А. М. Бикчентаев, Неравенство треугольника для некоторых пространств измеримых операторов, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 23–32

сингулярных интегралов и интегралов в смысле Адамара: Дисс. ... канд. физ.-мат.наук. - Баку, 1984. - 140 с.

4. Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций и функц. анализ. Казань, 1987. - Вып.6. - С.3 - 48.

5. Крикунов Ю. М. Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций// Краевые задачи теорий ф.к.п. Казань, 1962. - С.17 - 24.

6. Волохин В. А. Один класс сопряженных функций относительно особого интеграла в смысле Адамара // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1986. - С.30 - 32.

7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

8. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: КГУ, 1980. - 232 с.

А.М.Бикчентаев

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Интенсивное развитие теории некоммутативного интегрирования и ее многочисленные плодотворные приложения привели к необходимости исследования различных классов линейных метрических пространств, ассоциированных со следом или весом - наиболее общим аналогом интеграла на алгебре Неймана. Из них в числе важнейших F-нормированные идеальные пространства (F-НИП) измеримых операторов - некоммутативные аналоги классических функциональных F-НИП.

Поскольку в алгебре Неймана $\mathcal{M}$ операторное неравенство $|\mathcal{A}+\mathcal{B}|\leq|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|$ $(\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{M})$, вообще говоря, неверно, одним из существенных моментов в некоммутативной теории является проверка занимающего принципиальное место в аксиоматике F-НИП "неравенства треугольника" для функционала - претендента на роль F-нормы (см., например, [7, 14, 5, 8, 1, 2]).

В настоящей работе устанавливается инвариантность некоторых неравенств типа неравенства треугольника для идеального модуляра (заданного на измеримых операторах) ρ относительно отображения $\mathcal{A} \mapsto \rho(f(|\mathcal{A}|))$, где f – композиция операторно выпуклых функций на $[0,\infty)$ и $|\mathcal{A}| = (\mathcal{A}^*\mathcal{A})^{1/2}$. Этот результат позволяет получать новые конструкции некоммутативных F -НИП. В ряде случаев полученное неравенство позволяет ввести в F -НИП обладающую дополнительными полезными свойствами (например, s -однородностью) эквивалентную исходной F -норму.

I. <u>Терминология и обозначения</u>. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ, действующая в гильбертовом пространстве H, $\mathcal{M}_1$ – единичный шар в $\mathcal{M}$ и $\mathbb{1}$ – единица $\mathcal{M}$. Оператор в H (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется присоединенным к $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все проекторы из его спектрального разложения единицы $\{E_\lambda^{\mathcal{A}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ принадлежат $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{X}$ – некоторое семейство операторов в H, то через $\mathcal{X}^+$ будем обозначать множество положительных операторов из $\mathcal{X}$.

В [I4] введено множество $\mathcal{K}$ вполне измеримых (относительно τ) операторов, т.е. множество замкнутых плотно определенных операторов $\mathcal{A}$, присоединенных к $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию: $\tau(\mathbb{1}-E_\lambda^{|\mathcal{A}|}) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$. $\mathcal{K}$ замкнуто относительно перехода к сопряженному умножения на скаляр, сильного сложения и умножения операторов; оно является полным метризуемым топологическим векторным пространством относительно топологии сходимости по мере, которая задается F -нормой

$$\sigma_\tau(\mathcal{A}) \equiv \inf_{\lambda>0} \max\left\{\lambda, \tau(\mathbb{1}-E_\lambda^{|\mathcal{A}|})\right\}.$$

Линейное подпространство X в $\mathcal{K}$ назовем идеальным пространством на $\mathcal{M}$, если $\mathcal{A}^* \in X$ для любого $\mathcal{A} \in X$ и из $\mathcal{A} \in X$, $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $|\mathcal{B}| \le |\mathcal{A}|$ следует $\mathcal{B} \in X$.

Приведем с небольшими, применительно к нашей ситуации, изменениями некоторые сведения из монографий С.Ролевича [I2] и Ю.Муселяка [II], относящиеся к теории модулярных и F -нормированных пространств.

