Ю. Р. Агачев, Об одном приближенном методе решения дифференциальных уравнений, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 3–14

Ю.Р.Агачев

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К настоящему времени разработаны достаточно эффективные прямые методы решения дифференциальных уравнений с непрерывными, в том числе и гладкими, коэффициентами (см., например, [I - 4] и др.). Однако в случае уравнений с разрывными коэффициентами остаются еще задачи, связанные, с одной стороны, с вопросами обоснования известных методов и, с другой - с разработкой новых, более простых, прямых методов, учитывающих особенности коэффициентов уравнения. Следует отметить, что в последние годы появился ряд работ (см., например, [5 - 7]), в которых дано обоснование полиномиального и сплайнового методов подобластей решения дифференциальных уравнений в пространствах L_p, суммируемых с p -й степенью ($1 \leq p < \infty$) или существенно ограниченных ($p = \infty$) функций.

В данной работе для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка предлагается прямой метод, который достаточно прост в применении и в то же время применим и к уравнениям с произвольными суммируемыми коэффициентами.

§ I. Вычислительная схема метода

Рассмотрим краевую задачу

$$R_\nu(x) = 0 \quad , \quad \nu = \overline{0, m-1} \tag{I}$$

для дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) = y(t) \, , \; a \leq t \leq b \; ; \tag{2}$$

где $g_k(t)$, $k = \overline{1, m}$ и $y(t)$ - известные функции, а R_ν,

$\nu=\overline{0,m-1}$, – линейно независимые непрерывные функционалы на пространстве $C^{(m-1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых $(m-1)$ раз на $[a,b]$ функций. Зададим в промежутке $[a,b]$ сетку узлов

$$\Delta_n: \ a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b \ , \tag{3}$$

удовлетворяющую условию

$$\|\Delta_n\| \equiv \max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0 \ , \ n\to\infty \ .$$

I.I. Приближенное решение задачи (I), (2) будем искать в виде сплайна (см. [8, 9]) $x_n(t)\equiv x_{n,m}(t)$ степени m дефекта I на сетке (3). Ясно, что $x_n(t)$ имеет $(n+m)$ -неизвестных коэффициентов. Определим их из следующих условий:

$$x_n^{(m)}(t_j)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t)\,dt\cdot x_n^{(m-k)}(t_j)=\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} y(t)\,dt, \ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$R_\nu(x_n)=0 \ , \ \nu=\overline{0,m-1} \ . \tag{5}$$

Очевидно, метод (4), (5) представляет собой прямой метод, т.е. условия (4), (5) дают систему $(n+m)$-линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ) относительно $(n+m)$-неизвестных. Заметим, что схема метода (4), (5) имеет смысл, как и схема хорошо известного метода подобластей, и в случае лишь суммируемых коэффициентов исходного уравнения (2). С другой стороны, схема метода (4), (5), использующего усреднение коэффициентов на частичных промежутках, значительно проще схемы метода подобластей.

I.2. Теперь будем решать задачу (I), (2) приближенно с помощью сплайна $x_n(t)\equiv x_{n,m+1}(t)$ степени $m+1$ дефекта I на сетке (3), определив его неизвестные коэффициенты из СЛАУ

$$\left.\begin{aligned} & x_n^{(m)}(t_j)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_j(g_k)\,x_n^{(m-k)}(t_j)=\Phi_j(y), \ j=\overline{0,n}, \\ & R_\nu(x_n)=0 \ , \ \nu=\overline{0,m-1} \ , \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\Phi_j(z)=\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} z(t)\,dt, \ j=\overline{1,n}$,– суть средние значения функции

$z(t)$ на частичных промежутках, $\varphi_0 = \varphi_1$ – в непериодическом случае и $\varphi_0 = \varphi_n$ – в периодическом.

