А. В. Калиниченко, И. Н. Малиев, М. А. Плиев, Модульные полуторалинейные формы и обобщенное представление Стайнспринга, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 12, 50–59

Известия вузов. Математика
2018, №12, с. 50–59
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. КАЛИНИЧЕНКО, И.Н. МАЛИЕВ, М.А. ПЛИЕВ

МОДУЛЬНЫЕ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ И ОБОБЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАЙНСПРИНГА

Аннотация. Рассматриваются вполне положительные отображения, заданные на локальной C^*-алгебре A и принимающие значения в пространстве полуторалинейных форм на гильбертовом C^*-модуле $\mathcal{M}$. Для таких отображений строится представление типа Стайнспринга и доказывается единственность минимального представления с точностью до унитарной эквивалентности.

Ключевые слова: гильбертов C^*-модуль, локальная C^*-алгебра, полуторалинейная форма, вполне положительное отображение, $*$-гомоморфизм, положительно определенное ядро, представление Стайнспринга.

УДК: 517.983 : 517.986

Введение. Вполне положительные отображения, действующие в операторных алгебрах и модулях, в настоящее время являются активной областью исследования [1]–[8]. Это связано с тем, что вполне положительные отображения интерпретируются как квантовые каналы в теории квантовой информации и квантовых вычислений. Впервые задача о дилатации вполне положительного отображения была рассмотрена в пионерской работе [9], где было показано, что вполне положительное отображение $\varphi : A \to L(H)$ из C^*-алгебры A в алгебру $L(H)$ линейных, ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H можно представить в форме $\varphi(\cdot) = S^*\pi(\cdot)S$, где π — $*$-представление алгебры A в другом гильбертовом пространстве K и S — линейный, ограниченный оператор из H в K.

Дальнейший прогресс в этом направлении связан с изучением отображений, действующих в гильбертовых C^*-модулях, являющихся обобщением как гильбертовых пространств, так и C^*-алгебр. В работе [1] был установлен аналог теоремы Стайнспринга для так называемых ϕ-вполне положительных отображений в гильбертовых C^*-модулях. Этот результат инициировал серию дальнейших работ, посвященных детальному анализу нового класса отображений.

Вмете с тем, как это показано в [10]–[12], в современных квантово-механических моделях возникает необходимость изучать полуторалинейные формы, заданные на гильбертовых C^*-модулях и принимающие значения в C^*-алгебре.

В данной работе продолжим эту линию исследований и установим аналог теоремы Стайнспринга для вполне положительных отображений, заданных на локальной C^*-алгебре и принимающих значения в пространстве полуторалинейных форм на гильбертовом C^*-модуле.

Поступила 08.11.2017

Благодарности. М.А. Плиев поддержан грантом Российского фонда фундаментальных исследований №17-51-12064.

1. Предварительные сведения. Приведем сведения, необходимые для дальнейшего. Цель данного раздела — зафиксировать терминологию и используемые обозначения. Все необходимые сведения о локальных C^*-алгебрах, гильбертовых C^*-модулях и вполне положительных отображениях можно найти в [13]–[17]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел.

Всюду ниже будем полагать, что внутренние произведения сопряженно линейны по второй переменной и линейны по первой переменной. Пространство линейных, ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство K, обозначается через $L(H,K)$ и $L(H) := L(H,H)$.

Пусть A — инволютивная алгебра и $p : A \to \mathbb{R}_+$ — полунорма на A, удовлетворяющая условиям

1) $p(xy) \le p(x)p(y)$ для любых $x, y \in A$,

2) $p(x) = p(x^*)$ для любого $x \in A$.

Если, кроме того, для любого $x \in A$ справедливо равенство $p(x^*x) = p(x)^2$, то p называется *C^*-полунормой.* Инволютивная топологическая алгебра, полная относительно топологии, задаваемой направленным семейством C^*-полунорм $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, называется *локальной C^*-алгеброй.*

Определение 1. Каждая C^*-алгебра является локальной C^*-алгеброй.

Определение 2. Каждая замкнутая $*$-подалгебра локальной C^*-алгебры является локальной C^*-алгеброй.

Напомним, что для локальной C^*-алгебры A элемент $x \in A$ называется *положительным* если $x = x^*$ и $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$, где $\sigma(x)$ — спектр элемента x. Множество всех положительных элементов алгебры A обозначается через A_+.

