Е. П. Шустова, О лифтах основных геометрических объектов в касательное расслоение порядка k, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 179–186

Е.П. Шустова

О ЛИФТАХ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПОРЯДКА k

Аннотация

В локальной системе координат получены явные формулы, позволяющие эффективно вычислять компоненты лифтов основных дифференциально геометрических объектов в касательное расслоение порядка k.

Abstract

E.P. Shustova **On lifts of basic differential geometric objects to the tangent bundle of order** k

We find explicit formulas for effective calculation of components of lifts of differential geometric objects into the tangent bundle of order k.

Под касательным расслоением k-того порядка T^kM_n пространства аффинной связности M_n будем понимать множество k-струй гладких отображений $\gamma : R \longrightarrow M_n$, где R это вещественная прямая [1]. Пусть отображение $\gamma : R \longrightarrow M_n$, k-струя $j_0^k\gamma$ которого служит элементом расслоения T^kM_n, задано в локальных координатах формулами $x^i = x^i(t)$ $(i = \overline{1,n})$, причем при $t = 0$ получается рассматриваемая точка $x \in M_n$. Тогда указанная k-струя отображения γ определяется точкой x и значениями первых k производных от функции $x^i(t)$ по t при $t = 0$. Пусть $(x^i; x^{n+i}; x^{2n+i}; \dots; x^{kn+i})$ — локальная система координат в T^kM_n, где x^{mn+i} — производная порядка $m = \overline{1,k}$ от x^i по t, деленная на $m!$.

В [1–3] для основных дифференциально-геометрических объектов (функции, векторных и ковекторных полей, тензорных полей типа (p,q), линейной связности) на многообразии M_n были определены их лифты в T^kM_n и доказано, что эти лифты существуют и единственны, а также показана их взаимосвязь с алгебрами.

В случае расслоений TM_n, T^2M_n, T^3M_n в локальной системе координат были получены явные формулы для вычисления компонент указанных выше лифтов [1–4].

В настоящей статье в указанной выше локальной системе координат получим явные формулы, позволяющие эффективно вычислять компоненты лифтов основных дифференциально-геометрических объектов в касательное расслоение порядка k.

Для дальнейшей компактной записи удобно ввести в рассмотрение оператор D_a, действующий на некоторый дифференциально-геометрический объект Ω, заданный на базе M_n, следующим образом:

$$D_a[\Omega] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{a} \frac{1}{i!}\partial_{p_1\dots p_i}\Omega \sum\limits_{l_1,\dots,l_i=1}^{a} \delta^a_{l_1\dots l_i} x^{l_1n+p_1}\dots x^{l_in+p_i}, & a=\overline{1,k} \\ \Omega, & a=0, \end{cases}$$

где

$$\delta^a_{l_1\dots l_i} = \begin{cases} 1, & l_1+\dots+l_i = a \\ 0, & l_1+\dots+l_i \neq a, \end{cases} \qquad p_1,\dots p_i = \overline{1,n}.$$

Здесь и далее используется правило суммирования Эйнштейна.

В следующем предложении приведем свойства этого оператора, которые будут необходимы при выводе рабочих формул для вычисления компонент указанных выше лифтов.

Предложение 1. *Оператор D_a обладает следующими свойствами:*

$$D_a[\Phi+\Psi] = D_a[\Phi] + D_a[\Psi], \qquad a=\overline{0,k} \tag{1}$$

$$D_a[\Phi\Psi] = \sum_{a_1,a_2=0}^{a} \delta^a_{a_1a_2} D_{a_1}[\Phi]D_{a_2}[\Psi], \qquad a=\overline{0,k} \tag{2}$$

$$D_a[\Phi\Psi\Theta] = \sum_{a_1,a_2,a_3=0}^{a} \delta^a_{a_1a_2a_3} D_{a_1}[\Phi]D_{a_2}[\Psi]D_{a_3}[\Theta], \qquad a=\overline{0,k} \tag{3}$$

$$\partial_{s_1n+s}D_a[\Phi] = \partial_s D_{a-s_1}[\Phi], \qquad a=\overline{1,k} \tag{4}$$

$$\partial_s D_a[\Phi] = D_a[\partial_s\Phi], \qquad a=\overline{0,k} \tag{5}$$

где Φ, Ψ, Θ — дифференциально-геометрические объекты, заданные на базе M_n.

Первая и пятая формулы этого предложения очевидны. Вторую и третью можно доказать индукцией по $a = \overline{0,k}$. Четвертую — индукцией по $s_1 = \overline{k,1}$ для любых $s = \overline{1,n}$, $a = \overline{1,k}$.

