\}$ — *дифференциальные операторы, определяемые рекуррентно*:

$$F_0(w) = w, \quad F_{s+1}(w) = wF_s(w) + (F_s(w))'_z, \quad s = 0, 1, 2, \dots .$$

Несложно проверить, что $F_s(w) = w^{(s)} + \Omega_s(w, w', \dots, w^{(s-1)})$, где Ω_s — определенный алгебраический полином степени не выше $s + 1$ по каждому аргументу, $\Omega_0 = 0$. Таким образом, во всех точках аналитичности дроби $\rho_n = Q'_n/Q_n$ имеем

$$Q_n^{(s+1)}(z) = Q_n(z) \cdot (\rho_n^{(s)}(z) + \Omega_s(\rho_n(z), \dots, \rho_n^{(s-1)}(z)), \quad s \ge 0. \tag{34}$$

Существует аналогичная по виду формула обращения, выражающая производные ρ_n через производные Q_n во всех точках, где НД $\rho_n(z)$ аналитична.

Задачу (32) можем переписать в виде задачи для многочленов:

$$\begin{gathered} Q_n^{(s+1)}(\xi_j) = Q_n(\xi_j) \cdot h_{j,s}, \quad Q_n \not\equiv 0, \quad h_{j,s} := b_{j,s} + \Omega_s(b_{j,0}, \dots, b_{j,s-1}), \quad j = \overline{1,k}, \quad s = \overline{0, m_j - 1}, \\ m_1 + \dots + m_k = M. \end{gathered} \tag{35}$$

На (35) основан критерий разрешимости полной задачи (32) (см. п. 6.4).

6.3. **Дифференциальное уравнение НД.** Поскольку $Q_n^{(n+1)} \equiv 0$, то из (34) при $s = n$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n, которому удовлетворяет любая НД ρ_n порядка $\leq n$ во всех точках, отличных от ее полюсов [50]:

$$y^{(n)}(z) + \Omega_n(y(z), \dots, y^{(n-1)}(z)) = 0. \tag{36}$$

Можно показать, что дроби ρ_n исчерпывают всю совокупность решений уравнения (36). Например, общим решением уравнения $y' + y^2 = 0$ является множество НД порядка ≤ 1, а для уравнения $y'' + 3yy' + y^3 = 0$ — множество НД порядка ≤ 2.

6.4. **Задача обобщенной интерполяции.** Начнем с интерполяции в случае простых узлов. Решение $\rho_n = Q_n'/Q_n$ полной задачи (33) необходимо удовлетворяет системе уравнений

$$Q_n'(\xi_j) = b_j Q_n(\xi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad Q_n \not\equiv 0, \tag{37}$$

которую называют *задачей обобщенной интерполяции с простыми узлами.* Эта задача по форме аналогична классической интерполяции Паде в случае рациональных функций общего вида. Термин *обобщенная интерполяция* был введен в [111]. Легко видеть, что решение Q_n системы (37) всегда существует. Таких решений, не получающихся друг из друга домножением на постоянные множители, может быть бесконечно много, будем называть их и соответствующие НД $\rho_n = Q_n'/Q_n$ решениями задачи обобщенной интерполяции (37). Отметим, что решение $\rho_n = Q_n'/Q_n$ задачи (37) может не быть решением задачи (33). Дело в том, что порождающий многочлен Q_n может обращаться в нуль в некоторых узлах ξ_j одновременно с производной Q_n'. Такие узлы называются *особыми*, а остальные *регулярными* относительно решения ρ_n. В особых узлах дробь ρ_n имеет полюсы, а (37) выполняется независимо от значений b_j. При этом узел, особый относительно одного решения задачи (37), может быть регулярным относительно другого решения. Итак, задача (33) разрешима, если и только если все ее узлы регулярны для одного из решений ρ_n задачи (37).

Обобщенная интерполяция (37) с простыми узлами систематически изучалась в [48], но при дополнительном условии $\deg Q_n = n$. Это ограничение может приводить к неразрешимым задачам (37). Были получены некоторые критерии их разрешимости с таким ограничением в алгебраических и геометрических терминах.

Обобщенная кратная интерполяция посредством НД. Аналогично предыдущему определим обобщенную кратную интерполяцию таблицы $b_{j,s}$, заменив равенства (32) на (35). Узел ξ_j будем называть *особым* (соответственно *регулярным*) *относительно решения* $\rho_n = Q_n'/Q_n$ *задачи обобщенной интерполяции* (35), если $Q_n(\xi_j) = 0$ (соответственно $Q_n(\xi_j) \neq 0$). Отметим, что в особых узлах ξ_j многочлен Q_n имеет нули кратности не ниже $m_j + 1$, а ρ_n имеет полюсы. В [50] доказано следующее предложение.

Полная задача (35) (*т. е. при* $M = n$) *всегда разрешима.*

Как и в случае интерполяции с простыми узлами, решение задачи (35) не всегда дает решение задачи (32). Очевидно следствие предыдущего предложения.

Полная задача (32) *разрешима, если и только если среди решений обобщенной задачи интерполяции* (35) *найдется решение* ρ_n*, для которого все узлы регулярны.*

В работе [50] с помощью указанной выше редукции получен критерий однозначной разрешимости задачи обобщенной интерполяции (35), а также алгебраический критерий единственности решения задачи (32). Для получения условий единственности решения задачи интерполяции применялись и другие методы (см. п. 8.5).

6.5. **Интерполяция вещественных констант.** Решение $\rho_n = Q_n'/Q_n$ задачи обобщенной интерполяции констант при любом наборе n узлов $\{\xi_k\}$ всегда существует, единственно и имеет порядок, равный n ([47], [49]). Значит, в смысле обобщенной интерполяции имеем

$$\rho_n(z) - c = -c\frac{\Pi_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \Pi_n(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - \xi_k), \quad \rho_n(z) = \rho_n(c, \{\xi_k\}; z). \tag{38}$$

Можно выписать и явный вид порождающего многочлена:

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c^{-k}\Pi_n^{(k)}(z), \tag{39}$$

что упрощает оценки границ корней этого многочлена и погрешности интерполяции.

Наиболее полно изучена задача об интерполяции вещественных констант на отрезке $[-1, 1]$ (результаты легко переносятся и на произвольные конечные промежутки вещественной оси) ([47], [49], [62], [63]). Первый результат был получен в случае констант $c \in (0, 15/31)$ и чебышевского набора узлов $\xi_k = \cos((2k-1)\pi/(2n))$, $k = \overline{1,n}$, в [49]. К настоящему времени наиболее сильный результат получен в [63].

При $c > 0$ и $n > 8c + 1$ для любого набора узлов $\xi_k \in [-1, 1]$ имеем точную по порядку двустороннюю оценку

$$\frac{c^{n+1}}{2^{n-1}n!e^{2c}} \le \|\rho_n(c, \{\xi_k\}; \cdot) - c\|_{C([-1,1])} \le \frac{2^n c^{n+1} e^{2c}}{n! v_n(c)}$$

с определенным $v_n(c) > 0$, $\lim_{n\to\infty} v_n(c) = 1$. При этом порядок по n верхней оценки достигается, например, при интерполяции с n-кратным узлом $\xi_1 = 1$, а порядок нижней — при интерполяции по чебышевскому набору узлов $\{t_k\}$.

В [27], [112] рассматривались и более общие интерполяционные задачи для рациональных функций вида

$$az + b, \quad \frac{a_1 z + b_1}{(a_2 z + b_2)z}, \quad |a_1| + |b_1| \ne 0, \quad |a_2| + |b_2| \ne 0,$$

для этого были разработаны некоторые специальные методы разностных уравнений [112]. Однако оценки погрешности в таких задачах получены к настоящему моменту только в исключительных случаях.

6.6. **Паде-интерполяция.** Пусть фиксирована аналитическая в некоторой окрестности начала функция

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots . \tag{40}$$

Скажем, что НД ρ_ν вида (1) порядка $\nu \le n$ является *НД Паде* n-кратной интерполяции (с узлом $z = 0$) функции f, если

$$f(z) - \rho_\nu(z) = O(z^n) \quad \text{при} \quad z \to 0. \tag{41}$$

Задача Паде для НД всегда имеет решение и притом единственное [45]. В [45] предложен следующий метод построения НД Паде. При натуральных m обозначим через

$$S_m = S_m(z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}) := \sum_{k=1}^{n} z_k^{-m} = -\tfrac{1}{(m-1)!}\rho_n^{(m-1)}(0) \tag{42}$$

степенные суммы чисел z_k^{-1}. Условие (41) в силу (42) равносильно разрешимости относительно $\lambda_k = z_k^{-1}$ системы $S_m = -f_{m-1}$, $m = \overline{1,n}$, а она, как хорошо известно ([113], гл. 11, § 52–53), всегда имеет (единственное) решение, совпадающее с корнями многочлена

$$\mathcal{T}_n(\lambda) = \lambda^n - \tau_1\lambda^{n-1} + \tau_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n\tau_n, \tag{43}$$

коэффициенты которого находятся по *рекуррентным формулам Ньютона*

$$\tau_1 = -f_0, \quad \tau_m = (-1)^m m^{-1} \left(f_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j f_{m-j-1}\tau_j \right), \quad m = \overline{2,n}.$$

Поэтому все конечные (и ненулевые) полюсы z_k искомой НД Паде суть величины, обратные ненулевым корням λ_k (обозначим их число через ν) многочлена (43). Если $\lambda_k = 0$, то полагаем $z_k = \infty$, и соответствующее слагаемое в ρ_ν исчезает. В результате получается искомая НД Паде порядка ν.

О.Н. Косухин в [46] предложил другой подход к построению НД Паде; его суть в следующем. Для функции (40) рассмотрим интеграл $\alpha(z) := \int\limits_0^z f(\zeta)\,d\zeta$, где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути в некоторой окрестности начала. Оказывается, НД Паде для функции f совпадает с логарифмической производной частичной суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ ряда Маклорена функции $\exp(\alpha(z))$. Благодаря такой конструкции в [46] был получен ряд интересных результатов об области сходимости последовательности интерполяционных НД Паде $\{\rho_n\}$ к f (эта область, вообще говоря, шире круга сходимости ряда Тейлора для функции f). Кроме того, в [46] получены оценки остаточного члена интерполяции НД Паде для аналитических в единичном круге функций f класса Харди H_1 (с конечной нормой $\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$).