Линейное отображение $\varphi : A \to B$ локальных C^*-алгебр A и B называется *положительным*, если $\varphi(A_+) \subset B_+$. Для локальной C^*-алгебры A через $M_n(A)$ обозначается $*$-алгебра всех квадратных $n\times n$-матриц с элементами из A. Известно, что $M_n(A)$ также является локальной C^*-алгеброй ([17], гл. 1). Отметим, что сложение, инволюция и умножение матриц, а также умножение на элемент основного поля задаются так же, как и в случае скалярных матриц. Отметим также, что матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ является положительной тогда и только тогда, когда для любого n-набора $c_1, \dots, c_n$ элементов алгебры A выполняется неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^n c_i^* a_{ij} c_j \ge 0$.

Пусть теперь B — C^*-алгебра. *Предгильбертовым B-модулем* называется комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, которое также является правым B-модулем, снабженное B-значным скалярным произведением, т. е. отображением $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}\times\mathcal{M} \to B$, со свойствами

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle \ \text{ для любых } \ x, y, z \in \mathcal{M}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$
$$\langle x, yb\rangle = \langle x, y\rangle b \ \text{ для любых } \ x, y \in \mathcal{M}, \quad b \in B,$$
$$\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle \ \text{ для любых } \ x, y \in \mathcal{M},$$
$$\langle x, x\rangle \ge 0 \ \text{ для любого } \ x \in \mathcal{M},$$
$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ для любого } \ x \in \mathcal{M}.$$

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ это *гильбертов* C^*-модуль, если $\mathcal{M}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x\| = \|x\|_{\mathcal{M}} := \sqrt{\|\langle x, x\rangle\|_B}, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — гильбертовы C^*-модули над C^*-алгеброй B. Линейый оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *B-линейным*, если для любых $v \in \mathcal{M}$, $b \in B$ справедливо равенство $T(vb) = T(v)b$. Множество всех B-линейных операторов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ обозначается $L_B(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ или просто $L(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, если ясно, о какой алгебре B идет речь. Говорят, что линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *допускает сопряженный*, если существует линейный оператор $S : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ такой, что $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Sv\rangle$ для любых элементов $u \in \mathcal{M}$, $v \in \mathcal{N}$. Тогда S называется *сопряженным* оператором к T и обозначается T^*. Векторное пространство всех линейных операторов $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, допускающих сопряженный, обозначается через $\mathcal{L}_B(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Известно, что каждый линейный оператор, допускающий сопряжение, является B-линейным и $\mathcal{L}_B(\mathcal{M}) = \mathcal{L}_B(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является C^*-алгеброй ([15], гл. 1). Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — гильбертовы C^*-модули над C^*-алгеброй B. $\mathbb{C}$-линейное и B-линейное отображение $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *B-гомоморфизмом* из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. *Модульно сопряженным* пространством $\mathcal{M}^*$ к модулю $\mathcal{M}$ называется пространство всех B-гомоморфизмов из $\mathcal{M}$ в B.

2. Модульные полуторалинейные формы. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над C^*-алгеброй B и $\mathcal{P} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$ — некоторое отображение. Отображение $\mathcal{P}$ называется *$\mathbb{B}$-полуторалинейной формой*, если для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $u, v, w \in \mathcal{M}$ и $b \in B$ выполняются условия

1) $P(u, \alpha v + \beta w) = \alpha P(u, v) + \beta P(u, w)$,
2) $P(u, vb) = P(u, v)b$,
3) $P(u, v) = P(v, u)^*$.

Если, кроме того, $P(u, u) \geq 0$ для любого элемента $u \in \mathcal{M}$, то форма P называется *положительной*. Множества всех полуторалинейных и положительных полуторалинейных форм на $\mathcal{M}$ обозначаются $S_B(\mathcal{M})$ и $S_B(\mathcal{M})_+$ соответственно. Пусть теперь A — локальная C^*-алгебра. Линейное отображение $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ называется *положительным*, если $\Phi(A_+) = S_B(\mathcal{M})_+$. Рассмотрим квадратную матрицу $(P(i,j))_{i,j=1}^n$, элементами которой являются полуторалинейные формы на $\mathcal{M}$. Для множества всех таких матриц будем использовать обозначение $M_n(S_B(\mathcal{M}))$. Ясно, что в случае $n = 1$ имеет место равенство $M_n(S_B(\mathcal{M})) = S_B(\mathcal{M})$. Матрица $(P(i,j))_{i,j=1}^n$ называется *положительной*, если для любого n-набора $v_1, \dots, v_n$ элементов модуля $\mathcal{M}$ выполняется включение