Определение. Идеальным модуляром на $\mathcal{K}$ называется отображение $\rho: \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющее условиям:

$(F1)$ $\rho(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = 0$;

$(F2)$ $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| \Rightarrow \rho(\mathcal{B}) \leq \rho(\mathcal{A})$;

$(F3a)$ $\rho(a\mathcal{A} + b\mathcal{B}) \leq \rho(\mathcal{A}) + \rho(\mathcal{B})$ для $a, b \geq 0, a + b = 1$;

$(F4)$ $\rho(\mathcal{A}^*) = \rho(\mathcal{A})$;

$(F5)$ если $\rho(\mathcal{A}) < \infty$, то $\rho(\lambda\mathcal{A}) \to 0$ $(\lambda \to 0+)$.

Ясно, что $\rho(\mathcal{A}) \geq 0$ для всех $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ (это следует из (F 2) при $\mathcal{B} = 0$) и множество

$$\mathcal{K}_\rho \equiv \{\mathcal{A} \in \mathcal{K} \mid \exists b > 0 : \rho(b\mathcal{A}) < \infty\}$$

есть идеальное пространство на $\mathcal{M}$. Идеальный модуляр ρ называется:

– s-выпуклым $(0 < s \leq 1)$, если он удовлетворяет условию $(F3b)$ $\rho(a\mathcal{A} + b\mathcal{B}) \leq a^s\rho(\mathcal{A}) + b^s\rho(\mathcal{B})$ для $a, b \geq 0, a^s + b^s \leq 1$;

– метризующим, если выполнено одно из двух эквивалентных условий –

$(F6)$ $\rho(\mathcal{A}_n) \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\rho(\varepsilon\mathcal{A}_n) \to 0$ $(n \to \infty)$;

$(F6a)$ $\rho(\mathcal{A}_n) \to 0 \Leftrightarrow \rho(2\mathcal{A}_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Идеальное пространство X называется F-нормированным идеальным пространством на $\mathcal{M}$, если F-норма $\|\cdot\|_X = \rho : X \mapsto [0, \infty)$ удовлетворяет условиям (F 1), (F 2), (F 4), (F 5) и

(F 3) $\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\|_X \leq \|\mathcal{A}\|_X + \|\mathcal{B}\|_X$ для $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in X$.

Очевидно, (F 3) влечет (F 6) для $\|\cdot\|_X$ и $\rho \equiv \|\cdot\|_X$ есть метризующий идеальный модуляр на $\mathcal{K}$ с $\mathcal{K}_\rho \equiv X$. F-норма $\|\cdot\|_X$ s-однородна $(0 < s \leq 1)$, если $\|\lambda\mathcal{A}\|_X = |\lambda|^s \|\mathcal{A}\|_X$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A} \in X$. Если ρ – идеальный модуляр на $\mathcal{K}$, то $X \equiv \mathcal{K}_\rho$ есть F-НИП на $\mathcal{M}$ с F-нормой

$$\|\mathcal{A}\|_X = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \rho(\varepsilon^{-1}\mathcal{A}) \leq \varepsilon\} \tag{1}$$

(соответственно с s-однородной F-нормой

$$\|\mathcal{A}\|_{X,s} = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \rho(\varepsilon^{-1/s}\mathcal{A}) \leq 1\} \tag{2}$$

для s -выпуклого ρ), при этом $\| A_n \|_X \to 0$ (соответственно $\| A_n \|_{X,s} \to 0$ для s -выпуклого ρ) тогда и только тогда, когда $\rho(\varepsilon A_n) \to 0 \ (n \to \infty)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть Φ - класс непрерывных строго возрастающих функций $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ с $f(0)=0$ и $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \infty$. Функция $f \in \Phi$ называется <u>s -выпуклой</u>, если можно указать такое число $0 < s \leq 1$, что $N(\lambda) \equiv f(|\lambda|^{1/s})$ есть N -функция, т.е. непрерывная выпуклая четная функция $N: \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$, подчиняющаяся условиям $\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda)/\lambda = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)/\lambda = \infty$. Например, s -выпуклыми являются вогнутые функции

$$f(\lambda) = \lambda^p,\ 0 < s < p < 1;\ g(\lambda) = \lambda / \ln(\lambda^{1/2} + e),\ s = 1/2 .$$

