Б. Г. Габдулхаев, Р. Н. Сухов, К обоснованию методов квадратур и кубатур для сингулярных интегральных уравнений, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 33–51

Б.Г.Габдулхаев, Р.Н.Сухов

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДОВ КВАДРАТУР И КУБАТУР ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В п.5 § 2 работы [I] был предложен новый способ обоснования прямых методов решения характеристических сингулярных интегральных уравнений. Данная работа посвящена применению этого способа к полным сингулярным интегральным уравнениям. При этом существенно используются как результаты, так и обозначения работ [I, 2].

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (с.и.у.) второго рода вида

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\ t\in\gamma, \tag{I}$$

где a , b , h (по обоим аргументам) и f - известные непрерывные функции, γ - единичная окружность с центром в начале координат, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши - Лебегу.

Следуя [3], приближенное решение уравнения (I) будем искать в виде интерполяционного полинома

$$\varphi_n(t)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}c_k\mathcal{D}_n(s-s_k)=\sum_{k=-n}^{n}b_k t^k,\ t=e^{is}, \tag{2}$$

где $\mathcal{D}_n(s)=\frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})s\cdot\operatorname{cosec}\frac{s}{2}$ - ядро Дирихле порядка n . Неизвестные коэффициенты $c_k=\varphi_n(t_k)$, $k=\overline{0,2n}$ будем определять из системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.)

$$a_j c_j+\frac{b_j}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\alpha_j c_k+\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}t_k h_{jk}c_k=f_j\ ,\ j=\overline{0,2n}\ , \tag{3}$$

где

$$a_j=a(t_j),\ b_j=b(t_j),\ f_j=f(t_j),\ h_{jk}=h(t_j,\tau_k),$$

$$t=e^{is},\ t_k=e^{is_k},\ s_k=\frac{2k\pi}{2n+1},\ \alpha_{jk}=1-i\beta_{jk},$$

$$\beta_{jk}=tg\,\frac{s_j-s_k}{4}\quad\text{или}\quad ctg\,\frac{s_k-s_j}{4}$$

при $j-k$ четном или нечетном соответственно.

Схема (I) – (3) есть вычислительная схема метода механических квадратур (м.м.к.) решения уравнения (I). В дальнейшем с.и.у. (I) будем рассматривать как линейное операторное уравнение [4,5] вида

$$K\varphi \equiv a\varphi + bS\varphi + Th\varphi = f \ , \qquad (\mathrm{I}')$$

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} \ , \quad Th\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

в пространстве квадратично суммируемых функций $X = L_2 = L_2(\gamma)$ с нормой

$$\| x \|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | x(\tau) |^2 d\sigma \right\}^{1/2} \ , \quad \tau = e^{i\sigma} \ .$$

Обозначим через P_n оператор, который любой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный полином вида (2) по узлам $t_k = e^{is_k}$, $k = \overline{0, 2n}$. Известно [6], что этот оператор неограничен в L_2, но $P_n \to E \ (n \to \infty)$ сильно[I], и

$$\| P_n \|_{C \to L_2} = 1 \ , \quad n = 1, 2, \dots \ . \qquad (4)$$

Через P_n^t обозначим оператор P_n, примененный по переменной t.

Пусть $\mathbb{R}^N$, $N = 2n+1$, есть N-мерное эвклидово пространство N-периодических векторов с обычной нормой. Как и в [7], каждой функции $x \in C(\gamma)$ поставим в соответствие вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $\bar{x} = (x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{2n}))$ с нормой $\| \bar{x} \|_{\mathbb{R}^N} \equiv \| x(t) \|_{2,N}$, где узлы t_j определены в (3). Обозначим $X_n \subset L_2$ множество всех тригонометрических полиномов степени n вида (2) с L_2-нормой. Тогда (см. лемму I [7])

$$\| x_n \|_2^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} | x_n(t_k) |^2 \ , \quad x_n \in X_n \ , \quad N = 2n+1 \ .$$

Заметим, что пространство тригонометрических полиномов степени n с L_2-нормой и N-мерное эвклидово пространство N-периодических векторов $\mathbb{R}^N$, $N = 2n+1$, с обычной нормой линейно изометричны. Поэтому в этом случае норма $\| \cdot \|_{2,N}$ может быть заменена также на норму $\| \cdot \|_2$.

Тогда с.л.а.у. (3) эквивалентна операторному уравнению

[I] Здесь E – оператор вложения из $C(\gamma)$ в $L_2(\gamma)$.

$$K_n\varphi_n \equiv P_n^t(a\varphi_n + bS\varphi_n + P_n^t T P_n^\tau(h\varphi_n)) = P_n^t f \ , \qquad (3')$$

где K_n – линейный оператор в $(2n+1)$ –мерном пространстве X_n полиномов с L_2 –нормой.

I°. Рассмотрим вначале характеристическое с.и.у.

$$K_0\varphi \equiv a\varphi + bS\varphi = f \ . \qquad (5)$$

Приближенное решение ищем в виде (2), коэффициенты которого определяются из системы

$$a_j c_j + \frac{b_j}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\alpha_{jk} c_k = f_j \ , \quad j=\overline{0,2n} \ , \qquad (6)$$

что эквивалентно операторному уравнению

$$K_{0n}\varphi_n \equiv P_n(a\varphi_n + bS\varphi_n) = P_n f \ . \qquad (6')$$

Случай А: $|b/a| < 1$. Тогда уравнения (5) и (6′) эквивалентны соответственно уравнениям

$$A\varphi \equiv \varphi + \mathcal{U}\varphi = y \quad (\varphi, y \in L_2) \ , \qquad (7)$$

$$A_n\varphi_n \equiv \varphi_n + \mathcal{U}_n\varphi_n = P_n y \quad (\varphi_n, P_n y \in X_n) \ , \qquad (8)$$

где $\mathcal{U}\varphi = \frac{b}{a}S\varphi$, $\mathcal{U}_n\varphi_n = P_n\mathcal{U}\varphi_n$, $y = \frac{f}{a}$, а A_n – линейный оператор в X_n .

