П. В. Морозов, А. Т. Фоменко, Новые результаты топологической классификации интегрируемых систем в механике твердого тела, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 107–120

П.В. Морозов, А.Т. Фоменко

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Аннотация

В данной работе излагаются новые результаты, касающиеся лиувиллевой классификации некоторых случаев интегрируемости в механике твердого тела.

Abstract

A.T. Fomenko, P.V. Morozov **New results on topological classification of integrable systems in the mechanics of rigid body**

The present paper contains exposition of new results on Liouvillian classification of integrability cases in the mechanics of rigid body.

Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектическом многообразии

1. Понятие интегрируемой гамильтоновой системы. Рассмотрим гладкое $2n$-мерное симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) с заданной на нем гладкой функцией H. Динамическую систему $v = \operatorname{sgrad} H$ называют гамильтоновой динамической системой с n степенями свободы, а функцию H — ее гамильтонианом. (Векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ определяется тождеством $\omega(l, \operatorname{sgrad} H) = l(H)$, где l — произвольный вектор касательного пространства, а $l(H)$ — производная функции H вдоль l.) В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^{2n})$ такую систему можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, i = 1, \ldots, 2n.$$

Здесь $\{,\}$ — скобка Пуассона на многообразии M^{2n}, определяемая симплектической структурой ω посредством тождества:

$$\{f,g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g).$$

Определение 1. *Гамильтонова система v называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует такой набор гладких функций $f_1, \ldots, f_n$, что*

1) *$f_1, \ldots, f_n$ — первые интегралы v (эквивалентно, $\{f_i, H\} = 0$ при любом i на всем M),*

2) *они функционально независимы, то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,*

3) *$\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j,*

4) *векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ полны.*

Часто для краткости вполне интегрируемые по Лиувиллю системы называют просто *интегрируемыми.*

Определение 2. *Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \ldots, f_n$.*

2. Теорема Лиувилля. Топология вполне интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности совместной регулярной поверхности уровня ее первых интегралов полностью описывается теоремой Лиувилля. Обозначим поверхность уровня за T_ξ:

$$T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, \ldots n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ.

Теорема 1. (Теорема Лиувилля) *Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ и T_ξ — регулярная совместная поверхность уровня интегралов f_1, f_2, $\ldots$, f_n. Тогда:*

1) *T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots \operatorname{sgrad} f_n$.*

2) *Если многообразие T_ξ компактно, то каждая компонента связности T_ξ диффеоморфна n-мерному тору T^n. Такие торы называются торами Лиувилля.*

3) *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n.*

4) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \ldots, s_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, называемых переменные действие-угол, со свойствами:

а) *$s_1, \ldots, s_n$ — координаты на диске D^n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

б) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.

в) *Переменные действие s_i являются функциями интегралов $f_1, \ldots, f_n$.*

г) *В переменных действие-угол гамильтонов поток выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U, и гамильтоновы уравнения принимают вид $\dot{s}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \ldots, s_n)$, $i = 1, \ldots i = n$.*

Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство теоремы можно найти в [1].

3. Типы эквивалентностей интегрируемых гамильтоновых систем. В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматриваются два основных типа их изоморфизмов: траекторная и лиувиллева эквивалентности. Эти типы, в свою очередь, распадаются на подтипы, но мы здесь не будем вдаваться в эти тонкости и ограничимся двумя определениями.

Определение 3. *Две интегрируемые гамильтоновы системы (M, v) и (M', v') называются топологически траекторно эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\Phi : M \to M'$, переводящий ориентированные траектории первой системы в ориентированные траектории второй системы.*

Заметим, что здесь не требуется сохранения параметра (времени) на траекториях.

Определение 4. *Две интегрируемые гамильтоновы системы (M, v) и (M', v') называются лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\Phi : M \to M'$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.*

В данной работе мы изложим новые результаты, касающиеся прежде всего лиувиллевой классификации некоторых случаев интегрируемости в механике твердого тела. Основные известные на данный момент результаты траекторной классификации изложены в [1], где также можно найти ссылки и на другие работы по этой тематике.

Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

Будем далее рассматривать интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть случай $n = 2$. Тогда интегрируемость системы на M^4 гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом H интеграла f. В этом разделе мы опишем основные этапы построения известного инварианта Фоменко-Цишанга (или меченой молекулы) [1], который описывает глобальную структуру лиувиллевого слоения на неособых трехмерных изоэнергетических подмногообразиях фазового пространства M^4 интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

4. Изоэнергетические поверхности. Изоэнергетическая поверхность есть трехмерная поверхность вида $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$. Сразу ограничимся рассмотрением лишь тех h, при которых, во-первых, Q_h^3 компактна и, во-вторых, $dH \neq 0$ всюду на Q_h^3. Тем самым мы гарантируем, что Q_h^3 является гладким компактным подмногообразием в M^4, а векторное поле $v = \operatorname{sgrad} H$ нигде не обращается в нуль.

Наряду с траекторной и лиувиллевой эквивалентностями на всем симплектическом многообразии мы будем говорить о траекторной и лиувиллевой эквивалентности на избранных изоэнергетических поверхностях. Для того чтобы строго ввести эти понятия, достаточно в определениях 3 и 4 заменить M^4 на Q^3.

Определение 5. *Точку $x \in Q^3$ будем называть критической, если векторы $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} f$ в ней линейно зависимы.*

Заметим, что сингулярные совместные поверхности уровня интегралов T_ξ в Q^3 — это в точности те поверхности, на которые попали критические точки, и теорема Лиувилля к ним не применима.

Сделаем еще одно предположение о изоэнергетической поверхности, касающееся свойств критических точек на Q^3. Легко показать, что критические точки на Q^3 не могут быть изолированными. Поэтому предполагать, что это морсовские точки, бессмысленно. Однако в случае динамических систем существует естественный аналог этого понятия.

Определение 6. *Критическая точка $x \in Q^3$ называется боттовской, если ограничение дополнительного интеграла f на двумерную трансверсаль к вектору $\operatorname{sgrad} H$ в точке x является функцией Морса.*

Определение 7. *Дополнительный интеграл f называется боттовским для данной изоэнергетической поверхности Q^3, если все критические точки на этой поверхности являются боттовскими.* Отметим, что является или не является критическая точка боттовской, зависит и от того, насколько удачно выбран дополнительный интеграл. Именно этим мотивировано определение . В реальных интегрируемых задачах физики и механики типична ситуация, когда найденный дополнительный интеграл f является боттовским для все h, кроме некоторого конечного набора значений. Случаев же, когда неботтовские значения h отсутствуют полностью, известно крайне мало.

5. Структура критических множеств на изоэнергетической поверхности. Условие боттовости накладывает существенное ограничение на структуру множества критических точек в Q^3. Действительно, каждая компонента его связности должна быть гладким компактным подмногообразием размерности 1 или 2. Из условия $v = \operatorname{sgrad} H \neq 0$, следует, что на этих подмногообразиях существует гладкое векторное поле, отличное от нуля в каждой точке. Следовательно, это или окружность, или двумерный тор, или бутылка Клейна. Оказывается, появление критических множеств двух последних типов связано с неудачным выбором дополнительного интеграла и от них можно избавиться, пользуясь некоторой стандартной процедурой, описанной в [1]. Действительно «неустранимыми» критическими подмногообразиями являются только окружности. Далее мы будем рассматривать только этот случай.

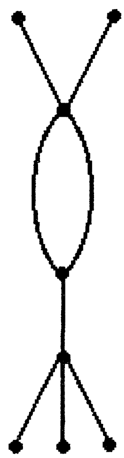


Рис. 1

6. Окрестности сингулярных слоев лиувиллевого слоения на изоэнергетической поверхности.

Изоэнергетическая поверхность Q^3 представляет из себя однопараметрическое семейство совместных поверхностей уровня T_ξ интегралов системы H и f, запараметризованное значением второго интеграла f. Если стянуть каждую компоненту связности поверхностей T_ξ в точку, то мы получим некоторый одномерный граф — базу слоения Лиувилля (см. рис. 1). Над каждым ребром такого графа висит многообразие диффеоморфное $T^2 \times (0,1)$. Вершинам графа соответствуют сингулярные слои. Типичной является ситуация, когда при переходе через критический уровень число компонент связности T_ξ меняется.

Будем рассматривать трехмерную окрестность особого слоя в Q^3. Оказывается, что в боттовском случае с точностью до лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных перестроек (бифуркаций), если фиксировать количество компонент связностей до и после сингулярного слоя.

