Д. О. Цветков, Колебания стратифицированной жидкости,частично покрытой крошеным льдом, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 12, 70–85

Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, №12, с. 70–85 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Д.О. ЦВЕТКОВ

КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ПОКРЫТОЙ КРОШЕНЫМ ЛЬДОМ

Аннотация. Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным льдом. Методом ортогонального проектирования граничных условий на подвижной поверхности и введения вспомогательных задач исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, крошеный лед, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

УДК: 517.986

Введение

Об истории вопроса. В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные и флотирующие жидкости. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами. Однако ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к нетрадиционным начально-краевым задачам. Это определяет самостоятельный математический интерес к таким проблемам.

Под стратифицированной жидкостью принято понимать жидкость, физические характеристики которой (плотность, теплоемкость, динамическая вязкость и др.) в стационарном состоянии меняются непрерывно или скачком лишь в одном выделенном направлении. Иначе говоря, в стационарном состоянии жидкости ее физические характеристики являются функциями лишь одной пространственной переменной. Стратификация жидкости может быть вызвана различными физическими причинами, наиболее часто встречающейся из них является сила тяжести. Эта сила создает в жидкости такое распределение ее частиц, растворенных в ней солей и взвешенных суспензий, при котором возникает неоднородность плотности жидкости вдоль направления гравитационного поля. Стратификация плотности, как показывают экспериментальные наблюдения, оказывает наиболее существенное влияние на динамические свойства жидкости и на процессы распределения в ней внутренних

Поступила 10.11.2017

волн. Поэтому в дальнейшем, говоря о стратифицированной жидкости, будем понимать под этим жидкость со стратификацией плотности, вызванной силой тяжести.

Начиная с середины XX в. многие начально-краевые задачи математической физики, связанные с проблемой малых движений и собственных (нормальных) колебаний сплошных сред, т. е. систем с бесконечным числом степеней свободы, изучаются методами функционального анализа. Не остались в стороне и исследования стратифицированной жидкости в сосуде конечных размеров (колебания нефти в танкерах и т. п.). Здесь возникли проблемы, характерные для колебания как однородной жидкости в ограниченной области (поверхностные волны при наличии свободной поверхности), так и неоднородной (стратифицированной) жидкости, заполняющей неограниченную область (внутренние волны). Так, Н.Д. Копачевским, А.Н. Темновым [1] применялся операторный подход к решению этого класса задач, доказывалось существование внутренних волн в стратифицированной жидкости, частично заполняющей неподвижный сосуд произвольной формы. Доказывалась теорема существования обобщенного решения соответствующей эволюционной задачи, изучалась структура спектра, вопросы базисности собственных функций. В работах С.А. Габова, А.Г. Свешникова [2], [3] применялась теория потенциала для доказательства существования обобщенных решений начально-краевых задач для уравнения колебаний стратифицированной жидкости. Отметим, что данный подход связан с редукцией на основе потенциальной функции основной векторной системы уравнений гидродинамики к одному скалярному уравнению и последующему изучению начально-краевых задач для этого уравнения.

Поясним теперь термин “флотирующая жидкость”. Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, ограниченную свободной поверхностью и имеющую конечную или бесконечную глубину. Предположим, что на свободной поверхности жидкости плавают весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало. Такая ситуация с физической точки зрения возникает, например, когда имеем дело с очисткой или обогащением минерального сырья с помощью известной технической процедуры, называемой флотацией, или при наличии на свободной поверхности плавающей ледовой крошки. Число работ, посвященных этой тематике, исчисляется единицами. Упомянем коротко о тех задачах, которые имеют непосредственное отношение к данной работе. В работе С.А. Габова, А.Г. Свешникова [4] изучаются вопросы разрешимости начально-краевой задачи динамики флотирующей жидкости, описывающей малые колебания однородной жидкости, содержащейся в открытом сосуде. В работе М.А. Солдатова [5] рассматривается случай, когда свободная поверхность идеальной однородной жидкости частично покрыта крошеным льдом. Представленная работа является обобщением работы [5] на случай стратифицированной жидкости. В частности, операторные коэффициенты итогового дифференциального уравнения удовлетворяют более общим свойствам, что усложняет исследование поставленной задачи.

1. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — участок “чистой воды”, Γ_2 — участок “крошеного льда”. Обозначим через ρ_1 поверхностную плотность крошеного льда. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести

$\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{\min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{\max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0. \tag{1}$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля–Брента или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x),\ x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$, поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3)$, $\rho = \rho(t,x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\widehat{x})$ ($\widehat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (например, [1], [4], [5]):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\big) + \vec{f}(t,x) \quad \text{в } \Omega, \\
\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\
\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad \text{на } S, \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \\
p = g\rho_0(0)\zeta \quad \text{на } \Gamma_1, \quad p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad \text{на } \Gamma_2, \\
\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad x \in \Omega, \quad \zeta(0,\widehat{x}) = \zeta_0(\widehat{x}), \quad \widehat{x} \in \Gamma.
\end{gathered} \tag{2}$$