§ 2. Обоснование метода

Относительно вычислительной схемы (4), (5) справедлива

Т е о р е м а I. Пусть функции $g_k \in L_p(a,b), k=\overline{1,m}$, и задача (I), (2) однозначно разрешима при любой правой части $y \in \in L_p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$. Тогда, начиная с некоторого номера n, система (4), (5), также однозначно разрешима и соответствующие решения $x_n^*(t) \equiv x_{n,m}^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ задачи (I), (2) с быстротой

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_p^{(m)}(a,b)} \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{*(k)} - x_n^{*(k)}\|_{C[a,b]} +$$

$$+\|x^{*(m)} - x_n^{*(n)}\|_{L_p(a,b)} = O\Big\{ E_n^0(y)_p + \sum_{k=1}^{m} E_n^0(g_k)_p + \tag{7}$$

$$+\|\Delta_n\|^{(1-1/p)} \cdot \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|} + \|\Delta_n\|\Big\}, \ 1 \le p \le \infty ;$$

здесь $E_n^0(z)_p$ означает наилучшее приближение функции $z \in L_p(a,b)$ сплайнами нулевой степени дефекта I с узлами (3).

С л е д с т в и е. Пусть сетка Δ_n узлов (3) удовлетворяет условию

$$\|\Delta_n\| \,/\, \min_k (t_k - t_{k-1}) \le \beta < \infty , \tag{8}$$

где $\beta > 0$ – абсолютная постоянная. Тогда для погрешности приближенных решений верна оценка[I]

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_p^{(m)}(a,b)} = O\Big\{\omega(y; \frac{1}{n})_p + \sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; \frac{1}{n})_p + \tag{7'}$$

$$+ \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} \cdot n^{-(1-1/p)} + n^{-1}\Big\}, \ 1 \le p \le \infty ;$$

[I] Здесь и далее $\omega(z;\delta)_p$ означает интегральный модуль непрерывности функции $z \in L_p(a,b)$, вычисленный в точке δ.

в частности, если $g_1 \in L_\infty(a,b)$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_p^{(m)}(a,b)} = O\left\{\omega\left(y;\frac{1}{n}\right)_p + \sum_{k=1}^{m}\omega\left(g_k;\frac{1}{n}\right)_p + n^{-1}\right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Y пространство $L_p(a,b)$ с обычной нормой, а через X – пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(a,b)$ функций, имеющих $(m-1)$-ю абсолютно непрерывную производную, m-ю производную из $L_p(a,b)$ и удовлетворяющих краевым условиям (I). Норму в X зададим следующим образом:

$$\|x\|_X = \sum_{k=0}^{m-1}\|x^{(k)}\|_C + \|x^{(m)}\|_{L_p} \qquad (x \in X).$$

Тогда задачу (I), (2) можно записать в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv Gx + Tx = y, \quad Gx \equiv x^{(m)} \quad (x \in X,\ y \in Y), \tag{9}$$

где $T: X \to Y$ – вполне непрерывный оператор, определяемый соотношением

$$(Tx)(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\, x^{(m-k)}(t), \quad x \in X.$$

Поскольку уравнение (9) – приводящееся к уравнению II рода с вполне непрерывным оператором, то в условиях теоремы существует линейный обратный $K^{-1}: Y \to X$, $\|K^{-1}\| < \infty$.

Запишем теперь систему (4), (5) в виде эквивалентного ей операторного уравнения. С этой целью перепишем условия (4) с помощью введенных выше функционалов φ_k, $k=\overline{1,n}$, в виде

$$x_n^{(m)}(t_j) + \sum_{k=1}^{m}\varphi_j(g_k)\, x_n^{(m-k)}(t_j) = \varphi_j(y), \quad j=\overline{1,n}. \tag{4'}$$

Далее введем $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – подпространства сплайнов степени m дефекта I и сплайнов нулевой степени дефекта I соответственно на сетке узлов (3). Ясно, что $\dim X_n = \dim Y_n$. Рассмотрим два оператора P_n и Q_n, действующие из Y в Y_n: оператор P_n любой функции ставит в соответствие интерполяционный сплайн нулевой степени, а Q_n – "усредненный" интерполяционный сплайн нулевой степени (см. [7]), т.е.

$$(P_n y)(t)=\sum_{i=1}^{n} y(t_i)\varphi_i(t), \quad (Q_n y)(t)=\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(y)\varphi_i(t),$$

