Л. А. Аксентьев, И. А. Зорин, Классы многолистных аналитических функций, решающих задачу Гильберта, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 22–37

Л.А.Аксентьев, И.А.Зорин

КЛАССЫ МНОГОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РЕШАЮЩИХ ЗАДАЧУ ГИЛЬБЕРТА

Анализ геометрических свойств решений краевых задач развит в статье [I] одного из авторов данной работы и продолжен в статье [2]. Мы дополняем статьи [I] и [2], опираясь, главным образом, на геометрический смысл решения задачи Гильберта в наиболее простых вариантах. В частности, доказаны теоремы 5 и 6, сформулированные в [2].

I. Решением задачи Гильберта является аналитическая функция, отображающая единичный круг, вообще говоря, неоднолистно на некоторую область, свойства которой полностью определяются поведением коэффициентов, входящих в краевое условие. Поэтому между решениями задачи Гильберта и классами многолистных функций, обладающих определенными геометрическими свойствами, можно установить соответствие.

Рассмотрим вначале в круге $E=\{z:|z|<1\}$ задачу Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})] = c_k\ , \ \theta\in(\varphi_k,\varphi_{k+1})\ , \ k=\overline{1,n}\ , \tag{I}$$

$\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi$; γ_k , c_k – постоянные величины. Обозначим через $h(a_1,\dots,a_s)$ класс решений этой задачи, ограниченных в точках $a_k=e^{i\varphi_k}, k=\overline{1,s}\le n$, и не ограниченных в остальных $n-s$ точках стыка.

Для доказательства теорем из статьи [2], показывающих зависимость листности решения задачи (I) от индекса, сформулируем и обоснуем предварительное утверждение.

<u>Лемма I.</u> Решением задачи (I) в классе $h(a_1,\dots,a_s)$ является

$$f(z)=C_1\int_0^z \prod_{k=1}^{q}(z-b_k)(1-\bar b_k z)\prod_{k=1}^{m}(z-e^{i\alpha_k})\prod_{k=1}^{n}(z-e^{i\varphi_k})^{\delta_k-1}dz+C_2\ , \tag{2}$$

причем индекс задачи и параметры, входящие в выражение (2), связаны соотношением

$$\varkappa=2-n+2q+m\ ; \tag{3}$$

C_1, C_2, b_k – комплексные параметры; $|b_k|<1$, $k=\overline{1,q}$; $0<\delta_k\le 1$, $k=\overline{1,s}$; $-1<\delta_k\le 0$, $k=\overline{q,n}$, и δ_k зависит от γ_{k-1}, γ_k; $\gamma_0=\gamma_n$.

Доказательство. Решением задачи (I) является функция, отображающая круг E на область, ограниченную прямыми с уравнениями $Im(e^{-i\gamma_k}w)=c_k$, $k=\overline{1,n}$, или их частями. Поэтому функцию, решающую задачу Гильберта (I), можно записать при помощи обобщенного интеграла Кристоффеля – Шварца, отображающего E на многолистный многоугольник. Точки $a_k=e^{i\varphi_k}$, $k=\overline{1,n}$, должны отображаться в угловые точки. Обозначим через b_k, $k=\overline{1,q}$, нули производной $f'(z)$, т.е. прообразы точек ветвления, внутри круга E и через $e^{i\alpha_k}$ – нули производной $f'(z)$ на ∂E.

Показатели степеней у множителей $(z-a_k)^{\delta_k-1}$ определяются таким образом: $0<\delta_k\le 1$, если ищется решение, ограниченное в окрестности точки a_k, и $-1<\delta_k\le 0$, если ищется решение, которое неограничено в окрестности a_k. Из условия (I) после дифференцирования по θ и из сравнения его с видом функции $f'(z)$ из (2) получим

$$\delta_k=(\gamma_{k-1}-\gamma_k)/\pi-\varkappa_k, \tag{4}$$

где $\varkappa_k$ – целое число, положительное или отрицательное, или 0. Тем самым для $f(z)$ получено представление (2).

Это представление не всегда будет отображать круг на область с прямолинейными границами. Действительно, для обеспечения прямолинейности границ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{d}{d\theta}arg(e^{i\theta}f'(e^{i\theta}))=0$ для всех θ, лежащих на интервалах, которые не содержат точек φ_k и α_k. Так как

$$(e^{i\theta}-b_k)(1-\bar{b}_k e^{i\theta})=e^{i\theta}\left|1-b_k e^{-i\theta}\right|^2,\quad e^{i\theta}-e^{i\varphi_k}=2i\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}e^{i\frac{\theta+\varphi_k}{2}},$$

то

$$arg(e^{i\theta}f'(e^{i\theta}))=(q+1)\theta+m\theta/2+\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-1)\theta/2+A(\theta),$$

причем функция $A(\theta)$ является кусочно-постоянной, т.е. в точках дифференцируемости $A'(\theta)=0$. Поэтому

$$\frac{d}{d\theta}arg[e^{i\theta}f'(e^{i\theta})]=0\Leftrightarrow q+1+m/2+\Big(\sum_{k=1}^{n}\delta_k-n\Big)/2=0.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n} \varkappa_k = \varkappa$ – индекс задачи и $\sum_{k=1}^{n}(\gamma_{k-1} - \gamma_k) = 0$, то с учетом (4) получим (3). Лемма доказана.

