В. Д. Третьяков, К вопросу о расположении плоскостей и прямых в пространстве Лобачевского, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 155–168

В.Д. Третьяков

К ВОПРОСУ О РАСПОЛОЖЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ И ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Аннотация

В работе рассматриваются плоскости и прямые в пространстве Лобачевского. Найдены формулы для вычисления угла между плоскостями, аналитическая характеристика взаимного расположения плоскостей, определен угол между прямыми, доказана теорема о существовании и единственности общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.

Abstract

V.D. Tretjakov **On positional relationship of planes and straight lines in the Lobachevskii space**

In the present paper there are considered planes and straight lines in the Lobachevskii space. We find explicit formulas for angle between planes, give analytical description for positional relationship of planes, define angle between any straight lines, and prove theorem on existence and uniqueness of common perpendicular of skew lines.

1. $\mathcal{B}$-координаты и полярные координаты в пространстве Лобачевского

1.1. Тригонометрия связки прямых. Тригонометрия трехгранного угла не зависит от аксиомы о параллельных ([I], с. 451. В частности, если l_1, l_2, l_3 — направляющие косинусы прямой l, m_1, m_2, m_3 — направляющие косинусы прямой m и ϕ — угол между ними, то выполняются соотношения:

$$\sum_{i=1}^{3} l_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = 1, \tag{1.1}$$

$$\cos \phi = \sum_{i=1}^{3} l_i m_i. \tag{1.2}$$

Формулы (1.1) и (1.2) верны как в пространстве Евклида, так и в пространстве Лобачевского. Направляющие косинусы прямой будем называть координатами направляющего вектора прямой: $\bar{l}^0(l_1, l_2, l_3)$.

1.2. Введение B-координат. Система B-координат вводится так же, как и декартова система в евклидовом пространстве ([1], с. 447). Если P, Q, R — проекции точки M на координатные оси, то числа

$$u = \text{вел}\overline{OP}, \quad v = \text{вел}\overline{OQ}, \quad w = \text{вел}\overline{OR} \tag{1.3}$$

будем называть B-координатами точки $M : M(u, v, w)$ (рис. 1).

1.3. Полярная система координат. Полярная система координат вводится так же, как и в пространстве Евклида ([2], с. 111):

$$r = |\overline{OM}|, \quad \theta = \angle OW, OM \tag{1.4}$$

ϕ — угол между плоскостями uOw и MOw (рис. 1).

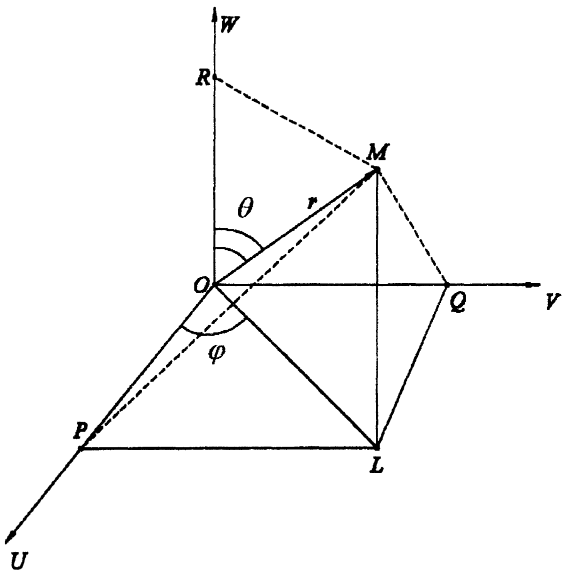

Рис. 1.

1.4. Взаимосвязь B-координат с полярными. Система B-координат связана с полярной так же, как и в евклидовом пространстве.

Если L — проекция точки M на плоскость uOv, то применяя формулу $XXIV_6$ ([1],с.295):

$$\tanh\frac{a}{k} = \tanh\frac{c}{k}\cos B \tag{1.5}$$

к треугольникам OML, OPL, OQL, и OMR, получим

$$\begin{cases} \tanh\frac{u}{k} = \tanh\frac{r}{k}\sin\theta\cos\phi \\ \tanh\frac{v}{k} = \tanh\frac{r}{k}\sin\theta\sin\phi \\ \tanh\frac{w}{k} = \tanh\frac{r}{k}\cos\theta \end{cases} \tag{1.6}$$

Направляющий вектор прямой OM имеет координаты

$$\overline{r}^0(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{1.7}$$

2. Уравнение плоскости в пространстве Лобачевского

2.1. Уравнение плоскости в полярных координатах. Пусть задана полярная система координат и плоскость π.