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} 1, & t_0 \le t \le t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}, \quad \varphi_i(t)=\begin{cases} 1, & t_{i-1} < t \le t_i, \\ 0, & t \le t_{i-1} \text{ и } t > t_i \end{cases} \quad (i=\overline{2,n}).$$

Тогда схема (4′), (5) или, что то же, (4), (5) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n^{(m)} + P_n \sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k) x_n^{(m-k)} = Q_n y \qquad (x_n \in X_n). \quad \text{(I0)}$$

Действительно, так как $x_n^{(m)} \in Y_n$ и $Q_n y \in Y_n$, а оператор P_n обладает свойством $P_n^2 = P_n$, то (I0) можно переписать в виде

$$P_n z_n \equiv P_n \left[x_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k) x_n^{(m-k)} \right] = P_n Q_n y .$$

Отсюда непосредственно следует равенство функций z_n и $Q_n y$ в узлах $t_1, t_2, \ldots, t_n$, т.е. (4′). Обратно, пусть выполнены (4′). Тогда верно равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \left[x_n^{(m)}(t_j) + \sum_{k=1}^{m} \Phi_j(g_k) x_n^{(m-k)}(t_j) \right] \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(y) \varphi_j(t) . \quad \text{(II)}$$

Ясно, что правая часть (II) есть функция $(Q_n y)(t)$. Преобразуем теперь левую часть (II). Имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \left[x_n^{(m)}(t_j) + \sum_{k=1}^{m} \Phi_j(g_k) x_n^{(m-k)}(t_j) \right] \varphi_j(t) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_n^{(m)}(t_j)\varphi_j(t) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(g_k) x_n^{(m-k)}(t_j)\varphi_j(t) = \\ &= (P_n x_n^{(m)})(t) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} \Phi_\ell(g_k)\varphi_\ell(t) \Big) x_n^{(m-k)}(t_j)\varphi_j(t) = \\ &= x_n^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k)(t)(P_n x_n^{(m-k)})(t), \end{aligned} \quad \text{(I2)}$$

так как $\varphi_\ell(t)\varphi_j(t) = 0$, $\ell \ne j$.

Но $Q_n g_k \in Y_n$, $P_n x_n^{(m-k)} \in Y_n$, $k=1,2,\dots,m$. Поэтому

$$(Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} = P_n\left[(Q_n g_k) x_n^{(m-k)}\right] \qquad (13)$$

и, следовательно, соотношение (I2) можно переписать в виде

$$x_n^{(m)}(t) + P_n\left\{\sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k)(t)\, x_n^{(m-k)}(t)\right\}.$$

Таким образом, из равенств (4′) с учетом (5) следует (I0).

Докажем теперь, что уравнение (I0) при достаточно больших n однозначно разрешимо. Для этого достаточно по теореме 7 из гл.I [3] показать близость операторов K и K_n на подпространстве X_n. Для произвольного элемента $x_n \in X_n$, учитывая равенство (I3) и используя неравенство Минковского, имеем

$$\| Kx_n - K_n x_n \|_Y = \Big\| \sum_{k=1}^{m} g_k\, x_n^{(m-k)} - \sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} \Big\|_Y \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \| g_k - Q_n g_k \|_Y \cdot \| x_n^{(m-k)} \|_C + \sum_{k=2}^{m} \| Q_n g_k \|_Y \cdot \| x_n^{(m-k)} - \qquad (14)$$

$$- P_n x_n^{(m-k)} \|_{L_\infty} + \| (Q_n g_1)(x_n^{(m-1)} - P_n x_n^{(m-1)}) \|_Y \equiv$$

$$\equiv J_1 + J_2 + J_3 .$$

Первое слагаемое J_1 в (I4) оценивается просто:

$$J_1 \le 2 \sum_{k=1}^{m} \overset{\circ}{E}_n (g_k)_p \, \| x_n^{(m-k)} \|_C = O\Big\{ \sum_{k=1}^{m} \overset{\circ}{E}_n (g_k)_p \Big\} \| x_n \|_X . \qquad (15)$$

