Ф. Ф. Майер, Условия однолистности аналитических функций в некоторых классах областей. II, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 68–81

Ф.Ф.Майер

УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБЛАСТЕЙ, II

Данная статья является непосредственным продолжением работы [I]. На основе метода квазиконформно[го пр]одолжения [2] обосновываются достаточные условия однолист[но]сти функций, аналитических в областях специального вида.

§ I. Описание класса областей $\mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$

Введем класс $\mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$ областей $\mathcal{D} \not\ni \infty$, удовлетворяющих следующим условиям. Граница области $\mathcal{D}$ представляет собой объединение двух кривых $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, каждая из которых параметрически задана уравнениями $w = w_j(s)$, $0 \le s \le \ell_j$, j = I,2, причем функции $w_j(s)$ абсолютно непрерывны на $[0, \ell_j]$, $w_j(0) = a$, $w_j(\ell_j) = b$, $w_j(s) \ne a, b$, $0 < s < \ell_j$, j = I,2, и при некотором $\beta \in (0, \pi/2]$ п.в. удовлетворяют условию

$$\left| \arg \frac{(a-b)\, w_j'(s)}{[w_j(s)-a][w_j(s)-b]} \right| \le \frac{\pi}{2} - \beta . \qquad (I)$$

Выясним геометрический смысл условия (I). Для этого рассмотрим образ $\mathcal{D}_\omega$ области $\mathcal{D} \in \mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$ при отображении с помощью функции

$$\omega = p(w) = (w-a)/(w-b) . \qquad (2)$$

Граница Γ области $\mathcal{D}_\omega$ проходит через точки $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и разбивается этими точками на две кривые $\Gamma_j = p(\mathcal{L}_j)$, j = I, 2. Покажем, что уравнения кривых Γ_1 и Γ_2 могут быть заданы в виде функций от полярной координаты $R = |\omega|$. Используя (2), определим функции

$$R_j(s) = |\omega_j(s)| = |(w_j(s)-a)/(w_j(s)-b)| , \quad 0 \le s \le \ell_j , \quad j = 1,2 .$$

Вычисляя логарифмическую производную, для п.в. $s \in (0, \ell_j)$ находим

$$R_j'(s) = R_j(s) \cdot \operatorname{Re} \frac{(a-b)\, w_j'(s)}{[w_j(s)-a][w_j(s)-b]} .$$

Поэтому в силу (I) $R_j'(s)>0$ п.в. на интервале $(0, l_j)$, т.е. функции $R_j(s)$ монотонно возрастают. Следовательно, существуют функции $\Phi_j(R)$ такие, что $\omega=R\cdot \exp\{i\Phi_j(R)\}, 0<R<\infty, j=1,2$, являются параметрическими уравнениями кривых Γ_1 и Γ_2, причем

$[w_j(s)-a]/[w_j(s)-b]=R\cdot\exp\{i\Phi_j(R)\}$, где $R=R_j(s)$.

В силу вытекающего отсюда соотношения

$$\frac{(a-b)w_j'(s)}{[w_j(s)-a][w_j(s)-b]}=\left[\frac{1}{R_j(s)}+i\,\Phi_j'(R_j(s))\right]\cdot R_j'(s)$$

видно, что условие (I) равносильно неравенству

$$R\cdot|\Phi_j'(R)|\leq \operatorname{ctg}\beta\quad,\quad j=1,2\quad, \tag{3}$$

для п.в. $R\in(0,\infty)$, т.е. область $\mathcal{D}_\omega$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(\beta)$ (см. [I]). В силу этого, в частности, $\mathfrak{M}_{0,\infty}(\beta)=\mathfrak{M}(\beta)$. Как показано в [I], область $\mathcal{D}_\omega\in\mathfrak{M}(\beta)$ достижима извне и изнутри криволинейными четырехугольниками, ограниченными дугами логарифмических спиралей наклона $\pm(\pi/2-\beta)$, образующими углы раствора 2β при вершинах, принадлежащих $\partial\mathcal{D}_\omega$. Поскольку $\mathcal{D}=P^{-1}(\mathcal{D}_\omega)$, где $P^{-1}(\omega)$ – дробно-линейное отображение, обратное к (2), то условие (I) для области $\mathcal{D}$ геометрически означает локальную достижимость изнутри и извне криволинейными угловыми областями специального вида, имеющими раствор 2β.

На плоскости w рассмотрим два семейства окружностей:
I) семейство окружностей, проходящих через точки a и b;
2) семейство окружностей, ортогональных окружностям семейства I.
Обозначим через r расстояние от точки a до точки w, принадлежащей отрезку с концами в точках a и b. Очевидно, любому числу r, $0<r<|b-a|$, взаимно однозначно соответствует некоторая окружность семейства 2, проходящая через точку $w=a+r\cdot\exp\{i\arg(b-a)\}$. Так как в силу (2) $r=|b-a|R/(R+1)$ – монотонная функция, то каждая из кривых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ пересекается с любой из окружностей второго семейства в единственной точке. При каждом $r\in(0,|b-a|)$ построим луночку с вершинами в точках a и b, граничные дуги которой проходят через точки пересечения с $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ окружности второго семейства, соответствующей значению r. Рассмотрим углы, образованные в точке

a дугами луночки с лучом, исходящим из точки a и проходящим через точку b. Величины этих углов, взятые со своими знаками в соответствии с направлением обхода против часовой стрелки, обозначим через $\theta_1 = \theta_1(r)$ и $\theta_2 = \theta_2(r)$, $0 < r < |b-a|$. Функции $\theta_j = \theta_j(r)$ просто связаны с функциями $\Phi_j = \Phi_j(R)$, именно без учета кратности угла поворота

$$\theta_j(r) = \Phi_j(R) - \pi \qquad , \qquad \text{где} \quad R = r/(|b-a|-r) .$$