$$(P(i,j)(v_i, v_j))_{i,j=1}^n \in M_n(B)_+.$$

Множество всех таких положительных матриц обозначается $M_n(S_B(\mathcal{M}))_+$. Линейное отображение $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ называется *вполне положительным*, если линейное отображение $\Phi^n : M_n(A) \to M_n(S_B(\mathcal{M}))$, заданное формулой

$$\Phi^n([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = [\Phi(a_{ij})]_{i,j=1}^n,$$

является положительным для любого $n \in \mathbb{N}$.

Полуторалинейная форма $P : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$ называется *ограниченной*, если найдется $C > 0$ такое, что $\|P(u,v)\|_B \leq C\|u\|_M \|v\|_M$ для любых $u, v \in \mathcal{M}$. Каждому оператору $T \in \mathcal{L}_A(\mathcal{M})$ можно сопоставить ограниченную полуторалинейную форму

$$P_T(u, v) = \langle Tu, v\rangle. \tag{1}$$

Известно, что когда $\mathcal{M}$ является гильбертовым пространством, каждая ограниченная полуторалинейная форма может быть записана в виде (1) ([14], 2.3). В случае произвольных гильбертовых модулей ситуация обстоит иначе.

Определение 3. Существует гильбертов B-модуль $\mathcal{M}$, полуторалинейная форма $\mathcal{P} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$ такая, что $\mathcal{P} \neq P_T$ для любого $T \in \mathcal{L}_B(\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть $B = C[0,1]$ и $J = \{f \in B : f(0) = 0\}$. Отметим, что B и J являются гильбертовыми C^*-модулями над C^*-алгеброй B и B-значное скалярное произведение в модулях B и J задается формулой $\langle f, g\rangle = \overline{f}g$. Пусть $\mathcal{M} := B \oplus J$. Напомним, что $\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2)\rangle = \langle f_1, f_2\rangle + \langle g_1, g_2\rangle$. Рассмотрим отображение $\mathcal{P} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$, заданное формулой

$$\mathcal{P}\big((f_1, g_1), (f_2, g_2)\big) := \langle (g_1, 0), (f_2, g_2)\rangle.$$

Тот факт, что $\mathcal{P}$ — ограниченная B-значная полуторалинейная форма, проверяется прямым вычислением. Предположим, что найдется оператор $T \in \mathcal{L}_B(\mathcal{M})$ такой, что $\mathcal{P} = P_T$. Это означает, что оператор, действующий по правилу $T(f, g) = (g, 0)$, допускает сопряжение и $\langle T(f_1, g_1), (f_2, g_2)\rangle = \langle (f_1, g_1), T^*(f_2, g_2)\rangle$ для любых $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathcal{M}$. Пусть $(f, g) := T^*(1, 0)$. Тогда для любых $(h, k) \in \mathcal{M}$ имеем

$$\langle T(h, k), (1, 0)\rangle = \langle (h, k), (f, g)\rangle = \overline{h}f + \overline{k}g.$$

Отсюда выводим, что функция f тождественно равна нулю, а функция g тождественно равна единице, что противоречит условию $g \in J$. Таким образом, оператор T не допускает сопряжения. □

Рассматриваемые ниже модульные полуторалинейные формы в общем случае являются неограниченными. Для анализа структуры вполне положительных отображений будем использовать технику так называемых положительно определенных ядер, восходящую к работе [18]. Пусть заданы локальная C^*-алгебра A, гильбертов C^*-модуль $\mathcal{M}$ над C^*-алгеброй B и некоторое множество $\mathfrak{A}$. Отображение $K : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to S_B(\mathcal{M})$ называется *положительно определенным ядром*, если для любого конечного набора $x_1, \dots, x_n$ элементов множества $\mathfrak{A}$ матрица $(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n \in M_n(S_B(\mathcal{M}))$ положительна.