Введем класс

$$\Delta_2 \equiv \left\{ g \in \Phi \mid \exists C_g : g(2\lambda) \leq C_g\, g(\lambda) \text{ для всех } \lambda > 0 \right\}.$$

2. Для произвольного отображения $r: \mathcal{K} \mapsto [0,\infty]$ рассмотрим следующие условия $(0 < s \leq 1,\ p > 0)$:

$(F3c)$ $r(aA + bB) \leq \max\{ r(A), r(B) \}$ для $a, b > 0,\ a^s + b^s \leq 1$;

$(F3d)$ $r(A+B) \leq r(A) + r(B) + \min\{ r(A), r(B) \}$;

$(F5b)$ $r(aA) \leq a^p r(A)$ для $a > 1$.

Очевидно, $(F3) \Longrightarrow (F3d) \Longrightarrow (F6) \Longleftarrow (F5b)$, $(F3b) \Longrightarrow (F3c)$ и для r со свойством $r(aA) \leq r(A)$ при $0 \leq a < 1$ (которое выполнено, если r удовлетворяет $(F2)$) имеем $(F3) \Longrightarrow (F3a)$. Для r со свойством $(F\,I)$ имеем импликацию $(F3b) \Longrightarrow (F5)$.

Л е м м а I. Пусть для $r: \mathcal{K} \to [0,\infty]$ выполнено условие $(F5b)$. Отображение

$$A \mapsto r(A)^{\alpha} \tag{3}$$

удовлетворяет $(F3)$ с $\alpha = (1+p)^{-1}$, если r удовлетворяет $(F3a)$, и с $\alpha = s/p$, если r удовлетворяет $(F3c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из соотношений

$$r(A+B) \leq r(a^{-1}A) + r(b^{-1}B) \leq a^{-p} r(A) + b^{-p} r(B),$$

$$\min_{\substack{a,b>0\\ a+b=1}} \left\{ \lambda a^{-p} + \mu b^{-p} \right\} = \left(\lambda^{\frac{1}{1+p}} + \mu^{\frac{1}{1+p}} \right)^{1+p},$$

$$r(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \le \max\left\{r(a^{-1}\mathcal{A}), r(b^{-1}\mathcal{B})\right\} \le \max\left\{a^{-p} r(\mathcal{A}), b^{-p} r(\mathcal{B})\right\},$$

$$\min_{\substack{a,b>0\\ a^s+b^s\le 1}} \max\left\{\lambda a^{-p}, \mu b^{-p}\right\} = \min_{\substack{a,b>0\\ a+b\le 1}} \left\{\lambda a^{-\frac{p}{s}}, \mu b^{-\frac{p}{s}}\right\} = (\lambda^{\frac{s}{p}} + \mu^{\frac{s}{p}})^{\frac{p}{s}}$$

соответственно (здесь $\lambda, \mu > 0$ и можно убедиться, что $\min\limits_{\substack{a,b>0\\ a+b\le 1}}$ достигается при $a = \lambda^{\alpha}/(\lambda^{\alpha}+\mu^{\alpha})$).

Замечание 2. Если $r : \mathcal{K} \to [0,\infty]$ удовлетворяет ($F3d$), то в (3) можно взять $\alpha = \log_3 2$. Действительно, функция $f(t) = 1 + t^{\alpha} - (2+t)^{\alpha}$ обращается в нуль при t = I и строго возрастает на $[1,\infty)$, ибо ее производная $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha(2+t)^{\alpha-1}$ положительна на этом интервале. Теперь ясно, что $(2a+b)^{\alpha} \le a^{\alpha} + b^{\alpha}$ для $0 < a \le b$.

