О. Е. Тихонов, Спектральная теория для пространств с базовой нормой, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 76–91

8. Н и к о л ь с к и й С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

9. П а н а с ю к В. В., С а в р у к М. П., Н а з а р ч у к З. П. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.

10. Г а б д у л х а е в Б. Г. Приближенное решение многомерных сингулярных уравнений, I, II // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 7. – С.30 – 41; 1976. – № 1. – С.30 – 41.

О.Е.Тихонов

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С БАЗОВОЙ НОРМОЙ

В работе продолжены исследования, начатые в [3]. В рамках некоммутативной спектральной теории Альфсена и Шульца [7],[8] для элементов пространства с базовой нормой ($\mathcal{V}$, K), обладающего точным следом, доказана единственность "спектрального разложения" относительно следа (теорема 4.5). Предварительно исследованы свойства "проективных следов" из $\mathcal{V}$ и интегралов по $\mathcal{V}^+$-значной мере. В теореме 5.2 доказано свойство экстремальности спектральных мер в связи с выпуклыми функциями и на этой основе введен некоторый аналог пространств $L_p(1 \le p < \infty)$.

Насколько возможно используются терминология и обозначения работ [7], [8] и [3].

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

Пусть ($\mathcal{V}$, K) – пространство с базовой нормой, т.е. $\mathcal{V}$ – вещественное упорядоченное нормированное пространство с порождающим конусом $\mathcal{V}^+$ и выделенной в нем базой K, причем множество $conv(K \cup -K)$ радиально компактно, а норма задается функционалом Минковского этого множества [6; гл. 2, § 1]. Сопряженным к ($\mathcal{V}$, K) является пространство с порядковой единицей ($\mathcal{A}$, e) – упорядоченное банахово пространство, причем конус $\mathcal{A}^+$ положительных элементов двойственен к $\mathcal{V}^+$, порядковая единица e определяется условием $\langle e,\rho\rangle = 1$ для любого $\rho \in K$, а норма на $\mathcal{A}$ удов –

летворяет соотношению $\|a\| = \inf\{\lambda > 0 \mid -\lambda e \le a \le \lambda e\}$ [6; гл. 2, § I]. Отметим, что $\|\rho\| = \langle e, \rho\rangle$ для $\rho \in \mathcal{V}^+$, и отсюда нетрудно получить, что для монотонно неубывающей сети $\{\rho_\alpha\}$ элементов $\mathcal{V}$, ограниченной сверху элементом $\rho \in \mathcal{V}$, эквивалентны условия:

(i) $\rho_\alpha \underset{\alpha}{\rightarrow} \rho$ в смысле нормы,

(ii) $\rho_\alpha \underset{\alpha}{\rightarrow} \rho$ в смысле слабой топологии,

(iii) $\langle e, \rho_\alpha\rangle \underset{\alpha}{\rightarrow} \langle e, \rho\rangle$.

Кроме того, если пространство $\mathcal{V}$ банахово, то сходится любая монотонная ограниченная по норме сеть элементов $\mathcal{V}$ (см. [3; лемма]).

Под проектором на $\mathcal{A}$ понимается линейное положительное слабо* непрерывное отображение $P: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что $P^2 = P$. Проектор P на $\mathcal{A}$ называется <u>гладким</u> [7; § I], если условие

$$\rho \in \mathcal{V}^+, \ \langle a, \rho\rangle = 0 \quad \text{при} \quad a \in ker^+ P = \mathcal{A}^+ \cap ker\, P,$$

влечет

$$\langle a, \rho\rangle = 0 \quad \text{при} \quad a \in ker\, P.$$

Проектор Q называется <u>квазидополнением</u> проектора P, если $ker^+ P = im^+ Q$ и $im^+ P = ker^+ Q$ [7; § I]. Проектор P на $\mathcal{A}$ называется <u>P -проектором</u>, если он по норме не превосходит I, гладкий и обладает гладким квазидополнением с нормой, не превосходящей I [7; § 2]. Гладкое квазидополнение к P -проектору P всегда единственно, является P -проектором и обозначается P'. Через $\mathcal{P}$ обозначается множество всех P -проекторов. Соотношением $P \le Q$, если $im\, P \subset im\, Q$, на $\mathcal{P}$ вводится отношение порядка. P-проекторы P и Q называются <u>ортогональными</u>, если $P \le Q'$ (обозначается: $P \perp Q$) [7, § 4].

Грань F базы K называется <u>выступающей</u>, если $F = \{\rho \in K \mid \langle a, \rho\rangle = 0\}$ для некоторого $a \in \mathcal{A}^+$, грань называется <u>проективной</u>, если она имеет указанный вид с $a = Pe$ для некоторого $P \in \mathcal{P}$. Далее в этом параграфе будем предполагать, как и в [8; § I], что каждая выступающая грань в K проективна. В [8; следствие I.2] показано, что при сделанном предположении множество $\mathcal{P}$ является полной ортомодулярной решеткой.

P -проекторы P и Q называются <u>совместимыми</u>, если PQ =

$= QP$ [7; § 5]. В [3] было введено понятие совместимости и бисовместимости P-проектора P и элемента ρ из $\mathcal{V}$. Будем говорить, что P <u>совместим</u> с ρ, если $P^*\rho + P'^*\rho = \rho$, и P <u>бисовместим</u> с ρ, если P совместим с ρ и с любым P-проектором, совместимым с ρ. (Здесь P^* – сопряженный к P проектор на $\mathcal{V}$.)