В начально-краевой задаче (2) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ ввести поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанных с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{3}$$

Тогда придем к связи

$$\begin{gathered}
\rho(t,x) = -\nabla\rho_0 \cdot \vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0'(x_3)v_3(t,x) + f_0(x), \\
f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0'(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3,
\end{gathered} \tag{4}$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\
\psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - gf_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3).
\end{gathered} \tag{5}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (2) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в } \Omega,\\
&\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad \text{на } S, \qquad \int_\Gamma v_3\,d\Gamma = 0,\\
&p = g\rho_0(0)v_3 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad \text{на } \Gamma_2,\\
&\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x),\\
&v_3(0,\widehat{x}) = \zeta(0,\widehat{x}) = \zeta^0(\widehat{x}), \quad \widehat{x}\in\Gamma.
\end{aligned} \tag{6}$$

Начально-краевая задача (6) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (6) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (2) можно найти по формулам (3) и (4).

2. Проектирование уравнений движения на ортогональные пространства

Начально-краевую задачу (6) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (6) на ортогональные подпространства [6]. С функцией ρ_0 свяжем гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{7}$$

Как следует из (1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства $0 < m \le \rho_0 \le M < \infty$, обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (7) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$. Через $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ обозначим подпространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ множества гладких функций:

$$\{\vec{v}\in\vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ в } \Omega,\ v_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

В качестве других подпространств возьмем

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) = \left\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p, \quad v_n = 0 \text{ на } S, \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\right\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) = \{\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0 \ \text{ на } \Gamma\}.$$

Лемма 1. *Имеет место ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0). \tag{8}$$

Доказательство повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (8) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ ([6], с. 106).

Будем считать $\vec{v}(t,x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, тогда в силу (6), (8) имеем

$$\vec{v}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0),$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) =: \vec{G}(\Omega,\rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\vec{v}(t,x) = \vec{w}(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x), \quad \vec{w}(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x)\in\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0),$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x), \tag{9}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0).$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (9) в первое уравнение (6) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right) + \rho_0^{-1}\nabla p_1 + P_{h,S}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_{h,S}\psi_0, \tag{11}$$

$$\rho_0^{-1}\nabla p_2 + P_{0,\Gamma}\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_{0,\Gamma}\psi_0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p \to p_1$, так как $p = p_1 + p_2$, $p_2 = 0$ на Γ.

Для перехода от (10), (11) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы

$$P_{h,S}\left[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\right] := \rho_0^{-1}\nabla\Psi, \quad P_{h,S}\left[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right] := \rho_0^{-1}\nabla\eta. \tag{13}$$

Тогда (11) дает интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + p_1 + \Psi + \eta - F = c(t) \quad \text{в } \Omega, \tag{14}$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0 = \rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (14) на Γ_2 и воспользуемся равенством

$$p_1 = g\rho_0(0)v_3 + \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) =$$
$$= g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) = g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) \quad \text{на } \Gamma_2,$$

получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{15}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_1. \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) вместе с (10) дают два уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (13), а также ограничения, следующие из (10)–(12). Таким образом, начально-краевую задачу (6) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0 \quad \text{в } \Omega,\\
&\operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,\\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_1,\\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \rho_1\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_2,\\
&\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{на } S,\\
&\int_\Gamma \Phi\, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}w(0,x) = P_0\vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(0,\widehat{x})\right)_\Gamma = \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma,\\
&\vec{w}(0,x) = P_0\vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(0,\widehat{x})\right)_\Gamma = \zeta^0(\widehat{x}), \quad \widehat{x}\in\Gamma.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

3. Переход к системе дифференциально операторных уравнений

Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma = \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях

$$
\int_\Gamma v_3\, d\Gamma = \int_\Gamma \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3\right) d\Gamma = 0 \implies \int_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma = 0,
$$

так как $w_3|_\Gamma = 0$, $\rho_0^{-1}|_\Gamma = \mathrm{const}$. Это же условие является необходимым условием разрешимости задачи Неймана

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{на} S,\\
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \psi \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Функцию $\psi = \rho_0^{-1}(0)\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right|_\Gamma$ будем рассматривать как элемент пространства $H = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$ и искать в виде пары функций $\psi = (\psi_1;\psi_2)$, где $\psi_1 = \psi|_{\Gamma_1}$ и $\psi_2 = \psi|_{\Gamma_2}$.

Рассмотрим подпространства

$$
\begin{aligned}
H_1 &:= \{(\psi_1;\psi_2) \mid \psi_1 \in L_2(\Gamma_1)\ominus\{1_{\Gamma_1}\}, \psi_2 \equiv 0\},\\
H_2 &:= \{(\psi_1;\psi_2) \mid \psi_2 \in L_2(\Gamma_2)\ominus\{1_{\Gamma_2}\}, \psi_1 \equiv 0\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, H_1 и H_2 ортогональны относительно скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$. Тогда H можно разложить в ортогональную сумму трех пространств:

$$
H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,
$$

где $H_3 = \{\widehat{v} \mid \widehat{v} = \alpha\widehat{\varphi}\ \forall\alpha\in\mathbb{C},\ \widehat{\varphi} = (\mathrm{mes}\,\Gamma_2; -\mathrm{mes}\,\Gamma_1)\}$ — одномерное подпространство пространства H, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$.

