В. В. Чупин, Сильный изгиб оболочек вращения при осесимметричном нагружении, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 70–75

2. K o i t e r W.T., N e u t A. v a n d e r. Interaction between local and overall buckling of stiffened compression panels // Thin-walled structures. - 1980. - Part.I. - P.51 - 66.

3. S r i d h a r a n S., A l i M.A. An improved interactive buckling analysis of thin-walled columns having doubly symmetric sections // Int. J. Solids and Structures. - 1986. - V.22. - n 4. - P.429 - 443.

4. К о й т е р В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. - 1960. - № 5. - С.99 - 110.

5. М а н е в и ч А.И. К теории связанной потери устойчивости подкрепленных тонкостенных конструкций // Прикладная математика и механика. - 1982. - Т.46. - Вып.2. - С.337 - 345.

В.В.Чупин

СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

В настоящее время для определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) составных оболочек вращения, работающих в условиях среднего изгиба [1], разработаны эффективные численные методы расчета [2, 3]. Однако методы расчета для тонкостенных систем, работающих в условиях сильного изгиба [1], стали разрабатываться сравнительно недавно [4, 5].

В работах [4, 6] предлагается для отыскания НДС составных оболочек вращения использовать шаговый процесс нагружения в предположении, что в процессе каждого этапа нагружения система испытывает дополнительный средний изгиб. Это позволяет представить сильный изгиб оболочки в виде последовательности средних изгибов, а накопленную погрешность в суммарном решении удалить путем решения исходных нелинейных уравнений сильного изгиба, но уже имея для них хорошее начальное приближение.

1. Запишем исходную нелинейную краевую задачу сильного изгиба для составных оболочек под действием осесимметричных нагрузок в виде [7]

$$\frac{d\vec{y}}{ds} = \vec{f}(s, \vec{y}, q) \ , \ (s_0 \le s \le s_N) \, , \ \frac{dq}{ds} = 0 \ , \qquad (1)$$

при следующих граничных условиях

$$\vec{g}_0(\vec{y}(S_0), q) = 0\ , \quad \vec{g}_N(\vec{y}(S_N), q) = 0\ . \tag{2}$$

Здесь $\vec{y} = \{N_S, Q_S, M_S, u, w, \vartheta_S\}$ – искомый вектор усилий и перемещений, q – безразмерный параметр нагрузки.

В ряде точек образующей S_m могут быть заданы условия сопряжения оболочек с круговым шпангоутом

$$\vec{y}^{\,+}(S_m) = \vec{G}_m(\vec{y}^{\,-}(S_m), q)\ , \tag{3}$$

где верхний индекс $(+)$ относится к правой, а индекс $(-)$ – к левой оболочкам.

Представим процесс нагружения гибкой составной оболочечной системы в виде последовательности значений нагрузок q_1, q_2, ..., q_i, ... и запишем решение на i-м шаге нагружения в виде суммы

$$\vec{y}_i = \vec{y}_{i-1} + \Delta\vec{y}_i\ , \tag{4}$$

где $\vec{y}_{i-1}$ – решение, полученное на предыдущем шаге нагружения q_{i-1} ; $\Delta\vec{y}_i$ – приращение решения, соответствующее приращению нагрузки $\Delta q_i = q_i - q_{i-1}$.

Подставляя (4) в уравнения (I – 3) и раскладывая в ряд по $\Delta\vec{y}_i$ и Δq_i, получим уравнения в квадратичном приближении

$$\frac{d(\Delta\vec{y}_i)}{dS} = \vec{f}_y^{\,\prime}(S,\vec{y}_{i-1},q_{i-1})\Delta\vec{y}_i + \frac{1}{2}\vec{f}_{yy}^{\,\prime\prime}(S,\vec{y}_{i-1},q_{i-1})\Delta\vec{y}_i\,\Delta\vec{y}_i + \tag{5}$$
$$+ \vec{f}_q^{\,\prime}(S,\vec{y}_{i-1},q_{i-1})\Delta q_i\ ,$$

граничные условия

$$\vec{g}_{0y}^{\,\prime}(\vec{y}_{i-1}(S_0),q_{i-1})\Delta\vec{y}_i + \frac{1}{2}\vec{g}_{0yy}^{\,\prime\prime}(\vec{y}_{i-1}(S_0),q_{i-1})\Delta\vec{y}_i\,\Delta\vec{y}_i + \tag{6}$$
$$+ \vec{g}_{0q}^{\,\prime}(\vec{y}_{i-1}(S_0),q_{i-1})\Delta q_i = 0\ ,\ (0 \rightleftharpoons N)\ ,$$

