у коэффициентов уравнения (2) дополнительных свойств гладкостного характера скорость сходимости найденных приближений к точному решению возрастает. Последнее вытекает из одного результата по приближению функций алгебраическими полиномами в пространствах гельдеровых функций (см., например, [3]).

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

3. Agachev J. R., Galimyanov A. F. *On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36, No. 2. – P. 97-102.

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE IN THE PRINCIPAL PART

J.R. Agachev, A.V. Guskova

The article studies the Cauchy problem for a class of linear ordinary differential equations with fractional derivative in the main part, in the case when known coefficients of the equation belong to the class of Holder. The correctness of the problem in a special way constructed pair of function spaces is proved. Approximations to exact solution of the investigated problem is constructed on the basis apparatus of algebraic polynomials.

Keywords: linear equation, fractional differential equation, Cauchy problem, correct statement, approximate solution.

УДК 517.968

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА–ВОЛЬТЕРРА

Ю.Р. Агачев[1], М.Ю. Першагин[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе исследуется общая краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма–Вольтерра, заданных на отрезке числовой прямой, в которых порядок внутреннего дифференциального оператора выше порядка соответствующего внешнего дифференциального оператора. Доказана корректная постановка указанной задачи в смысле Адамара в специальным образом выбранной паре невесовых пространств Соболева.

Ключевые слова: пространство Соболева, интегро-дифференциальное уравнение, общая краевая задача, корректная постановка.

В этой работе продолжаются исследования, начатые в [1]. Рассматривается общая краевая задача

$$R_i(x)=0,\ i=\overline{0,m-1}, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t)+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(t)x^{(m-i)}(t)+\\ +\sum_{j=0}^{p}\left\{\int_a^b h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds+\int_a^t g_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds\right\}=y(t),\quad a\le t\le b. \tag{2}$$

Здесь R_i, $i=\overline{0,m-1}$, – заданные линейно-независимые функционалы, определенные на подпространстве $C^{(m-1)}[a,b]$ $(m-1)$–раз непрерывно-дифференцируемых на $[a,b]$ функций ($C[a,b]\equiv C^{(0)}[a,b]$), $\gamma_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, $h_j(t,s)$, $g_j(t,s)$, $j=\overline{0,p}$, – известные функции в своих областях определения, $x(t)$ – искомая функция.

Целочисленные параметры m,p удовлетворяют условию $p>m\ge 0$, что влечет, по классификации Б.Г. Габдулхаева [2], условную корректность задачи (1), (2). Это означает, что (1), (2) может быть поставлена корректно по Адамару при определенных гладкостных свойствах коэффициентов уравнения (2).

Через $W^qL_2\equiv W^qL_2[a,b]$, $q\in\mathbb{N}$, обозначим пространство функций, имеющих на $[a,b]$ производную порядка q, принадлежащую пространству L_2 квадратично-суммируемых функций. Норму в этом пространстве зададим обычным образом:

$$\|\varphi\|_{q,2}=\|\varphi\|_{L_2}+\left\|\varphi^{(q)}\right\|_{L_2}\qquad(\varphi\in W^qL_2). \tag{3}$$

Задачу (1), (2) будем рассматривать в паре пространств[1] (X,Y), где пространство правых частей $Y=W^{p-m}L_2$, пространство искомых элементов X состоит из функций, принадлежащих W^pL_2 и удовлетворяющих краевым условиям (1). В пространстве X норму согласуем с нормой в Y ((3) при $q=p-m$) по формуле:

$$\|x\|_X=\left\|x^{(m)}\right\|_{L_2}+\left\|x^{(p)}\right\|_{L_2}\equiv\left\|x^{(m)}\right\|_Y.$$

С введенными таким образом нормами пространства X и Y являются полными.

В паре (X,Y) задача (1), (2) может быть представлена в виде операторного уравнения

$$Kx\equiv Dx+\Gamma x+Hx+Gx=y\qquad(x\in X,y\in Y), \tag{4}$$

где операторы D,Γ,H,G задаются формулами:

$$(Dx)(t)\equiv x^{(m)}(t),\quad(\Gamma x)(t)\equiv\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(t)x^{(m-i)}(t),$$

$$(Hx)(t)\equiv\sum_{j=0}^{p}\int_a^b h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds,\quad(Gx)(t)\equiv\sum_{j=0}^{p}\int_a^t g_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds.$$

1 Для этого необходимо наложить на известные функции некоторые условия гладкостного характера.