С использованием леммы докажем несколько более общее утверждение, чем сформулированная в [2] теорема 5. Предварительно напомним определения некоторых классов многолистных функций, которые ввел Стайер [3].

<u>Определение I</u>. Функция $f(z)$ принадлежит классу $S_w(p)$ – слабо звездных функций порядка p , если $f(z)$ регулярна в E, и существует регулярная функция $h(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, однолистная, звездная и такая, что

$$f(z) = h^p(z) \prod_{k=1}^{p} \varphi(z, z_k) ,$$

где $\varphi(z, z_k) = (z - z_k)(1 - \bar{z}_k z)/z$, $|z_k| \le 1$, $k = \overline{1, p}$.

<u>Определение 2.</u> Регулярная в E функция $F(z)$, $F(0) = 0$, принадлежит классу $K_w(p)$ слабо почти выпуклых функций порядка p, если существует функция $f(z) \in S_w(p)$, $f(0) = 0$, такая, что $Re\,(z F'(z)/f(z)) > 0$, $z \in E$.

<u>Теорема I</u>. Решение $f(z)$ задачи Гильберта (I) принадлежит классу $K_w(p)$, где $p = [(\varkappa + n)/2]$, $[\alpha]$ – целая часть числа α . Если $\varkappa + n = 2$, то $f(z) \in S^0(1)$ – классу однолистных выпуклых функций; при $\varkappa + n = 3$ решение $f(z)$ принадлежит классу $K(1)$ однолистных почти выпуклых функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы I решением задачи (I) является функция (2) с условием (3) на параметры функции и индекс задачи. При отрицательном индексе решение должно удовлетворять $-\varkappa - 1$ условиям разрешимости, при положительном – существует $\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

Решением задачи является функция, отображающая круг E на прямолинейный n -угольник, возможно, с m разрезами и q точками ветвления. Некоторые из вершин могут лежать на ∞ . Для существования такой функции достаточно выполнения $-\varkappa - 1 = n - 3 - m - 2q$ условий разрешимости. С другой стороны, теорема Римана дает $n - 3$ условий разрешимости. Разница в числе условий объясняется тем, что заранее не фиксируются значения точек ветвления и концов разрезов. За счет подбора $m + 2q$ действительных параметров часть условий естественным образом снимается.

Из формулы (3) следует, что $\varkappa+n\geqslant 2$. В связи с этим изучим последовательно 4 случая: $\varkappa+n=2$, $\varkappa+n=3$, $\varkappa+n$ – четное и $\geqslant 4$, $\varkappa+n$ – нечетное и $\geqslant$ 5.

Случай I. Пусть $\varkappa+n=2$. Тогда в силу (3) получим $q=m=0$. Решение задачи будет иметь вид

$$f(z)=C_1\int_0^z\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\delta_k-1}dz+C_2 .$$

Функция $g(z)=zf'(z)=C_1 z\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\delta_k-1}$ удовлетворяет условию

$$\arg g(e^{i\theta})=\theta+\sum_{k=1}^n(\delta_k-1)\theta/2+A(\theta)=A(\theta)$$

(так как $\sum_{k=1}^n\delta_k-n+2=-\varkappa-n+2=0$), где $A(\theta)$ постоянна при $\theta\in(\varphi_k,\varphi_{k+1})$, $k=\overline{1,n}$. Поэтому $g(E)$ является плоскостью с n радиальными разрезами. В силу известной связи

$$g(z)=zf'(z)\in S(1)\Leftrightarrow f(z)\in S^{\circ}(1)$$

получим выпуклость и однолистность функции $f(z)$.

Случай 2. Пусть $\varkappa+n=3$. Формула (3) дает m = I, q = 0 и функция (2) принимает вид

$$f(z)=C_1\int_0^z(z-e^{i\alpha})\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\delta_k-1}dz+C_2$$

и соответственно $zf'(z)=C_1 z(z-e^{i\alpha})\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\delta_k-1}$.

Рассмотрим два возможных варианта. В первом варианте все значения $\delta_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,n}$. Предположим, что $a_k\neq e^{i\alpha}$ $k=\overline{1,n}$. Так как $\sum_{k=1}^n\delta_k=n-3$, то существует такой набор $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$, что $\delta_k<\sigma_k\leqslant 1$ и $\sum_{k=1}^n\sigma_k=n-2$. Так же, как и $g(z)$ в случае I, функция $g_1(z)=z\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\sigma_k-1}\in S(1)$ звездная. Функция

$$g_2(z)=(z-e^{i\alpha})\Big/\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\sigma_k-\delta_k}$$

отображает E на полуплоскость с n разрезами, так как

$0 < \sigma_\kappa - \delta_\kappa < 1$, $\kappa = \overline{1,n}$ и $\sum_{\kappa=1}^{n} (\sigma_\kappa - \delta_\kappa) = 1$. В частности, можно положить $\sigma_\kappa - 1 = 2(\delta_\kappa - 1)/3$ и $\delta_\kappa - \sigma_\kappa = (\delta_\kappa - 1)/3$.