Введем действующие в пространстве H ортопроекторы P_1, P_2 и P_3 на подпространства H_1, H_2 и H_3 соответственно. Они будут действовать по правилам

$$
P_1 u = (u_1 - \widetilde{u}_1; 0), \quad \widetilde{u}_1 = (\mathrm{mes}\,\Gamma_1)^{-1}\int_{\Gamma_1} u_1\, d\Gamma_1,
\tag{19}
$$

$$
P_2u = (0; u_2 - \widetilde{u}_2)\,, \quad \widetilde{u}_2 = (\operatorname{mes}\Gamma_2)^{-1}\int_{\Gamma_2} u_2\,d\Gamma_2, \tag{20}
$$
$$
P_3u = (I - P_1 - P_2)\,u = (\widetilde{u}_1; \widetilde{u}_2)\,.
$$

Цель дальнейших построений — перейти от начально-краевой задачи (17) к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве.

Граничные условия в (17) на Γ_1 и Γ_2 можно записать покомпонентно в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\psi_1 + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_1,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\psi_2 + \rho_1\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_2.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Перейдем к построению потенциала Φ в области Ω, выразив его через $\psi = \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\big|_\Gamma$. Так как $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)$, то функция Φ является решением задачи Неймана (18).

В дальнейшем для обозначения среднего интегрального значения функции, заданной на Γ или ее части (см. (19), (20)), будем использовать знак $\widetilde{\ }$.

Для получения общего вида функции Φ, учитывающего представление

$$
\psi = \Big(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\Big) + \Big(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\Big) + \Big(\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2\Big) =: P_1\psi + P_2\psi + P_3\psi, \tag{22}
$$

рассмотрим три вспомогательные задачи.

Задача 1. Найти обобщенное решение $\Phi = \Phi_1$ задачи (18) при $\psi = (\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0) = P_1\psi \in H_1$:

$$
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{на } S, \quad \int_\Gamma \Phi_1\,d\Gamma = 0,
$$
$$
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} = \psi_1 - \widetilde{\psi}_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{23}
$$

Так как $H_1 \subset H$, то необходимое условие разрешимости задачи (23) выполнено, а значит, эта задача имеет единственное решение (например, [6], с. 46) $\Phi_1 = \Phi_1(x)$ из пространства $H^1_\Gamma(\Omega,\rho_0)$.

Введем оператор T_1, который функции $P_1\psi$ ставит в соответствие решение задачи (23),

$$
\Phi_1 = \Phi_1|_\Omega =: T_1P_1\psi = T_1(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0) =: T_1u_1, \quad u_1 := P_1\psi \in H_1.
$$

Рассмотрим теперь значения функции Φ_1 на границе Γ. Введем оператор следа на границе Γ

$$
\gamma\,(\Phi_1|_\Omega) := \Phi_1|_\Gamma
$$

и представим функцию $\Phi_1|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$
\Phi_1|_\Gamma = P_1\gamma T_1P_1\psi + P_2\gamma T_1P_1\psi + P_3\gamma T_1P_1\psi =: C_{11}u_1 + C_{21}u_1 + C_{31}u_1. \tag{24}
$$

Задача 2. Найти обобщенное решение $\Phi = \Phi_2$ задачи (18) при $\psi = (0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2) = P_2\psi \in H_2$:

$$
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{на } S, \quad \int_\Gamma \Phi_2\,d\Gamma = 0,
$$
$$
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} = \psi_2 - \widetilde{\psi}_2 \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{25}
$$

Эта задача имеет единственное решение $\Phi_2 = \Phi_2(x) \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$. Введем оператор T_2, который функции $P_2\psi$ ставит в соответствие решение

$$\Phi_2 = \Phi_2|_\Omega =: T_2P_2\psi = T_2(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2) =: T_2u_2, \quad u_2 = P_2\psi \in H_2.$$

Снова рассмотрим значения функции Φ_2 на границе Γ и представим $\Phi_2|_\Gamma$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_2|_\Gamma = P_1\gamma T_2P_2\psi + P_2\gamma T_2P_2\psi + P_3\gamma T_2P_2\psi =: C_{12}u_2 + C_{22}u_2 + C_{32}u_2. \tag{26}$$

Задача 3. Найти обобщенное решение $\Phi = \Phi_3$ задачи (18) при $\psi = (\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2) = P_3\psi \in H_3$:

$$\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_3) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_3 \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } S,$$
$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = P_3\psi \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi_3\, d\Gamma = 0. \tag{27}$$

Так как H_3 — одномерное подпространство, $H_3 = \{\alpha\widehat{\varphi}\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_2; -\operatorname{mes}\Gamma_1)$, то достаточно рассмотреть граничную задачу (25) с функцией $\widehat{\varphi}$ взамен $P_3\psi$, т. е. с граничными условиями на Γ_1 и Γ_2 следующего вида:

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = \operatorname{mes}\Gamma_2 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} = -\operatorname{mes}\Gamma_1 \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{28}$$

Задача (25) имеет единственное решение $\Phi_3 = \alpha\widehat{\Phi} \in H^1_\Gamma(\Omega, \rho_0)$, где $\widehat{\Phi}$ — решение задачи (27) с граничными условиями (28). Аналогично предыдущему введем оператор T_3, который функции $\widehat{P}\psi$ ставит в соответствие решение задачи (27), (28):

$$\Phi_3 =: T_3P_3\psi =: T_3u_3, \quad u_3 = P_3\psi \in H_3.$$

Представим функцию $\Phi_3|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1, H_2 и H_3:

$$\Phi_3|_\Gamma = P_1\gamma T_3P_3\psi + P_2\gamma T_3P_3\psi + P_3\gamma T_3P_3\psi =: C_{13}u_3 + C_{23}u_3 + C_{33}u_3. \tag{29}$$

В этом случае операторы C_{13}, C_{23}, C_{33} одномерные.

В дальнейшем все функции, зависящие от t, будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве, в связи с этим в уравнениях задачи заменим $\partial/\partial t$ на d/dt.

В соответствии с разложением (22) представим решение исходной задачи (18) в виде суммы решений трех вспомогательных задач:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \tag{30}$$

Перепишем (21) в виде условия

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Phi|_{\Gamma_1}; \Phi|_{\Gamma_2}) + \rho_0 g(\psi_1; \psi_2) + \rho_1\frac{d^2}{dt^2}(0; \psi_2) + \\ + (\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) + (\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) = (F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) + (c(t); c(t)) \tag{31}$$

и рассмотрим его как дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве

$$H = H_0 \oplus H_2 \oplus H_3$$

относительно искомых функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$. Предварительно преобразуем отдельные группы слагаемых в (28) с тем, чтобы можно было ввести операторные матрицы, действующие на искомый вектор-столбец $u := (u_1; u_2; u_3)^t$.

Прежде всего, в силу (24), (26), (29) и (30) получим

$$(\Phi|_{\Gamma_1}; \Phi|_{\Gamma_2}) = \Phi|_\Gamma = \Phi_1|_\Gamma + \Phi_2|_\Gamma + \Phi_3|_\Gamma =$$

$$= C_{11}u_1 + C_{21}u_1 + C_{31}u_1 + C_{12}u_2 + C_{22}u_2 + C_{32}u_2 + C_{13}u_3 + C_{23}u_3 + C_{33}u_3,$$

где элементы C_{ik} определены формулами (24), (26) и (29) . Поэтому согласно этим определениям имеем соответственно

$$C_{11}u_1 + C_{12}u_2 + C_{13}u_3 \in H_1, \quad C_{21}u_1 + C_{22}u_2 + C_{23}u_3 \in H_2,$$
$$C_{31}u_1 + C_{32}u_2 + C_{33}u_3 \in H_3.$$

Далее очевидно соотношение

$$(\psi_1; \psi_2) = \left(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\right) + \left(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + \left(\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2\right) = u_1 + u_2 + u_3.$$

Пусть P_H — ортопроектор на $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Тогда простые вычисления показывают, что

$$P_H(0; \psi_2) = \left(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + P_H\left(0; \widetilde{\psi}_2\right) = \left(0; \psi_2 - \widetilde{\psi}_2\right) + \alpha\left(\widetilde{\psi}_1; \widetilde{\psi}_2\right) = u_2 + \alpha u_3,$$
$$0 < \alpha := \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2} < 1.$$

Спроектируем обе части (31) на подпространства H_1, H_2 и H_3 соответственно.
Введем ряд обозначений

$$P_H(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) = P_1(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) + P_2(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) + P_3(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) =: f_0 + f_2 + f_3;$$

$$P_H(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) = P_1(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) + P_2(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) + P_3(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) =: \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3,$$
$$\Psi_i =: B_{2,i}u_i \quad \rho_0^{-1}\nabla\Psi_i = P_{h,S}\big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\big], \qquad i = \overline{1,3}\,; \tag{32}$$

$$P_H(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) = P_1(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) + P_2(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) + P_3(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) =: \eta_1 + \eta_2 + \eta_3,$$
$$\eta_i =: B_i u_i, \quad \rho_0^{-1}\nabla\eta_i = P_{h,S}\big[N^2(x_3)\left((U_i u_i)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\big], \quad i = \overline{1,3}; \tag{33}$$
$$B_{11}\vec{w} := P_0\big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\big], \quad B_{1,i}u_i := P_0\big[N^2(x_3)\left((U_i u_i)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\big], \quad i = \overline{1,3}. \tag{34}$$

Здесь через U_i ($i = \overline{1,3}$) обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи (см. (23), (25), (27)) ставит в соответствие элементу u_i функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$.

