Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Э. В. Антоненко, Критерии жесткости шпангоутов в теории оболочек, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 47–53

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 178.205.19.235
7 июня 2024 г., 16:16:25

Расчетные модели	I	П	Ш	
			а	б
Оценки для параметров конструкции (номер соотношения)	(I) (7) (8)	(I) (7)	(I) (9)	(I)

Литература

I. Костырко В.В., Красовский В.Л. Исследование влияния эксцентриситета приложения осевой сжимающей нагрузки на устойчивость стрингерных оболочек // Гидроаэромеханика и теория упругости. - 1988. - С.75 - 81.

2. Вербоноль В.М. Устойчивость стрингерных оболочек при учете моментности докритического состояния // Изв. вузов. Строительство и архитектура. - 1988. - № I. - С.32 - 35.

3. Dowling P.J., Harding T.E., Agelidis N., Fany W. Buckling of ortogonally stiffened cylindrical shells used in offshore engineering // Buckling of shell: Proc. of a state of the Art Collogium. - 1982. - P.239.

Э.В.Антоненко

КРИТЕРИИ ЖЕСТКОСТИ ШПАНГОУТОВ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Постановка задачи. Термин "абсолютно жесткий шпангоут" обозначает отсутствие перемещений обшивки в месте размещения шпангоута. Математическое описание такого шпангоута представляется, например, в виде $EI=\infty$ (EI - изгибная жесткость). В реальных конструкциях шпангоуты имеют конечную жесткость. Расчеты оболочек с абсолютно жесткими шпангоутами существенно проще расчетов с учетом их упругости. Жесткость ребер может существенно влиять на напряженно-деформированное состояние, критические нагрузки и частоты свободных колебаний [I - 6].

Назовем конечную величину жесткости, при которой шпангоут в данной оболочке ведет себя как абсолютно жесткий, предельной жесткостью B_*. Применение шпангоутов с жесткостью $B>B_*$ не может изменять состояния оболочки. Поэтому определение предельных жесткостей связано с весом (материалоемкостью) конструкции, что особенно важно для оболочек летательных аппаратов.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние (НДС), устойчивость при радиальном и осевом сжатии, частоты свободных колебаний цилиндрических конструктивно ортотропных оболочек с упругими в своих плоскостях краевыми шпангоутами. Получим критерии жесткости шпангоутов.

Метод исследования. Воспользуемся методом [6] и условиями совместности деформации обшивки и шпангоутов. Одно из них – равенство радиальных перемещений обшивки и шпангоута, $W = W_ш$.

Радиальные перемещения оболочки представим в виде

$$W(X,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(X)\cos n\varphi\cos\omega t\ , \tag{I}$$

где функции продольной координаты $\Psi_n(X)$ определяются из дифференциального уравнения задачи и граничных условий, φ – угловая координата, n – числа натурального ряда, ω – частота, t – время.

Дифференциальные уравнения задач теории оболочек получим энергетическим методом с использованием уравнения Эйлера – Лагранжа вариационной задачи

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\Psi_n(X)}-\frac{d}{dX}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial\Psi_n'(X)}\right]+\frac{d^2}{dX^2}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial\Psi_n''(X)}\right]=0\ , \tag{2}$$

где $\Gamma=U-A$ – потенциальная энергия единицы длины оболочки, U – энергия деформации, A – потенциал внешних сил,

$$U=\frac{1}{2}\oint(m_1\chi_1+\sigma_1h_1\varepsilon_1+m_2\chi_2+\sigma_2h_2\varepsilon_2)R\,d\varphi\ , \tag{3}$$

m – изгибающие моменты, χ – изменения кривизн, σ – нормальные напряжения, ε – относительные деформации, h – приведенные толщины. Индексы I и 2 соответствуют осевой и угловой координатам. Штрихами в (2) обозначено дифференцирование по X. При осесимметричных деформациях в (3) удерживаются первые два слагаемых, при асимметричных – остальные.