Ключевым инструментом для доказательства основного результата является

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — множество, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B и $K : \mathfrak{A} \to S_B(\mathcal{M})$ — положительно определенное ядро. Тогда существует гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B и отображение $D : \mathfrak{A} \to L(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x, y \in \mathfrak{A}$ выполняется*

$$K(x, y)(u, v) = \langle D(x)u, D(y)v\rangle. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала установим существование гильбертова C^*-модуля $\mathcal{N}$. Будем следовать процедуре, предложенной в [11]. Через $\mathcal{M}_\mathfrak{f}^\mathfrak{A}$ обозначим векторное пространство всех функций с конечным носителем, действующих из $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{M}$. Пространство всех функций из $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{M}^*$ обозначается $\mathcal{M}^{*\mathfrak{A}}$. Положительно определенное ядро $K : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to S_B(\mathcal{M})$ задает линейный оператор $\overline{K} : \mathcal{M}_\mathfrak{f}^\mathfrak{A} \to \mathcal{M}^{*\mathfrak{A}}$, действующий по правилу

$$(\overline{K}f)(x)(v) = \sum_{y\in\mathfrak{A}} K(x, y)(v, f(y)), \quad x, y \in \mathfrak{A}, \quad v \in \mathcal{M}. \tag{3}$$

Заметим, что в силу конечности носителя функции $f \in \mathcal{M}_\mathfrak{f}^\mathfrak{A}$ сумма в правой части равенства (3) включает только конечное число ненулевых слагаемых. Через $\mathcal{N}_0$ обозначим образ множества $\mathcal{M}_\mathfrak{f}^\mathfrak{A}$ относительно отображения $\overline{K}$ в $\mathcal{M}^{*\mathfrak{A}}$. Элементами $\mathcal{N}_0$ являются функции вида $\overline{K}f$, где $f \in \mathcal{M}_f^\mathfrak{A}$. Ясно, что $\mathcal{N}_0$ является комплекным векторным пространством. Отметим также, что векторное пространство $\mathcal{N}_0$ является правым B-модулем, где умножение на элементы B задается правилом $(\overline{K}f)b = \overline{K}(fb)$, $b \in B$. Функция $fb : \mathfrak{A} \to \mathcal{M}$ действует по правилу $fb(x) = f(x)b$, $x \in \mathfrak{A}$. Кроме того, на B-модуле $\mathcal{N}_0$ можно задать B-значное внутреннее произведение

$$\langle \overline{K}f, \overline{K}g\rangle = \sum_{x,y\in\mathfrak{A}} K(x,y)(f(x),g(y)). \tag{4}$$

Покажем, что отображение (4) удовлетворяет аксиомам предгильбертова модуля. Действительно, возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{M}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{A}}$. Пусть $H = \{x_1,\dots,x_n\}$ — носитель функции f, т. е. f обращается в нуль вне множества H. Так как K — положительно определенное ядро, то матрица $(K(x_i,x_j)(f(x_i)), f(x_j))_{i,j=1}^n$ положительна. Последнее означает, что

$$0 \le \sum_{i,j=1}^n \mathbf{1}_j K(x_i,x_j)(f(x_i),f(x_j))\mathbf{1}_i = \sum_{i,j=1}^n K(x_i,x_j)(f(x_i),f(x_j)) = \langle \overline{K}f, \overline{K}f\rangle,$$

где через $\mathbf{1}$ обозначена единица алгебры B и $\mathbf{1}_i = \mathbf{1}$ для любого $1 \le i \le n$. Ясно, что $\langle \overline{K}f, \overline{K}f\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$. Следовательно, $\overline{K}f = 0$. Далее

$$\langle \overline{K}f, \overline{K}g\rangle^* = \Big(\sum_{i,j=1}^n K(x_i,y_j)(f(x_i),g(y_j))\Big)^* =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n K(x_i,y_j)(f(x_i),g(y_j))^* = \sum_{i,j=1}^n K(y_j,x_i)(g(y_j),f(x_i)) = \langle \overline{K}g, \overline{K}f\rangle.$$

Докажем согласованность операции модульного умножения с аксиомами внутреннего произведения. Пусть $b \in B$ — произвольный элемент алгебры B. Тогда можем написать

$$\langle \overline{K}f, (\overline{K}g)b\rangle = \langle \overline{K}f, \overline{K}(gb)\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^n K(x_i,y_j)(f(x_i),g(y_j)b) = \sum_{i,j=1}^n \Big(K(x_i,y_j)(f(x_i),g(y_j))\Big)b = \langle \overline{K}f, \overline{K}g\rangle b.$$

