Ю. И. Виноградов, Е. И. Кочемасова, Эффективные приложения аналитических решений задач механики деформирования оболочек, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 93–99

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Ю.И.Виноградов, Е.И.Кочемасова

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Компьютеризация научных исследований требует совершенствования известных и создания новых ресурсосберегающих технологий решения на ЭВМ широких классов задач научно-технического прогресса.

Массовое увлечение численными методами определения решений дифференциальных уравнений краевых задач механики деформирования оболочек необоснованно оставляет без внимания полученные ранее многочисленные аналитические решения.

В докладе предлагается использовать аналитические решения в приложениях для широкого класса задач механики деформирования различных форм оболочек и конструкций из них. Малые затраты машинного времени и памяти и априорные оценки погрешностей вычислений особенно для расчета локально нагруженных оболочек делает предложенный ниже алгоритм решения исследовательских и прикладных задач ресурсосберегающими, часто превосходящими по указанным параметрам другие численные методы.

С целью обеспечения наглядности и без потери общности алгоритм излагается на примере решения задачи деформирования цилиндрической оболочки.

Аналитическое решение строится на основе уравнений теории круговых цилиндрических оболочек В.Флюгге [I].

Решение полученной путем представления тригонометрическими рядами искомых величин системы обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого номера гармоники будем искать в экспоненциальных функциях

$$u_n = Ae^{\lambda\xi},\ v_n = Be^{\lambda\xi},\ w = Ce^{\lambda\xi}. \qquad (I)$$

Значения постоянных A, B, C и показателя зависят от номера n, однако в записи с целью ее сокращения это не отмечается. В результате получим

$$\left[\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2(1+k)\right]A + \frac{1+\nu}{2}\lambda n B + \left[\nu\lambda - k\left(\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2}\right)\lambda n^2\right]C = 0,$$

$$-\frac{1+\nu}{2}\lambda n A+\left[\frac{1-\nu}{2}\lambda^2-n^2+\frac{3}{2}(1-\nu)k\lambda^2\right]B+\left[-n+\frac{3-\nu}{2}k\lambda^2 n\right]C=0,$$

$$\left[\nu\lambda-k\left(\lambda^3+\frac{1-\nu}{2}\lambda n^2\right)\right]A+\left[n-\frac{3-\nu}{2}k\lambda^2 n\right]B+\left[1+k(\lambda^4-2\lambda^2n^2+n^4-2n^2+1)\right]C=0. \tag{2}$$

Эта система уравнений имеет для A, B, C нетривиальные решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Раскрывая его с учетом того, что $k<<1$, получим

$$\lambda^8+a_3\lambda^6+a_2\lambda^4+a_1\lambda^2+a_0=0, \tag{3}$$

где $a_0=n^4(n^2-1)^2$, $a_1=-4n^6+8n^4-2\nu n^4-2n^2+2\nu n^2$,

$$a_2=6n^2(n^2-1)+\frac{1-\nu^2}{k},\quad a_3=-4n^2+2\nu.$$

Исследования показали, что характеристическое уравнение (3) имеет только комплексные корни

$$\lambda_j=\pm\alpha_1\pm i\beta_1(j=1,2,3,4),\quad \lambda_j=\pm\alpha_2\pm i\beta_2(j=1,2,3,4).$$

Каждому определенному корню λ_j соответствует линейно независимое решение обыкновенных дифференциальных уравнений задачи с постоянными A, B, C, которые связаны между собой уравнениями (2) так, что только одна из них может быть выбрана произвольно.

С целью сокращения вычислений обратим внимание, что при A в первом уравнении системы (2) и при B и C во втором стоят четные функции λ. Остальные функции λ этих уравнений нечетные. Учитывая еще, что $\lambda_1=-\lambda_4$, $\lambda_2=-\lambda_3$, $\lambda_5=-\lambda_8$, $\lambda_6=-\lambda_7$, запишем

$a_j=\pm d_1\pm i e_1(j=1,2,3,4)$, $a_j=\pm d_2\pm i e_2(j=5,6,7,8)$,

$b_j=f_1+i g_1(j=1,4)$, $b_j=f_1-i g_1(j=2,3)$, $b_j=f_2+i g_2(j=5,8)$, $b_j=f_2-i g_2(j=6,7)$.

Тогда $A_j=a_jC_j$, $B_j=b_jC_j$.

