П. Г. Овчинников, Меры на логиках Гаддера и Маршана, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 95–98

2. Б а х в а л о в Н. С. Численные методы, I. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 632 с.

3. Н и к о л ь с к и й С. М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1983. – Т.I. – 464 с.

П.Г.Овчинников

МЕРЫ НА ЛОГИКАХ ГАДДЕРА И МАРШАНА

Пусть n , $L \in N$, $n \geq 2$, $L \geq 2$; $N = n \cdot L$ и пусть $Q = \{0, \dots, N-1\}$. Множество Q есть группа относительно сложения по модулю N . Через Σ обозначим наименьший σ-класс подмножеств множества Q , содержащий все множества вида $I_k = k + \{0, \dots, L-1\}$, где $k \in Q$ [I]. Через $\mathcal{P}(Q)$ обозначим алгебру всех подмножеств множества Q .

Т е о р е м а. I). Любой заряд на Σ продолжается до заряда на $\mathcal{P}(Q)$. 2). Если $n \geq 3$ или $n = L = 2$, то любая мера на Σ продолжается до меры на $\mathcal{P}(Q)$. 3). Если $n = 2$, $L \geq 3$, то существует мера на Σ , которая не продолжается до меры на $\mathcal{P}(Q)$.

З а м е ч а н и е. Утверждение I) равносильно теореме I [I]. Мы приводим другое доказательство. Утверждение 2) в работе [I] доказано для частного случая $L = 2$ (теорема 2). К сожалению, в теореме 3 [I] ошибочно утверждается, что если $L \geq 3$, то на Σ существует мера, которая не продолжается до меры на $\mathcal{P}(Q)$ (на самом деле это так лишь при $n = 2$). Для случая $n = L = 3$ в [I] говорится, что на Σ существует мера μ , для которой $(\mu(I_0), \dots, \mu(I_8)) = (5, 3, 3, 2, 5, 2, 3, 2, 5)$. Покажем, что такой меры μ на Σ не существует. В противном случае $\mu(\{1,2,6\}) = 10 - \mu(I_3) - \mu(I_7) = 10-2-2 = 6$, $\mu(\{0,4,8\}) = 10 - \mu(I_1) - \mu(I_5) = 10-3-2 = 5$, $\mu(\{3,5,7\}) = 10 - \mu(\{1,2,6\}) - \mu(\{0,4,8\}) = 10-6-5 = -1 < 0$ – противоречие.

Д о к а з а т е л ь с т в о I). Пусть W и V – векторные пространства всех (вещественных) зарядов на $\mathcal{P}(Q)$ и Σ соответственно; линейное отображение σ: $W \to V$ ставит в соответствие каждому $\mu \in W$ его ограничение на Σ . Пусть $\mu \in Ker\,\sigma$ и $\mu(\{1\}) = \dots = \mu(\{L-1\}) = 0$. Легко видеть, что тогда $\mu = 0$. Следовательно, $\dim Ker\,\sigma \leq L - 1$. Пусть $\nu \in V$ и $\nu(I_1) = \dots =$

$=\nu(I_{n-L+1})=0$. Тогда, как легко видеть, $\nu=0$. Поэтому $\dim V\leq \leq N-L+1$. Таким образом, $\dim \operatorname{Ker}\sigma+\dim V\leq N=\dim W=\dim \operatorname{Ker}\sigma+ +\dim \operatorname{Im}\sigma$. Отсюда $\operatorname{Im}\sigma=V$. Утверждение I) доказано.

Теперь нам понадобится явное описание атомов в Σ. Оказывается, при $n\geqslant 3$ атомами в Σ являются произвольные L-элементные подмножества в Ω, элементы которых имеют разные остатки от деления на L. Для каждого $i\in I_0$ положим $R_i= =\{k\in\Omega \mid k\equiv i \pmod L\}$. Рассмотрим множество $A=\{\{\omega_0,\dots,\omega_{L-1}\}\mid \omega_i\in R_i\,(i\in I_0)\}$. Через S обозначим группу всех перестановок множества I_0. Пусть $\varphi\in S$. Определим продолжение перестановки φ до перестановки $\tilde\varphi$ множества Ω так: $\tilde\varphi(i+jL)=\varphi(i)+jL$ $(i\in I_0,\, j\in\{0,\dots,n-1\})$. Положим $A_\varphi=\{\tilde\varphi(I_k)\mid k\in\Omega\}$.

