Е. Б. Коренева, О применении метода возмущений в задачах о расчете круглых пластин переменной толщины, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 104–108

Е.Б.Коренева

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О РАСЧЕТЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Метод возмущений является одним из наиболее эффективных общих способов решения задач теории упругости неоднородных тел, в частности, широко используется в известной монографии В.А.Ломакина [I]. При этом в [I] процесс решения сводился к рассмотрению последовательности краевых задач теории упругости однородных тел.

Ниже этот метод будет использован для получения решения задачи о круглых пластинах переменной толщины. Здесь метод возмущений видоизменяется, в отличие от [I], в качестве нулевого приближения рассматриваются неоднородные задачи, сводящиеся к решениям уравнений с переменными коэффициентами, для которых имеются точные решения. Это имеет большое преимущество, позволяя в качестве нулевого приближения использовать гораздо более близкие к изучаемому решению задачи теории упругости, которые назовем базисными.

Для реализации указанного подхода используются точные решения задач базисного типа. При этом в настоящей работе необходимо было заранее определить соответствующие функции влияния или функции Коши. Обращается внимание на то, что, как указано в [I], в большинстве случаев можно ограничиться лишь двумя членами, описывающими решения соответствующих неоднородных задач.

Возможность применения данного видоизменения метода возмущений проиллюстрируем на примере задачи об осесимметричной деформации круглой изотропной пластины линейно-переменной толщины

$$h = h_0 |1 - x| \, , \quad x = \pm \frac{r}{r_0} \qquad \text{(I)}$$

Как известно, решение этой задачи выражается в гипергеометрических функциях, при коэффициенте Пуассона σ = I/3 оно выражается элементарными функциями [2, 3]. Однако даже при σ = 0,3 в [2] приводятся результаты вычислений, основанные на применении гипергеометрических функций, являющиеся весьма громоздкими и требующие удержания не менее 30 членов входящих в решение степенных рядов.

Примем в качестве базисного решение для изотропной пластины с толщиной (I) и коэффициентом Пуассона $\sigma = 1/3$.

Приведем дифференциальное уравнение, описывающее осесимметричный изгиб изотропной круглой пластины с толщиной (I),

$$x^2(1-x)^3\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+x(1-x)^2(1-4x)\frac{d\vartheta}{dx}+[-1+x(1-3\sigma)](1-x)^2\vartheta=$$
$$=\frac{12C\tau_0(1-\sigma^2)x}{Eh_0^3}, \tag{2}$$

где ϑ - угол поворота сечения.

Применим метод возмущений. Представим коэффициент Пуассона в виде

$$\sigma=\frac{1}{3}+\varepsilon. \tag{3}$$

Будем искать решение задачи (2), (3) в виде ряда по степеням

$$\vartheta(x)=\vartheta_0(x)+\varepsilon\vartheta_1(x)+\varepsilon^2\vartheta_2(x)+\ldots \quad . \tag{4}$$

Вносим (3) и (4) в уравнение (2) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε, в результате получим последовательность задач для $\vartheta_i(x)$ ($i=1,2,\ldots$)

$$x^2(1-x)^3[\vartheta_0''+\varepsilon\vartheta_1''+\varepsilon^2\vartheta_2''+\ldots]+x(1-x)^2(1-4x)[\vartheta_0'+\varepsilon\vartheta_1'+\varepsilon^2\vartheta_2'+\ldots]-$$
$$-(1+3\varepsilon x)(1-x)^2[\vartheta_0+\varepsilon\vartheta_1+\varepsilon^2\vartheta_2+\ldots]=\frac{12C\tau_0 x}{Eh_0^3}\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon^2\right). \tag{5}$$

Для нулевого приближения имеем уравнение

$$x^2(1-x)^3\vartheta_0''+x(1-x)^2(1-4x)\vartheta_0'-(1-x)^2\vartheta_0=\frac{32C\tau_0 x}{3Eh_0^3} \quad . \tag{6}$$

Решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (6), имеют вид

$$\vartheta_0^{(1)}=-\frac{16}{3}\frac{\tau_0}{Eh_0^3}\eta_1(x)\ ,\ \vartheta_0^{(2)}=-16\frac{\tau_0}{Eh_0^3}\eta_2(x)\ ;$$
$$\eta_1(x)=\frac{2x^2-3x}{(1-x)^2}\ ,\quad \eta_2(x)=\frac{2x+1}{x} \quad . \tag{7}$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения (6) используем функции Коши, которые запишем в виде

$$Y_2(x_1;x)=\frac{x_1(1-x_1)^3}{6}\left\{-\eta_2(x_1)\eta_1(x)+\eta_1(x_1)\eta_2(x)\right\}. \tag{8}$$

Представим частное решение неоднородного уравнения (5) следующим образом:

$$\vartheta_0^{(c)}=\int F(z)Y_2(z;x)\,dz \quad ; \qquad \text{где} \quad F(z)=\frac{32C\tau_0 z}{3Eh_0^3},$$

откуда следует

$$\vartheta_0^{(c)}=\frac{16}{9}\frac{C\tau_0}{Eh_0^3}\Big\{-\eta_1(x)\left[2(x-x_1)+\ln x-\ln x_1\right]+\eta_2(x)\Big[2(x-x_1)-$$
$$-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x_1}+\ln\frac{1-x}{1-x_1}\Big]\Big\}. \tag{9}$$

Таким образом, в нулевом приближении имеем

$$\vartheta_0=A_0\vartheta_0^{(1)}+B_0\vartheta_0^{(2)}+C_0\vartheta_0^{(c)}, \tag{10}$$

где константы A_0, B_0 и C_0 находятся из условий на наружном и внутреннем контурах кольцевой пластины.