С учетом замен (32)–(34) перепишем первое уравнение (17) и (31) в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$(\vec{w}; u)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H, \quad u = (u_1; u_2; u_3)^t \in H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$
$$f = (f_1; f_2; f_3)^t, \quad I := \operatorname{diag}(\rho_0 g I_1; \rho_0 g I_2; \rho_0 g I_3),$$
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\rho_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{21} := \begin{pmatrix} B_{2,1} \\ B_{2,2} \\ B_{2,3} \end{pmatrix}, \tag{36}$$
$$B_{12} := \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \end{pmatrix}, \quad B_{22} := \operatorname{diag}(B_1; B_2; B_3).$$

Начальные условия задачи (17) порождают начальные условия для уравнения (35):

$$\vec{w}(0) = P_0\vec{v}^0, \quad u_i(0) = P_i\zeta^0, \quad i = \overline{1,3}; \tag{37}$$
$$\vec{w}'(0) = P_0\vec{u}^0, \quad u_i'(0) = P_i\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right), \quad i = \overline{1,3}. \tag{38}$$

Итогом рассмотрения задачи (17) в этом разделе является

Теорема 1. *Начально-краевая задача* (17) *равносильна задаче Коши* (35)–(38) *для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$.

4. Свойства операторных коэффициентов задачи

Лемма 2. *Оператор*

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

— самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$.

Доказательство. Все операторы C_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$, из которых состоит C, являются произведением ограниченных операторов ортогонального проектирования на компактный оператор γT_j (например, [6]). Следовательно, все C_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$, являются компактными операторами, а значит, и C является компактным.

Докажем, что оператор C является самосопряженным. Обозначим через Φ решение задачи Неймана (18) при $\psi = u = (u_1; u_2; u_3)^t$. Для любых $u, v \in H$ имеем

$$\begin{aligned}
(Cu, v)_H = &\left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) = \\
&= (C_{11}u_1, v_1) + (C_{12}u_2, v_1) + (C_{13}u_3, v_1) + (C_{21}u_1, v_2) + (C_{22}u_2, v_2) + (C_{23}u_3, v_2) + \\
&+ (C_{31}u_1, v_3) + (C_{32}u_2, v_3) + (C_{33}u_3, v_3) = [(C_{11}u_1, P_1v) + (C_{21}u_1, P_2v) + (C_{31}u_1, P_3v)] + \\
&+ [(C_{12}u_2, P_1v) + (C_{22}u_2, P_2v) + (C_{32}u_2, P_3v)] + [(C_{13}u_3, P_1v) + (C_{23}u_3, P_2v) + (C_{33}u_3, P_3v)] = \\
&= (\Phi_1|_\Gamma, v)_H + (\Phi_2|_\Gamma, v)_H + (\Phi_3|_\Gamma, v)_H .
\end{aligned}$$

Обозначим через Υ решение задачи Неймана (18) при $\psi = v = (v_1; v_2; v_3)^t$. Тогда, учитывая (18), получим

$$\begin{aligned}
(Cu, v)_H = &\int_\Gamma \Phi_1 \cdot v \, d\Gamma + \int_\Gamma \Phi_2 \cdot v \, d\Gamma + \int_\Gamma \Phi_3 \cdot v \, d\Gamma = \int_\Gamma \Phi \cdot v \, d\Gamma = \int_\Gamma \Phi \cdot \rho_0^{-1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial x_3} \, d\Gamma = \\
&= \int_\Omega \Phi \cdot \nabla \left(\rho_0^{-1} \nabla \Upsilon \right) \, d\Omega + \int_\Omega \rho_0(x_3) \cdot \left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) \cdot \left(\rho_0^{-1} \nabla \Upsilon \right) \, d\Omega = \\
&= \int_\Omega \rho_0(x_3) \cdot \left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) \cdot \left(\rho_0^{-1} \nabla \Upsilon \right) \, d\,\Omega = \dots = (u, Cv)_H.
\end{aligned}$$

Так как оператор C является ограниченным, то из полученного выражения следует, что оператор C самосопряженный.

Рассмотрим теперь форму оператора C

$$(Cu, u)_H = \int_\Omega \rho_0(x_3) \cdot \left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) \cdot \left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) \, d\Omega \geq 0.$$

Если $(Cu, u)_H = 0$, то $\Phi \equiv \varphi = \text{const}$. Тогда из условия нормировки функции Φ получаем $\Phi \equiv 0$, следовательно, $u = 0$. Отсюда приходим к выводу, что оператор C положительный. □

Лемма 3. *Оператор*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

самосопряженный ограниченный и неотрицательный, действующий в пространстве

$$\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3.$$

Доказательство следует из равенства

$$(\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} = (B_{11}\vec{w}, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \sum_{i=1}^{3}(B_{1,i}u_i, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + \sum_{i=1}^{3}(B_{2,i}\vec{w}, u_i)_{H_i} + \sum_{i=1}^{3}(B_i u_i, u_i)_{H_i} =$$

$$= \int_\Omega N^2(x_3)\rho_0(x_3)\left|w_3 + \left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2 d\Omega. \quad \square$$

Замечание. В уравнении (35) оператор A с учетом его определения и леммы 2 удовлетворяет следующим свойствам: $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — пространство ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Однако операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определенным оператором:

$$0 \le \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (например, [7], с. 44).