Как показано в работе [I], в рассматриваемом случае точное уравнение (7) и соответствующее ему приближенное уравнение (8) при любых $n=1,2,\ldots$ однозначно разрешимы, причем

$$\|A^{-1}\| \le (1-q)^{-1} , \ \|A_n^{-1}\| \le (1-q)^{-1} , \quad n=1,2,\ldots , \qquad (9)$$

где $q = \|b/a\|_C < 1$. Решения $\varphi^*(t)$ уравнения (7) и $\varphi_n^*(t)$ уравнения (8) могут быть найдены методом последовательных приближений, т.е. как пределы итерационных последовательностей соответственно

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{j+1} = y - \frac{b}{a}S\varphi^j \ , \ \varphi^0 = y \ , \ j=0,1,\ldots \\ &\varphi_n^{j+1} = P_n y - P_n\left(\frac{b}{a}S\varphi_n^j\right), \ \varphi_n^0 = P_n y \ , \ j=0,1,\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

при $j \to \infty$. При этом скорость сходимости итерационных последовательностей оценивается соотношениями соответственно

$$\|\varphi^* - \varphi^j\| \le \frac{q^{j+1}\|y\|}{1-q}, \quad \|\varphi_n^* - \varphi_n^j\| \le \frac{q^{j+1}\|P_n y\|}{1-q} \tag{II}$$

Пусть функции $a, b, f \in H_\alpha^{(r)} (r \ge 0, 0 < \alpha \le 1)$, т.е. имеют r – непрерывных производных, причем r –е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. В силу следствия I из теоремы 6 главы I монографии [8] погрешность приближенного решения $\varphi_n^*(t)$ может быть оценена следующим образом:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = \|(E - A_n^{-1} P_n \Psi)(\varphi^* - P_n \varphi^*)\|_2 \le$$

$$\le \|\varphi^* - P_n \varphi^*\|_2 + \|A_n^{-1} P_n \Psi(\varphi^* - P_n \varphi^*)\|_2 \le$$

$$\le 2E_n(\varphi^*)_C + \|A_n^{-1}\| \cdot \|P_n\left[\frac{b}{a} S(\varphi^* - P_n \varphi^*)\right]\|_{L_2} \le$$

$$\le 2E_n(\varphi^*)_C + \frac{q}{1-q}\left\{\|S(\varphi^* - T_n)\|_{2,N} + \|SP_n(\varphi^* - T_n)\|_{2,N}\right\},$$

где $E_n(\varphi^*)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $\varphi^*(t)$ тригонометрическими полиномами степени n, T_n – пока произвольный тригонометрический полином степени не выше n.

Так как [7] $\|SP_n x\|_{2,N} \le \|x\|_{2,N}$, $x \in C(\gamma)$, то

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \le 2E_n(\varphi^*)_C + \frac{q}{1-q}\left\{\|S(\varphi^* - T_n)\|_{2,N} + \right.$$

$$\left. + \|\varphi^* - T_N\|_{2,N}\right\}, \quad T_n \in X_n, \quad N = 2n+1 .$$

Выберем $T_n \equiv Q_n \varphi^*$ так, что $SQ_n \varphi^* = Q_n S \varphi^*$ и $\|\varphi^* - T_n\|_{2,N} = O\{E_n(\varphi^*)_C\}$ (о существовании такого полинома см. [9], а также [8], замечание на с.105). Тогда

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \le 2E_n(\varphi^*)_C + \frac{q}{1-q}\left\{\|\varphi^* - Q_n\varphi^*\|_C + \right.$$

$$\left. + \|\bar\varphi^* + Q_n \bar\varphi^*\|_C\right\}, \quad \bar\varphi^* \equiv S\varphi^* .$$

Из того, что $a, b, f \in W^r H^\alpha$, следует, что

$$\varphi^*, S\varphi^* \in \begin{cases} W^r H^\alpha & \text{при} \quad 0 < \alpha < 1, \\ W^r Z & \text{при} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

где через Z обозначен класс Зигмунда [10]. Отсюда получаем следующие оценки[1] [11]:

$$\|\bar{\varphi}^* - Q_n \bar{\varphi}^*\|_C \le \lambda \|\varphi^* - Q_n \varphi^*\|_C \le$$
$$\le \left\{ d_1 N^{-r-\alpha} \text{ при } 0 < \alpha < 1 ;\ d_2 N^{-r-\alpha} \text{ при } \alpha = 1 \right\}, \ r \ge 0 ,$$

где λ – положительная постоянная, не зависящая от n. Поэтому при $a, b, f \in H_\alpha^{(r)} \equiv W^r H^\alpha$

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O(N^{-r-\alpha}), \ r + \alpha > 0 . \tag{12}$$

Отметим, что если $a, b, f \in W^r H^\omega$, где $\omega(t)$ – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий при $r = 0$ дополнительному условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty ,$$

то

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O\left\{ \frac{1}{N^r} \omega\left(\frac{1}{N}\right) \right\} .$$

Из соотношений (11) и (12) получаем следующую оценку скорости сходимости квадратурно-итерационного метода (5), (6), (10):

$$\|\varphi^* - \varphi_n^j\|_2 = O\left\{ N^{-r-\alpha} + q^{j+1} \right\}, \ r + \alpha > 0 . \tag{13}$$

Параметры j и N в (13) суть произвольные натуральные числа. Выберем $j = j_0 = j_0(N)$ так, чтобы при этом правая часть (13) стала минимальной (см., например, [12]). Это будет при

$$j_0(N) = \left[\!\left[-(r+\alpha) \frac{\ln N}{\ln q} - 1 \right]\!\right] .^{2)} \tag{14}$$

---

[1] Здесь и далее $d_1, d_2, \ldots$ – вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n.

[2] $[\![\rho]\!]$ – целая часть числа $\rho \ge 0$.