Таким образом, установлено, что $\mathcal{N}_0$ является предгильбертовым B-модулем. Обозначим через $\mathcal{N}$ его пополнение относительно нормы $\|x\|_{\mathcal{N}_0} = \sqrt{\|\langle x,x\rangle\|_B}$. Докажем существование отображения $D : \mathfrak{A} \to L(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Для любого $x \in \mathfrak{A}$ положим $D(x)v = \overline{K}f_x^v$, где $v \in \mathcal{M}$ и функция $f_x^v \in \mathcal{M}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{A}}$ задается правилом

$$f_x^v(y) = \begin{cases} v, & \text{если } y = x; \\ 0, & \text{если } y \ne x. \end{cases}$$

Тогда для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $y \in \mathfrak{A}$, $w \in \mathcal{M}$ имеем

$$\overline{K}f_x^{\alpha u+\beta v}(y)(w) = \sum_{z\in\mathfrak{A}} K(z,y)(w, f_x^{\alpha u+\beta v}(z)) =$$
$$= K(x,y)(w, f_x^{\alpha u+\beta v}(x)) = K(x,y)(w, \alpha u+\beta v) =$$
$$= \alpha K(x,y)(w,u) + \beta K(x,y)(w,v) =$$
$$= \alpha\Big(\sum_{z\in\mathfrak{A}} K(z,y)(w, f_x^u(z))\Big) + \beta\Big(\sum_{z\in\mathfrak{A}} K(z,y)(w, f_x^v(z))\Big) = \alpha\overline{K}f_x^u(y)(w) + \beta\overline{K}f_x^v(y)(w).$$

Таким образом, $D(x)(\alpha u+\beta v) = \alpha D(x)u + \beta D(x)v$. Пусть теперь $b \in B$. Тогда

$$\overline{K}f_x^{ub}(y)(w) = K(x,y)(w,ub) = K(x,y)(w,u)b \Rightarrow D(x)(ub) = \big(D(x)u\big)b$$

и установлено, что для любого $x \in \mathfrak{A}$ отображение $D(x)$ является B-линейным оператором из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Кроме того, для любых $x, y \in \mathfrak{A}$, $u, v \in \mathcal{M}$

$$\langle D(x)u, D(y)v\rangle = \langle \overline{K} f_x^u, \overline{K} f_y^v\rangle = \sum_{z,t\in\mathfrak{A}} K(z,t)(f_x^u(z), g_y^v(t)) = K(x,y)(u,v). \qquad \square$$

Отметим, что с каждым отображением $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ естественным образом ассоциируется функция двух переменных $K_\Phi : A \times A \to S_B(\mathcal{M})$, заданная равенством

$$K_\Phi(x,y) = \Phi(x^* y).$$

Лемма 2. *Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — вполне положительное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *функция $K_\Phi : A \times A \to S_B(\mathcal{M})$ является положительно определенным ядром*,
2) *отображение $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ вполне положительно.*

Доказательство. Покажем 1) $\Rightarrow$ 2). В силу положительной определенности ядра для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ элементов алгебры A справедливо равенство

$$\Phi^n((x_i^* x_j)_{i,j=1}^n) = (\Phi(x_i^* x_j))_{i,j=1}^n = (K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

и выводим, что для любой матрицы вида $(x_i^* x_j)_{i,j=1}^n$ матрица $(\Phi(x_i^* x_j))_{i,j=1}^n$ положительна. Покажем теперь, что каждая матрица $R \in (M_n(A))_+$ может быть представлена в виде $\sum\limits_{k=1}^n R_k$, где каждая матрица $R_k \in (M_n(A))_+$ имеет вид $((x_i^* x_j)_{i,j=1}^n)$ для некоторого набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ элементов A. Действительно, согласно ([4], теорема 10.15) каждый положительный элемент R алгебры $M_n(A)$ имеет вид $R = H^* H$ для некоторой матрицы $H \in M_n(A)$. Представим H в виде суммы $H_1 + \dots + H_n$, где H_k — такая матрица, что ее k-столбец совпадает с k-столбцом матрицы H, а на остальных местах размещены нули. Тогда $R = H_1^* H_1 + \dots + H_n^* H_n$, так как $H_k^* H_l = 0$, $k \neq l$. Далее для произвольной положительной матрицы $R \in M_n(A)$ имеем

$$\Phi^n(R) = \Phi^n\Big(\sum_{k=1}^n R_k\Big) = \sum_{k=1}^n \Phi^n(R_k) \in M_n(S(\mathcal{M}))_+,$$

откуда следует, что отображение Φ вполне положительно.