Определение 2.1. *Прямую, перпендикулярную к плоскости π, будем называть нормалью.*

Определение 2.2. *Нормаль, проходящую через полюс, будем называть главной нормалью.*

Направляющий вектор главной нормали обозначим $\overline{n}$, его координаты обозначим a, b, c:

$$\overline{n} = (a, b, c). \tag{2.1}$$

Возможны два случая: первый — плоскость π не проходит через полюс, второй — плоскость π проходит через полюс.

2.1.1. Плоскость π не проходит через полюс. Пусть P — точка пересечения плоскости π с главной нормалью, а M — произвольная точка плоскости π.

Обозначим через λ угол $\angle POM$. Треугольник POM прямоугольный. Применяя формулу (1.5), получим:

$$\tanh\frac{p}{k} = \tanh\frac{r}{k}\cos\lambda, \tag{2.2}$$

$\cos\lambda$ найдем по формуле (1.2), учитывая (1.7) и (2.1):

$$\cos\lambda = a\sin\theta\cos\phi + b\sin\theta\sin\phi + c\cos\theta. \tag{2.3}$$

Подставим это выражение в формулу (2.2), получим уравнение плоскости в полярных координатах:

$$(a\sin\theta\cos\phi + b\sin\theta\sin\phi + c\cos\theta)\tanh\frac{p}{k} = \tanh\frac{r}{k}. \tag{2.4}$$

2.1.2. Плоскость π проходит через полюс. В этом случае вектор $\overline{r}^0$ перпендикулярен к вектору $\overline{n}$ и поэтому

$$a\sin\theta\cos\phi + b\sin\theta\sin\phi + c\cos\theta = 0. \tag{2.5}$$

Умножив это равенство на $\tanh\frac{r}{k}$, получим уравнение

$$(a\sin\theta\cos\phi + b\sin\theta\sin\phi + c\cos\theta)\tanh\frac{r}{k} = 0, \tag{2.6}$$

которое получается из (2.4) при $p = 0$.

Таким образом, уравнение любой плоскости в полярных координатах имеет вид (2.4).

2.2. Уравнение плоскости в B-координатах. Раскрыв скобки в уравнении (2.4) и воспользовавшись формулами (1.6), получим:

$$a\tanh\frac{u}{k} + b\tanh\frac{v}{k} + c\tanh\frac{w}{k} = \tanh\frac{p}{k}. \tag{2.7}$$

Это уравнение будем называть нормальным уравнением плоскости. Коэффициенты нормального уравнения плоскости имеют простой геометрический смысл: a, b, c — направляющие косинусы главной нормали, p — расстояние плоскости от начала координат.

Очевидно, что умножив уравнение (2.7) на произвольный множитель, отличный от нуля, получим уравнение, равносильное ему:

$$A\tanh\frac{u}{k} + B\tanh\frac{v}{k} + C\tanh\frac{w}{k} + D = 0. \tag{2.8}$$

Это уравнение будем называть общим уравнением плоскости. Для перехода от уравнения (2.8) к уравнению (2.7) нужно разделить уравнение (2.8) на нормирующий множитель

$$M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{2.9}$$

тогда $a = \frac{A}{M}$, $b = \frac{B}{M}$, $c = \frac{C}{M}$, $\tanh\frac{p}{k} = -\frac{D}{M}$, но $|\tanh\frac{p}{k}| < 1$, поэтому уравнение (2.8) определяет плоскость только в том случае, когда

$$A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0. \tag{2.10}$$

Таким образом, уравнение (2.8) определяет плоскость, если выполнено условие (2.10).

3. Угол между плоскостями

3.1. Псевдовекторы, определяемые плоскостями. Пусть плоскость задана общим уравнением (2.8):

$$\pi : A\tanh\frac{u}{k} + B\tanh\frac{v}{k} + C\tanh\frac{w}{k} + D = 0.$$

Рассмотрим псевдовектор ([3], с. 61)

$$\pi(A, B, C, D), \tag{3.1}$$

введем для него блочное обозначение:

$$\pi(\overline{N}, D), \tag{3.2}$$

где $\overline{N}(A, B, C)$ — вектор евклидова пространства.

