К. П. Шустова, О преобразованиях Лагерра в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и их аналогах в идеальной области пространства Лобачевского, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 187–194

К.П. Шустова

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛАГЕРРА В ТРЕХМЕРНОМ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ АНАЛОГАХ В ИДЕАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Аннотация

В многообразии плоскостей трехмерного псевдоевклидова пространства построена 10-членная группа преобразований, индуцирующая группу Лагерра преобразований плоскостей в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и показано, что эта группа действует в касательном расслоении комплексной проективной прямой, в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве, и в многообразии орисфер идеальной области трехмерного пространства Лобачевского.

Abstract

K.P. Shustova **On Laguerre transformations in three-dimensional pseudo-Euclidean space and their analogs in the ideal area of Lobachevskii space**

In the present paper we construct a 10-dimensional group which induces the Laguerre transformations of planes in the three-dimensional pseudo-Euclidean space ${}^1E_3$, and find action of this group on the tangent bundle of complex projective line, on the 4–dimensional pseudo-Euclidean space, and on the manifold of horospheres of the ideal area of three-dimensional Lobachevskii space.

---

1. Группа преобразований Лагерра в псевдоевклидовом пространстве как группа преобразований на комплексной проективной прямой. Пусть ${}^1E_3$ — трехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(+,+,-)$ с ортогональными координатами x, y, z. Рассмотрим в ${}^1E_3$ сферу S_2 мнимого радиуса i с центром в начале координат.

Точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S_2$ поставим в соответствие плоскость Π_2, ортогональную радиус-вектору $\vec{n}$ этой точки и находящуюся на расстоянии p от начала координат, причем p может быть отрицательным (плоскости ориентированы).

Построим 10-членную группу преобразований Лагерра этих плоскостей в ${}^1E_3$ и покажем, что эта группа может быть представлена как группа преобразований на комплексной проективной прямой CP_1.

Осуществим стереографическую проекцию сферы S_2 из полюса $N(0, 0, 1)$ на плоскость $z = 0$. Тогда точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой сферы ставится в соответствие точка $M_0'(x_0' = \frac{x_0}{1-z_0}, y_0' = \frac{x_0}{1-z_0}, z_0' = 0)$ с радиус-вектором $\vec{\rho}(\xi^1, \xi^2)$ на плоскости $z = 0$. Уравнение плоскости Π_2 тогда можно представить в виде:

$$\frac{2\xi^1}{\vec{\rho}^2 - 1}x + \frac{2\xi^2}{\vec{\rho}^2 - 1}y + \frac{\vec{\rho}^2 + 1}{\vec{\rho}^2 - 1}z + p = 0. \tag{1.1}$$

Введем параметр $s^1 = \xi^1 + i\xi^2$, где $i^2 = -1$. Тогда в силу (1.1) уравнение плоскости Π_2 запишется в виде:

$$\frac{-(s^1 + \bar{s}^1)}{s^1\bar{s}^1 - 1}x + \frac{i(s^1 - \bar{s}^1)}{s^1\bar{s}^1 - 1}y - \frac{s^1\bar{s}^1 + 1}{s^1\bar{s}^1 - 1}z - p = 0, \tag{1.2}$$

где $\bar{s}^1$ — комплексное число, сопряженное к s^1. Или, что то же самое, в виде:

$$-(s^1 + \bar{s}^1)x + i(s^1 - \bar{s}^1)y - (s^1\bar{s}^1 + 1)z - \omega = 0, \tag{1.3}$$

где $\omega = p(\vec{\rho}^2 - 1) = p(s^1\bar{s}^1 - 1)$. Таким образом, пара (s^1, ω) диффеоморфно определяет в ${}^1E_3$ плоскость Π_2.