Далее, так как $Q_n : Y \to Y$ ограничен, то $\| Q_n g_k \|_Y = O(1)$, и следовательно,

$$J_2 = O\Big\{ \sum_{k=2}^{m} \| x_n^{(m-k)} - P_n x_n^{(m-k)} \|_{L_\infty} \Big\} =$$

$$= O\Big\{ \sum_{k=2}^{m} \omega (x_n^{(m-k)}; \| \Delta_n \|)_C \Big\} = O\Big\{ \| \Delta_n \| \Big\} \| x_n \|_X . \qquad (16)$$

Займемся теперь оценкой в (I4) третьего слагаемого. Имеем

$$J_3^p = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |(Q_n g_1)(t)[x_n^{(m-1)}(t) - (P_n x_n^{(m-1)})(t)]|^p dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_1(\tau) d\tau \right|^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x_n^{(m-1)}(t) - x_n^{(m-1)}(t_k)|^p dt ,$$

откуда с помощью неравенства Гельдера находим

$$J_3^p \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})^{p-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |g_1(\tau)|^p d\tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x_n^{(m)}(\tau)|^p d\tau \le$$

$$\le \|\Delta_n\|^{(p-1)} \cdot \max_k \int_0^{t_k - t_{k-1}} |g_1(\tau + t_{k-1})|^p d\tau \, \|x_n^{(m)}\|_{L_p}^p .$$

Таким образом,

$$J_3 \le \|\Delta_n\|^{(1-1/p)} \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} \cdot \|x_n\|_X . \qquad (17)$$

Неравенства (15) – (17) позволяют продолжить оценку (14) и получить

$$\|K - K_n\|_{X_n \to Y} = O\Big\{ \sum_{k=1}^{m} \overset{\circ}{E}_n (g_k)_p +$$

$$+ \|\Delta_n\|^{(1-1/p)} \cdot \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + \|\Delta_n\| \Big\} \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Тогда утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы 7 главы I монографии [3].

Теперь перейдем к обоснованию вычислительной схемы (6). Для этого нам понадобится следующий результат (см., например, в [10]).

Л е м м а. Пусть $z(t)$ – произвольная функция, для которой существует производная $z' \in L_p(a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \le p \le \infty$. Если $\mathcal{L}_1(z,t)$ есть интерполяционный полином первой степени для $z(t)$ с узлами a и b , т.е.

$$(\mathcal{L}_1 z)(t) \equiv \mathcal{L}_1(z;t) = z(a) \frac{b-t}{b-a} + z(b) \frac{t-a}{b-a} ,$$

то

$$\int_a^b |x(t)-\mathcal{X}_1(x;t)|^p dt \le 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{p-1}\int_0^{b-a} du \int_a^{b-u} |x'(t+u)-x'(t)|^p dt\,,\ 1\le p\le\infty\,.$$

Для вычислительной схемы (6) верна

Т е о р е м а 2 . Пусть узлы сетки (3) удовлетворяют условию (8) и выполнены предположения теоремы I. Тогда система (6) имеет единственное решение, хотя бы при всех достаточно больших n, и соответствующие приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (7′).

Действительно, как и при доказательстве теоремы I, обозначив через $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ подпространства сплайнов $(m+1)$-й и первой степени на сетке узлов (3) соответственно, систему (6) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения (I0). Здесь через P_n и Q_n обозначены соответственно интерполяционный и "усредненный" интерполяционный (см. [7]) сплайны первой степени на сетке (3). Однако при доказательстве близости операторов K и K_n уравнений (9) и (I0) на подпространстве X_n равенство (I3) уже не выполняется. Поэтому для произвольного $x_n \in X_n$ оценку величины $\| K x_n - K_n x_n \|_Y$ проведем следующим образом:

$$\| K x_n - K_n x_n \| \le \sum_{k=1}^{m} \| g_k x_n^{(m-k)} - (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} \|_{L_p} + \sum_{k=1}^{m} \| (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} - P_n [(Q_n g_k) x_n^{(m-k)}] \|_{L_p} \equiv J_1 + J_2 \,. \tag{I8}$$