2) $\Rightarrow$ 1). Так как для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ элементов алгебры A матрица $((x_i^* x_j)_{i,j=1}^n)$ положительна, то справедливы равенства

$$\Phi^n((x_i^* x_j)_{i,j=1}^n) = (\Phi(x_i^* x_j))_{i,j=1}^n = (K_\Phi(x_i, x_j))_{i,j=1}^n.$$

Отсюда выводим, что функция K_Φ является положительно определенным ядром. $\square$

Первым основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — вполне положительное отображение. Тогда существует гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B, линейный оператор $\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $*$-гомоморфизм $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$ выполняется равенство $\Phi_x(u,v) = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 отображение $K_\Phi : A \times A \to S_B(\mathcal{M})$ является положительно определенным ядром. Ниже с целью упрощения K_Φ будем обозначать через K.

Воспользуемся теперь леммой 1. В условиях леммы 1 будем полагать $A = \mathfrak{A}$. Тогда существуют гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ и отображение $D : A \to L(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, удовлетворяющие равенству (2). Установим теперь существование $*$-гомоморфизма $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$. Положим

$$\pi(a)\Big(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} D(ax_i)v_i.$$

Ясно, что отображение $\pi(a)$ линейно на плотном подмодуле $\mathcal{N}_0$. Покажем, что оно непрерывно на $\mathcal{N}_0$. Для этого достаточно установить ([15], гл. 1), что $\pi(a)$ допускает сопряженный оператор на $\mathcal{N}_0$:

$$\Big\langle \pi(a)\Big(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i\Big), \sum_{j=1}^{m} D(y_i)u_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} D(ax_i)v_i, \sum_{j=1}^{m} D(y_i)u_j \Big\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle D(ax_i)v_i, D(y_j)u_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} K(ax_i, y_j)(v_i, u_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} K(x_i, a^*y_j)(v_i, u_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle D(x_i)v_i, D(a^*y_j)u_i\rangle =$$
$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i, \pi(a^*)\Big(\sum_{j=1}^{m} D(y_i)u_j\Big)\Big\rangle.$$

Таким образом, оператор $\pi(a)$ допускает сопряженный на $\mathcal{N}_0$, и для любого $a \in A$ выполняется равенство $\pi(a)^* = \pi(a^*)$.

Кроме того, для любых $a, z, x, t \in A$, $u, v \in \mathcal{M}$ справедливы равенства

$$\big(\pi(a+z)(D(x)v)\big)(t)(u) = \big(D((a+z)x)v\big)(t)(u) =$$
$$= (\overline{K} f^v_{(a+z)x})(t)(u) = K(t, (a+z)x)(u, v) = K(t, ax)(u, v) + K(t, zx)(u, v) =$$
$$= (\overline{K} f^v_{ax} + \overline{K} f^v_{zx})(t)(u) = \big(\pi(a) + \pi(z)\big)\big(D(x)v\big)(t)(u),$$
$$\pi(az)\big(D(x)v\big) = \pi(a)\big(D(zx)v\big) = \pi(a)\pi(z)\big(D(x)v\big).$$

Распространяя доказанные равенства по линейности, получаем

$$\pi(a+z)\Big(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i\Big) = \Big(\pi(a) + \pi(z)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i\Big),$$
$$\pi(az)\Big(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i\Big) = \Big(\pi(a)\pi(z)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)v_i\Big).$$

Доказанные равенства справедливы на плотном подмодуле $\mathcal{N}_0$, отсюда выводим, что они выполняются на всем $\mathcal{N}$. Таким образом, установлено, что отображение $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ является $*$-гомоморфизмом. Далее, положим $\mathcal{D} = D(1)$. Тогда для любых $x \in A$, $u, v \in \mathcal{M}$ можем написать

$$\Phi(x)(u, v) = K(\mathbf{1}x)(u, v) = \langle \overline{K} f^u_{\mathbf{1}}, \overline{K} f^v_x\rangle = \langle D(\mathbf{1})u, D(x)v\rangle =$$
$$= \langle D(\mathbf{1})u, \pi(x)D(\mathbf{1})v\rangle = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle. \quad \square$$

Тройка $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \pi)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, называется *представлением Стайнспринга* вполне положительного отображения Φ. Представление Стайнспринга называется *минимальным*, если $\mathcal{N} = [\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})]$. Отметим, что представление Стайнспринга, построенное в ходе доказательства теоремы 1, является минимальным. Два представления Стайнспринга $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \pi)$ и $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \pi')$ вполне положительного отображения Φ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор $R : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ такой, что $\mathcal{D}' = R\mathcal{D}$ и $R\pi(a) = \pi'(a)R$ для любого $a \in A$.