Под преобразованиями Лагерра [1] в трехмерном псевдоевклидовом пространстве понимаются такие преобразования, которые ориентированные плоскости переводят в ориентированные плоскости, а плоскости, касающиеся сферы, — в плоскости, касающиеся сферы (вообще говоря отличной от исходной сферы). Преобразования Лагерра включают в себя, в частности, вращения и параллельные переносы. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве рассмотрим группу движений G_6 с базисом операторов $V_\alpha(\alpha = \overline{1, 6})$, где операторы $V_\alpha(\alpha = \overline{1, 3})$ порождают в ${}^1E_3$ вращения относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно, $V_\alpha(\alpha = \overline{4, 6})$ задают в пространстве ${}^1E_3$ параллельные переносы вдоль осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Предложение 1.1. *Группа движений G_6 в трехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1E_3$ индуцирует в многообразии плоскостей этого пространства группу преобразований, базис операторов* *которой имеет вид:*

$$
\begin{aligned}
&V_1 = \frac{-i(s^{1^2}+1)}{2}\frac{\partial}{\partial s^1} + \frac{i(\bar{s}^{1^2}+1)}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{s}^1} - \frac{i(s^1-\bar{s}^1)}{2}\omega\frac{\partial}{\partial \omega},\\
&V_2 = \frac{(s^{1^2}-1)}{2}\frac{\partial}{\partial s^1} + \frac{(\bar{s}^{1^2}-1)}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{s}^1} + \frac{(s^1+\bar{s}^1)}{2}\omega\frac{\partial}{\partial \omega},\\
&V_3 = is^1\frac{\partial}{\partial s^1} - i\bar{s}^1\frac{\partial}{\partial \bar{s}^1}, \qquad V_4 = -(s^1+\bar{s}^1)\frac{\partial}{\partial \omega}\\
&V_5 = i(s^1-\bar{s}^1)\frac{\partial}{\partial \omega} \qquad V_6 = -(s^1\bar{s}^1+1)\frac{\partial}{\partial \omega}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Доказательство. При движении в трехмерном псевдоевклидовом пространстве плоскости (1.2) перейдут в близкие плоскости:

$$
\frac{-(\tilde{s}^1+\tilde{\bar{s}}^1)}{\tilde{s}^1\tilde{\bar{s}}^1-1}\tilde{x} + \frac{i(\tilde{s}^1-\tilde{\bar{s}}^1)}{\tilde{s}^1\tilde{\bar{s}}^1-1}\tilde{y} - \frac{\tilde{s}^1\tilde{\bar{s}}^1+1}{\tilde{s}^1\tilde{\bar{s}}^1-1}\tilde{z} - \tilde{p} = 0. \tag{1.5}
$$

Здесь $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ — координаты той точки из ${}^1E_3$, в которую переходит точка (x,y,z), принадлежащая плоскости (1.2), при преобразовании, порожденным оператором $V_\alpha(\alpha=\overline{1,6})$, $\tilde{s}^1 = s^1+\delta s^1$, $\tilde{\bar{s}}^1 = \bar{s}^1+\delta\bar{s}^1$, $\tilde{p} = p+\delta p$ (δs^1, δp — приращения параметров (s^1, p), задающих плоскость Π_2, при этом же преобразовании). Подставив в (1.2) вместо x,y,z их значения, определяемые оператором $V_\alpha(\alpha=\overline{1,6})$ группы G_6, сравнив получившееся выражение с (1.5) и учтя, что $\omega = p(s^1\bar{s}^1-1)$, найдем вид рассматриваемого оператора в локальных координатах $(s^1,\bar{s}^1,\omega)$. □

Кроме этих шести операторов можно еще указать оператор дилатации

$$
V_7 = (s^1\bar{s}^1-1)\frac{\partial}{\partial \omega}
$$

в ${}^1E_3$ (каждая плоскость смещается на одно и то же расстояние в направлении орта нормали $\vec{n}$).

