

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Березин, Е. В. Шикин, Геометрия и графика информационных множеств в задачах динамического поиска объектов, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 17–30

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.205.19.235

7 июня 2024 г., 16:19:34



С.Б. БЕРЕЗИН, Е.В. ШИКИН

**ГЕОМЕТРИЯ И ГРАФИКА ИНФОРМАЦИОННЫХ  
МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОГО  
ПОИСКА ОБЪЕКТОВ**

**Аннотация**

Рассматривается геометрический подход к решению задач динамического поиска объектов, основанный на построении изменяющихся во времени информационных множеств, отражающих степень информированности участников поиска. Приведены примеры основных информационных множеств. Предложен численный метод построения аппроксимаций информационных множеств, сохраняющих основные свойства моделируемых информационных множеств. Этот метод применяется для построения поисковой траектории одного ищущего объекта в области поиска, представляющей собой монотонный многоугольник.

**Abstract**

*S.B. Berezin, E.V. Shikin* **Geometry and Graphics of informational sets in problems on dynamical search for moving objects**

The present paper is devoted to a geometric approach to the problems on dynamical search for moving objects. We construct time-dependent sets determined by distribution of information between the conflicting objects, and give basic examples of informational sets. We suggest a numerical method for constructing an approximation of informational sets which preserves their basic properties, and apply this method to finding the search trajectory for an object moving in a monotonic polygon.

---

**1. Введение.** Многие поисковые задачи допускают геометрическое описание, позволяющее строить и изучать стратегии ведения успешного поиска (обнаружения). Здесь будет рассмотрена возможность применения геометрического моделирования для решения задачи поиска подвижного объекта на плоскости.

Пусть уклоняющийся объект перемещается в плоском замкнутом ограниченном множестве  $\Omega$ , называемом *областью поиска*. Поиск ведут  $N$  ищущих объектов, также перемещающихся в области  $\Omega$ . Скорость уклоняющегося объекта не превосходит постоянной  $\beta$ , скорости ищущих объектов постоянны и равны  $\alpha_i > \beta$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Уклоняющийся и ищущие объекты могут произвольно менять направление своего движения в любые моменты времени.

При сближении  $i$ -го ищущего объекта с уклоняющимся на расстояние, меньшее или равное постоянной  $l_i$ , заданной для данного ищущего объекта, уклоняющийся объект считается обнаруженным, а поиск — успешно завершённым. Постоянная  $l_i$  называется радиусом круга обнаружения.

Будем считать, что уклоняющемуся объекту известно положение каждого ищущего объекта во все моменты времени (что позволяет ему активно противодействовать обнаружению), а ищущим объектам известны только область поиска и скорость уклоняющегося объекта. Требуется построить стратегию совместного поведения ищущих объектов, обеспечивающую обнаружение уклоняющегося объекта независимо от его поведения.

В сделанных предположения стратегии ищущих объектов могут быть заданы априорно, поэтому в качестве стратегий ищущих объектов будем рассматривать траектории их движения  $a_i(t)$ ,  $t > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Геометрический подход к построению поисковых траекторий оказался достаточно удобным [1, 2]; его применение позволило построить поисковые траектории на некоторых замкнутых поверхностях [3] и в выпуклых областях [4, 5].

**2. Информационные множества.** Геометрический подход к решению задач динамического поиска объектов состоит в использовании переменных множеств, отражающих степень информированности участников поиска и называемых *информационными*. Обычно информационные множества являются подмножествами области поиска  $\Omega$ . Самым простым примером информационного множества является замкнутый *круг обнаружения*  $\bar{B}(a_i(t), l_i)$  радиуса  $l_i$ , в центре которого находится  $i$ -й ищущий объект. Круги обнаружения перемещаются по области поиска вместе с ищущими объектами.

