П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, Уточненная модель дискретно подкрепленных пластин и оболочек при нестационарных нагрузках, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 14–20

На рисунке 2 приведены функции $F_m(t)$ из уравнения (5) для m_0 = I.5, сплошная линия соответствует m = I, пунктирная m=2. На рисунках 3, 4 даны функции $\ddot{w}(\theta,t)$, определяющие ускорение некоторых точек оболочки при радиальном расширении полости с единичной скоростью. На рисунке I5 сопоставлены радиальные ускорения при смещении включения как твердого целого и как упругой оболочки.

Все расчеты по определению оригиналов по их изображениям проводились по методу Ю.С.Яковлева [I].

Число рассчитанных гармоник (m = 0 ÷ 6) недостаточно для выявления "скачков", но достаточно для получения величины и времени наступления максимумов ускорений оболочки.

Проведенные расчеты позволяют отметить следующее:

I. Значение γ не оказывает существенного влияния на величину максимума $\ddot{w}(\theta,t)$.

2. Величина β почти не влияет на эпюру $\ddot{w}(\theta,t)$ в период $0<\bar{t}<2$, а при $\bar{t}>2$ влияние β становится заметным, особенно для "тыльной" стороны оболочки.

3. Величина максимума $\ddot{w}(\theta,t)$ обратно пропорциональна m_0.

4. Максимум $\ddot{w}(\theta,t)$ почти прямо пропорционален $\sqrt{\ell_0}$ и обратно пропорционален $\sqrt{r_0}$.

Литература

I. Лобысев В.Л., Яковлев Ю.С. Метод асимптотически эквивалентных функций и его приложение к решению некоторых задач механики сплошных сред // Проблемы механики твердого деформируемого тела. - Л.: Судостроение, I970. - С.239 - 250.

П.З.Луговой, В.Ф.Мейш

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

В настоящей работе рассматривается динамическое поведение подкрепленных оболочек с учетом дискретного расположения ребер. Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственно оболочки (обшивки) и соединенных с ней жестко по линиям контакта ребер (стрингеров и шпангоутов). Предполагается, что напряженно-деформированное состояние обшивки и подкрепляющих элементов может быть полностью определено в рамках теории тонких оболочек и криволинейных стержней Тимошенко [2]. Положение этих точек срединной поверхности обшивки определяется её криволиней - ными ортогональными координатами α_1, α_2. Система координат выбирается так, что координатные линии совпадают с линиями кривизн срединной поверхности обшивки. Полагается, что ребра размещены вдоль координатных линий.

Деформированное состояние обшивки определяется обобщенным вектором перемещений $\bar{U} = (U, V, W, \varphi_1, \varphi_2)$. Для описания деформированного состояния ребер привлекаются следующие кинема - тические параметры: U_i, V_i, W_i и U_j, V_j, W_j - компо - ненты вектора перемещений центров тяжести их поперечных сечений соответственно для i-го ребра, направленного вдоль α_1, и j-го ребра, направленного вдоль α_2; φ_{1i}, $\varphi_{\text{кр}i}$, φ_{1i}, $\varphi_{\text{кр}j}$ - углы поворота и кручения центров тяжести поперечного сечения i-го и j-го ребер.

Условия жесткого соединения ребер и обшивки позволяют установить зависимости между их компонентами перемещений и углов

$$
\begin{gathered}
U_i(\alpha_1) = U(\alpha_1,\alpha_{2i}) + h_i\varphi_1(\alpha_1,\alpha_{2i}), \\
V_i(\alpha_2) = V(\alpha_1,\alpha_{2i}) + h_i\varphi_2(\alpha_1,\alpha_{2i}), \\
U_j(\alpha_2) = V(\alpha_{1j},\alpha_2) + h_j\varphi_2(\alpha_{1j},\alpha_2),\; W_i(\alpha_1) = W(\alpha_1,\alpha_{2i}), \\
V_j(\alpha_2) = U(\alpha_{1j},\alpha_2) + h_j\varphi_1(\alpha_{1j},\alpha_2),\; W_j(\alpha_2) = W(\alpha_{1j},\alpha_2), \\
\varphi_{1i}(\alpha_1) = \varphi_1(\alpha_1,\alpha_{2i}),\; \varphi_{\text{кр}i}(\alpha_1) = \varphi_2(\alpha_1,\alpha_{2i}), \\
\varphi_{1j}(\alpha_2) = \varphi_2(\alpha_{1j},\alpha_2),\; \varphi_{\text{кр}j}(\alpha_2) = \varphi_1(\alpha_{1j},\alpha_2),
\end{gathered} \tag{I}
$$