Посмотрим иначе на преобразования (1.4). Рассмотрим комплексную проективную прямую CP_1. Введем на этой прямой локальную координату s^1. Тогда базис инфинитезимальных преобразований на прямой CP_1 составляют операторы:

$$
\frac{d}{ds^1}, \quad s^1\frac{d}{ds^1}, \quad s^{1^2}\frac{d}{ds^1}, \quad i\frac{d}{ds^1}, \quad is^1\frac{d}{ds^1}, \quad is^{1^2}\frac{d}{ds^1}.
$$

Первые три оператора из (1.4) есть не что иное, как запись в переменных $(s^1,\bar{s}^1,\omega=\sqrt{s^2\bar{s}^2})$ полных лифтов векторных полей

$$
\frac{-i(s^{1^2}+1)}{2}\frac{d}{ds^1}, \qquad \frac{(s^{1^2}-1)}{2}\frac{d}{ds^1}, \qquad is^1\frac{d}{ds^1}
$$

в касательное расслоение комплексной проективной прямой $T(CP_1)$, где (s^1, s^2) — локальные индуцированные координаты в расслоении $T(CP_1)$. На этом пути указанную 7–членную группу с базисом операторов $V_\alpha(\alpha = \overline{1,7})$ можно дополнить тремя операторами

$$\begin{aligned} V_8 &= \frac{(s^{1^2}+1)}{2}\frac{\partial}{\partial s^1} + \frac{(\bar{s}^{1^2}+1)}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{s}^1} + \frac{(s^1+\bar{s}^1)}{2}\omega\frac{\partial}{\partial \omega}, \\ V_9 &= \frac{i(s^{1^2}-1)}{2}\frac{\partial}{\partial s^1} - \frac{i(\bar{s}^{1^2}-1)}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{s}^1} + \frac{i(s^1-\bar{s}^1)}{2}\omega\frac{\partial}{\partial \omega}, \\ V_{10} &= -s^1\frac{\partial}{\partial s^1} - \bar{s}^1\frac{\partial}{\partial \bar{s}^1} - \omega\frac{\partial}{\partial \omega}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

являющимися записью в переменных $(s^1, \bar{s}^1, \omega = \sqrt{s^2\bar{s}^2})$ полных лифтов векторных полей

$$\frac{(s^{1^2}+1)}{2}\frac{d}{ds^1}, \qquad \frac{i(s^{1^2}-1)}{2}\frac{d}{ds^1}, \qquad -s^1\frac{d}{ds^1}$$

в касательное расслоение комплексной проективной прямой $T(CP_1)$.

Операторы $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$ образуют базис 10-членной группы Лагерра G_{10} в трехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1E_3$. Первые три оператора из (1.4) и операторы (1.6) порождают 6-параметрическую группу преобразований, изоморфную группе проективных преобразований комплексной проективной прямой CP_1.

2. Группа преобразований Лагерра в трехмерном псевдоевклидовом пространстве как группа движений в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. В параграфе 1 была построена 10-членная группа Лагерра в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Представим эту группу как группу движений в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1E_4$. Сделаем это следующим образом. Рассмотрим в ${}^1E_3$ семейство плоскостей Π_2, касающихся некоторой сферы с центром (a, b, c) мнимого радиуса R (будем называть эту сферу циклом). Этому циклу поставим в соответствие точку (a, b, c, R) из ${}^1E_4$ сигнатуры $(+,+,-,+)$ так, чтобы изотропный конус с вершиной в этой точке (a, b, c, R) пересекал гиперплоскость xyz по указанному выше циклу. Такое соответствие между сферами мнимого радиуса в ${}^1E_3$ и точками пространства ${}^1E_4$ назовем изотропной проекцией.