Множество всех возможных положений уклоняющегося объекта в момент времени  $t$  назовем *областью неопределенности* и будем обозначать через  $W(t)$ . Из определения множества неопределенности следует, что

$$W(t) \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B}(a_i(t), l_i).$$

Перемещение уклоняющегося объекта приводит к увеличению области неопределенности. За время  $\Delta t > 0$  уклоняющийся объект может пройти расстояние, не превышающее  $\beta \Delta t$ , поэтому область неопределенности увеличится на полосу шириной  $\beta \Delta t$

$$W(t + \Delta t) \subseteq (W(t) \oplus \overline{B}(0, \beta \Delta t)) \cap \Omega, \quad S \oplus \overline{B}(0, r) = \bigcup_{x \in S} \overline{B}(x, r).$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначением  $G(S, r) = S \oplus \overline{B}(0, r)$ .

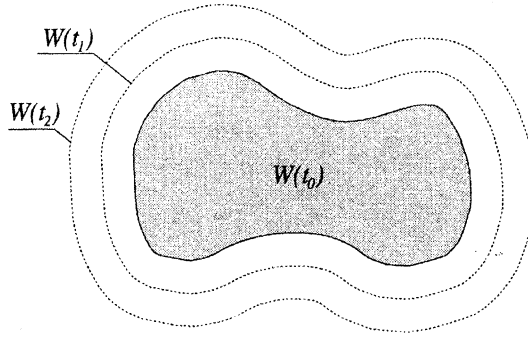


Рис 1. Область неопределенности в моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2$ .

Изменение области неопределенности  $W(t)$  в последовательные моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2$  показано на рис. 1. Область неопределенности в момент времени  $t_0$  отмечена темным цветом. Границы области неопределенности в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  показаны прерывистыми линиями.

Множество  $\Omega \setminus W(t)$  свободно от уклоняющегося объекта. Если в начальный момент времени  $t = 0$  область неопределенности составляет всю область поиска без кругов обнаружения

$$W(0) = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B}(a_i(0), l_i),$$

то множество  $\Omega \setminus W(t)$  будем называть *полной остаточной областью*.

Перемещение ищущих объектов приводит к уменьшению области неопределенности. В момент времени  $t$  ищущие объекты находятся в точках  $a_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , и в кругах  $\bar{B}(a_i(t), l_i)$  уклоняющегося объекта быть не может. За небольшой промежуток времени  $\Delta t$ ,  $0 < \Delta t < l_i/\beta$ , ищущие объекты переместятся в точки  $a_i(t + \Delta t)$  и присоединят к полной остаточной области множества  $\bar{B}(a_i(t + \Delta t), l_i)$ . Но в силу неравенств  $\alpha_i > \beta$  увеличивающаяся область неопределенности не успеет целиком накрыть свободные от уклоняющегося объекта круги с центрами в точках  $a_i(t)$ . Таким образом, за каждым ищущим объектом останется изменяющийся во времени шлейф из точек, свободных от уклоняющегося объекта, называемый *индивидуальной остаточной областью*. Взаимодействие ищущих объектов друг с другом и границей области поиска приводят к образованию общих остаточных областей, больших чем простое объединение индивидуальных остаточных областей [6]. На рис. 2 темным цветом показана общая остаточная область двух ищущих объектов, движущихся навстречу друг другу по траекториям, расположенным на расстоянии, меньшем суммы радиусов кругов обнаружения; мелкими пунктирными линиями показаны границы индивидуальных остаточных областей.

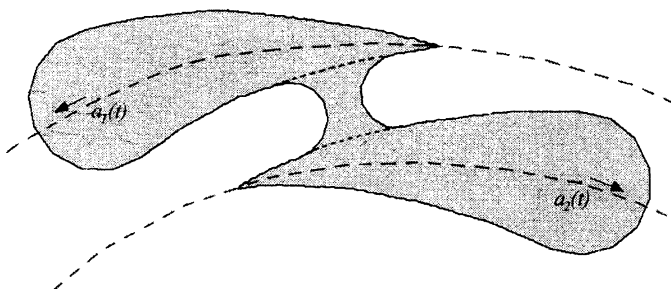


Рис 2. Общая остаточная область двух объектов.

Если при перемещении ищущих объектов по заданным траекториям в некоторый момент времени  $t^*$  область неопределенности окажется пустым множеством, т.е.  $W(t^*) = \emptyset$ , то к этому моменту уклоняющийся объект будет гарантированно обнаружен. Поэтому целью ищущих объектов является уменьшение области неопределенности или, что то же самое, увеличение полной остаточной области.