условия сопряжения

$$\Delta\vec{y}_i^{\,+}(S_m) = \vec{G}_{my}^{\,\prime}(\vec{y}_{i-1}^{\,-}(S_m),q_{i-1})\Delta\vec{y}_i^{\,-}(S_m) + \tag{7}$$
$$+ \frac{1}{2}\vec{G}_{myy}^{\,\prime\prime}(\vec{y}_{i-1}^{\,-}(S_m),q_{i-1})\Delta\vec{y}_i^{\,-}\,\Delta\vec{y}_i^{\,-} + \vec{G}_{mq}^{\,\prime}(\vec{y}_{i-1}^{\,-}(S_m),q_{i-1})\Delta q_i\ ,$$

где, опуская шаг по нагрузке i , можно j-е слагаемые представить следующим образом:

$$(\vec{f}_y' \Delta \vec{y})_j = \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \Delta y_k \ , \ (\vec{f}_q')_j = \frac{\partial f_j}{\partial q} \ .$$

$$(\vec{f}_{yy}'' \Delta \vec{y} \Delta \vec{y})_j = \sum_{k=1}^{6} \sum_{m=1}^{6} \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_k \partial y_m} \Delta y_k \Delta y_m \ .$$

Таким образом, полученная нелинейная краевая задача (5 - 7) для i-го шага нагружения содержит нелинейность в виде квадратичных слагаемых, которые дополнительно упрощаются на основе предположения о среднем изгибе оболочек на i-м шаге нагружения ($\Delta\varepsilon_s$, $\Delta\varepsilon_\theta \ll 1$, $(\Delta\vartheta_s)^2 \ll 1$) [4], что приводит к упрощению нелинейного оператора в уравнении (5) - отбрасыванию некоторых слагаемых.

Решение нелинейной краевой задачи о среднем изгибе оболочек хорошо апробировано [2, 3]. Поэтому представляется рациональным для линеаризации нелинейных краевых задач (I - 3) и (5 - 7) использовать метод Ньютона - Канторовича. Линеаризованные краевые задачи сводятся к ряду задач Коши, которые решаются численно с применением дискретной ортогонализации С.К.Годунова [2, 3].

2. На основе двух полученных краевых задач для сильного изгиба (I - 3) ("сильная нелинейность")и для среднего изгиба (5 - 7) ("слабая нелинейность") исследуем область сходимости итерационного процесса Ньютона - Канторовича.

Рассмотрим круглую кольцевую пластинку, нагруженную равномерным давлением, с шарнирно опертым нагруженным краем (r=I0 см)

$$u = W = M_s = 0$$

и свободным внутренним краем (r_0 = I см) -

$$N_s = Q_s = M_s = 0 \ .$$

Толщина пластинки h = 0,I см, модуль упругости E = 68 ГПа и коэффициент Пуассона ν = 0,3.

Исследуем зависимость числа итераций на первом шаге по нагрузке от величины этой нагрузки, при этом вектор начального приближения $\vec{y}^{(0)}$ принимается равным нулю. Расчет проводился для дискретного ряда шагов по давлению Δq = 0,I, 0,2, 0,3, ... МПа. На рисунке I приведено число итераций $n_{итер}$ при использовании

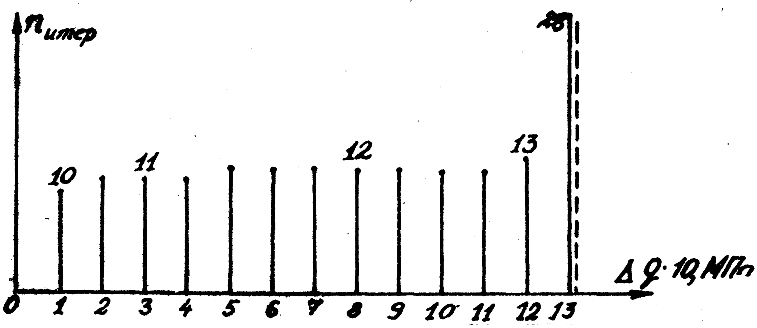

Рис. I

уравнений в квадратичном приближении (5 – 7), а штриховая линия указывает границу области сходимости, после которой итерационный процесс Ньютона – Канторовича расходится. На рисунке 2 приведены такие же данные при использовании исходных нелинейных уравнений