Пусть $\overset{c(j)}{f}$ — лифт индекса j функции f, заданной на базе M_n, в касательное расслоение порядка k [3], т.е. $\overset{c(j)}{f} = \frac{1}{j!}\frac{d^j f}{dt^j}$.

Индукцией по $j = \overline{1,k}$ можно доказать, что лифт индекса j функции f, заданной на базе M_n, в касательное расслоение порядка k в локальных координатах $(x^\alpha)_{\alpha=\overline{1,n(k+1)}}$ имеет вид: $\overset{c(j)}{f} = D_j[f]$. Заметим, что $\overset{c(k)}{f} = D_k[f]$ — полный лифт функции f.

Тогда в голономном поле реперов $\partial/\partial x^\alpha$ координаты полного лифта векторного поля $v(v^i)$, заданного на базе M_n, имеют вид:

$$\overset{c(k)}{v}{}^{an+i} = D_a[v^i], \qquad a = \overline{0,k}. \tag{6}$$

Предложение 2. *В локальных координатах* $(x^\alpha)_{\alpha=\overline{1,n(k+1)}}$ *компоненты* $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,n(k+1)})$ *полного лифта в* T^kM_n *линейной связности* Γ^i_{jk}, *заданной на базе* M_n, *вычисляются по формуле:*

$$\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{an+i}_{bn+m\, cn+s} = D_{a-b-c}[\Gamma^i_{ms}], \quad b,c = \overline{0,a}, \quad a = \overline{0,k},$$

причем $(b+c) \le a$. *Остальные* $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$.

Доказательство. Из условия

$$\overset{c(k)}{\nabla}_{\overset{c(k)}{v}} \overset{c(k)}{w} = (\nabla_v w)^{c(k)}, \tag{7}$$

где $v = v^i\partial/\partial x^i$, $u = u^i\partial/\partial x^i$ — произвольные векторные поля на M_n и $\nabla_v u = v^s \nabla_s u$, находятся компоненты полного лифта $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ линейной связности Γ^i_{jk} в рассматриваемое касательное расслоение порядка k.

Воспользовавшись определением ковариантной производной (а в правой части этого равенства и формулами (6) и (1)), запишем условие (7) в координатном виде:

$$\overset{c(k)}{v}{}^{\sigma}(\partial_\sigma \overset{c(k)}{w}{}^{an+i} + \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{an+i}_{\mu\sigma} \overset{c(k)}{w}{}^{\mu}) = D_a[v^s\partial_s w^i] + D_a[v^s w^m \Gamma^i_{ms}], \tag{7'}$$

$$a = \overline{0,k}, \quad i,s,m = \overline{1,n}, \quad \sigma,\mu = \overline{1,n(k+1)}.$$

При $a=0$ условие $(7')$ в силу формул (6) принимает вид:

$$v^s(w^m \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i}_{ms} + \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i}_{m_1n+m\ s} \overset{c(k)}{w}{}^{m_1n+m}) +$$
$$+ \overset{c(k)}{v}{}^{s_1n+s}(\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i}_{m\ s_1n+s} w^m + \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i}_{m_1n+m\ s_1n+s} \overset{c(k)}{w}{}^{m_1n+m}) = v^s w^m \Gamma^i_{ms}.$$

Так как это условие должно выполняться для любых векторных полей $v(v^i)$, $w(w^i)$, заданных на базе, отсюда имеем: $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i}_{ms} = \Gamma^i_{ms}$. Остальные $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i}_{\beta\gamma} = 0$.

При $a \neq 0$, т.е. при $a = i_1 = \overline{1,k}$, условие $(7')$ в силу формул (6) и ((2), (3)) используемых соответственно в левой и правой частях этого равенства, принимает вид :

$$v^s \partial_s D_{i_1}[w^i] + \overset{c(k)}{v}{}^{s_1n+s} \partial_{s_1n+s} D_{i_1}[w^i] +$$
$$+ \sum_{a_1,a_2=0}^{k} D_{a_1}[v^s] \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1n+i}_{a_2n+m\ a_1n+s} D_{a_2}[w^m] =$$
$$= \sum_{a_1,a_2=0}^{i_1} \delta^{i_1}_{a_1a_2} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[\partial_s w^i] +$$
$$+ \sum_{a_1,a_2,a_3=0}^{i_1} \delta^{i_1}_{a_1a_2a_3} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] D_{a_3}[\Gamma^i_{ms}], \qquad s_1 = \overline{1,k}.$$