Далее всюду отображение $r : \mathcal{K} \to [0,\infty]$ удовлетворяет условиям ($F2$) и ($F4$). Для произвольной непрерывной функции $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ с $f(0) = 0$ отображение

$$\mathcal{A} \mapsto r(f(|\mathcal{A}|)) \tag{4}$$

удовлетворяет ($F4$), в частности,

$$r(f(\mathcal{A}^*\mathcal{A})) = r(f(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)) . \tag{5}$$

Для операторно монотонной $f \in \Phi$ отображение (4) удовлетворяет ($F2$) и наследует (при наличии у отображения r) каждое из свойств (FI), ($F3$), ($F3d$) [2, теорема 2.4]. Неравенства ($F3$), ($F3a$), ($F3b$), ($F3c$) и ($F3d$) достаточно потребовать на $\mathcal{K}^+$ [2, стр. 7].

Л е м м а 3 [I3, стр. 26I]. Если $T, S \in \mathcal{K}^+$ и $T \le S$, то существует такой оператор $E \in \mathcal{M}_1$, что $T = ESE^*$.

Т е о р е м а 4. Пусть r удовлетворяет еще и ($F3b$) с $0 < s \le 1$ и $f(t) = t^p$, $0 < p < 1$. Тогда отображение (4) удовлетворяет ($F3b$) с $q = s \cdot p$; если r удовлетворяет ($F6$), то и отображение (4) удовлетворяет ($F6$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу вышесказанного достаточно проверить неравенство

$$r((a\mathcal{A} + b\mathcal{B})^p) \le a^q r(\mathcal{A}^p) + b^q r(\mathcal{B}^p)$$

для $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{K}^+$ и $a,b>0$, $a^q+b^q\le 1$. Пусть операторы $T=a\mathcal{A}+b\mathcal{B}$ и $U, V\in\mathcal{M}_1$ такие, что $a\mathcal{A}=UTU^*$, $b\mathcal{B}=VTV^*$ (см. лемму 3), и U^*U+V^*V – носитель T. Тогда

$$\begin{aligned}
\tau((a\mathcal{A}+b\mathcal{B})^p) &= \tau(T^{\frac{p}{2}}(U^*U+V^*V)T^{\frac{p}{2}})\\
&= \tau(a^pa^{-p}T^{\frac{p}{2}}U^*UT^{\frac{p}{2}}+b^pb^{-p}T^{\frac{p}{2}}V^*VT^{\frac{p}{2}})\\
&\le a^q\tau(a^{-p}T^{\frac{p}{2}}U^*UT^{\frac{p}{2}})+b^q\tau(b^{-p}T^{\frac{p}{2}}V^*VT^{\frac{p}{2}})\\
&= a^q\tau(a^{-p}UT^pU^*)+b^q\tau(b^{-p}VT^pV^*)\\
&\le a^q\tau(a^{-p}(UTU^*)^p)+b^q\tau(b^{-p}(VTV^*)^p)\\
&= a^q\tau(\mathcal{A}^p)+b^q\tau(\mathcal{B}^p)
\end{aligned}$$

в силу ($F3b$) для τ, формулы (5) и операторного неравенства $UT^pU^*\le(UTU^*)^p$, которое установлено в [9] для оператора $T\in\mathcal{M}$ и распространяется на $\mathcal{K}^+$ стандартным переходом к пределу в топологии сходимости по мере.

Проверка для ($F6$) тривиальна. Теорема доказана. Введем $\Phi'=\{f\in\Phi\mid\exists$ операторно выпуклые $f_i\in\Phi(i=\overline{1,n}): f=f_1\circ f_2\circ\ldots\circ f_n\}$.

Т е о р е м а 5. Для функции $f\in\Phi'$ отображение (4) также удовлетворяет ($F2$), ($F4$) и наследует (при наличии у отображения τ) каждое из свойств (FI), ($F3a$), ($F3b$), ($F3c$), ($F5$), ($F6$).