По аналогии с алгебрами Неймана элемент $\rho \in \mathcal{V}^+$ назовем <u>точным</u>, если $\langle a, \rho \rangle > 0$ при $a \in \mathcal{A}^+ \setminus \{0\}$. Элемент $\tau \in K$ называется <u>следом</u>, если он совместим с любым P-проектором [8; § 1]. Для $\rho \in \mathcal{V}$ через ρ^+ и ρ^- обозначим элементы $\mathcal{V}^+$, однозначно определяемые условиями $\rho = \rho^+ - \rho^-$ и $\|\rho\| = \|\rho^+\| + \|\rho^-\|$ [8; предл. 1.3]; сумму $\rho^+ + \rho^-$ обозначим через $|\rho|$.

Опишем основной результат работы [3]. Пусть $(\mathcal{V}, K)$ – полное пространство с базовой нормой такое, что любая выступающая грань в K проективна, и τ – точный след из K. Тогда для любого $\rho \in \mathcal{V}$ существует семейство $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ бисовместимых с ρ P-проекторов, для которого выполнены условия:

a) $Q_\lambda = \bigwedge_{\mu > \lambda} Q_\mu$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$,

в) $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} Q_\lambda = I_{+\infty}$, $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} Q_\lambda = 0$,

c) $\langle a, \rho \rangle = \int_{-\infty} \lambda\, d\langle a, Q_\lambda^* \tau \rangle$ для любого $a \in \mathcal{A}$.

В [3] исследовалось понятие <u>несущего проектора</u> P_ρ для $\rho \in \mathcal{V}^+$, который можно определить как наименьший среди P-проекторов P, удовлетворяющих условию $P^*\rho = \rho$. Доказано, в частности, что P_ρ бисовместим с ρ [3; предл. 14]. Отметим также, что для $\rho \in \mathcal{V}^+$ и $P \in \mathcal{P}$ справедлива формула $P_{P^*\rho} = (P_\rho \vee P') \wedge P$ (ср. [8; формула (1.10)]), из которой следует для точного ρ формула $P_{P^*\rho} = P$. Элементы ρ и σ из $\mathcal{V}^+$ будем называть <u>ортогональными</u> (и обозначать $\rho \perp \sigma$), если $P_\rho \perp P_\sigma$ [3]. Ясно, что для точного $\rho \in \mathcal{V}^+$ и P-проекторов P и Q условия $P^*\rho \perp Q^*\rho$ и $P \perp Q$ эквивалентны.

<u>§ 2. $\mathcal{V}^+$-значные меры и интегрирование</u>

Пусть $(\mathcal{V}, K)$ – пространство с базовой нормой, $(\mathcal{A}, e)$ – сопряженное к нему пространство с порядковой единицей. Через $\mathbf{X} = \{X(E)\}$ будем в дальнейшем обозначать $\mathcal{V}^+$-значную аддитивную функцию множеств, заданную на σ -алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств некоторого множества Ω ; для $a \in \mathcal{A}$ через $\langle a, \mathbb{X}\rangle$ будем обозначать соответствующую $\mathbb{X}$ $\mathbb{R}$ -значную функцию множеств, т.е. $\langle a,\mathbb{X}\rangle(E) = \langle a, X(E)\rangle$ для $E \in \mathcal{A}$.

Предложение 2.1. Для $\mathcal{V}^{+}$-значной аддитивной функции множеств $\mathbb{X}$, заданной на σ -алгебре $\mathcal{A}$, эквивалентны условия:

(i) $\mathbb{X}$ σ -аддитивна в смысле нормы,

(ii) $\mathbb{X}$ σ -аддитивна в смысле слабой топологии,

(iii) $\langle e,\mathbb{X}\rangle$ σ -аддитивна на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Импликации $(i)\Rightarrow(ii)\Rightarrow(iii)$ тривиальны.

Пусть выполнено условие (iii), (E_i) - последовательность непересекающихся множеств из $\mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогда $\langle e, X(E)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e, X(E_i)\rangle$. Из аддитивности $\mathbb{X}$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} X(E_i) \leq X(E)$ для любого n , поэтому справедливость импликации $(iii) \Rightarrow (i)$ вытекает из свойств пространств с базовой нормой, отмеченных в начале § I.

Определение. Аддитивную функцию множеств, для которой выполнено одно из эквивалентных условий (i)-(iii) предложения 2.1, будем называть $\mathcal{V}^{+}$-значной мерой.

Ясно, что любая $\mathcal{V}^{+}$-значная мера $\mathbb{X}$ на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ числовой прямой определяет на $\mathbb{R}$ неубывающую непрерывную справа $\mathcal{V}^{+}$-значную функцию $N(\lambda) = X((-\infty, \lambda])$, причем $\lim_{\lambda\to-\infty} N(\lambda) = 0$ и $\lim_{\lambda\to+\infty} N(\lambda) = X(\mathbb{R})$. Обратная конструкция описывается в следующем предложении.

Предложение 2.2. Пусть $(\mathcal{V}, K)$ - полное пространство с базовой нормой и $N: \mathbb{R} \mapsto \mathcal{V}$ - неубывающая ограниченная непрерывная справа функция. Тогда существует единственная $\mathcal{V}^{+}$-значная мера $\mathbb{X}$ на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такая, что $X((-\infty,\lambda]) = N(\lambda) - \lim_{\mu\to-\infty} N(\mu)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $\lim_{\lambda\to-\infty} N(\lambda)$ и $\lim_{\lambda\to+\infty} N(\lambda)$ существуют (см. § I). Не ограничивая общности, будем считать, что $\lim_{\lambda\to-\infty} N(\lambda) = 0$.