Заметим, что в силу строения оператора D_a во второй сумме левой части ненулевые члены появляются только при $s_1 = \overline{1, i_1}$. Видим, что воспользовавшись еще раз формулой (6), это условие можно записать следующим образом:

$$v^s \partial_s D_{i_1}[w^i] + \sum_{a_1=1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] \partial_{a_1n+s} D_{i_1}[w^i] +$$
$$+ \sum_{a_1,a_2=0}^{k} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1n+i}_{a_2n+m\ a_1n+s} =$$
$$= v^s D_{i_1}[\partial_s w^i] + \sum_{a_1=1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] D_{i_1-a_1}[\partial_s w^i] +$$
$$+ \sum_{a_1,a_2=0, a_1+a_2 \leq i_1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] D_{i_1-a_1-a_2}[\Gamma^i_{ms}].$$

Воспользовавшись теперь формулами (4) и (5), приходим к тому, что условие (7′) при $a \neq 0$, т. е. при $a = i_1 = \overline{1,k}$, имеет вид:

$$\sum_{a_1,a_2=0}^{k} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] \overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1 n+i}_{a_2 n+m\ a_1 n+s} =$$

$$= \sum_{a_1,a_2=0, a_1+a_2\le i_1}^{i_1} D_{a_1}[v^s] D_{a_2}[w^m] D_{i_1-a_1-a_2}[\Gamma^i_{ms}].$$

Так как это условие должно выполняться для любых векторных полей v, w, заданных на базе, отсюда имеем:

$$\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{i_1 n+i}_{a_2 n+m\ a_1 n+s} = \begin{cases} D_{i_1-a_2-a_1}[\Gamma^i_{ms}], & a_1, a_2 = \overline{0, i_1}, \quad a_1 + a_2 \le i_1 \\ 0, & a_1, a_2 = \overline{0,k}, \quad a_1 + a_2 > i_1. \end{cases}$$

Тем самым предложение доказано. □

Предложение 3. *Пусть M_n — риманово пространство с метрикой g_{ij}. Компоненты $\overset{c(k)}{g}_{\beta\gamma}$ $(\beta, \gamma = \overline{1, n(k+1)})$ полного лифта в $T^k M_n$ метрики g_{ij}, заданной на базе M_n, вычисляются по формуле:*

$$\overset{c(k)}{g}_{bn+i\ cn+j} = D_{k-b-c}[g_{ij}], \qquad b, c = \overline{0,k},$$

причем $(b + c) \le k$. Остальные $\overset{c(k)}{g}_{\beta\gamma} = 0$.

Доказательство. Касательное расслоение $T^k M_n$ можно рассматривать как пространство над алгеброй плюральных чисел $R(\varepsilon)$ порядка k $(\varepsilon^{k+1} = 0)$. Естественные продолжения компонент g_{ij}, v^i тензорного $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ и векторного $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ полей в алгебру плюральных чисел порядка k имеют вид: $G_{ij} = \sum\limits_{s=0}^{k} D_s[g_{ij}]\varepsilon^s$, $V^i = \sum\limits_{s=0}^{k} v^{sn+i}\varepsilon^s$. Поэтому свертка $G_{ij} V^i W^j$, являющаяся инвариантом по отношению к преобразованиям индуцированных координат, запишется в виде:

$$G_{ij} V^i W^j = \left(\sum_{s_1=0}^{k} D_{s_1}[g_{ij}]\varepsilon^{s_1}\right) \cdot \left(\sum_{s_2=0}^{k} v^{s_2 n+i}\varepsilon^{s_2}\right) \cdot \left(\sum_{s_3=0}^{k} w^{s_3 n+j}\varepsilon^{s_3}\right) =$$

$$= \sum_{a=0}^{k} \varepsilon^a \left(\sum_{a_1,a_2,a_3=0}^{a} \delta^a_{a_1 a_2 a_3} D_{a_1}[g_{ij}]\, v^{a_2 n+i}\, w^{a_3 n+j} \right) =$$

$$= \sum_{a=0}^{k} \varepsilon^a \sum_{\substack{a_1,a_2,a_3=0 \\ a_1+a_2\le a}}^{a} D_{a-a_1-a_2}[g_{ij}]\, v^{a_1 n+i}\, w^{a_2 n+j}.$$

Отсюда при $a = \lambda = \overline{0, k}$ получаем вид компонент λ-лифта метрики g_{ij} в $T^k M_n$. При $a = 0$ получаем вертикальный лифт в $T^k M_n$.