Введем угловую характеристику области $\mathcal{D} \in \mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$ как функцию

$$\gamma = \gamma(r) = [\theta_2(r) - \theta_1(r)] / \pi .$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать существование постоянных $\gamma_\pm$ таких, что для всех $r \in (0, |b-a|)$

$$0 < \gamma_- \le \gamma(r) \le \gamma_+ < 2 .$$

§ 2. Условия однолистности аналитических функций в областях класса $\mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$

Пусть область $\mathcal{D} \in \mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$. Обозначим через

$$M(\mathcal{D}) = \sup_r \sec \frac{\min(|\theta_1(r)|, |\theta_2(r)|)}{2(1-\gamma(r))} ,$$

где точная верхняя грань берется по тем значениям r, которым соответствуют участки кривых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, расположенные по одну сторону от прямой, проходящей через точки a и b. Если же кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ находятся по разные стороны от этой прямой, то будем считать, что $M(\mathcal{D}) = 1$.

Теорема I. Аналитическая в области $\mathcal{D} \in \mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$ функция $f(w)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, если

$$\sup_{w \in \mathcal{D}} \left| \rho_{\mathcal{D}}^{-1}(w) \frac{f''(w)}{f'(w)} \right| \le \frac{1}{M(\mathcal{D})} \frac{2\beta}{\pi} \frac{1-\gamma_*^2}{\operatorname{cosec}\beta + \sqrt{\gamma_*^2 + \operatorname{ctg}^2\beta}} , \quad (4)$$

где $\gamma_* = \sup_r |1-\gamma(r)|$, $\rho_{\mathcal{D}}(w)$ - плотность гиперболической метрики области $\mathcal{D}$ относительно точки w.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [I] построено квазиконформное отражение $\chi(\omega)$ относительно границы области

$\mathcal{D}_\omega \in \mathfrak{M}(\beta)$ в виде $\chi(\omega)=\{\Lambda(\omega),\ \omega\in\bar{\mathcal{D}}_\omega\ ;\ \lambda(\omega),\omega\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}_\omega\}$, где

$$\Lambda(\omega)=\omega(\bar\omega/\omega)^{1/\tilde\gamma(R)}\cdot exp[i2\Phi_1(R)/\tilde\gamma(R)]\,,\qquad \omega\in\bar{\mathcal{D}}_\omega\,,$$

$$\lambda(\omega)=\omega(\bar\omega/\omega)^{1/(2-\tilde\gamma(R))}\cdot exp[\,i2\Phi_1(R)/(2-\tilde\gamma(R))]\,,\ \omega\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}_\omega\,,$$

$$\tilde\gamma(R)=\gamma=\gamma(r)\ ,\quad r=|b-a|\,R/(R+1)\ .$$

Отражение $\chi(\omega)$ каждой точке $\omega=R\cdot e^{i\varphi}\in\mathcal{D}_\omega$ ставит в соответствие некоторую точку $\chi=R\cdot e^{i\varphi^*}\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}_\omega$, где $\varphi^*=(2\Phi_1-\gamma\varphi)/(2-\gamma)$, и обратно.

Пусть $w=P^{-1}(\omega)=(b\omega-a)/(\omega-1)$ – отображение, обратное к (2). Тогда отражение относительно кривой $\mathcal{L}=\partial\mathcal{D}$ можно определить формулой

$$\mu(w)=P^{-1}\circ\chi\circ P(w)=\left[b\cdot\chi\left(\frac{w-a}{w-b}\right)-a\right]\Big/\left[\chi\left(\frac{w-a}{w-b}\right)-1\right],\ w\in\bar{\mathbb{C}}\,.$$

Для п.в. $w\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}$ имеем

$$|\mu_w|=\frac{|b-a|}{|\lambda(\omega)-1|^2}\cdot|\lambda_\omega|\cdot|P_w(w)|=\left|\frac{\omega-1}{\lambda(\omega)-1}\right|^2\cdot|\lambda_\omega|\ ,$$

$$|\mu_{\bar w}|=\frac{|b-a|}{|\lambda(\omega)-1|^2}\cdot|\lambda_{\bar\omega}|\cdot|\bar P_{\bar w}(w)|=\left|\frac{\omega-1}{\lambda(\omega)-1}\right|^2\cdot|\lambda_{\bar\omega}|\ ,$$

где $\omega=P(w)$. Поскольку $\rho_{\mathcal{D}}(\mu)=|{P^{-1}}'(\lambda)|\,\rho_{\mathcal{D}_\omega}(\lambda)=|\lambda-1||b-a|^{-1}\cdot\rho_{\mathcal{D}_\omega}(\lambda)$ в силу инвариантности гиперболической метрики относительно конформного отображения, то получаем

$$|w-\mu|\,\rho_{\mathcal{D}}(\mu)(|\mu_w|+|\mu_{\bar w}|)=\left|\frac{b\omega-a}{\omega-1}-\frac{b\lambda-a}{\lambda-1}\right|\frac{|\omega-1|^2}{|b-a|}\,\rho_{\mathcal{D}_\omega}(\lambda)(|\lambda_\omega|+|\lambda_{\bar\omega}|)=$$

$$=|\omega-\lambda|\,\rho_{\mathcal{D}_\omega}(\lambda)(|\lambda_\omega|+|\lambda_{\bar\omega}|)\cdot\left|\frac{\omega-1}{\lambda-1}\right|\ .$$

Ниже будет установлено, что $|(\omega-1)/(\lambda(\omega)-1)|\le M(\mathcal{D})$. Поэтому, используя установленные в [I] оценки

$$|\lambda_\omega| \le [(1-\gamma)^2 + \mathrm{ctg}^2\beta]^{1/2}/(2-\gamma), \ |\lambda_{\bar\omega}| \le 1/[(2-\gamma)\sin\beta],$$

$$|\omega-\lambda|\,\rho_{\mathcal{D}_\omega}(\lambda) < \pi/(2\beta\gamma), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{cosec}\,\beta + [(1-\gamma)^2+\mathrm{ctg}^2\beta]^{1/2}}{\gamma(2-\gamma)} \le \frac{\mathrm{cosec}\,\beta + (\gamma_*^2+\mathrm{ctg}^2\beta)^{1/2}}{1-\gamma_*^2},$$