Нормирование псевдовектора будем называть каноническим, если вектор $\overline{N}$ единичен. В этом случае $|\overline{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$,

$$\pi(\overline{n}, d), \overline{n} = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}, d = \frac{D}{|\overline{N}|}. \tag{3.3}$$

Если условие (2.10) выполнено, то

$$d = \frac{D}{|\overline{N}|} = -\tanh\frac{p}{k}. \tag{3.4}$$

Введем в B_4 метрику, определив скалярное произведение псевдовекторов следующим образом: если даны псевдовектора $\pi_i(A_i, B_i, C_i, D_i)$, то положим

$$(\pi_1\pi_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 - D_1D_2, \tag{3.5}$$

или, в обозначениях (3.2),

$$(\pi_1\pi_2) = \overline{N_1N_2} - D_1D_2. \tag{3.6}$$

Тогда условие (2.10) равносильно условию

$$\pi^2 = \overline{N}^2 - D^2 > 0. \tag{3.7}$$

Будем считать, что скалярный квадрат псевдовектора равен квадрату его длины. Таким образом, псевдовектор определяет плоскость, если его длина действительна.

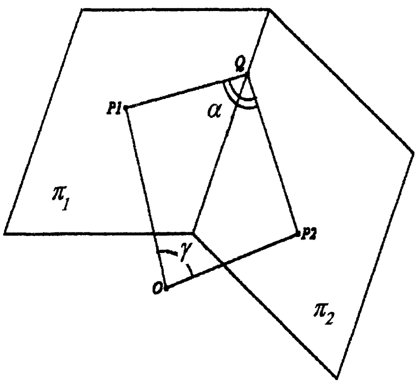

Рис. 2.

3.2. Угол между плоскостями.

Определение 3.1. *Углом между плоскостями называется любой из четырех двугранных углов, образованных этими плоскостями.*

Пусть даны две плоскости нормальными уравнениями

$$\pi_i : a_i \tanh \frac{u}{k} + b_i \tanh \frac{v}{k} + c_i \tanh \frac{w}{k} = \tanh \frac{p_i}{k}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим главные нормали OP_1 и OP_2, угол между ними обозначим γ. Плоскость OP_1P_2 перпендикулярна к ребру (рис. 2). Пусть Q — точка пересечения ребра с плоскостью OP_1P_2. Угол P_1QP_2 является линейным углом одного из двугранных углов, положим $\beta = \angle P_1QP_2$.

Четырехугольник OP_1QP_2 является двупрямоугольным четырехугольником первого рода, поэтому к нему можно применить формулу $XXXIV_2$ ([1], с. 309):

$$\cos A = \tanh \frac{a_1}{k} \tanh \frac{a_2}{k} - \frac{\cos C}{\cosh \frac{a_1}{k} \cosh \frac{a_2}{k}} \tag{3.10}$$

Применяя (3.10) к четырехугольнику OP_1QP_2, получим

$$\cos \gamma = \tanh \frac{p_1}{k} \tanh \frac{p_2}{k} - \frac{\cos \beta}{\cosh \frac{p_1}{k} \cosh \frac{p_2}{k}}. \tag{3.11}$$

Пусть теперь плоскости заданы общими уравнениями:

$$A_i \tanh \frac{u}{k} + B_i \tanh \frac{v}{k} + C_i \tanh \frac{w}{k} + D_i = 0,$$

в обозначениях (3.2), учитывая, что

$$\tanh\frac{p_i}{k} = -\frac{D_i}{|\overline{N_i}|}, \tag{3.12}$$

получим $\dfrac{1}{\cosh\frac{p_i}{k}} = \sqrt{1-\tanh^2\dfrac{p_i}{k}} = \dfrac{\sqrt{\overline{N_i}^2 - D_i^2}}{|\overline{N_i}|}$ и $\cos\gamma = \frac{\overline{N_1 N_2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|}$. Подставив эти выражения в формулу (3.11), получим:

$$\frac{\overline{N_1 N_2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|} = \frac{\overline{D_1 D_2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|} - \frac{\sqrt{\overline{N_1}^2 - D_1^2}\sqrt{\overline{N_2}^2 - D_2^2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|}\cos\beta,$$

$$-\cos\beta = \frac{(\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2}{\sqrt{\overline{N_1}^2 - D_1^2}\sqrt{\overline{N_2}^2 - D_2^2}} = \frac{(\pi_1\pi_2)}{\sqrt{(\pi_1^2)}\sqrt{\pi_2^2}}.$$