5. Теорема существования сильного решения

Перепишем (35) в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I + B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Осуществляя замену $Au = z$ в (39), перейдем от задачи (35)–(38) к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathcal{A}v = g + Rv, \quad v(0) = (\vec{w}(0); z(0))^t, \quad v'(0) = (\vec{w}'(0); z'(0))^t, \tag{40}$$

$$\mathcal{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = (P_0\psi_0; f)^t, \quad v = (\vec{w}; z)^t,$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_0 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I + B_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F). \tag{41}$$

Введем эквивалентную норму в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$:

$$[v_1; v_2] := (I_B^{-1}v_1; v_2),$$

тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $\mathcal{A} = I_B F$ – самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным (см. (41)).

Определение 1. Сильным (по переменной t) решением задачи (40) на отрезке $[0, T]$ назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1) $v(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при любом $t \in [0; T]$ и $\mathcal{A}v(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$,

2) $v'(t) \in C^1\left([0; T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$,

3) $v''(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$,

4) выполнены уравнение (40), где все слагаемые — функции из $C([0; T]; \mathcal{H})$, и начальные условия.

Теорема 2. *Если выполнены условия*

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(I_B F) = \mathcal{D}(F), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}), \tag{42}$$

$$f(t) \in C^1\left([0;T];\mathcal{H}\right), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H, \tag{43}$$

то задача (40) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. Если для задачи Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathcal{A}v = g, \quad v(0) = v^0, \quad v'(0) = v^1, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \gg 0, \tag{44}$$

выполнены условия

$$v(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad v'(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}), \quad g(t) \in C^1\left([0;T];\mathcal{H}\right), \tag{45}$$

то задача (44) имеет единственное сильное решение $v = v_0(t)$ на отрезке $[0;T]$, выражаемое формулой ([7], с. 67)

$$v_0(t) = \cos(t\mathcal{A}^{1/2})v^0 + \mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})v^1 + \int_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)g(s)ds, \tag{46}$$

где $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ и $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})$ — семейство операторных косинус- и синус-функций, построенное по $\mathcal{A}$ (например, [7], с. 48–56).

Обозначим в (40) $\widehat{g}(t) = g(t) + Rv$. Считая, что $\widehat{g}(t)$ известна, и используя (46) для решения задачи Коши (44), для искомой функции $v(t)$ приходим к следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$\begin{aligned} v(t) = \cos(t\mathcal{A}^{1/2})v^0 + \mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})v^1 + \int_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)g(s)ds + \\ + \int_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds = v_0(t) + \int_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь $v_0(t)$ задана формулой (46) и строится по данным (45), причем она в силу (45) является сильным решением задачи (44). Это означает, в частности, что

$$v_0(t) \in C^2\left([0;T];\mathcal{H}\right) \cap C^1\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right) \cap C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A})\right). \tag{48}$$

Отметим, что $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})Rv(s)$ непрерывно дифференцируема по t (например, [8], [9], а также [7], с. 51, свойство 3), следовательно, уравнение (47) имеет решение $v(t) \in C\left([0;T];\mathcal{H}\right)$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства 2), 3), 4) из определения 1.

Формальное дифференцирование обеих частей (47) приводит к формулам

$$\begin{aligned} v'(t) = v_0'(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t \mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds = v_0'(t) + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)\right\}ds = v_0'(t) + \int_0^t \cos\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)\,ds, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} v''(t) = v_0''(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t \cos\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s) = v_0''(t) + Rv(t) + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\cos\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)\right\}ds = v_0''(t) + Rv(t) - \int_0^t \mathcal{A}^{1/2}\sin\left((t-s)\mathcal{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds. \end{aligned} \tag{50}$$

Из этих формул делаем следующие выводы. Так как в силу (48) $v_0{}'(t) \in C\left([0;T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})\right)$, то из (49), а также из того, что оператор-функция $\cos(t\mathcal{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема по t, следует свойство 2) определения 1. Так как $v_0{}''(t) \in C\left([0;T];\mathcal{H}\right)$, то из (50) и того, что оператор-функция $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(t\mathcal{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема, получаем свойство 3).

Наконец, непосредственный подсчет показывает, что функция $v(t)$, являющаяся решением уравнения (47), удовлетворяет также исходному уравнению (40), причем все слагаемые в нем — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$. Заметим еще, что из (47) следует $v(0) = v_0(0) + 0 = v_0(0)$, а из (49) — $v'(0) = v_0'(0) + 0 = v_0'(0)$. □

Лемма 4. *Если в задаче* (35)–(38) *выполнены условия*

$$(\vec{w}^0;u^0)^t \in \mathcal{H}, \quad (\vec{w}^1;u^1)^t \in \mathcal{H}, \quad (P_0\psi_0;f)^t \in C^1\left([0,T];\mathcal{H}\right), \quad \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H, \tag{51}$$

то в задаче (40) *имеют место начальные условия* (42), (43).