Условия $W=W_ш$ описываются граничными условиями смешанной вариационной задачи

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\Psi_n'(X)}-\frac{d}{dX}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial\Psi_n''(X)}\right]\pm\frac{\partial\Gamma_ш}{\partial\Psi_n(X)}\bigg|_{X=0;L}=0\ , \tag{4}$$

где $\Gamma_ш$ – потенциальная энергия краевых шпангоутов. В осе- и неосесимметричных задачах

$$\Gamma_ш^0 = \oint \frac{N^2}{2E\ell} R d\varphi , \quad \Gamma_ш^a = \oint \frac{M^2}{2EI} R d\varphi ,$$

где N и M – нормальные усилия и моменты в поперечных сечениях шпангоута, жесткости которых $E\ell$ и EI.

Все задачи описываются дифференциальными уравнениями четвертого порядка относительно $\Psi_n(X)$. Четыре граничных условия в каждой задаче дают систему уравнений относительно постоянных интегрирования. При решении этих систем появляются критерии жесткости шпангоута B. Варьируя B от 0 до ∞ устанавливаются величины B_*, при которых НДС, критические нагрузки и частоты свободных колебаний отличаются от соответствующих характеристик при $B=\infty$ на величину менее 10 %.

<u>Напряженно-деформированное состояние</u>. При осе- и асимметричных деформациях оболочки имеем дифференциальные уравнения

$$\Psi_n^{IV}(X) + 4K_n^4 \Psi_n(X) = T_n(X) . \tag{5}$$

В осесимметричной задаче теории оболочек $n = 0$.

При осесимметричных и асимметричных деформациях

$$K_0^4 = \frac{E_2 h_2}{4D_1 R^2} , \quad K_n^4 = \frac{n^4(n^2-1)^2 D_2}{4E_1 h_1 R^6} ,$$

$$T_0(X) = \frac{p(X)}{D_1} , \quad T_n(X) = 4K_n^4 \Psi_{n0}(X) ,$$

где Ψ_{n0} – грузовые члены, $p(X)$ – осесимметричная радиальная нагрузка.

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\Psi_n(X) = \Psi_{n4}(X) + \sum_{i=1}^{4} C_{in}\Phi_{in} ,$$

где частное решение в соответствующих задачах

$$\Psi_{04}(X) = \frac{p(X)}{4K_0^4 D_1} , \quad \Psi_{n4}(X) = \Psi_{n0}(X) .$$

Постоянные интегрирования C_{in}, усилия и перемещения, зависящие от C_{in} и Φ_{in}, оказываются функциями $\Psi_{n4}(X)$ и B

$$B^0 = \frac{2K_0 E\ell}{E_2 h_2} , \quad B^a = \frac{2K_n EI}{D_2} . \tag{6}$$

Например, для осесимметричной задачи перерезывающая сила $\bar{Q}_0$ и продольный изгибающий момент $m_1 = m_0$ в сечениях оболочки у шпангоута имеют вид

$$Q_0 = -\frac{p}{K}\,\frac{1}{1+B^{-1}} = -\frac{p}{K}\,\bar{Q}\,, \quad m_c = \frac{p}{K^2}\,\frac{1}{2(1+B^{-1})} = \frac{p}{K^2}\,\bar{m}\,.$$

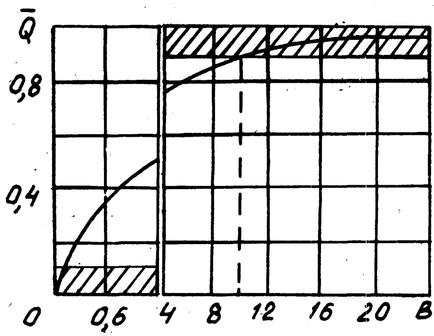

Рис. I

Для абсолютно жестких шпангоутов $B=\infty$, $\bar{Q}_* = 1$, $\bar{m}_* = 0,5$, что совпадает с результатами С.П.Тимошенко. Зависимость $\bar{Q} = f(B)$ приведена на рис.I, где зоны отклонения $\bar{Q}$ от $\bar{Q}_*$ на величину IO % заштрихованы. Из этой зависимости следует, что жесткими можно считать шпангоуты при $B_* \geq 10$, абсолютно податливыми – при $B_* \leq 0,1$.

Величина B_* была подтверждена тензометрированием нагруженной внутренним давлением оболочки со сменными шпангоутами, имеющими $B = 0,I \div 50$, анализом результатов исследования неосесимметричного НДС [5] и эксперимента автора.