Для любого $a \in \mathcal{A} = \mathcal{V}^{*}$ вещественная непрерывная справа функция $<a, N(\lambda)>$ на $\mathbb{R}$ обладает конечной полной вариацией и поэтому однозначно определяет вещественную меру m_a на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такую, что $m_a((-\infty,\lambda]) = <a, N(\lambda)>$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что соотношение

$$< a , X(E) > = m_a(E) \qquad \text{для любого} \quad a \in \mathcal{A}$$

корректно определяет σ -аддитивное в $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$ -топологии отображение $\mathbb{X} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}^{*+}$. Остается убедиться, что $X(E) \in \mathcal{V}$ для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid X(E) \in \mathcal{V}\}$. Ясно, что $(-\infty,\lambda] \in \mathcal{L}$, поэтому $(\lambda,+\infty) \in \mathcal{L}$ и $(\lambda, \mu] \in \mathcal{L}$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Следовательно, любое множество вида $\bigcup_{i=0}^{n} (\lambda_i, \mu_i] \cup (\lambda_{n+1}, +\infty)$, где $-\infty \le \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \ldots < \mu_n < \lambda_{n+1} \le +\infty$, принадлежит $\mathcal{L}$. Совокупность таких множеств образует булеву алгебру, а из замкнутости $\mathcal{V}$ относительно операции перехода к пределу монотонной сети (см. § I) следует, что $\mathcal{L}$ – монотонный класс, поэтому $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (см., например,[I; утв. I4.4]).

Всюду в дальнейшем вещественные функции, заданные на измеримом пространстве, будем предполагать борелевскими.

<u>Предложение 2.3</u>. Пусть ($\mathcal{V}$, K) – полное пространство с базовой нормой и $\mathbb{X}$ – $\mathcal{V}^+$-значная мера на σ -алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω , тогда для функции $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ эквивалентны условия:

(i) φ интегрируема по $\mathbb{X}$,

(ii) φ интегрируема по вещественной мере $<a, \mathbb{X}>$ для любого $a \in \mathcal{A}$,

(iii) φ интегрируема по мере $<e, \mathbb{X}>$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В некотором обсуждении нуждается лишь импликация (iii) $\Rightarrow$ (i). Ее справедливость следует из того, что из интегрируемости функции по вариации меры следует ее интегрируемость и по самой мере, а вариация меры $\mathbb{X}$ совпадает с мерой $<e, \mathbb{X}>$.

З а м е ч а н и е. Вдобавок к обычным свойствам интегралов по векторной мере отметим, что если φ – интегрируемая по $\mathcal{V}^+$-значной мере $\mathbb{X}$ неотрицательная функция, то $\int_\Omega \varphi \, d\mathbb{X}$ принадлежит $\mathcal{V}^+$.

Следующее утверждение устанавливает связь с конструкциями работы [2] и дает возможность применять далее результаты этой работы. Его доказательство достаточно стандартно и может быть проведено аналогично доказательству [2; предл. 3.3].

Предложение 2.4. Пусть $(\mathcal{V}, \mathcal{K})$ – полное пространство с базовой нормой и $\rho \in \mathcal{K}$. Элемент σ из $\mathcal{V}$ допускает представление вида

$$\sigma = \int_Q \varphi \, d\mathbb{X} \quad , \qquad (\ast)$$

где $\mathbb{X}$ – $\mathcal{V}^+$-значная мера, $\mathbb{X}(Q) = \rho$ и φ – интегрируемая по $\mathbb{X}$ функция тогда и только тогда, когда σ допускает представление вида

$$\sigma = \sum_{i \in I} \beta_i \alpha_i \rho_i \quad , \qquad (\ast\ast)$$

где $\rho_i \in \mathcal{K}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $\sum \alpha_i = 1$, $\sum \alpha_i \rho_i = \rho$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\sum |\beta_i| \alpha_i < \infty$, I конечно или счетно. Если функция $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выпукла и σ допускает представления вида $(\ast)$ и $(\ast\ast)$, то

$$\inf \int_Q \psi \circ \varphi \, d\langle e, \mathbb{X} \rangle = \inf \sum_{i \in I} \psi(\beta_i) \alpha_i \quad ,$$

где $\inf$ в левой части равенства берется по всем представлениям σ вида $(\ast)$, а в правой – по всем представлениям вида $(\ast\ast)$.

§ 3. Проективные следы

Всюду далее в этом и следующих параграфах будем предполагать, что $(\mathcal{V}, \mathcal{K})$ – полное пространство с базовой нормой такое, что любая выступающая грань в $\mathcal{K}$ проективна, $(\mathcal{A}, e)$ – сопряженное к $(\mathcal{V}, \mathcal{K})$ пространство с порядковой единицей.

Предложение 3.I. Пусть P_ρ – несущий проектор для $\rho \in \mathcal{V}^+$, P и Q – совместимые с P_ρ P-проекторы. Тогда условие $P^*\rho \leq Q^*\rho$ влечет $P \wedge P_\rho \leq Q \wedge P_\rho$.

