П. Н. Иваньшин, Алгебры функций на группоиде слоения, порожденного локально свободным действием коммутативной группы Ли, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 63–68

П.Н. Иваньшин

АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ НА ГРУППОИДЕ СЛОЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫМ ДЕЙСТВИЕМ КОММУТАТИВНОЙ ГРУППЫ ЛИ

Аннотация

В статье исследуются слоения, порожденные локально свободным действием коммутативной группы Ли, допускающие интегрируемую связность Эресмана, инвариантную относительно действия группы. Строятся инварианты такого слоения с помощью алгебр функций на его группоиде.

Abstract

P.N. Ivanshin **Function algebras on groupoid of foliation generated by locally free action of commutative Lie group**

In this article we consider a foliation generated by a locally free action of commutative Lie group, which admits an invariant integrable Ehresmann connection, and construct invariants of this foliation with the use of algebras of functions on the groupoid of this foliation.

Рассмотрим многообразие M со слоением F, образованным орбитами локально свободного действия коммутативной группы Ли H. Действие H индуцирует локально свободное действие универсальной накрывающей $\widetilde{H}$, $\tilde{g}p = \rho(\tilde{g})p$, где $\rho : \widetilde{H} \to H$ — универсальное накрытие, причем орбиты этих действий совпадают. Поэтому, мы в дальнейшем будем предполагать, что $H \cong \mathbb{R}^n$. Предположим еще, что на M задана интегрируемая связность Эресмана, инвариантная относительно действия группы H.

Пусть G — группоид гомотопических классов слоевых путей в L с фиксированными началом и концом, проекции на начало и конец пути будем обозначать s и $r : G(L) \to L$ [1]. Рассмотрим множество функций $C^{\infty}_{\infty}(G)$, всюду ограниченных, равномерно непрерывных и бесконечно дифференцируемых (подпространство пространства функций Бора [2]). Пусть, далее на $G^x = \{\gamma \in G | s(\gamma) = x\}$, которое изоморфно $\mathbb{R}^n$, задана система конечных мер λ^x, инвариантная относительно действия H, то есть для любого борелевского множества Ω $\int\limits_{\Omega} d\lambda^{hx}(h(u)) = \int\limits_{\Omega} d\lambda^x(u)$. Определим операции умножения и сопряжения на $C^{\infty}_{\infty}(G)$ следующим образом: $(f * g)(\gamma) = \int\limits_{G^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma_1)g(\gamma_1^{-1})d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma_1)$, $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$. Эти операции корректно определены, если предположить, что для любой $f \in C^{\infty}_{\infty}$ функция $\int\limits_{G^x} f d\lambda^x$ непрерывно дифференцируема, равномерно непрерывна и ограничена [1].

Определим норму на этом пространстве как

$$\|f\|_L = \sup_{h,h' \in H} \int\limits_{G^x} \int\limits_{G^x} |f(u^{-1}v)|^2 d\lambda^x(hu) d\lambda^x(h'v),$$

$$\|f\| = \sup_{L \in F} \|f\|_L$$

В этой формуле hu $(h'v)$ есть класс пути с началом в $s(u) = x$ $(s(v) = x)$ и концом в $hr(u)$ $(h'r(v))$ (напомним, что группа H предполагается односвязной). Поскольку $G^x \cong hG^y$, это определение корректно. Замыкание $C^{\infty}_{\infty}(G)$ по норме, определенной выше, образует пространство $B_r(G)$, которое является алгеброй при условии корректности задания операций свертки и сопряжения, определенных выше.

Заметим, что алгебра $C^*_r(G)$, определенная в [3], есть подмножеств в $B_r(G)$ (но не подалгебра).

Теперь определим многозначное соответствие между группоидами следующим образом. Действие группы на слое L_1 продолжается до действия H на $G(L_1)$, $h([\beta]) = [h\beta]$. Обозначим через H_1 подгруппу изотропии элемента $\alpha \in G^x$ (так как группа коммутативна и каждый слой есть орбита действия группы, то H_1 есть подгруппа изотропии любого элемента из L_1, а, следовательно и из $G(L_1)$).