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточно провести для операторно выпуклой $f\in\Phi$. Поскольку ($F4$) было установлено ранее (см. комментарий к формулам (4) и (5)), покажем ($F2$). Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in\mathcal{K}$ и $|\mathcal{B}|\le|\mathcal{A}|$, то по лемме 3 существует такой оператор $U\in\mathcal{M}_1$, что $|\mathcal{B}|=U|\mathcal{A}|U^*$. Тогда

$$f(|\mathcal{B}|)=f(U|\mathcal{A}|U^*)\le Uf(|\mathcal{A}|)U^*$$

в силу [IO, теорема 2.I (ii)], откуда с помощью ($F2$) и формулы (5) для отображения τ имеем

$$\tau(f(|\mathcal{B}|))\le\tau(Uf(|\mathcal{A}|)U^*)=\tau(f(|\mathcal{A}|)^{1/2}U^*Uf(|\mathcal{A}|)^{1/2})\le\tau(f(|\mathcal{A}|)).$$

Пусть $a, b > 0$, $a^s + b^s \le 1$ $(0 < s \le 1)$; тогда $a + b \le 1$ и

$$f(aA + bB) \le af(A) + bf(B) \qquad (A, B \in \mathcal{K}^+) \tag{6}$$

в силу операторной выпуклости функции f.

Наследственность свойств ($F3a$), ($F3b$), ($F3c$) для отображения (4) следует из ($F2$) и соответственно из ($F3a$), ($F3b$), ($F3c$) – для τ. Свойство ($F5$) для отображения (4) вытекает из ($F5$) для τ и (6) с $B = 0$. Для доказательства ($F6$) заметим, что по теореме 2.4 [10] $f(\lambda) = \lambda g(\lambda)$ для некоторой операторно монотонной функции $g \in \Phi$; тогда в силу вогнутости g имеем $f(2\lambda) = 2\lambda g(2\lambda) \le 4\lambda g(\lambda) = 4f(\lambda)$. Теперь $f(2A) \le 4f(A)$ для $A \in \mathcal{K}^+$; тем самым ($F6$) для отображения (4) следует из ($F6$) для τ и уже установленного свойства ($F2$) для (4).

Замечание 6:

а) мы также показали, что класс Φ' содержится в Δ_2;

б) в [6] введено следующее свойство:

$$(F6b) \qquad \exists C > 0 : \tau(2A) \le C\tau(A) \qquad (A \in \mathcal{K}),$$

также наследуемое отображением (4) для операторно монотонной или операторно выпуклой функции $f \in \Phi$.

Следствие 7. Пусть τ есть идеальный модуляр на $\mathcal{K}$ и функция $f \in \Phi'$. Тогда отображение (4) есть идеальный модуляр на $\mathcal{K}$ (со свойством ($F3b$), ($F3c$) или ($F6$), если τ обладает ($F3b$), ($F3c$) или ($F6$)).

Следствие 8. Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$ – F-НИП на $\mathcal{M}$ с s-однородной F-нормой и $0 < p < \infty$. Тогда

$$\langle X_p \equiv \{A \in \mathcal{K} \mid |A|^p \in X\}, \ \| |A|^p \|_X^{\min\{1, 1/p\}} \rangle$$

есть F-НИП на $\mathcal{M}$ с $s \cdot \min\{1, p\}$-однородной F-нормой.

Доказательство. Случай $0 < p < 1$ доказан ранее [2, теорема 2.4]; в силу операторной монотонности функции

$$\lambda \longmapsto \lambda^p \tag{7}$$

из теоремы 2.4 [10] следует, что для $1 < p \le 2$ функция (7) операторно выпукла. Теперь утверждение следствия 8 вытекает из следствия 7 и леммы 1, поскольку для $2 < p < \infty$ функция (7) принадлежит Φ'.

В частности, при $p > 1$ в силу неравенства

$(\alpha+\beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p+\beta^p)$ с $\alpha,\beta \geq 0$ имеем для $\mathcal{A},\mathcal{B} \in X_p$

$$\| \, |\mathcal{A}+\mathcal{B}|^p \, \|_X \leq 2^{p-1}(\| \, |\mathcal{A}|^p \|_X + \| \, |\mathcal{B}|^p \|_X) . \qquad (8)$$