Приравняем теперь члены уравнения (5), содержащие параметр ε в первой степени,

$$x^2(1-x)^3\vartheta_1''+x(1-x)^2(1-4x)\vartheta_1'-(1-x)^2\vartheta_1=-\frac{8C\tau_0 x}{Eh_0^3}+3x(1-x)^2\vartheta_0. \tag{11}$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (11), совпадает с (7)

$$\vartheta_1^{(1)}=\vartheta_0^{(1)}, \quad \vartheta_1^{(2)}=\vartheta_0^{(2)}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (11) запишем в виде

$$\vartheta_1^{(c)}=\int_{z=x_1}^{x}F_1(z)Y_2(z;x)\,dz+\int_{z=x_1}^{x}F_2(z)Y_2(z;x)\,dz,$$

где

$$F_1(z)=-\frac{8C\tau_0}{Eh_0^3 z(1-z)^3}, \quad F_2(z)=\frac{3}{z(1-z)}\vartheta_0,$$

откуда ϑ_0 определяется формулой (10).

Приведем здесь лишь приближенную формулу для $\vartheta_1^{(c)}$ для пластин с малым отверстием и области, примыкающей к ограничивающему ее внутреннему контуру;

$$\vartheta_1^{(c)}=-\frac{16\tau_0}{Eh_0^3}\Big\{\frac{A_1}{3}\Big\{\eta_1(x)[1-0{,}5\mathcal{L}(x_1;x)]+0{,}5\eta_2(x)[-2(x^2-x_1^2)+11x-$$

$$-11x_1+4\Big[\frac{1}{1-x_1}-\frac{1}{1-x}\Big]-7\ln\frac{1-x}{1-x_1}]\Big\}+B_1\{\eta_2(x)[1-0{,}5\mathcal{L}(x_1;x)]-$$

$$-0{,}5\eta_1(x)[\mathcal{L}(x_1;x)+2\ln x-2\ln x_1-x^{-1}+x_1^{-1}]\}+\frac{C_1}{9}\Big\{-\frac{\eta_1(x)}{2}\times$$

$$\times\Big\{(-x^2+x_1^2)\Big[-(2x+\ln x)\eta_1(x)+\frac{\eta_2(x)}{6}\Big[2x-\frac{1}{1-x}+ \qquad (12)$$

$$+\ln(1-x)\Big]+\frac{1}{3}\{(x^2-x_1^2)[\eta_1(x)-\eta_2(x)]+\eta_1(x)T(x_1;x)+$$

$$+(x-x_1)\eta_2(x)\}\Big\}-\frac{1}{20}\Big[\ln\frac{1-x}{1-x_1}[7\eta_1(x)+3\eta_2(x)]\Big]\Big\}\Big\}\ ;$$

где $L(x_1;x)=-2x^2+2x_1^2-3x+3x_1$,

$$T(x_1;x)=(x-\frac{x^2}{2})\ln x-x+\frac{x^2}{4}-(x_1-\frac{x_1^2}{2})\ln x_1+x_1-\frac{x_1^2}{4}\ .$$

Автором была получена более точная формула для $\vartheta_1^{(c)}$, пригодная для отверстия произвольного размера и любого сечения пластины, содержащая полиномы пятой степени. Найденные выражения для $\vartheta_1^{(c)}$ дают возможность применять решения, выраженные в элементарных функциях для пластин с коэффициентом Пуассона. отличным от I/3.

Расчеты, выполненные для кольцевой пластины, показали, что при коэффициенте Пуассона σ = 0,3 значение максимального угла поворота в первом приближении отличается от подобного результата в нулевом приближении на 0,854 %, для максимального радиального изгибающего момента это отличие соответственно составляет I,05 %. При σ = 0,35 подобное отличие составляет: для максимального угла поворота $\Delta\vartheta_{max}$ % = 0,427 %, максимального радиального изгибающего момента ΔM_r^{max}% = 0,528 %. То есть можно отметить, что при σ = 0,3; σ = 0,35 при решении задач расчета пластин с толщиной

(I) можно воспользоваться элементарными решениями, полученными для $\nu = 1/3$.

Для $\nu = 1/4$ отличие результатов первого и нулевого приближения составляет $\Delta \vartheta_{max} \% = 2,13 \%$; $\Delta M_r^{max} \% = 2,65 \%$; для $\nu = 1/6$ соответственно $\Delta \vartheta_{max} \% = 4,27 \%$; $\Delta M_r^{max} \% = 5,3 \%$. Таким образом, если коэффициент Пуассона $\nu = 1/6$, то уже нельзя ограничиться нулевым приближением и следует внести уточнения, используя вышеописанную процедуру метода возмущений.

Формула (I2) позволяет выявить возможности получения решений в конечном виде и для других значений коэффициента Пуассона при расчете на действие осесимметричной нагрузки на круглую изотропную пластину линейно-переменной толщины.

Литература

I. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976.

2. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. – М.: Физматгиз, 1959.

3. Коренева Е.Б. Действие разрывных нагрузок на круглые пластины линейно-переменной толщины // Строительная механика и расчет сооружений. – 1988. № 2.