Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Г. Ламбурт, Э. Р. Розендорн, Д. Д. Соколов, В. Н. Тутубалин, Геодезические со случайной кривизной на римановых и псевдоримановых многообразиях, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 99–106

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 178.205.19.235
7 июня 2024 г., 16:20:04

В.Г. Ламбурт, Э.Р. Розендорн, Д.Д. Соколов, В.Н. Тутубалин

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ НА РИМАНОВЫХ И ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация

Вводится понятие обновляющейся геодезической, на которой кривизна является случайным процессом. Показано, что модуль поля Якоби вдоль этой геодезической экспоненциально растет. Демонстрируется существование с вероятностью 1 бесконечного числа сопряженных точек. Найдена верхняя оценка для среднего расстояния между соседними сопряженными точками.

Abstract

V.G. Lamburt, E.R. Rosendorn, D.D. Sokolov, V.N. Tutubalin **Geodesics with random curvature on Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds**

We introduce a notion of renewing geodesic whose curvature is a random process. We demonstrate that the norm of Jacobi field along this geodesic line is of exponential growth, and that there exist infinitely many conjugate points with probability 1. Also we find the upper bound for the average distance between conjugate points.

Введение

Основные результаты геометрии в целом о строении римановых многообразий и поверхностей в трехмерном пространстве можно рассматривать в контексте противопоставления свойств объектов с положительной и отрицательной кривизной. Например, односвязные многообразия отрицательной кривизны гомеоморфны пространству

Лобачевского (теорема Адамара-Картана), а односвязные многообразия положительной и не слишком сильно меняющейся кривизны гомеоморфны сфере (теорема о сфере) [1].

Между тем, хотелось бы получить какие-нибудь общие результаты о строении объектов со знакопеременной кривизной. Конечно, изучение внутренней геометрии конкретного многообразия знакопеременной кривизны или конкретной поверхности знакопеременной кривизны не вызывает принципиальных затруднений, однако неясно, как выделить общие свойства подобных объектов, которые и могли бы составить предмет содержательной теории.

В настоящей работе сделана попытка взглянуть на эту проблему с другой стороны. Идея заключается в рассмотрении не всех многообразий, а «почти всех». Иными словами, предлагается ввести некоторую вероятностную меру на множестве многообразий и формулировать результаты, справедливые, например, для некоторого подмножества, имеющего меру 1.

Настоящая работа содержит обзор полученных результатов о поведении поля Якоби вдоль некоторой геодезической. Для того, чтобы рассмотреть всевозможные варианты многообразий знакопеременной кривизны, мы будем считать, что кривизна вдоль этой геодезической является случайным процессом, принимающим как положительные, так и отрицательные значения.

1. Уравнение Якоби и случайная кривизна

Рассмотрим на двумерном римановом многообразии M^2 семейство геодезических $\gamma(\theta, x)$, пересекающихся в заданной точке P. При этом θ – угол, отсчитываемый в точке P от некоторой геодезической Γ этого семейства, а x — длина вдоль геодезических. Тогда полем Якоби y в точке x, или геодезическим отклонением вдоль геодезической Γ называется величина

$$y(x) = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}|_{\theta=0}. \tag{1}$$

Поле Якоби можно найти из уравнения Якоби (см. [1]), которое также называют уравнением геодезических отклонений:

$$y'' + k(x)y = 0, \tag{2}$$

где k — кривизна риманова пространства. Начальные условия для уравнения (2) имеют вид $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

В дальнейшем мы будем считать кривизну $k(x)$ при $x > 0$ случайным процессом. Предположим далее, что полуось $[0, \infty)$ значений x разделена на равные отрезки точками $x_0 = 0, x_1 = \delta, \ldots x_n = n\delta, \ldots$, причем значения $k(x) = k_n(x)$ при $x_{n-1} \le x < x_n$ статистически независимы между собой. Точки x_n мы будем называть точками *обновления.*

Мы будем считать, что значения кривизны между точками обновления постоянно: $k(x) \doteqdot k_n$ при $x_{n-1} \le x \le x_n$. Таким образом, случайный процесс $k(x)$ сводится к последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{k_n\}$.

Введем следующие определение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Определение 1. Геодезический луч, кривизна вдоль которого описываются процессом $K(x)$ с вышеописанными свойствами, будем называть обновляющимся.

Точно также можно ввести понятие обновляющейся геодезической, для этого достаточно рассмотреть последовательность точек обновления занумерованную целыми, а не натуральными числами.