В итоге аналитическое решение при переходе к действительным функциям принимает вид

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}[A_1(d_1F_1-e_1F_2)-B_1(e_1F_1+d_1F_2)-C_1(d_1F_3+e_1F_4)-D_1(e_1F_3-d_1F_4)+\ldots]\cos n\varphi,$$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}[A_1(f_1F_1-g_1F_2)-B_1(g_1F_1-f_1F_2)+C_1(f_1F_3+g_1F_4)+D_1(g_1F_3-f_1F_4)+\ldots]\sin n\varphi, \tag{4}$$

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}(A_1F_1-B_1F_2+C_1F_3-D_1F_4+\ldots)\cos n\varphi,$$

$$F_1=e^{\alpha_1\xi}\cos\beta_1\xi,\ F_2=e^{\alpha_1\xi}\sin\beta_1\xi,\ F_3=e^{-\alpha_1\xi}\cos\beta_1\xi,\ F_4=e^{-\alpha_1\xi}\sin\beta_1 n.$$

С целью сокращения записи ограничились лишь первой половиной правых частей формул, так как она отличается от второй половины только индексами при α и β.

Внутренние силовые факторы и их производные легко получаются с учетом решения (4).

Классическое продолжение решения прикладных задач состоит далее в определении постоянных интегрирования для заданных граничных условий. Однако при этом возникают непреодолимые технические трудности: число операций при вычислениях столь велико, что решение возможно только с помощью ЭВМ, а использование ЭВМ для расчета тонких и длинных оболочек не дает желаемого результата из-за присутствия в решении задач быстро возрастающих и убывающих функций, которое ведет к потере точности решения.

Избежать трудности можно с помощью следующего алгоритма продолжения решения прикладных задач. Составляют вектор-столбец $T = |u_n, v_n, w_n, w_n', \bar{N}_{xn}, \bar{N}_{x\varphi n}, \bar{Q}_{xn}, \bar{M}_{xn}|^T$. Представляют его в матричной форме

$$T = FC, \tag{5}$$

где F - матрица (8x8) функциональных элементов, $C = |A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2|^T$, $\bar{N}_{xn} = \frac{N_{xn}R}{B}$, $\bar{N}_{x\varphi n} = \frac{2RN^*_{x\varphi n}}{(1-\nu)B}$, $\bar{Q}_{xn} = \frac{Q^*_{xn}R^3}{D}$, $\bar{M}_{xn} = \frac{M_{xn}R^2}{D}$.

Для $\xi = 0$ соотношение (5) приобретает вид $T_0 = F_0 C$. Отсюда $C = F_0^{-1} T_0$. Исключая теперь C из (5) и обозначая $K = F F_0^{-1}$, получим связь вектора T состояния любого сечения оболочки с вектором T_0 в начальном ее сечении

$$T = KT_0, \tag{6}$$

где K - матрица (8x8), элементами которой являются фундаментальные в смысле Коши - Крылова функции, так как они обладают точно такими же свойствами, что и гиперболотригонометрические функции, полученные А.Н.Крыловым для расчета балок, лежащих на упругом основании [2].

Соотношение (6) справедливо для любого участка оболочки. Обозначая индексами "н" и "к" соответственно начало и конец j-го участка оболочки произвольной длины и разбивая вектор состояния сечения оболочки на геометрический $p = |u_n, v_n, w_n, w_n'|^T$ и силовой $q = |\bar{N}_{xn}, \bar{N}_{x\varphi n}, \bar{Q}_{xn}, \bar{M}_{xn}|^T$, а матрицу K на соответствующие блоки $K_{ij} (i,j = 1,2)$, соотношение (6) перепишем в виде

$$p_{Hj} = K_{11} p_{Kj} + K_{12} q_{Kj}, q_{Hj} = K_{22} p_{Kj} + K_{23} q_{Kj} . \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$q_{Hj} = B_1 p_{Hj} + B_2 p_{Kj}, q_{Kj} = B_3 p_{Hj} + B_4 p_{Kj} . \tag{8}$$

Здесь j обозначает номер участка и номер правого сечения этого участка оболочки. Матрицы B_I, B_2, B_3, B_4, как следует из (8), характеризуют жесткость j-го участка оболочки. Индекс j у них опущен, так как при решении задач с целью сокращения затрат машинного времени участки следует выбирать одинаковой длины, которые для оболочек постоянной толщины имеют одинаковую жесткость.