Первое слагаемое в (I8) с помощью леммы 2 [7] оценивается так же, как и при доказательстве теоремы I:

$$J_1 = O\left\{ \sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; 1/n)_p + n^{(1/p-1)} \cdot \max_t \| g_1(t+\cdot) \|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + n^{-1} \right\} \| x_n \|_X \,. \tag{I9}$$

Перейдем теперь к оценке второго слагаемого J_2. Для этого прежде всего заметим, что имеют место равенства

$$P_n z_k \equiv P_n [(Q_n g_k) x_n^{(m-k)}] = P_n [(Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)}] \,, \quad k = 1,2,\dots,m.$$

Поэтому, используя приведенную выше лемму, J_2 можно оценить так:

$$J_2 = \sum_{k=1}^{m} \| (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} - P_n [(Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)}] \|_{L_p} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} | (Q_n g_k)(t) (P_n x_n^{(m-k)})(t) -$$

$$- P_n [(Q_n g_k)(t) (P_n x_n^{(m-k)})(t) |^p dt \Big\}^{1/p} = \tag{20}$$

$$= O \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{p-1} \int_0^{\pi_i} du \int_{t_{i-1}}^{t_i - u} | z_k'(t+u) - z_k'(t) |^p dt \Big]^{1/p} \Big\},$$

$$\pi_i \equiv t_i - t_{i-1} .$$

Рассмотрим для произвольно фиксированных i и k ($i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,m$) интеграл

$$\gamma_i(z_k) = \int_0^{\pi_i} du \int_{t_{i-1}}^{t_i - u} | z_k'(t+u) - z_k'(t) |^p dt .$$

Очевидно,

$$z_k'(t) = (Q_n g_k)'(t) (P_n x_n^{(m-k)})(t) +$$

$$+ (Q_n g_k)(t) (P_n x_n^{(m-k)})'(t) ,$$

причем функции $(Q_n g_k)'(t)$ и $(P_n x_n^{(m-k)})'(t)$ постоянны в промежутке (t_{i-1}, t_i). Поэтому

$$\gamma_i(z_k) = \int_0^{\pi_i} du \Big\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i - u} | (Q_n g_k)'(t) |^p | (P_n x_n^{(m-k)})(t+u) -$$

$$- (P_n x_n^{(m-k)})(t) |^p dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i - u} | (Q_n g_k)(t+u) -$$

$$-(Q_n g_k)(t)|^p\cdot|(P_n x_n^{(m-k)})'(t)|^p dt\Big\} = \frac{2}{\pi_i^{2p}}|x_n^{(m-k)}(t_i)- \tag{21}$$
$$-x_n^{(m-k)}(t_{i-1})|^p\cdot\int_0^{\pi_i} u^p du\int_{t_{i-1}}^{t_i-u}|\Phi_i(g_k)-\Phi_{i-1}(g_k)|^p dt\,.$$

По неравенству Гельдера имеем

$$|x_n^{(m-k)}(t_i)-x_n^{(m-k)}(t_{i-1})|^p=\Big|\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_n^{(m-k+1)}(\tau)\,d\tau\Big|^p\le \pi_i^{p-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|x_n^{(m-k+1)}(\tau)|^p d\tau. \tag{22}$$

Далее, вычитая и прибавляя функцию $g_k(t)$, а затем ис - пользуя известное неравенство $(c+d)^p\le 2^{p-1}(c^p+d^p), c\ge0, d\ge0, p\ge1$ и неравенство Гельдера, последовательно находим

$$\delta_i(g_k)\equiv\int_{t_{i-1}}^{t_i-u}|\Phi_i(g_k)-\Phi_{i-1}(g_k)|^p dt=O\Big\{\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\Phi_i(g_k)-$$
$$-g_k(t)|^p dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\Phi_{i-1}(g_k)-g_k(t)|^p dt\Big\}=$$
$$=O\Big\{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big|\frac{1}{\pi_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[g_k(\tau)-g_k(t)]d\tau\Big|^p dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big|\frac{1}{\pi_{i-1}}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}[g_k(\tau)- \tag{23}$$
$$-g_k(t)]d\tau\Big|^p dt\Big\}=O\Big\{\frac{1}{\pi_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|g_k(\tau)-g_k(t)|^p d\tau\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}|g_k(\tau)-g_k(t)|^p d\tau\,dt\Big\};$$