Определение 8. *Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется 3-атомом.*

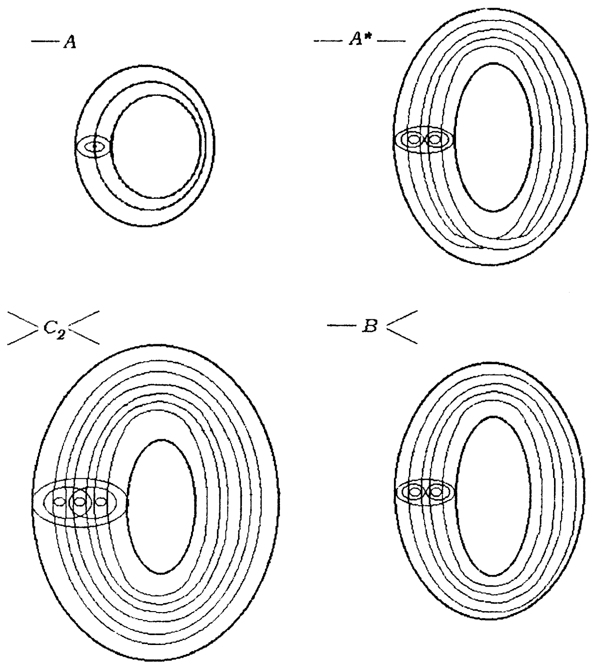


Рис. 2

По сути, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой лиувиллевого слоения, содержащего ровно один сингулярный слой. Край такого многообразия состоит из некоторого числа несвязных торов Лиувилля. В [1] изложен алгоритм, позволяющий явно перечислить все 3-атомы, для данного числа компонент связности. 3-атомы принято обозначать заглавными латинскими буквами с натуральными индексами и звездочками. Четыре наиболее простых и типичных 3-атома (A, A^*, B, и C_2) изображены на рис. 2.

Если теперь в вершинах графа на рис. 1 поставить подходящие 3-атомы, то мы получим так называемую *грубую молекулу*. Грубая молекула несет информацию о базе слоения Лиувилля, а также позволяет локально восстановить его структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев.

Полное и последовательное доказательство фактов, изложенных в этом пункте, можно найти в [1]. Здесь мы сформулируем основную теорему, на которую опираются эти доказательства.

Теорема 2. (А. Т. Фоменко [1])

1) *Трехмерная окрестность сингулярного слоя лиувиллевого слоения является расслоением Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют тип (2,1).*

2) *Если особых слоев у этого расслоения нет, то окрестность представима в виде прямого произведения $P^2 \times S^1$, где P^2 — ориентируемая поверхность с краем из несвязных окружностей.*

3) *Структура расслоения Зейферта согласована со структурой лиувиллевого слоения, в том смысле, что всякий слой расслоения Зейферта (окружность) целиком лежит на некотором слое слоения Лиувилля.*

7. Склейка изоэнергетической поверхности из 3-атомов. 3-атомы описывают локальную структуру слоения Лиувилля в окрестности особого слоя. Для того, чтобы восстановить структуру слоения глобально на всем Q^3, нужно знать гомеоморфизмы, по которым склеены граничные торы 3-атомов. Если на каждом из пары склеиваемых торов выбрать базисные циклы, то склеивающий гомеоморфизм задается целочисленной матрицей 2×2 с определителем ± 1. Но базисы можно выбирать многими разными способами.

Оказывается, однако, что всякий 3-атом определяет на своих граничных торах некоторый цикл, называемый однозначно определенным циклом данной бифуркации. В случае минимаксного атома A это цикл, который стягивается в точку при приближении к критической окружности. А в случае всех остальных (седловых) атомов $(A^*, B, C_2, \dots)$ это цикл, изотопный слоям расслоения Зейферта.

Выделить подобным образом какой-то один цикл из множества кандидатов на вторую позицию в базисе не удается. Поэтому ограничиваются выбором сразу множества циклов, обладающих некоторыми общими свойствами. Вместе с первым циклом они составляют класс так называемых *допустимых систем координат* для данного атома. Точное определение см. в [1]. При этом группа замен внутри класса допустимых систем координат имеет уже очень простую структуру. Инвариантами действия этой группы на множестве матриц склеек являются *числовые метки* r, ε и n. Они могут быть легко вычислены по этим матрицам.

Пара меток r и ε возникает на каждом ребре молекулы, метка n может возникнуть на седловом атоме или сразу на группе седловых атомов, называемых семьей.