Если для некоторого $\kappa = \kappa_0$ $a_{\kappa_0} = e^{i\alpha}$, то полагая $\sigma_{\kappa_0} = 1$, видим, что функция

$$g_2(z) = (z - a_{\kappa_0})^{\delta_{\kappa_0}} \Big/ \prod_{\kappa=1,\, \kappa\neq\kappa_0}^{n} (z - a_\kappa)^{\sigma_\kappa - \delta_\kappa}$$

отображает E на угол раствора $\delta_{\kappa_0}\pi < \pi$ с радиальными разрезами. Поэтому существует такое $\gamma \in (-\pi, \pi]$, что $Re(e^{-i\gamma} g_2(z)) > 0$, $z \in E$. Следовательно,

$$Re(e^{-i\gamma} z f'(z)/C_1 g_1(z)) > 0, \text{ т.е. } f(z) \in K(1). \qquad (5)$$

Образом единичного круга $\mathcal{D} = f(E)$ является при $a_\kappa \neq e^{i\alpha}$ многоугольник с внутренними углами, меньшими π , и единственным прямолинейным разрезом. При $a_{\kappa_0} = e^{i\alpha}$ имеем многоугольник, все внутренние углы которого, за исключением одного, меньше π . Величина угла при вершине $A_{\kappa_0} = f(a_{\kappa_0})$ равна $(\delta_{\kappa_0} + 1)\pi > \pi$.

Во втором варианте существует хотя бы одно δ_{κ_1} из промежутка (-I, 0]. Полагаем $g_1(z) = C_1 z \prod_{\kappa=1}^{n} (z - a_\kappa)^{\delta_\kappa - 1} \cdot (z - a_{\kappa_1})$ и $g_2(z) = (z - e^{i\alpha})/(z - a_{\kappa_1})$. В силу того, что $g_1(z) \in S(1)$, получаем при некотором γ повторение (5).

С л у ч а й 3. Считаем $\varkappa + n$ четным и $\geqslant$ 4. Из (3) будет следовать, что m – четное число или 0.

Выберем из множества значений $\{\alpha_\kappa\}_{\kappa=1}^{m}$ попарно совпадающие: $2\{\alpha_{\kappa 1}\}_{\kappa=1}^{m_1}$, оставшееся подмножество разобьем на две части $\{\alpha_{\kappa 2}\}_{\kappa=1}^{m_2}$, $\{\alpha_{\kappa 3}\}_{\kappa=1}^{m_2}$ так, чтобы выполнялось условие $\alpha_{\kappa 3} < \alpha_{\kappa 2} < \alpha_{(\kappa+1)3}$, $\kappa = \overline{1, m_2}$, $\alpha_{(m_2+1)3} = \alpha_{13} + 2\pi$. В трех подмножествах окажется $2m_1 + m_2 + m_2 = m$ – четное число элементов. Отсюда $m_1 + m_2 = m/2$.

Функция $g_2(z) = C_1 \prod_{\kappa=1}^{m_2} (z - e^{i\alpha_{\kappa 3}})/(z - e^{i\alpha_{\kappa 2}})$

отображает круг E на m_2 -листную полуплоскость, поэтому существует такое $\gamma \in (-\pi, \pi]$, что $Re(e^{i\gamma} g_2(z)) > 0$. Учитывая, что $\varphi(z, 0) = 1$, функцию $g_1(z) = z f'(z)/g_2(z)$ представим в виде

$$g_1(z)=z^{p}\prod_{k=1}^{q}\frac{(z-b_k)(1-\bar b_k z)}{z}\prod_{k=1}^{m_1}\frac{(z-e^{i\alpha_{k1}})^2}{z}\prod_{k=1}^{m_2}\frac{(z-e^{i\alpha_{k2}})^2}{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}=$$

$$=h^{p}(z)\prod_{k=1}^{q+m/2+1}\varphi(z,z_k),$$

причем $h(z)=z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{(\delta_k-1)/p}$, $p=q+m/2+1=(\varkappa+n)/2$; $\varphi(z,z_k)$ взяты из определения I и множество $\{z_k\}_{k=1}^{p}, |z_k|\le 1$, состоит из $z_p=0$, $\{b_k\}_{k=1}^{q}$ и $\{e^{i\alpha_{kj}}\}_{k=1}^{m_j}$, $j=1, 2$. Как и в случае I, можно проверить, что $h(z)\in S(1)$. Следовательно,

$$g_1(z)\in S_W(p)\Rightarrow f(z)\in K_W(p),\ p=(\varkappa+n)/2 .$$

С л у ч а й 4. $\varkappa+n=2p+1$ – нечетное число и $\geqslant 5$. Из (3) следует, что m – нечетное число. Как в случае 2, выделим 2 варианта.

I) $\delta_k\in(0,I)$ для любого k. Аналогично случаю 3 составим пары $(e^{i\alpha_{k3}}, e^{i\alpha_{k2}})$, $k=\overline{1,m_2}$, однократных нулей производной $f'(z)$. В силу нечетности m останется еще один нуль производной, за которым сохраним прежнее обозначение $e^{i\alpha_m}$. Предполагаем, что $\alpha_{13}<\alpha_{12}<\ldots<\alpha_{m_2 3}<\alpha_{m_2 2}<\alpha_m<\alpha_{13}+2\pi$. Докажем следующий результат.