где $h_i = 0{,}5h + H_i$; $h_j = 0{,}5h + H_j$; H_i, H_j - расстоя - ния от осей соответственно i-го и j-го ребер до поверхности обшивки; h - толщина обшивки; α_{1j}, α_{2i} - координаты линий сопряжения ребер с обшивкой.

При выводе уравнений движения, кроме представлений условий контакта в виде (I), используется интегральная форма записи этих условий [I].

Для вывода уравнений движения применялся вариационный принцип стационарности Гамильтона - Остроградского. Полная потенциальная и кинетическая энергии подкрепленной оболочки представляются в виде следующих сумм:

$$\Pi=\Pi_0+\sum_{i=1}^{m}\Pi_i+\sum_{j=1}^{l}\Pi_j\ ,\quad K=K_0+\sum_{i=1}^{m}K_i+\sum_{j=1}^{l}K_j\ , \tag{2}$$

где Π_0, K_0 - потенциальная и кинетическая энергии обшивки, согласно теории тонких оболочек типа Тимошенко;

$$\Pi_i=\int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''}(T_{11i}\varepsilon_{11i}+T_{12i}\varepsilon_{12i}+T_{13i}\varepsilon_{13i}+$$

$$+M_{12i}\varkappa_{12i}+M_{13i}\varkappa_{13i}+H_{\kappa pi}\varkappa_{\kappa pi})A_1 d\alpha_1\ ,$$

$$\Pi_j=\int_{\alpha_2'}^{\alpha_2''}(T_{11j}\varepsilon_{11j}+T_{12j}\varepsilon_{12j}+T_{13j}\varepsilon_{13j}+$$

$$+M_{12j}\varkappa_{12j}+M_{13j}\varkappa_{13j}+H_{\kappa pj}\varkappa_{\kappa pj})A_2 d\alpha_2\ , \tag{3}$$

$$K_i=\frac{\rho_i F_i}{2}\int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''}\Big[\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w_i}{\partial t}\Big)^2+$$

$$+\frac{I_{yi}}{F_i}\Big(\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial t}\Big)^2+\frac{\dot J_{\kappa pi}}{F_i}\Big(\frac{\partial\varphi_{\kappa pi}}{\partial t}\Big)^2\Big]A_1 d\alpha_1\ ,$$

$$K_j=\frac{\rho_j F_j}{2}\int_{\alpha_2'}^{\alpha_2''}\Big[\Big(\frac{\partial u_j}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v_j}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w_j}{\partial t}\Big)^2+$$

$$+\frac{I_{xj}}{F_j}\Big(\frac{\partial\varphi_{1j}}{\partial t}\Big)^2+\frac{\dot J_{\kappa pj}}{F_j}\Big(\frac{\partial\varphi_{\kappa pj}}{\partial t}\Big)^2\Big]A_2 d\alpha_2\ ,$$

где ρ, ρ_i, ρ_j - плотности материала обшивки i-го и j-го подкрепляющих элементов; F_i, F_j, I_{yi}, I_{xj}, $\dot J_{\kappa pi}$, $\dot J_{\kappa pj}$ - геометрические параметры поперечных сечений ребер.