Числовые метки имеют естественный топологический смысл.

Так метка $r \in \{\mathbb{Q} \cap [0,1), \infty\}$ на ребре определяет беззнаковый индекс пересечения однозначно определенных циклов бифуркаций, которые соединены этим ребром. Метка $\varepsilon \in \{1, -1\}$ говорит о сохранении или изменении ориентации критических окружностей двух бифуркаций (когда такое сравнение корректно определено). А метка $n \in \mathbb{Z}$ суть число Эйлера расслоения Зейферта, образованного семьей, которой соответствует эта метка.

Наконец дадим определение инварианта Фоменко-Цишанга и сформулируем основную теорему этого пункта.

Определение 9. *Грубая молекула W, снабженная метками r_i, ε_i и n_k, называется инвариантом Фоменко-Цишанга или просто меченой молекулой.*

Теорема 3. (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [1]) *Две интегрируемые гамильтоновы системы (v, Q^3) и (v', Q'^3) лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченые молекулы совпадают.*

Результаты лиувиллевой классификации интегрируемых систем в механике твердого тела

8. Фазовое пространство. Определим пару (M^4, ω), возникающую в механике твердого тела.

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций f и g:

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[\ ,\ ]$ — коммутатор в алгебре Ли $e(3)$.

В естественных координатах:

$$S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$$

на пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k \quad \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k \quad \{R_i, R_j\} = 0,$$

где

$$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i - j)(j - k)(k - i).$$

Пусть на $e(3)^*$ задана функция Гамильтона $H(S, R)$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\}. \tag{1}$$

Функции $f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$ и $f_2 = S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3$ лежат в ядре скобки Ли-Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (1). Несложно показать, что на совместных четырехмерных поверхностях уровня функций f_1 и f_2:

$$M_g^4 = \{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1, f_2 = S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3 = g\},$$

ограничение системы (1) является гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Для почти всех значений g эти поверхности являются неособыми гладкими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2. Симплектическая структура задается на M_g^4 ограничением скобки Ли-Пуассона из объемлющего пространства $e(3)^*$. Система будет интегрируемой, если удастся найти функционально независимую с H функцию $F(S, R)$, такую что $\{H, F\} = 0$.

Итак, каждая функция $H(S, R)$, заданная на всем $e(3)^*$, порождает однопараметрическое семейство гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Параметр g имеет физический смысл постоянной площадей.

9. Классические случаи интегрируемости: случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Укажем конкретный вид гамильтонианов H и дополнительных интегралов F для случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской:

1. Случай Эйлера:

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3},$$

$$F = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

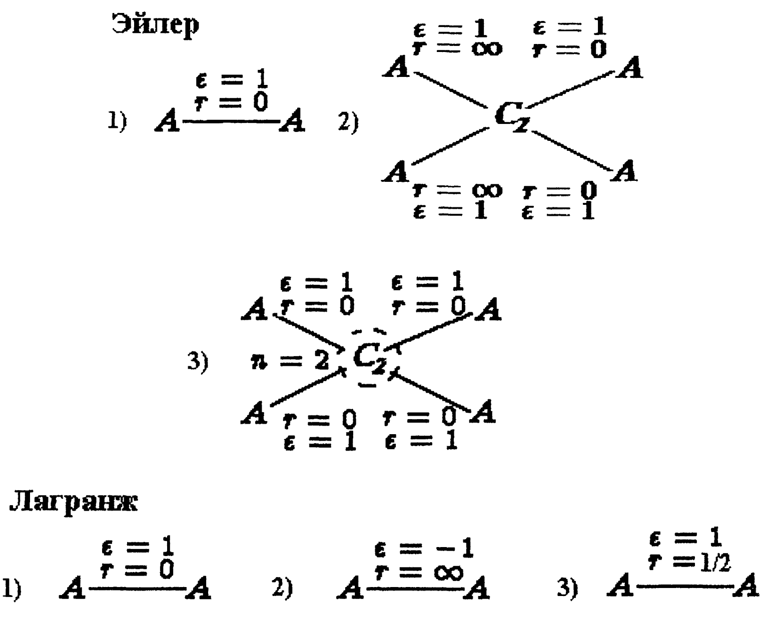


Рис.3

2. Случай Лагранжа:

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + \frac{S_3^2}{A}) + R_3,$$

$$F = S_3,$$

3. Случай Ковалевской:

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{A} + a_1 R_1 + a_2 R_2,$$

$$F = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2A} + a_2 R_2 - a_1 R_1\right)^2 + \left(\frac{S_1 S_2}{A} - a_1 R_2 - a_2 R_1\right)^2.$$

Здесь A_i, A, a_j — некоторые вещественные параметры.

