В. А. Мерзляков, К упругопластическому деформированию оболочек вращения переменной в двух направлениях жесткости, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 81–86

В.А.Мерзляков

К УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМУ ДЕФОРМИРОВАНИЮ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ ЖЕСТКОСТИ

В [I, 2] исследовано неосесимметричное упругопластическое напряженно-деформированное состояние оболочек вращения переменной жесткости в двух направлениях. Разрешающая система уравнений получена в этих работах на основе комбинации метода интегральных соотношений [3] и метода переменных параметров упругости. В отличие от [I, 2] будем использовать для линеаризации физических уравнений метод упругих решений, который хоть и замедляет сходимость итерационного процесса, однако позволяет получить менее громоздкую систему дифференциальных уравнений, оператор которой не зависит от напряженно-деформированного состояния. Это дает возможность существенно сократить время решения упругопластических задач теории тонких оболочек на ЭВМ.

Рассмотрим упругопластическое напряженно-деформированное состояние оболочки со срединной поверхностью в виде поверхности вращения и переменной в двух координатных направлениях толщиной. Задача решается на основе гипотез Кирхгофа – Лява в геометрически линейной постановке. Предполагается, что в процессе нагружения элементы оболочки деформируются по траекториям, мало отличающимся от прямолинейных.

Положение точки срединной поверхности оболочки определим длиной дуги меридиана S и центральным углом θ в параллельном круге. Расстояние произвольной точки оболочки от срединной поверхности обозначим через ζ.

Связь между усилиями N_S, N_θ, S, моментами M_S, M_θ, H и деформациями срединной поверхности запишем

$$\begin{gathered} N_S = D_N(\varepsilon_S + \nu_0 \varepsilon_\theta + P_S), (S \rightleftarrows \theta); \; S = 1/2\,(1-\nu_0) D_N(\varepsilon_{S\theta} + P); \\ M_S = D_M(\varkappa_S + \nu_0 \varkappa_\theta + I_S), (S \rightleftarrows \theta); \; H = (1-\nu_0) D_M(\varkappa_{S\theta} + I); \\ D_N = 2\,G_0 h/(1-\nu_0); \; D_M = G_0 h^3/[6(1-\nu_0)]. \end{gathered} \tag{I}$$

Здесь D_N, D_M – жесткости при растяжении (сжатии) и изгибе, G_0, ν_0 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона при температуре естественного ненапряженного состояния T; $h = h(S,\theta)$ – толщина оболочки; P_S, P_θ, P, I_S, I_θ, I – интегральные характеристики, учитывающие тепловые и пластические деформации, а также зависимость механических свойств материала от температуры [4, 5].

Для конкретизации интегральных характеристик используем соотношения теории малых упругопластических деформаций, линеаризированные методом упругих решений. В качестве разрешающих функций выберем переменные [4]

$$N_r, N_z, \hat{S}, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s, \tag{2}$$

где r – радиус параллельного круга; z – расстояние по оси вращения; N_r, N_z – радиальное и осевое усилия в сечении $s = const$; $\hat{S}$ – приведенное сдвигающее усилие; M_s – меридиональный изгибающий момент; u_r, u_z – радиальное и осевое перемещения; v – окружное перемещение; ϑ_s – меридиональный угол поворота.

Использование линейных геометрических уравнений, уравнений равновесия в форме В.В.Новожилова и соотношений термопластичности (I) позволяет, следуя процедуре, подробно описанной в [3, 4], получить для выбранных разрешающих функций (2) систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\partial Y / \partial s = P(s,\theta) Y + F(s,\theta), \tag{3}$$

где $Y(s,\theta) = \{y_i(s,\theta)\}$ – вектор разрешающих функций (2); $P(s,\theta) = \{p_{ij}(s,\theta)\}$ – дифференциальный оператор; $F(s,\theta) = \{f_i(s,\theta)\}$ – вектор правых частей; i, j = I,2, ..., 8. Компоненты $p_{ij}(s,\theta)$ и $f_i(s,\theta)$ не приводятся ввиду их громоздкости.

Специфика системы (3) состоит в том, что дифференциальный оператор $P(s,\theta)$ не зависит от напряженно-деформированного состояния, а члены, учитывающие тепловые и пластические деформации, а также зависимость механических свойств материала от температуры, входят лишь в $F(s,\theta)$.