Варьируя исходный функционал энергии с учетом соотношений (I) - (3) и интегральной формы записи условий контакта, имеем следующие уравнения движения подкрепленной оболочки с учетом дискретности расположения ребер:

$$
\begin{gathered}
L_1(\bar{U})+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11i}}{\partial \alpha_1}+T_{13i}k_{1i}\right)\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\\
+\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{12j}}{\partial \alpha_2}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})+P_1=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\\
+\sum_{i=1}^{m}\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\sum_{j=1}^{l}\rho_j F_j\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j}),\\
L_2(\bar{U})+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12i}}{\partial \alpha_1}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\\
+\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{11j}}{\partial \alpha_2}+k_{1j}T_{13j}\right)\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})+P_2=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\\
+\sum_{i=1}^{m}\rho_i F_i\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\sum_{j=1}^{l}\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j}), \qquad (4)\\
L_3(\bar{U})+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{13i}}{\partial \alpha_1}-T_{11i}k_{1i}\right)\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\\
+\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{13j}}{\partial \alpha_2}-k_{1j}T_{11j}\right)\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})+P_3=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\\
+\sum_{i=1}^{m}\rho_i F_i\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\sum_{j=1}^{l}\rho_j F_j\frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}\delta(\alpha_1-\alpha_{1j}),\\
L_4(\bar{U})+\sum_{i=1}^{m}\left(h_i\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11i}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{13i}}{\partial \alpha_1}-T_{13i}\right)\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\\
+\sum_{j=1}^{l}\left(h_j\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{12j}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{\kappa pj}}{\partial \alpha_2}+M_{12j}k_{1j}\right)\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}+
\end{gathered}
$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\rho_i\Big(F_i h_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+I_{yi}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\Big)\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\sum_{j=1}^{l}\rho_j\Big(F_j h_j\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}+\dot{J}_{\kappa p j}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\Big)\delta(\alpha_1-\alpha_{1j}),$$

$$L_5(\bar{U})+\sum_{i=1}^{m}\Big(h_i\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12i}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{\kappa p i}}{\partial\alpha_1}+M_{12i}k_{1i}\Big)\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\Big(h_j\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{11j}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{13j}}{\partial\alpha_2}-T_{13j}\Big)\delta(\alpha_1-\alpha_{1j})=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\rho_i\Big(F_i h_i\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}+\dot{J}_{\kappa p i}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\Big)\delta(\alpha_2-\alpha_{2i})+\sum_{j=1}^{l}\rho_j\Big(F_j h_j\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+I_{xj}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\Big)\delta(\alpha_1-\alpha_{1j}).$$

В уравнениях (4) $L_i(\bar{U})$ – эллиптические дифференциальные операторы, соответствующие теории гладких оболочек типа Тимошенко.

Соотношения усилия-деформации перемещения для i-го подкрепляющего элемента имеют вид

$$\begin{aligned}
&T_{11i}=E_iF_i\varepsilon_{11i}, \quad M_{12i}=E_iI_{xi}\varkappa_{12i},\\
&T_{12i}=G_iF_i\varepsilon_{12i}, \quad M_{13i}=E_iI_{yi}\varkappa_{13i},\\
&T_{13i}=G_iF_i\varepsilon_{13i}, \quad M_{\kappa p i}=G_i\dot{J}_{\kappa p i}\varkappa_{\kappa p i}, \qquad\qquad (5)\\
&\varepsilon_{11i}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_1}+k_{1i}w_i, \quad \varepsilon_{12i}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_1},\\
&\varepsilon_{13i}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_i}{\partial\alpha_1}+\varphi_{1i}-k_{1i}u_i, \quad \varkappa_{\kappa p i}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_{\kappa p i}}{\partial\alpha_1},\\
&\varkappa_{12i}=-k_{1i}\varphi_{\kappa p i}, \quad \varkappa_{13i}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_{1i}}{\partial\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Соответственно выписываются соотношения усилия-деформации перемещения для j-го подкрепляющего элемента.

Для решения уравнений движения (4) при соответствующих граничных условиях применяется метод конечных разностей. Построение разностных схем основано на использовании интегро-интерполяционного метода [5]. Применяется неравномерная разностная сетка со сгущением вблизи расположения ребер. Конечно-разностная схема аппроксимирует исходную дифференциальную задачу с погрешностью

$O[\tau^2+max(\Delta\alpha_{1k})+max(\Delta\alpha_{2n})]$, где $\tau, \Delta\alpha_{1k}, \Delta\alpha_{2n}$ – временной и пространственные шаги дискретизации непрерывной области. Такой подход реализован в работе [3] при рассмотрении динамического поведения подкрепленной цилиндрической оболочки при неосесимметричной нагрузке и в [4], где рассматривается подкрепленная сферическая оболочка при действии осесимметричной нестационарной нагрузки. Тестовые расчеты показали хорошее совпадение результатов расчета.