Информационные множества часто оказываются полезными при построении траекторий, уменьшающих область неопределенности. Но в случае нетривиальной структуры области поиска или большого количества ищущих объектов границы информационных множеств, в

том числе и области неопределенности, могут иметь сложную структуру, с трудом поддающуюся аналитическому описанию.

На рис. 3 показан случай, когда количество компонент связности остаточной области превосходит количество ищущих объектов. Здесь ищущие объекты движутся прямолинейно из точки  $O$ . Общая остаточная область показана темным цветом. Несимметричность общей остаточной области относительно точки  $O$  вызвана несимметричным расположением траекторий.

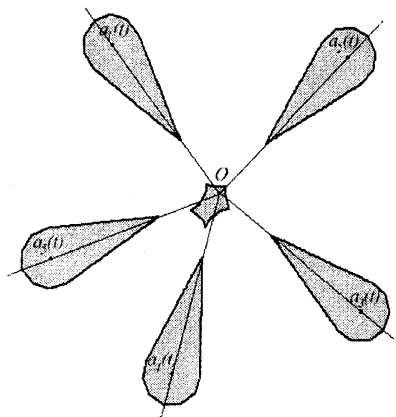


Рис 3. Общая остаточная область пяти объектов.

Поэтому для построения моделей информационных множеств имеет смысл воспользоваться вычислительными и графическими возможностями современных компьютеров. Для этого необходимо вывести формулы, позволяющие за конечное число шагов строить модели информационных множеств, и реализовать эти формулы на компьютере.

**2. Моделирование информационных множеств.** Пусть заданы область поиска  $\Omega$ , скорость уклоняющегося объекта  $\beta$ , множество его начальных положений  $W(0)$ , а также скорости  $\alpha_i$ , радиусы кругов обнаружения  $l_i$  и траектории всех ищущих объектов. Требуется построить множество, аппроксимирующее область неопределенности  $W(T)$  в заданный момент времени  $T > 0$ .

Введем разбиение временного промежутка  $[0, T]$  на  $M$  точек

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T.$$

Считая, что аппроксимация области неопределенности  $W_n$  в момент времени  $t_n$  известна, построим аппроксимацию области неопределенности

ности  $W_{n+1}$  в момент времени  $t_{n+1}$ . Учитывая возможное перемещение уклоняющегося объекта на временном промежутке  $[t_n, t_{n+1}]$ , положим

$$W'_{n+1} = (G(W_n, \beta(t_{n+1} - t_n)) \cap \Omega. \quad (1)$$

Движение ищущих объектов промоделируем, вычитая из  $W'_{n+1}$  множества  $Q_{i,n+1}$  для  $i = 1, 2, \dots, N$

$$W_{n+1} = W'_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_{i,n+1}, \quad (2)$$

где в качестве  $Q_{i,n+1}$  можно взять круг обнаружения в момент времени  $t_{n+1}$

$$Q_{i,n+1} = \overline{B}(a_i(t_{n+1}, l_i) \quad (3)$$

или часть индивидуальной остаточной области на временном промежутке  $[t_n, t_{n+1}]$

$$Q_{i,n+1} = \bigcup_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \overline{B}(a_i(t), l_i - \beta(t_{n+1} - t)). \quad (4)$$

Заметим, что границы множеств (3) и (4) могут быть легко построены аналитически.

Объединяя соотношения (1) и (2), получаем рекуррентные формулы, позволяющие за конечное число шагов строить аппроксимации области неопределенности в заданные моменты времени

$$W_0 = W(0), \quad (5)$$

$$W_{n+1} = \left( G(W_n, \beta(t_{n+1} - t_n)) \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_{i,n+1} \right) \cap \Omega. \quad (6)$$

Здесь  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . В работе [6] доказано, что для построенных по формулам (5)–(6) множеств  $W_n$  выполнены включения

$$W(t_n) \subseteq W_n, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (7)$$

Тем самым в момент времени  $t_n$  уклоняющийся объект может находиться только в точках множества  $W_n$ , что позволяет называть  $W_n$  аппроксимацией области неопределенности  $W(t_n)$ . Применение формул (5)–(6) для построения аппроксимаций области неопределенности в частных случаях показало, что построенные таким образом

аппроксимации достаточно близки к теоретической области неопределенности при построении множеств  $Q_{i,n+1}$  по формуле (4).