Без ограничения общности можно считать, что между $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\alpha_{13}}$ (т.е. на дуге с $\alpha_m\le\theta<\alpha_{13}+2\pi$) раположены точки a_1, ..., a_r ($1<r\le n$) из совокупности $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, которые характеризуются соотношением

$$\sum_{k=1}^{r}\delta_k\le r-1 , \tag{6}$$

где δ_k соответствует $a_k=e^{i\varphi_k}$ в представлении (2).

Действительно, если $m_2=0$, т.е. однократный нуль у $f'(z)$ является единственным, то берем весь набор $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, причем для него неравенство (6) выполняется: $\sum_{k=1}^{n}\delta_k=n-2p-1<n-1$.

При условии, что однократных нулей будет $2m_2+1>1$, рассмотрим $2m_2+1$ дуг ℓ_j, следующих друг за другом, с концами в этих нулях. Начальную точку ℓ_j причислим к ней, конечную точку ℓ_j отнесем к ℓ_{j+1}. Это значит, что $\bigcup_{j=1}^{2m_2+1} \ell_j = \partial E$ без перекрытий и без пропусков. Пусть на дуге ℓ_j расположено n_j точек $\{a_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \subset \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и на каждой дуге ℓ_j выполняется неравенство, противоположное (6), т.е.

$$\sum_{k=1}^{n_j} \delta_k^{(j)} > n_j - 1 .$$

Просуммировав эти неравенства по j, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k > n-1-2m_2 .$$

Но $2m_2+1 \le m < 2p+1$, следовательно, $n-\sum_{k=1}^{n}\delta_k < 2p+1$. Этого не может быть, так как $\varkappa + n = 2p+1$ и $\varkappa = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k$.

Значит, хотя бы для одной дуги ℓ_j будет выполняться нужное неравенство вида (6). Выполнения самого неравенства (6) добьемся переобозначением наборов $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{e^{i\alpha_k}\}$.

Опираясь на доказанный результат, возьмем для представления $zf'(z) = g_1(z)\, g_2(z)$ функцию

$$g_2(z) = C_1 \prod_{k=1}^{m} \frac{z-e^{i\alpha_{k3}}}{z-e^{i\alpha_{k2}}} \cdot \frac{z-e^{i\alpha_m}}{\prod_{k=1}^{r}(z-a_k)^{\sigma_k-\delta_k}} .$$

Вторая дробь в этом произведении строится так же, как и в первом варианте случая 2.

Функция $g_2(z)$ отображает E на риманову поверхность, состоящую из m_2 полуплоскостей и одного сектора с углом при вершине $\le \pi$ и радиальными разрезами. Поэтому существует такое $\sigma \in (-\pi, \pi]$, что $Re(e^{i\sigma} g_2(z)) > 0$, $z \in E$.

Функцию $g_1(z) = zf'(z)/g_2(z)$ представим в виде

$$g_1(z)=z^{p}\prod_{k=1}^{q}\frac{(z-b_k)(1-\bar b_k z)}{z}\prod_{k=1}^{m_1}\frac{(z-e^{i\alpha_{k1}})^2}{z}\prod_{k=1}^{m_2}\frac{(z-e^{i\alpha_{k2}})^2}{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k-1}=$$

$$=h^{p}(z)\prod_{k=1}^{q+(m-1)/2+1}\varphi(z,z_k),$$

причем $h(z)=z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{(\delta_k-1)/p}$, $p=q+(m-1)/2+1=[(\varkappa+n)/2]$.

Можно проверить, что $h(z)\in S(1)$, поэтому $g_1(z)=S_W([(\varkappa+n)/2])$ и, следовательно, $f(z)\in K_W([(\varkappa+n)/2])$.

2) Если существует хотя бы одно значение $\delta_{k_0}\in(-1,0]$, то полагая $g_2(z)=C_1\prod_{k=1}^{m_2+1}(z-e^{i\alpha_{k3}})/(z-e^{i\alpha_{k2}})$, где $exp(i\alpha_{(m_2+1)2})=a_{k_0}$, и проводя рассуждения, как и в предыдущем случае, получим утверждение теоремы. Теорема полностью доказана.

Задача (I), когда γ_k поочередно равно 0 и $\pi/2$, а число участков является четным ($n=2m$), называется смешанной краевой задачей. Для такой задачи получим из теоремы I

Следствие. Решение смешанной краевой задачи, имеющей $2m$ точек стыка $\{a_k, b_k\}$, $k=\overline{1,m}$, с постоянными коэффициентами c_k, будет p -листной функцией, причем величина p не превышает следующих значений:

I) $[m/2]$ для решения, ограниченного во всех точках стыка,

2) m для решения, ограниченного в окрестности точек a_k и неограниченного в окрестности точек b_k, $k=\overline{1,m}$;

3) $[3m/2]$ для решения, неограниченного в окрестности всех точек $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{m}$.