получим

$$|w-\mu|\,\rho_{\mathcal{D}}(\mu)(|\mu_w|+|\mu_{\bar w}|) \le M(\mathcal{D})\,\frac{\pi}{2\beta}\,\frac{\mathrm{cosec}\,\beta + (\gamma_*^2+\mathrm{ctg}^2\beta)^{1/2}}{1-\gamma_*^2}. \tag{6}$$

Определим теперь непрерывное продолжение $g(w)$ функции $f(w)$ из области аналитичности на всю комплексную плоскость. При этом без ограничения общности будем считать, что $f(w)$ аналитична в $\bar{\mathcal{D}}$, а $\mathcal{L}=\partial\mathcal{D}$ – аналитическая кривая. Тогда квазиотражение $\mu(w)$ непрерывно дифференцируемо в $\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}$ и оценка (6) имеет место для всех $w\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}$. Пусть

$$g(w)=\left\{ f(w),\ w\in\bar{\mathcal{D}};\ f\circ\mu+(w-\mu)f'\circ\mu,\ w\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}\right\}. \tag{7}$$

Тогда $g_{\bar w}/g_w \equiv 0$ для всех $w\in\bar{\mathcal{D}}$, а в $\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}$ в силу неравенств (4) и (6) имеем

$$\left|\frac{g_{\bar w}}{g_w}\right| \le \frac{|w-\mu||\mu_{\bar w}||(f''/f')\circ\mu|}{1-|w-\mu||\mu_w||(f''/f')\circ\mu|} < 1. \tag{8}$$

Таким образом, $g(w)$ – локально гомеоморфное отображение плоскости на себя и по теореме о монодромии $g(w)$ – гомеоморфизм. Но тогда $f(w)$ однолистна в $\mathcal{D}$, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства остается установить оценку

$$|(\omega-1)/(\lambda(\omega-1)| \le M(\mathcal{D}) \tag{9}$$

для всех $\omega\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}_\omega$, где $\mathcal{D}_\omega = P(\mathcal{D})\in\mathfrak{M}(\beta)$.

Пусть $\omega=Re^{i\varphi}\in\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}_\omega$, т.е. $\Phi_2-2\pi\le\varphi\le\Phi_1$, и $\lambda=\lambda(\omega)=Re^{i\varphi^*}\in\bar{\mathcal{D}}_\omega$, т.е. $\Phi_1\le\varphi^*\le\Phi_2$, причем $\varphi^*=(2\Phi_1-\gamma\varphi)/(2-\gamma)$. Имеем

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda-1}\right|^2=\frac{1+R^2-2R\cos\varphi}{1+R^2-2R\cos\varphi^*}=1+a(R)(\cos\varphi^*-\cos\varphi)=1+2a(R)\sin\frac{\varphi+\varphi^*}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi^*}{2},\qquad(10)$$

где $a(R)=2R/(1+R^2-2R\cos\varphi^*)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Gamma_1\subset\{\omega:\operatorname{Im}\omega\geq 0\}$, $\Gamma_2\subset\{\omega:\operatorname{Im}\omega\leq 0\}$, т.е. без учета кратности угла поворота будем считать, что $\Phi_1(R)\in[0,\pi]$; $\Phi_2(R)\in[\pi,2\pi]$. Поскольку $-\pi\leq(\varphi-\varphi^*)/2=(\varphi-\Phi_1)/(2-\gamma)\leq 0$, то $\sin[(\varphi-\varphi^*)/2]\leq 0$ для всех $\varphi\in[\Phi_2-2\pi,\Phi_1]$. Покажем, что $\sin[(\varphi+\varphi^*)/2]\geq 0$. Так как $(\varphi+\varphi^*)/2=[\Phi_1+(1-\gamma)\varphi]/(2-\gamma)$, то при $0<\gamma\leq 1$ имеем $0\leq\Phi_2-\pi\leq(\varphi+\varphi^*)/2\leq\Phi_1\leq\pi$, а при $1\leq\gamma<2$ находим, что $0\leq\Phi_1\leq(\varphi+\varphi^*)/2\leq\Phi_2-\pi\leq\pi$. Итак, в обоих случаях $0\leq(\varphi+\varphi^*)/2\leq\pi$,т.е. $\sin[(\varphi+\varphi^*)/2]\geq 0$ для всех $\varphi\in[\Phi_2-2\pi,\Phi_1]$. Теперь с учетом неравенства $a(R)\geq 0$ из формулы (10) получим, что $|(\omega-1)/(\lambda-1)|\leq 1$.

Рассмотрим случай, когда $\Gamma_1,\Gamma_2\subset\{\omega:\operatorname{Im}\omega\geq 0\}$, т.е. $0\leq\Phi_1<\Phi_2\leq\pi$. При этом, очевидно, $\gamma(R)\leq 1$. Как и выше, в этом случае $\sin[(\varphi-\varphi^*)/2]\leq 0$ для всех $\varphi\in[\Phi_2-2\pi,\Phi_1]$. Если $\varphi\in[-\Phi_1/(1-\gamma),\Phi_1]$, то $0\leq(\varphi+\varphi^*)/2\leq\Phi_1<\pi$ и $\sin[(\varphi+\varphi^*)/2]\geq 0$. Следовательно, $|(\omega-1)/(\lambda-1)|\leq 1$. На промежутке $[\Phi_2-2\pi,-\Phi_1/(1-\gamma)]$ $-\pi\leq\Phi_2-\pi\leq(\varphi+\varphi^*)/2\leq 0$. Поэтому $\sin[(\varphi+\varphi^*)/2]\leq 0$ и с учетом неравенства $a(R)\leq 1/(1-\cos\varphi^*)$ из (10) получаем