здесь нужно иметь в виду, что при $i=1$

$$d_i\equiv\frac{1}{\pi_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}|g_k(\tau)-g_k(t)|^p d\tau dt=\frac{1}{\pi_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|g_k(\tau)-g_k(t)|^p d\tau\,dt$$

в случае непериодическом и

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi_n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}|g_k(\tau)-g_k(t)|^p d\tau\, dt$$

в случае периодическом. Поэтому, учитывая соотношение [II]

$$\int\limits_c^d\int\limits_c^d |f(t)-f(z)|^p dt\, dz = O\left\{\int\limits_0^{d-c}\omega(f;\tau)_p^p d\tau\right\},\ f\in L_p(c,d), -\infty\le c<d\le+\infty,$$

оценку (23) можно продолжить (см. также доказательство леммы 2 [7]):

$$\delta_i(g_k) = O\left\{\frac{1}{\pi_i}\int\limits_0^{\pi_i}\omega(g_k;\tau)_p^p\, d\tau + \right. \tag{24}$$

$$\left. + \frac{1}{\pi_{i-1}}\int\limits_0^{\pi_{i-1}+\pi_i}\omega(g_k;\tau)_p^p\, d\tau\right\} = O\left\{\omega(g_k;1/n)_p^p\right\}.$$

Объединяя (22), (24) вместе с (2I), получим

$$\gamma_i(z_k) = O\left\{\omega(g_k;1/n)_p^p\right\}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}|x_n^{(m-k+1)}(\tau)|^p d\tau. \tag{25}$$

Отметим, что оценка (25) справедлива при каждом фиксированном i, $i=\overline{1,n}$, и k, $k=\overline{1,m}$. Следовательно, подстановка (25) в соотношение (20) позволяет для J_2 вывести оценку:

$$J_2 = O\left\{n^{(1/p-1)}\cdot\sum_{k=1}^m\omega(g_k;1/n)_p\right\}\|x_n\|_X.$$

Из (I8), (I9) и последней оценки в свою очередь вытекает

$$\|K-K_n\|_{X_n\to Y} = O\left\{\sum_{k=1}^m\omega(g_k;1/n)_p + \right.$$

$$\left. + n^{(1/p-1)}\cdot\max_t\|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + n^{-1}\right\}\to 0,\ n\to\infty.$$

Остальное очевидно.

З а м е ч а н и е. При $p=\infty$, в частности в случае непрерывных коэффициентов уравнения (2), на сетку (3) не нужно накладывать условие (8).

В заключение отметим, что вопросы построения по данному методу полиномиальных приближений для дифференциальных уравнений могут быть рассмотрены аналогично.

Л и т е р а т у р а

I. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. - 744 с.

2. М а р ч у к Г. И., А г о ш к о в В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.

3. Г а б д у л х а е в Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. - 232 с.

4. Л у ч к а А. Ю. Проекционно- итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1980. - 264 с.

5. К е р г е Р. М. К оценке погрешности метода подобластей // Ж.вычисл.матем. и матем физ. - 1978. - Т.18. - № 3. - С.628 - 633.

6. Е р м о л а е в а Л. Б. Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей: Дисс. ... канд. физ.-мат.наук. - Казань, 1987. - 154 с.

7. А г а ч е в Ю. Р. Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений. - Казань, 1986. - 49 с. - Рукопись представлена Казан. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 22 дек. 1986, № 9039 - В86.

8. С т е ч к и н С. Б., С у б б о т и н Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.

9. З а в ь я л о в Ю. С., К в а с о в Б. И., М и р о ш н и ч е н к о В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

10. А г а ч е в Ю. Р. Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений: Дисс. ... канд. физ.-мат.наук. - Казань, 1987. - 144 с.

11. У л ь я н о в П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. - 1964. - Т. 63. - № 3. - С.356 - 391.