Предложение 2.1. *10-членная группа Лагерра в* $^1E_3$ *с базисом операторов* $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$ *порождает в* $^1E_4$ *группу движений с базисом операторов:*

$$V_1 = c\frac{\partial}{\partial b} + b\frac{\partial}{\partial c}, \quad V_2 = c\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial c}, \quad V_3 = -b\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial b}, \quad V_4 = \frac{\partial}{\partial a},$$
$$V_5 = \frac{\partial}{\partial b}, \quad V_6 = \frac{\partial}{\partial c}, \quad V_7 = -\frac{\partial}{\partial R}, \quad V_8 = -R\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial R},$$
$$V_9 = R\frac{\partial}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial R}, \quad V_{10} = R\frac{\partial}{\partial c} + c\frac{\partial}{\partial R}.$$

Доказательство. Нас интересуют такие семейства плоскостей (1.3), которые задаются парами:

$$s^1, \omega = As^1\bar{s}^1 + B\bar{s}^1 + \bar{B}s^1 + C, \tag{2.1}$$

где A, C – вещественные числа, B–комплексное число. В этом случае огибающей двухпараметрического семейства плоскостей (1.3) является сфера мнимого радиуса. Координаты центра (a, b, c) и радиус R указанной огибающей связаны с $A, B, \bar{B}, C$ соотношениями:

$$A = -R - c, \; C = R - c, \; B = -a - ib, \; \bar{B} = -a + ib. \tag{2.2}$$

При преобразовании, порожденном оператором $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$, плоскости семейства (1.3), где ω определяется формулой (2.1), переходят в семейство плоскостей:

$$(\tilde{s}^1 + \tilde{\bar{s}}^1)\tilde{x} - i(\tilde{s}^1 - \tilde{\bar{s}}^1)\tilde{y} + (\tilde{s}^1\tilde{\bar{s}}^1 + 1)\tilde{z} + \tilde{\omega} = 0, \tag{2.3}$$

близких к исходному семейству, где

$$\tilde{s}^1, \tilde{\omega} = \tilde{A}\tilde{s}^1\tilde{\bar{s}}^1 + \tilde{B}\tilde{\bar{s}}^1 + \tilde{\bar{B}}\tilde{s}^1 + \tilde{C}, \tag{2.4}$$

параметры, соответствующие этим близким плоскостям.

Подставив в (2.4) вместо $\tilde{s}^1$, $\tilde{\bar{s}}^1$, $\tilde{\omega}$ их значения, определяемые оператором $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$ (в локальных координатах s^1, $\bar{s}^1$, ω) и сравнивая получившееся выражение с (2.1), получим вид оператора $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$ в координатах A, B, $\bar{B}$, C.

При преобразованиях Лагерра с базисом операторов $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$ цикл с центром (a, b, c) мнимого радиуса R перейдет в близкий цикл с центром $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ мнимого радиуса $\tilde{R}$, а семейство плоскостей (1.3), задаваемое параметрами s^1, ω, где ω из (2.1), в семейство плоскостей (2.3), причем

$$\tilde{A} = -\tilde{R} - \tilde{c}, \ \tilde{C} = \tilde{R} - \tilde{c}, \ \tilde{B} = -\tilde{a} - i\tilde{b}, \ \tilde{\bar{B}} = -\tilde{a} + i\tilde{b}. \qquad (2.5)$$

Подставив (2.5) и (2.2) в выражения для $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\bar{B}}$, $\tilde{C}$, определяемые оператором $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$, выраженным через $(A,\ B,\ \bar{B},\ C)$, получим вид оператора $V_\alpha(\alpha = \overline{1,10})$ в координатах (a, b, c, R). □

Таким образом, 10–членная группа Лагерра в ${}^1E_3$ представлена как группа движений в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1E_4$.

3. Плоскости в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и орисферы в идеальной области пространства Лобачевского. Под идеальной областью ${}^1\Lambda_3$ пространства Лобачевского понимаем множество элементов – точек, изометричное множеству пар диаметрально противоположных точек 3-мерной сферы действительного радиуса псевдоевклидова пространства ${}^1E_4$. Интерпретацию Пуанкаре идеальной области ${}^1\Lambda_3$ пространства Лобачевского можно получить стереографически проектируя сферу действительного радиуса из ее северного полюса на ее псевдоевклидову экваториальную плоскость, дополненную до пространства ${}^1C_3$ [2].