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda-1}\right|^2\leq 1+\frac{\cos\varphi^*-\cos\varphi}{1-\cos\varphi^*}=\frac{\sin^2(\varphi/2)}{\sin^2(\varphi^*/2)}.$$

Отсюда после замены $\varphi=-2\psi$ находим

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda-1}\right|\leq\Delta(\psi)=\sin\psi/\sin\frac{\Phi_1+\gamma\psi}{2-\gamma},\quad\frac{\Phi_1}{2(1-\gamma)}\leq\psi\leq\pi-\frac{\Phi_2}{2}.$$

Средствами дифференциального исчисления можно установить, что $\Delta(\psi)$ имеет единственный максимум в некоторой точке $\psi_0\in[\Phi_1/(2(1-\gamma)),\pi/2]$. Поэтому оценивая сверху $\Delta(\psi)$ на этом промежутке, окончательно получим

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda-1}\right|\leq\operatorname{cosec}\frac{\Phi_1}{2(1-\gamma)}.$$

Если кривые $\Gamma_1,\Gamma_2\subset\{\omega:\operatorname{Im}\omega\leq 0\}$, то аналогично приходим к оценке

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda-1}\right| \le \operatorname{cosec} \frac{2\pi-\Phi_2}{2(1-\gamma)} .$$

Так как $\Phi_1 \le 2\pi-\Phi_2$ в случае $\Gamma_1,\Gamma_2 \subset\{\omega: \operatorname{Im}\omega \ge 0\}$ и $2\pi-\Phi_2 \le \Phi_1$ в случае $\Gamma_1,\Gamma_2 \subset\{\omega: \operatorname{Im}\omega \le 0\}$, то не разграничивая два этих случая, можем записать

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda(\omega)-1}\right| \le \operatorname{cosec} \frac{\min(\Phi_1(R);\, 2\pi-\Phi_2(R))}{2(1-\tilde{\gamma}(R))}, \quad R=|\omega| .$$

Переходя от функций $\Phi_j(R)$ к функциям $\theta_j(r)$, получим

$$\left|\frac{\omega-1}{\lambda(\omega)-1}\right| \le \operatorname{cosec} \frac{\min(\pi+\theta_1(r);\, \pi-\theta_2(r))}{2(1-\gamma(r))} =$$

$$= \sec \frac{\min(|\theta_1(r)|;|\theta_2(r)|)}{2(1-\gamma(r))}, \quad |\omega|=R=r/(|b-a|-r) .$$

В случае произвольного расположения кривых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ на разных участках изменения r мы приходим либо к последней оценке, либо к неравенству $|(\omega-1)/(\lambda-1)| \le 1$, что в целом приводит к оценке (9). Теорема I доказана.

Обозначим через $\mathcal{D}_{a,b}(\gamma_1,\gamma_2)$ круговую луночку, замыкание которой содержит отрезок $[a,b]$, ограниченную дугами окружностей с концами в точках a и b и образующими с отрезком $[a,b]$ углы $\gamma_1\pi$ и $\gamma_2\pi$, $-1\le\gamma_1\le 0$, $0\le\gamma_2\le 1$, а через $\hat{\mathcal{D}}_{a,b}(\gamma_1,\gamma_2)$ – луночку с теми же характеристиками, не содержащую $[a,b]$, $0\le \gamma_1<\gamma_2\le 1$. При $\beta\to\pi/2$ область $\mathcal{D}\in\mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$ преобразуется в круговую луночку. Поэтому из теоремы I вытекают такие утверждения.

<u>Следствие I</u> ([3], [4]). Пусть функция $f(w)$ аналитична в луночке $\mathcal{D}$ и удовлетворяет условию $\sup\limits_{w\in\mathcal{D}}|\rho_{\mathcal{D}}^{-1}(w)f''(w)/f'(w)| \le A$.

Тогда $f(w)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, если

I) $A=1-|1-\gamma|$, $\gamma=\gamma_2-\gamma_1$ в случае $\mathcal{D}=\mathcal{D}_{a,b}(\gamma_1,\gamma_2)$;

2) $A=\gamma\cos[\gamma_1\pi/(2(1-\gamma))]$, $\gamma=\gamma_2-\gamma_1$ в случае $\mathcal{D}=\hat{\mathcal{D}}_{a,b}(\gamma_1,\gamma_2)$.

Рассмотрим теперь функцию $f(w)=cw+c_1/w+c_2/w^2+\dots$, аналитическую в области $\mathcal{D}\ni\infty$ за исключением простого полюса в точке $w=\infty$, и пусть область $\mathcal{D}$ такова, что $\bar{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}\in\mathfrak{M}_{b,b}(\beta)$, причем кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ лежат по разные стороны от прямой, про –

ходящей через точки $\pm b$, т.е. $\theta_1(r)\in[-\pi,0], \theta_2(r)\in[0,\pi]$ $\forall r\in$ $\in(0,|b-a|)$. Обозначим $N(\mathcal{D})=max(N_1(\mathcal{D});N_2(\mathcal{D}))$, где

$$N_1(\mathcal{D})=\sup_{r:0<\gamma(r)\leq 1} ctg\frac{min(|\theta_1(r)|;\theta_2(r))}{2},$$

$$N_2(\mathcal{D})=\sup_{r:1\leq\gamma(r)<2}\frac{max(\pi\gamma(r)/2;\pi+\nu\cdot\theta_j(r))}{|\theta_j(r)|}, j=\frac{3-\nu}{2},$$

$$\nu=sign(\theta_1(r)+\theta_2(r)).$$

Если же для всех $r\in(0,|b-a|)$ $\gamma(r)\leq 1$ или $\gamma(r)\geq 1$, то соответственно $N(\mathcal{D})=N_1(\mathcal{D})$ или $N(\mathcal{D})=N_2(\mathcal{D})$.