Пусть L_2 — другой слой слоения F. Возьмем точки $x \in L_1$, $y \in L_2$. Определен изоморфизм $\mathfrak{A} : G^x \leftrightarrow G^y$, который порожден связностью Эресмана. Именно, пусть путь γ соединяет x и y, δ — представитель $\alpha \in G^x$. Тогда по определению связности Эресмана γ, δ определяют прямоугольник $\Pi : [0,1] \times [0,1] \to M$, $\Pi(t,0) =$

$\gamma(t), \Pi(0, s) = \delta(t)$. Положим $\mathfrak{A}([\delta]) = [\Pi(1, s) : [0,1] \to L_2]$, и из свойств связности Эресмана следует, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора γ и представителя класса α. Сопоставим каждому $\alpha \in G^x$ подмножество $T(\alpha) = \{h\mathfrak{A}(\alpha) | h \in H_1\}$. Аналогично, каждому $\beta \in G^y$ сопоставим $T'(\beta) = \{h\mathfrak{A}^{-1}(\beta) | h \in H_2\}$, где H_2 — подгруппа изотропии $\beta \in G^x$.

Введем на группоиде $G(L_1)$ отношение эквивалентности $\sim$, порожденное отношением $\equiv$: $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1, \alpha_2 \in T'(\beta)$ для некоторого β.

Заметим, что это отношение можно рассматривать для произвольной пары слоев.

Пусть $L_1 \subset M$ — некоторый фиксированный слой. Рассмотрим банахово пространство $B_r(L_1)$, состоящее из функций, полученных ограничением функций из пространства $B_r(G)$ на $G(L_1)$. Для любого слоя L_2 обозначим через A_{12} подпространство функций из $B_r(L_1)$ постоянных на классах отношения эквивалентности, введенного выше. Пусть $B_{r,e}(L_1) = \bigcap_{i \in I} A(L_i)$, где пересечение берется по всем слоям слоения.

Зафиксируем на P метрику. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x \in P$ обозначим через $U_\varepsilon(x)$ шар радиуса ε с центром в x. Пусть $B_{r,e,x}(L) = \bigcap_{i \in I} A(L_i)$, где пересечение берется по всем слоям слоения, пересекающим $U_\varepsilon(x)$. Обозначим, через $B_\varepsilon(G)$ множество функций из $B_r(G)$, ограничение которых на каждый группоид $G(L)$ принадлежит $B_{r,e,x}(L)$ для всех $x \in P \cap L$.

Для некоторого фиксированного $x \in P$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $B_{\varepsilon,x}$ множество функций из B_r, ограничения которых на группоиды слоев, проходящих через $y \in U_\varepsilon(x)$ принадлежат $B_{r,e,y}(L)$. Эти определения корректно задают подалгебры $B_r(G)$ (если на $B_r(G)$ определена структура алгебры с помощью операции свертки) в силу того, что если $f(h\gamma) = f(\gamma)$, $g(h\gamma) = g(\gamma)$, то

$$(f * g)(h\gamma) = \int f((h\gamma)\gamma_1) g(\gamma_1^{-1}) d\lambda^{s(h\gamma)}(\gamma_1) =$$
$$= \int f(h(\gamma\gamma')) g(h(\gamma'^{-1})) d\lambda^{s(h\gamma)}(h\gamma') = \int f(\gamma\gamma') g(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') =$$
$$= (f * g)(\gamma),$$

где $\gamma_1 = h\gamma'$.

Пусть группа H компактна, система мер на группоиде является системой Хаара и удовлетворяет условию инвариантности относительно действия H. Обозначим подалгебры $C_r^*(G)$ [3], построенные аналогично $B_{\varepsilon,x}$ и B_ε через $C_{\varepsilon,x}^*$ и C_ε^*. В этом случае функция, удовлетворяющая свойству $f((h)^k\gamma) = f(\gamma)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, может быть нетривиальной функцией с компактным носителем.