Доказательство. Пусть $a \in \ker^+(Q \wedge P_\rho)$, тогда

$$0 \leq \langle (P \wedge P_\rho) a, \rho \rangle = \langle a, (P \wedge P_\rho)^* \rho \rangle =$$

$$= \langle a, P^* P_\rho \rho \rangle = \langle a, P^* \rho \rangle \leq$$

$$\leq \langle a, Q^* \rho \rangle = \langle (Q \wedge P_\rho) a, \rho \rangle = 0 \quad ,$$

откуда $\langle (P\wedge P_\rho)a, \rho\rangle = 0$, и, согласно [3; предл. 2], $(P\wedge P_\rho)a\in$ $\in im^+ P'_\rho$. Но с другой стороны, $(P\wedge P_\rho)a = P_\rho P a \in im^+ P_\rho$ и, следовательно, $(P\wedge P_\rho)a = 0$. Таким образом, $ker^+(Q\wedge P_\rho)\subset$ $\subset ker^+(P\wedge P_\rho)$ и поэтому $P\wedge P_\rho \lessdot Q\wedge P_\rho$.

Следствие 3.2. Для точного элемента $\rho\in\mathcal{V}^+$ и P-проекторов P и Q условие $P^*\rho\le Q^*\rho$ влечет $P\lessdot Q$.

Предложение 3.3. Для совместимых с $\rho\in\mathcal{V}^+$ P-проекторов P и Q эквивалентны условия:

(i) $P^*\rho\le Q^*\rho$,

(ii) $P\wedge P_\rho \lessdot Q\wedge P_\rho$.

Доказательство. Если P и Q совместимы с ρ, то они совместимы и с P_ρ [3; предл. I4], поэтому импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из предложения 3.I. Из [3; предл. I0] $P\wedge P_\rho$ и $Q\wedge P_\rho$ совместимы с ρ, поэтому условие $P\wedge P_\rho\lessdot Q\wedge P_\rho$ влечет $(P\wedge P_\rho)^*\rho\le (Q\wedge P_\rho)^*\rho$ [3; предл. 9]. Но $(P\wedge P_\rho)^*\rho = P^* P_\rho^*\rho =$ $= P^*\rho$ и, аналогично, $(Q\wedge P_\rho)^*\rho = Q^*\rho$, откуда и следует импликация (ii) $\Rightarrow$ (i).

Следствие 3.4. Для точного элемента $\rho\in\mathcal{V}^+$ и совместимых с ρ P-проекторов P и Q условия $P^*\rho\le Q^*\rho$ и $P\lessdot$ $\lessdot Q$ эквивалентны.

Следствие 3.5. Для точного элемента $\rho\in\mathcal{V}^+$ и совместимых с ρ P-проекторов P и Q условия $P^*\rho + Q^*\rho\le\rho$ и $P\perp Q$ эквивалентны.

Далее будем предполагать фиксированным точный след τ из K.

Определение. Элементы $\mathcal{V}^+$ вида $P^*\tau$ с $P\in\mathcal{P}$ назовем <u>проективными следами</u>.

Множество $\mathcal{T}$ проективных следов с порядком, индуцированным из $\mathcal{V}$, обладает наименьшим элементом 0 и наибольшим τ. Снабдим $\mathcal{T}$ операцией дополнения $P^*\tau \mapsto \tau - P^*\tau$. Из вышеизложенного получаем следующее утверждение.

Теорема 3.6. Отображение $P\mapsto P^*\tau$ задает изоморфизм полных ортомодулярных решеток $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$.

Предложение 3.7. P-проектор P совместим с P-проектором Q тогда и только тогда, когда P совместим с проективным следом $Q^*\tau$.

Доказательство. Пусть P совместим с Q. Тогда $P^*Q^*\tau + P'^*Q^*\tau = Q^*P^*\tau + Q^*P'^*\tau =$

$$=Q^*(P^*\tau + P'^*\tau) = Q^*\tau\ ,$$

т.е. P совместим с $Q^*\tau$.

Пусть P совместим с $Q^*\tau$, тогда P совместим с несущим проектором $Q^*\tau$, равным Q. Отметим еще, что, учитывая [3 ; предл. 9], нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 3.8. Монотонно неубывающая сеть $\{P_\alpha^*\tau\}$ проективных следов сходится к проективному следу $(\bigvee_\alpha P_\alpha)^*\tau$, монотонно невозрастающая сеть $\{P_\alpha^*\tau\}$ сходится к $(\bigwedge_\alpha P_\alpha)^*\tau$.

§ 4. Спектральные меры

Рассмотрим специальный класс $\mathcal{U}^+$-значных мер – $\mathcal{T}$-значные меры. Отметим прежде всего, что если $\mathbb{T}=\{T(E)\}$ – $\mathcal{T}$-значная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, то равенство $T(E) = P(E)^*\tau$ корректно определяет функцию множеств $\mathbb{P}=\{P(E)\}$ на $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathcal{P}$. Приведем некоторые свойства $\mathcal{T}$-значных мер и связанных с ними $\mathcal{P}$-значных функций множеств, справедливость которых легко следует из результатов предыдущего параграфа. Пусть далее $\mathbb{T}=\{T(E)\}$ – $\mathcal{T}$-значная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, $\mathbb{P}=\{P(E)\}$ – соответствующая ей $\mathcal{P}$-значная функция множеств, E и E_i – множества из $\mathcal{A}$.

a). Если $E_1 \subset E_2$, то $P(E_1) \leqslant P(E_2)$.

в). Если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $T(E_1) \perp T(E_2)$ и $P(E_1) \perp P(E_2)$.

c). Если $T(\Omega) = \tau$, то $P(E^c) = P(E)'$.

d). P-проекторы $P(E_1)$ и $P(E_2)$ совместимы (см. [7; предл. 5.4]).

e). $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigvee_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

f). $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

Если $\mathbf{X}$ – $\mathcal{U}^+$-значная мера и $P \in \mathcal{P}$, то для $\mathcal{U}^+$-значной меры $\{P^* X(E)\}$ будем использовать обозначение $P^*\mathbf{X}$.