Вычисление инвариантов для случаев Эйлера и Лагранжа целиком изложено в [1]. В каждом из этих случаев возникает три неизоморфных между собой слоения на изоэнергетических поверхностях. Соответствующие меченые молекулы указаны на рис. 3.

Случай Ковалевской имеет значительно более сложную топологию слоения. Лиувиллевы инварианты были впервые целиком вычислены в работе [2], что потребовало создания метода круговых молекул. Оказалось, что случай Ковалевской обнаруживает 10 типов изоэнергетических слоений.

Метод круговых молекул оказался достаточно универсальным. В результате к настоящему моменту удалось вычислить инварианты большинства известных случаев интегрируемости в механике твердого тела. В частности, подсчитаны инварианты случаев Жуковского, Горячева-Чаплыгина, Сретенского [3], Клебша [4] и других.

10. Следствия из лиувиллевой классификации случая Клебша. В этом пункте мы на примере случая Клебша покажем, какие выводы о топологии фазового пространства можно сделать при помощи инвариантов Фоменко-Цишанга.

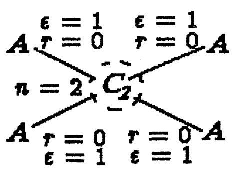
Случаю интегрируемости Клебша отвечает физическая задача о движении твердого тела, закрепленного в центре тяжести, в поле вертикальных сил, линейно меняющихся с изменением высоты. Соответствующий гамильтониан и дополнительный интеграл имеют вид:

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3} + \frac{\epsilon}{2}(A_1R_1^2 + A_2R_2^2 + A_3R_3^2),$$

$$F = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - \frac{\epsilon}{2}(A_2A_3R_1^2 + A_1A_3R_2^2 + A_1A_2R_3^2),$$

где $\epsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ — параметр, пропорциональный коэффициенту линейного изменения сил. При $\epsilon = 0$ мы получаем случай Эйлера.

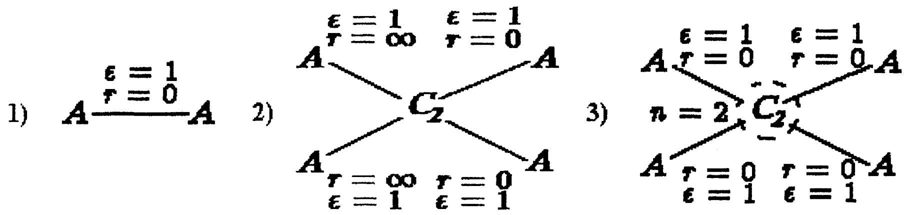
Вычисление лиувиллевых инвариантов осуществляется с помощью метода круговых молекул и подробно изложено в [4]. В результате при различных значениях g и H обнаруживается 10 видов изоэнергетических слоений.



Эйлер, Клебш, молекула максимальных энергий

Рис. 4

Теперь рассмотрим слоение, которое соответствует «большим» энергиям. Оказывается, что для любых g инвариант Фоменко-Цишанга этого слоения одинаков (рис. 4). Но молекула максимальных энергий случая Эйлера при любых g такая же. Тем самым доказана



Эйлер, Клебш
наборы молекул при больших g
Рис. 5

Теорема 4. *При достаточно больших значениях энергии случаи Эйлера и Клебша лиувиллево эквивалентны.*

Более подробно: для любых значений параметра ϵ, главных моментов инерции A_i и постоянной площадей g случая Клебша и для любых значений главных моментов инерции A'_j и постоянной площадей g' случая Эйлера найдется такой уровень энергии h_0, что при любых $h, h' > h_0$ слоения Лиувилля, возникающие на Q^3_h системы Клебша и на $Q^3_{h'}$ системы Эйлера, будут изоморфны. При необходимости h_0 можно указать явно как функцию параметров двух случаев интегрируемости.