Доказательство основано на том, что максимальный порядок листности по теореме I равен $[(\varkappa+2m)/2]$. Индекс $\varkappa$ задачи в трех отмеченных вариантах равен соответственно $-m$, 0, m. Поэтому для оценки порядка листности имеем числа $[m/2]$, m и $[3m/2]$.

Замечание. Можно найти и наименьшее число листов для решения в вариантах I) – 3). Такими числами будут I и $[m/2]+\delta(m/4)$, где

$\delta(\beta) = \{ 0, \ \beta = q$ – целое число; $1, \beta \neq q \}$.
Достижение I в первом случае обосновывается примером задачи с однолистным решением. В двух оставшихся вариантах наименьшее число листов определяется из характера поведения решения в окрестности ∞. Действительно, во втором случае самое большее 2 из четырех последовательных вершин могут лежать на ∞ и при этом располагаться на одном листе. Всех листов окажется $m/2$ при четном m и $[m/2]+1$ – при нечетном m. Аналогично и в варианте 3.

2. В структурные формулы классов многолистных функций входят множители вида $z - a_k$, $|a_k| \leq 1$, характеризующие либо нули функции, либо нули ее производной. Поэтому, чтобы установить соответствие между решением задачи Гильберта и некоторым классом многолистных функций, необходимо знать возможное число нулей решения.

Рассмотрим краевую задачу Гильберта для единичного круга

$$Im[e^{-i\omega(\theta)} f(e^{i\theta})] = c(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{7}$$

с разрывными кусочно-гёльдеровыми коэффициентами. Пусть функции, входящие в краевое условие (7), имеют разрывы первого рода: $\omega(\theta)$ в точках $\theta = \varphi_k$, $k = \overline{1,n}$; $c(\theta)$ в точках $\theta = \psi_k$, $k = \overline{1,m}$.

Обозначим через $\varkappa_H$ индекс задачи (7) в классе неограниченных (по возможности) в точках стыка функций [4], пусть $\varkappa_0 = [\varkappa_H/2]$. Обозначим через $N(E)$ число нулей решения задачи (7), лежащих в E. Пусть $f(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - e^{i\varphi_k})^{\delta_k} P(z) F_0(z)$, где $\delta_k \in (-1;1)$, $k = \overline{1,n}$; $P(z)$ – некоторый многочлен; $F_0(z) \neq 0$ для любого $z \in \bar{E}$. Тогда через $N(\partial E)$ обозначим количество нулей многочлена $P(z)$, лежащих на ∂E.

<u>Лемма 2</u>. Если существует конечное число точек, в которых $c(\theta)$ обращается в 0, причем при переходе через $2n_c$ нулей или точек разрыва $c(\theta)$ меняет знак, то $N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$. Если $c(\theta) \neq 0$, когда θ пробегает интервал $[0, 2\pi]$, то $N(E) = \varkappa_0 + n_c$. Для однородной задачи выполняется равенство $2N(E) + N(\partial E) = \varkappa$.

<u>Замечания</u>. I. Если $\varkappa$ – индекс задачи в искомом классе функций – отрицательное число, то лемма будет верна при выполнении $-\varkappa - 1$ условий разрешимости.

2. Если коэффициенты задачи удовлетворяют условию Гельдера, то значение $\varkappa_H$ в формулировке леммы надо заменить на $\varkappa$.

Доказательство. I. Рассмотрим случай, когда решение не обращается в 0 на границе, т.е. $N(\partial E)=0$.

а) Решением задачи Шварца $\operatorname{Im}[f(e^{i\theta})]=c(\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$, которая является частным случаем задачи (7) при $\omega(\theta)\equiv 0$, будет аналитическая функция, имеющая логарифмические особенности в точках разрыва $c(\theta)$,

$$f(z)=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta+c_0\equiv iS\,(c(\theta),z)+c_0 \quad ,$$

где c_0 – произвольная действительная постоянная. Отсюда, применяя формулу для предельных значений интеграла Шварца, получим:

$$f(e^{i\varphi})=ic(\varphi)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta+c_0,\ \varphi\neq\varphi_k,\ k=\overline{1,m}\ . \tag{8}$$

Образ $f(E)$ под действием постоянной c_0 будет перемещаться параллельно вещественной оси, заметая некоторую полосу. Если бы у $f(z)$ при каком-то значении c_0 число нулей $N(E)$ было больше n_c, то по принципу аргумента число витков вокруг начала координат кривой с уравнением (8) превысило бы n_c. Следовательно, в этом случае число точек смены знака функции $c(\varphi)$ должно быть больше $2n_c$, то противоречит условию теоремы. Поэтому $N(E)\le n_c$.

Если $c(\theta)\neq 0$, когда θ пробегает интервал $[0,2\pi]$, но при этом существует $2n_c$ точек, при переходе через которые $c(\theta)$ меняет знак, то это означает, что действительная ось покрывается областью $f(E)$ ровно n_c раз. В этом случае $N(E)=n_c$.

