Г. О. Кипиани, Б. К. Михайлов, В. Г. Москалева, Устойчивость трехслойных оболочек и пластин с нарушениями сплошности в виде разрезов и отверстий, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 115–120 эксперименте. Для всех рассмотренных оболочек условие (2) выполняется в центре области воздействия объемного источника тепла.

На рисунке 2 кривая 2 характеризует расчетные сочетания параметров внутреннего давления p и импульсов давления, при которых происходит разрушение оболочек.

Литература

1. Мяченков В.И., Мальцев В.П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. - М.: Машиностроение, 1984. - 280 с.
2. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1983.- 286 с.
3. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. - М.: Машиностроение, 1968. - 192 с.

Г.О.Кипиани, Б.К.Михайлов, В.Г.Москалева

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН С НАРУШЕНИЯМИ СПЛОШНОСТИ В ВИДЕ РАЗРЕЗОВ И ОТВЕРСТИЙ

Предложен новый метод определения сжимающей критической нагрузки на трехслойные оболочки или пластины, имеющие разрезы в пределах каждого из слоев, а также сквозные разрезы.

Два внешних слоя являются несущими, средний слой играет роль заполнителя. Отверстие имитируется системой четырех сквозных разрезов, образующих замкнутый контур.

Данный метод основан на введении специальных разрывных функций геометрических соотношений теории пластинки и оболочек и является развитием ранее полученного авторами решения задачи об устойчивости сжатой прямоугольной пластины с разрезом, параллельным одной из сторон контура.

Выполненные примеры расчета иллюстрируют эффективность предложенного метода, приводящего к весьма простому алгоритму расчета при достаточной для практических целей точности результатов.

В случае разрезов, параллельных ортогональным осям, векторы углов поворота и перемещений, согласно [3, 4], представляются в виде

$$\bar{\gamma}^{*} = \bar{\gamma} + \sum \Delta\bar{\gamma}_i H_i + \sum \Delta\bar{\gamma}_j H_j ,$$
$$\bar{U}^{*} = \bar{U} + \sum \Delta\bar{U}_i H_i + \sum \Delta\bar{U}_j H_j , \qquad (I)$$

где $\Delta\bar{\gamma}_i$, $\Delta\bar{\gamma}_j$ – углы изломов на линиях разрезов; $\Delta\bar{U}_i$, $\Delta\bar{U}_j$ – векторы расхождений краев разреза; H_i, H_j – специальные разрывные функции, составленные из функций Хевисайда.

Подстановка выражений (I) в уравнения равновесия с помощью известных симметрических соотношений и соотношений упругости приводит к следующему уравнению:

$$L\bar{U} = \bar{P} + Lu\left(\sum \Delta\bar{U}_i H_i + \sum \Delta\bar{U}_j H_j\right) + Lj\left(\sum \Delta\bar{j}_i H_i + \sum \Delta j_j H_j\right), \qquad (2)$$

где $\bar{P}$ – вектор внешней нагрузки; L, Lu, Lj – матрицы из дифференциальных операторов.

В результате воздействия дифференциальных операторов на функции Хевисайда получаются сингулярные коэффициенты в виде дельта-функций и производных от них до третьего порядка.

Для решения уравнения (2) используется вариационный метод с аппроксимацией функции и посредством специальных разрывных функций, что обеспечивает достаточно хорошую сходимость рядов и приводит к весьма простому алгоритму расчета.

В случае прямоугольной трехслойной пластинки уравнения (2) принимают вид скалярной формы

$$\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x \partial y}\right) - U_\beta + \left(h+\frac{t}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x} =$$
$$= \left[-\frac{Bh}{G_3}\left(\Delta U_\beta \delta_x' + \frac{1-\mu}{2}\Delta U_\beta'' H_x + \frac{1+\mu}{2}\Delta V_\beta' \delta_x\right) - \Delta U_\beta H_x + \left(h+\frac{t}{2}\right)\Delta\gamma_1 H_x\right] H_{yy};$$

$$\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) - V_\beta + \left(h+\frac{t}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x} =$$
$$= \left[-\frac{Bh}{G_3}\left(\Delta V_\beta'' H_x + \frac{1+\mu}{2}\Delta V_\beta \delta_x' + \frac{1+\mu}{2}\Delta U_\beta' \delta_x\right) - \Delta V_\beta H_x + \left(h+\frac{t}{2}\right)\Delta W_j' H_x\right] H_{yy};$$

$$-2B\left(h+\frac{t}{2}\right)\Delta\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}+\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\right)-2\mathcal{D}\Delta^2 W = P+2B\left(h+\frac{t}{2}\right)[(\Delta U_\beta \delta_x'' + \tag{3}$$

$$+\Delta U_\beta'' \delta_x + \Delta V_\beta \delta_x' + \Delta V_\beta'' H_{yy})H_{yy} + \Delta V_\beta'' H_x \delta_{yy}] + \Delta V_\beta'' H_x \delta_{yy}] +$$

$$+2\mathcal{D}[(\Delta W \delta_x''' + 2\Delta W_y'' \delta_x' + \Delta W_y^{IV} 1_x + \Delta\gamma_1 \delta_x'' + \Delta\gamma_1'' \delta_x) H_{yy} +$$

$$+2\Delta W_y'' H_x \delta_{yy} + \Delta W_y'' \delta_{yy}' H_x + \Delta\gamma_{1y}' \delta_{yy} \delta_x] .$$