Теорема 2. Функция $f(w)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, если

$$\sup_{w\in\mathcal{D}}\left|\rho_{\mathcal{D}}^{-1}(w)w\frac{f''(w)}{f'(w)}\right|\leq\frac{|b|}{N(\mathcal{D})}\frac{2\beta}{\pi}\frac{1-\gamma_*^2}{cosec\beta+\sqrt{\gamma_*^2+ctg^2\beta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы I, определим квазиконформное отражение относительно $\partial\mathcal{D}$ в виде

$$\mu(w)=p^{-1}\circ\chi\circ p(w)=b\left[\chi\left(\frac{w+b}{w-b}\right)+1\right]\Big/\left[\chi\left(\frac{w+b}{w-b}\right)-1\right],$$

где $\omega=p(w)=(w+b)/(w-b)$, $w=p^{-1}(\omega)=b(\omega+1)/(\omega-1)$, и по формуле (7) продолжим функцию $f(w)$ на всю плоскость. С учетом оценки

$$|(\omega-1)/(\Lambda(\omega)+1)|\leq N(\mathcal{D}), \quad \omega=\bar{C}\setminus\mathcal{D}_\omega, \qquad (II)$$

обоснование которой дано ниже, как и при доказательстве теоремы I, получаем

$$\frac{1}{|\mu|}|w-\mu|\rho_{\mathcal{D}}(\mu)(|\mu_w|+|\mu_{\bar{w}}|)=\frac{1}{|b|}|\omega-\Lambda|\rho_{\mathcal{D}_\omega}(\Lambda)\cdot\left|\frac{\omega-1}{\Lambda+1}\right|(|\Lambda_w|+|\Lambda_{\bar{w}}|)\leq$$

$$\leq\frac{N(\mathcal{D})}{|b|}\frac{\pi}{2\beta}\frac{cosec\,\beta+\sqrt{\gamma_*^2+ctg^2\beta}}{1-\gamma_*^2}.$$

На основе этого с использованием условия теоремы 2 для комплексного отклонения функции (7) нетрудно установить оценку $|g_{\bar{w}}/g_w|<$ <1 для всех w. Отсюда и будет следовать однолистность функции $f(w)$ в $\mathcal{D}$.

Выведем оценку (II). По предположению $\Phi_1(R)\in[0,\pi]$, $\Phi_2(R)\in[\pi,2\pi]$. Обозначим $\omega=Re^{i\varphi}\in\bar{C}\setminus\mathcal{D}_\omega$, т.е. $\Phi_1\le\varphi\le\Phi_2$ и $\Lambda=Re^{i\varphi^*}\in\bar{\mathcal{D}}_\omega$, т.е. $\Phi_2-2\pi\le\varphi^*\le\Phi_1$, причем $\varphi^*=[2\Phi_1-(2-\gamma)\varphi]/\gamma$. Имеем

$$\left|\frac{\omega-1}{\Lambda+1}\right|^2=1-C(R)(\cos\varphi+\cos\varphi^*)=1-2C(R)\cos\frac{\varphi+\varphi^*}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2},$$

где $C(R)=2R/(1+R^2+2R\cos\varphi^*)$ и $(\varphi+\varphi^*)/2=[\Phi_1+(\gamma-1)\varphi]/\gamma$, $(\varphi-\varphi^*)/2=(\varphi-\Phi_1)/\gamma$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{\gamma}(R)\le 1$. Пусть $(\Phi_1+\Phi_2)/2\ge\pi$. Выделим на отрезке $\Phi_1\le\varphi\le\Phi_2$ промежутки, на которых $\cos[(\varphi+\varphi^*)/2]$ и $\cos[(\varphi-\varphi^*)/2]$ сохраняют знак. Обозначим $J_1=[\Phi_1,(\Phi_1+\Phi_2)/2]$, $J_2=[(\Phi_1+\Phi_2)/2,(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1))]$, $J_3=[(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1)),\Phi_2]$. Нетрудно установить, что

$$\cos\frac{\varphi+\varphi^*}{2}\begin{cases}\le 0 & \text{при } \varphi\in J_1\cup J_2;\\ \ge 0 & \text{при } \varphi\in J_3;\end{cases}\qquad \cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2}\begin{cases}\ge 0 & \text{при } \varphi\in J_1;\\ \le 0 & \text{при } \varphi\in J_2\cup J_3.\end{cases}$$

Значит,

$$\cos\varphi+\cos\varphi^*\begin{cases}\le 0 & \text{при } \varphi\in J_1\cup J_3;\\ \ge 0 & \text{при } \varphi\in J_2.\end{cases}$$

В силу этого $|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\le 1$ при $\varphi\in J_2$, а для $\varphi\in J_1\cup J_3$ с учетом неравенства $C(R)\le 1/(1+\cos\varphi^*)$ выводим

$$\left|\frac{\omega-1}{\Lambda+1}\right|\le\sqrt{1-\frac{\cos\varphi+\cos\varphi^*}{1-\cos\varphi^*}}=\frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi^*/2)}=$$

$$=\frac{\sin(\varphi/2)}{\cos[(2\Phi_1-(2-\gamma)\varphi)/(2\gamma)]}=\ell(\varphi),\quad \varphi\in J_1\cup J_3.$$

Найдем производную

$$\ell'(\varphi)=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\varphi^*}{2}\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi^*}{2}+\left(1-\frac{2}{\gamma}\right)\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi^*}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\gamma}\sec^2\frac{\varphi^*}{2}\left[\cos\frac{\varphi+\varphi^*}{2}-(1-\gamma)\cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2}\right].$$

Так как $\ell'(\varphi)\le 0$ при $\varphi\in J_1$ и $\ell'(\varphi)\ge 0$ при $\varphi\in J_3$, то

$$\max_{\varphi\in J_1\cup J_3} \ell(\varphi)=\max(\ell(\Phi_1);\ell(\Phi_2))=\max\left(tg\frac{\Phi_1}{2},\left|tg\frac{\Phi_2}{2}\right|\right)=tg\frac{\Phi_1}{2},$$

ибо $(\Phi_1+\Phi_2)/2\geqslant\pi \Leftrightarrow \pi/2-\Phi_1/2\leqslant\Phi_2/2-\pi/2$.