Тогда из (I3) и (I4) получаем оценки

$$\| \varphi^* - \varphi_n^{j_0} \|_2 = O(q^{j_0+1}) = O(N^{-r-\alpha}) .$$

Итак, доказана

Теорема I. Пусть $X = L_2$ и $q = \| b/a \|_C < 1$. Тогда уравнение (5) и с.л.а.у. (6) при любых натуральных n однозначно разрешимы, причем при $j \to \infty$ итерационная последовательность $\{\varphi_n^j\}$ сходится к единственному решению φ^* уравнения (5) в смысле $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_n^j = \lim\limits_{j\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^j = \varphi^*$ со скоростью (I3). При этом существует оптимальный номер итерации $j = j_0$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^{j_0} = \varphi^*$ и $\| \varphi^* - \varphi_n^{j_0} \|_2 = O(q^{j_0+1}) = O(N^{-r-\alpha})$.

Случай Б: $| a/b | < 1$. Заменой $\psi = S\varphi$, $\psi_n = S\varphi_n$ сведем этот случай к случаю А. Имеем

$$a S^{-1} \psi + b\psi = f , \tag{I5}$$

$$P_n (a S^{-1} \psi_n + b \psi_n) = P_n f . \tag{I6}$$

Уравнения (I5), (I6) эквивалентны соответственно уравнениям

$$B\psi \equiv \psi + \frac{a}{b} S\psi = y , \quad y = \frac{f}{b} ,$$

$$B_n \psi_n \equiv \psi_n + P_n \left(\frac{a}{b} S \psi_n \right) = P_n y .$$

Относительно операторов B и B_n справедливы те же утверждения, что и относительно операторов A и A_n (см. [I]). Справедливость их следует из того, что

$$S^{-1} \psi_n \in X_n , \quad S^2 = E , \quad \| S^{-1} \| = 1 , \quad S^{-1} : L_2 \to L_2 .$$

Таким образом, уравнения (I5) и (I6) однозначно разрешимы и их решения можно найти как пределы итерационных последовательностей соответственно

$$\psi^{j+1} = y - \frac{a}{b} S \psi^j , \quad y = \frac{f}{b} , \quad j = 0, 1, \ldots ;$$

$$\psi_n^{j+1} = P_n y - P_n \left(\frac{a}{b} S \psi_n^j \right) , \quad j = 0, 1, \ldots$$

при $j \to \infty$. При этом справедлива оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^j\|_2 = O\left\{N^{-1-\alpha} + q^{j+1}\right\}, \quad r+\alpha > 0,$$

где $\varphi^*(t)$ – точное решение уравнения (I5).

Обозначив снова через $\varphi^*(t)$ точное решение уравнения (5), с учетом $S^2 = E$ можно теперь записать следующую оценку:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^j\|_2 = O\left\{N^{-r-\alpha} + q^{j+1}\right\}. \tag{I7}$$

Сформулируем доказанную теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть $X = L_2$ и $q = \|a/b\|_C < 1$. Тогда точное уравнение (5) и соответствующая ему приближенная система (6) при любых $n = 1, 2, \ldots$ однозначно разрешимы, и имеет место сходимость итерационной последовательности $\{\varphi_n^j\}$ при $n, j \to \infty$ к точному решению $\varphi^*(t)$ уравнения (5) со скоростью (I7).

Случай В: $|b/a| = 1$. Уравнения (5) и (6) эквивалентны соответственно уравнениям

$$R\varphi \equiv \varphi + e^{i\alpha} S\varphi = y, \tag{I8}$$

$$R_n \varphi_n \equiv \varphi_n + e^{i\alpha} S\varphi_n = P_n y, \tag{I9}$$

где $y = f/a$, $\alpha = const \neq k\pi$.

В этом случае при однозначной разрешимости уравнения (I8) приближенное уравнение (I9), а следовательно, и с.л.а.у. (6) разрешимы для всех $n = 1, 2, \ldots$ и приближенные решения $\varphi_n^* = R_n^{-1} P_n y = R^{-1} P_n y$ сходятся в среднем к точному решению $\varphi^* = R^{-1} y$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \le \|R^{-1}\|_2 \|y - P_n y\|_2 = O\left\{E_n(y)_C\right\}.$$

Если $y \in H_\alpha^r (r \ge 0, 0 < \alpha \le 1)$, то [I0] $E_n(y)_C \le d_3 n^{-r-\alpha}$, поэтому $\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha})$, $r + \alpha > 0$.

В заключение данного пункта сделаем следующее замечание общего характера. Может оказаться, что для коэффициентов исходного уравнения не выполняется ни один из случаев А, Б и В. Например, в отдельных точках $t \in \gamma$ функции $a(t)$ или $b(t)$ принимают нулевые значения. Но и в этом случае заменой

$$\varphi(t) = \lambda x(t) + \mu S(x; t), \quad t \in \gamma, \tag{20}$$

где λ, μ – произвольные постоянные, задачу приближенного решения уравнения (5) можно свести к одному из рассмотренных случаев. Действительно, подставив (20) в (5), имеем уравнение относительно новой искомой функции $x(t)$:

$$K_0\varphi = (\lambda a + \mu b)x + (\mu a + \lambda b)Sx \equiv a_1 x + b_1 Sx = f ,$$

где

$$a_1(t) = \lambda a(t) + \mu b(t) ,\ b_1(t) = \mu a(t) + \lambda b(t) .$$

Выберем λ и μ такими, чтобы для функций $a_1(t)$ и $b_1(t)$ выполнялся один из случаев А, Б или В.

2^0. Теперь вернемся к полному уравнению (I). Для краткости изложения рассмотрим только случай А, т.е. $|b/a| < 1$. Тогда уравнения (I$'$) и (3$'$) эквивалентны следующим уравнениям соответственно:

$$\varphi + \frac{b}{a} S\varphi + \frac{1}{a} Th\varphi = \frac{f}{a} = y , \tag{21}$$

$$\varphi_n + P_n\left(\frac{b}{a} S\varphi_n\right) + P_n\left\{\frac{1}{a} T P_n^{\tau}(h\varphi_n)\right\} = P_n y . \tag{22}$$

Введем обозначения:

$$A\varphi \equiv \varphi + \frac{b}{a} S\varphi \ ,\ A_n\varphi_n = P_n A\varphi_n \ ,\ \frac{h}{a} = g .$$