Полагая $X = L_1(\mathcal{M},\tau)$, получаем новое доказательство неравенства треугольника для отображения $\mathcal{A} \mapsto \tau(|\mathcal{A}|^p)^{1/p}$; другие доказательства этого факта см., например, в [I4, 4, 5, 7,8]. В силу линейности следа τ из (8) имеем для операторов $\mathcal{A},\mathcal{B} \in L_p(\mathcal{M},\tau)^+$ полезное неравенство

$$\tau((\mathcal{A}+\mathcal{B})^p) \leq 2^{p-1}\tau(\mathcal{A}^p+\mathcal{B}^p) .$$

<u>Пример 9</u>. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$ - алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Следуя М.В.Келдышу [3], назовем $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ оператором конечного порядка, если $\mathcal{A} \in L_p(\mathcal{M},\tau)$ для некоторого $0<p<\infty$. Нижняя грань чисел p, при которых имеет место это соотношение, называется порядком оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $q(\mathcal{A})$. Очевидно, q удовлетворяет (F2) и (F4); имеет место неравенство

$$(F3e) \quad q(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \leq \max\{q(\mathcal{A}), q(\mathcal{B})\} ,$$

тем самым q удовлетворяет (F3), (F3c) и (F6). Ясно также, что не выполнены (FI), (F3b) и (F5b).

<u>Предложение I0</u>. Пусть отображение τ 0-однородно (т. е. $\tau(a\mathcal{A})=\tau(\mathcal{A})\ \forall a>0$) и функция $f \in \Phi$ операторно выпукла. Тогда отображение (4) наследует (при наличии у отображения τ) каждое из свойств (F3), (F3d), (F3e).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, 0-однородность и (F5) взаимно исключаются; 0-однородными являются, например, $q(\mathcal{A})$ из примера 9 и отображение $\mathcal{A} \mapsto \tau(supp|\mathcal{A}|)$. Для τ с (F3) и операторов $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{K}^+$, $a,b>0$ с $a+b=1$ имеем

$$\tau(f(\mathcal{A}+\mathcal{B})) = \tau(f(aa^{-1}\mathcal{A}+bb^{-1}\mathcal{B})) \leq$$

$$\leq \tau(af(a^{-1}\mathcal{A})+bf(b^{-1}\mathcal{B})) \leq \tau(af(a^{-1}\mathcal{A}))+\tau(bf(b^{-1}\mathcal{B})) \leq$$

$$\leq \tau(C_a f(\mathcal{A}))+\tau(C_b f(\mathcal{B})) = \tau(f(\mathcal{A}))+\tau(f(\mathcal{B})) ;$$

здесь воспользовались пунктом а) замечания 6. Для (F3d) и (F3e) доказательство аналогичное.

Пример II. В [I] автор исследовал некоммутативные обобщенные пространства Орлича $L_f \equiv L_f(\mathcal{M}, \tau)$ $(f \in \Phi)$, которые в частных случаях рассматривались многими исследователями. Относительно порождаемой (метризующим для $f \in \Delta_2$) идеальным модуляром $\mathcal{A} \to \rho_f(\mathcal{A}) \equiv \tau(f(|\mathcal{A}|))$ F-нормы (I) пространство L_f полно и непрерывно вложено в $<\mathcal{K}, \sigma_\tau>$. Более того, на L_f имеем оценку

$$\sigma_\tau \leq C \cdot \|\cdot\|_f \ , \ C = max\left\{1, f(1)^{-1}\right\},$$

$\|\cdot\|_f$ определена по (I). Действительно, для $g(\lambda) = f(1)^{-1} \cdot f(\lambda)$ получаем $g(\lambda) \leq Cf(C\lambda)$, тогда при $\varepsilon < \|\mathcal{A}\|_g$ имеем

$$\rho_f(C\varepsilon^{-1}\mathcal{A}) \geq C^{-1}\rho_f(\varepsilon^{-1}\mathcal{A}) > \varepsilon C^{-1},$$