Первым естественным вопросом является вопрос о сходимости $B_{\varepsilon,x}$ к $B_r(G)$ и о том, много ли точек, в которых сходимости нет. Частично ответом может служить следующее

Предложение 1. *Пусть $P' = \{p \in P \mid \forall\varepsilon > 0\, \exists q \in U_\varepsilon(p) : H_q \neq H_p\}$. Предположим, что $P \backslash P'$ есть дизъюнктное объединение счетного семейства множеств P_i таких, что $\cup_{i\in I}\partial P_i \subset P$ нигде не плотно, и для любого $i \in I$ существует константа $C_i \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $h \in H_{P_i}$, и $x, y \in P_i$ имеет место неравенство $d(hx, hy) < C_i d(x, y)$. Тогда множество точек, для которых $B_{\varepsilon,x} \not\to B_r(G)$ $(\varepsilon \to 0)$, нигде не плотно.*

Второй вопрос есть вопрос о сходимости фильтрации $B_{r,\varepsilon}$ к $B_r(G)$.

Предложение 2. *Необходимые условия сходимости $B_{r,\varepsilon}$ к $B_r(G)$ $(\varepsilon \to 0)$ суть:*

1) *Для любого $x \in P$, $B_{\varepsilon,x} \to B_r(G)$ при $\varepsilon \to 0$;* 2) *Для любых двух слоев множества их пересечений с P отделимы в P.*

Доказательство. Первое условие необходимо поскольку $B_{r,\varepsilon} = \bigcap\limits_{x\in P} B_{r,\varepsilon,x}$. В силу того, что группоид слоения есть группоид Ли, функции из $B_r(G)$ должны отделять точки, откуда следует необходимость второго условия. $\square$

Пример 1. Слоение Зейферта на фактор-пространстве $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $(z, t) \sim (e^{2\pi i/k}z, t + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это слоение порождено действием группы $\mathbb{S}^1$ [5], связность Эресмана задается распределением $dz = 0$. Множество точек, в которых $B_{\varepsilon,x} \not\to B_r(G)$ $(\varepsilon \to 0)$ пусто, и выполняются оба условия из Предложения 2.

Пример 2. Слоение на цилиндре $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, заданное векторным полем $V_{(x,\alpha)} = (x, 1)$. Связность задана образующими цилиндра. Множество особых точек состоит из одной точки. Условие 1) Предложения 2, соответственно, не выполняется.

Пример 3. Слоение на торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, заданное с помощью векторного поля (a, b), $a/b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Связность задана горизонтальными кривыми — параллелями. Предложение 1 удовлетворено, поскольку множество точек, для которых нет сходимости, пусто. Условие 1) Предложения 2 также удовлетворено, но условие 2) не имеет места, соответственно $B_{\varepsilon,x} \not\to B_r(G)$ $(\varepsilon \to 0)$.

Предложение 3. *Пусть M — многообразие со слоением , порожденным локально свободным действием тора. Предположим, что F допускает инвариантную интегрируемую связность Эресмана, и существует трансверсальное многообразие P, причем множество P' (см. Предложение 1) конечно. Пусть еще P существует метрика, инвариантная относительно группы изотропии H_P многообразия P. Пусть наконец, $C^*_{r,\varepsilon} \to C^*_r$ $(\varepsilon \to 0)$.*

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta < \varepsilon/2$

$$\tilde{K}_0(C^*_r(G)) \cong \tilde{K}_0(C^*_{r,\delta}),$$

Доказательство. Утверждение следует из непрерывности функтора $\tilde{K}_0$ [6]. По предположению $C^*_r(G)$ есть прямой предел последовательности алгебр $(C^*_{r,1/k}, i_k)_{k=1}^{\infty}$, где $i_k : C^*_{r,1/k} \to C^*_{r,1/(k+1)}$ — вложение. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $\varepsilon', \varepsilon'' < \varepsilon$, $C^*_{r,\varepsilon'} \cong C^*_{r,\varepsilon''}$, причем изоморфизм гомотопен вложению.