В работе [43] разработан еще один метод построения НД Паде — в виде интеграла Эрмита

$$\rho_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,\frac{R_n(\zeta)-R_n(z)}{(\zeta - z)\,R_n(\zeta)}\,d\zeta, \quad z \in G(\gamma), \tag{44}$$

где γ — спрямляемый жорданов контур, содержащий внутри себя точку $z=0$, функция f аналитична на замыкании области $G(\gamma)$, ограниченной контуром γ,

$$R_n(z) = \frac{z^n}{Q(z)}, \quad Q(z) = \prod_{k=1}^{\nu}(z - z_k) = z^\nu + q_{\nu-1}z^{\nu-1} + \cdots + q_0,$$

а значения ν, z_k определены выше вокруг формулы (43). Из (44) имеем явный вид остаточного члена

$$f(z) - \rho_\nu(z) = \frac{1}{Q(z)}\sum_{k=n}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\nu} q_m f_{k-m}, \quad |z| \le \min_{\zeta\in\gamma}|\zeta|.$$

Приведем полученную в [43] оценку остаточного члена в случае, когда коэффициенты f_m по модулю ограничены членами некоторой геометрической прогрессии.

Если $|f_{m-1}| \le a^m$ для всех m при некотором $a > 0$, то

$$|f(z) - \rho_\nu(z)| \le \frac{a}{1-a|z|}\frac{|z|^n}{r^n}\left(\frac{1-\varepsilon_n + ar}{1-\varepsilon_n - ar}\right)^n \ln\frac{er}{r-|z|}, \quad |z| < r < \frac{1-\varepsilon_n}{a}, \tag{45}$$

где ε_n удовлетворяют соотношениям $\varepsilon_n^2 - (1-\varepsilon_n)^{n+1} = 0$, $\varepsilon_n \sim 2n^{-1}\ln n$ при $n\to\infty$.

Отметим, что (45) опирается на следующую точную по порядку величины a оценку, представляющую и самостоятельный интерес [76].

Если для чисел λ_k их степенные суммы вида (42) удовлетворяют неравенствам $|S_m| \le a^m$, $m = \overline{1,n}$, то $|\lambda_k| < (1-\varepsilon_n)^{-1}a$, $k = \overline{1,n}$.

7. Аналог теоремы Мергеляна. Скорость равномерной аппроксимации посредством НД

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт со связным дополнением. Через $AC(K)$ обозначим класс непрерывных на компакте K функций, аналитических в его внутренних точках. Как показано в п. 1.7, такие функции сколь угодно точно приближаются в $C(K)$ посредством НД (аналог теоремы Мергеляна) [44], [45]. Возникает естественный вопрос о скорости аппроксимации функций $f \in AC(K)$ и ее связи со свойствами f.

Обозначим через $\mathcal{R}_n(f, K)$ и $E_n(f, K)$ наименьшие равномерные уклонения на K функции f от множества НД порядка не выше n и многочленов степени не выше n соответственно. Пусть K — спрямляемый компакт (п. 1.3) и $f \in AC(K)$. В [44], [45] показано

$$\mathcal{R}_{[n \ln(1/E_n(f,K))]}(f, K) < A(f, K) \cdot E_n(f, K), \quad n \geq n_0(f, K).$$

При фиксированном $b \in K$ положим $\alpha(f; b, z) = \int\limits_b^z f(t)\, dt$, где интеграл берется по лежащей на K спрямляемой кривой, соединяющей точки b и $z \in K$. О.Н. Косухин в [46] на спрямляемых компактах установил слабую эквивалентность

$$\mathcal{R}_{n+1}(f, K) \asymp E_n(f e^{\alpha(f;b,\cdot)}, K). \tag{46}$$

Точнее, если каждую точку компакта K можно соединить с точкой b спрямляемым лежащим в K контуром длины $\leq d$, то

$$A_1(d\|f\|_{C(K)})\mathcal{R}_{n+1}(f, K) \leq E_n(f e^{\alpha(f;b,\cdot)}, K) \leq A_2(d\|f\|_{C(K)})\mathcal{R}_{n+1}(f, K),$$

где $A_1(x) = 1/(2(1 + x)e^x)$, $A_2(x) = (1 + 2xe^x)e^x$.

Этот результат и ряд разработанных О.Н. Косухиным методов позволили ему получить для НД аналоги классических полиномиальных теорем Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В.К. Дзядыка, Дж.Л. Уолша [46]. Приведем полученный в [46] аналог классической теоремы Джексона–Корнейчука об оценке уклонений $E_n(f, K)$ через модуль непрерывности $\omega(f, K; \delta)$.

Если $K = D$ — замкнутый круг или отрезок прямой диаметра $2d$, то для $f \in AC(D)$

$$\mathcal{R}_n(f, D) \leq A\left(d\|f\|_{C(D)}\right)\left(\omega\left(f, D; \frac{\pi d}{n}\right) + \left(\frac{\pi d}{n}\right)\|f\|^2_{C(D)}\right).$$

Здесь в отличие от полиномиального случая нельзя отбросить второе слагаемое в мажоранте, так как уже для $f \equiv \mathrm{const} \neq 0$ имеем $\omega(f, D; \pi d/n) = 0$ и в то же время $\mathcal{R}_n(f, D) \neq 0$.

Этот результат в [46] обобщен на функции с $f^{(s)} \in AC(D)$, $s \in \mathbb{N}$. Укажем еще результаты О.Н. Косухина [46] и Я.В. Новака [110] (аналоги теорем Бернштейна), показывающие, насколько в некоторых задачах сходны аппроксимативные свойства НД и многочленов.

Пусть D — замкнутый круг, $\beta \in (0, 1)$. Функция $f^{(s)} \in AC(D) \cap \mathrm{Lip}^\beta(D)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_n(f, D) \leq C/n^{s+\beta}$.

Непрерывная на $[-1, 1]$ функция f принадлежит классу $C^n([-1, 1])$, если и только если существует функция $F \in C([-1, 1])$ такая, что

$$\mathcal{R}_n(f, [x_1, x_2])(x_2 - x_1)^{-n} \to F(x), \quad -1 \leq x_1 < x < x_2 \leq 1, \tag{47}$$

равномерно по x при $x_1, x_2 \to x$. Если (47) выполняется, то имеет место тождество

$$n! 2^{2n-1} F(x) \equiv \left|\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)e^{\alpha(f;x,t)}\right)_{t=x}\right|.$$

Пользуясь методами работы [51], Я.В. Новак ([68], [114]) распространил слабую эквивалентность (46) на пространства $L_p([-1,1])$, $1 \le p < \infty$. Опираясь на этот результат, он получил, в частности, описание класса $C^n([-1,1])$ в терминах скорости локальных приближений посредством НД в метрике $L_p([-1,1])$ при $p > 1$ (этот результат обобщает его теорему, приведенную выше, и является аналогом теоремы А.Н. Морозова [115] для алгебраических многочленов).

8. Равномерная аппроксимация на отрезке действительной оси

В этом разделе рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывных вещественных функций f на отрезке $K \subset \mathbb{R}$ *вещественнозначными* НД. Не нарушая общности, можем считать $K = [-1,1]$. Для этого случая через $\mathcal{R}_n(f)$ обозначим наименьшее уклонение функции f от множества вещественнозначных НД порядка $\le n$, а через $\rho_n^*(f;x)$ — вещественную НД наилучшего приближения (эта НД существует [47]).

8.1. **Неединственность и другие особенности НД наилучшего приближения.** Как уже говорилось, ряд аппроксимативных свойств НД принципиально отличаются от свойств многочленов. Так, существуют непрерывные функции f, для которых

(a) НД $\rho_n^*(f;x)$ неединственна,

(b) разность $\rho_n^*(f;x) - f(x)$ не характеризуется чебышевским альтернансом, состоящим из $n+1$ точек отрезка $[-1,1]$.

Впервые это было показано в [47] на примере НД порядка два вида

$$\frac{2x+\lambda}{x^2+\lambda x+1}, \quad \lambda \in [1,\lambda^*], \quad \lambda^* = 1.62\ldots, \tag{48}$$

каждая из которых наименее уклоняется от функции $f(x) = x+1$ на отрезке $[-1,1]$ среди всех НД порядка не выше двух. Величина наименьшего уклонения равна единице. Только в случае $\lambda = \lambda^*$ имеется альтернанс из трех точек отрезка $[-1,1]$, для остальных значений λ нет даже двухточечного альтернанса.

К этому примеру можно добавить следующее. Для функции $x + 1/2$ НД наилучшего приближения уже единственна, она совпадает с НД (48), где $\lambda = 1$, причем существует альтернанс из трех точек $\{-1,0,1\}$. Таким образом, при приближении посредством НД функций, отличающихся друг от друга лишь на константу, могут проявляться совершенно разные аппроксимативные свойства.

Позже пример неединственности, равно как и необязательности альтернанса для наилучшего приближения, был построен и для произвольного $n \ge 2$ ([65], [116]). Конструкция примера весьма сложна и здесь ее не приводим.

8.2. **Наилучшее приближение констант и альтернанс.** Из п. 8.1 видно, что для НД не существует точного аналога теоремы П.Л. Чебышева об альтернансе. Однако для функций некоторых классов такие аналоги все же имеют место. Первые результаты в этом направлении получены для *вещественных постоянных функций* $f(x) = c$ ([47], [62]–[64], [117]). Отметим, что задачу о наилучшем приближении констант можно считать одним из аналогов задачи П.Л. Чебышева об унитарном многочлене, наименее уклоняющемся от константы.

В работе [47] при достаточно больших $n > n_0(c)$ доказана *необходимость* существования $(n+1)$-точечного альтернанса для наилучшего приближения констант $c \in (0, \ln\sqrt{2})$ посредством НД порядка n. Там же доказана *единственность* вещественнозначной НД $\rho_n^*(c;x)$ наилучшего приближения. В работе [62] доказана *достаточность* указанного альтернанса, но при весьма жестком ограничении: $|c| \le c_n$, где последовательность $\{c_n\}$ достаточно быстро убывает к нулю. Эти предварительные результаты объединяет и усиливает следующее утверждение из [63].

Для любой вещественной константы $c \neq 0$ *дробь* $\rho_n^*(c;\cdot)$ *при каждом* $n > 8|c| + 1$ *единственна и имеет порядок* n. *Существование чебышевского альтернанса из* $n+1$ *точек на отрезке* $[-1,1]$ *для разности* $\rho_n - c$ *необходимо и достаточно для того, чтобы* $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(c;x)$. *Для наименьших уклонений* $\mathcal{R}_n(c)$ *имеем двустороннюю оценку*

$$\frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \cdot \frac{e^{-|c|}}{\operatorname{ch} c \cdot W_n(|c|)} \le \mathcal{R}_n(c) \le \frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \cdot \frac{e^{2|c|}}{V_n(|c|)} \tag{49}$$

с определенными $V_n(|c|) > 0$, $W_n(|c|) > 0$, *стремящимися к единице при* $n \to \infty$.

Опустить или существенно ослабить ограничение на n в утверждении нельзя. Именно, из [2] следует, что для любой НД ρ_n найдется точка $x_0 \in [-1,1]$, в которой $|\rho_n(x_0)| < A\,n$, где A — константа. Значит, константы $c > A\,n$ заведомо не могут хорошо приближаться на $[-1,1]$ дробями ρ_n (наилучшее приближение имеет порядок самой константы).