Здесь, согласно [I, 2], введены обозначения

$$U_\beta = \frac{1}{2}(U_1 - U_2);\ V_\beta = \frac{1}{2}(V_1 - V_2);$$

$$\Delta U_\beta = \frac{1}{2}(\Delta U_1 - \Delta U_2);\ \Delta V_\beta = \frac{1}{2}(\Delta V_1 - \Delta V_2).$$

Кроме того, для среднего слоя принято

$$\Delta U = \Delta V = 0 .$$

Для получения условия критического состояния компонент внешней нагрузки P следует представить в виде

$$P = T_1^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_2^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} ,$$

где T_1^0, T_2^0, S^0 – тангенциальные усилия в пластинке в момент ее выпучивания.

Для решения системы (3) может быть использован вариационный метод Бубнова – Галеркина. При этом компоненты U_β, W, V_β представляются системой аппроксимирующих функций в соответствии с граничными условиями по внешнему контуру.

Коэффициенты $\Delta U_\beta, \Delta V_\beta, \Delta W, \Delta\gamma_1$ находятся из условий равенства нулю усилий и момента на краях разреза. Эти условия в совокупности с системой (2) после умножения каждого уравнения на аппроксимирующие функции и интегрирования по площади пластинки образуют однородную систему алгебраических уравнений, из равенства нулю определителя которой находится величина критической внешней нагрузки. Аналогичным образом учитываются несколько разрезов как в направлении оси "у", так и в направлении оси "х".

Изложенный путь решения, основанный на методе, неоднократно использованном ранее различными авторами, дает вполне приемлемые для практического использования результаты, однако связан с весьма медленно сходящимся процессом последовательных приближений. Причина этого в том, что функции разрывные, представляемые формулами (I), плохо аппроксимируются рядами, составленными из регулярных, в частности, тригонометрических функций. В связи с этим нами предлагается другой модифицированный прием, связанный с разложением искомых функций по специальным разрывным функциям. Последние определяются из решения соответствующей статической задачи.

Для изложения существа предлагаемого решения положим $\Delta U_\beta = \Delta V_\beta = 0$, что обосновано для достаточно тонкой пластинки, и кроме того, $\Delta W = 0$, что соответствует излому без расхождения краев. Тогда система (3) приводится к одному уравнению

$$
\begin{aligned}
&2B\left(t+\frac{t}{2}\right)^2\Delta^2 W+\left(1-\frac{Bh}{G_3}\Delta\right)2\mathcal{D}\Delta^2 W=-2\left[B\left(h+\frac{t}{2}\right)^2+\right.\\
&\left.+\mathcal{D}\right]\cdot\left[(\Delta\gamma_1\delta_x''+\Delta\gamma_{1y}''\delta_x)H_{yy}+\Delta\gamma_{1y}'\delta_x\delta_{yy}-\delta_x H_{yy}\right]+\\
&+2\frac{Bh}{G_3}\mathcal{D}\left[(\Delta\gamma_1\delta_x^{IV}+2\Delta\gamma_{1y}''\delta_x'')H_{yy}+(\Delta\gamma_{1y}^{IV}H_{yy}+3\Delta\gamma_{1y}''\delta_{yy}+\right.\\
&\left.+3\Delta\gamma_{1y}''\delta_{yy}'+\Delta\gamma_{1y}'\delta_{yy})\delta_x\right].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Пусть внешняя нагрузка есть сосредоточенная сила в $x=\xi;\ y=\eta;$ $P=p\delta(x-\xi)\delta(x-\eta)$, тогда, полагая, что функции и $\Delta\gamma_1$, разлагаются в тригонометрические ряды по координате y, решение уравнения (4) в первом приближении представим так:

$$
W_1=(W_{01}+\Delta\gamma_{1(1)}f_1)\sin\beta y\ , \tag{5}
$$

где $f_1=A_1\varphi+A_2\varphi''+A_3\varphi^{IV}$, A_1, A_2, A_3 – постоянные коэффициенты, $\beta=\frac{\pi}{b}$.