Будем считатъ углом между полуплоскостями угол, смежный с углом β: $\alpha = \pi - \beta, \cos\alpha = -\cos\beta$, тогда

$$\cos\alpha = \frac{(\pi_1\pi_2)}{\sqrt{(\pi_1^2)}\sqrt{\pi_2^2}}. \tag{3.13}$$

Так как $\pi_i^2 > 0$, правая часть всегда действительна, но угол α может быть мнимым. В обозначениях (3.2) формула (3.13) примет вид:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2}{\sqrt{\overline{N_1}^2 - D_1^2}\sqrt{\overline{N_2}^2 - D_2^2}} \tag{3.14}$$

Если плоскости взаимно перпендикулярны, выполняется условие:

$$(\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2 = 0. \tag{3.15}$$

4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве Лобачевского

Рассмотрим определитель:

$$\Delta = \Delta(\pi_1\pi_2) = \begin{vmatrix} \pi_1^2 & (\pi_1\pi_2) \\ (\pi_1\pi_2) & \pi_2^2 \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Если $\Delta > 0$, то α действителен, если $\Delta < 0$ этот угол мнимый. Таким образом, признаки взаимного расположения плоскостей имеют вид:

1. $\Delta > 0$ — плоскости пересекаются;
2. $\Delta < 0$ — плоскости расходятся; (4.2)
3. $\Delta = 0$ — плоскости параллельны, или совпадают.

Перейдем к обозначениям (3.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{N_1}^2 - D_1^2 & (\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2 \\ (\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2 & \overline{N_2}^2 - D_2^2 \end{vmatrix}, \tag{4.3}$$

раскрыв этот определитель и преобразовав полученное выражение, получим,

$$\Delta = \delta - (D_2 \overline{N_1} - D_1 \overline{N_2})^2, \tag{4.5}$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} \overline{N_1}^2 & (\overline{N_1 N_2}) \\ (\overline{N_1 N_2}) & \overline{N_2}^2 \end{vmatrix}.$$

Определитель δ неотрицателен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ линейно зависимы, а в этом случае главные нормали плоскостей π_1 и π_2 совпадают.

Уточним условие (4.2). Если плоскости параллельны, то их главные нормали не могут совпадать, поэтому условие (4.2) примет вид:

1. если $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \delta \neq 0 \end{cases}$ — плоскости параллельны; (4.6)
2. если $\Delta = \delta = 0$ — плоскости совпадают.

Рассмотрим случай, когда $\Delta < 0$.

В этом случае плоскости расходятся и имеют общий перпендикуляр. Без ограничения общности можно считать, что этот общий перпендикуляр совпадает с главной нормалью.

Приведем уравнение плоскостей к нормальному виду. Тогда будут выполняться соотношения: $N_1 = N_2 = \overline{n}$, $\overline{n}^2 = 1$,

$$D_1 = -\tanh\frac{p_1}{k}, D_2 = -\tanh\frac{p_1}{k}, \tag{4.7}$$

причем, так как плоскости различны,

$$D_1 \neq D_2, \quad \Delta = -(D_1 - D_2)^2 < 0 \tag{4.8}$$

Учитывая (3.14), получим

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2}{\sqrt{\overline{N_1}^2 - D_1^2}\sqrt{\overline{N_2}^2 - D_2^2}} = \frac{1 - \tanh\frac{p_1}{k}\tanh\frac{p_2}{k}}{\sqrt{1 - \tanh^2\frac{p_1}{k}}\sqrt{1 - \tanh^2\frac{p_1}{k}}} =$$

$$= \cosh\frac{p_1}{k}\cosh\frac{p_2}{k} - \sinh\frac{p_1}{k}\sinh\frac{p_2}{k} = \cosh\frac{p_2 - p_1}{k}.$$

Обозначив через d длину общего перпендикуляра:

$$p_2 - p_1 = d, \tag{4.9}$$

получим

$$\cosh\frac{d}{k} = \left|\frac{(\overline{N_1 N_2}) - D_1 D_2}{\sqrt{\overline{N_1}^2 - D_1^2}\sqrt{\overline{N_2}^2 - D_2^2}}\right| \tag{4.10}$$

5. Определение угла между скрещивающимися прямыми в абсолютной геометрии

Известно, что теоремы о равенстве линейных углов двугранного угла и о существовании и единственности общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых относятся к абсолютной геометрии ([4], с. 108, с. 113).