Правдоподобна гипотеза о том, что, как и в случае констант, аналог теоремы П.Л. Чебышева верен для любой непрерывной вещественнозначной функции f, *если порядок* $n \ge n_0(f)$ *достаточно велик* [118]. Например, в [116] построен пример появления единственности и альтернанса с ростом n, а именно, показано, что дробь $\rho_3^*(x^3+1;\cdot)$ единственна и характеризуется альтернансом из четырех точек, тогда как при $n = 2$ наилучшее приближение функции $x^3 + 1$ неединственно и альтернанс необязателен.

В заключение этого пункта заметим, что оценки скорости приближения констант находят применение в оценках наилучшего приближения более общих функций. Например, в [70] с помощью (49) показано, что $\mathcal{R}_{2n}(Ax) \asymp A^{n+1}8^{-n}(n!)^{-1}$ с любым $A > 0$ при $n > 2A + 1$.

8.3. **Алгоритм построения НД наилучшего приближения констант.** В теории полиномиальных аппроксимаций хорошо известен алгоритм Ремеза, с помощью которого можно построить многочлен наилучшего приближения и соответствующий альтернанс из $n+2$ точек. Для $\rho_n - c$ в [47] предложен численный алгоритм построения альтернанса из $n+1$ точек отрезка $[-1,1]$ в случае констант $c \in (0, \ln\sqrt{2})$, $n > n_0(c)$. Пока нет строгого обоснования сходимости, но в численных экспериментах алгоритм работает надежно. Таким образом, с учетом предыдущей теоремы, алгоритм приводит к численному построению НД $\rho_n^*(c;\cdot)$ наилучшего приближения. Приведем схему этого алгоритма [47].

Сначала берутся произвольно узлы $-1 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < 1$ и для $f(x) = c$ строится интерполяционная НД $\rho_n(x)$ (один из способов построения см. в (38) и (39)). Вычисляются sup-нормы N_k разности $\rho_n(x) - c$ на отрезках $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, n+1$, где $\xi_0 = -1$, $\xi_{n+1} = 1$. Если все N_k равны, то искомая НД построена. В противном случае выбирается какой-либо номер m, для которого значение N_m минимально. Если $2 \le m \le n$, то соответствующие узлы ξ_{m-1} и ξ_m слегка “раздвигаются”, т. е. заменяются на $\xi_{m-1} - \varepsilon$ и $\xi_m + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если $m = 1$, то узел ξ_1 “сдвигается” вправо, если $m = n+1$, то узел ξ_n “сдвигается” влево. И все повторяется с новым набором узлов. Показано, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем убывание норм разностей интерполяционных НД и c на $[-1,1]$. Параметр ε в этом процессе, естественно, уменьшается.

За начальный набор узлов интерполяции рекомендуется брать набор узлов Чебышева, так как норма разности соответствующей интерполяционной НД и c близка по порядку к наименьшему уклонению [63].

8.4. **Критерии наилучшего приближения вещественнозначных функций на отрезке.** Я.В. Новак [68], [119] доказал следующий критерий наилучшего приближения вещественнозначными НД вещественных функций $f \in C([-1,1])$, вполне аналогичный критерию Колмогорова [120] для полиномов.

Имеем $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(f;x)$, если и только если для произвольной НД $\widetilde{\rho}_n$, не имеющей полюсов на $[-1,1]$, выполняется неравенство

$$\min_{x\in E}(\rho_n(x) - \widetilde{\rho}_n(x))(\rho_n(x) - f(x)) \le 0, \tag{50}$$

где $E = \{x \in [-1,1] : |f(x) - \rho_n(x)| = \|f - \rho_n\|_{C([-1,1])}\}$.

Для компакта K общего вида Я.В. Новаком доказана достаточность условия Колмогорова типа (50), где второй множитель необходимо заменить на комплексно сопряженный и заменить полученное произведение его вещественной частью.

Следующий критерий наилучшего приближения в терминах альтернанса (далее — *теорема об альтернансе* или *критерий*) в настоящее время является наиболее общим результатом в этом направлении [66], [67], [69], [70].

Пусть полюсы вещественнозначной НД ρ_n порядка $\le n$ расположены вне круга $|z| \le 1$. Тогда $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ в том и только том случае, когда для разности $f - \rho_n$ на $[-1,1]$ имеется альтернанс из $n+1$ точек. При этом $\rho_n^*(f;x)$ является единственной НД наилучшего приближения. Условие на расположение полюсов ослабить нельзя.

Невозможность ослабления условия на полюсы означает, что если хотя бы одна пара комплексных сопряженных полюсов ρ_n попадает в круг $|z| \le 1$, то, вообще говоря, при выполнении других условий теоремы ρ_n может не быть НД наилучшего приближения или НД наилучшего приближения неединственна. Так, в первом примере п. 8.1 возникает неединственность, хотя при $\lambda = \lambda^*$ на отрезке $[-1,1]$ имеется альтернанс из трех точек: условие критерия не выполнено, поскольку полюсы НД (48) лежат на единичной окружности.

В построенном ниже в п. 8.6 примере показана недостаточность даже $2n-1$ точек альтернанса для наилучшего приближения. Там условие критерия также не выполнено: все полюсы НД лежат *внутри* единичного круга. Другие примеры, связанные с невозможностью ослабления условия на полюсы, имеются в [66].

Ранее аналог теоремы об альтернансе для случая n *вещественных различных* полюсов за исключением утверждения о единственности доказал Я.В. Новак [68]. Для случая n *различных* полюсов достаточность альтернанса была доказана в [117], а необходимость альтернанса и единственность наилучшего приближения — в [121].

Теорему об альтернансе можно переформулировать. Пусть X — произвольный компакт на $\mathbb{C}$, расположенный симметрично относительно $\mathbb{R}$ и не имеющий общих точек с кругом $|z| \le 1$. Через $\rho_n^{**}(X;f;x)$ обозначим НД наилучшего приближения функции f на $[-1,1]$ среди всех вещественнозначных НД порядка n, полюсы которых лежат на X (такая НД, очевидно, существует и имеет порядок, равный n). Приходим к следующему результату.

Имеем $\rho_n^{**}(X;f;x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ в том и только том случае, если для разности $f(x) - \rho_n^{**}(X;f;x)$ на $[-1,1]$ имеется альтернанс из $n+1$ точек.

Здесь условие на компакт ослабить нельзя в следующем смысле. Если X имеет непустое пересечение с кругом $|z| \le 1$, то альтернанс, вообще говоря, не гарантирует, что $\rho_n^{**}(X;f;x) \equiv \rho_n^*(f;x)$ [66].

Теорему об альтернансе дополняет аналог теоремы Валле-Пуссена ([122], гл. 2, § 32), полученный в [66] и [67].

Если в условиях критерия существуют точки $-1 \le t_1 < \dots < t_{n+1} \le 1$ такие, что

$$f(t_j) - \rho_n(t_j) = \pm(-1)^j a_j, \quad a_j > 0, \quad j = \overline{1, n+1},$$

то $\mathcal{R}_n(f) \geq \min\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.

Отметим, для ρ_n порядка, равного n, этот результат фактически получен еще в [117].

8.5. **Чебышевские системы функций, связанные с НД. Идея доказательства теоремы об альтернансе.** Напомним, что система $\{f_1, \dots, f_n\}$ функций, непрерывных на множестве $K \subset \mathbb{C}$, содержащем не менее $n+1$ точек, удовлетворяет *условию Хаара*, если для всякого обобщенного полинома вида

$$F_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n; z) := \alpha_1 f_1(z) + \dots + \alpha_n f_n(z) \not\equiv 0$$

с коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{C}$ число его различных нулей на K не превосходит $n-1$ (например, [122], гл. 1, § 43–48). Условие Хаара, очевидно, эквивалентно тому, что $\det(f_j(\xi_l))_{l,j=1}^n \neq 0$ для любых различных n точек $\xi_l \in K$ и, как доказал А.Хаар, равносильно *единственности* полинома $\alpha_1^* f_1 + \dots + \alpha_n^* f_n$ наилучшего приближения для каждой непрерывной на K функции f. В частности, если функции f_j вещественны и удовлетворяют условию Хаара на отрезке $[-1, 1]$, то систему $\{f_1, \dots, f_n\}$ называют *системой Чебышева* на $[-1, 1]$. На системы функций Чебышева дословно переносится теорема П.Л. Чебышева об альтернансе и некоторые другие результаты теории приближений алгебраическими полиномами.

Скажем, что система $\{f_1, \dots, f_n\}$ аналитических функций удовлетворяет *усиленному условию Хаара* в (замкнутой или открытой) области $K \subset \mathbb{C}$, если для всякого обобщенного полинома $F_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n; z) \not\equiv 0$ сумма кратностей его нулей на K не превосходит $n-1$.

Пусть точки $z_1, \dots, z_k$ лежат вне круга $|z| \leq 1$ и расположены симметрично относительно вещественной оси $\mathbb{R}$. Введем систему χ из n функций вида

$$f_{j,s}(x) = (x - z_j)^{-s}, \quad j = \overline{1, k}, \quad s = \overline{2, m_j + 1}; \quad \sum_{j=1}^{k} m_j = n,$$

где каждому полюсу z_j сопоставлено число $m_j = m(z_j) \in \mathbb{N}$, причем $m(z_j) = m(z_p)$, если $z_j = \overline{z_p}$ и $z_j \notin \mathbb{R}$.

Одним из важных вспомогательных инструментов доказательства теоремы об альтернансе и теоремы типа Валле-Пуссена (см. п. 8.4) является следующая представляющая самостоятельный интерес теорема [66], [121].

Система χ *на отрезке* $[-1, 1]$ *удовлетворяет усиленному условию Хаара.*

Ограничимся схемой доказательства ослабленного варианта теоремы: система χ удовлетворяет обычному условию Хаара в случае, когда все $m_j = 1$. В этом случае условие Хаара равносильно условию

$$\mathcal{D}(\{\xi_l\}; \{z_j\}) := \det((\xi_l - z_j)^{-2})_{l,j=1}^n \neq 0$$

по всем наборам из n различных точек ξ_l отрезка $[-1, 1]$. В доказательстве этого неравенства ключевым является тождество Борхарта ([123], § 1.3):

$$\mathcal{D}(\{\xi_l\}; \{z_j\}) = W \cdot T, \tag{51}$$

где W и T — детерминант и перманент[3] матрицы $((\xi_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n$ соответственно. Определитель W раскладывается по известной ([122], гл. 1, § 14) формуле

$$W = \det((\xi_l - z_j)^{-1})_{l,j=1}^n = \frac{\prod\limits_{1\le l<j\le n} (\xi_j - \xi_l)(z_l - z_j)}{\prod\limits_{l,j=1}^{n} (\xi_l - z_j)}.$$

В рассматриваемом случае точки ξ_l, равно как и полюсы z_j, попарно различны, поэтому $W \neq 0$. Несколько сложнее доказывается [66], [117], что и перманент $T \neq 0$. В результате приходим[4] к искомому неравенству $\mathcal{D}(\{\xi_l\}; \{z_j\}) \neq 0$.