б) Решением неоднородной задачи, по возможности неограниченным в точках стыка, является функция

$$f(z)=z^{\varkappa_0}e^{i\gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\delta_k}\varphi(z) \quad , \tag{9}$$

где $\delta_k=[\omega(\varphi_k-0)-\omega(\varphi_k+0)]/\pi-\varkappa_k$, $\delta_k\in(-1,0]$, $k=\overline{2,n}$,

$\delta_1=[\omega(\varphi_1-0)-\omega(\varphi_1+0)]/\pi-\varkappa_1+\delta(\varkappa_H/2)$,

$\delta(\beta)=\{0,\ \beta=q$ – целое; $1,\ \beta\neq q\}$,

$\delta_1\in(-1,0]$, если $\varkappa_H$ – четное, $\delta_1\in(0,1]$, если $\varkappa_H$ – нечетное;

$$\gamma(z) = S\left[\omega(\theta) - \rho\theta - \sum_{k=1}^{n} \delta_k \arg(e^{i\theta} - a_k), z\right],$$

$$\omega_1(\theta) = \operatorname{Im} \gamma(e^{i\theta}),$$

$$Q(z) = iS\left[e^{\omega_1(\theta)} c(\theta) \prod_{k=1}^{n} |e^{i\theta} - a_k|^{\delta_k}, z\right] +$$

$$+ a_0 + ib_0\delta(\varkappa_H/2)(z + a_1)/(z - a_1) + \sum_{k=1}^{\varkappa_0} (c_k z^k + \bar{c}_k z^{-k}),$$

$$a_0, b_0 \in \mathbb{R}, \quad c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, \varkappa_0}.$$

При изменении значений параметров c_k, $k = \overline{0, \varkappa_0}$, граничные точки области $\mathcal{D} = Q(E)$ будут перемещаться параллельно вещественной оси.

Пусть индекс $\varkappa_H$ – неотрицательное число, тогда число полюсов функции $Q(z)$, расположенных в 0, не превышает величины $r = \max\{k : c_k \neq 0\}$, а число $N(E)$ нулей не превышает n_c в силу рассуждений из предыдущего пункта. Следовательно, разность между N_Q нулей функции $Q(z)$ и числом P_Q ее полюсов будет удовлетворять неравенству $-\varkappa_0 \leq N_Q - P_Q \leq n_c$. Если $\varkappa_H$ – нечетное число, то функция $Q(z)$ имеет полюс первого порядка на границе в точке $z = a_1$, но за счет множителя $(z - a_1)^{\delta_1}$, $\delta_1 \in (0,1)$ получим, что $f(z)$ в точке $z = a_1$ имеет особенность порядка $1-\delta_1$.

Так как $\Delta_{\partial E(1-\varepsilon)} \arg(z - a_k)^{\delta_k} = 0$, где $\partial E(1-\varepsilon) = \{z : |z| = 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, $k = \overline{1, n}$, то для нулей функции (9) имеем оценки $0 \leq N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$.

Решение задачи, ограниченное в точках стыка, можно рассматривать как частный случай функции вида (9), когда некоторые точки множества $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ являются корнями уравнения $Q(z) = 0$ соответствующей кратности. При этом происходит уменьшение числа действительных параметров, от которых зависит решение, но оценка $0 \leq N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$, очевидно, сохранится.

Если теперь индекс задачи $\varkappa_H$ – отрицательное число, то в представлении (9) $Q(z) = iS\left[e^{\omega_1(\theta)} c(\theta) \prod_{k=1}^{n} |e^{i\theta} - a_k|^{\delta_k}, z\right] + a_0 + ib_0\delta\left(\frac{\varkappa_H}{2}\right) \frac{z + a_1}{z - a_1}$.

Все предыдущие рассуждения будут иметь место. Условие $\varkappa_0 + n_c \geq 0$ можно рассматривать как необходимое условие разрешимости.

2. Пусть решение обращается в 0 в некоторой точке границы, т.е. существует такое значение $z_0 = e^{i\theta_0}$, что $Q(z_0) = 0$. Так как пересечением граничной кривой, уравнение которой $W = Q(e^{i\theta})$, с действительной осью является конечное множество точек, то в плоскости W существует такая окрестность 0, что ни через одну точку этой окрестности (за исключением 0) не проходит граничная кривая. Поэтому для функций

$$f_M(z) = z^{\varkappa_0} e^{i\gamma(z)} \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\delta_k} (Q(z) + \varepsilon_M) ,$$

где $0 < \varepsilon_M < \varepsilon$, ε – радиус окрестности, которые являются решением задачи (6), выполняются утверждения теоремы. Значит, $N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$ для $f_M(z)$ при любом M. Последовательность функций $f_M(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ внутри E при $\varepsilon_M \to 0$. Поэтому для $f(z)$ также будет выполняться неравенство $N(E) \leq \varkappa_0 + n_c$.

3. Пусть $c(\theta) \neq 0$. Используя принцип аргумента для функции $Q(z)$, получим $N_Q - P_Q = n_c$. Поэтому для функции $f(z)$: $N(E) = \varkappa_0 + n_c$. В частном случае, когда $c(\theta) > 0$ $(c(\theta) < 0)$, $N(E) = \varkappa_0$. Для задачи Шварца $N(E) = n_c$.