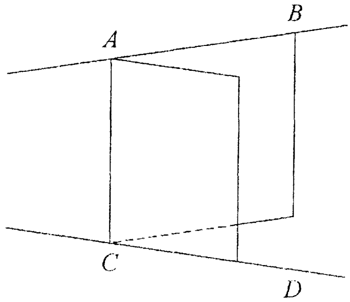

Рис.3

Пусть теперь в трехмерном пространстве даны две скрещивающиеся прямые $a \equiv AB$ и $b \equiv CD$, $p \equiv AC$ — их общий перпендикуляр. Рассмотрим плоскости α и β, проходящие через p и каждую их этих прямых (рис. 3): $\alpha = BAC$, $\beta = ACB$.

Определение 5.1. *Углом между прямыми a и b, имеющими общий перпендикуляр p будем называть угол между плоскостью α, проходящей через p и a, и плоскостью β, проходящей через p и b.*

В пространстве Евклида это определение эквивалентно обычному, так как стороны линейных углов с вершинами в точках A и C в этом случае попарно параллельны.

В пространстве Лобачевского определение 5.1 служит определением угла между прямыми a и b. В частности, если плоскости α и β взаимно перпендикулярны, прямые a и b так же взаимно перпендикулярны. В этом случае прямая a перпендикулярна плоскости β, а прямая b — к плоскости α ([1], с. 106).

Итак, для того, чтобы прямые были взаимно перпендикулярными необходимо и достаточно, чтобы через каждую из них можно было провести плоскость, перпендикулярную другой прямой.

Определение 5.1. можно применять и в том случае когда прямые лежат в одной плоскости, но имеют общий перпендикуляр. При этом, если прямые пересекаются, то их общий перпендикуляр проходит через точку пересечения и поэтому угол между прямыми a и b является линейным углом угла между плоскостями α и β как в пространстве Евклида, так и в пространстве Лобачевского. Если прямые не пересекаются, то в пространстве Евклида они параллельны и все их общие перпендикуляры лежат в их плоскости. Поэтому плоскости α и β совпадают и угол между ними равен нулю.

В пространстве Лобачевского возможны два случая:

1) прямые a и b расходятся. Расходящиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр, который расположен в их плоскости. Плоскости α и β совпадают и угол между ними равен нулю. Таким образом, согласно определению 5.1. угол между расходящимися прямыми равен нулю.

2) прямые a и b параллельны и не имеют общего перпендикуляра. В этом случае определение 5.1. неприменимо, поэтому введем

Определение 5.2. *Угол между параллельными прямыми в пространстве Лобачевского равен нулю.*

Определения 5.1. и 5.2 дают возможность определить угол между прямыми в любом случае.

Таким образом, две прямые в пространстве Лобачевского имеют два совместных инварианта: кратчайшее расстояние d и угол ϕ.

Если прямые скрещиваются, оба инварианта отличны от нуля, если пересекаются,то $d = 0$, $\phi \neq 0$, если прямые расходятся, то $d \neq 0$, $\phi = 0$, если они параллельны или совпадают, то $d = 0$, $\phi = 0$. Существование этих инвариантов доказано автором в [6].

6. Доказательство теорем о существовании и единственности общего перпендикуляра скрещивающихся прямых в пространстве Лобачевского

Так как в работе ([4], с. 113) эта теорема не доказана, приведем ее доказательство.

Лемма 1. Если прямая AA' параллельна плоскости α в направлении AA', то плоскость β, проходящая через AA' и любую точку M плоскости α, пересечет ее по прямой MM', параллельной прямой AA' в направлении AA'.

Эта лемма следует из определения параллельности и теоремы 2 ([4], с. 111).

Лемма 2. Если π — биссекторная плоскость угла, образованного плоскостями α и β, с ребром AB и PQ — перпендикуляр к ребру AB, расположенный в плоскости π, то любая плоскость γ, проходящая через PQ (и отличная от π) пересекает плоскости α и β по прямым PM и PN, образующим равные углы с перпендикуляром PQ ($PQ \perp AB$, $Q \subset \pi$, $M \in \alpha$, $N \in \beta$, $\angle QPM = \angle QPN$) (рис.4).