Систему уравнений (3) будем решать методом последовательных приближений, в каждом из которых интегральные характеристики P_s, P_θ, P, I_s, I_θ, I известны из предыдущего приближения. Поэтому разложение в виде тригонометрических рядов этих характеристик, заданных нагрузок и искомых функций

$$y_i(s,\theta) = \sum_{n=0}^{N} y_{in}(s) \cos n\theta, \quad i = 1,2,4,5,6,8; \tag{4}$$

$$y_i(s,\theta)=\sum_{n=0}^{N} y_{in}(s)\sin n\theta\ ,\ i=3,7\ ,$$

дает возможность, используя мето интегральных соотношений, получить в каждом последовательном приближении систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dZ/ds = A(s)Z + \Phi(s)\ , \qquad (5)$$

где $Z=\{y_{in}\}=\{y_{10},\dots,y_{80};y_{11},\dots,y_{81};\dots;y_{1N},\dots,y_{8N}\}$;

$\Phi=\{f_{in}\}$; $i=1,2,\dots 8$; $n=0,1,\dots,N$.

На торцах оболочки для амплитудных значений разрешающих функций или их линейных комбинаций должны выполняться граничные условия

$$D_1 Z = b_1 \quad \text{на торце} \quad s=s_0\ , \qquad (6)$$

$$D_2 Z = b_2 \quad \text{на торце} \quad s=s_N\ , \qquad (7)$$

где D_1, D_2 – матрицы граничных условий на торцах оболочки; b_1, b_2 – векторы амплитудных значений разрешающих функций на торцах.

Системы (5), в отличие от получаемых в случае постоянных по окружности толщин [4, 5], не распадаются на ряд подсистем восьмого порядка, а имеют размерность 8x (N + I). В каждом последовательном приближении эти системы сводятся к ряду задач Коши, которые интегрируем методом Рунге – Кутта с дискретной ортогонализацией и нормализацией частных решений по С.К.Годунову. Решение краевой задачи (5) – (7) разыскивается в виде

$$Z=\sum_{q=1}^{m} C_q Z_q + Z^*\ , \qquad (8)$$

где m = 4x (N + I); Z_q – линейно независимые решения задач Коши для однородной системы уравнений (5) (Φ (s) = 0) с начальными условиями для заданных разрешающих функций на левом краю, равными нулю, а для остальных – поочередно равными столбцам единичной матрицы; Z^* – решение задачи Коши для системы (5) с начальными условиями, совпадающими с заданными граничными условиями на левом торце, а для остальных – равными нулю; C_q – постоянные интегрирования, определяемые из условия удовлетворения решения правым граничным условиям (7). При этом используется независимость оператора A от напряженно-деформированного состояния,что позволяет вычислять этот оператор и $z^0=\sum_{q=1}^{m} C_q z_q$ лишь в первом приближении используемого метода упругих решений. Таким образом, в первом приближении необходимо интегрировать 4 (N + I) + I задач Коши, а во всех последующих – лишь одну. Эти особенности позволяют существенно сократить время решения задачи на ЭВМ.

На основе приведенной методики разработан пакет прикладных программ для ЕС ЭВМ. Для проверки правильности методики и пакета прикладных программ рассмотрим упругое состояние цилиндрической оболочки переменной по окружности толщины, для которой в монографии [3] приводится точное решение. Материал оболочки – сплав ЭИ-395 [4]; радиус R = 0,3 м; длина образующей l = 0,6 м; закон изменения толщины $h(\theta)$= (I + 0,3 $\cos\theta$)10^{-2} м. Оболочка находится под действием нормальной поверхностной нагрузки q_ζ =$4\cdot 10^6$ (I + 0,5 $\cos\theta$) $\sin \pi/l\, s$, на ее торцах выполняются граничные условия $N_z = M_s = u_\nu = \vartheta = 0$. Симметрия геометрии, нагрузки и условий закрепления позволяет рассматривать четверть оболочки. Количество интервалов по толщине оболочки принималось равным K_ζ= 2, по окружности K_θ = 36 (0$\leq \theta \leq 36$) и вдоль образующей K_s = 30 (0 $\leq s \leq l/2$). Искомые функции представлялись пятью первыми гармониками (N = 4). Значения прогиба w , окружного усилия N_θ и окружного напряжения на внешней поверхности σ_θ при s = 0,3 м и θ = 0 представлены в таблице.

Т а б л и ц а

Величина	Решение по предложенной методике	Точное решение
$w\cdot 10^4$, м	5,474	5,558
$N_\theta \cdot 10^{-3}$, Н/м	I767	I798
$\sigma_\theta^+ \cdot 10^{-5}$, Па	I422	I408

Приведенные данные позволяют судить о достоверности полученных результатов.