4. Представим решение однородной задачи $(c(\theta) \equiv 0)$ в виде $f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\delta_k} f_0(z)$. Функция $f_0(z)$ является решением некоторой однородной задачи с гельдеровыми коэффициентами, причем индекс этой задачи равен индексу задачи (7) в искомом классе функций. Для функции $f_0(z)$, а следовательно, и для $f(z)$ выполняется равенство $2N(E) + N(\partial E) = \varkappa$ ([5], с.197). Лемма доказана.

Замечание. Равенство (3) в лемме I можно получить, используя лемму 2. Перейдя от краевого условия (I) к краевому условию для функции $g(z) = izf'(z)$,

$$\operatorname{Im} [e^{-i\gamma_k} g(e^{i\theta})] = 0 , \qquad (10)$$

где решение ищется в классе функций, имеющих особенности порядка не выше второго, заметим, что индексы задач (I) и (10) связаны соотношением $\varkappa_f = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k = \sum_{k=1}^{n} (\varkappa_k + 1) - n = \varkappa_g - n$. В силу леммы 2 для однородной задачи (10) имеем равенство $\varkappa_g = 2(q+1) + m$, где q – число нулей $f'(z)$, лежащих в E, m – число нулей $f'(z)$, лежащих на ∂E. Отсюда сразу получаем равенство (3).

Используя доказанную лемму, сформулируем условия на коэффициенты задачи Гильберта, при выполнении которых устанавливается принадлежность решения задачи некоторому классу многолистных функций.

Обозначим через $\mathcal{M}$ класс функций $\omega(\theta)$, имеющих конечное число точек разрыва первого рода, неубывающих, гёльдеровых между точками разрыва. Справедлива следующая

Теорема 2. Решение однородной задачи Гильберта

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega(\theta)} f(e^{i\theta})] = 0 \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ ,$$

принадлежит классу $S_W(\varkappa)$ – слабо звездных функций порядка $\varkappa$, где $\varkappa$ – индекс задачи, если $\omega(\theta) \in \mathcal{M}$.

Решением задачи Гильберта

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega(\theta)} f'(e^{i\theta})] = c(\theta) \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ ,$$

является слабо почти выпуклая функция порядка $\varkappa + 1$ если $c(\theta) > 0 (c(\theta) < 0)$ и $\omega(\theta) + \theta \in \mathcal{M}$. Если $c(\theta) \equiv 0$, то $f(z) \in S^0_W(\varkappa + 1)$, т.е. слабо выпуклая порядка $\varkappa + 1$ при условии, что $\omega(\theta) + \theta \in \mathcal{M}$.

В работе [2] была сформулирована теорема о конечнолистной разрешимости задачи Гильберта с разрывными коэффициентами, доказательство которой мы сейчас приведем.

Естественным обобщением класса однолистных функций, выпуклых в n направлениях [6], является класс $K(p, n)$, p -листных выпуклых в n направлениях функций.

Определение 3. Функция $F(z)$ принадлежит классу $K(p, n)$, если существует функция $h(z) \in S(1)$, отображающая единичный круг E на плоскость с n радиальными разрезами такая, что

$$F(z) = \int_0^z \frac{h^p(t)}{t} \prod_{k=1}^{p} \varphi(t, z_k)\, p_0(t)\, dt \ ,$$

где $\varphi(z, z_k) = (z - z_k)(1 - \bar{z}_k z)/z$, $|z_k| < 1$, $k = \overline{1,p}$, функция $p_0(z)$, $p_0(0) = 1$, регулярна в E и удовлетворяет условию $\operatorname{Re} e^{i\sigma} p_0(z) > 0$ с некоторым $\sigma \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге E, непрерывно продолжима на границу, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет порядок роста, меньший единицы, и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k}f(e^{i\theta})] = c_k(\theta), \quad \theta \in (\varphi_k, \varphi_{k+1}), \qquad (11)$$

$0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$; γ_k – постоянные величины, $k = \overline{1,n}$.

<u>Теорема 3</u>. Решение задачи (10) в классе функций, ограниченных в точках стыка или имеющих там особенности с порядками, меньшими $\delta_k = (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi$, $k = \overline{2,n}$, $\delta_1 = (\gamma_1 - \gamma_n + 2\pi p)/\pi$, будет не более чем p – листным в круге E, если $0 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < 2\pi p$, $\gamma_k - \gamma_{k-1} < \pi$, $k = \overline{2,n}$, $\gamma_1 - \gamma_n < \pi - 2\pi p$ и $c_k(\theta)$ – возрастающие дифференцируемые по θ функции.

Доказательство. Покажем, что решение принадлежит классу выпуклых в n направлениях порядка p функций. По лемме 2 решение задачи

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k + i\pi/2} e^{i\theta} f'(e^{i\theta})] = c_k'(\theta), \quad \theta \in (\varphi_k, \varphi_{k+1}), \qquad (12)$$

полученной дифференцированием краевого условия (11) по параметру θ, имеет $\varkappa_H$ нулей. В нашем случае $\varkappa_H = p$.

