Литература

1. Lindstrom T. *Dynamical properties of maps fitted to data in the noise-free limit* // Journal of Biological Dynamics. – 2013. – 7(1). – P. 108–116.

2. Jianxin Liu, Xuan Zhang, Zhiming Li, Xuling Li. *A tent map based conversion circuit for robot tactile sensor* // Journal of Sensors. – 2013. – V. 2013. – 5 p.

3. Wang Shuang-xin, Li Han, Zhang Xiu-xia, Wang Zhi-qin. *Nonlinear predictive load control of boiler-turbine-generating unit based on chaos optimization* // 2nd Chaotic Modeling and Simulation Int. Conf., – Crete, Greece, 1-5 June, 2009.

4. Tramontana F., Gardini L., Westerhoff F. *Intricate asset price dynamics and one-dimensional discontinuous maps* // In: Puu T., Panchuck A. (eds.) Advances in nonlinear economic dynamics. Nova Science Publishers, 2010.

CHAOS IN DYNAMICS OF PIECE-WISE LINEAR MAP WITH TWO PARAMETERS

I.I. Aksanova, D.Z. Urazova

We investigate a dynamic system given by a one-dimensional piece-wise linear map with two parameters. We describe domains in the plane of the parameters where dynamic behavior of the map is chaotic.

Keywords: dynamical system, chaos, piece-wise linear map.

УДК 517.9

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

А.В. Багаев[1]

1 *a.v.bagaev@gmail.com*; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

Обсуждается задача Штурма–Лиувилля для волнового уравнения колебаний малой амплитуды несжимаемой идеальной однослойной и двуслойной жидкости в замкнутом бассейне с неровным дном. Найдены собственные моды колебаний при определенной функциональной зависимости ширины и глубины бассейна. Показано, что собственные моды выражаются через многочлены Чебышева второго рода, и приведены некоторые свойства собственных мод. Построено решение задачи Коши в виде ряда по собственным модам колебаний, причем коэффициенты ряда могут быть вычислены как коэффициенты ряда Фурье по синусам.

Ключевые слова: волновое уравнение с переменными коэффициентами, уравнение Клейн–Гордона, задача Штурма–Лиувилля, многочлены Чебышева второго рода, колебания идеальной жидкости в замкнутом бассейне.

Исследуются колебания несжимаемой идеальной жидкости в канале прямоугольного сечения в рамках теории мелкой воды. Как известно [1], такие волновые движения описываются уравнением

$$B(x)\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(B(x)c^2(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где $\eta(x,t)$ — смещение раздела слоев разной плотности в случае внутренних волн и водной поверхности в случае поверхностных волн, $c(x)$ — скорость распространения волн, $B(x)$ — ширина канала прямоугольной формы. Для поверхностных волн квадрат скорости распространения волн определяется равенством $c^2(x) = gh(x)$, где g — значение ускорения свободного падения, $h(x)$ — глубина бассейна, а для внутренних волн —

$$c^2(x) = g' \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)},$$

где h_1 и $h_2(x)$ — глубины верхнего и нижнего слоев, $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ — редуцированное значение ускорения свободного падения, $\rho_1 < \rho_2$ — плотности верхнего и нижнего слоев.

Метод разделения перменных, примененный к уравнениям вида (1), приводит к задаче Штурма–Лиувилля, решения которой удается найти только для некоторых частных случаев, причем, как правило, в виде специальных функций.

Трансформационная техника ([2]–[4]) позволяет перейти от гиперболического волнового уравнения (1) к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами, благодаря чему решение задачи Штурма–Лиувилля находится в элементарных функциях. Этот переход предполагает, что скорость распространения (следовательно, глубина) и ширина канала связаны уравнением

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}}\frac{d}{dx}\left(c(x)B(x)\right)\right] = 2p\sqrt{\frac{B(x)}{c(x)}}, \tag{2}$$

тем самым общность исходной задачи сужается. Тем не менее, такие случаи интересны для физиков, поскольку позволяют доказать существование бегущих волн в сильно неоднородных средах [4]-[7].

В [8] получен общий вид решения уравнения (2) и проведен анализ полученных конфигураций бассейна. Некоторые такие частные конфигурации были получены в [7].