Для оценки преимуществ, которые дает неизменность общего решения системы (5), сопоставим количество машинного времени, необходимого для решения задачи по разработанной методике с использованием неизменности общего решения и без использования. Рассмотрим коническую оболочку с постоянной толщиной h = 0,00I м; дли –

ной образующей l =0,2 м и радиусами торцов $r_0=(0,1-0,05\sqrt{3})$ м и $r_N=(0,1+0,05\sqrt{3})$ м. Торцы оболочки шарнирно закреплены $M_s = u_r = u_z = v = 0$, материал тот же. Температура оболочки изменяется, согласно закону $T=(323+25\cos\theta)K$, $T_0=273K$. Параметры разбивки $K_\zeta = 4$, $K_\theta = 18$, $K_s = 50$, $N = 1$. Заданная максимальная относительная погрешность, с которой получено упругопластическое решение, $\delta = 0{,}05$; при такой точности задача сходится за 14 приближений. Получение результатов с запомненным общим решением требует требует $t = 628$ с и без запомненного общего решения $t = 1279$ с машинного времени на ЭВМ ЕС-1040. Отметим, что пакет программ [4, 5] дает возможность решить эту задачу за $t = 405$ с. Сопоставление этих данных дает возможность сделать общий вывод о существенной эффективности алгоритмов, использующих неизменность общего решения разрешающей системы даже при весьма малом количестве членов тригонометрических рядов. В задачах, где в решении удерживается большее число членов, разница в затратах машинного времени еще существеннее.

Для проверки,как влияет более медленная,по сравнению с методом переменных параметров упругости,сходимость метода упругих решений на количество машинного времени,решим задачу с развитыми областями пластичности. Рассмотрим жестко защемленную по торцам цилиндрическую оболочку с радиусом $R = 0{,}3$ м, толщиной $h = 0{,}01$ м, длиной образующей $l = 1{,}2$ м, изготовленную из того же материала. Предполагаем, что при температуре $T_0 = 273$ К оболочка находится в естественном ненапряженном состоянии, а затем подвергается пропорциональному нагружению внутренним давлением в условиях равномерного нагрева. В конце нагружения и нагрева $q_\zeta = 2\cdot 10^6\cdot(2+\cos\theta)$ Па, $T = 423K$. Параметры разбивки: $K_\zeta = 4$, $K_\theta = 18$, $K_s = 30$, $N = 3$, $\delta = 0{,}03$. Получение упругопластического решения по пакету программ [4, 5] потребовало в этой задаче 22 приближений и $t = 493$ с машинного времени, а при использовании основанной на методике [1] программы – 10 приближений и $t = 3569$ с машинного времени.

На основании проведенных расчетов можно заключить, что разработанная методика определения термоупругопластического напряженно-деформированного состояния оболочек вращения переменной в двух направлениях жесткости позволяет эффективно решать задачи рассматриваемого класса.

Литература

1. Белевцова Н.Л. Исследование влияния истории нагружения на напряженное состояние оболочек вращения переменной жесткости в двух направлениях // Прикл. механика. - 1986. - Т.22. - № 4. - С.109 - 112.

2. Берлянд В.И. К расчету упругопластических деформаций в оболочках вращения при неосесимметричном нагружении // Прикл. механика. - 1978. - Т.14. - № 12. - С.68 - 75.

3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. - Киев: Наукова думка, 1981. - 544 с. - (Методы расчета оболочек: В 5-ти т. - Т.4).

4. Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. - Киев: Наукова думка, 1981. - 296 с. - (Методы расчета оболочек: В 5-ти т. - Т.3).

5. Шевченко Ю.Н., Мерзляков В.А. Расчет термоупругопластического неосесимметричного деформирования оболочек вращения // Прикл. механика. - 1988. - Т.24. - № 5. - С.43-53.

О.Н.Попов, В.Н.Завьялов

РАСЧЕТ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ОПОРНЫМИ РЕБРАМИ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

В данной работе рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния гибких конструктивно-ортотропных пластин и пологих оболочек с опорными ребрами с учетом физической нелинейности.

Постановка задачи. Рассматривается система прямоугольных пластин и пологих оболочек, подкрепленных в продольном направлении дискретно расположенными призматическими ребрами жесткости, с постоянным поперечным сечением $h_p \times b_p$, эксцентриситетом e относительно срединной поверхности. Кроме того, панели могут быть подкреплены перекрестной системой второстепенных ребер. Толщина панелей h может ступенчато меняться в поперечном направлении.