Н. Н. Рогачева, Активное гашение вибраций на основе пьезоэффекта, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 25–30

$$\tilde{W} = -\frac{1}{2} j^2 \varphi^2 + \sqrt{2}\, \varphi \cos j\eta \,;\ \omega_0^2 = 1 + j^4 \varphi^2 \,;$$

$$\tau = \frac{j^2}{\omega_0^3}\left[\left(\frac{d\varphi}{dt^0}\right)^2 - j^4\varphi^2\right];\ \bar{\tau} = \tau\big|_{t^0=0};\ \bar{\omega}_0 = \omega_0\big|_{t^0=0};$$

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\omega_0\, d\varphi}{\sqrt{2k - j^4\varphi^2}} = t^0 \,;\ t^0 = \varepsilon\tilde{\tau} \,;\ \frac{dt^*}{d\tau} = \omega_0 \,;$$

$k = const$; φ – параметр $(ds_1^2 = \|\tilde{W}_\varphi'^2\| d\varphi^2)$; $j \gg 1$ – целое число; величина ε пропорциональна толщине кольца.

Это решение описывает двухчастотные колебания – медленные изгибания по j-й форме в масштабе времени t^0 и быстрые осцилляции длины срединной линии (временной масштаб t^*). Как видно из решения частота осцилляций существенно зависит от амплитуды изгибной формы, определяемой параметром φ.

Литература

1. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. – 216 с.

Н.Н.Рогачева

АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ ВИБРАЦИЙ НА ОСНОВЕ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

В результате решения нескольких модельных задач показана возможность гашения вибраций пространственных конструкций с помощью порожденных электричеством вынужденных колебаний пьезокерамических или пьезокомпозитных материалов.

1. Пусть пьезокерамический стержень с продольной поляризацией совершает продольные колебания под действием приложенной к краям продольной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$, где t – время, ω – круговая частота колебаний. В дальнейшем все уравнения будем выписывать относительно амплитудных значений. Выпишем исходную систему уравнений [1 – 2].

Уравнение равновесия $\frac{d\sigma}{dx} + \rho\omega^2 u = 0$,

уравнение состояния $\sigma = \frac{1}{s_{33}^E}\frac{du}{dx} - \frac{d_{33}}{s_{33}^E} E$,

уравнение пьезоэффекта $D = \varepsilon_{33}^T E + d_{33}\sigma$,

уравнения электростатики $\frac{dD}{dx} = 0$, $E = -\frac{d\varphi}{dx}$.

Граничные условия на концах стержня для напряжений

$$\sigma\Big|_{x=\pm l} = T .$$

Граничные условия для электрических величин на электродах, покрывающих концы стержня S :

электроды разомкнуты $\int\limits_S D\,ds = 0$,

электроды замкнуты накоротко $\varphi\Big|_S = 0$,

на электродах задана разность потенциалов $\varphi\Big|_{x=\pm l} = \pm V$.

Введем безразмерные искомые величины, безразмерную переменную ξ , безразмерный частотный параметр λ :

$$\sigma_* = s_{33}^E \sigma\ ,\quad u_* = \frac{u}{l}\ ,\quad E_* = d_{33} E\ ,$$

$$D_* = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} D\ ,\quad \varphi_* = \frac{d_{33}}{l}\varphi\ ,\quad V_* = \frac{d_{33}}{l} V\ ,$$

$$\lambda = \rho\omega^2 l s_{33}^E\ ,\quad \xi = \frac{x}{l} .$$

Обезразмеренная система уравнений и соответствующие ей граничные условия запишутся следующим образом:

$$\frac{d\sigma_*}{d\xi} + \lambda u_* = 0\ ,\quad \sigma_* = \frac{du_*}{d\xi} + E_*\ ,$$

$$D_* = E_* + a\sigma_*\ ,\quad \frac{dD_*}{d\xi} = 0\ ,\quad E = -\frac{d\varphi_*}{d\xi}\ , \qquad (I.I)$$

$$a = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}\ ;$$

$$\psi_*|_{\xi=\pm 1} \pm V_* \, , \; \sigma_*|_{\xi=\pm 1} = 1, \; u_*|_{\xi=\pm 1} = 0 \; ; \qquad (I.2)$$

$$\psi_*|_{\xi=\pm 1} = 0 \; , \; \sigma_*|_{\xi=\pm 1} = 1 \; ; \qquad (I.3)$$

$$\int_S D_* \, ds = 0 \; , \; \sigma_*|_{\xi=\pm 1} = 1 \; . \qquad (I.4)$$

Найдем решение системы (I.I) при различных граничных условиях (I.2) – (I.4). При решении задачи с условиями (I.2) будем считать, что разность потенциалов V на электродах – величина неизвестная, которую будем определять из условия отсутствия перемещений концов стержня.