Мы будем рассматривать ${}^1\Lambda_3$ и пользоваться интерпретацией Пуанкаре этого пространства в полупространстве $\theta > 0$ псевдоевклидова пространства ${}^1E_3$, когда в качестве абсолюта выступает плоскость $\theta = 0$. В этой интерпретации плоскостями в ${}^1\Lambda_3$ являются полусферы пространства ${}^1E_3$, ортогональные абсолюту (а если радиус такой полусферы стремится к бесконечности, то имеем псевдоевклидову плоскость, ортогональную абсолюту), а прямыми — полуокружности пространства ${}^1E_3$ с центрами на абсолюте и ортогональные абсолюту (псевдоевклидовы прямые, ортогональные абсолюту — в предельном случае). Линейный элемент пространства ${}^1\Lambda_3$ в такой модели имеет вид $d\sigma^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 - d\theta^2}{\theta^2}$. Движениями пространства ${}^1\Lambda_3$ в используемой интерпретации будем называть взаимно-однозначные отображения этого пространства на себя, сохраняющие вид линейного элемента.

В параграфе 1 было установлено диффеоморфное соответствие между парами $(\vec{\rho}, \omega)$ и плоскостями (1.1):

$$2\xi^1 x + 2\xi^2 y + (\vec{\rho}^2 + 1)z + \omega = 0 \qquad (3.1)$$

из ${}^1E_3$, где $\vec{\rho} = \xi^1\vec{i} + \xi^2\vec{j}$ $(\vec{i},\ \vec{j}$ — базисные векторы декартовой системы координат в плоскости $z = 0.)$

С другой стороны, паре $(\vec{\rho}, \omega)$ можно поставить в соответствие орисферу идеальной области трехмерного пространства Лобачевского ${}^1\Lambda_3$.

Орисферу пространства ${}^1\Lambda_3$ зададим уравнением:

$$(\vec{\zeta}-\vec{\rho})^2-(\theta-\frac{\omega}{2})^2=-(\frac{\omega}{2})^2, \tag{3.2}$$

где $\vec{\zeta}=(\xi,\eta)$, (ξ,η,θ) — ортогональные координаты в ${}^1E_3$ $(\theta>0)$.

В следующем предложении будет дана геометрическая характеристика этого отображения.

Предложение 3.1. *Пусть* (ξ,η,θ) — *точка из* ${}^1\Lambda_3$, $(\vec{\rho},\omega)$ — *параметры, соответствующие орисферам* (3.2), *проходящим через эту точку,* (3.1) — *плоскости, соответствующие этим же самым параметрам* $(\vec{\rho},\omega)$, (a,b,c,R) — *точка из* ${}^1E_4$, *соответствующая в* ${}^1E_3$ *циклу, который огибает указанное семейство плоскостей* (3.1). *Тогда эта точка* (a,b,c,R) *принадлежит сфере действительного радиуса* $a^2+b^2-c^2+R^2=1$, *моделирующей идеальную область* ${}^1\Lambda_3$ *пространства Лобачевского.*

Доказательство. Рассмотрим в ${}^1\Lambda_3$ все такие орисферы, которые проходят через точку (ξ,η,θ), т. е. (ξ,η,θ) удовлетворяет уравнению (3.2). Выразив ω из (3.2), получим

$$\omega=\frac{-1}{\theta}\vec{\rho}^2+2\frac{\vec{\zeta}\vec{\rho}}{\theta}-\frac{\vec{\zeta}^2}{\theta}+\theta. \tag{3.3}$$