Найдем явное выражение для поля Якоби через кривизну. Для этого перепишем уравнение (2) в виде системы линейных уравнений для двухкомпонентного вектора-строки $\mathbf{z}$ с компонентами $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y'(x)\delta$, где δ расстояние между соседними точками обновления. Мы умножили y' на δ для того, чтобы придать компонентам вектора $\mathbf{z}$ одинаковую размерность. Перепишем уравнение (2) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(x)\mathbf{A}(x), \tag{3}$$

где матрица $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -k(x)\delta \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Поскольку внутри интервалов обновления кривизна постоянна, значения вектора $\mathbf{z}$ в моменты обновления могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\mathbf{z}(x_n) = \mathbf{z}_0 \prod_{i=1}^{n} \mathbf{B}_n, \tag{5}$$

где $\mathbf{z}_0 = (0, 1)$, а матрицы $\mathbf{B}_n$ равны:

$$\mathbf{B}_n = \exp[\begin{pmatrix} 0 & -k_n\delta \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix}\delta]. \tag{6}$$

Введя безразмерную величину $\nu_n = k_n\delta^2$, можно упростить выражение для этих матриц:

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\nu_n) = \begin{pmatrix} C(\nu_n) & -\nu_n S(\nu_n) \\ S(\nu_n) & C(\nu_n) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где функции C и S задаются следующими формулами:

$$C(x) = \cos\sqrt{x} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-x)^i}{(2i)!}, \qquad S(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-x)^i}{(2i+1)!}. \tag{8}$$

Из разложения функций C и S в ряды видно, что эти функции принимают действительные значения как при положительных, так и при отрицательных значениях аргумента. Следовательно матрицы $\mathbf{B_n}$ действительны независимо от знака кривизны пространства.

2. Геодезическое отклонение и показатель Ляпунова

Мы будем интересоваться поведением вектора $\mathbf{z}(x)$ при стремлении x к бесконечности. Введем показатель Ляпунова, характеризующий скорость роста модуля вектора $\mathbf{z}(x)$.

Определение 2. Показателем Ляпунова обновляющегося геодезического луча называется предел (с вероятностью 1):

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln||z(x)||}{x}. \tag{9}$$

Поскольку все нормы в пространстве $\mathbf{R}^n$ эквивалентны, показатель Ляпунова не зависит от выбора нормы в (9). Из определения не следует самого факта существования показателя Ляпунова. Ответ на этот вопрос дает теорема 1.

Как следует из равенства (5) значения вектора $\mathbf{z}$ выражается через произведение случайных матриц $\mathbf{B}_n$. Каждая из этих матриц зависит только от k_n, а эти величины независимы и имеют одинаковое вероятностное распределение. Следовательно матрицы $\mathbf{B}_n$ также независимы и обладают одинаковыми статистическими свойствами.

В теории вероятностей известна теория Ферстенберга [2,3], предоставляющая аппарат для исследования произведения независимых случайных матриц. Теория содержит ряд утверждений из которых следует, что при весьма широких условиях старшее собственное значение произведения случайных независимых матриц растет с экспоненциальной скоростью по отношению к количеству сомножителей. Применение теории Ферстенберга позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Показатель Ляпунова обновляющегося геодезического луча неслучаен и положителен с вероятностью* 1.

Из теоремы 1 следует экспоненциальный рост модуля вектора $\mathbf{z}$ с асимптотически постоянной скоростью. Выясним, как ведет себя модуль первой компоненты вектора $\mathbf{z}$, т.е геодезическое отклонение вдоль обновляющейся геодезической. Для этого рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln ||y(x_n)||}{x_n}. \tag{10}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Предел* (10) *существует в смысле сходимости по вероятности и равен показателю Ляпунова* λ.

Теорема 2 дает наглядную геометрическую интерпретацию показателю Ляпунова обновляющейся геодезической.

Дальнейшее исследование показывает, что поведение модуля геодезического отклонения существенно отличается от поведения модуля вектора $\mathbf{z}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $\mathbf{P}\{k_n > 0\} > 0$, *тогда с вероятностью 1 существует случайная последовательность* $\{x'_n\} \uparrow \infty$ *такая, что* $y(x'_n) = 0$.

Конечно, последовательность x'_n не совпадает с последовательностью обновлений x_n, так что теорема 3 не противоречит теореме 2. Вектор $\mathbf{z}$ вращается в плоскости Oyy' причем модуль вектора экспоненциально растет. Точки, в которых геодезическое отклонение обращается в ноль, называются сопряженными точками.

Заметим, что показатель Ляпунова нельзя определить по аналогии с (10) через геодезическое отклонение как предел при $x \to \infty$ выражения $x^{-1} \ln |y(x)|$. Действительно, из теорем 2 и 3 следует, что значение выражения существенно зависит от последовательности, по которой x стремится к бесконечности.

3. Сопряженные точки

Из теоремы 3 следует существование бесконечной последовательности сопряженных точек. Для того, чтобы получить оценку среднего расстояния между соседними сопряженными точками мы воспользуемся асимптотическим приближением, в котором значение безразмерной кривизны ν_n считается малым.