Результаты счета для стержня из материала PZT-4 представлены на рис. I. Сплошной линией изображено решение с граничными условиями (I.2), пунктирной – (I.3), штрихпунктирной – (I.4). Из графиков видно, что соответствующим выбором разности потенциалов $V_* = 1 + a$ можно добиться полного отсутствия перемещений. Отметим, что напряжения в этом случае тоже тождественно равны нулю.

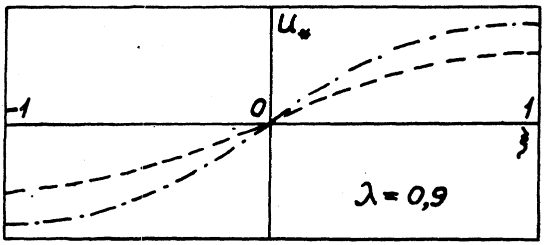

Рис. I

2. Рассмотрим изгибные колебания балки из материала со свойствами типа биморфа. Один конец балки заделан, другой нагружен периодически изменяющимися по времени изгибающим моментом и перерезывающим усилием. Балка нагружена распределенной по длине нормальной нагрузкой. Поверхности балки покрыты $2n$ разрезными электродами, симметричными относительно срединной поверхности. Обезразмеренная длина каждого участка поверхности, покрытой электродом, равна $\Delta\xi$, где $\Delta\xi = 1/n$, а безразмерная длина балки равна единице.

Для краткости в дальнейшем будем пользоваться обезразмеренными искомыми величинами. Исходная система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dN_1}{d\xi} + \lambda^4 w = Z \ , \ N_1 = \frac{dG_1}{d\xi} \ , \ G_1 = -æ_1 + V \ ,$$

$$æ_1 = \frac{d^2 w}{d\xi^2} \ , \ \gamma_1 = -\frac{dw}{d\xi} \ , \ (0 \le \xi \le 1) \ .$$

Решим две задачи: в первой будем считать, что все электроды замкнуты накоротко, во второй – на каждую пару электродов, симметричных относительно срединной поверхности, подается такая разность потенциалов, которая определяется из условий равенства нулю прогибов в ряде точек. Решение для i-го участка имеет вид

$$w_i = C_{1i} e^{-\xi\lambda} + C_{2i} e^{\xi\lambda} + C_{3i} \sin\lambda\xi + C_{4i} \cos\lambda\xi + W_i \ ,$$

W_i – частное решение.

Постоянные определим из граничных условий

$$w = \gamma_1 = 0 \ (\xi = 0) \ , \ G_1 = q \ , \ N_1 = q \ , \ w = 0 \ (\xi = 1) \ ,$$

$$w_i = w_{i+1} = 0 \ , \ \gamma_i = \gamma_{i+1} \ , \ G_i = G_{i+1} \ , \ N_i = N_{i+1} \qquad (I.5)$$

$$(\xi_i = i \cdot \Delta\xi \ , \ i = 1, 2, \ldots, n-1) \ .$$

Результаты вычислений представлены на рис.2. Сплошной линией изображено решение второй задачи, пунктиром – первой. Расчет показал, что при $n = 6$ прогиб за счет электрической нагрузки уменьшается в 10^4 раз.