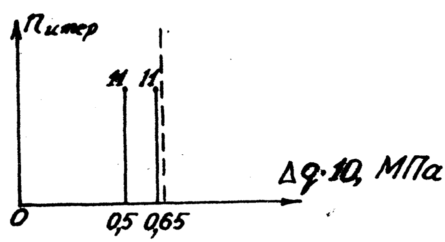

Рис. 2

сильного изгиба (I – 3). Сравнение областей сходимости показывает, что для данной задачи область сходимости уравнений в квадратичном приближении (5 – 7) значительно (в 20 раз) превышает область сходимости уравнений с сильной нелинейностью (I – 3). Но так как уравнение для приращений компонентов НДС в квадратичном приближении на каждом из этапов нагружения не является точным, то представляется наиболее рациональным получать решение задачи, выполняя несколько шагов по нагрузке на основе квадратичных уравнений, а затем уточнять решение, переходя к исходной системе уравнений (I – 3). Наличие квадратичных членов в (5 – 7) позволяет также использовать их для обхода предельных точек при смене параметра нагружения.

3. На основе изложенной методики, сочетающей шаговую процедуру нагружения с процедурой уточнения решения, получены решения ряда нелинейных задач сильного изгиба как отдельных оболочек, так и оболочечных систем [4, 6, 7].

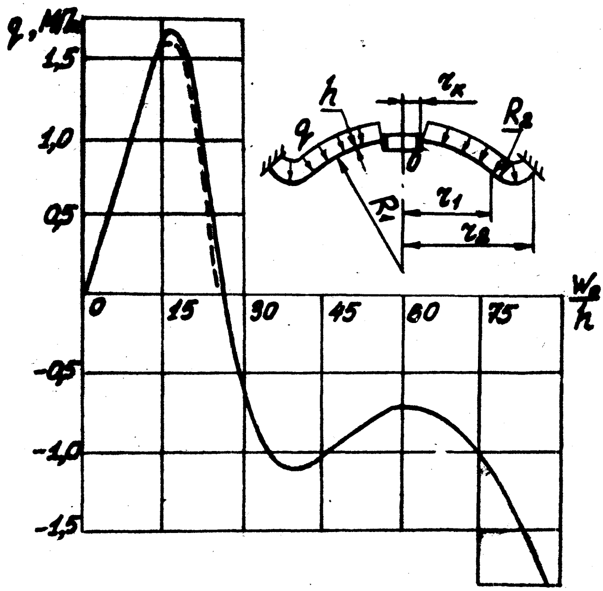

Рис. 3

В качестве примера рассмотрим нелинейное поведение вытеснительной диафрагмы при нагружении ее равномерным давлением (рис.3). Диафрагма представляет собой составную конструкцию постоянной толщины h = I мм из сферической и торовой оболочек с размерами R_1 = I00 мм, R_2 = I2,5 мм, r_1 = 80 мм, r_2 = I00 мм, E = 65 ГПа, ν = 0,3. На рисунке 3 приведены кривые деформирования $q_0 - W_0/h$ для точки О. Сплошная кривая соответствует деформированию замкнутой в вершине оболочки, а штриховая кривая – диафрагме, подкрепленной на внутреннем крае кольцом сечением $3h \times 5h$ и радиусом r_k = 6,5 см. Сравнение кривых показывает, что подкрепление внутреннего края приводит к незначительному снижению давления в предельной точке кривой деформирования.

Таким образом, предложенная методика позволяет производить надежные расчеты составных оболочечных конструкций, испытывающих сильный изгиб, вплоть до полного выворачивания.

Литература

1. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. - Казань: Таткнигоиздат, 1957. - 431 с.

2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1983. - 286 с.

3. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М., 1981. - 216 с.

4. Климанов В.И., Чупин В.В. Статика и устойчивость гибких неоднородных оболочечных систем. Красноярск, 1986. - 182 с.

5. Коровайцев А.В. Об общем алгоритме исследования состояния непологих оболочек вращения при больших осесимметричных перемещениях // Изв. вузов. Машиностроение. - 1981. - № 10. - С.12 - 15.

6. Гончаров К.А., Климанов В.И., Чупин В.В. Сильный изгиб оболочек вращения при осесимметричном нагружении / Урал. политехн. ин-т. - 1985. - Деп. в ВИНИТИ, 1985, № 591.

7. Климанов В.И., Чупин В.В., Гончаров К.А. Сильный изгиб составных оболочечных конструкций при осесимметричных упруго-пластических деформациях // Исследования пространственных конструкций: Межвуз. сб. Свердловск, 1987. - Вып.6. - С.3 - 13.