Устойчивость оболочки при действии радиального давления. Из (2) следует

$$\varphi_n^{IV}(X) - K_n^4 \varphi_n(X)\,, \quad K_n^4 = \frac{n^4(n^2-1)^2}{E_1 h_1 R^3}\left[p_* - \frac{(n^2-1)D_2}{R^3}\right]\,, \tag{7}$$

откуда величина критического давления

$$p_* = \frac{(n^2-1)D_2}{R^3}\left[1 + \alpha^4 \frac{E_1 h_1 R^6}{n^4(n^2-1)^2 D_2 L}\right]\,, \quad \alpha = K_n L\,.$$

Условия (4) дают выражения

$$\varphi_n^{III}(X) \pm B L^{-3} \varphi_n(X)\Big|_{X=0;\,L} = 0\,, \tag{8}$$

где

$$B = \frac{n^4(n^2-1)^2 EI}{E_1 h_1 R^3}\left(\frac{L}{R}\right)^3. \tag{9}$$

Для ряда граничные условий в [I] получены трансцендентные уравнения $F(\alpha,B)=0$, решения которых дают зависимости $\alpha=f(B)$. Из их анализа следует, что при $B_*\geq 500$ шпангоуты можно считать абсолютно жесткими. При этом из полученных зависимостей как частные случаи следуют формулы критического давления П.Ф.Папковича и работы [6].

Устойчивость оболочки при осевом сжатии. Критические напряжения σ_*^0 при осесимметричной и асимметричной формулах потери устойчивости σ_*^a оказываются различными. Из (2) следуют дифференциальные уравнения

$$\varphi_n^{IV}(X)+2\delta^2\varphi_n''(X)-r^4\varphi_n(X)=0\,, \tag{I0}$$

где при осе- и асимметричных деформациях

$$2\delta^2=\sigma_*^0\frac{h_1}{D_1}\,;\quad r^4=\frac{E_2h_2}{D_1R^2}\,,$$

$$2\delta^2=\sigma_*^a\,\frac{n^2(n^2+1)}{E_1R^2}\,,\quad r^4=\frac{n^4(n^2-1)^2D_2}{E_1h_1R^6}\,.$$

Граничные условия (4) дают зависимости

$$\varphi_n'''(X)+2\delta^2\varphi_n'(X)\pm BL^{-3}\varphi_n(X)\Big|_{X=0;L}=0\,, \tag{II}$$

где

$$B^0=\frac{EfR}{D_1}\left(\frac{L}{R}\right)^3\,,\quad B^a=\frac{n^4(n^2-1)^2EI}{E_1h_1R^3}\left(\frac{L}{R}\right)^3. \tag{I2}$$

Вид решения уравнения (I0) зависит от соотношения коэффици - ентов δ и r. Автором исследованы три области решения $\delta\gtrless r$. Для случая $\delta>r$ имеем

$$\sigma_*^0=K_*\sqrt{\frac{E_2h_2D_1}{h_1^2R^2}}\,,\quad \sigma_*^a=K_*\frac{n^2-1}{n^2+1}\sqrt{\frac{E_1D_2}{h_1R^2}}\,, \tag{I3}$$

где

$$K_*=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\,,\quad \alpha=L\sqrt{\frac{r^2-\delta^2}{2}}\,,\quad \beta=L\sqrt{\frac{r^2+\delta^2}{2}}\,.$$

Для ряда граничных условий получены уравнения $F(B,\alpha,\beta)=0$, которые совместно с уравнением связи параметров оболочки

$$\bar{L} = \sqrt{\alpha\beta} = \frac{L}{R}\sqrt[4]{\frac{E_2 h_2 R^2}{D_1}}$$

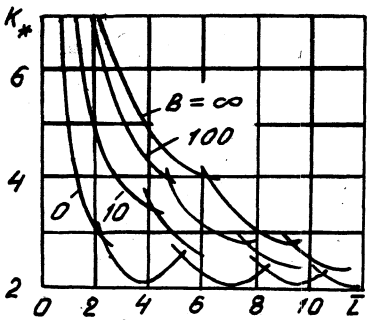

Рис.2

позволяют установить связь $K_* = f(\bar{L})$. Для случая защемления краев оболочки на упругих шпангоутах такая связь приведена на рис.2, откуда видно, что для коротких оболочек ($\bar{L} < 12$) критические напряжения зависят от жесткости шпангоутов и длины оболочки. При $\bar{L} \to \infty$, $K_* = 2$ для гладких изотропных оболочек из (13) получим как частный случай формулу