**3. Алгоритмическая реализация.** Для проведения вычислений на компьютере по формулам (5)–(6) требуется алгоритмическая реализация теоретико-множественных операций и операции  $r$ -расширения множества  $G(S, r)$ .

Существует несколько подходов к компьютерному представлению множеств, включая растровый, граничный [7, 8] и функциональный [9]. Граничный подход позволяет выполнять операции над множествами с достаточно высокой точностью и производительностью и с небольшими затратами памяти, именно поэтому он был выбран для проведения вычислений по формулам (5)–(6). При граничном подходе множество определяется своей границей, являющейся планарным графом, ребра которого разбивают плоскость на некоторое число областей. Построение результата теоретико-множественной операции над множествами в граничном представлении состоит из двух этапов. Сначала строится разбиение плоскости объединением границ множеств-операндов. Затем в результирующее множество включаются области полученного разбиения, соответствующие выбранной теоретико-множественной операции.

К сожалению, на этапе построения объединения границ значительное влияние могут оказать погрешности представления чисел с плавающей точкой — основной операцией при объединении границ множеств-операндов является нахождение точек пересечения двух заданных отрезков кривых, особенно подверженное влиянию ошибок округления, если точки отрезков расположены на небольшом (порядка  $10^{-5}$ ) расстоянии. Здесь даже небольшая погрешность в вычислениях может привести к нарушению логической структуры данных [10]. Рекуррентные формулы (5)–(6) подразумевают многократное применение теоретико-множественных операций, поэтому учет влияния ошибок округления является очень важной задачей.

Чтобы избежать влияния ошибок округления на результат теоретико-множественных операций, можно вообще отказаться от арифметики с плавающей точкой. Воспользуемся подходом, предложенным в [10]. Ограничим класс кривых, входящих в границу множества, только отрезками прямых. Применение теоретико-множественных операций может приводить к появлению новых вершин, но прямые, отрезки которых составляют границу, остаются неизменными. Поэтому в качестве фундаментальных геометрических данных возьмем коэффициенты уравнений прямых и найдем вершины графов-границ.



Введем на плоскости прямоугольную систему координат. В класс  $\mathcal{L}$  поместим все прямые, уравнения которых во введенной системе координат могут быть заданы в виде

$$ax + by + c = 0, \quad (8)$$

$$a, b \in I_{32} = \{-2^{31}, -2^{31} + 1, \dots, 2^{31} - 1\}, \quad (9)$$

$$c \in I_{64} = \{-2^{63}, -2^{63} + 1, \dots, 2^{63} - 1\}. \quad (10)$$

В частности, прямая из класса  $\mathcal{L}$  может быть проведена между любыми двумя точками с целочисленными координатами из прямоугольника  $\Omega_0 = [-2^{30}, 2^{30} - 1] \times [-2^{30}, 2^{30} - 1]$ . Поэтому будем считать, что графы, представляющие границы множеств, целиком принадлежат области  $\Omega_0$ , а ребра графов лежат на прямых из класса  $\mathcal{L}$ .

Нетрудно доказать, что координаты точки пересечения двух произвольных ребер можно представить в виде

$$x = x_i + x_r/D, \quad y = y_i + y_r/D, \quad (11)$$

$$x_i, y_i \in I_{32}, \quad (12)$$

$$x_r, y_r, D \in I_{64}. \quad (13)$$

Объединение графов, ребра и вершины которых допускают предложенное выше представление, может быть построено точно, при этом ребра и вершины построенного объединения снова будут представимы в виде (8)–(10) и (11)–(13).

Следует отметить, что предложенный метод граничного представления множеств обладает вполне приемлемой точностью. В виде (8)–(10) и (11)–(13) могут быть представлены ребра и вершины границы множества, полученного применением любого конечного количества теоретико-множественных операций к многоугольникам, вершины которых имеют целочисленные координаты и принадлежат области  $\Omega_0$ . Характерные размеры области поиска в большинстве постановок задач поиска не превосходят  $10^2, \dots, 10^3$ , поэтому масштабирование  $\Omega_0$  до размеров  $\Omega$  позволяет получить точность представления координат порядка  $10^{-6}$ .