Тогда уравнения (21), (22) перепишутся соответственно так:

$$A\varphi + Tg\varphi = y \quad (\varphi, y \in L_2) , \tag{23}$$

$$A_n\varphi_n + P_n^t T P_n^{\tau}(g\varphi_n) = P_n y (\varphi_n, P_n y \in X_n) . \tag{24}$$

Из сказанного в п. I^0 имеем

$$\| A^{-1} y - A_n^{-1} P_n y \|_2 \to 0 \ ,\ n \to \infty \ ,\ y \in C(\gamma) ,$$

т.е. имеет место сильная сходимость последовательности операторов $A_n^{-1} P_n : C \to L_2$ со скоростью

$$\| A^{-1} y - A_n^{-1} P_n y \|_2 \le \begin{cases} d_4 n^{-r-\alpha} H(\psi;\alpha) , & 0 < \alpha < 1 ; \\ d_5 n^{-r-1} Z(\psi) , & \alpha = 1 \end{cases} \tag{25}$$

для $a, b, f \in W^r H^{\alpha}$, где $H(\psi;\alpha)$ и $Z(\psi)$ – наименьшие постоянные соответственно Гёльдера и Зигмунда для $\psi = (A^{-1} y)^{(r)}$.

Уравнения (23), (24) эквивалентны уравнениям соответственно

$$U\varphi \equiv \varphi + A^{-1} T g \varphi = A^{-1} y , \tag{26}$$

$$U_n\varphi_n \equiv \varphi_n + A_n^{-1} P_n^t T P_n^{\tau}(g\varphi_n) = A_n^{-1} P_n y . \tag{27}$$

Тогда для $\forall \varphi_n \in X_n$ имеем

$$\| \mathcal{U}\varphi_n - \mathcal{U}_n \varphi_n \|_2 = \| A^{-1} T g \varphi_n - A_n^{-1} P_n^t T P_n^\tau (g \varphi_n) \|_2 \le$$

$$\le \| A^{-1} T g \varphi_n - A_n^{-1} P_n T g \varphi_n \|_2 +$$

$$+ \| A_n^{-1} P_n^t T g \varphi_n - A_n^{-1} P_n^t T P_n^\tau (g \varphi_n) \|_2 \; .$$

С использованием неравенства (25) для первого слагаемого получаем оценку:

$$\| A^{-1} T g \varphi_n - A_n^{-1} P_n T g \varphi_n \|_2 \le d_6 n^{-\tau-\alpha} \cdot$$

$$\cdot H\left\{ (A^{-1} T g \varphi_n)^{(\tau)} ; \alpha \right\} \le d_7 n^{-\tau-\alpha} \| \varphi_n \|_2 \; .$$

Нетрудно показать, что для $\varphi_n \in X_n$ справедливо тождество $A^{-1} T (g \varphi_n) = T(A^{-1} g) \varphi_n$, где оператор A^{-1} применяется к функции $g(t,\tau)$ по внешней переменной t.

Оценим второе слагаемое. С помощью соотношений (4),(9), неравенства Буняковского и результатов работ [I0, I3] получим

$$\| A_n^{-1} P_n^t T g \varphi_n - A_n^{-1} P_n^t T P_n^\tau (g, \varphi_n) \|_2 =$$

$$= \| A_n^{-1} P_n^t T [(g - P_n^\tau g) \varphi_n] \|_2 \le \| A_n^{-1} \| \cdot \| P_n^t \|_{C \to L_2} \cdot$$

$$\cdot \max_{t \in \gamma} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\gamma | g(t,\tau) - P_n^\tau g(t,\tau) |^2 d\sigma \right\}^{1/2} \cdot \| \varphi_n \|_2 \le$$

$$\le d_8 E_n^\tau (g)_C \| \varphi_n \|_2 \le d_9 n^{-\tau-\alpha} \| \varphi_n \|_2 \; , \quad \varphi_n \in X_n \; .$$

Таким образом,

$$\| \mathcal{U} - \mathcal{U}_n \| \le d_{10} n^{-\tau-\alpha} , \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_n : X_n \to L_2 \; .$$

Тогда в соответствии с теоремой 7 гл. I монографии [8] при однозначной разрешимости уравнения (26) для всех n, начиная с некоторого, приближенное уравнение (27) также однозначно разрешимо. Кроме того, т.к. для правых частей уравнений (26) и (27) выполняется (25), то в силу той же теоремы имеет место средне - квадратическая сходимость приближенных решений φ_n^* к точному решению φ^* уравнения (26) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O\left\{\|U - U_n\| + \|A^{-1}y - A_n^{-1}P_n y\|_2\right\} = O(n^{-r-\alpha}).$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть уравнение (I) однозначно разрешимо в пространстве L_2 при любой правой части $f \in W^r H^\alpha (r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1)$.

Тогда при достаточно больших n приближенная система (3) также однозначно разрешима и приближенные решения $\varphi_n^*(t)$ [I] сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*(t)$ уравнения (I) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}), \quad r + \alpha > 0.$$

3°. Обобщим теперь результаты, полученные в предыдущих пунктах, на случай полного двумерного с.и.у. вида

$$a_1(t,\tau)\varphi(t,\tau) + \frac{a_2(t,\tau)}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(\xi,\tau)d\xi}{\xi - t} + \frac{a_3(t,\tau)}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{\varphi(t,\eta)d\eta}{\eta - \tau} +$$

$$+ \frac{a_4(t,\tau)}{\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(\xi - t)(\eta - \tau)} + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2} h(t,\tau;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta =$$

$$= y(t,\tau), \quad t \in \gamma_1, \quad \tau \in \gamma_2, \tag{28}$$

где $a_j(t,\tau)$, $j = \overline{1,4}$, $h(t,\tau;\xi,\eta)$ и $y(t,\tau)$ – известные непрерывные функции по всем своим аргументам, γ_j $(j = 1; 2)$ – единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости z_j, $\varphi(t,\tau)$ – искомая функция, а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши [I4].