Заметим, что приведенные рассуждения, вообще говоря, верны лишь в случае, когда $\Phi_2\leqslant 3\pi/2$. Если же $\Phi_2>3\pi/2$, то $(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1))>\Phi_2$. В этом случае отрезок J_3 надо опустить, а вместо J_2 рассмотреть $[(\Phi_1+\Phi_2)/2,\ \Phi_2]$. Вновь придем к той же оценке. Итак, если $(\Phi_1+\Phi_2)/2\geqslant\pi$, то $|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leqslant tg(\Phi_1/2)$. Аналогично в случае $(\Phi_1+\Phi_2)/2\leqslant\pi$ получим, что $|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leqslant\leqslant|tg(\Phi_2/2)|$. Поскольку $sign[tg(\Phi_1/2)-|tg(\Phi_2/2)|]=sign[(\Phi_1+\Phi_2)/2-\pi]$, то с учетом равенства $|tg(\Phi_2/2)|=tg[(2\pi-\Phi_2)/2]$ при $\tilde\gamma(R)\leqslant 1$ окончательно имеем

$$\left|\frac{\omega-1}{\Lambda+1}\right|\leqslant tg\,\frac{\max(\Phi_1(R);2\pi-\Phi_2(R))}{2},\quad R=|\omega|=|\Lambda|. \qquad (12)$$

Пусть теперь $\tilde\gamma(R)>1$. Сначала предположим, что $(\Phi_1+\Phi_2)/2\geqslant\pi$. Если $\Phi_1\leqslant\pi/2$, то отрезок $\Phi_1\leqslant\varphi\leqslant\Phi_2$ можно разбить на три промежутка:

$j_1=[\Phi_1,(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1))]$, $j_2=[(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1)),(\Phi_1+\Phi_2)/2]$ и $j_3=[(\Phi_1+\Phi_2)/2,\Phi_2]$, на каждом из которых $\cos[(\varphi+\varphi^*)/2]$ и $\cos[(\varphi-\varphi^*)/2]$ сохраняют знак. Если же $\Phi_1>\pi/2$, то $\Phi_1\geqslant(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1))$ и достаточно рассмотреть два промежутка: $\tilde j_2=[\Phi_1,(\Phi_1+\Phi_2)/2]$ и $\tilde j_3=[(\Phi_1+\Phi_2)/2,\Phi_2]$.

Пусть $\Phi_1\leqslant\pi/2$. Тогда

$$\cos\frac{\varphi+\varphi^*}{2}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{при } \varphi\in j_1,\\ \leqslant 0 & \text{при } \varphi\in j_2\cup j_3,\end{cases}\qquad \cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{при } \varphi\in j_1\cup j_2,\\ \leqslant 0 & \text{при } \varphi\in j_3.\end{cases}$$

Поэтому $|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leqslant 1$ при $\varphi\in j_1\cup j_3$ и $|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leqslant\ell(\varphi)==\sin(\varphi/2)/\cos(\varphi^*/2)$ при $\varphi\in j_2$. Используя найденное выше выражение для производной $\ell'(\varphi)$ и учитывая, что $\cos[(\varphi+\varphi^*)/2]-(1-\gamma)\cos[(\varphi-\varphi^*)/2]$ монотонно убывает по φ на отрезке j_2, получим, что $\max\limits_{\varphi\in j_2}\ell(\varphi)$ достигается в некоторой точке $\varphi_0\in[(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1)),\pi]$. Поэтому оценим сверху $\ell(\varphi)$ на $[(\Phi_2-3\Phi_1)/(2(\gamma-1)),\pi]$. Вводя замену $\varphi/2=\psi$, преобразуем $\ell(\varphi)$ к виду

$$\ell(\varphi)=\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\Phi_1-(2-\gamma)\varphi}{2\gamma}\right)=\frac{\sin\psi}{\sin\psi^*(\psi)}=h(\psi)\ ,$$

где $\psi^*(\psi)=[\gamma\pi/2-\Phi_1+(2-\gamma)\psi]/\gamma,\ 0<(\Phi_2-3\Phi_1)/(4(\gamma-1))\leq\psi\leq$ $\leq\pi/2$. Поскольку

$$\psi^*\left(\frac{\Phi_2-3\Phi_1}{4(\gamma-1)}\right)=\frac{\Phi_2-3\Phi_1}{4(\gamma-1)}\quad \text{и}\quad \psi^*\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-\Phi_1}{\gamma}\leq\frac{\pi}{2}\ ,$$

то $\psi^*(\psi)\geq y_1(\psi)=\dfrac{2(\pi-\Phi_1)}{\gamma\pi}\psi$ для всех $\psi\in\left[\dfrac{\Phi_2-3\Phi_1}{4(\gamma-1)},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как $2(\pi-\Phi_1)/(\gamma\pi)\leq 1$ и функция $\sin\psi/\sin k\psi$ не возрастает на $(0,\pi/2)$ при $k\in(0,1]$, то

$$h(\psi)\leq\sin\psi\Big/\sin\left[\frac{2(\pi-\Phi_1)}{\gamma\pi}\psi\right]\leq\frac{\gamma\pi}{2(\pi-\Phi_1)}\ .$$

Итак,

$$|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leq\gamma\pi/[2(\pi-\Phi_1)]\qquad\text{при } 0<\Phi_1\leq\pi/2\ .$$