Установленная лиувиллева эквивалентность имеет естественное физическое объяснение. Как уже отмечалось, случай Эйлера получится, если в случае Клебша линейно меняющиеся силы заменить на постоянные. Постоянное силовое поле эквивалентно отсутствию внешних сил, так как тело закреплено в центре масс. Понятно, что в случае Клебша телу можно сообщить такую большую энергию, что оно «не заметит» действия сравнительно малых внешних сил и будет двигаться «почти» исключительно по инерции, как в случае Эйлера. Теорема выражает математическое содержание этого факта.

Теперь сравним случаи Клебша и Эйлера при больших значениях постоянной площадей g. Оказывается, что наборы изоэнергетических молекул одинаковы. Они изображены на рис. 5. Возникает естественное желание сравнить поведение этих систем на четырехмерном многообразии M^4_g в целом. Привлекая несложные дополнительные соображения легко доказать теорему [4]:

Теорема 5. *При достаточно больших значениях постоянных площадей случаи Клебша и Эйлера лиувиллево эквивалентны как системы на четырехмерных многообразиях.*

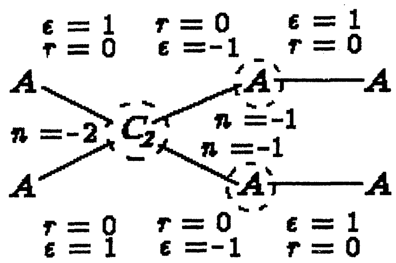


Рис. 6 Ковалевская, Соколов
молекула максимальной энергии

Иными словами, для любых значений параметра ϵ и главных моментов инерции A_i случая Клебша и для любых значений главных моментов инерции A'_j случая Эйлера найдется такое значение g_0 постоянной площадей, что при любых $g, g' > g_0$ слоения Лиувилля, возникающие на M^4_g системы Клебша и на $M^4_{g'}$ системы Эйлера, будут изоморфны.

Этот факт также имеет физическое объяснение. При заданном уровне энергии большие значения постоянной площадей дают стремление вектора момента количества движения твердого тела к вертикальному положению. Это означает, что «почти все» вращение происходит в горизонтальной плоскости, и тело не замечает вертикальной неоднородности силового поля.

11. Вычисление меченых молекул в интегрируемом случае Соколова. Недавно обнаруженный при помощи компьютерных методов интегрируемый случай Соколова [5] определяется гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 2S_3^2) + R_2S_3 - \frac{1}{2}R_3^2.$$

Дополнительный интеграл имеет вид:

$$F = S_3^2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(R_2S_3 - R_3S_2) + R_2^2 + R_3^2) + \\ + 2S_3(S_2 - R_3)(R_1S_1 + R_2S_2 + R_3S_3).$$

Инварианты Фоменко-Цишанга этой системы вычислены в работе [6]. В случае Соколова метод круговых молекул не дает окончательного ответа, и для его получения потребовалось использовать формулу Топалова [7], связывающую числовые метки с топологией изоэнергетического многообразия. Из результатов, в частности, следует

Теорема 6. *Случай Соколова при больших энергиях и ненулевой постоянной площадей лиувиллево эквивалентен случаю Ковалевской при больших энергиях с нулевой постоянной площадей.*

Соответствующая меченая молекула изображена на рис. 6.

Система Соколова имеет еще одну интересную особенность. При нулевой постоянной площадей в ее фазовом пространстве появляется однопараметрическое семейство критических торов, о которых шла речь в предыдущем разделе. Всего в этом случае интегрируемости обнаруживается 12 типов лиувиллевых слоений.

Литература

[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация.* — Изд-во УдГУ, 1999.

[2] Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской.* — Математический сборник. Том 191, №2, стр. 3-42. 2000г.

[3] Болсинов А.В., Корнеев В.В., Морозов П.В. *Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга в случае Сретенского* (в печати).

[4] Морозов П.В. *Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша.* — Матем. сборник, 2002, т. 193, N 10, с. 113-138.

[5] Соколов В.В. *Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа.* — Теоретическая и математическая физика, 2001, т. 129 (N 1), с. 31-37.

[6] Морозов П.В. *Вычисление тонких лиувиллевых инвариантов в случае Соколова* (в печати).

[7] Топалов П. *Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела.* — Матем. сборник, 1996, т. 187, N 3, с. 143-160.

Адрес: *Московский государственный университет, механико-математический факультет, 119899, Москва, Воробьевы горы*

Address: *Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Vorobjevy Gory, Moscow: 119899, RUSSIA*

E-mail: *morozov_pv@rambler.ru*
E-mail: *fom@difgeo.math.msu.su*