тем самым $\|\mathcal{A}\|_f \geq \varepsilon C^{-1}$ и $\|\mathcal{A}\|_g \leq C\|\mathcal{A}\|_f$. Если $\mathcal{A} \in L_f^+$, то $g(a^{-1}\mathcal{A}) = \int_0^\infty g(a^{-1}\lambda)\,dE_\lambda^{\mathcal{A}}$, и при $a \geq \|\mathcal{A}\|_g$ получаем

$$a \geq \rho_g(a^{-1}\mathcal{A}) = \int_0^\infty g(a^{-1}t)\,d\tau E_t^{\mathcal{A}} \geq$$

$$\geq \int_\lambda^\infty g(a^{-1}t)\,dE_t^{\mathcal{A}} \geq g(a^{-1}\lambda) \cdot \tau(\mathbb{1} - E_\lambda^{\mathcal{A}}),$$

откуда $\tau(\mathbb{1} - E_\lambda^{\mathcal{A}}) \leq ag(a^{-1}\lambda)^{-1}$ для $\lambda > 0$ и $\sigma_\tau(\mathcal{A}) \leq max\{\lambda, a \cdot g(a^{-1}\lambda)^{-1}\}$. Осталось положить $\lambda = a$.

Из результатов [5, 7] следует, что: а) для выпуклой функции f пространство L_f является банаховым пространством относительно нормы (2) (при s = I); б) для вогнутой функции f отображение (3) (при α = I) есть F-норма на L_f, топологически эквивалентная F-норме $\|\cdot\|_f$. Для s-выпуклой функции $f \in \Phi$ идеальный модуляр ρ_f также s-выпуклый (по теореме 4) и в L_f можно ввести s-однородную F-норму по формуле (2); имеет место некоммутативный вариант теоремы С.Ролевича [II, стр.73]:

Пусть $f(\lambda) = g(\lambda^p)$, где g - выпуклая функция из Φ; $\varepsilon > 0$, $0 < p \leq 1$. Тогда множество

$$\{\mathcal{A} \in \mathcal{K} \mid \rho_f(\mathcal{A}) < \varepsilon\}$$

абсолютно p-выпукло.

Литература

I. Бикчентаев А. М. О некоммутативных функциональных пространствах // Функциональный анализ. Межвуз.сб.науч. тр. Ульяновск, 1987. - Вып.27. - С.33 - 43.

2. Бикчентаев А. М. Неравенство треугольника для F-нормированного пространства измеримых операторов. - Казань, 1988.- 18 С. - Рукопись представлена Казанским ун-том. Деп. в ВИНИТИ 4 июля 1988, № 5376 - В88.

3. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. - 1951. - Т.77 - № I. - С.II - 14.

4. Сукочев Ф. А., Чилин В. И. Описание замкнутых выпуклых симметричных множеств измеримых операторов // Изв. вузов. Матем. - 1987. - № 10. - С.31 - 37.

5. Тихонов О. Е. Выпуклые функции и неравенства для следа // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. Казань, 1987. - Вып. 6. - С.77 - 82.

6. Чилин В. И. Абстрактная характеризация некоммутативных пространств Орлича // Изв. АН УзССР. Сер.физ.-мат.н.- 1986. - № 5. - С.33 - 39.

7. Dixmier J. Formes lineares sur un anneau d'operateurs // Bull. Soc. Math. France.- 1953. - T.81. - P.9 - 39.

8. Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math.- 1986. - V.123. - No. I. -P.269 - 300.

9. Hansen F. An operator ineqaulity // Math.Annalen. - 1980. - Bd.246. - No3. - S.249 - 250.

10. Hansen F., Pedersen G. K. Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem // Math.Annalen. - 1982. - Bd. 258. - No. 3. - S.229 - 241.

11. Musielak J. Modular spaces and Orlicz spaces // Lect. Notes Math. - 1983. - No.1034.

12. Rolewich S. Metric linear spaces. Ser.: Monografie Math. - Warshawa, PWN, 1972. - T.56.

13. Yeadon F. J. Convergence of measurable operators// Proc. Cambridge Phil. Soc. - 1973. - V.74. - No.2.- P.257 - 268.

14. Yeadon F. J. Non commutative L^p-spaces // Math. Proc.Cambridge Phil. Soc.- 1975.- V.77.- No.I. - P.91 - 102.