Если же $\Phi_1\geq\pi/2$, то ψ изменяется на промежутке $[\Phi_1/2$, $\pi/2]$, а $\psi^*\in[(\pi-\Phi_1)/2;(\pi-\Phi_1)/\gamma]$. Аналогично предыдущему устанавливается, что

$$\left|\frac{\omega-1}{\Lambda+1}\right|\leq\sin\psi\Big/\sin\frac{2(\pi-\Phi_1)\psi}{\gamma\pi}\leq\frac{\gamma\pi}{2(\pi-\Phi_1)}\qquad\text{при } \frac{\pi}{2}\leq\Phi_1\leq\frac{\Phi_2}{3}$$

и

$$\left|\frac{\omega-1}{\Lambda+1}\right|\leq\sin\psi\Big/\sin\frac{(\pi-\Phi_1)\psi}{\Phi_1}\leq\frac{\Phi_1}{\pi-\Phi_1}\qquad\text{при } \frac{\Phi_2}{3}\leq\Phi_1<\pi\ .$$

С учетом того, что $\mathrm{sign}[\gamma\pi/(2(\pi-\Phi_1))-\Phi_1/(\pi-\Phi_1)]=\mathrm{sign}[\Phi_2/3-\Phi_1]$, объединяя рассмотренные случаи, при $\tilde\gamma(R)>1$, $(\Phi_1+\Phi_2)/2>\pi$ имеем

$$|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leq\max(\gamma\pi/2;\Phi_1)/(\pi-\Phi_1),\ R=|\omega|=|\Lambda|\ . \tag{I3}$$

В случае, когда $\tilde\gamma(R)>1$, $(\Phi_1+\Phi_2)/2\leq\pi$, аналогично получаем оценку

$$|(\omega-1)/(\Lambda+1)|\leq\max(\gamma\pi/2;2\pi-\Phi_2)/(\Phi_2-\pi),\ R=|\omega|=|\Lambda|\ . \tag{I4}$$

Объединяя оценки (I2) – (I4), взяв точную верхнюю грань по всем $R\in(0,\infty)$ и переходя к функциям $\theta_1(\tau)$, $\theta_2(\tau)$ с учетом соотношения $(\Phi_1+\Phi_2)/2\gtrless\pi\Leftrightarrow\theta_1+\theta_2\gtrless 0$, придем к искомой оценке (II), что и требовалось доказать.

В качестве следствия из теоремы 2 рассмотрим предельный случай при $\beta \to \pi/2$.

Следствие 2. Пусть область $\mathcal{D} \ni \infty$ такова, что $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{-b,b}(\gamma_1, \gamma_2)$ – луночка, рассмотренная в следствии I, и пусть $0 \leq |\gamma_1| \leq \gamma_2 \leq 1$, $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Аналитическая в области $\mathcal{D} \setminus \{\infty\}$ функция $f(w) = cw + c_1/w + c_2/w^2 + \ldots$ будет однолистной, если

$$\sup_{w\in\mathcal{D}} |\rho_{\mathcal{D}}^{-1}(w) w f''(w)/f'(w)| \leq A \quad , \text{где}$$

$$A = \begin{cases} |b|\gamma\, tg(|\gamma_1|\pi/2) & \text{при } 0 < \gamma \leq 1, \\ |b|(2-\gamma)|\gamma_1|/max(\gamma/2; 1+\gamma_1) & \text{при } 1 \leq \gamma < 2. \end{cases}$$

Заметим, что при $|\gamma_1| = \gamma_2 = 1/2$, $|b| = 1$ данный результат совпадает с известным условием однолистности Беккера [5].

§ 3. Некоторые следствия

Рассмотрим ограниченную выпуклую область $\mathcal{D}$ с гладкой границей $\mathcal{L}$. Пусть $d = diam\, \mathcal{D}$, $K(w)$ – кривизна кривой $\mathcal{L}$ в точке w. В предположении, что $K(w) \geq K$, $K > 0$, в работе [3] получено условие однолистности аналитической в $\mathcal{D}$ функции $f(w)$. В дополнение к этому результату исследуем однолистность функции $f(w)$ в выпуклой области $\mathcal{D}$ при условии ограниченности сверху кривизны $K(w) \leq K$, $w \in \mathcal{L}$. Использование теоремы I позволяет, вообще говоря, соединить два этих результата, т.е. предполагать, что $K_1 \leq K(w) \leq K_2$, но полученное условие будет иметь очень громоздкий вид.

Теорема 3. Пусть функция $f(w)$ аналитична в области $\mathcal{D}$, кривизна $K(w)$ границы $\mathcal{D}$ удовлетворяет условию $0 \leq K(w) \leq K$, $w \in \partial\mathcal{D}$, а $d = diam\, \mathcal{D} \geq 2/K$. Функция $f(w)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, если $\sup\limits_{w\in\mathcal{D}} |\rho_{\mathcal{D}}^{-1}(w) f''(w)/f'(w)| \leq A$, где

$$A = \frac{2\beta}{\pi} \frac{\gamma(2-\gamma)}{cosec\beta + \sqrt{(1-\gamma)^2 + ctg^2\beta}}, \quad \beta = arctg \frac{Kd}{Kd-2}, \quad \gamma = \frac{2}{\pi} arctg \frac{4Kd}{K^2d^2-4}.$$

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется одно вспомогательное утверждение. Пусть $G(t,h)$ – выпуклая область, ограниченная прямыми $Im\, w = \pm h/2$ и дугами окружностей $w = \pm(t/2) + (h/2)e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Лемма. Функция $f(w)$ будет однолистной в $G(t,h)$, если

$$\sup_{w\in\mathcal{D}} \left|\rho^{-1}_{G(t,h)}(w) f''(w)/f'(w)\right| \le (2\beta/\pi)\gamma(2-\gamma)/(\operatorname{cosec}\beta + \sqrt{(1-\gamma)^2 + \operatorname{ctg}^2\beta}),$$

где $\beta = \operatorname{arctg}(1+h/t)$, $\gamma = (2/\pi)\operatorname{arctg}[(2h/t)(1+h/t)/(1+2h/t)]$.