Предложение 4.1. Пусть $\mathbf{X}$ – $\mathcal{U}^+$-значная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по $\mathbf{X}$ функция и для любого $E \in \mathcal{A}$ P-проектор P совместим с $X(E)$. Тогда P совместим с $\int_\Omega \varphi\, d\mathbf{X}$.

Доказательство. Так как $P^*X(E) + P'^*X(E) =$

$= X(E)$ для любого $E \in \mathcal{A}$, то

$$P^* \int_\Omega \varphi \, d\mathbb{X} + P'^* \int_\Omega \varphi \, d\mathbb{X} = \int_\Omega \varphi \, dP^*\mathbb{X} + \int_\Omega \varphi \, dP'^*\mathbb{X} =$$

$$= \int_\Omega \varphi \, d(P^*\mathbb{X} + P'^*\mathbb{X}) = \int_\Omega \varphi \, d\mathbb{X} \quad ,$$

т.е. P совместим с $\int_\Omega \varphi \, d\mathbb{X}$.

С л е д с т в и е 4.2. Пусть $\mathbb{T}$ – $\mathcal{T}$-значная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, $\mathbb{P}$ – соответствующая $\mathcal{P}$-значная функция множеств и $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ – интегрируемая по $\mathbb{T}$ функция. Тогда P-проектор $P(E)$ совместим с $\int_\Omega \varphi \, d\mathbb{T}$ для любого $E \in \mathcal{A}$.

<u>Предложение 4.3</u>. Пусть $N : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{V}$ – неубывающая ограниченная непрерывная справа функция, $\mathbb{X}$ – ассоциированная с ней, согласно с предложением 2.2, $\mathcal{V}^+$-значная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

а). Если P-проектор P совместим с $N(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, то P совместим с $X(E)$ для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

в). Если $N(\lambda)$ принадлежит $\mathcal{T}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, то мера $\mathbb{X}$ $\mathcal{T}$-значна.

с). Пусть в условиях пункта в) $N(\lambda) = Q_\lambda^* \tau$ с $Q_\lambda \in \mathcal{P}$, $\mathbb{P}$ – соответствующая мере $\mathbb{X}$ $\mathcal{P}$-значная функция множеств и Q_λ совместим с элементом $\rho \in \mathcal{V}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $P(E)$ совместим с ρ для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а). Так как P совместим с $N(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$P^* \lim_{\lambda \to -\infty} N(\lambda) + P'^* \lim_{\lambda \to -\infty} N(\lambda) =$$

$$= \lim_{\lambda \to -\infty} (P^* N(\lambda) + P'^* N(\lambda)) = \lim_{\lambda \to -\infty} N(\lambda) \quad ,$$

т.е. P совместим с $\lim_{\lambda \to -\infty} N(\lambda)$, и аналогично P совместим с $\lim_{\lambda \to +\infty} N(\lambda)$. Пусть $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid P$ совместим с $X(E)\}$. Множества вида $\bigcup_{i=0}^{n} (\lambda_i, \mu_i] \cup (\lambda_{n+1}, +\infty)$, где $-\infty \le \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 <$

$<\mu_1<\ldots<\mu_n<\lambda_{n+1}\leq+\infty$ принадлежат $\mathcal{L}$, и $\mathcal{L}$ является монотонным классом, поэтому $\mathcal{L}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

в). Из предложения 3.8 следует, что $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}N(\lambda)$ и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}N(\lambda)$ – элементы $\mathcal{T}$. Пусть теперь $\mathcal{L}=\{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\mid X(E)\in\mathcal{T}\}$. Из [3; предл. II] и следствия 3.5 следует, что все множества вида $\bigcup\limits_{i=0}^{n}(\lambda_i,\mu_i]\cup(\lambda_{n+1},+\infty)$ принадлежат $\mathcal{L}$, а из предложения 3.8 – что $\mathcal{L}$ является монотонным классом, поэтому $\mathcal{L}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

с). Пусть $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}N(\lambda)=Q^*_{-\infty}\tau$ и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}N(\lambda)=Q^*_{+\infty}\tau$, где $Q_{-\infty}, Q_{+\infty}\in\mathcal{P}$. Из [3; предл. 9] следует, что $Q_{-\infty}$ и $Q_{+\infty}$ совместимы с ρ. Пусть теперь $\mathcal{L}=\{E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\mid P(E)$ совместим с $\rho\}$. Множества вида $\bigcup\limits_{i=0}^{n}(\lambda_i,\mu_i]\cup(\lambda_{n+1},+\infty)$ принадлежат $\mathcal{L}$ и из [3; предл. 9] следует, что $\mathcal{L}$ – монотонный класс, поэтому $\mathcal{L}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

<u>Предложение 4.4</u>. Пусть $\mathbb{T}$ – $\mathcal{T}$-значная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $T(\mathbb{R})=\tau$, $\mathbb{P}$ – соответствующая $\mathbb{T}$ $\mathcal{P}$-значная функция множеств и $\varphi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ – монотонно возрастающая интегрируемая по $\mathbb{T}$ функция. Тогда для любого борелевского множества E P-проектор $P(E)$ бисовместим с $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\,d\mathbb{T}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\,d\mathbb{T}=\rho$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda)=\mu$ и $P((-\infty,\lambda])=Q_\lambda$. Докажем, что Q_λ бисовместим с ρ. Пусть $a\in im^+Q_\lambda$, тогда

$$<a,\rho>=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\,d<a',\mathbb{T}>=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\,d<Q_\lambda a,\mathbb{T}>=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\,d<a,Q^*_\lambda\mathbb{T}>=\int\limits_{(-\infty,\lambda]}\varphi\,d<a,Q^*_\lambda\mathbb{T}>\leq$$

$$\leq\mu\int\limits_{(-\infty,\lambda]}d<a,Q^*_\lambda\mathbb{T}>=\mu\int\limits_{\mathbb{R}}d<a,Q^*_\lambda\mathbb{T}>=$$

$$=\mu\int\limits_{\mathbb{R}}d<a,\mathbb{T}>=\mu<a,T(\mathbb{R})>=\mu<a,\tau>.$$