$$\sigma_* = \sigma_*^0 = \sigma_*^a = \kappa E \frac{h}{R},$$

где $K = 0{,}6$ при значении коэффициента Пуассона, равном 0,3.

<u>Свободные осе- и асимметричные колебания</u>. При осесимметричных деформациях получим уравнение (7), где

$$K_0^4 = \omega^2 \frac{\rho h_\Sigma}{D_1} - \frac{E_2 h_2}{D_1 R^2}, \quad \omega^2 = \frac{E_2 h_2}{\rho h_\Sigma R^2}\left(1 + \alpha^4 \frac{D_1 R^2}{E_2 h_2 L^4}\right). \tag{14}$$

При асимметричных деформациях получим уравнение (10), где

$$2\nu^2 = \omega^2 \frac{\rho h_\Sigma}{E_1 h_1}, \quad r^4 = \frac{n^4(n^2-1)^2}{E_1 h_1 R^6} - \omega^2 \frac{\rho h_\Sigma n^2(n^2+1)}{E_1 h_1 R^2}. \tag{15}$$

Граничные условия (4) дают зависимости (11), в которых

$$B^0 = \frac{E f R}{D_1}\left(\frac{L}{R}\right)^3\left(1 + \omega^2 \frac{\rho R^2}{E}\right), \quad B^a = \frac{n^4(n^2-1)^2 E I}{E_1 h_1 R^3}\left(\frac{L}{R}\right)^3\left[1 - \omega^2 \frac{(n^2+1)\rho f R^4}{n^2(n^2-1)EI}\right]. \tag{16}$$

Используя трансцендентные уравнения $F(B, \alpha, \beta) = 0$ и связь параметров оболочки, например, для ситуации $\nu > r$, получим формулу для расчета ω^a

$$\omega^2 = \frac{E_1 h_1}{\rho h_\Sigma R^2}\left[\frac{\left(\alpha \frac{R}{L}\right)^4 + \frac{D_2}{E_1 h_1 R^2} n^4(n^2-1)^2}{\left(\alpha\frac{R}{L}\right)^2 + n^2(n^2+1)}\right]. \tag{17}$$

Результаты расчетов по предлагаемым формулам совпадают для частных случаев с результатами [4,6] и экспериментов других авторов.

Литература

1. Антоненко Э.В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикл. механика. – 1975. – № 6. – С.44 – 50.

2. Антоненко Э.В., Зоголь В.Н. и др. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек с упруго закреплёнными краями // Прикл. механика. – 1980. – № 10. – С.41 – 46.

3. Антоненко Э.В. Частоты свободных колебаний гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек с упруго закрепленными краями // Прикл. механика. – 1989. – № 8. – С.122 – 126.

4. Заруцкий В.А. Приближенные формулы для вычисления минимальных собственных частот колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1977. – № 5. – С.43 – 51.

5. Кан С.Н., Антоненко Э.В. Расчет круговых цилиндрических оболочек на изгиб // Расчет пространственных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1964. – Вып.9. – С.161 – 186.

6. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.

Г.Д.Гавриленко, В.И.Мацнер, В.Н.Вайсман

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СПИРАЛЬНЫМ ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Традиционные способы подкрепления оболочек продольно-поперечным набором позволяют добиться определенного уровня повышения несущей способности конструкций. Дальнейшее увеличение ее возможно при использовании нетрадиционных типов подкрепляющего набора, в частности спирального. Если для цилиндрических оболочек этот вопрос в какой-то мере освещен в литературе [1 – 4], то для конических оболочек таких данных нет.

Необходимо разработать методику расчета для конических оболочек и оценить эффективность спирального подкрепления для них.

Рассматривается коническая оболочка со спиральным подкреплением.