Следуя [2], приближенное решение уравнения (28) будем искать в виде интерполяционного полинома

$$\varphi_{nm}(t,\tau) = \frac{1}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2m} c_{kj}\mathcal{D}_n(\theta - \theta_k)\mathcal{D}_m(\sigma - \sigma_j), \tag{29}$$

$$t = e^{i\theta} \in \gamma_1, \quad \tau = e^{i\sigma} \in \gamma_2,$$

[I] То есть $\varphi_n(t)$ из (2) при $c_k = c_k^*$, где $\{c_k^*\}$ – решение с.л.а.у. (3)

где $\mathcal{D}_\ell(s)$ – ядро Дирихле порядка ℓ :

$$\mathcal{D}_\ell(s)=\frac{1}{2}\sin(2\ell+1)\frac{s}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{s}{2}\quad.$$

Неизвестные коэффициенты $c_{kj}=\varphi_{nm}(t_k,\tau_j),\ k=\overline{0,2n}$, $j=\overline{0,2m}$, будем определять из с.л.а.у.

$$a_{1kj}c_{kj}+\frac{a_{2kj}}{2n+1}\sum_{\ell=0}^{2n}b_{k\ell}c_{\ell j}+\frac{a_{3kj}}{2m+1}\sum_{r=0}^{2m}d_{jr}c_{kr}+$$

$$+\frac{a_{4kj}}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{\ell=0}^{2n}\sum_{r=0}^{2m}b_{k\ell}d_{jr}c_{\ell r}+\tag{30}$$

$$+\frac{1}{(2n+1)(2m+1)}\sum_{\ell=0}^{2n}\sum_{r=0}^{2m}\xi_\ell\eta_r h_{kj;\ell,r}c_{\ell r}=y_{kj}\ ,$$

$$k=\overline{0,2n}\quad,\ j=\overline{0,2m}\quad,$$

где

$$a_{skj}=a_s(t_k,\tau_j)\ ,\ s=\overline{1,4}\ ,\ y_{kj}=y(t_k,\tau_j)\ ,$$

$$h_{kj;\ell r}=h(t_k,\tau_j;\xi_\ell,\eta_r),\ t=e^{i\theta},\tau=e^{i\sigma},\xi=e^{i\mu},\eta=e^{i\nu},$$

$$t_k=e^{i\theta_k},\ \tau_j=e^{i\sigma_j},\ \xi_\ell=e^{i\mu_\ell}\ ,\ \eta_r=e^{i\nu_r}\ ,$$

$$\theta_k=\frac{2k\pi}{2n+1}\ ,\ \sigma_j=\frac{2j\pi}{2m+1}\ ,\ \mu_\ell=\frac{2\ell\pi}{2n+1}\ ,\ \nu_r=\frac{2r\pi}{2m+1}\ ,$$

$b_{k\ell}=1-i\,tg\,\dfrac{\theta_k-\mu_\ell}{4}$ или $1-i\,ctg\,\dfrac{\mu_\ell-\theta_k}{4}$ при $k-\ell$ четном или нечетном соответственно, $d_{jr}=1-i\,tg\,\dfrac{\sigma_j-\nu_r}{4}$ или $1-i\,ctg\,\dfrac{\nu_r-\sigma_j}{4}$ при $j-r$ четном или нечетном соответственно.

Таким образом, получили вычислительную схему метода механических кубатур (м.м.кб.) для уравнения (28).

Обозначив

$$S_1\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\xi,\tau)d\xi}{\xi - t}, \quad S_2\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\varphi(t,\eta)d\eta}{\eta-\tau},$$

$$S_{12}\varphi = \frac{1}{\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(\xi-t)(\eta-\tau)}, \quad Th\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\gamma_1\gamma_2} h(t,\tau;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

с.и.у. (28) можно записать как линейное операторное уравнение [2] вида

$$K\varphi \equiv a_1\varphi + a_2 S_1\varphi + a_3 S_2\varphi + a_4 S_{12}\varphi + Th\varphi = y \tag{28'}$$

в пространстве $X = L_2 = L_2(\gamma_1 \times \gamma_2)$ суммируемых с квадратом функций от двух переменных с нормой

$$\|\varphi\|_2 = \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(t,\tau)|^2 d\theta d\sigma\right\}^{1/2}, \quad t = e^{i\theta}, \quad \tau = e^{i\sigma}.$$

Пусть P_{nm} – оператор, ставящий в соответствие любой непрерывной функции ее двойной интерполяционный полином вида (29) по узлам $t_k = e^{i\theta_k}$, $\tau_j = e^{i\sigma_j}$ ($k = \overline{0,2n}$, $j = \overline{0,2m}$). Известно [15], что

$$\|P_{nm}\|_{C\to L_2} = 1 \quad (n, m = 1,2,\dots) \tag{31}$$

и $P_{nm} \to E$ сильно при $n,m\to\infty$, $E - P_{nm} : C \to L_2$.

Обозначим через $\mathbb{R}^{NM}$ $N\cdot M$-мерное эвклидово пространство векторов $\bar{x} = \{x(t_k,\tau_j)\}_{k=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,M}}$ ($t_k\in\gamma_1$, $\tau_j\in\gamma_2$) с обычной нормой, где узлы (t_k,τ_j) определены в (30). Аналогично одномерному случаю каждой функции $x(t,\tau)\in C(\gamma_1\times\gamma_2)$ поставим в соответствие вектор $\bar{x}\in\mathbb{R}^{NM}$ с нормой $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^{NM}} = \|x\|_{2,N,M}$. Обозначим через X_{nm} множество всех тригонометрических полиномов степени (n, m), $n = [\![N/2]\!]$, $m = [\![M/2]\!]$ вида (29) с L_2-нормой.

Аналогично лемме I работы [7] можно доказать, что

$$\|x_{nm}\|_2 = \frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|x_{nm}(t_k,\tau_j)|^2, \quad x_{nm}\in X_{nm}. \tag{32}$$

С.л.а.у. (30) эквивалентна операторному уравнению [2]

$$K_{nm}\varphi_{nm} \equiv P_{nm}(a_1\varphi_{nm} + a_2 S_1\varphi_{nm} + a_3 S_2\varphi_{nm} +$$

$$+a_4 S_{12}\varphi_{nm}) + P^{t\tau}_{nm} T P^{\xi\eta}_{nm}(h\varphi_{nm}) = P_{nm} y ,$$

где через $P^{t\tau}_{nm}$ $(P^{\xi\eta}_{nm})$ обозначен оператор P_{nm}, примененный относительно переменных $t, \tau \in \gamma_1 \times \gamma_2$ $(\xi, \eta \in \gamma_1 \times \gamma_2)$.