Функции W_{01}, φ, φ'', φ^{IV} есть решения уравнений соответственно

$$
\begin{aligned}
&L_x W=P_k\delta(x-\xi);\ L_x\varphi=\delta(x-x_1)\ ;\\
&L_x\varphi''=\delta''(x-x_1);\ L_x\varphi^{IV}=\delta^{IV}(x-x_1);
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где L_x – оператор вида

$$L_x = 2B\left(h+\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{d^2}{dx^2}-\beta^2\right)^2(\cdots)+\left[1-\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\beta^2\right)\right]2\mathcal{D}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\beta^2\right)^2(\cdot) \quad (7)$$

Функция ψ определяется выражением вида

$$\psi = C_1 ch\, z x + C_2 sh\, z x + C_3 \beta x + C_4 \beta x\, sh\beta x + C_5 ch\beta x + C_6 sh\beta x + \psi^*,$$

где $\psi^* = \dfrac{1}{2z\beta^3(\beta^2-z^2)^2}\left[2B^3 sh\, z(x-x_1) - z(3\beta^2-z^2) sh\beta(x-x_1) + \right.$

$$\left. + z(\beta^2-z^2)(B\beta^2 2 sh\beta(x-x_1) + \beta(x-x_1) ch\beta(x-x_1))\right] H(x-x_1)$$

и является непрерывной. Произвольные ψ'', ψ^{IV} содержат изломы и скачки,что соответствует характеру распределения моментов и перерезывающих сил и обеспечивает хорошую сходимость. Поэтому удержание даже одного члена ряда дает погрешность около 5 %.

Коэффициент $\Delta\gamma_1$ находится из условия равенства нулю момента на линии разреза. Это приводит к выражению [5]

$$\Delta\gamma_1 = \frac{\alpha_1^2 + \mu\beta_1^2}{f_x'' - \mu\beta_1^2 f}, \quad (8)$$

где $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{a}$; $\beta_1 = \dfrac{\pi}{b}$.

Пусть пластина сжата вдоль оси "ох" усилием T_1^0. Подставив компоненту P как нагрузку на бесконечно малый элемент $d\eta d\xi$ и выразив ее через сжимающие усилия и кривизну (в момент потери устойчивости), имеем

$$P = -T_1^0 W'' = -T_1^0 W_1 \alpha_1^2 \sin\alpha_1\xi \sin\beta_1\eta . \quad 9)$$

Из выражения (5) после интегрирования по всей поверхности имеем

$$1 = \frac{T_{кр}}{L(\alpha_1\cdot\beta_1)}\left(1+\Delta\gamma_1\bar{f}\right), \quad (10)$$

где $\bar{f} = \dfrac{2}{a}\int_0^a f(\xi)\sin\alpha_1\xi\, d\xi$;

$$L(\alpha_1\cdot\beta_1) = \left(2B\left(h+\frac{t}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{Bh}{G_3}(\alpha^2+\beta^2)\right)\cdot(\alpha_1^2+\beta_1^2)^2\right.$$

Выражение (I) удобно представить так:

$$T_{кр} = \frac{T_{кр}^0}{1+\Delta\gamma_1\bar{f}}, \quad (11)$$

где $T^0_{кр} = \frac{L(\alpha_1 \cdot \beta_1)}{\alpha_1^2}$ – значение критической нагрузки на сплошную нагрузку.

Для сплошной пластинки $\Delta\gamma = 0$ и данный результат совпадает с известным решением для сплошной пластинки, полученным, например, энергетическим методом. В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку с симметрично расположенным разрезом длиной $d' = a/3$, сжатую в направлении, перпендикулярном линии разреза.

Тогда в соответствии с (10), (11) получаем

$$\Delta\gamma_1 \bar{f} = 0{,}05703,$$

$$T_{кр} = \frac{T^0_{кр}}{1 + \Delta\gamma_1 \bar{f}} = 0{,}943\, T^0_{кр}.$$

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

2. Кипиани Г.О., Михайлов Б.К. Исследование устойчивости сжатых трехслойных пластин с разрезами / Ленинградский инженерно-строительный институт. – Л., 1987. – Деп. в ВИНИТИ 08.05.87, № 3351-В87.

3. Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л., 1980. – 196 с.

4. Михайлов Б.К., Москалева В.Г. Устойчивость сжатых пластин с разрезами. Численные методы в краевых задачах математической функции. Л., 1985. – С.155 – 160.

5. Mikhailow B.K., Kipiani G.O., Stezemecka M. Stability of structural construction units in 3-Sandwich plate with slots. // Miedzunarodowa konferencia naukowa. Naihowsze naukowo-badawczg problamu budavhictwa i ih zuhiarii srodowicka. Bialustok. Wudawhictwa Politechniki Bialcsockiei. – 1989. – T.I.