Применение теоремы о системе Хаара к доказательству теоремы об альтернансе осуществляется посредством следующей леммы и ее следствия [64], [66].

Пусть $\rho_n(x) = (\ln Q(x))'$, где Q — полином степени n вида

$$Q(x) = (x - z_1)^{m_1} \dots (x - z_k)^{m_k} \quad (m_1 + \dots + m_k = n),$$

$z_1, \dots, z_k$ — попарно различные точки на $\mathbb{C}$, а m_j — натуральные числа. Тогда для любой НД $\widetilde{\rho}_n(x) = (\ln P(x))'$ порядка не выше n существуют n однозначно определенных чисел $\alpha_{j,s}$ таких, что

$$\widetilde{\rho}_n(x) - \rho_n(x) \equiv \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=2}^{m_j+1} \frac{\alpha_{j,s}}{(x - z_j)^s}.$$

Отсюда ввиду указанного выше свойства системы χ получаем утверждение.

Если все полюсы вещественнозначной НД ρ_n порядка n лежат вне круга $|z| \le 1$, а $\widetilde{\rho}_n \not\equiv \rho_n$ — другая вещественнозначная НД порядка не выше n, то сумма кратностей нулей разности $\widetilde{\rho}_n - \rho_n$ на $[-1, 1]$ не превосходит $n - 1$. В частности, $\widetilde{\rho}_n - \rho_n$ имеет на $[-1, 1]$ не более $n - 1$ различных нулей.

Иначе это следствие можно переформулировать как теорему о единственности решения задачи обычной интерполяции *вещественных* таблиц [66], [70].

Пусть полюсы вещественнозначной НД ρ_n порядка $\le n$ лежат вне круга $|z| \le 1$. Если ρ_n является решением полной задачи (32) *с узлами $\xi_j \in [-1, 1]$, то ρ_n — единственная вещественная интерполяционная дробь.*

Теперь легко получается достаточность альтернанса в случае, когда порядок НД ρ_n равен n. Действительно, пусть для разности $f - \rho_n$ существует альтернанс из $n + 1$ точек $-1 \le t_1 < \dots < t_{n+1} \le 1$. Допустим существование НД $\widetilde{\rho}_n$, для которой $\|f - \rho_n\|_{C([-1,1])} > \|\widetilde{\rho}_n - L\|_{C([-1,1])}$. Тогда при $j = \overline{1, n+1}$ имеем

$$\operatorname{sgn}[\widetilde{\rho}_n(t_j) - \rho_n(t_j)] = \operatorname{sgn}[(\widetilde{\rho}_n(t_j) - f(t_j)) - (\rho_n(t_j) - f(t_j))] = \pm(-1)^j,$$

так что функция $\widetilde{\rho}_n - \rho_n$ на интервале $(-1, 1)$ имеет не менее n различных нулей. Но тогда по следствию $\widetilde{\rho}_n \equiv \rho_n$. Противоречие с допущением.

С помощью некоторых дополнительных соображений [70] получается достаточность альтернанса и в случае НД ρ_n порядка $\le n$.

[3] Перманент квадратной матрицы — это матричная функция, вычисляемая по правилу разложения определителя, но с тем отличием, что перед каждым произведением элементов независимо от четности соответствующей перестановки ставится плюс.

[4] Если все z_j вещественны и лежат за пределами отрезка $[-1, 1]$, естественно говорить, что система χ удовлетворяет на отрезке *усиленному условию Чебышева*. Это утверждение для системы функций $\{(x - z_j)^{-2}\}_{j=1}^n$ с *n попарно различными* полюсами $z_j \in \mathbb{R}$ при условии справедливости тождества Борхарта (51) впервые доказано в [68] (также в [117], [121]).

8.6. **Минимальное число точек альтернанса, гарантирующее наилучшее приближение.** Вопрос о минимальном числе N точек альтернанса, гарантирующем наилучшее приближение посредством НД порядка $\leq n$ независимо от свойств приближаемой непрерывной функции, рассматривался в [116]. Оказывается, что $N = 2n$. Действительно, достаточность такого числа точек альтернанса очевидна, а недостаточность $2n-1$ точек подтверждается примером [66], [116], который изложим для случая четных n.

Введем положительные на $\mathbb{R}$ многочлены

$$P(x) = \varepsilon + \prod_{k=1}^{m}(x+2^{-k})^2, \quad Q(x) = \varepsilon + \prod_{k=1}^{m}(x-2^{-k})^2, \quad \varepsilon > 0,$$

степени $n = 2m$. Доказано [116], что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ многочлен $P'Q - Q'P$ имеет ровно $2n-2$ простых нулей $\xi_k \in (-1,1)$. Отсюда следует, что разность НД $\rho_n = Q'/Q$ и $\widetilde{\rho}_n = P'/P$ в точках ξ_k имеет $2n-2$ перемен знаков. Легко видеть, что любая непрерывная вещественнозначная функция f, график которой проходит через точки $(\xi_k, \rho_n(\xi_k))$ и которая удовлетворяет условию

$$\operatorname{sgn}(f(x) - \rho_n(x)) = \operatorname{sgn}(f(x) - \widetilde{\rho}_n(x)) = \operatorname{sgn}(\widetilde{\rho}_n(x) - \rho_n(x))$$

($2n-2$ перемен знаков), приближается (на любом отрезке) дробью $\widetilde{\rho}_n$ лучше, чем дробью ρ_n. Для того чтобы разность $f(x) - \rho_n(x)$ имела $2n-1$ точек альтернанса, остается дополнительно потребовать от f, чтобы на всех $2n-1$ промежутках отрезка $[-1,1]$, где знаки разности $f(x) - \rho_n(x)$ постоянны, sup-нормы этой разности были одинаковыми.

9. Аппроксимация посредством НД в $L_p(\mathbb{R})$. Ряды НД

9.1. **Класс аппроксимируемых функций.** Пусть $p \in (1, \infty)$. Через S_p обозначим класс всех комплекснозначных функций $f \in L_p = L_p(\mathbb{R})$, приближаемых сколь угодно точно посредством НД в метрике L_p. Полное описание класса S_p получено В.Ю. Протасовым в работе [34]. Им, в частности, показано, что любая функция $f \in S_p$ является аналитической на $\mathbb{R}$, продолжается до мероморфной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функции и представляется в виде ряда $f(x) = \rho_\infty(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x - z_k)^{-1}$, сходящегося в L_p. При этом показатель сходимости последовательности $\{z_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$\tau(\{z_k\}) \leq 1 - 1/p, \quad \tau(\{z_k\}) := \inf\left\{\gamma > 0, \ \sum_k |z_k|^{-\gamma} < \infty\right\}. \tag{52}$$

Таким образом, класс S_p состоит из тех и только тех функций f, которые представляются в виде сходящихся к ним в L_p рядов НД. Этот результат инициировал изучение рядов НД [29], [30], [97].

Предположим, что ряд $\sum\limits_k (x-\xi_k)^{-1}$ сходится в L_p, $p \in (1,\infty)$, к некоторой функции $\rho \in L_p$ (т. е. $\rho \in S_p$). Запишем это в виде

$$\rho(x) = \rho_\infty(x) = \sum_k^{(p)} (x - \xi_k)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{53}$$

Ряд (53) сходится к ρ в L_p безусловно [34]. Через $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $y_k > 0$, будем обозначать занумерованные в каком-либо порядке полюсы суммы (53), лежащие в $\mathbb{C}^+$. Если число $m \geq 0$ таких полюсов конечно, то для единообразия записей будем считать $z_{m+k} = \infty$

и $(z - z_{m+k})^{-1} \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. То же будем предполагать относительно полюсов, лежащих в $\mathbb{C}^-$, будем обозначать их через $\widetilde{z}_k = \widetilde{x}_k + i\widetilde{y}_k$. Введем частичные суммы $\rho_n(z) + \widetilde{\rho}_n(z)$, где

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \quad \widetilde{\rho}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - \widetilde{z}_k},$$

и положим $\mu_n = \operatorname{Im} \rho_n$, $\nu_n = \operatorname{Re} \rho_n$, $\widetilde{\mu}_n = \operatorname{Im} \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\nu}_n = \operatorname{Re} \widetilde{\rho}_n$ (см. (25)). Доказательство основных результатов в [34] базируется на преобразовании Гильберта, которое (например, [95]) определяется почти всюду как

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t-x| \geq \varepsilon} \frac{f(t)}{t - x} dt, \quad f \in L_p, \quad x \in \mathbb{R},$$

и на формулах Сохоцкого–Привалова $H(\rho_n) = -i\rho_n$ и $H(\widetilde{\rho}_n) = i\widetilde{\rho}_n$, т. е.

$$H(\nu_n) = \mu_n, \quad H(\mu_n) = -\nu_n, \quad H(\widetilde{\nu}_n) = -\widetilde{\mu}_n, \quad H(\widetilde{\mu}_n) = \widetilde{\nu}_n. \tag{54}$$

Хорошо известно, что оператор $H : L_p \to L_p$ при $p \in (1, \infty)$ ограничен, поэтому из (54), в частности, получаются слабые эквивалентности $\|\nu_n\|_p \asymp \|\mu_n\|_p \asymp \|\rho_n\|_p$ (не зависящие от n). Здесь и далее в этом пункте применяется обозначение $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p}$, $1 < p \leq \infty$.

Пусть выполнено (53) при $1 < p < \infty$. Тогда с учетом (54) получим [34]

$$\|\mu_n\|_p \leq \|\mu_n - \widetilde{\mu}_n\|_p = \|H(\nu_n + \widetilde{\nu}_n)\|_p \leq \\ \leq h_p \|\nu_n + \widetilde{\nu}_n\|_p \leq h_p \|\rho_n + \widetilde{\rho}_n\|_p \to h_p \|\rho\|_p, \quad n \to \infty, \tag{55}$$

где h_p — норма оператора Гильберта. Из теоремы Б. Леви следует, что неубывающая последовательность μ_n сходится в L_p к функции μ и $\|\mu\|_p \leq h_p \|\rho\|_p$. Отсюда и из $\|\nu_n\|_p \asymp \|\mu_n\|_p$ вытекает, что последовательность $\{\nu_n\}$ является фундаментальной в L_p и, значит, сходится к некоторой функции ν, причем $\|\nu\|_p \leq h_p^2 \|\rho\|_p$. Поэтому последовательность ρ_n сходится в L_p к функции $\sigma = \mu + i\nu$ и $\|\sigma\|_p \leq h_p(1 + h_p)\|\rho\|_p$. Аналогичны рассуждения и оценки для функций со знаком $\widetilde{\ }$.