Представление (8)–(10) и (11)–(13) использует только 32- и 64-битные целые числа, которые эффективно обрабатываются современными процессорами, и позволяет выполнять теоретико-множественные операции с производительностью, достаточной для интерактивного моделирования поискового процесса.

С применением предложенного выше подхода была написана программа, осуществляющая построение информационных множеств в

интерактивном режиме, Часть иллюстраций (рис. 2, 3 и 5) получена с использованием этой программы.

**4. Решение задачи поиска.** Рассмотрим один из возможных способов применения компьютерных моделей информационных множеств для построения поисковой траектории в невыпуклых областях поиска.

В поиске участвует один ищущий объект, обладающий скоростью  $\alpha$  и радиусом круга обнаружения  $l$ . Отношение скоростей уклоняющегося и ищущего объектов будем обозначать через  $\lambda = \beta/\alpha$ . Введем на плоскости прямоугольную систему координат  $OXY$ . Пусть область поиска  $\Omega$

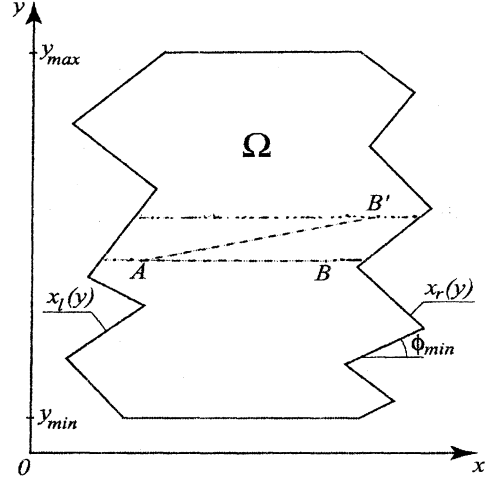


Рис 4.

Монотонный многоугольник  $\Omega$ .

представляет собой многоугольник, пересечение которого произвольной прямой  $y = \text{const}$  является либо точкой, либо отрезком (рис. 4). Такие многоугольники иногда называют *монотонными*.

В рассматриваемой системе координат монотонный многоугольник  $\Omega$  однозначно определяется двумя кусочно-линейными функциями  $x = x_l(y)$  и  $x = x_r(y)$ , заданными на отрезке  $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$ , где  $x_l(y) < x_r(y)$  при  $y \in (y_{\min}, y_{\max})$  и  $x_l(y) \leq x_r(y)$  при  $y = y_{\min}$  или  $y = y_{\max}$ :  $\Omega = \left\{ (x, y) \mid x_l(y) \leq x \leq x_r(y), y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \right\}$ . Обозначим через  $\phi_{\min}(\Omega)$  минимальный внешний угол, образуемый сторонами  $\Omega$  и горизонтальной прямой.

$$\phi_{\min}(\Omega) = \min_{i,j} \left\{ -\arccctg \frac{x_l(y_{l,i+1}) - x_l(y_{l,i})}{y_{l,i+1} - y_{l,i}}, \arccctg \frac{x_r(y_{r,j+1}) - x_r(y_{r,j})}{y_{r,j+1} - y_{r,i}}, \right. \\ \left. \pi + \arccctg \frac{x_l(y_{l,i+1}) - x_l(y_{l,i})}{y_{l,i+1} - y_{l,i}}, \pi - \arccctg \frac{x_r(y_{r,j+1}) - x_r(y_{r,j})}{y_{r,j+1} - y_{r,i}} \right\},$$

где  $y_{l,i}$  и  $y_{r,j}$  — ординаты вершин ломаных  $x_l(y)$  и  $x_r(y)$  соответственно. Минимальную и максимальную ширину области поиска будем обозначать через  $D_{\max}(\Omega)$  и  $D_{\min}(\Omega)$

$$D_{\min}(\Omega) = \min_{y \in [y_{\min}, y_{\max}]} \{x_r(y) - x_l(y)\}, \\ D_{\max}(\Omega) = \max_{y \in [y_{\min}, y_{\max}]} \{x_r(y) - x_l(y)\}.$$

Предположим, что минимальная ширина области поиска достаточно велика —  $D_{\min}(\Omega) > 2l$ . Построение поисковой траектории в общем случае не намного сложнее и подробно исследовано в работе [11].