Доказательство леммы состоит в проверке условий теоремы I. Покажем, что $G(t,h) \in \mathfrak{M}_{a,b}(\beta)$, $a=-(t+h)/2$, $b=(t+h)/2$. В силу выпуклости области $G(t,h)$ постоянная $M(G(t,h))=1$. Определим параметры β и γ_*. В силу симметричности области $G(t,h)$ относительно осей координат условие (I) достаточно проверить лишь для четвертой части $\mathcal{L}_1^-$ границы области $G(t,h)$, лежащей в третьем координатном углу. Дугу $\mathcal{L}_1^-$ параметрически можно задать уравнениями

$$w(s) = \begin{cases} s - i\sqrt{h^2/4-(s+t/2)^2}, & -(t+h)/2 \le s \le -t/2, \\ s - ih/2, & -t/2 \le s \le 0. \end{cases}$$

В качестве параметра s здесь выбрана декартова координата $s = \operatorname{Re} w$, $-(t+h)/2 \le s \le 0$. Обозначим через AB дугу кривой $\mathcal{L}_1^-$, соответствующую изменению s от $-(t+h)/2$ до $-t/2$, а через BC – оставшуюся часть кривой $\mathcal{L}_1^-$.

На дуге AB имеем

$$\left|\arg\frac{(a-b)w'(s)}{[w(s)-a][w(s)-b]}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{t+h}\sqrt{\frac{h+(2s+t)}{h-(2s+t)}}\right) \le \operatorname{arctg}\frac{t}{t+h}.$$

Аналогично, на дуге BC находим

$$\left|\arg\frac{(a-b)w'(s)}{[w(s)-a][w(s)-b]}\right| = \operatorname{arctg}\frac{4hs}{s^2-(t+h)^2-h} \le \operatorname{arctg}\frac{t}{t+h}.$$

Поэтому $\beta = (\pi/2) - \operatorname{arctg}(t/(t+h)) = \operatorname{arctg}(1+h/t)$, $\pi/4 \le \beta \le \pi/2$.

Определим теперь $\gamma_* = \sup_R |1-\tilde{\gamma}(R)|$. При отображении $\omega(w) = [w+(t+h)/2]/[w-(t+h)/2]$ область $G(t,h)$ переходит в некоторую область $\mathcal{D}_\omega$, расположенную в полуплоскости $\operatorname{Re}\omega < 0$ и симметричную относительно оси $\operatorname{Im}\omega = 0$. Поэтому $\inf_{0<R<\infty} \tilde{\gamma}(R) = (2/\pi)\operatorname{arctg}\inf_{\omega\in\Gamma_1} |\operatorname{Im}\omega/\operatorname{Re}\omega|$, где Γ_1 – образ кривой $\mathcal{L}_1 = \partial G(t,h) \cap \{w : \operatorname{Im} w \le 0\}$ при отображении $\omega = \omega(w)$. Нетрудно показать, что $\inf_{\omega\in\Gamma_1} |\operatorname{Im}\omega/\operatorname{Re}\omega|$ достигается в точке $\omega_0 =$

$\omega(-ih/2)=[-(t^2+2th)+i2h(t+h)]/[(t+h)^2+h^2]$, т.е. $\inf_R \tilde{\gamma}(R)=$ $=(2/\pi)\,\mathrm{arctg}[(2h/t)(t+h)/(t+2h)]<1$, $\gamma_*=1-\inf_R \tilde{\gamma}(R)$.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что существуют точки w_1 , $w_2 \in \mathcal{D}$ такие, что $f(w_1)=f(w_2)$. Проведем через w_1 и w_2 прямую и обозначим через w_1' и w_2' точки ее пересечения с границей области $\mathcal{D}$. Поскольку $0\le K(w)\le K$ $\forall w\in\partial\mathcal{D}$,то [6] окружности радиуса $1/K$, касающиеся $\partial\mathcal{D}$ в точках w_1' и w_2' , целиком лежат в $\bar{\mathcal{D}}$. Проведя две общие непересекающиеся касательные к этим окружностям, впишем в $\mathcal{D}$ область $G(t,h)$, $h=$ $=2/K$, $t+h\le d$. Поскольку $\rho_{\mathcal{D}}(w)\le\rho_{G(t,h)}(w)$, то в силу нера - венства $\sup_{w\in\mathcal{D}}|\rho_{\mathcal{D}}^{-1}(w)f''(w)/f'(w)|\le A$ функция $f(w)$ в области $G(t,h)$ удовлетворяет условиям леммы, т.е. $f(w)$ однолистна в $G(t,h)$ и $f(w_1)\ne f(w_2)$. Полученное противоречие и доказывает однолистность $f(w)$ в $\mathcal{D}$.

Литература

I. М а й е р Ф. Ф. Условия однолистности аналитических функций в некоторых классах областей // Изв. вузов.Математика.- I989. - № I0. - С.73 - 76.

2. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям. - М.: Мир, I969. - I33 с.

3. А к с е н т ь е в Л. А., Ш а б а л и н П. Л. Условия однолистности в звездообразных и выпуклых областях // Тр. семин. по краев. задачам. - Казань, I983. - Вып.20. - С.35 - 42.

4. С а г и т о в а С. Б. Исследования по обратным краевым задачам в многосвязных областях // Автореф.дис. ...канд. физ. - мат.наук. - Казань, I983.

5. B e c k e r J. Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien // Math.Ann. - I973. - V.202, N 4.- S.32I-335.

6. Б л я ш к е В. Круг и шар. - М.: Наука, I967. - 232 с.

Доложено на семинаре 30.0I.89 г.