Аналогично, $<a,\rho>\geq\mu<a,\tau>$ при $a\in im^+Q'_\lambda\setminus\{0\}$. Так как по следствию 4.2 Q_λ совместим с ρ, то из [3; теорема 2] следует, что Q_λ бисовместим с ρ. Из предложения 3.7 и пункта а) предложения 4.3 теперь следует, что $P(E)$ бисовместим с ρ для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Через γ обозначим функцию $\gamma(\lambda) = \lambda$ для $\lambda \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 4.5. Для любого $\rho \in \mathcal{V}$ существует единственная $\mathcal{T}$-значная мера $\mathbb{T}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такая, что $T(\mathbb{R}) = \tau$ и $\rho = \int_{\mathbb{R}} \gamma \, d\mathbb{T}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование такой меры следует из [3; теорема 4] и пункта в) предложения 4.3. Покажем ее единственность.

Пусть $\rho = \int_{\mathbb{R}} \gamma \, d\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ – некоторая $\mathcal{T}$-значная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такая, что $T(\mathbb{R}) = \tau$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $T((-\infty, \lambda]) = Q_\lambda^* \tau$ с $Q_\lambda \in \mathcal{P}$. Как и при доказательстве предложения 4.4, показывается, что Q_λ – совместимый с ρ P-проектор такой, что $\langle a, \rho \rangle \le \lambda \langle a, \tau \rangle$ при $a \in im^+ Q_\lambda$ и $\langle a, \rho \rangle > \lambda \langle a, \tau \rangle$ при $a \in im^+ Q_\lambda' \setminus \{0\}$. Из [3; теорема 2] следует, что Q_λ определяется этими условиями однозначно, поэтому, согласно предложению 2.2, однозначно определяется и мера $\mathbb{T}$.

Определение. Для $\rho \in \mathcal{V}$ через $\mathbb{T}^{(\rho)}$ обозначим единственную $\mathcal{T}$-значную меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такую, что $T^{(\rho)}(\mathbb{R}) = \tau$ и $\rho = \int_{\mathbb{R}} \gamma \, d\mathbb{T}^{(\rho)}$. Назовем $\mathbb{T}^{(\rho)}$ спектральной мерой для ρ. Отметим, что если $\mathbb{P}^{(\rho)}$ – $\mathcal{P}$-значная функция множеств, соответствующая спектральной мере $\mathbb{T}^{(\rho)}$ для $\rho \in \mathcal{V}$, то ρ-проектор $P^{(\rho)}(E)$ бисовместим с ρ для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Предложение 4.6. Для $P \in \mathcal{P}$ эквивалентны следующие условия:

(i) P централен, т.е. $Pa + P'a = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$ [7; § 5];

(ii) P совместим с любым P-проектором;

(iii) P совместим с любым $\rho \in \mathcal{V}$;

(iv) P совместим с любым проективным следом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При определении совместимости P-проекторов в [7; § 5] было отмечено, что условия $PQ = QP$ и $PQe + P'Qe = Qe$ $(P, Q \in \mathcal{P})$ эквивалентны, откуда и следует импликация (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Если $PQe + P'Qe = Qe$ для любого $Q \in \mathcal{P}$, то $P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i e) + P'(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i e) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i e$ для любых $Q_i \in \mathcal{P}$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Как показано при доказательстве [8; предл. I.7], множество $conv\{Qe \mid Q \in \mathcal{P}\}$ слабо* плотно в $[0, e]$, поэтому $lin\{Qe \mid Q \in \mathcal{P}\}$ слабо* плотно в $\mathcal{A}$, и из слабой* непрерывности P и P' следует, что $Pa + P'a = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Условие $Pa + P'a = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$ эквивалентно условию $\langle Pa + P'a, \rho \rangle = \langle a, \rho \rangle$ для любых $a \in \mathcal{A}$ и $\rho \in \mathcal{V}$, но $\langle Pa + P'a, \rho \rangle = \langle a, P^*\rho + P'^*\rho \rangle$, поэтому второе условие эквивалентно тому, что $P^*\rho + P'^*\rho = \rho$ для любого $\rho \in \mathcal{V}$.

Эквивалентность условий (ii) и (iv) следует из предложения 3.7.

З а м е ч а н и е. Эквивалентность условий (i), (ii), (iii) в предложении 4.6 доказана без предположения о существовании в K точного следа.

<u>Предложение 4.7.</u> Пусть $\rho \in K$, $\mathbb{P}^{(\rho)}$ – соответствующая спектральной мере $\mathbb{T}^{(\rho)}$ $\mathcal{P}$-значная функция множеств. Тогда ρ является следом в том и только в том случае, когда для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ P-проектор $P^{(\rho)}(E)$ централен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ρ – след и $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Так как любой P-проектор совместим с ρ, а $P^{(\rho)}(E)$ бисовместим с ρ, то $P^{(\rho)}(E)$ совместим с любым P-проектором и, согласно предложению 4.6, централен.