Рассмотрим произвольное горизонтальное сечение  $y = y^*$  области поиска  $\Omega$ . Точки  $A = (x_l(y^*) + d, y^*)$  и  $B = (x_r(y^*) - d, y^*)$  лежат в рассматриваемом сечении на расстоянии  $d$  по горизонтали от боковых границ области поиска (рис. 4). Периодическое движение ищущего объекта по отрезку  $ABABAB \dots$ , при котором уклоняющийся объект не может пересечь прямую  $y = y^*$  не будучи обнаруженным, будем называть *патрулированием*.

В работе [11] показано, что патрулирование произвольного сечения  $\Omega$  возможно при выполнении следующих условий

$$l \geq l_0 = \begin{cases} \frac{\lambda D_{\max}(\Omega) \sin \phi^*}{\sqrt{1 - 4\lambda \cos \phi^* + 4\lambda^2}}, & \frac{\cos \phi^*}{2} \leq \lambda \leq c(\phi^*), \\ \lambda D_{\max}(\Omega), & 0 < \lambda < \frac{\cos \phi^*}{2}, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$c(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cos \phi}, & 0 < \phi \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \frac{\pi}{3} < \phi \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\phi^* = \min \{ \phi_{\min}(\Omega), \pi/2 \}.$$

Предположим, что в некоторый момент времени ищущий объект находится в точке  $A = (x_l(y_A) + d, y_A)$ , а уклоняющийся объект располагается не ниже прямой  $y = y_A$ . Пусть отрезок  $AB'$ , где  $B' = (x_r(y_{B'}) - d, y_{B'})$ ,  $y_{B'} > y_A$ , целиком принадлежит области поиска (рис. 4). Будем говорить, что при прямолинейном перемещении ищущего объекта из точки  $A$  в точку  $B'$  происходит *вытеснение* уклоняющегося объекта, если для того, чтобы избежать обнаружения, к моменту достижения точки  $B'$  ищущим объектом уклоняющийся объект должен оказаться не ниже прямой  $y = y_{B'}$ . Вертикальное смещение  $\Delta y_l = y_{B'} - y_A > 0$  будем называть *допустимым* для  $y = y_A$ . Аналогично определяются вытеснение уклоняющегося объекта и допустимое вертикальное смещение  $\Delta y_r$  для точек  $A = (x_r(y_A) - d, y_A)$  и  $B' = (x_l(y_{B'}) + d, y_{B'})$ ,  $y_{B'} > y_A$ .

Для вытеснения ищущий объект должен иметь большие возможности, чем для патрулирования. Вытеснение в произвольном горизонтальном сечении  $\Omega$  возможно, если неравенство (14) является строгим

$$l > l_0. \quad (15)$$

При этом значение  $d$  одинаково для всех сечений области поиска и всегда может быть выбрано положительным, а величины вертикальных смещений  $\Delta y_l$  и  $\Delta y_r$  в сечении области поиска  $y = y^*$ ,  $y^* \in [y_{min}, y_{max})$  всегда могут быть выбраны большими или равными

$$h(\Omega, \lambda, l, d, y^*) = \min \left\{ h_{min}(\Omega, \lambda, l, d), h'(y^*) \right\} > 0. \quad (16)$$

Здесь  $h'(y^*)$  — расстояние по вертикали до ближайшей вершины ломаной  $x_l(y)$  или  $x_r(y)$ , лежащей выше прямой  $y = y^*$

$$h'(y^*) = \min_{\substack{y_{l,i} > y^* \\ y_{r,j} > y^*}} \{y_{l,i} - y^*, y_{r,j} - y^*\},$$

а  $h_{min}(\Omega, \lambda, l, d)$  — положительная величина, не зависящая от положения ищущего объекта в области поиска [11]. Отметим, что соотношения (14) и (15) были получены при помощи аналитического построения информационных множеств.