Пусть вначале $h \equiv 0$. Тогда характеристическое уравнение и соответствующее ему приближенное уравнение имеют соответственно вид

$$a_1\varphi + a_2 S_1\varphi + a_3 S_2\varphi + a_4 S_{12}\varphi = y , \tag{33}$$

$$P_{nm}(a_1\varphi_{nm} + a_2 S_1\varphi_{nm} + a_3 S_2\varphi_{nm} + a_4 S_{12}\varphi_{nm}) = P_{nm} y . \tag{34}$$

Потребуем, чтобы хотя бы при одном $k (k = \overline{1,4})$ выполнялось условие

$$\sum_{\ell=1,\ell\neq k}^{4} \left\| \frac{a_\ell}{a_k} \right\|_C \leq q < 1 . \tag{35}$$

Рассмотрим, например, случай $k = 1$ (другие случаи рассматриваются аналогично).

Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а 4. Пусть $X = L_2$ и выполняется соотношение (35). Тогда уравнение (33) и соответствующее ему приближенное уравнение (34) при любых натуральных n и m однозначно разрешимы в L_2, и их решения φ^* и φ^*_{nm} можно найти как пределы итерационных последовательностей соответственно

$$\varphi^{j+1} = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} S_1\varphi^j - \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi^j - \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi^j , \quad j = 0,1,\ldots \tag{36}$$

$$\varphi^{j+1}_{nm} = P_{nm}\left(\frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} S_1\varphi^j_{nm} - \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi^j_{nm} - \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi^j_{nm}\right), \quad j = 0,1,\ldots \tag{37}$$

При этом итерационная последовательность $\{\varphi^j_{nm}\}$ сходится к точному решению φ^* уравнения (33) в смысле

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \lim_{j\to\infty} \varphi^j_{nm} = \lim_{j\to\infty} \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \varphi^j_{nm} = \varphi^* \tag{38}$$

со скоростью, которая при $a_j (j = \overline{1,4})$, $y \in H^{(r,\ell)}_{\alpha,\beta}$ оценивается соотношением[1]

---

[1] Через $H^{(r,\ell)}_{\alpha,\beta}$ $(r,\ell \geq 0, 0 < \alpha,\beta \leq 1)$ обозначен класс функций, имеющих r и ℓ непрерывных производных относительно первой и второй переменной соответственно, причем r-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, а ℓ-е – с показателем β.

$$\|\varphi^* - \varphi^j_{nm}\|_2 = O\left\{ n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} + q^{j+1} \right\} . \tag{39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае уравнения (33) и (34) эквивалентны уравнениям соответственно

$$A\varphi \equiv \varphi + \frac{a_2}{a_1} S_1\varphi + \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi + \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi = \frac{y}{a_1} = f , \tag{40}$$

$$A_{nm}\varphi_{nm} \equiv \varphi_{nm} + P_{nm}\left(\frac{a_2}{a_1} S_1\varphi_{nm} + \frac{a_3}{a_1} S_2\varphi_{nm} + \frac{a_4}{a_1} S_{12}\varphi_{nm} \right) = = P_{nm}\frac{y}{a_1} = P_{nm} f . \tag{41}$$

В силу требования (35) и равенства единице норм операторов S_1, S_2, S_{12} (см., например, в [15]) имеем

$$\|\psi\|_{L_2 \to L_2} \equiv \left\| \frac{a_2}{a_1} S_1 + \frac{a_3}{a_1} S_2 + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \right\| \leq \sum_{\ell=2}^{4} \left\| \frac{a_\ell}{a_1} \right\|_C \leq q < 1 .$$

Следовательно, уравнение (40) однозначно разрешимо, и решение φ^* может быть найдено методом последовательных приближений, причем $\|A^{-1}\| \leq (1-q)^{-1}$, а итерационная последовательность (36) сходится к точному решению $\varphi^*(t,\tau)$ уравнения (40) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi^j\|_2 \leq \frac{q^{j+1}\|f\|_2}{1-q}, \quad \varphi^0 = f , \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Аналогичное утверждение для уравнения (41) вытекает из следующей леммы (см., например, в [2]).

Л е м м а. Пусть $a(t,\tau) \in C(\gamma_1 \times \gamma_2)$ с нормой $\|a\|_C = \max\limits_{\substack{t\in\gamma_1 \\ \tau\in\gamma_2}} |a(t,\tau)|$. Тогда для $\forall \varphi_{nm} \in X_{nm}$ справедлива оценка

$$\|P_{nm}(aS_\ell\varphi_{nm})\|_2 \leq \|a\|_C \|\varphi_{nm}\|_2 \qquad (\ell = 1, 2, 12) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для узлов $t_k = e^{i\theta_k}$, $\tau_j = e^{i\sigma_j}$, $\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $\sigma_j = \frac{2j\pi}{2m+1}$ из (32) с учетом того, что $S_\ell\varphi_{nm} \in X_{nm}$ и $\|S_\ell\| = 1 (\ell = 1, 2, 12)$, имеем

$$\|P_{nm}(aS_\ell\varphi_{nm})\|_2^2 = \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} |(aS_\ell\varphi_{nm})(t_k, \tau_j)|^2 \leq$$

$$\leq \|a\|_C^2 \frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} |S_\ell(\varphi_{nm};\, t_k,\, \tau_j)|^2 =$$

$$= \|a\|_C^2 \cdot \|S_\ell \varphi_{nm}\|_{2,N,M}^2 = \|a\|_C^2 \cdot \|S_\ell \varphi_{nm}\|_2^2 \leq \|a\|_C^2 \, \|\varphi_{nm}\|_2^2 .$$

Лемма доказана.