Если для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ P-проектор $P^{(\rho)}(E)$ централен, то, согласно предложению 4.6, любой P-проектор P совместим с $P^{(\rho)}(E)$, согласно предложению 3.7, P совместим с $T^{(\rho)}(E)$ и, согласно предложению 4.I, P совместим с $\rho = \int_{\mathbb{R}} \gamma \, d\mathbb{T}^{(\rho)}$, т.е. ρ – след.

<u>§ 5. Функциональное исчисление и пространства типа L_p</u>

Рассмотрим далее некоторые элементы функционального исчисления (сравни [7; § 8]).

<u>Определение</u>. Пусть $\rho \in \mathcal{V}$, $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – интегрируемая по спектральной мере $\mathbb{T}^{(\rho)}$ функция. Через $\varphi(\rho)$ обозначим элемент $\mathcal{V}$, заданный равенством $\varphi(\rho) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mathbb{T}^{(\rho)}$. Через ι и $\varkappa$ обозначим функции $\iota(\lambda) = 1$ и $\varkappa(\lambda) = |\lambda|$ для $\lambda \in \mathbb{R}$.

Предложение 5.I. Пусть $\rho \in \mathcal{V}$, тогда:

а) $\iota(\rho) = \tau$, $\gamma(\rho) = \rho$, $\varkappa(\rho) = |\rho|$;

в) $(\alpha\varphi + \beta\psi)(\rho) = \alpha\varphi(\rho) + \beta\psi(\rho)$, если функции φ и ψ интегрируемы по $\mathbb{T}^{(\rho)}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

с) если φ интегрируема по $\mathbb{T}^{(\rho)}$ и $\varphi \geqslant 0$, то $\varphi(\rho) \in \mathcal{V}^{+}$;

d) если χ_E – характеристическая функция борелевского подмножества $E \subset \mathbb{R}$, то $\chi_E(\rho) = T^{(\rho)}(E)$;

е) если $\mathbb{T}$ – $\mathcal{T}$-значная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, $T(\Omega) = \tau$, $\rho = \int_{\Omega} \varphi \, d\mathbb{T}$, ψ – борелевская функция на $\mathbb{R}$, то $\psi \circ \varphi$ интегрируема по $\mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда ψ интегрируема по спектральной мере $\mathbb{T}^{(\rho)}$ и в случае интегрируемости $\psi(\rho) = \int_{\Omega} \psi \circ \varphi \, d\mathbb{T}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения пунктов а) – d) легко следуют из элементарных свойств интеграла и конструкции спектральной меры. Доказательство пункта е) проведем аналогично доказательству [7; лемма 8.4 и предл. 8.6].

Покажем прежде всего, что $T(\varphi^{-1}(E)) = T^{(\rho)}(E)$ для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для $E = (-\infty, \lambda]$ с $\lambda \in \mathbb{R}$ равенство $T(\varphi^{-1}(E)) = T^{(\rho)}(E)$ доказывается аналогично тому, как было проделано при доказательстве единственности в теореме 4.5. Следовательно, для любого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и любого $a \in \mathcal{A}^{+}$ справедливо равенство $\langle a, T(\varphi^{-1}(E))\rangle = \langle a, T^{(\rho)}(E)\rangle$ и поэтому $T(\varphi^{-1}(E)) = T^{(\rho)}(E)$. Из теоремы о замене переменных в интеграле Лебега следует тогда, что $\int_{\mathbb{R}} \psi \, d\langle a, \mathbb{T}^{(\rho)}\rangle = \int_{\Omega} \psi \circ \varphi \, d\langle a, \mathbb{T}\rangle$ для любого $a \in \mathcal{A}^{+}$, что с учетом предложения 2.3 и доказывает пункт е).

Доказательство следующей теоремы вполне аналогично проведенным автором ранее доказательствам подобных утверждений в других ситуациях (см., например, [4; теорема I] и [5; теорема 2]). Эта теорема позволяет получить ряд утверждений аналогично тому, как проделано в [4] и [5]. В предложении 5.3 приводится одно из них, связанное с конструкцией пространств типа L_p.

Т е о р е м а 5.2. Пусть $\mathbb{X}$ – $\mathcal{V}^{+}$-значная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, $X(\Omega) = \tau$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по $\mathbb{X}$ функция, $\rho = \int_{\Omega} \varphi \, d\mathbb{X}$ и функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла. Тогда

$$\int\limits_{R} \phi\, d\langle e, T^{(\rho)}\rangle \leq \int\limits_{\Omega} \phi\circ\varphi\, d\langle e, X\rangle . \qquad (*)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что из выпуклости ϕ и интегрируемости φ следует, что оба интеграла в (ж) корректно определены со значениями в $R \cup \{+\infty\}$. Ясно, что при доказательстве можно считать $\int\limits_{\Omega} \phi\circ\varphi\, d\langle e, X\rangle < +\infty$.

а). Если функция ϕ линейна, то справедливость неравенства (ж) очевидна.