Нетрудно показать, что соотношение (15) является достаточным условием существования поисковой траектории конечной длины в монотонном многоугольнике  $\Omega$ . В качестве первой точки траектории выберем

$$Z_1 = (x_l(y_1) + d, y_1), \quad y_1 = y_{min}.$$

Ниже точки  $Z_1$  уклоняющегося объекта быть не может по определению области поиска. Поэтому согласно сказанному выше, существует точка

$$Z_2 = (x_r(y_2) - d, y_2), \quad y_2 - y_1 \geq h(\Omega, \lambda, l, d, y_1),$$

при перемещении в которую происходит вытеснение уклоняющегося объекта. В свою очередь, из точки  $Z_2$  ищущий объект может переместиться в точку

$$Z_3 = (x_l(y_3) + d, y_3), \quad y_3 - y_2 \geq h(\Omega, \lambda, l, d, y_2),$$

вытесняя уклоняющийся объект из горизонтальной полосы между прямыми  $y = y_2$  и  $y = y_3$  и т.д. Выполнение соотношения (16) гарантирует, что за конечное число шагов ищущий объект поднимется

до прямой  $y = y_{\max}$  и уклоняющийся объект будет вытеснен из всей области поиска.

Построенная траектория гарантирует обнаружение уклоняющегося объекта независимо его поведения, но, скорее всего, не является оптимальной (в смысле наименьшей длины). В частности, формула (16) не учитывает зависимость допустимого вертикального смещения от ширины области поиска в заданном сечении. Для уменьшения длины поисковой траектории имеет смысл при выборе очередной точки  $Z_n$  брать вертикальное смещение максимальным из множества допустимых. Но построение формул для максимального допустимого вертикального смещения в произвольно взятом горизонтальном сечении произвольного монотонного многоугольника является сложной задачей, требующей учета всех деталей взаимодействия границы области поиска и ищущего объекта. Поэтому для приблизительного определения максимального вертикального смещения имеет смысл применить моделирование информационных множеств.

Пусть точка  $Z_n = (y_l(x_n) + d, y_n)$  поисковой траектории уже построена. Зафиксируем некоторое вертикальное смещение  $\Delta y$ ,  $0 < \Delta y \leq y_{\max} - y_n$ , и проверим, является ли оно допустимым. К моменту достижения ищущим объектом точки  $Z_n$  уклоняющегося объекта не может быть ниже прямой  $y = y_n$  по построению траектории. Область неопределенности в этот момент времени положим равной  $W_n = \Omega \setminus \left( \{(x, y) \mid y < y_n\} \cup \overline{B}(Z_n, l) \right)$ . Рассмотрим точку  $Z_{n+1}(\Delta y) = (x_r(y_n + \Delta y) - d, y_n + \Delta y)$ . Будем считать, что отрезок  $Z_n Z_{n+1}(\Delta y)$  целиком принадлежит области поиска  $\Omega$ . В противном случае движение по отрезку  $Z_n Z_{n+1}(\Delta y)$  выводит ищущий объект за пределы области поиска, и смещение  $\Delta y$  не является допустимым по определению.

Введем разбиение временного отрезка  $[0, Z_n Z_{n+1}(\Delta y)/\alpha]$  достаточно большим числом точек и построим компьютерную аппроксимацию области неопределенности  $W_{n+1}(\Delta y)$  на момент достижения ищущим объектом точки  $Z_{n+1}(\Delta y)$  с использованием формул (5)–(6). Если множество  $W_{n+1}(\Delta y)$  лежит не ниже прямой  $y = y_{n+1}$ , то согласно соотношению (7) уклоняющегося объекта ниже этой прямой быть не может и вертикальное смещение  $\Delta y$  является допустимым для  $y = y_n$ .