Далее, для $\forall \varphi_{nm} \in X_{nm}$ имеем

$$\|\psi_{nm}\varphi_{nm}\|_2 = \|P_{nm}\,\psi\varphi_{nm}\|_2 \leq \left\|P_{nm}\left(\frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi_{nm}\right)\right\|_2 +$$

$$+ \left\|P_{nm}\left(\frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi_{nm}\right)\right\|_2 + \left\|P_{nm}\left(\frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi_{nm}\right)\right\|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=2}^{4} \left\|\frac{a_j}{a_1}\right\|_C \cdot \|\varphi_{nm}\|_2 \leq q \|\varphi_{nm}\|_2 < \|\varphi_{nm}\|_2 .$$

Поэтому уравнение (41) также однозначно разрешимо, причем

$$\|A_{nm}^{-1}\| \leq (1-q)^{-1}, \quad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{42}$$

и его решение $\varphi_{nm}^*(t,\tau)$ может быть определено как предел итерационной последовательности (37), которая сходится в L_2 к своему пределу со скоростью

$$\|\varphi_{nm}^* - \varphi_{nm}^j\|_2 \leq \frac{q^{j+1}\|P_{nm} f\|}{1-q}, \quad \varphi_{nm}^0 = P_{nm} f, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{43}$$

Тогда в силу упомянутого выше следствия из монографии [8] приближенные решения $\varphi_{nm}^*(t,\tau)$ сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*(t,\tau)$ уравнения (40) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_{nm}^*\|_2 = \|(E - A_{nm}^{-1} P_{nm}\,\psi)(\varphi^* - P_{nm}\varphi^*)\|_2 .$$

С использованием операторов Бернштейна – Рогозинского и Фавара, исследованных в работе [9], путем рассуждений, аналогичных рассуждениям в одномерном случае, можно получить следующую оценку погрешности приближенного решения:

$$\|\varphi^* - \varphi_{nm}^*\|_2 = O\left\{ n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} \right\} . \tag{44}$$

Из соотношений (43) и (44) следует оценка (39), а из нее – соотношение (38).

Т е о р е м а 5. Если в условиях теоремы 4

$$j_0 = j_{опт} = \left[\!\left[\frac{1}{\ln q} \ln (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) - 1 \right]\!\right] , \tag{45}$$

то итерационный процесс (37) сходится к единственному решению φ^* уравнения (33) в том смысле, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \varphi_{nm}^{j_0} = \varphi^* , \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \varphi_{nm}^{j} \neq \varphi^* , \; j \neq j_0 , \tag{46}$$

причем

$$\|\varphi^* - \varphi_{nm}^{j_0}\|_2 = O\left\{ n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} \right\} = O(q^{j_0+1}) , \tag{47}$$

и оценки (47) будут неулучшаемыми в смысле

$$\|\varphi^* - \varphi_{nm}^{j_0}\|_2 \leq \|\varphi^* - \varphi_{nm}^{j}\| \quad (n, m = 1, 2, \ldots) .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правая часть формулы (39) будет минимальной, если

$$n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta} = q^{j+1} . \tag{48}$$

Обозначая через j_0 целую неотрицательную часть (относительно j) решения уравнения (48), получим соотношение (45), откуда и из (39) имеем оценки (47), которые с учетом (39) приводят к (46).

Вернемся к полному уравнению (22). Снова потребуем, чтобы

$$\left\| \frac{a_2}{a_1} \right\|_C + \left\| \frac{a_3}{a_1} \right\|_C + \left\| \frac{a_4}{a_1} \right\|_C \leq q < 1 .$$

Тогда уравнение (28) (или (28′)) и с.л.а.у. (30) эквивалентны уравнениям соответственно

$$\varphi + \frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi + \frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi + \frac{1}{a_1} T h \varphi = \frac{y}{a_1} = f , \tag{49}$$

$$\begin{gathered} \varphi_{nm} + P_{nm}\left(\frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi_{nm} + \frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi_{nm} + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi_{nm} \right) + \\ + P_{nm}\left\{ \frac{1}{a_1} T P_{nm}^{\xi\eta} (h \varphi_{nm}) \right\} = P_{nm} f . \end{gathered} \tag{50}$$

Введем обозначения:

$$A\varphi \equiv \varphi + \mathcal{U}\varphi , \; \mathcal{U}\varphi \equiv \frac{a_2}{a_1} S_1 \varphi + \frac{a_3}{a_1} S_2 \varphi + \frac{a_4}{a_1} S_{12} \varphi ,$$

$$A_{nm}\varphi_{nm} \equiv P_{nm} A\varphi_{nm} = \varphi_{nm} + P_{nm}\,\omega\varphi_{nm}\,,\ {}^{k}/_{a_1} = g\,.$$

Тогда уравнения (49), (50) перепишутся соответственно так:

$$A\varphi + Tg\varphi = f \qquad (\varphi, f \in L_2)\,, \tag{5I}$$

$$A_{nm}\varphi_{nm} + P_{nm}^{t\tau}\, T P_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) = P_{nm} f\,. \tag{52}$$

Из сказанного выше в этом пункте

$$A_{nm}^{-1} P_{nm} f \to A^{-1} f\ ,\ n\to\infty,\ m\to\infty,\ f\in C(\gamma_1\times\gamma_2)$$

в $L_2 = L_2(\gamma_1\times\gamma_2)$, т.е. имеет место сильная сходимость последовательности $A_{nm}^{-1}P_{nm} : C\to L_2$ со скоростью

$$\| A^{-1}f - A_{nm}^{-1} P_{nm} f\|_2 \le d_{11} M\cdot(n^{-2-\alpha} + m^{-\ell-\beta})\,, \tag{53}$$

где $a_\ell\ (\ell=\overline{1,4})$, $y\in H_{\alpha,\beta}^{(\tau,\ell)}$ $(\tau,\ell\ge 0\ ,\ 0<\alpha,\beta\le 1)$,

$M = H_t(\varphi_{t^\tau}^{(\tau)};\alpha) + H_\tau(\varphi_{\tau^\ell}^{(\ell)};\beta)$ при $\alpha<1, \beta<1$;

$M = Z_t(\varphi_{t^\tau}^{(\tau)}) + Z_\tau(\varphi_{\tau^\ell}^{(\ell)})$ при $\alpha=1, \beta=1$;

$M = H_t(\varphi_{t^\tau}^{(\tau)};\alpha) + Z_\tau(\varphi_{\tau^\ell}^{(\ell)})$ при $\alpha<1, \beta=1$;

$M = Z(\varphi_{t^\tau}^{(\tau)}) + H_\tau(\varphi_{\tau^\ell}^{(\ell)};\beta)$ при $\alpha=1, \beta<1$.