Используя геометрические $p_{H1} = p_0, \ldots, p_{Kj} = p_{Hj+1} = p_j, \ldots, p_{KS} = p_S$ и силовые $q_{H1} = -R_0, \ldots, q_{Kj} - q_{Hj+1} = R_j, \ldots, q_{KS} = R_S$ условия сопряжения участков оболочки, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -B_1 p_0 - B_2 p_1 &= R_0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots , \\ B_3 p_{j-1} + (B_4 - B_1) p_j - B_2 p_{j+1} &= R_j , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots , \\ B_3 p_{S-1} + B_4 p_S &= R_S , \end{aligned} \tag{9}$$

где S – число сопрягаемых участков,

$$B_1 = -K_{12}^{-1} K_{11}, B_2 = -K_{12}^{-1}, B_3 = K_{21} - K_{22} K_{12}^{-1} K_{11}, B_4 = K_{22} K_{12}^{-1} .$$

Решая систему уравнений (9), определяют для n-го члена разложений элементы геометрических векторов p_j. Соответствующие им элементы силовых векторов q_j находят с помощью соотношений (8). Если необходимо определить значения p и q в пределах какого-либо участка j оболочки, следует воспользоваться соотношениями (7). Предложенный алгоритм особенно эффективен при исследовании влияния краевых условий нагружения оболочек системой сосредоточенных сил и моментов, так как и то и другое учитываются в конце вычислительного алгоритма при решении системы алгебраических уравнений [3].

Предложенный алгоритм решения прикладных задач легко распространяется и на случаи произвольного нагружения оболочки по линиям и площадкам ее поверхности, очерченным линиями главных кри -

визн. При этом частные решения для дифференциальных уравнений с правыми частями, если они аналитически не получены, вычисляются на основе формулы

$$K^* = \int_{\xi_0}^{\xi} K(\xi,\tau) f(\tau)\, d\tau ,$$

где $f(\tau)$ – правые части, а $K(\xi,\tau) = K_{\xi_0}^{\xi}(K_{\xi_0}^{\tau})^{-1}$ – так называемая матрица Коши [4], и учитываются при записи системы (9).

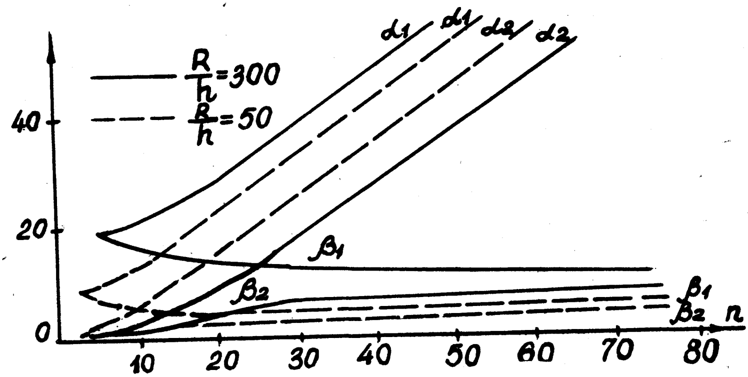

Рис. I

Анализ комплексных корней (рис.I) характеристического урав – нения (3) показывает, что для больших действительных частей их график можно аппроксимировать прямой $\alpha_1 = a + bn$, где $a = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{R}{h}}$, $b \approx 1$, хотя он носит дискретный характер. Такая аппроксимация вполне пригодна для оценки длины участка оболочки, при которой не происходит потери точности вычислений на ЭВМ. Численным экспериментом установлено, что комплекс $\alpha_1 \xi$, который является показателем убывающих и возрастающих экспоненциальных функций, входящих в решения (4), не должен превышать 5 ÷ 8 и зависит от величины номера n разложений и относительной толщины R/h оболочки. Для осесимметричных задач $a\xi \leq 3 \div 5$.

Для защемленной по краям оболочки, подкрепленной по середине ее длины шпангоутом и нагруженной двумя уравновешенными радиаль – ными силами, приложенными к шпангоуту, с параметрами конструкции

$$\frac{(EJ_x)_ш}{(Eh)_{об} R^3} = 0{,}833\cdot 10^2 , \frac{(EJ_x)_ш}{(EF)_ш R^2} = 0{,}833\cdot 10^{-3}, \frac{R}{h} = 100 , \frac{l}{R} = 1,$$

некоторые из полученных результатов представлены на рис. 2 и рис. 3.