Таким образом, компьютерное моделирование информационных множеств позволяет проверить, является ли вертикальное смещение  $\Delta y$  допустимым для заданного  $y$ . Найдем приблизительное значе-

ние максимального допустимого смещения  $\Delta y_{max}$  для  $y = y_n$ . Ясно, что допустимое смещение в большинстве случаев не может превосходить радиус круга обнаружения  $l$ . Поэтому возьмем несколько значений вертикальных смещений  $0 < \Delta y_1 < \Delta y_2 < \dots < \Delta y_L = l$  и проверим, какие из них являются допустимыми. Если даже  $\Delta y_1$  допустимым не является, то точность компьютерной модели является недостаточной для построения траектории и необходимо увеличить либо число  $L$ , либо точность модели, либо возможности ищущего объекта. Если допустимым является  $\Delta y_L$ , то положим  $\Delta y_{max} = l$ . В остальных случаях для некоторого  $i$  смещение  $\Delta y_i$  является допустимым, а  $\Delta y_{i+1}$  — не является. Применяя метод деления пополам на отрезке  $[\Delta y_i, \Delta y_{i+1}]$ , можно уточнить и улучшить приближенное значение максимального допустимого смещения  $\Delta y_{max}$ .

Положим очередную точку траектории равной  $Z_{n+1} = (x_r(y_n + \Delta y_{max}) - d, y_n + \Delta y_{max})$ . Если точка  $Z_{n+1}$  оказалась на прямой  $y = y_{max}$ , то поисковая траектория построена, в противном случае мы будем искать максимальное допустимое смещение для точки  $Z_{n+1}$  и т.д.

Траектория поиска в монотонном многоугольнике, построенная с использованием данного метода, приведена на рис. 5.

Ищущий объект, положение которого в изображенный на рис. 5 момент времени обозначено как  $a(t)$ , перемещается по траектории из точки  $A$  в точку  $B$ . Область неопределенности, обозначенная на рисунке темным цветом, постепенно уменьшается и при достижении ищущим объектом точки  $B$  оказывается пустым множеством. К этому моменту времени уклоняющийся объект будет гарантированно обнаружен.

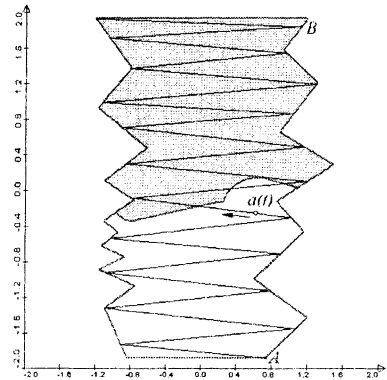


Рис 5.

Поисковая траектория  
в монотонном многоугольнике.

## Литература

- [1] Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. *Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему* // *Фундаментальная и прикладная математика*, 1995, Т.1, Вып.4.
- [2] Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. *Метод следящих областей в задачах поиска* // *Математический сборник*, 1993, Т.184, №10.
- [3] Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. *Динамические задачи поиска и обнаружения на некоторых замкнутых поверхностях* // *Дифференциальные уравнения*, 1993, Т.29, №11.
- [4] Скворцов А.А. *Динамический поиск в плоской выпуклой области*. М., Деп. в ВИНТИ 10 ноября 1995 г., №2985–В95.
- [5] Скворцов А.А. *Динамический поиск в трехмерных выпуклых областях* // *Вестник московского университета. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика*, 1999, №3.
- [6] Березин С.Б. *Информационные множества в задаче динамического поиска объектов с несколькими ищущими* // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика*, №3, 2001.
- [7] Скворцов А.А. *Алгоритмическая реализация теоретико-множественных операций на плоскости*. М., Деп. в ВИНТИ 10 июля 2000 г., №1915–В00.
- [8] Дебелов В.А., Мацокин А.М., Упольников С.А. *Разбиение плоскости и теоретико-множественные операции* // *Сибирский журнал вычислительной математики* / РАН. Сибирское отделение, Новосибирск, 1998, Т.1, №3.
- [9] Аджиев В., Пасько А., Савченко В., Сурин А. *Моделирование форм с использованием вещественных функций* // *Открытые системы*, №5, 1996
- [10] Kokichi Sugihara, Masao Iri. *A Solid Modelling System Free from Topological Inconsistency*. // *Journal of Information Processing*, Vol. 12, No. 4, 1989.
- [11] Березин С.Б. *Решение задачи динамического поиска в монотонном многоугольнике*. М.: Деп. в ВИНТИ, 2002, №1330–В2002.

**Адрес:** *Московский государственный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, 119899, Москва, Воробьевы горы*

**Address:** *Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics, Vorobjevy Gory, Moscow: 119899, RUSSIA*

**E-mail:** *s\_berezin@cs.msu.su*