При построении решения используем функцию

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^{p} \varphi(z, z_k) \prod_{k=1}^{n} (1 - \bar{a}_k z)^{-(\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi},$$

отображающую круг на p –листную область, внешность прямолинейных разрезов, проведенных под углами $\gamma_k \pi$ к положительному направлению действительной оси. Нули функции $\Psi(z)$ должны совпадать с нулями функции $z f'(z)$. Умножим (12) на $|\Psi(e^{i\theta})|^{-1}$. Учитывая граничное поведение $\Psi(z)$, имеем

$$\operatorname{Re}[e^{i\theta} f'(e^{i\theta})/\Psi(e^{i\theta})] = c_k'(\theta)/|\Psi(e^{i\theta})|.$$

Функция $f(z)$ аналитична в круге, на границе может иметь особенности порядка не выше первого и $\operatorname{Re}[e^{i\theta} f'(e^{i\theta})/\Psi(e^{i\theta})] > 0$. Так как выполняются условия леммы из [7], то $\operatorname{Re}[z f'(z)/\Psi(z)] > 0$. Следовательно, $f(z) \in K(p, n)$, и теорема 3 доказана.

3. В п.1 было отмечено, что задача Гильберта (1) с отрицательным индексом $\varkappa$, которая имеет решение при выполнении $-\varkappa-1$ условий разрешимости, в некотором смысле эквивалентна задаче отображения на полигональные области. Знание геометрических свойств решения задачи Гильберта помогает видоизменить задачу так, чтобы она стала корректной.

В связи с этим интересно было бы найти варианты постановки задачи Гильберта (I) или (7) со свободными параметрами, за счет выбора которых задача становится корректно поставленной.

Одно из таких видоизменений дает краевое условие в форме

$$Re(e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})) = c_k + d_k \ , \quad \theta \in (\varphi_k , \varphi_{k+1}) \ , \quad k = \overline{1,n} \ ,$$

причем количество неизвестных параметров d_k равно $-\varkappa-1$. Для других видоизменений можно привлекать $\{\gamma_k\}$ и $\{\varphi_k\}$.

В заключение обратим внимание на истолкование с точки зрения многолистных функций классов корректности задачи Римана, которые предложены Ф.Д.Гаховым.

В своей монографии ([4], с.188) Ф.Д.Гахов при обсуждении вопросов корректности предлагает переходить от задачи Римана с индексом, отличным от нуля, к задаче Римана с нулевым индексом. Переход осуществляется с помощью функций, которые могут быть локально многолистными и покрывать окрестности конечных точек листами в количестве, равном $\varkappa_+$ для функции $\Phi^+(z)$ и $\varkappa_-$ – для функции $\Phi^-(z)$, причем $\varkappa_+ + \varkappa_- = \varkappa$ в случае положительного индекса $\varkappa$.

В случае отрицательного индекса количество листов, покрывающих окрестность ∞, будет равно $|\varkappa| = |\varkappa_+| + |\varkappa_-|$, где $|\varkappa_+|$ – порядок листности в ∞ от $\Phi^+(z)$ и $|\varkappa_-|$ – порядок листности в ∞ от $\Phi^-(z)$. Тем самым можно утверждать, что задача Римана оказывается корректно поставленной в классе функций, который состоит из аналитических функций не менее, чем $\varkappa_+$ -листных для $\Phi^+(z)$ и не менее, чем $\varkappa_-$ -листных для $\Phi^-(z)$ $(\varkappa_+ + \varkappa_- = \varkappa > 0)$. Для отрицательного индекса задача Римана оказывается корректно поставленной в расширенном классе аналитических функций с добавлением полярных особенностей, превращающих $\Phi^-(z)$ в не менее, чем $|\varkappa_-|$ -листную функцию и $\Phi^+(z)$ в не менее, чем $|\varkappa_+|$ -листную функцию $(\varkappa_+ + \varkappa_- = \varkappa < 0)$.

Видимо, расширение класса искомых функций с добавлением полярных особенностей с суммарным порядком $-\varkappa-1$, $\varkappa < 0$, сделает корректной такую постановку и для задачи Гильберта.

Литература

1. Аксентьев Л. А. Достаточные условия многолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980. – Вып. 17. – С.2 – 17.

2. Аксентьев Л. А., Зорин И. А. Условия конечнолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краев.задачам. Казань, 1990. – Вып. 25. – С.20 – 31.

3. Styer D. Close – to – convex multivalent functions with respect to weakly starlike functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V.169. – N 7. – P. 105 – 112.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

6. Прохоров Д. В., Рахманов Б. Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций // Матем. заметки. – 1976. – Т.19. – № 1. – С.41 – 48.

7. Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации // УМН. – 1959. – Т.14. – Вып. 4. – С.133 – 140.

Ф.Х.Арсланов, С.Р.Насыров

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УСЛОВИЙ ОДНОЛИСТНОСТИ БЕККЕРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $f(z)$ регулярна и локально однолистна в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$. Хорошо известно, что $f(z)$ будет однолистна в E, если выполняется одно из условий [1]:

$$|f''(z)/f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2), \quad z\in E, \tag{1}$$

(или [2])

$$|f''(z)/f'(z)| \leq 3,05\ldots, \quad z\in E. \tag{2}$$

Естественно поставить вопрос о "соединении" этих двух условий, то есть получении достаточных условий однолистности вида