Отметим, что оператор $D : X \to Y$ непрерывно обратим, причем

$$\|D\|_{X\to Y} = \|D^{-1}\|_{Y\to X} = 1.$$

Лемма 1 (см. в [1]). *Пусть выполнены предположения:*
1) $\gamma_i \in Y$, $i = \overline{1,m}$;
2) $h_j \in Y \times L_1$, $j = \overline{0,p-1}$;
3) $h_p \in Y \times L_2$.
Тогда оператор $\Gamma + H : X \to Y$ *вполне непрерывен.*

Далее, введем в рассмотрение функции $\psi_{j,k}(t) \equiv \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_j(t,s)|_{s=t}$, $k = \overline{0,p-m-1}$, $j = \overline{0,p}$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия:*
1) $g_j \in Y \times L_1$, $j = \overline{0,p-1}$, $g_p \in Y \times L_2$;
2) $\psi_{j,k} \in W^{p-m-k-1}L_2$, $j = \overline{0,k+m+1}$, $k = \overline{0,p-m-2}$;
3) $\psi_{j,p-m-1} \in W^{p-m-k-1}L_2$, $j = \overline{0,p-1}$;
4) $\psi_{p,p-m-1} \in C[a,b]$;
5) $\psi_{j,k}(t) \equiv 0$, $j = \overline{k+m+2,p}$, $k = \overline{0,p-m-2}$.
Тогда оператор $G : X \to Y$ *вполне непрерывен.*

Леммы 1 и 2 дают достаточные условия корректной постановки задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть выполнены предположения лемм 1 и 2 и задача (1) для уравнения* $x^{(m)}(t) = y(t)$ *имеет лишь нулевое решение. Тогда задача (1), (2) корректно поставлена по Адамару в паре пространств* (X,Y).

Утверждение теоремы вытекает из того факта, что при выполнении условий лемм 1 и 2 уравнение (4) является уравнением, приводящимся к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Следовательно, к уравнению (4) применима теория Фредгольма.

Замечание. Леммы 1 и 2 дают достаточные условия полной непрерывности операторов $\Gamma + H$ и G соответственно в случае, когда свойства функций h_j и g_j по каждой из переменных не зависят от другой переменной. Если же ядро интегрального оператора является разностным (в этом случае ядро задается функцией одного аргумента), то условия на это ядро будут задаваться через свойства гладкостного характера соответствующей функции одного аргумента.

Литература

1. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *Корректная постановка условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре невесовых пространств Соболева* // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 8. – С. 80–85.

2. Габдулхаев Б. Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов. II* // Известия вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.

ON THE CORRECT FORMULATION
OF GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR CONDITIONALLY WELL-POSED
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FREDHOLM–VOLTERRA

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin

In this paper we investigate the general boundary-value problem for linear integrodifferential equations of Fredholm–Volterra, specified on a segment of the number line where the order of the internal differential operators is higher than that of the corresponding exterior differential operator. We prove well-posedness of this problem in the Hadamard sense in a specially selected pair of non-weighted Sobolev spaces.

Keywords: Sobolev space, integro-differential equation, general boundary-value problem, wellposedness.

УДК 517.928

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ
В МОДЕЛИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ГОРЮЧЕГО СПРЕЯ**

А.Ж. Агатаева[1]

1 *aina2100@yandex.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

Работа посвящена геометрическому подходу к моделированию критических явлений в разнотемповых динамических моделях. Горение характеризуется наличием одновременно протекающих процессов с существенно различными скоростями (например, изменение температуры и расход реагирующего вещества), поэтому для моделирования таких явлений используются сингулярно возмущенные системы. На примере динамической модели воспламенения горючего спрея показано, что неустойчивые инвариантные многообразия сингулярно возмущенных систем могут применяться для моделирования критических явлений. Применение геометрической теории сингулярных возмущений позволило получить условия протекания критического режима в аналитической форме.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, инвариантное многообразие, устойчивость, критические явления, тепловой взрыв.

1. Введение

В статье рассматривается процесс воспламенения горючего газа, содержащего капли жидкого топлива. Для моделирования критических явлений в рассматриваемой системе применен метод интегральных многообразий сингулярно возмущенных систем. Особенности горения и теплового взрыва в газовой среде, хорошо известны и широко представлены различными публикациями. Тем не менее, влиянию капель жидкости на динамику такого процесса уделялось меньше внимания. По существу, поведение таких систем обусловлено двумя процессами: потери тепла за счет испарения горючей жидкой среды (капель) и выделением тепла, связанного с экзотермической реакцией окисления в газовой фазе. На основе геометрической