В [8] найдено ограниченное, но сингулярное решение ($c(x)$ или $B(x)$ обращаются в нуль). Такое решение соответствует конфигурации канала типа «озеро». Его можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} c(x) = \sqrt{q}\dfrac{\sqrt{1-\psi^2(x)}}{\psi'(x)}, \\ B(x) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{q}}\psi'(x)\sqrt{1-\psi^2(x)}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\psi(x)$ — возрастающая непрерывная на $[0,L]$ и дифференцируемая на $(0,L)$ функция, L — длина канала, $q>0$, $\gamma>0$ — произвольные константы. Мы предполагаем, что $\psi(0) = -1$, $\psi(L) = 1$. Таким образом, $c(x)$ и $B(x)$ если и имеют особые точки, то только на концах отрезка $[0,L]$.

В [9] при естественном предположении ограниченности решения $\eta(t,x)$ уравнения (1) найдено выражение для n-ой собственной моды колебаний:

$$\eta_n(t,x) = A_n \cos(\omega_n t - \varphi) u_n(x),$$

где A_n, $\varphi = \mathrm{const}$, $\omega_n = \sqrt{q}\sqrt{n^2-1}$ — частота колебаний,

$$u_n(x) = \frac{\sin(n \arccos \psi(x))}{\sqrt{1-\psi^2(x)}}.$$

Обозначив $s = \psi(x)$, функцию $u_n(x)$ можем переписать в виде

$$u_n(s) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad s \in [-1, 1]. \tag{4}$$

Формула (4) определяет в точности многочлен Чебышева второго рода $U_{n-1}(s)$ на отрезке $[-1, 1]$ (см., например, [10]), благодаря чему функции $u_n(x)$ обладают рядом замечательных свойств [9].

Исследованы собственные моды для бассейнов следующих конфигураций: 1) постоянной ширины, 2) постоянной глубины, 3) «согласованного» канала переменных ширины и глубины.

1) Если канал имеет постоянную ширину, то согласно (3) скорость распространения $c(x)$ задается параметрически

$$\begin{cases} c(s) = c_0(1-s^2),\ c_0 = \mathrm{const}, \\ x(s) = \dfrac{L}{\pi}\left(s\sqrt{1-s^2} + \pi - \arccos s\right), \end{cases} \quad s \in [-1, 1].$$

При этом функции $u_n(x)$ также имеют параметрический вид

$$\begin{cases} u_n(s) = \dfrac{\sin(n \arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}, \\ x(s) = \dfrac{L}{\pi}\left(s\sqrt{1-s^2} + \pi - \arccos s\right), \end{cases} \quad s \in [-1, 1].$$

Отметим, что графики функций $u_n(x)$ касаются вертикальных прямых $x = 0$ и $x = L$. Таким образом, для этих функций «берег» является особой (сингулярной) точкой, где волновое поле, хотя и ограниченно, но его производная стремится к бесконечности.

2) В случае канала постоянной глубины ширина канала согласно (3) должна задаваться функцией $B(x) = B_0 \sin^2 \frac{\pi x}{L}$, $B_0 = \mathrm{const}$, а функции $u_n(x)$ имеют явный вид

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi n x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}}.$$

В этом случае все моды описываются аналитическими функциями и на «берегах» они имеют нулевые производные.

3) Для случая «согласованного» канала переменных ширины и глубины $c(x)/B(x) = \mathrm{const}$ скорость распространения $c(x)$ и ширина канала $B(x)$ согласно (3) определяются функциями

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{2c_0}{L}\sqrt{x(L-x)},\ c_0 = \mathrm{const}, \\ B(x) = \dfrac{2B_0}{L}\sqrt{x(L-x)},\ B_0 = \mathrm{const}. \end{cases}$$

В этом случае

$$u_n(x) = \frac{L}{2}\frac{\sin\left(n\arccos\frac{2x-L}{L}\right)}{\sqrt{x(L-x)}},$$

причем $u_n(x)$ является многочленом степени $n-1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. В этом случае все собственные моды описываются аналитическими функциями и на «берегах» они имеют конечные ненулевые (кроме $n=1$) производные.