С другой стороны, мы имеем семейство плоскостей (3.1). Так как точка (a,b,c) находится на расстоянии R от плоскостей (3.1), то $2\xi^1a+2\xi^2b+(\vec{\rho}^2+1)c+\omega=R(\vec{\rho}^2-1)$. Выразив отсюда ω и сравнив получившееся выражение с (3.3), получим закон, по которому точке (ξ,η,θ) из ${}^1\Lambda_3$ ставится в соответствие точка $(a,b,c,R)\in{}^1E_4$, т. е. цикл в пространстве ${}^1E_3$ мнимого радиуса R с центром (a,b,c), который огибает семейство плоскостей (3.1). Этот закон имеет вид:

$$a=\frac{-\xi}{\theta},\ b=\frac{-\eta}{\theta},\ c=\frac{1}{2}(\frac{1}{\theta}+\frac{\vec{\zeta}^2}{\theta}-\theta),\ R=\frac{1}{2}(\frac{-1}{\theta}+\frac{\vec{\zeta}^2}{\theta}-\theta).$$

Отсюда видим, что $a^2+b^2-c^2+R^2=1$. Таким образом предложение 3.1 доказано. □

Итак, с одной стороны, паре $(\vec{\rho},\omega)$ диффеоморфно ставится в соответствие плоскость (3.1) в ${}^1E_3$, с другой стороны, — орисфера (3.2) в ${}^1\Lambda_3$. Т.е. плоскости (3.1) из ${}^1E_3$ диффеоморфно соответствует в ${}^1\Lambda_3$ орисферам (3.2).

В силу того, что установлено диффеоморфное соответствие (см. параграф 1) между парами $(\vec{\rho},\omega)$ и (s^1,ω) можем также сказать, что пара (s^1,ω) диффеоморфно определяет, с одной стороны, плоскость

(3.1) в ${}^1E_3$, с другой стороны, — орисферу (3.2) в ${}^1\Lambda_3$, а группа преобразований в многообразии плоскостей пространства ${}^1E_3$ с базисом операторов (1.4), V_7, (1.6) также порождает группу преобразований в многообразии орисфер идеальной области ${}^1\Lambda_3$ пространства Лобачевского. Поэтому преобразования указанной выше 10-членной группы индуцируют одновременно и преобразования в многообразии орисфер идеальной области пространства Лобачевского, порождающие аналоги преобразований Лагерра в идеальной области трехмерного пространства Лобачевского.

Заметим также, что семейству плоскостей (1.3)=(3.1) из ${}^1E_3$, которые задаются парами (2.1) и имеют огибающей сферу с центром (a, b, c) мнимого радиуса R (т.е. имеют место формулы (2.2)) диффеоморфно соответствует в ${}^1\Lambda_3$ семейство орисфер, которое имеет огибающей: 1) псевдоевклидову сферу — омбилическую поверхность постоянной кривизны пространства ${}^1\Lambda_3$ с уравнением: $\left(\xi + \frac{a}{R+c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{b}{R+c}\right)^2 - \left(\theta + \frac{a^2+b^2}{R+c}\right)^2 = -\left(\frac{a^2+b^2-1}{R+c}\right)^2$, если $A \neq 0$; 2) плоскость с точки зрения ${}^1E_3$ с уравнением: $2a\xi + 2b\eta + \theta(1+a^2+b^2) + (c-R) = 0$, если $A = 0$.

Литература

[1] Яглом И.М. *Геометрические преобразования.*–М.: ГИТТЛ.–1956.–Т. .–612 с.

[2] Розенфельд Б.А. *Неевклидовы геометрии.*–М.:ГИТТЛ.–1955.–774 с.

[3] Широков А.П. *К геометрии орисфер пространства Лобачевского.*//Тр. геом. семин.–Изд. Казанск. ун-та.–1991.–Вып. 21.–С. 118-124.

[4] Широков А.П. *Аналоги преобразований Лагерра в плоскости и в пространстве Лобачевского.*//Сб. "Памяти Лобачевского посвящается".–Изд. Казанск. ун-та.–1992.–Вып. 2.–С. 107-118.

Адрес: *Казанский государственный университет, механико-математический факультет, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Mathematical Department, Chair of Geometry, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Ksenia.Shustova@ksu.ru*