Второй основной результат доставляет классификацию минимальных представлений Стайнспринга вполне положительного отображения.

Теорема 2. *Пусть A, B, $\mathcal{M}$, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ такие же, как в теореме* 1. *Тогда любые два минимальных представления Стайнспринга вполне положительного отображения Φ унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим множества конечных сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i, \quad x_i \in A, \quad v_i \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i, \quad x_i \in A, \quad v_i \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N},$$

через $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}'_0$. Согласно определению минимального представления подмодули $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_0'$ плотны в гильбертовых C^*-модулях $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ соответственно. Положим

$$R\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i, \quad x_i \in A, \, v_i \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $R : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}'_0$ является $\mathbb{C}$-линейным отображением. Кроме того, для любых $x_i \in \mathfrak{A}$, $v_i \in \mathcal{M}$, $1 \le i \le n$, $n \in \mathbb{N}$, справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\Big\langle \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i, \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i \Big\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \pi(x_i)\mathcal{D}v_i, \pi(x_j)\mathcal{D}v_j\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{D}v_i, \pi(x_i^*)\pi(x_j)\mathcal{D}v_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{D}v_i, \pi(x_i^* x_j)\mathcal{D}v_j\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i^* x_j)(v_i, v_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{D}'v_i, \pi'(x_i^* x_j)\mathcal{D}'v_j\rangle = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i, \pi'(x_j)\mathcal{D}'v_j\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i, \sum_{i=1}^{n} \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i \Big\rangle = \\
&= \Big\langle R\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i\Big), R\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i\Big)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, R является изометрией на плотном подмодуле и может быть продолжен на весь модуль $\mathcal{N}$. Для продолженного оператора сохраним то же обозначение. Требуется установить, что $R : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ — унитарный оператор. Положим

$$R'\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\mathcal{D}v_i, \quad x_i \in A, \quad v_i \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем, что R' является изометрией на плотном подмодуле $\mathcal{N}_0'$ и может быть продолжен на весь модуль $\mathcal{N}'$. Покажем, что $R' = R^*$,

$RR^* = I_{\mathcal{N}'}$ и $R^*R = I_{\mathcal{N}}$, где $I_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ $(I_{\mathcal{N}'} : \mathcal{N}' \to \mathcal{N}')$ — тождественное отображение

$$\Big\langle R\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi(x_i)\mathcal{D}v_i\Big), \sum_{j=1}^{m}\pi'(x_j)\mathcal{D}'v_j\Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n}\pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i, \sum_{j=1}^{m}\pi'(x_j)\mathcal{D}'v_j\Big\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\langle \pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i, \pi'(x_j)\mathcal{D}'v_j\rangle = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\langle \mathcal{D}'v_i, \pi'(x_i^*x_j)\mathcal{D}'v_j\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Phi(x_i^*x_j)(v_i, v_j\rangle = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\langle \mathcal{D}v_i, \pi(x_i^*x_j)\mathcal{D}v_j\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\langle \pi(x_i)\mathcal{D}v_i, \pi(x_j)\mathcal{D}v_j\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n}\pi(x_i)\mathcal{D}v_i, \sum_{j=1}^{m}\pi(x_j)\mathcal{D}v_j\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n}\pi(x_i)\mathcal{D}v_i, R'\Big(\sum_{j=1}^{m}\pi'(x_i)\mathcal{D}'v_i\Big)\Big\rangle.$$

Отсюда выводим, что R' совпадает с R^* на плотном подмодуле и указанное равенство можно распространить на весь модуль $\mathcal{N}'$. Так как $RR' = I_{\mathcal{N}'}$ и $R'R = I_{\mathcal{N}}$, то теорема полностью доказана. □

Авторы выражают искренную признательность рецензенту за внимательное чтение рукописи и ценные замечания.

Литература

[1] Asadi M.D. *Stinspring's theorem for Hilbert C^*-modules*, J. Operator Theory **62** (2), 235–238 (2009).