Лемма I. Пусть $n\geqslant 3$; $\varphi,\psi\in S$ и ψ получается из φ транспозицией двух соседних символов. Предположим, что $A_\varphi\subset\Sigma$. Тогда $A_\psi\subset\Sigma$.

Доказательство. Пусть $k\in\Omega$. Пусть $i\in\{0,\dots, L-2\}$ таково, что $\psi(i)=\varphi(i+1),\psi(i+1)=\varphi(i),\psi(t)=\varphi(t)\,(t\in I_0\setminus \{i,i+1\})$. Возможны 2 случая: а) $k\notin R_{i+1}$; б) $k\in R_{i+1}$. В случае а), очевидно, $\tilde\psi(I_k)=\tilde\varphi(I_k)\in\Sigma$.

Рассмотрим случай б). Положим

$$X=\tilde\varphi(\{k,k+L+1,k+L+2,\dots,k+2L-1\}),$$

$$Y=\tilde\varphi(\{k+L-1,k-L,k-L+1,\dots,k-2\}).$$

Пусть $(\ )^c$ – теоретико-множественное дополнение в Ω. Дизъюнктное объединение подмножеств в Ω будем обозначать знаком $\dot+$. Тогда

$$X=(\tilde\varphi(I_{k+1})\dot+\tilde\varphi(I_{k+2L})\dot+\tilde\varphi(I_{k+3L})\dot+\dots\dot+\tilde\varphi(I_{k+(n-1)L}))^c,$$

$$Y=(\tilde\varphi(I_{k-1})\dot+\tilde\varphi(I_{k+L})\dot+\tilde\varphi(I_{k+2L})\dot+\dots\dot+\tilde\varphi(I_{k+(n-2)L}))^c.$$

Следовательно, $X\in\Sigma$ и $Y\in\Sigma$. Далее, $I_{k-L}\cap I_{k+L}=\varnothing$ в силу того, что $n\geqslant 3$. Очевидно, $X\dot+Y\subset\tilde\varphi(I_{k-L})\dot+\tilde\varphi(I_k)\dot+\tilde\varphi(I_{k+L})$. Теперь имеем

$$\tilde\psi(I_k)=\{\tilde\psi(k),\tilde\psi(k+1),\dots,\tilde\psi(k+L-2),\tilde\psi(k+L-1)\}=$$

$\{\tilde{\varphi}(\kappa-1), \tilde{\varphi}(\kappa+1), \ldots, \tilde{\varphi}(\kappa+L-2), \tilde{\varphi}(\kappa+L)\} =$

$(\tilde{\varphi}(I_{\kappa-L}) \dot{+} \tilde{\varphi}(I_\kappa) \dot{+} \tilde{\varphi}(I_{\kappa+L})) \setminus (X \dot{+} Y) \in \Sigma$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Если $n \geqslant 3$, то $A_\varphi \subset \Sigma$ для любой $\varphi \in S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению Σ имеем $A_{id_{I_0}} \subset \Sigma$. Как известно, любая $\varphi \in S$ получается из id_{I_0} несколькими транспозициями двух соседних символов. Теперь применим лемму I.