При $a = k$ получаем вид компонент полного лифта метрики g_{ij} в касательное расслоение $T^k M_n$, приведенный в этом предложении. □

Предложение 4. *Пусть M_n — дифференцируемое многообразие размерности n. В локальных координатах $(x^\alpha)_{\alpha=\overline{1,n(k+1)}}$ компоненты $\overset{c_\lambda(k)}{T}{}^{c_1 n+i_1 \,\dots\, c_p n+i_p}_{b_1 n+j_1 \,\dots\, b_q n+j_q}$ лифта индекса λ в $T^k M_n$ тензорного поля $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, заданного на базе M_n, имеют вид:*

$$\overset{c_\lambda(k)}{T}{}^{c_1 n+i_1 \,\dots\, c_p n+i_p}_{b_1 n+j_1 \,\dots\, b_q n+j_q} = D_{\lambda-b_1-\dots-b_q-c_1-\dots-c_p}[T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}],$$

причем $(b_1 + \dots + b_q + c_1 + \dots + c_p) \le \lambda$, $c_1, \dots, c_p, b_1, \dots, b_q = \overline{0, k}$, $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = \overline{1, n}$. Остальные компоненты $\overset{c_\lambda(k)}{T}{}^{c_1 n+i_1 \,\dots\, c_p n+i_p}_{b_1 n+j_1 \,\dots\, b_q n+j_q}$ равны нулю.

Доказательство. Естественные продолжения компонент $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, v^i, w_i тензорного поля типа (p,q), векторного и ковекторного полей в алгебру плюральных чисел порядка k имеют соответственно вид:

$$\tilde{T}_{ij} = \sum_{s=0}^{k} D_s[T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}]\,\varepsilon^s, \qquad V^i = \sum_{s=0}^{k} v^{sn+i}\,\varepsilon^s, \qquad W_i = \sum_{s=0}^{k} w_{(k-s)n+i}\,\varepsilon^s.$$

Поэтому свертка $\tilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \prod\limits_{l=1}^{q} \overset{l}{V}{}^{j_l} \prod\limits_{m=1}^{p} \overset{m}{W}{}_{i_m}$, являющаяся инвариантом по отношению к преобразованиям индуцированных координат, имеет вид:

$$\tilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \prod_{l=1}^{q} \overset{l}{V}{}^{j_l} \prod_{m=1}^{p} \overset{m}{W}{}_{i_m} =$$

$$= \left(\sum_{s_1=0}^{k} D_{s_1}[T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}]\,\varepsilon^{s_1}\right) \cdot \left(\prod_{l=1}^{q} \sum_{s_{2_l}=0}^{k} \overset{l}{v}{}^{s_{2_l}n+j_l}\,\varepsilon^{s_{2_l}}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{m=1}^{p} \sum_{s_{3_m}=0}^{k} \overset{m}{w}{}_{(k-s_{3_m})n+i_m}\,\varepsilon^{s_{3_m}}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \varepsilon^r \left(\sum_{\substack{a,b_1,\dots,b_q,c_1,\dots,c_p=0 \\ a+b_1+\dots+b_q+c_1+\dots+c_p=r}}^{r} D_a[T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}] \prod_{l=1}^{q} \overset{l}{v}{}^{b_l n+j_l} \prod_{m=1}^{p} \overset{m}{w}{}_{(k-c_m)n+i_m} \right).$$

Отсюда при $r = \lambda = \overline{0, k}$ получаем вид компонент λ-лифта тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ в касательное расслоение $T^k M_n$, приведенный в этом предложении.

При $\lambda = 0$ получаем вид компонент вертикального, а при $\lambda = k$ — полного лифта в $T^k M_n$ тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Заметим, что даже при $k = 2, 3$ получение соответствующих формул для вычисления лифтов указанных выше дифференциально-геометрических объектов без использования оператора D_a занимает гораздо больший объем и выглядит громоздким.

Введение же оператора D_a, как видим, дает возможность с помощью несложных вычислений получить в локальных координатах явные формулы для нахождения компонент указанных выше лифтов, а также представить лифты различных дифференциально-геометрических объектов как действие оператора D_a на дифференциально-геометрический объект.

Литература

[1] Вишневский В. В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.*–Казань: Казанск. ун-т.–1985.–264 с.

[2] Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.*–Сб.: Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979, с. 189–204.

[3] Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами.*–Сб.: Проблемы геометрии. Т. 12. М., 1981, с. 61.

[4] Шустова Е.П. *О взаимосвязи геометрий касательного расслоения третьего порядка и суммы Уитни.*/Труды геометр. семин.– Выпуск 23.– Казань.– Казанск.гос.ун-т.– 1997.–Изд-во Казанск. матем. общ-ва.– С. 211-221.

Адрес: *Казанский государственный университет, каф. геометрии, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Mathematical Department, Chair of Geometry, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Evgenia.Shustova@ksu.ru*