Здесь важно, что $p < \infty$, поскольку оценка компонент σ и $\widetilde{\sigma}$ через их сумму $\rho = \sigma + \widetilde{\sigma}$ при $p = \infty$ невозможна. Можно утверждать [23] лишь, что (оценка точна по порядку)

$$\|\mu_n\|_\infty \leq A \cdot \ln n \cdot \|\rho_n + \widetilde{\rho}_n\|_\infty. \tag{56}$$

Таким образом, для сходимости (53) необходима и достаточна одновременная сходимость в L_p сумм ρ_n и $\widetilde{\rho}_n$ или ν_n и $\widetilde{\nu}_n$, или μ_n и $\widetilde{\mu}_n$ (т. е. одновременная конечность L_p-норм сумм $\mu(x) := \lim\limits_{n \to \infty} \mu_n(x)$, $\widetilde{\mu}(x) := \lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{\mu}_n(x)$ знакопостоянных рядов).

Итак, задача аппроксимации в L_p при конечных p фактически сводится к исследованию сходимости рядов НД в L_p, а последнее значительно облегчается тем, что достаточно изучать ряды, все полюсы которых лежат в $\mathbb{C}^+$. Кроме того, в этом случае сходимость (53) равносильна конечности L_p-нормы $\|\mu\|_p$ знакоположительного ряда $\mu(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu_n(x)$. В связи с этим в работе [34] сформулирована задача:

каков критерий сходимости (53) *в терминах последовательности полюсов* $\{z_k\} \subset \mathbb{C}^+$*, или, что то же самое, каков критерий для* $\|\mu\|_p < \infty$*?*

Приведем несколько результатов.

9.2. **Некоторые критерии сходимости рядов НД.** Пусть ρ_n — НД с полюсами $z_k \in \mathbb{C}^+$. При $1 < p < 3$ имеем следующий критерий сходимости [29]:

$$\|\mu\|_p < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}} \sum_{k=1}^{n} \rho_n^{p-1}(\overline{z_k})\right) \le A < \infty \quad \forall n,$$

где $A = A(p, \{z_k\})$ не зависит от n, а суммируются значения однозначной в $\mathbb{C}^-$ аналитической ветви

$$\rho_n^{p-1}(z) = |\rho_n(z)|^{p-1} e^{i\varphi(p-1)}, \quad \varphi = \arg \rho_n(z) \in (0, \pi), \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

При этом справедлива двусторонняя оценка

$$\|\rho_n\|_p^p \cos\frac{\pi(p-2)}{2} \le 2\pi \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}} \sum_{k=1}^{n} \rho_n^{p-1}(\overline{z_k})\right) \le \|\rho_n\|_p^p. \tag{57}$$

Легко проверить, что при $p \in (1, 2)$ мнимые части слагаемых в (57) слабо эквивалентны их модулям, откуда получается весьма простой по форме критерий: *для* $\|\mu\|_p < \infty$, $1 < p < 2$, *необходимо и достаточно выполнения* (8).

В общем случае с помощью (11) получается следующий критерий [29].

Условие $\|\mu\|_p < \infty$ (*т. е.* $\rho_n \to \rho$ *в* L_p) *выполняется тогда и только тогда, когда найдется конечная величина* $A = A(p, \{z_k\})$ *такая, что для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $g \in H_q$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g(z_k)\right| \le A\,\|g\|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad 1 < p < \infty.$$

9.3. **Некоторые другие условия сходимости.** Приведем еще некоторые результаты о сходимости из [29]. Если выполнено $\|\mu\|_p < \infty$, то последовательность $\rho_n(x)$ сходится к $\rho(x)$ *равномерно* на $\mathbb{R}$, функция ρ аналитична в полосе $\{z : \operatorname{Im} z < A_1(p)\|\rho\|_p^{-q}\}$ и

$$\|\rho\|_\infty \le A_2(p)\|\rho\|_p^q, \quad |\rho'(x)| \le 2\|\rho\|_\infty \cdot \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, справедлива эквиваленция

$$\|\mu\|_p < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu^p(c_k) < \infty \quad \forall c_k \in [k, k+1],$$

из которой, в частности, вытекает импликация $\|\mu\|_p < \infty \Rightarrow \|\mu\|_r < \infty$ при $p < r$. Из импликации получаем $S_p \subset S_r$ при $r > p$.

И.Р. Каюмов в [30], [31] получил необходимое условие для $\|\mu\|_p < \infty$ в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} |z_k^*|^{1-p} < \infty, \tag{58}$$

где $\{z_k^*\}$ — последовательность, полученная из $\{z_k\}$ путем упорядочивания $|z_k|$ в порядке возрастания. Им получено также достаточное для $\|\mu\|_p < \infty$ условие в виде $\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} y_k^{1-p} < \infty$, $z_k = x_k + iy_k$, $y_k > 0$, которое в силу (58) оказывается также и необходимым при условии, что y_k упорядочены по возрастанию, а $z_k \in \mathbb{C}^+$ лежат в некотором угле $|z_k| < c\,y_k$. Отметим, что при выполнении последнего свойства из (8) получается необходимое и достаточное условие для $\|\mu\|_p < \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{y_k+y_j}\right)^{p-1} < \infty, \quad p \in (1,2).$$

10. Обобщения НД

Всюду в этом разделе через f и h обозначены фиксированные функции, аналитические в окрестности начала координат и имеющие представления

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m, \quad h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m, \quad h_m \neq 0. \tag{59}$$

(Условие на коэффициенты h накладывается здесь для простоты изложения, в общем случае достаточно выполнения импликации [61] $f_m \neq 0 \Rightarrow h_m \neq 0$.) Кроме того, считаем, что h аналитична в круге $D_r := \{z : |z| \le r\}$ с некоторым фиксированным $r > 0$.

10.1. **Интерполяция Паде h-суммами, применение в численном анализе.** В работе [61] введены так называемые *h-суммы* вида

$$H_n(z) = H_n(\{\lambda_k\}, h; z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z), \quad z, \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где h — *базисная* функция из (59), $|z| < r \min\limits_{k=1,\dots,n} |\lambda_k|^{-1}$. Если в качестве базисной функции выбрать, например, $h(z) = (z-1)^{-1}$, то h-сумма будет иметь вид НД с полюсами λ_k^{-1} — тем самым h-суммы являются естественным обобщением НД.

В [61] рассматривалась задача Паде-интерполяции

$$f(z) - H_n(z) = O(z^n), \quad z \to 0, \tag{60}$$

которая, очевидно, обобщает рассмотренную в п. 6.6. С учетом (59) легко проверить, что (60) равносильно системе уравнений для степенных сумм чисел λ_k:

$$S_{m+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{m+1} = s_m, \quad s_m := f_m/h_m, \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{61}$$

Как уже говорилось в п. 6.1, эта система всегда разрешима, λ_k являются корнями многочлена, построенного как и (43), но с заменой f_m на $(-s_m)$.

В [61], [76] были получены оценки величин $|\lambda_k|$ и $|O(z^n)|$ при определенных ограничениях на числа $|s_m|$ и даны оценки остаточных членов интерполяции. Например, если для степенных сумм вида (61) имеем $|S_m| \le a^m$, $m = \overline{1, n}$, то суммы H_n сходятся к f равномерно в любом круге $|z| \le r(1-\delta)\,a^{-1}$, $\delta \in (0,1)$, причем

$$|H_n(z) - f(z)| \le (\theta\delta)^{-1}(1-\theta\delta)^n, \quad \theta \in (0,1), \quad n \ge n_0.$$

При этом радиус a круга сходимости не может быть увеличен, а число $1-\theta\delta$ в оценке не может быть заменено числом меньшим $1-\delta$ ([76]).

В дальнейшем h-суммы применялись как операторы численного дифференцирования, интегрирования и экстраполяции на определенных классах аналитических функций [43], [73]–[77]. В этом случае числа λ_k уже не зависят от индивидуальных функций и имеют универсальный характер. Например, в [61] найдены следующие точные на многочленах степени $\le n-1$ формулы численного дифференцирования и интегрирования:

$$zh'(z) \approx -h(z) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{1,k} h(\lambda_{1,k} z), \quad \int_0^z h(t)\,dt \approx z \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2,k} h(\lambda_{2,k} z). \tag{62}$$

Здесь числа $\lambda_{l,k}$ — абсолютные постоянные, являющиеся корнями многочленов $P_{l,n}$ ($l = 1,2$), которые можно определить рекуррентно следующим образом. Пусть $P_{l,0} = 1$, $v_{l,1} = -1$ ($l = 1,2$). Тогда при $k = 1,2,\ldots$ имеем

$$P_{l,k} = \lambda P_{l,k-1} - v_{l,k}, \quad v_{1,k} = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) v_{1,j}, \quad v_{2,k} = \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{v_{2,j}}{k(k-j)}.$$

Первая формула из (62) была обобщена в [76] на случай любого порядка дифференцирования. В работах [73]–[75] рассматривались аппроксимации операторов более общего вида — дифференциальных полиномов. Там показано, что при фиксированном натуральном q и любом натуральном $n > q+5$ существуют комплексные числа λ_k, $|\lambda_k| < 1$, зависящие только от q и n, такие, что имеет место приближенное равенство

$$\sum_{s=1}^{q} p_s h_{q-s} z^{q-s} \approx \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k)\, h(\lambda_k z), \quad N := [n/q],$$

где $P = \sum_s p_s \lambda^s$ — произвольный многочлен степени $\le q$. Погрешность формулы имеет порядок $o(n^{-n/q})$, $n \to \infty$, при любом фиксированном z.

Еще одним примером использования h-сумм в численном анализе является метод экстраполяции, предложенный в [43], [77]. Показано, что при $a > 1$ найдется зависящее только от a и n множество $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ со свойством

$$\max_{k=\overline{1,n}} |\lambda_k| \le a - (a-1)n^{-1}, \quad S_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = a^{m-1}, \quad m = \overline{1,n},$$

откуда для функции h получается *экстраполяционная* формула $h(z) \approx H_n^{(\mu)}(z)$, где $\mu \in \mathbb{N}$ и

$$H_n^{(\mu)}(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_\mu=1}^{n} \lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu} h\left(\frac{\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right), \quad \left|\frac{\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu}}{a^\mu} z\right| < \left(1 - \frac{a-1}{an}\right)^\mu |z|. \tag{63}$$

Эта формула является экстраполяционной в том смысле, что значения функции h выражаются через ее значения в точках с меньшими модулями.