Доказательство. С учетом замены $Au = z$ пусть выполнены условия (42), (43), тогда

$$\left(v^0 = (\vec{w}^0;z^0)^t \in \mathcal{D}(I_BF) = \mathcal{D}(F)\right) \iff \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad z^0 = Au^0 \in \mathcal{D}(A^{-1})\right),$$

последнее условие равносильно тому, что $u^0 \in H$.

Далее,

$$\left(v^1 = (\vec{w}^1;z^1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}((I_BF)^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2})\right) \iff$$
$$\iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad z^1 = Au^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2})\right) \iff$$
$$\iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad A^{-1/2}Au^1 = A^{1/2}u^1 \in H\right) \iff \left(\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0), \quad u^1 \in H\right). \quad □$$

Исходя из формулировок задач (2), (6) и (17), дадим (согласованные между собой) определения сильных по переменной t решений этих задач.

Определение 2. Сильным (по переменной t) решением задачи (2) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, $\rho\,(t,x)$, $\zeta\,(t,\widehat{x})$, для которых выполнены следующие условия:

1) $\vec{u}\,(t) \in C^1\big([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\big([0,T]\,;\vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\big)$, $\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\mathfrak{L}_2\,(\Omega)\right)$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2\int_\Omega \left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega,$$

и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (2);

2) $u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \in C\left([0,T]\,;H\right)$;

3) выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)\zeta \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_1)\right), \quad p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$ соответственно;

4) выполнены начальные условия (2).

Определение 3. Сильным (по переменной t) решением задачи (6) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{v}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, для которых выполнены следующие условия:

1) $\vec{v}\,(t) \in C^2\big([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\big)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\big([0,T]\,;\vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\big)$ и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (6);

2) выполнено граничное условие на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0(0)v_3 \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_1)\right), \quad v_3 = \vec{v}\cdot\vec{e}_3,$$

$$p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,; L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$ соответственно;

3) выполнены связи (3) и (4);

4) выполнены начальные условия (6).

Определение 4. Сильным (по переменной t) решением задачи (17) на промежутке $[0,T]$ назовем такие функции $\vec{w}(t,x)$ из $\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и $\Phi\,(t,x)$ со значениями в $H^1_\Gamma\,(\Omega,\rho_0)$, для которых выполнены следующие условия:

1) $\vec{w}\,(t) \in C^2\big([0,T]\,;\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\big)$;

2) $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma \in C^2\left([0,T]\,;H\right)$, $\Phi_\Gamma \in C^2\big([0,T]\,;H^{1/2}_\Gamma\big)$ $\forall t\in[0,T]$;

3) выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + P_0\left[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\right] = P_0\psi_0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_2\rho_0^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad \text{на } \Gamma_2,$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями соответственно в $\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)$, $L_2(\Gamma_1)$, $L_2(\Gamma_2)$, причем $\rho_0^{-1}\nabla\Phi \in C^2\left([0,T]\,;\vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)\right)$;

4) выполнены начальные условия (17).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\,, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad \zeta^0 \in H = L_2\,(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}\,, \tag{52}$$

$$\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma \in H, \quad f(t) \in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right). \tag{53}$$

Тогда каждая из задач (2), (6) *и* (17) *имеет единственное сильное по t решение.*

Доказательство проведем по этапам, переходя последовательно от задачи (35)–(38) к (17), затем от (17) к (6) и от (6) к (2).

Если выполнены условия (52) и (53), то для функций

$$(\vec{w}^0;u^0)^t = (P_0v^0;u_1^0;u_2^0;u_3^0)^t, \quad u_i^0 = P_i\zeta^0, \quad i=\overline{1,3},$$

$$(\vec{w}^1;u^1)^t = (P_0\vec{u}^0;P_1\zeta^1;P_2\zeta^1;P_3\zeta^1)^t \quad P_i\zeta^1 = P_i\left[(P_{h,S}\vec{u})\cdot\vec{n}\right], \quad i=\overline{1,3},$$

$$(P_0\psi_0;f)^t = (P_0\psi_0;f_1;f_2;f_3)^t, \quad f_i = P_iF_\Gamma, \quad i=\overline{1,3},$$

выполнены условия (51).

Действительно, для функции $\vec{w}(t,x)$ имеем

$$\big(\vec{w}^0 = P_0\vec{v}^0 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \vec{w}^1 = P_0\vec{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left((w_3\,(0,\widehat{x}))_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{w}\,(0,x)) = P_0\vec{u}^0\,(x) \in \vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\right). \tag{54}$$

Кроме того, $\vec{w}\,(t) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\right)$.