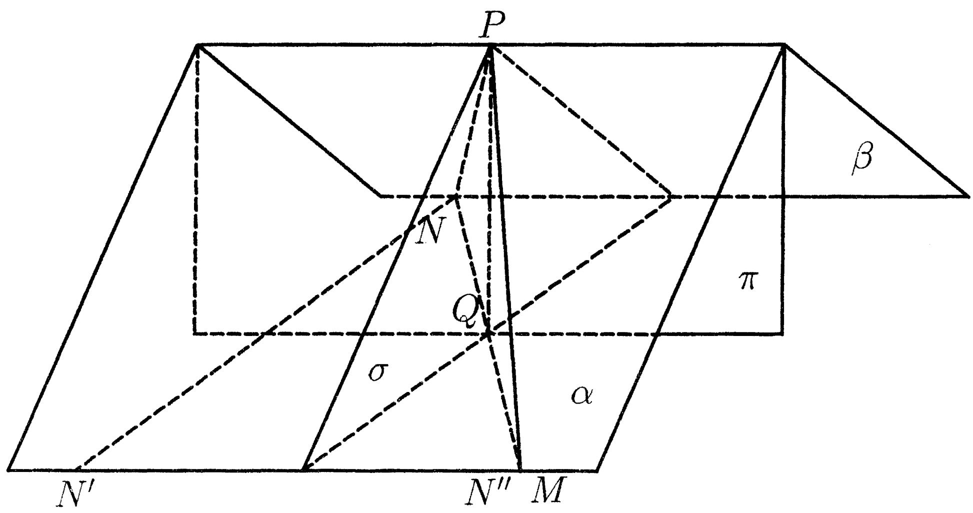

Рис. 4

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Отложим на лучах PM и PN равные отрезки: $PM = PN$ и пусть Q — точка пересечения луча PQ и отрезка MN. Проведем плоскость σ, проходящую через точку P перпендикулярно к AB. Плоскости α, β и π перпендикулярны к плоскости σ, а луч PQ лежит в плоскости σ.

Отразим отрезок PN симметрично относительно плоскости π, а полученный образ отразим симметрично относительно плоскости σ.

При первой симметрии точка N перейдет в точку $N' \in \alpha$, при второй — в точку $N'' \in \alpha$. Произведение этих симметрий является поворотом вокруг прямой PQ на $180°$, поэтому плоскость π перейдет в себя и точка $N'' \in PM$, но $PM = PN$, поэтому $PN'' = PM$ и M и N'' совпадают. Поэтому $\Delta QPM = \Delta QPN$ и $\angle QPM = \angle QPN$ что и требовалось доказать. □

Теорема 6.1. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует.*

Доказательство. Пусть AB и KL — скрещивающиеся прямые в пространстве Лобачевского. Проведем через AB плоскость α, параллельную прямой KL в направлении KL, плоскость β, параллельную прямой KL в направлении LK и биссекторную плоскость π угла между α и β, содержащего прямую KL (рис. 5).

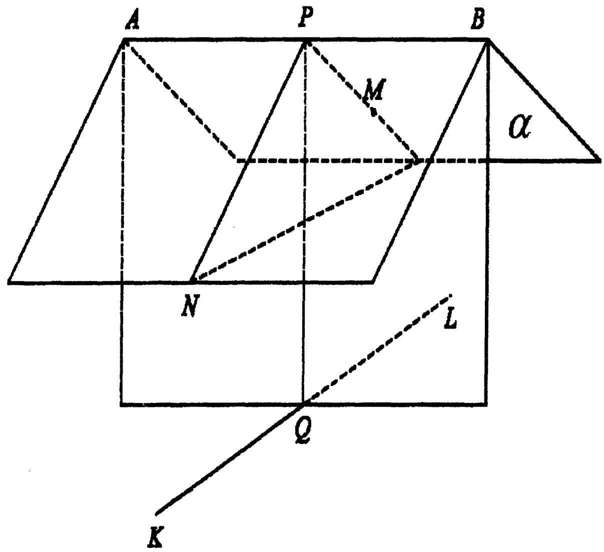

Рис. 5

Плоскость π пересечет прямую KL в некоторой точке Q. Опустим перпендикуляр QP на прямую AB и проведем плоскость γ через прямые KL и PQ.

В силу леммы 1, плоскость γ пересечет α по прямой PM, параллельной KL в направлении KL, а β — по прямой PN, параллельной KL в направлении LK. В силу леммы 2 выполняется равенство: $\angle QPM = \angle QPN$.

В плоскости γ отразим лучи QL и PM симметрично относительно прямой PQ. Так как $\angle QPM = \angle QPN$, луч PM перейдет в луч PN, а луч QL — в луч QL' параллельный лучу PN.