Показано [43], [77], что при определенном d_0, $d_0 < r$, за счет сбалансированного выбора параметров μ и n можно сколь угодно точно экстраполировать значения h на окружность $|z| = r$ из круга $|z| \le d_0$ (т.е. все узлы экстраполяции $\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_\mu} a^{-\mu} z$ лежат в круге $|z| \le d_0$). При этом для остаточного члена $r_n(z) := h(z) - H_n^{(\mu)}(z)$ имеем [77]

$$r_n(z) = \sum_{m=n}^{\infty} h_m \left(1 - \left(\frac{S_{m+1}}{a^m}\right)^\mu\right) z^m, \quad |r_n(z)| \le \sum_{m=n}^{\infty} |h_m||z|^m, \quad z \in D_r. \tag{64}$$

Заметим также, что при увеличении μ с фиксированным n радиусы кругов, в которых лежат узлы экстраполяции, стремятся к нулю как геометрическая прогрессия (63) (число узлов, естественно, возрастает). Однако оценка погрешности из (64) не ухудшается, так как просто не зависит от μ. В [77] приведены примеры, демонстрирующие определенные преимущества указанной экстраполяции перед традиционной интерполяцией (или экстраполяцией) в корнях из единицы.

10.2. **Интерполяция амплитудно-частотными суммами. Регуляризация.** В [78]–[80] предложено естественное обобщение h-сумм — *амплитудно-частотные суммы* вида

$$\mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z) := \sum_{k=1}^{n} \mu_k h(\lambda_k z), \quad \mu_k,\lambda_k \in \mathbb{C},$$

где *амплитуды* μ_k и *частоты* λ_k — независимые друг от друга параметры. Как и h-суммы, амплитудно-частотные суммы применялись и для аппроксимации отдельных аналитических функций f (и тогда $\lambda_k = \lambda_k(f,h,n)$, $\mu_k = \mu_k(f,h,n)$), и как специальные операторы (интегрирования, дифференцирования и экстраполяции), действующие на определенном классе (и тогда $\lambda_k = \lambda_k(n)$, $\mu_k = \mu_k(n)$) [79].

Отметим, что амплитудно-частотные суммы являются естественным обобщением некоторых классических аппаратов приближения, как экспоненциальные суммы, тригонометрические полиномы, дроби Паде [78], [79].

В случае амплитудно-частотных сумм разумно ставить задачу уже $2n$-кратной Паде-интерполяции функции f в точке $z=0$:

$$f(z) = \mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z) + O(z^{2n}), \quad z \to 0,$$

что равносильно выполнению следующих условий на так называемые *обобщенные степенные суммы* (*моменты*) (61)

$$\mathcal{S}_m := \sum_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k^m = s_m, \quad s_m := f_m/h_m, \quad m = \overline{0, 2n-1}. \tag{65}$$

Эту систему относительно неизвестных λ_k, μ_k при известных правых частях s_m называют *задачей дискретных моментов.*

Следуя [83], назовем совместную систему (65) и ее решение *регулярными*, если все λ_k попарно различны, а все μ_k отличны от нуля. Для решения регулярных систем существует классический метод Прони [82], [83], [86]. Ключевую роль в этом методе играет *производящий* многочлен

$$G_n(\lambda) := \sum_{m=0}^{n} g_m \lambda^m = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}, \tag{66}$$

построенный по числам s_m, $m = \overline{0, 2n-1}$, из (65). Регулярный случай характеризуется тем, что степень многочлена G_n равна n и все его корни попарно различны. Эти корни и дают нужные частоты λ_k. Затем находятся μ_k из линейной относительно них системы (65).

Рассмотрим пример. Пусть h — аналитическая в круге D_r функция и

$$f(x) := \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} h(t)\,dt, \quad 0 \le x < r.$$

Легко проверить, что в данном случае система (65) регулярна, причем $s_{m-1} = \frac{1}{m}(1-(-1)^m)$, $m = \overline{1, 2n}$. Ее решение методом Прони позволяет построить оператор $\mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;x)$ численного интегрирования — квадратурную формулу Гаусса

$$f(x) \approx \mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;x),$$

где частоты λ_k вещественны, попарно различны и лежат на интервале $(-1,1)$, а амплитуды μ_k положительны. Хорошо известно (например, [125], гл. 7, § 2), что формулы Гаусса имеют наивысший порядок точности среди всех квадратурных формул порядка n и точны на многочленах степени $2n-1$.

Возник вопрос о построении столь же высокоточных интерполяционных формул для операторов численного дифференцирования и экстраполяции [78], [79]. Однако в этих случаях условия регулярности не выполняются и, более того, для численного дифференцирования соответствующая задача моментов вовсе не имеет решения.

Для преодоления этой трудности в [78], [79] предложен метод аналитической регуляризации задачи $2n$-кратной интерполяции путем добавления к интерполируемой функции f специального бинома вида $b(z) := p\,h_{n-1}z^{n-1} + q\,h_{2n-1}z^{2n-1}$ с тем условием, чтобы для функции $f+b$ задача (65) была регулярной (в этом случае в определителе (66) величины s_{n-1} и s_{2n-1} заменяются на $s_{n-1}+p$ и $s_{2n-1}+q$). Тогда метод Прони дает "подправленную" интерполяционную формулу

$$f(z) = -p\,h_{n-1}z^{n-1} - q\,h_{2n-1}z^{2n-1} + \mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z) + O(z^{2n}). \tag{67}$$

В рассматриваемых в [78], [79] приложениях важно, чтобы p и q задавались явными формулами, позволяющими получать оценки амплитуд, частот и остаточных членов интерполяции. Остановимся на этих вопросах подробней.

10.3. **Численное дифференцирование посредством амплитудно-частотных сумм.** Рассмотрим задачу $2n$-кратной интерполяции функции $zh'(z)$ посредством сумм $\mathcal{H}_n$, где в качестве базисной выбрана сама функция h. Приходим к нерегулярной задаче дискретных моментов (65), где $s_m = m$. Применим метод регуляризации, взяв

$$q = q_0(p) := -2\,\frac{p\,(3\,p + n^2 - 1)}{(n-1)\,(n-2)}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Тогда производящий многочлен для $zh'(z)+b(z)$ примет вид

$$G_n(\lambda) = g_n\left(\lambda^n - \frac{6\lambda\left(\lambda^{n-1} - (n-1)\lambda + n - 2\right)}{(n-1)\,(n-2)\,(\lambda-1)^2} + 2 + \frac{6\,p}{(n-1)\,(n-2)}\right), \tag{68}$$

причем сколь угодно малой вариацией p всегда можно добиться, чтобы все n корней этого многочлена были попарно различны, т. е. имели регулярный случай. Тем самым получается формула (67) с $f(z) = zh'(z)$, где частоты λ_k — попарно различные корни многочлена (68), а амплитуды μ_k однозначно определяются по этим корням. Заметим, что $\mu_k = \mu_k(p,n)$ и $\lambda_k = \lambda_k(p,n)$ не зависят от вида аналитической функции h и в этом смысле являются универсальными (в [78], [79] были получены некоторые оценки $|\lambda_k|$, оценки соответствующих амплитуд — вопрос открытый).

Полученная формула численного дифференцирования точна на многочленах степени не выше $2n-1$. При этом требуется знать только n значений функции h и два фиксированных значения ее производных в точке $z=0$. Традиционный интерполяционный подход при таком количестве известных значений позволяет получить, вообще говоря, только порядок $O(z^{n+2})$ ([61], [126]–129]).

10.4. **Экстраполяция посредством амплитудно-частотных сумм.** Если при фиксированном $a>0$ функцию $h(az)$ интерполировать посредством амплитудно-частотной суммы $\mathcal{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z)$ и при этом $|\lambda_k| < \delta\,a$ с некоторым $\delta \in (0,1)$ при всех $k = \overline{1,n}$, то естественно назвать интерполяционную формулу *экстраполяционной*. Здесь, как и в случае дифференцирования, получаем нерегулярную задачу моментов с $s_m = a^m$. В [78], [79] показано, что она регуляризуется, например, добавлением бинома вида $b(z)$ с $p > 0$, $q = 0$. При этом производящий многочлен принимает вид

$$G_n(\lambda) = g_n \left(\lambda^n - \frac{a^n}{na^{n-1} + p} \frac{\lambda^n - a^n}{\lambda - a} \right)$$

и всегда имеет n попарно различных корней $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$. Таким образом, при указанных параметрах p и q справедлива интерполяционная формула

$$h(az) = -p\, h_{n-1} z^{n-1} + \mathcal{H}_n(\{\mu_k\}, \{\lambda_k\}, h; z) + r_n(z), \quad r_n(z) = O(z^{2n}), \tag{69}$$

точная на многочленах степени не выше $2n - 1$. Здесь, как и в предыдущей задаче, частоты и амплитуды не зависят от h, при этом справедливы неравенства

$$|\lambda_k| < \delta\, a; \quad \delta := \big(1 + p/(na^{n-1})\big)^{-1/n} < 1,$$

т. е. формула (69) является экстраполяционной. Для остаточного члена справедлива оценка

$$|r_n(z)| \le \sum_{m=2n}^{\infty} |h_m| |az|^m.$$

Из неравенства для δ следует, что при возрастании p и фиксированных прочих параметрах узлы экстраполяции стягиваются к точке $z = 0$ — возникает интересное явление стягивания узлов экстраполяции в одну точку без влияния на оценку погрешности. Аналогичный эффект уже отмечался в сходных задачах для h-сумм [43], [77] (и п. 10.1).

Обычно при n-точечной формуле на основе многочленов Лагранжа и других сходных аппаратов получаются экстраполяционные формулы, точные на многочленах порядка не выше $n - 1$ (например, [43], [77], [130]). При этом n-точечные формулы (69) точны на многочленах порядка $2n - 1$, причем такое удвоение порядка точности достигается за счет введения лишь одного регуляризующего слагаемого.

10.5. **Замечание о вещественных формулах.** При работе с вещественнозначными на $\mathbb{R}$ аналитическими функциями (которых в приложениях большинство) к определенному неудобству обсуждавшихся в разделе 10 формул можно отнести то, что среди подходящих значений параметров λ_k, μ_k для h-сумм и амплитудно-частотных сумм могут быть невещественные. Оперирование комплексными значениями в таких задачах весьма неудобно, например, если известны лишь табулированные значения функций на $\mathbb{R}$. Возникает задача выделения достаточно широкого подкласса функций h, в котором возможно построение *вещественных* интерполяционных формул того же типа, и самого построения таких формул.

Эта задача весьма далека от полного решения. Наибольшим продвижением в этом направлении на данный момент является работа Ю.М. Нигматяновой [131], в которой предложен численный метод пробных алгебраических многочленов, с помощью которого строятся вещественные интерполяционные формулы рассматривавшихся в п. 10.1 типов. Например, для четных аналитических в окрестности начала функций $h(z)$ построены операторы вида $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z)$ нечетного порядка n с вещественными параметрами λ_k, аппроксимирующие дифференциальный оператор $(zh(z))'$ с локальной погрешностью $O(z^{n+2})$ $(z \to 0)$ при $n \le 51$.

Литература

[1] Boole G. *On the comparison of transcendents, with certain applications to the theory of definite integrals*, Philos. Trans. R. Soc. **147**, 745–803 (1857).