Показано, что решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$\eta(x,0) = f_0(x), \quad \eta'_t(x,0) = f_1(x),$$

имеет вид

$$\eta(x,t) = C_1^{f_0} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(C_n^{f_0}\cos\omega_n t + \frac{C_n^{f_1}}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)u_n(x),$$

где

$$C_n^{f_i} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_i(x(y))\sin y\sin ny\,dy,\ i=0,1,\ n\in\mathbb{N},$$

являются коэффициентами разложения в ряд Фурье по синусам функции $f_i(x(y))\sin y$ на отрезке $[0,\pi]$, а функция $x = x(y)$ находится из уравнения $\psi(x) = \cos y$. Отметим, что в силу монотонности $\psi(x)$ уравнение $\psi(x) = \cos y$ имеет решение, причем:

1) $x(y) = \frac{L}{\pi}(\cos y\sin y + \pi - y)$ для случая канала постоянной ширины;

2) $x(y) = \frac{L}{\pi}(\pi - y)$ для случая канала постоянной глубины;

3) $x(y) = \frac{L}{\pi}(1+\cos y)$ для случая «согласованного» канала переменных ширины и глубины $c(x)/B(x) = \mathrm{const}$.

Заключение. Нами получены ограниченные собственные моды, что свидетельствует об их физической реализуемости. Сингулярность (там, где она появляется) проявляется только в величине производной от смещения, которая не несет физического смысла. И хотя задача Штурма-Лиувилля решается не со стандартными граничными условиями типа Неймана или Дирихле, она ставится корректно и ее решения описывают собственные моды ограниченного водного бассейна переменной конфигурации («озера»).

Литература

1. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – 419 с.

2. Bluman G. *On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations* // SIAMJ. Appl. Math. – 1983. – V. 43. – P. 1259–1273.

3. Varley E., Seymour B. *A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients* // Stud. Appl. Math. – 1988. – V. 78. – P. 183–225.

4. Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E. *Homogenization of the variable-speed wave equation* // Wave Motion. – 2010. – V. 47, № 12. – P. 496–507.

5. Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. *Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах* // Фунд. и прик. гидрофизика. – 2010. – № 3. – С. 4–13.

6. Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н., Бацына Е.К. *Безотражательные волны в атмосфере Земли* // Письма в ЖЭТФ. – 2011. – Т. 93, № 10. –С. 625–628.

7. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Рувинская Е.А., Гиниятуллин А.Р., Наумов А.А. *Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины* // Фундам. и прик. гидрофизика. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 46–53.

8. Багаев А.В., Пелиновский Е.Н. *Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане* // Журнал Средневолжск. матем. общ. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 127–136.

9. Багаев А.В., Пелиновский Е.Н. *Собственные моды колебаний в ограниченном бассейне переменной глубины* // Журнал Средневолжского математического общества. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 126–138.

10. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 480 с.

A SOLUTION OF THE STURM–LIOUVILLE PROBLEM OF WATER OSCILLATIONS IN THE CLOSED BASIN OF VARIABLE DEPTH

A.V. Bagaev

The Sturm–Liouville problem for the wave equation of small amplitude oscillations of an incompressible ideal single-layer and two-layer fluid in a closed basin with uneven bottom is discussed. Eigenmodes of oscillations are found in the channel, the width and depth of which are functionally associated and vanish on a frontier of channel. It is shown that such eigenmodes are expressed through Chebyshev polynomials of the second kind. Some properties of the eigenmodes are found. The solution of the Cauchy problem is constructed in the form of series in the eigenmodes, the coefficients of series can be computed as the coefficients of the Fourier series for sine.

Keywords: variable-coefficient wave equation, Klein–Gordon equation, Sturm–Liouville problem, Chebyshev polynomials of the second kind, water oscillations in closed basin.

УДК 004.91

МЕТОД ИЗВЛЕЧЕНИЯ ТЕРМИНОВ В ЦИФРОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОЛЛЕКЦИЯХ

Р.Р. Батыршина[1]

1 *r-batyrshina@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматриваются существующие методы извлечения терминов. Представлен алгоритм их извлечения, основанный на методе использования математических тезаурусов. Метод реализован на языке Java.

Ключевые слова: кластеризация, извлечение терминов, тезаурус.

Извлечения терминов из научных документов играет важную роль в пополнении и в разработке различных терминологических ресурсов, в первую очередь математических тезаурусов и онтологий [1], [2]. Пополнение таких ресурсов вручную достаточно трудоемкая задача. Для облегчения данного процесса необходимо автоматизировать процесс извлечения терминов [2].