В силу теоремы о единственности луча, параллельного данной прямой в данном направлении, луч QL' совпадает с лучом QK и поэтому выполняется равенство: $\angle KQP = \angle LQP$. Но эта углы — смежные, следовательно $PQ \perp KL$, но $PQ \perp AB$ по построению, таким образом, PQ — общий перпендикуляр. □

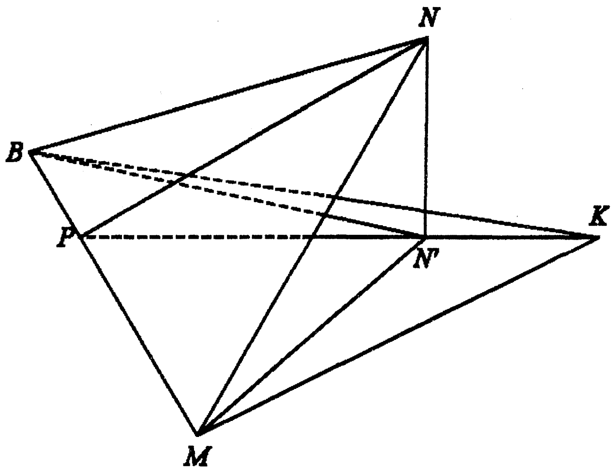

Рис. 6

Это доказательство применимо и в пространстве Евклида. В этом случае плоскости α, β и одна из биссекторных плоскостей совпадают, а плоскость π перпендикулярна плоскости α и приходим к обычному способу отыскания общего перпендикуляра в евклидовом пространстве.

Лемма 3. *Если α — плоскость, проходящая через большую сторону треугольника BNM и отличная от его плоскости, а N' — проекция точки N на плоскость α, то $\angle BN'M > \angle BNM$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и β — плоскость треугольника BNM. Опустим из точки N перпендикуляр на сторону BM Он пройдет внутри треугольника BNM (рис. 6).

По теореме о трех перпендикулярах $N'P \perp BM$. Отразим симметрично треугольник BNM на плоскость α относительно биссекторной плоскости угла между плоскостями α и β. При этом точка N перейдет в точку K, лежащую на PN' причем $\angle PN'B > \angle PKB$, $\angle PN'M > \angle PKM$, поэтому $\angle BN'M > \angle BKM$, но $\angle BNM = \angle BKM$ и, значит $\angle BN'M > \angle BNM$. □

Теореме 6.2. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых единственен.*

Доказательство. Предположим противное: пусть AB и MN — скрещивающиеся прямые, AM и BN — их общие перпендикуляры. Проведем плоскость α через точки A, B, M и спроектируем точку N на плоскость α. Пусть N' — проекция точки N на плоскость α.

$\angle MNB = \frac{\pi}{2}$ и четырехугольник $MABN'$ является четырехугольником Ламберта ([I], с. 49), причем, в силу леммы 3 $\angle MN'B > \angle MNB$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Из теоремы 6.2 следует, что если в теореме 6.1 поменять местами прямые AB и KL, то получим тот же перпендикуляр, то есть биссекторные плоскости пересекаются по общему перпендикуляру и из определения 5.1 следует определение Скопеца ([5], с. 147).

Список литературы

[1] Каган В.Ф. *Основания геометрии*, ч.1., ГИТТЛ, М-Л, 1949. С.1-492.

[2] Мусхелишвили.Н.И. *Курс аналитической геометрии.* ГИТТЛ, М-Л, 1947. С.1-644. -

[3] Норден А.П. *Пространства аффинной связности*, ГИТТЛ, М-Л, 1950. С. 1-463.

[4] Норден А.П. *Элементарное введение в геометрию Лобачевского.* ГИТТЛ, 1953. С. 1-248.

[5] Скопец З.А. *Циклографическое отображение пространства Лобачевскго.* Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. ГИТТЛ, М-Л, 1952 г., с. 129-150.

[6] Третьяков В.Д. *К вопросу о линейчатой геометрии и трехмерных пространствах Клейна.* ДАН, т. 152, No. 5,1963, С. 1058-1070.

Адрес: *Самарский государственный педагогический университет, 443099, г. Самара, ул. М.Горького, 65/67*

Address: *Samara State Pedagogical University, ul. Gorkogo, 65/67, Samara: 443099, RUSSIA*