Л е м м а 3. Если $n \geqslant 3$ или $n = L = 2$, то A есть множество всех атомов в Σ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $n = L = 2$ тривиален. Пусть $n \geqslant 3$. Достаточно, очевидно, показать, что $A \subset \Sigma$.Пусть $\omega_i \in R_i$ $(i \in I_0)$. Положим $T_j = \{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\} \cap I_{jL} - jL$ $(j \in \{0, \ldots, n-1\})$. Очевидно, $I_0 = T_0 \dot{+} T_1 \dot{+} \ldots \dot{+} T_{n-1}$. Для любого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ пусть $t_j = card\ T_j$. Положим $\tau_0 = 0$, $\tau_j = t_0 + t_1 + \ldots + t_{j-1}$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L \in I_0$ таковы, что $T_j = \{\alpha_{\tau_j+1}, \alpha_{\tau_j+2}, \ldots, \alpha_{\tau_{j+1}}\}$ $(j \in \{0, \ldots, n-1\})$. Определим $\varphi \in S$ так: $\varphi(i) = \alpha_{i+1}$ $(i \in I_0)$. Легко видеть, что $\{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\} = (\tilde{\varphi}(I_{\tau_1}) \dot{+} \tilde{\varphi}(I_{\tau_2+L}) \dot{+} \tilde{\varphi}(I_{\tau_3+2L}) \dot{+} \ldots \dot{+} \tilde{\varphi}(I_{\tau_{n-1}+(n-2)L}))^c$. В силу леммы 2 $A_\varphi \subset \Sigma$. Следовательно, $\{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\} \in \Sigma$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о 2). Пусть ν – мера на Σ . В силу I) существует $\mu \in W$ такой, что $\sigma(\mu) = \nu$. Для каждого $i \in I_0$ пусть $\omega_i \in R_i$ таково, что $\mu(\{\omega_i\}) = \min_{\omega \in R_i} \mu(\{\omega\})$.

Определим $\mu_0 \in W$, полагая

$$\mu_0(\{\omega\}) = -\mu(\{\omega_i\}) \quad (\omega \in R_i \ , \ i \in \{1, \ldots, L-1\}) ,$$

$$\mu_0(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{L-1} \mu(\{\omega_i\}) \quad (\omega \in R_0) .$$

Положим $\mu^* = \mu + \mu_0$. Легко видеть, что $\mu_0 \in Ker\ \sigma$, поэтому $\sigma(\mu^*) = \nu$. Покажем, что μ^* есть мера. Пусть $\omega \in \Omega$. Воз - можны 2 случая: а) $\omega \in R_i$, где $i \in \{1, \ldots, L-1\}$; б) $\omega \in R_0$.

<u>Случай</u> а). Очевидно, $\mu^*(\{\omega\}) \geqslant 0$.

<u>Случай</u> б). По лемме 3, имеем $\{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\} \in \Sigma$. Следо -

вательно, $\mu^*(\{\omega\}) =$

$$\mu(\{\omega\}) + \sum_{i=1}^{L-1} \mu(\{\omega_i\}) \geqslant \mu(\{\omega_0\}) + \sum_{i=1}^{L-1} \mu(\{\omega_i\}) =$$

$\nu(\{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\}) \geqslant 0$. Итак, μ^* – мера на $\mathcal{P}(\Omega)$.

Нам осталось рассмотреть лишь случай $n=2$, $L \geqslant 3$.

Лемма 4. Если $n=2$, то $\Sigma = \{\emptyset, I_0, I_1, \ldots, I_{2L-1}, \Omega\}$. В частности, если $n=2$, $L \geqslant 3$, то $A \notin \Sigma$.

Доказательство очевидно.

Доказательство 3). По лемме 4 существуют $\omega_i \in R_i$ $(i \in I_0)$ такие, что $\{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\} \notin \Sigma$. Определим заряд $\mu \in W$, полагая $\mu(\{\omega_i\}) = -1$ $(i \in I_0)$, $\mu(\{\omega\}) = L$ $(\omega \in \Omega \setminus \{\omega_0, \ldots, \omega_{L-1}\})$, и пусть $\nu = \sigma(\mu)$. Очевидно, ν – мера на Σ. Покажем, что ν не продолжается до меры на $\mathcal{P}(\Omega)$. Предположим противное, тогда существует $\mu_0 \in \mathrm{Ker}\,\sigma$ такое, что $\mu^* = \mu + \mu_0$ – мера на $\mathcal{P}(\Omega)$. Нетрудно видеть, что $\sum_{i=0}^{L-1} \mu_0(\{\omega_i\}) = 0$. Следовательно, существует $i \in I_0$ такое, что $\mu_0(\{\omega_i\}) \leqslant 0$. Но тогда $\mu^*(\{\omega_i\}) = -1 + \mu_0(\{\omega_i\}) < 0$ – противоречие. Теорема доказана.

Литература

I. Gudder S., Marchand J.-P. A Coarse-Grained Measure Theory // Bull. acad.pol.sc. - 1980. - Vol.28. - No. II - I2. - P.557 - 564.