[2] Bhat R., Ramesh G., Sumesh K. *Stinspring's theorem for maps on Hilbert C^*-modules*, J. Operator Theory **68** (1), 173–178 (2012).

[3] Joita M. *Covariant version of the Stinespring type theorem for Hilbert C^*-modules*, Open Math. **9** (4), 803–813 (2011).

[4] Masaev H.M., Pliev M.A., Elsaev Y.V. *The Radon–Nikodym type theorem for a covariant completely positive maps on Hilbert C^*-modules*, Int. J. of Math. Anal. **9** (35), 1723–1731 (2015).

[5] Moslehian M.S., Kusraev A. and Pliev M. *Matrix KSGNS construction and a Radon–Nikodym type theorem*, Indag. Math. **28** (5), 938–952 (2017).

[6] Skeide M., Sumesh K. *CP-H-extendable maps between Hilbert modules and CPH-semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **414**, 886–913 (2014).

[7] Малиев И. Н., Плиев М.А. *О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^*-алгебрами*, Изв. вузов. Матем., № 12, 51–58 (2012).

[8] Плиев М.А., Цопанов И.Д. *О представлении типа Стайнспринга для n-наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^*-модулях*, Изв. вузов. Матем., № 11, 42–49 (2014).

[9] Stinspring F. *Positive functions on C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 211–216 (1955).

[10] Hytonen T., Pellonpaa J.P., Ylinen K. *Positive sesquilinear form measures and generalized eigenvalue expansions*, J. Math. Anal. Appl. **336**, 1287–1304 (2007).

[11] Pellonpaa J.P., Ylinen K. *Modules, completely positive maps, and a generalized KSGNS construction*, Positivity **15** (3), 509–525 (2011).

[12] Dubin D.A., Kiukas J., Pellonpaa J.P., Ylinen K. *Operator integrals and sesquilinear forms*, J. Math. Anal. Appl. **413**, 250–268 (2014).

[13] Мануйлов В.М., Троицкий Е.В. *C^*-гильбертовы модули* (Факториал, М., 2001).

[14] Мерфи Д. *C^*-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).

[15] Lance E.C. *Hilbert C^*-modules. A toolkit for operator algebraists* (Cambridge Univ. Press, 1995).

[16] Fragoulopoulou M. *Topological algebras with involution* (Elsevier, 2005).

[17] Joiţa M. *Hilbert modules over locally C^*-algebras* (Univ. of Bucharest Press, 2006).

[18] Murphy G.J. *Positive definite kernels and Hilbert C^*-modules*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **40**, 367–374 (1997).

Алла Викторовна Калиниченко

Северо-Кавказский горно-металлургический институт им. К.Л. Хетагурова,
(государственный технологический университет),
ул. Николаева, д. 44, г. Владикавказ, 362021, Россия,

e-mail: kalinichenkoalla@mail.ru

Игорь Нохович Малиев

Северо-Осетинский государственный университет,
ул. Ватутина д. 44–46, г. Владикавказ, 362025, Россия,

e-mail: malieff@inbox.ru

Марат Амурханович Плиев

Южный Математический институт
Владикавказского научного центра Российской академии наук,
ул. Маркуса, д. 22, г. Владикавказ, 362027, Россия,

e-mail: plimarat@yandex.ru

A.V. Kalinichenko, I.N. Maliev, and M.A. Pliev

Modular sesquilinear forms and generalized Stinspring representation

Abstract. We consider completely positive maps defined on locally C^*-algebra and taking values in the space of sesquilinear forms on Hilbert C^*-module $\mathcal{M}$. We construct the Stinspring type representation for this type of maps and show that any two minimal Stinspring representations are unitarily equivalent.

Keywords: Hilbert C^*-module, locally C^*-algebra, sesquilinear form, completely positive map, $*$-homomorphism, positive definite kernel, Stinspring's representation.

Alla Viktorovna Kalinichenko

North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy named after K.L. Khetagurov,
(State Technological University),
44 Nikolaeva str., Vladikavkaz, 362021 Russia,

e-mail: kalinichenkoalla@mail.ru

Igor Nokhovich Maliev

North-Ossetian State University,
44–46 Vatutina str., Vladikavkaz, 362025 Russia,

e-mail: malieff@inbox.ru

Marat Amurkhanovich Pliev

Southern Mathematical Institute,
the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
22 Markusa str., Vladikavkaz, 362027 Russia,

e-mail: plimarat@yandex.ru