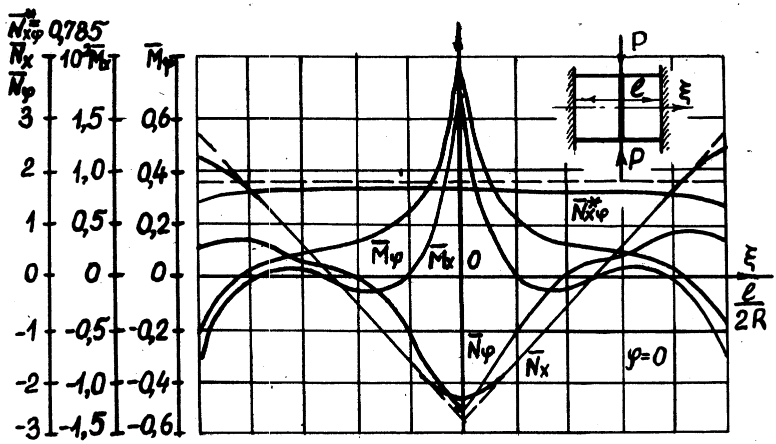

Рис. 2

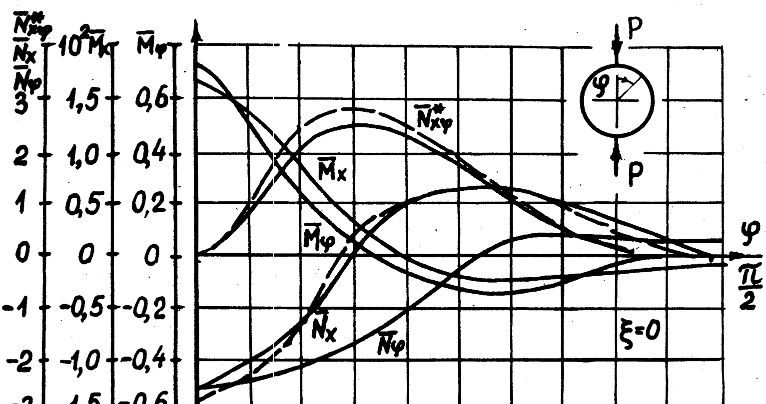

Рис. 3

Большая жесткость шпангоута выбрана лишь с той целью, чтобы сравнить полученные результаты с теми, что следуют при решении этой же задачи по безмоментной теории. Они представлены на рисунках пунктирными линиями.

Алгоритм решения задач механики деформирования других форм оболочек ничем не отличается от изложенного.

Литература

1. Ф л ю г г е В. Статика и динамика оболочек. - М.: Изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961. - 307 с.

2. К р ы л о в А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. - Л.: АН СССР, 1931. - 154 с.

3. В и н о г р а д о в Ю.И. Методы вычислений и построение алгоритмов решения краевых задач строительной механики // Докл. АН СССР. - 1988. - Т.298. - № 2. - С.308 - 313.

4. Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 548 с.

Г.М.Кадисов

РАСЧЕТ РЕГУЛЯРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СКЛАДЧАТЫХ СИСТЕМ НА СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ И КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим тонкостенные цилиндрические системы, состоящие из жестко сочлененных между собой по продольным кромкам узких прямоугольных пластинок, и опирающиеся по торцам на абсолютно жесткие в своей плоскости и абсолютно гибкие из нее сплошные диафрагмы. Для расчета таких систем А.В.Александровым предложен метод перемещений [1, 2]. За основные неизвестные метода принимаются амплитуды гармоник при разложении функций смещений узловых линий, являющихся линиями пересечения срединных поверхностей пластинок, в одинарные тригонометрические ряды. Функции, определяющие напряженно-деформированное состояние (НДС) каждой пластинки, также представляются тригонометрическим рядом по продольной координате, а амплитуды гармоник зависят от поперечной координаты. Как правило, расчет проводится с учетом ограниченного числа гармоник.

Для оценки погрешности, возникающей при усечении рядов, выполнен анализ [3] зависимости амплитуд нормальных напряжений в поперечном сечении складки, подкрепленной ребрами, от волнового числа $\alpha = n\pi b_n/(2l)$, где b_n - ширина пластинки, l - пролет складки, n - номер гармоники, при загружении одной узловой линии сосредоточенной силой. Малым волновым числам ($\alpha < 0{,}8$) соответ-