В качестве числового примера рассматривается динамическое поведение подкрепленной консольной ортотропной цилиндрической оболочки при действии нестационарной нагрузки, приложенной к свободному торцу. Предполагается, что оболочка подкреплена шпангоутами. Граничные условия запишутся в виде

$$x=0: T_{11}=P(t), Q_{13}=0, M_{11}=0;\ x=L: u=w=\varphi_1=0.$$

Нагрузка $P(t)$ задается в виде

$P(t)=A\sin(\pi t/T)$ при $t\leq T$; $P(t)=0$ при $t>T$;

$T=50\cdot10^{-6}$ с; $A=10^6$ Па. Физико-механические и геометрические параметры оболочки и ребер следующие: $E_{11}=1,1\cdot10^{11}$ Па; $E_{22}=9,5\cdot10^9$ Па; $G_{13}=5,10\cdot10^9$ Па; $\nu=0,297$; $\rho=\rho_j=1,5\cdot10^3$ кг/м^3; $E_j=E_{22}$; $h=5\cdot10^{-3}$ м; $L=0,5$ м; $R=0,1$ м; $F_j=4\cdot10^{-4}$ м^2; $\ell=2$; $h_j=(h+2H_j)/2$; $2H_j=2\cdot10^{-2}$ м; $x_j=0,2L+(j-1)\,0,6L$; $j=1,2$.

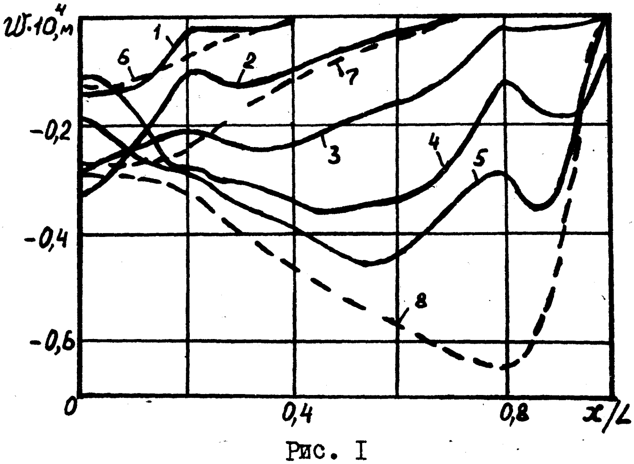

Рис. I

На рисунке I представлены зависимости прогиба w от пространственной координаты x для различных моментов времени. Сплошные линии соответствуют прогибам оболочки с ребрами, а пунктирные – такой же оболочке без ребер; кривые I – 5 – временам $t = [40 + (i - 1)\, 20] \cdot 10^{-6}$ с, $i = \overline{1,5}$; кривые 6 – 8 – временам $t = 40 \cdot 10^{-6}$, $t = 60 \cdot 10^{-6}$, $t = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ с. В местах расположения ребер прогибы более чем в два раза меньше по сравнению с гладкой оболочкой. На графиках отчетливо прослеживается значительное влияние ребер на характер колебаний подкрепленной оболочки. Шпангоут, установленный в непосредственной близости от защемленного края, служит как бы волноломом, за счет которого резко снижается эффект отражения от жесткой заделки.

Литература

I. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Т.2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 368 с.

2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., 1973. – 272 с.

3. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Неосесимметричные колебания ребристой цилиндрической оболочки с учетом сдвиговых деформаций // Прикладная механика. – 1989. – Т.25. – № 5. – С.50 – 55.

4. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Исследование ребристых взрывных камер при импульсной обработке материалов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 54. – С.79 – 82.

5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

В.Н.Пилипчук

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ГИБКИХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается метод разделения движений для нелинейных уравнений динамики гибких упругих конструкций типа пологих оболочек. Составляющие движения, связанные с изгибаниями и деформациями