Более точно, будем считать, что имеется параметрическое семейство последовательностей случайных величин $\nu_n = \nu_n(\varepsilon)$. Потребуем равномерной ограниченности членов этих последовательностей:

$$|\nu_n(\varepsilon)| \leq \varepsilon\,. \tag{11}$$

Условие малости величин ν_n сформулируем в виде $\varepsilon \to 0$. Вместе с условием равномерной ограниченности это условие означает равномерную сходимость семейства последовательностей к нулевой последовательности. В формулировке теоремы 4 используется именно такая сходимость. Там, где это не будет приводить к путанице, параметр ε у величин семейства $\nu_n = \nu_n(\varepsilon)$ будет опускаться.

Пусть φ_n и r_n — запись вектора $\mathbf{z}_n$ в полярных координатах, тогда

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n, \nu_{n+1}), \tag{12}$$

где

$$f(\varphi, \nu) = \operatorname{arctg}\left[\frac{C(\nu)\operatorname{tg}\varphi - \nu S(\nu)}{S(\nu)\operatorname{tg}\varphi + C(\nu)}\right]. \tag{13}$$

Выражение (13) вместе с условием равномерной ограниченности позволяют составить общую картину эволюции случайного процесса φ_n. Процесс стартует из точки $\varphi_0 = \pi/2$ ($y(0) = 0$, $y'(0) = 1$). Далее φ_n убывают вплоть до $\operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon}$. На интервале $[-\operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon};\ \operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon}]$ происходит некоторое случайное блуждание, во время которого процесс не может выйти за верхнюю границу. Далее в некоторый момент процесс пересекает нижнюю границу и после этого его значения убывают до пересечения точки $-\pi/2$. В этот момент на геодезической образуется сопряженная точка.

Таким образом, величина $\operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon}$ разграничивает зоны, в которых поведение случайного процесса φ_n существенно отличается.

Можно показать, что время, проводимое процессом φ_n вне зоны случайного блуждания, имеет порядок $O(1/\sqrt{\varepsilon})$. Верхняя оценка времени, которое процесс тратит на преодоление зоны случайного блуждания, может быть получена с помощью диффузионного приближения для процесса φ_n. Это время имеет порядок $O(1/\varepsilon)$. Окончательный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть выполнено условие равномерной ограниченности, $\mathbf{E}\nu_n = 0$, $\mathbf{D}(\nu_n(\varepsilon)/\varepsilon)$ равномерно по ε отделены от нуля. Пусть далее существует $a > 0$ такое, что $\mathbf{P}\{\nu_n(\varepsilon) \geq 0\} > a$ для всех ε, тогда если $\hat{x}_i < \hat{x}_j$ – некоторые сопряженные точки, то

$$\mathbf{E}(\hat{x}_j - \hat{x}_i) \leq \frac{4\delta(j-i)}{\varepsilon}\left[\mathbf{D}\left(\frac{\nu_n}{\varepsilon}\right)\right]^{-1}(1+o(1)), \quad \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

4. Обсуждение

Итак, мы обнаружили, что поведение поля Якоби на многообразии со случайной кривизной имеет общие черты как с многообразиями отрицательной, так и с многообразиями положительной кривизны. На первых близкие геодезические экспоненциально удаляются друг от друга, а на вторых имеют тенденцию образовывать сопряженные точки.

В настоящей работе обновляющаяся геодезическая была получена посредством локального задания кривизны случайным процессом вдоль некоторой геодезической. Вместе с тем хотелось бы задать случайную кривизну на всем многообразии так, чтобы в результате получились обновляющиеся геодезические. Попытка построения римановых многообразий со случайной кривизной наталкивается на определенные трудности. В самом деле, если кривизна на полном многообразии достаточно часто принимает положительные значения, то удаленные куски геодезической могут располагаться достаточно близко друг к другу, а это плохо согласуется с условием обновления.

Можно надеяться устранить эту сложность, рассматривая двумерные псевдоримановы многообразия. На таких многообразиях в каждом координатном параллелограмме, состоящим из изотропных геодезических, может располагаться только один отрезок данной геодезической, а потому удаленные части одной геодезической расположены не могут располагаться рядом друг с другом.

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00297.

Литература

[1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.

[2] Furstenberg H. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. // Annals of Mathematics. 1963. V.77. N2. P. 335-386.

[3] Furstenberg H. Noncommuting random products. // Trans. of Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. N3. P.377-428.

Адрес: *Московский государственный университет, механико-математический факультет, 119899, Москва, Воробьевы горы*

Address: *Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Vorobjevy Gory, Moscow: 119899, RUSSIA*

E-mail: *lamburt@yandex.ru*