Уравнения (5I), (52) можно записать в следующем эквивалентном виде соответственно:

$$U\varphi \equiv \varphi + A^{-1}Tg\varphi = A^{-1}f\ ,$$

$$U_{nm}\varphi_{nm} \equiv \varphi_{nm} + A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau}\, T P_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) = A_{nm}^{-1} P_{nm} f\,.$$

Для любого $\varphi_{nm}\in X_{nm}$ оценим норму разности $U\varphi_{nm} - U_{nm}\varphi_{nm}$:

$$\|U\varphi_{nm} - U_{nm}\varphi_{nm}\|_2 = \|A^{-1}Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1}P_{nm}^{t\tau}\,TP_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm})\|_2 \le$$

$$\le \|A^{-1}Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1}P_{nm}^{t\tau}\,Tg\varphi_{nm}\|_2 +$$

$$+ \|A_{nm}^{-1}P_{nm}^{t\tau}\,Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1}P_{nm}^{t\tau}\,TP_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm})\|_2\,.$$

Первое слагаемое с учетом (53) дает нам оценку

$$\| A^{-1} Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} Tg\varphi_{nm} \|_2 \le d_{12} M \cdot$$
$$\cdot (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \le d_{13} (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \cdot \| \varphi_{nm} \|_2 \quad .$$

Оценку для второго слагаемого получим с учетом (3I), (42) и с помощью результатов работ [I0, I3]:

$$\| A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} Tg\varphi_{nm} - A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} TP_{nm}^{\xi\eta}(g\varphi_{nm}) \|_2 =$$
$$= \| A_{nm}^{-1} P_{nm}^{t\tau} T(g - P_{nm}^{\xi\eta} g)\varphi_{nm} \|_2 \le$$
$$\le \| A_{nm}^{-1} \| \cdot \| P_{nm} \|_{C_{2\pi} \to L_{2\pi 2}} \cdot \| T \|_{L_2 \to C} \cdot \| \varphi_{nm} \|_2 \cdot$$
$$\cdot \max_{t,\tau} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0 \int_0 | g(t,\tau;\xi,\eta) - P_{nm}^{\xi\eta} g(t,\tau;\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \right\}^{1/2} \le$$
$$\le d_{14} (n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \cdot \| \varphi_{nm} \|_2 \quad , \varphi_{nm} \in X_{nm} \quad .$$

Тогда $\| u - u_{nm} \| = O(n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta})$, $u - u_{nm} : X_{nm} \to X$.

Теперь, используя теорему 7 гл.I монографии [8], можно показать, что имеет место [I]

Т е о р е м а 6. Пусть уравнение (28) однозначно разрешимо в пространстве L_2 при любой правой части $y \in L_2$ и выполнено условие (35). Тогда при достаточно больших n и m с.л.а.у. (30) также однозначно разрешима и приближенные решения $\varphi_{nm}^*(t,\tau)$ сходятся в среднем к точному решению $\varphi^*(t,\tau)$ уравнения (28) со скоростью

$$\| \varphi^* - \varphi_{nm}^* \|_2 = O(n^{-r-\alpha} + m^{-\ell-\beta}) \quad .$$

Л и т е р а т у р а

I. Г а б д у л х а е в Б. Г. Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I // Изв. вузов. Матем.- 197I.- № II.- С.33 - 44. .

[I] Здесь, как и выше, $a_j(\cdot,\cdot)(j=\overline{1,4})$, $f(\cdot,\cdot)$ и $h(t,\tau;\cdot,\cdot)$, $h(\cdot,\cdot;\xi,\eta) \in H_{\alpha,\beta}^{(r,\ell)}$ $(r \ge 0,\ \ell \ge 0,\ 0 < \alpha \le 1,\ \ 0 < \beta \le 1)$.

2. Г а б д у л х а е в Б. Г. Приближенное решение много - мерных сингулярных интегральных уравнений, I // Изв. вузов. Матем. - 1975. - № 7. - С.30 - 41; II, 1976. - № 1. - С.30 - 41.

3. Г а б д у л х а е в Б. Г. Приближенное решение сингу - лярных интегральных уравнений методом механических квадратур // ДАН СССР. - 1968. - Т.179. - № 2. - С.260 - 263.

4. М и х л и н С. Г. Сингулярные интегральные уравнения // УМН. - 1948. - Т.3. - Вып. 3. - С.29 - 112.

5. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с.

6. Г а б д у л х а е в Б. Г., Д у ш к о в П. Н. Метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. - 1974. - № 12. - С.3 - 14.

7. Г а б д у л х а е в Б. Г. Квадратурно-итерационный метод решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений// Изв. вузов. Матем. - 1974. - № 11. - С.3 - 15.

8. Г а б д у л х а е в Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во КГУ, 1980. - 232 с.

9. К и р о в Г. Х. Върху апроксимацията на функции и сингулярни интеграли с обобщени суми: Дис. ... канд.физ.-мат.наук.- София, 1975. - 110 с.

10. Н а т а н с о н И. Н. Конструктивная теория функций. - М.: Гостехиздат, 1949. - 688 с.

11. С т е ч к и н С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР, сер. матем. - 1951. - Т.15.

12. Г а б д у л х а е в Б. Г. Решение операторных уравне - ний методом уточняющих итераций // Изв. вузов. Матем. - 1974. - № 5. - С.66 - 80.

13. Г а б д у л х а е в Б. Г., Д у ш к о в П. Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого ро - да // Изв. вузов. Матем. - 1973. - № 7. - С.12 - 24.

14. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

15. Г а б д у л х а е в Б. Г. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов, I // Изв. Матем. ин-т при Българск. АН. - София, 1970. - Т.2. - С.181 - 196.