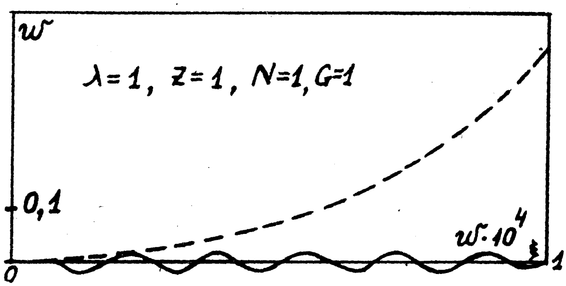

Рис. 2

3. Пусть круглая двухслойная пластина (биморф) с отверстием в центре совершает вынужденные изгибные осесимметричные колеба –

ния под действием такой же нагрузки, как в предыдущей задаче. По внутреннему краю пластина заделана, по внешнему, свободному от закреплений, нагружена распределенными изгибающим моментом и перерезывающим усилием. Лицевые поверхности пластины полностью покрыты кольцевыми разрезными электродами, которые либо замкнуты накоротко, либо на каждой паре симметричных относительно срединной поверхности электродов разность потенциалов подбирается таким образом, чтобы прогибы на линиях разреза электродов были равны нулю.

Выпишем исходную систему уравнений относительно обезразмеренных искомых величин.

Уравнения равновесия

$$N_\xi = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi G_\xi) - \frac{1}{\xi} G_\theta \;, \quad \frac{d}{d\xi}(\xi N_\xi) + \gamma Z + \xi\, 2h\rho\omega^2 w = 0 \;.$$

Соотношения электроупругости

$$G_\xi = -(\varkappa_\xi + \nu\varkappa_\theta) - V \;, \quad G_\theta = -(\varkappa_\theta + \nu\varkappa_\xi) - V \;.$$

Формулы деформации-перемещения

$$\gamma_\xi = -\frac{dw}{d\xi} \;, \quad \varkappa_\xi = -\frac{d\gamma_\xi}{d\xi} \;, \quad \varkappa_\theta = -\frac{1}{\xi}\gamma_\xi \;.$$

Решением разрешающего уравнения

$$\nabla^4 w_i - \lambda^4 w_i = Z_i \;, \left(\nabla^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)$$

является

$$w_i = C_{1i} J_0(\lambda\xi) + C_{2i} Y_0(\lambda\xi) + C_{3i} I_0(\lambda\xi) + C_{4i} K_0(\lambda\xi) + W_i \,.$$

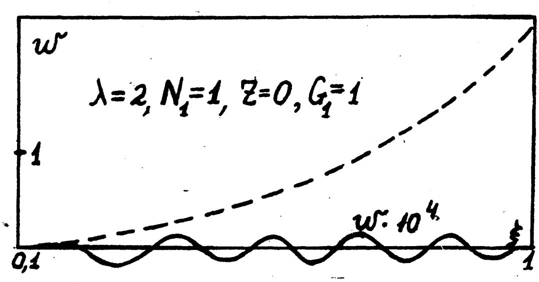

Рис. 3

Удовлетворяя условиям (I.5), найдем постоянные интегрирования и неизвестные разности потенциалов. Результаты расчета приведены на рис. 3. Сплошной линией изображены усилия и прогибы с подбором электрической нагрузки, пунктиром – без электрической нагрузки.

Решения вышеперечисленных задач подтверждают эффективность гашения вибраций с помощью пьезоэффекта.

Литература

I. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезоактивные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т.I.– Ч.А. – С.204 – 326.

2. Рогачева Н.Н. Уравнения состояния пьезокерамических оболочек // ПММ. – 1981. – Т.45. – Вып.5. – С.902 – 911.

Л.И.Слепян, С.В.Сорокин

СИСТЕМА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим тонкостенную конструкцию конечных размеров, составленную из N частей. Соответствующие этим частям поверхности обозначим S_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Предположим, что каждая из них представляет собой часть неограниченной оболочки (цилиндрической или сферической) или плоской пластины. Пусть конструкция на участках S_n, $n = 1, 2, \dots, M \leq N$ находится в контакте со сжимаемой жидкостью и подвержена действию монохроматической нагрузки q , являющейся источником колебаний.

Граничное интегральное уравнение, описывающее поведение жидкости, имеет вид [2 – 3]

$$(1-C)p(X)+\int_S [F_0(X,Y)p(Y) - $$

$$-i\rho\omega G(|X-Y|)u(Y)]dS_Y = 0, X, Y \in S \qquad (I)$$

Здесь зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$ и вре-