в). Пусть $\phi = æ$. Обозначим, как обычно, $\varphi^+ = max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = -min\{\varphi, 0\}$ и пусть $\rho_1 = \int\limits_{\Omega} \varphi^+ dX$, $\rho_2 = \int\limits_{\Omega} \varphi^- dX$. Тогда $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{V}^+$, $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и

$$\int\limits_{\Omega} \phi\circ\varphi\, d\langle e, X\rangle = \int\limits_{\Omega} \varphi^+ d\langle e, X\rangle + \int\limits_{\Omega} \varphi^- d\langle e, X\rangle =$$

$$= \langle e, \rho_1\rangle + \langle e, \rho_2\rangle = \|\rho_1\| + \|\rho_2\| \geq \|\rho\| =$$

$$= \|\rho^+\| + \|\rho^-\| = \int\limits_{R} \phi\, d\langle e, T^{(\rho)}\rangle .$$

с). Пусть $\phi(\lambda) = |\lambda - \delta|$ для $\lambda \in R'$, где $\delta \in R$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \phi\circ\varphi\, d\langle e, X\rangle = \int\limits_{\Omega} æ\circ(\varphi - \delta)\, d\langle e, X\rangle \geq$$

$$\geq \langle e, æ(\int\limits_{\Omega} (\varphi - \delta)\, dX)\rangle = \langle e, æ(\rho - \delta\tau)\rangle = \int\limits_{R} \phi\, dT^{(\rho)}.$$

d). Из пунктов а) и с) следует справедливость неравенства (ж) для функций вида

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\lambda - \delta_i| + \eta\lambda + \varepsilon ,$$

где δ_i, η, $\varepsilon \in R$, $\xi_i \in R^+$. Отметим, что любую выпуклую кусочно-линейную функцию на R с конечным числом изломов можно представить в таком виде.

е). Любую выпуклую функцию ϕ на R можно представить как поточечный предел возрастающей последовательности (ϕ_n) выпуклых кусочно-линейных функций с конечным числом изломов. Используя пункт d) и теорему Леви о монотонной сходимости, получаем

$$\int_{\Omega} \varphi \circ \varphi \, d\langle e, X\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \varphi_n \circ \varphi \, d\langle e, X\rangle \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\langle e, T^{(\rho)}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\langle e, T^{(\rho)}\rangle .$$

Теорема доказана.

Отметим, что если $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\langle e, T^{(\rho)}\rangle < +\infty$, то неравенство (ж) можно записать в виде $\langle e, \varphi(\rho)\rangle \leq \int_{\Omega} \varphi \circ \varphi d\langle e, X\rangle$. Пусть $1 \leq p < \infty$, $L_p(\tau) = \{\rho \in V \mid \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p d\langle e, T^{(\rho)}\rangle < \infty\}$ и $\|\rho\|_p = [\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^p d\langle e, T^{(\rho)}\rangle]^{1/p}$. Из предыдущей теоремы, предложения 2.4 и 2; теорема 4.I получаем следующее утверждение.

<u>Предложение 5.3</u>. Для $1 \leq p < \infty$ функция $\rho \mapsto \|\rho\|_p$ является нормой на $L_p(\tau)$, относительно которой пространство $L_p(\tau)$ банахово.

Литература

I. П а р т а с а р а т и К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. - М.: Мир, 1983. - 243 с.

2. Т и х о н о в О. Е. Банаховы пространства, ассоциированные с пространством состояний, и функция информации // Конструк. теория функций и функц. анализ. Казань, 1990. - Вып.7. - С.67-90.

3. Т и х о н о в О. Е. Спектральное разложение относительно следа в пространстве с базовой нормой // Изв. вузов. Матем. - 1991. - № I. - С. 73 - 80.

4. Т и х о н о в О.Е. Выпуклые функции и неравенства для следа // Конструк. теория функций и функц. анализ. Казань,1987. - Вып. 6. - С. 77 - 82.

5. Т и х о н о в О. Е. Неравенства для пространств в спектральной двойственности, связанные с выпуклыми функциями и следом. - Казань, 1987. - II с. - Рукопись представлена Казан. ун-том. - Деп. в ВИНИТИ 20 мая 1987, № 3591 - В87.

6. A l f s e n E. M. Compact convex sets and boundary integrals. - Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971. - 210 p.

7. A l f s e n E. M., S h u l t z F. W. Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets // Memoirs Amer. Math. Soc. - 1976. - V.6. - No.172. - XII, 120 p.

8. A l f s e n E. M., S h u l t z F. W. On non-commutative spectral theory and Jordan algebras // Proc. London Math. Soc. (3). - 1979. - V.38. - P.497 - 516.

И.А.Шакиров

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НАИВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

Рассмотрим квадратурную формулу (к.ф.) прямоугольников

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)\,ds \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(s_k) \quad (x = x(s) \in \tilde{C}) \tag{1}$$

по семейству равномерно распределенных на отрезке $[0, 2\pi]$ узлов

$$s_k = s_k^* - 2\pi\theta/N \quad (s_k^* = 2\pi k/N,\ k=\overline{1,N},\ N \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

зависящих от параметра θ, где $\theta \in [0,1]$, $\tilde{C} = \tilde{C}[0,2\pi]$ - множество непрерывных комплекснозначных 2π - периодических функций действительного аргумента. Варьируя θ в указанном промежутке (при фиксированном N), получаем всевозможные равноотстоящие узлы на периоде.

Обозначим через $\mathcal{H}_n$ множество тригонометрических полиномов (т.п.) степени не выше N. Известно [1, с.162], [2, с.119], что к.ф. прямоугольников по N равноотстоящим узлам из отрезка $[0, 2\pi]$ точна для любого полинома $T(s) \in \mathcal{H}_{N-1}$, а также для некоторых подмножеств т.п. степени N при соответствующем выборе этих узлов. Здесь эти результаты несколько усилены в том смысле, что они являются следствиями одной общей теоремы, в которой установлена связь между точностью к.ф. прямоугольников для т.п. произвольной степени и расположением узлов квадратурной формулы на периоде $[0, 2\pi]$.