Так как $\zeta^0 \in H = L_2\,(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$, $\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma \in H$, то с учетом (54) получим

$$(\vec{w}^0;u^0)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H, \quad (\vec{w}^1;u^1)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus H.$$

Далее,

$$f(t) \in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right) \iff \psi_0 \in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right) \iff$$
$$\iff P_0\psi_0 \in C^1\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\ P_{h,S}\psi_0 = \rho_0^{-1}\nabla F \in C^1\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right) \iff$$
$$\iff P_0\psi_0 \in C^1\left([0,T];\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\right),\ F_\Gamma \in C^1\left([0,T];H_\Gamma^{1/2}\right),$$

и если $F_\Gamma \in H_\Gamma^{1/2}$, то $P_iF_\Gamma \in H_i$. Поэтому по лемме 4 получаем, что задача (35)–(38) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Тогда

$$\Phi|_\Gamma = (\Phi|_{\Gamma_1};\Phi|_{\Gamma_2}) \in C^2\left([0,T]\,;H_\Gamma^{1/2}\right) \implies \rho_0^{-1}\nabla\Phi\,(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{G}_{h,S}\,(\Omega)\right).$$

Отсюда следует, что для функции $\Phi = \Phi\,(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (17), причем в краевых условиях все функции являются непрерывными по t.

Кроме того, выполнены начальные условия

$$\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,(0,x)\right)_\Gamma = \zeta^0\,(\widehat{x}) \in H, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,(0,\widehat{x})\right)_\Gamma = \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma \in H,$$

а также $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x) = P_{h,S}\vec{u}^0 \in \vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)$. Значит, согласно определению 4 функции $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi\,(t,x)$ являются сильным (по t) решением задачи (17) на отрезке $[0,T]$.

Убедимся теперь, что из доказанных фактов следует существование сильного (по t) решения задачи (6). Обратным ходом преобразований (см. (9)) введем по сильному решению $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi\,(t,x)$ задачи (17) функции $\vec{v}\,(t,x)$ и $p\,(t,x)$:

$$\vec{v}(t,x) = \vec{w}(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right).$$

Так как

$$\vec{w}(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{J}_0\,(\Omega,\rho_0)\right), \quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t,x) \in C^2\left([0,T]\,;\vec{G}_{h,S}\,(\Omega,\rho_0)\right),$$

$$p_1|_{\Gamma_1} = g\rho_0(0)v_3|_{\Gamma_1} = g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_1} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_1)\right),$$

$$p_1|_{\Gamma_2} = g\rho_0 v_3|_{\Gamma_2} + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_3|_{\Gamma_2} = g\rho_0\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_2)\right),$$

то $\rho_0^{-1}\nabla p_1(x,t) \in C\left([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0)\right)$, и тогда

$$\rho_0^{-1}\nabla p(t,x) = \rho_0^{-1}\nabla p_1(t,x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t,x) \in C\left([0,T];\vec{G}(\Omega,\rho_0)\right).$$

Далее начальные условия задачи (17) порождают начальные условия задачи (6):

$$v_3(0,\widehat{x}) = \zeta^0(\widehat{x}) \in H, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{w} + \rho_0^{-1}\nabla\Phi\right)(0,x) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega,\rho_0).$$

Опираясь на доказанные факты выше, учитывая (3), (4), легко проверим, что при условиях теоремы задача (2) имеет сильное (по t) решение в смысле определения 2. □

Автор выражает благодарность Н.Д. Копачевскому за внимание к работе и полезные советы.

Литература

[1] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **26** (5), 734–755 (1986).

[2] Габов С.А., Свешников А.Г. *Задачи динамики стратифицированных жидкостей* (Наука, М., 1986).

[3] Габов С.А., Свешников А.Г. *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн* (Наука, М., 1990).

[4] Габов С.А., Свешников А.Г. *Математические задачи динамики флотирующей жидкости*, Итоги науки и техн.. Сер. Матем. анал. **28**, 3–86 (1990).

[5] Солдатов М.А. *Колебания жидкости в бассейне, частично покрытом льдом*, Учен. зап. СГУ **12** (2), 80–83 (2000).

[6] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике*: *Эволюционные и спектральные задачи* (Наука, М., 1989).

[7] Копачевский Н.Д. *Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве.* Специальный курс лекций (ФЛП "Бондаренко О.А.", Симферополь, 2012).

[8] Sova M. *Cosine operator functions*, Rozpr. Math. **49**, 1–47 (1966).

[9] Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи* (Физматлит, М., 1995).

Денис Олегович Цветков

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (Таврическая академия), пр-т Вернадского, д. 4, г. Симферополь, 295000, Россия,

e-mail: tsvetdo@gmail.com

D.O. Tsvetkov

Oscillations of stratified liquid partially covered by crumpling ice

Abstract. We study the problem on small motions of ideal stratified fluid with a free surface, partially covered by crumbling ice. By the method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of the second order in a Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution to the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system.

Keywords: stratification effect in ideal fluids, initial boundary value problem, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem, strong solution.

Denis Olegovich Tsvetkov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University (Taurida Academy), 4 Vernadskogo Ave., Simferopol, 295000 Russia,

e-mail: tsvetdo@gmail.com