[2] Macintyre A.J., Fuchs W.H.J. *Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial*, J. London Math. Soc. **15** (3), 162–168 (1940).

[3] Marstrand J.M. *The distribution of the logarithmic derivative of a polynomial*, J. London Math. Soc. **38** 495–500 (1963).

[4] Гончар А.А. *О наилучших приближениях рациональными функциями*, ДАН СССР **100** (2), 205–208 (1955).

[5] Гончар А.А. *Обратные теоремы о наилучших приближениях на замкнутых множествах*, ДАН СССР **128** (1), 25–28 (1959).

[6] Гончар А.А. *Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **25** (3), 347–356 (1961).

[7] Долженко Е.П. *Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций*, Матем. сб. **56** (4), 403–432 (1962).

[8] Долженко Е.П. *Рациональные аппроксимации и граничые свойства аналитических функций*, Матем. сб. **69** (111), 497–524 (1966).

[9] Долженко Е.П. *О зависимости граничных свойств аналитической функции от скорости ее приближения рациональными функциями*, Матем. сб. **103** (145), 131–142 (1977).

[10] Долженко Е.П. *Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения*, Anal. Math. **4** (4), 247–268 (1978).

[11] Cartan H. *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **45** (3), 255–346 (1928).

[12] Anderson J.M., Eiderman V.Ya. *Cauchy transforms of point masses*: *the logarithmic derivative of polynomials*, Ann. Math. **163** (3), 1057–1076 (2006).

[13] Андерсон Дж.М., Эйдерман В.Я. *Оценки преобразования Коши точечных масс (логарифмической производной многочлена)*, Докл. РАН **401** (5), 583–586 (2005).

[14] Говоров Н.В., Лапенко Ю.П. *Оценки снизу модуля логарифмической производной многочлена*, Матем. заметки **23** (4), 527–535 (1978).

[15] Эйдерман В.Я. *Оценки картановского типа для потенциалов с ядром Коши и с действительными ядрами*, Матем. сб. **198** (8), 115–160 (2007).

[16] Горин Е.А. *Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами*, Сиб. матем. журн. **3** (4), 500–526 (1962).

[17] Николаев Е.Г. *Геометрическое свойство корней многочленов*, Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ. **5**, 23–26 (1965).

[18] Гельфонд А.О. *Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными от логарифмов на действительной оси*, Матем. сб. **71** (113) (3), 289–296 (1966).

[19] Кацнельсон В.Э. *О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями* $\frac{1}{z-z_k}$, Теория функций, функц. анализ и их прилож. **4**, 58–66 (1967).

[20] Данченко В.И. *Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей*, Матем. сб. **185** (8), 63–80 (1994).

[21] Бородин П.А. *Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах*, Матем. заметки **82** (6), 803–810 (2007).

[22] Данченко В.И. *Метрические свойства мероморфных функций. Дисс. … докт. физ.-матем. наук* (МГУ, М., 1999).

[23] Данченко В.И. *Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы*, Матем. сб. **197** (4), 33–52 (2006).

[24] Данченко Д.Я. *Некоторые вопросы аппроксимации и интерполяции рациональными функциями. Приложение к уравнениям эллиптического типа. Дисс. … канд. физ.-матем. наук* (Владимирск. гос. педагогический ун-т, 2001).

[25] Косухин О.Н. *Об оценках расстояний от полюсов наипростейших дробей до компактов*, Матер. Междунар. научн. конф., посв. 105-летию акад. С.М. Никольского (МГУ им. М.В. Ломоносова, 17–19 мая 2010 г.), МГУ, М., с. 25 (2010).

[26] Chunaev P. *Least deviation of logarithmic derivatives of algebraic polynomials from zero*, J. App. Theory **185**, 98–106 (2014).

[27] Кондакова Е.Н. *Интерполяция и аппроксимация наипростейшими дробями*: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук (Саратов, 2012).

[28] Данченко В.И., Чунаев П.В. *Об оценке мнимых частей полюсов наипростейших дробей с нормированной производной на действительной оси*, Современ. методы теории функций и смежные пробл.: Матер. Воронежск. зимней матем. школы, с. 78 (2013).

[29] Данченко В.И. *О сходимости наипростейших дробей в* $L_p(\mathbb{R})$, Матем. сб. **201** (7), 53–66 (2010).

[30] Каюмов И.Р. *Сходимость рядов наипростейших дробей в* $L_p(\mathbb{R})$, Матем. сб. **202** (10), 87–98 (2011).

[31] Каюмов И.Р. *Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в* $L_p(\mathbb{R})$, Матем. заметки, **92** (1), 149–152 (2012).

[32] Каюмов И.Р. *Интегральные оценки наипростейших дробей*, Изв. вузов. Матем., № 4, 33–45 (2012).

[33] Каюмова А.В. *Сходимость рядов простых дробей в* L_p, Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **154** (1), 208–213 (2012).

[34] Протасов В.Ю. *Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта*, Изв. РАН. Сер. матем. **73** (2), 123–140 (2009).

[35] Бари Н.К. *Обобщение неравенства А.А. Маркова и С.Н. Бернштейна*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **18**, 159–176 (1954).

[36] Никольский С.М. *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Тр. МИАН **38**, 244–278 (1951).

[37] Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного* (Физматгиз, М., 1960).

[38] Chunaev P., Danchenko V. *Sharp inequalities of Jackson–Nikolskii type for rational functions*, arXiv:1611.03485 (2016).

[39] Данченко В.И., Додонов А.Е. *Оценки* L_p*-норм наипростейших дробей*, Изв. вузов. Матем., № 6, 9–19 (2014).

[40] Додонов А.Е. *Неравенства разных метрик для наипростейших дробей*, Международн. конф. по матем. теории управления и механ. Тез. докл. (г. Суздаль, 7–11 июля 2017), с. 65.

[41] Данченко В.И., Семин Л.А. *Точные квадратурные формулы и неравенства разных метрик для рациональных функций*, Сиб. матем. журн. **57** (2), 282–296 (2016).

[42] Danchenko V.I., Danchenko D.Ya. *Nikolskii type inequalities for simple partial fractions*, Комплексный анализ и его прилож.: матер. VII Петрозаводск. международн. конф. (Петрозаводск, 29 июня–5 июля 2014 г.), с. 33-37 (2014).

[43] Danchenko V.I., Chunaev P.V. *Approximation by simple partial fractions and their generalizations*, J. Math. Sci. **176** (6), 844–859 (2011).

[44] Данченко В.И., Данченко Д.Я. *О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов*, Теория функций, ее прилож. и смежные вопр.: Матер. школы-конф., посв. 130-летию Д.Ф. Егорова (Казань, 1999), с. 74-77 (1999).

[45] Данченко В.И., Данченко Д.Я. *О приближении наипростейшими дробями*, Матем. заметки **70** (4), 553–559 (2001).

[46] Косухин О.Н. *О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук (МГУ, М., 2005).

[47] Данченко В.И., Кондакова Е.Н. *Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями*, Тр. МИАН **270**, 86–96 (2010).

[48] Данченко В.И., Кондакова Е.Н. *Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями*, Тр. МИАН **278**, 49–58 (2012).

[49] Кондакова Е.Н. *Интерполяция наипростейшими дробями*, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информатика **9** (2), 30–37 (2009).

[50] Комаров М.А. *Критерий разрешимости задачи кратной интерполяции посредством наипростейших дробей*, Сиб. матем. журн. **55** (4), 750-763 (2014).

[51] Косухин О.Н. *Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей*, Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ. **4**, 54–58 (2001).

[52] Chui C.K. *On approximation in the Bers spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **40**, 438–442 (1973).

[53] Chui C.K., Shen X.C. *Order of approximation by electrostatic fields due to electrons*, Constr. Approx. **1** (1), 121–135 (1985).

[54] Korevaar J. *Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation*, Ann. Math. (2) **80** (2), 403–410 (1964).

[55] Korevaar J. *Limits of polynomials whose zeros lie in a given set*, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. **11**, 261–272 (1968).

[56] Бородин П.А. *Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы*, Матем. сб. **203** (11), 23–40 (2012).
[57] Бородин П.А. *Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы.* II, Матем. сб. **207** (3), 19–30 (2016).
[58] Уолш Д.Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области* (М., 1961).
[59] Демидович Б.П., Марон И. А *Основы вычислительной математики* (Физматлит, М. 1960).
[60] Комаров М.А. *Аппроксимация посредством дробно-линейных преобразований наипростейших дробей и их разностей*, Изв. вузов. Матем., № 3, 29–40 (2018).
[61] Данченко В.И. *Об аппроксимативных свойствах сумм вида* $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$, Матем. заметки **83** (5), 643–649 (2008).
[62] Комаров М.А. *Критерий наилучшего приближения констант наипростейшими дробями*, Матем. заметки **93** (2), 209–215 (2013).
[63] Комаров М.А. *Скорость наилучшего приближения констант наипростейшими дробями и альтернанс*, Матем. заметки **97** (5), 718–732 (2015).
[64] Komarov M.A. *Uniqueness of a simple partial fraction of best approximation*, J. Math. Sci. **175** (3), 284–308 (2011).
[65] Комаров М.А. *О неединственности наипростейшей дроби наилучшего равномерного приближения*, Изв. вузов. Матем., № 9, 28–37 (2013).
[66] Комаров М.А. *Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса*, Изв. РАН. Сер. матем. **79** (3), 3–22 (2015).
[67] Komarov M.A. *On the analog of Chebyshev theorem for simple partial fractions*, Комплексный анализ и его прилож.: матер. VII Петрозаводск. международн. конф. (Петрозаводск, 29 июня–5 июля 2014 г.), с. 65–69 (2014).
[68] Новак Я.В. *Апроксимаційні та інтерполяційні властивості найпростіших дробів*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук (ИМ НАН Украины, Киев, 2009).
[69] Komarov M.A. *Alternance and best uniform approximation of odd functions by simple partial fractions*, Комплексный анализ и его прилож.: матер. VIII Петрозаводск. междунар. конф. (Петрозаводск, 3–9 июля 2016 г.), с. 41–46 (2016).
[70] Комаров М.А. *Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса.* II, Изв. РАН. Сер. матем. **81** (3), 109–133 (2017).
[71] Бородин П.А., Косухин О.Н. *О приближении наипростейшими дробями на действительной оси*, Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ. **1**, 3–8 (2005).
[72] Бородин П.А. *Приближение наипростейшими дробями на полуоси*, Матем. сб. **200** (8), 25–44 (2009).
[73] Fryantsev A.V. *On numerical approximation of differential polynomials*, J. Math. Sci. **157** (3), 395–399 (2009).
[74] Фрянцев А.В. *О численной аппроксимации дифференциальных полиномов*, Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информатика **7** (2), 39–43 (2007).
[75] Фрянцев А.В. *О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений*, УМН **63** (3), 149–150 (2008).
[76] Чунаев П.В. *Об одном нетрадиционном методе аппроксимации*, Тр. МИАН **270**, 281–287 (2010).
[77] Чунаев П.В. *Об экстраполяции аналитических функций суммами вида* $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$, Матем. заметки **92** (5), 794–797 (2012).
[78] Danchenko V.I., Chunaev P.V. *Approximation by amplitude and frequency sums*, Joint CRM-ISAAC Conf. on Fourier Anal. and App. Theory: Abstracts (Bellaterra, 2013), p. 12 (2013).
[79] Chunaev P., Danchenko V. *Approximation by amplitude and frequency operators*, J. Approx Theory **207**, 1–30 (2016).
[80] Данченко В.И., Чунаев П.В. *Об аппроксимации посредством частотно-амплитудных сумм*, Международн. Казанск. летняя школа-конф. (Казань, 22–28 августа 2013 г.). Теория функций, ее прилож. и смежные вопр. **46**, 174–175 (2013).
[81] Kung J.P.S. *Canonical forms of binary forms: Variations on a theme of Sylvester. Invariant theory and tableaux* (Minneapolis, MN, 1988), IMA V. Math. Appl. **19**, 46–58 (1990).
[82] Lyubich Y.I. *Gauss type complex quadrature formulae, power moment problem and elliptic curves*, Матем. физ., анал., геом. **9** (2), 128-145 (2002).