Рассмотрим нормальные окрестности $U(x_i)$ метрики g [7]. Предположим далее, что $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x_i \in P'$, $U_\varepsilon(x_i) \subset U(x_i)$. Поскольку посредством отображения exp окрестность $N(0,\varepsilon) \subset T_{x_i}P$ диффеоморфно переходит в $U_\varepsilon(x_i)$, будем считать для $y \in U_\varepsilon(x_i) \setminus x_i$, что $y = ty'$, где $y' \in \partial(U_\varepsilon(x_i))$; y определен однозначно в силу инвариантности метрики на P относительно H_P.

Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ фиксировано. Определим такой изоморфизм $\phi : G(M) \cong G(M)$, что $\phi(G(Sat(U_{\varepsilon'}(x_i)))) = G(Sat(U_{\varepsilon''}(x_i)))$, где ε', $\varepsilon'' < \varepsilon/2$, и $\phi|_{G \setminus Sat(U_\varepsilon(x_i))} = id$. Пусть $\varepsilon'' < \varepsilon'$. По доказанному выше можно рассматривать $\gamma \in G(Sat(U_{\varepsilon''}(x_i)))$ как $t\gamma_0$, где $\gamma_0 \in G(\partial(U_{2\varepsilon'}(x_i)))$. Отображение $\phi : G(M) \to G(M)$, определенное следующим образом: $\phi|_{G(U_{2\varepsilon'}(x_i))} : t\gamma_0 \mapsto \psi(t)\gamma_0$ $(\gamma_0 \in G(\partial U_\varepsilon(x_i)))$, где $\psi(t) = (2\varepsilon' - \varepsilon'')/\varepsilon' t + 2\varepsilon'' - 2\varepsilon'$ при $t \in [\varepsilon', 2\varepsilon']$, $\psi(t) = \varepsilon''/\varepsilon' t$ при $t \in [0, \varepsilon']$, $\phi(\gamma) = \gamma$, где $\gamma \in G \setminus G(U_{2\varepsilon'}(x_i))$, дает искомый изоморфизм. Заметим, что ϕ есть непрерывное отображение, гомотопное тождественному. Тогда $\overline{\phi} : C^*_{r,\varepsilon'} \to C^*_{r,\varepsilon''}$, $\overline{\phi}(f)(\gamma) \equiv f(\phi(\gamma))$ есть изоморфизм C^*-алгебр, гомотопный вложению $i : C^*_{r,\varepsilon'} \to C^*_{r,\varepsilon''}$. Таким образом, в силу гомотопической инвариантности функтора $\tilde{K}_0$ [6], последовательность групп $(\tilde{K}_0(C^*_{r,1/k}), i_{k*})_{k=1}^{\infty}$ стабилизируется при $k \to \infty$. Отсюда следует утверждение. □

Список литературы

[1] Landsman N.P., Ramazan B. *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids*// math-ph/0001005. – 1999. – 33 pg.

[2] Левитан Б.М. *Почти-периодические функции*// М. ГИТТЛ – 1953. – 496 с.

[3] Moore C. C., Schochet C. *Global analysis on foliated spaces*// Springer-Verlag – 1988. – 337 pg.

[4] Диксмье Ж., *C^*-алгебры и их представления*//М. Наука – 1974. – 400 с.

[5] Lee K. B., F. Raymond *Seifert manifolds*// math-ph/0108188. – 1999. – 61 pg.

[6] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов*// М. Факториал – 1997. – 336 с.

[7] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии, Т. 1*// М. Наука – 1981. – 344 с.

Адрес: *Научно-исследовательский институт математики и механики имени Н.Г. Чеботарева, отдел геометрии, 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17*

Address: *N.G.Chebotarev Scientific-Research Institute of Mathematics and Mechanics of Kazan State University, Geometry department, Universitetskaya, 17, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Pyotr.Ivanshin@ksu.ru*