[83] Lyubich Y.I. *The Sylvester–Ramanujan system of equations and the complex power moment problem*, Ramanujan J. **8**, 23–45 (2004).

[84] Prony R. *Sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures*, J. de l'Ecole Polytech., **2** (4), 28–35 (1795).

[85] Ramanujan S. *Note on a set of simultaneous equations*, J. Indian Math. Soc. **4**, 94–96 (1912).

[86] Sylvester J.J. *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants*, Phil. Magazine **2**, 391–410 (1851).

[87] Danchenko V.I., Vasilchenkova D.G. *Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase operators*, arXiv:1606.08716 (2016).

[88] Vasilchenkova D. G., Danchenko V. I. *Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase transformation*, Комплексный анализ и его прилож.: матер. VIII Петрозаводск. международн. конф. (Петрозаводск, 3–9 июля 2016 г.), с. 93–95.

[89] Васильченкова Д.Г., Данченко В.И. *Фильтрация тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами*, Международн. конф. по дифференц. уравнениям и динамическим системам: Тез. докл. (Суздаль, 8–12 июля 2016 г.), с. 40–41.

[90] Васильченкова Д.Г., Данченко В.И. *Оценки гармоник тригонометрических многочленов*, Международн. конф. по матем. теории управления и механике. Тез. докл. (Суздаль, 7–11 июля 2017 г.), с. 48–49 (2017).

[91] Белов А.С. *Некоторые свойства и оценки для неотрицательных тригонометрических полиномов*, Изв. РАН. Сер. матем. **67** (4), 3–20 (2003).

[92] Белов А.С., Конягин С.В. *Об оценке свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами*, Изв. РАН. Сер. матем. **60** (6), 31–90 (1996).

[93] Данченко В.И., Данченко Д.Я. *Оценки сумм двух гармоник тригонометрических многочленов*, Международн. конф. по матем. теории управления и механ. Тез. докл. (Суздаль, 7–11 июля 2017 г.), с. 62–63.

[94] Данченко В.И., Данченко Д.Я. *Выделение пар гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовым оператором*, XIII Международн. Казанск. летняя школа-конф. (Казань, 21–27 августа 2017 г.) "Теория функций, ее прилож. и смежные вопр.," с. 143–145 (2017).

[95] Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции* (Мир, М., 1984).

[96] Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p* (Мир, М., 1984).

[97] Dodonov A.E. *On convergence of series of simple partial fractions in $L_p(\mathbb{R})$*, J. Math. Sci. **210** (5), 648–653 (2015).

[98] Данченко В.И. *Оценки отклонения от действительной оси нулей многочлена с нормированной логарифмической производной*, Деп. ВИНИТИ, №2990-91 (1991).

[99] Данченко В.И. *Оценки мнимых частей полюсов логарифмических производных многочленов*, Деп. ВИНИТИ, №1695-92 (1992).

[100] Данченко В.И. *О скорости приближения к действительной оси полюсов нормированных логарифмических производных полиномов*, Докл. РАН **330** (1), 15–16 (1993).

[101] Warschawski S.E. *On differentiability at the boundary in conformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (4), 615–620 (1961).

[102] Золотарев Е.И. *Полное собрание сочинений. Вып.* 2, Физ.-матем. ин-т им. В.А. Стеклова АН СССР (Изд-во АН СССР, Л., 1932).

[103] Гончар А.А. *О задачах Е.И. Золотарева, связанных с рациональными функциями*, Матем. сб. **78** (120) (4), 640–654 (1969).

[104] Данченко В.И. *Интегральные оценки длин линий уровня рациональных функций и задача Е.И. Золотарева*, Матем. заметки **94** (3), 331–337 (2013).

[105] Буланов А.П. *Асимптотика для наименьших уклонений функции* $\operatorname{sign} x$ *от рациональных функций*, Матем. сб. **96** (138) (2), 171–188 (1975).

[106] Данченко В.И. *О разделении особенностей мероморфных функций*, Матем. сб. **125** (167) (2(10)), 181–198 (1984).

[107] Гончар А.А., Григорян Л.Д. *Об оценках норм голоморфной составляющей мероморфной функции*, Матем. сб. **99**, 634–638 (1976).

[108] Гончар А.А., Григорян Л.Д. *Об оценке компонент ограниченных аналитических функций*, Матем. сб. **132**, 299–303 (1987).

[109] Григорян Л.Д. *Оценка нормы голоморфных составляющих мероморфных функций в областях с гладкой границей*, Матем. сб. **100** (142) (1(5)), 156–164 (1976).

[110] Новак Я.В. *О наилучшем локальном приближении наипростейшими дробями*, Матем. заметки **84** (6), 882–887 (2008).

[111] Кондакова Е.Н. *Особые случаи интерполяции посредством наипростейших дробей*, Международн. конф. по дифференц. уравнениям и динамическим системам. Тез. докл. (Суздаль, 2010 г.), с. 105–106 (2010).

[112] Komarov M.A. *Interpolation of rational functions by simple partial fractions*, J. Math. Sci. **181** (5), 600–612 (2012).

[113] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры* (Физматлит, М., 1963).

[114] Новак Я.В. *Критерій існування неперервних похідних у функцій з класу L_p на відрізку в термінах локальних наближень найпростішими дробами*, Доповіді НАН України, **5**, 36–40 (2009).

[115] Морозов А.Н. *Об одном описании пространств дифференцируемых функций*, Матем. заметки **70** (5), 758–768 (2001).

[116] Komarov M.A. *Examples related to best approximation by simple partial fractions*, J. Math. Sci. **184** (4), 509–523 (2012).

[117] Komarov M.A. *Sufficient condition for the best uniform approximation by simple partial fractions*, J. Math. Sci. **189** (3), 482–489 (2013).

[118] Данченко В.И., Данченко Д.Я. *О единственности наипростейшей дроби наилучшего приближения*, Международн. конф. по дифференц. уравнениям и динамическим системам. Тез. докл. (Суздаль, 2010 г.), с. 71–72 (2010).

[119] Новак Я.В. *Критерій типу Колмогорова для найпростіших дробів*, Збірник праць Ін-ту матем. НАН України **7** (2), 385–392 (2010).

[120] Колмогоров А.Н. *Замечание по поводу многочленов П.Л. Чебышева, наимение уклоняющихся от заданой функции*, УМН **3** (1), 216–221 (1948).

[121] Komarov M.A. *An analog of the Haar condition for simple partial fractions*, J. Math. Sci. **208** (2), 174–180 (2015).

[122] Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации* (Наука, М. 1965).

[123] Минк Х. *Перманенты* (Мир, М. 1982).

[124] Danchenko V.I., Dodonov A.E. *Estimates for exponential sums. Applications*, J. Math. Sci. **188** (3), 197–206 (2013).

[125] Крылов В.И. *Приближенное вычисление интегралов* (Наука, М., 1967).

[126] Ash J.M., Janson S., Jones R.L. *Optimal numerical differentiation using N function evaluations*, Calcolo **21** (2), 151–169 (1984).

[127] Lyness J.N. *Differentiation formulas for analytic functions*, Math. Comp. **22**, 352–362 (1968).

[128] Lyness J.N., Moler C.B. *Numerical differentiation of analytic functions*, SIAM J. Numer. Anal. **4**, 202–210 (1967).

[129] Salzer H.E. *Optimal points for numerical differentiation*, Num. Math. **2** (1), 214–227 (1960).

[130] Salzer H.E. *Formulas for best extrapolation*, Num. Math. **18**, 144–153 (1971).

[131] Nigmatyanova Yu.M. *Numerical analysis of the method of differentiation by means of real h-sums*, J. Math. Sci. **224** (5), 735–743 (2017).

Владимир Ильич Данченко

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, д. 87, г. Владимир, 600000, Россия,

`e-mail:` vdanch2012@yandex.ru

Михаил Анатольевич Комаров

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, д. 87, г. Владимир, 600000, Россия,

`e-mail:` kami9@yandex.ru

Петр Владимирович Чунаев

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, д. 87, г. Владимир, 600000, Россия,

`e-mail:` chunayev@mail.ru

V.I. Danchenko, M.A. Komarov, and P.V. Chunaev

Extremal and approximative properties of simple partial fractions

Abstract. In approximation theory, logarithmic derivatives of complex polynomials are called *simple partial fractions* (SPF) as suggested by E.P. Dolzhenko. Many solved and unsolved extremal problems related to SPF are traced back to works of G. Boole, A.J. Macintyre, W.H.J. Fuchs, J.M. Marstrand, E.A. Gorin, A.A. Gonchar, E.P. Dolzhenko. At present, many authors systematically develop methods for approximation and interpolation by SPF and several their modifications. Simultaneously, related problems, being of independent interest, arise for SPF: inequalities of different metrics, estimation of derivatives, separation of singularities, etc.

We systematize some of these problems which are known to us in Introduction of this survey. In the main part, we formulate principal results and outline methods to prove them if possible.

Keywords: Gorin–Gelfond problems, simple partial fractions, amplitude and frequency operators, alternance, best approximations, rational functions, approximation, interpolation, extrapolation.

Vladimir Il'yich Danchenko

Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs,
87 Gor'kogo str., Vladimir, 600000 Russia,

`e-mail:` vdanch2012@yandex.ru

Mikhail Anatol'evich Komarov

Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs,
87 Gor'kogo str., Vladimir, 600000 Russia,

`e-mail:` kami9@yandex.ru

Petr Vladimirovich Chunaev

Vladimir State University named after Alexander and Nikolai Stoletovs,
87 Gor'kogo str., Vladimir, 600000 Russia,

`e-mail:` chunayev@mail.ru