Ф. Н. Гарифьянов, Н. Ф. Гарифьянов, Е. В. Стрежнева, О проблеме моментов Гамбургера, порожденной группой с двумя предельными точками, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 12, 3–8

Известия вузов. Математика
2018, №12, с. 3–8
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Н.Ф. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА, ПОРОЖДЕННОЙ ГРУППОЙ С ДВУМЯ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ

Аннотация. Исследуется линейное четырехэлементное уравнение в классе решений, голоморфных вне равнобедренной трапеции и исчезающих на бесконечности. С его помощью рассмотрена проблема моментов Гамбургера для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: равносильная регуляризация, задача Карлемана, моменты целых функций экспоненциального типа.

УДК: 517:544

Введение

Хорошо известно, что число предельных точек собственно разрывной группы дробно-линейных преобразований может принимать только четыре значения 0, 1, 2 и ∞ ([1], гл. 14, § 7). Проблема моментов Стильтьеса и ее обобщение на случай нескольких лучей для целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) в первых двух случаях были рассмотрены ранее в работах [2] и [3] соответственно. Цель данной работы – исследовать случай группы с двумя предельными точками.

Пусть D — равнобедренная трапеция с вершинами $t_1 = 1-i$, $t_2 = \lambda t_1$, $t_3 = \overline{t}_2$, $t_4 = \overline{t}_1$ и сторонами ℓ_j, перечисленными в порядке положительного обхода границы $\Gamma = \partial D$. Здесь $\lambda > 1$ и $t \in \ell_1 \Rightarrow \arg t = -\pi/4$. Если из замыкания $\overline{D}$ удалить "половину границы", то получим фундаментальное множество собственно разрывной группы с порождающими преобразованиями $\sigma_1(z) = iz$, $\sigma_2(z) = \lambda^{-1}z$. У этой группы две предельные точки 0 и ∞. Порождающие преобразования и преобразования, обратные к ним, индуцируют на границе инволютивный сдвиг $\alpha(t) = \{\sigma_j(t), t \in \ell_j\}$, где $\sigma_3 = \sigma_1^{-1}$ и $\sigma_4 = \sigma_2^{-1}$, изменяющий ориентацию Γ и имеющий в вершинах точки разрыва первого рода.

В п. 1 исследуется функциональное уравнение

$$(Vf) \equiv \sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1} f[\sigma_j(z)] = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

при следующих предположениях.

1) Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничные значения $g^+(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на Γ.

2) Решение $f(z)$ ищется в классе функций, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Ее граничное значение $f^-(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на любом компакте, не содержащем вершин, а в вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B.

Поступила 27.11.2017

Сразу отметим два существенных обстоятельства. Во-первых, $z \in D \Rightarrow \sigma_j(z) \notin \overline{D}$. Другими словами, решение и свободный член принадлежат разным классам аналитических функций. Во-вторых, множество $\mathbb{C} \setminus \bigcup \sigma_j(D)$, $j = \overline{1, n}$, распадается на две связные компоненты, одной из которых и является трапеция, а другая содержит предельные точки, именно это и обеспечивает нетривиальность задачи.

В п. 1 проведена равносильная регуляризация задачи (1). В п. 2 показано, что при $\lambda = 2, 6$ задача (1) безусловно разрешима. В п. 3 указаны приложения задачи (1) к проблеме моментов Гамбургера для ц. ф. э. т., порожденной этой группой. При $\lambda = 2, 6$ данная проблема безусловно разрешима, а в общем случае при $\lambda > 1$ имеет не более чем конечное число условий разрешимости.

1. Будем искать решение задачи (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau) d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \tag{2}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau)$, удовлетворяющей условию Гёльдера на любом компакте, не содержащем вершин. В вершинах допускаются, самое большее, точки разрыва первого рода.

Введем инволютивный оператор $W : \varphi(t) \to \theta_t \varphi(\alpha(t))$, где $\theta_t = \{1,\ t \in \ell_1 \bigcup \ell_3;\ -1,\ t \in \ell_2 \bigcup \ell_4\}$. Заметим, что плотность интеграла типа Коши (2) определена с точностью до аналитически продолжимого в D слагаемого $a^+(\tau)$. За счет подбора этой функции считаем без ограничения общности, что

$$W\varphi = \varphi. \tag{3}$$

Действительно, соотношение (3) интерпретируем как задачу Карлемана $a^+ - Wa^+ = W\varphi - \varphi$. Она не является переопределенной и безусловно разрешима, что устанавливается сведением ее к задаче Римана методом локально конформного склеивания [4]. Имеем

$$(1) \Leftrightarrow (A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma E(z, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g(z), \quad z \in D,$$

где $E(z, \tau) = (\tau - iz)^{-1} + (\tau + iz)^{-1} - (\tau - \lambda z)^{-1} - \left(\tau - \lambda^{-1} z\right)^{-1}$. Справедлив аналог формулы Сохоцкого–Племеля

$$\left(A^+\varphi\right)(t) = -2^{-1} (W\varphi)(t) + (A\varphi)(t), \quad t \in \Gamma, \tag{4}$$

причем особый интегральный оператор $(A\varphi)(t)$ получается формальной заменой $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Возьмем от обеих частей равенства (4) оператор W, заменим в особом интеграле переменную τ на $\alpha(\tau)$ с учетом (3) и изменением ориентации. Сложим полученное сотношение с исходным. Пришли к уравнению

$$T\varphi = g^+ + Wg^+, \tag{5}$$

где $T = -I + AW + WA$, а I — тождественый оператор.

Введем банахово пространство $\widetilde{C}(\Gamma)$ — множество функций $\varphi(t)$, непрерывных на любом компакте, не содержащем вершин. В вершинах у них могут быть только точки разрыва первого рода. Введем норму $M = \max\{|\varphi(t)|,\ t \in \Gamma\}$.

Лемма 1. *Операторы A и W с точностью до компактного слагаемого антикоммутируют в $\widetilde{C}(\Gamma)$, т. е. (6) — интегральное уравнение Фредгольма второго рода.*

Доказательство. Ядро уравнения (5)

$$K(t, \tau) = E(t, \tau) - \alpha'(\tau)\, \theta_t\, \theta_\tau\, E(\alpha(t), \alpha(\tau)) \tag{6}$$

ограничено, что проверяется непосредственным перебором различных вариантов взаимного расположения точек τ и t на сторонах Γ.

Фундаментальную систему решений (ф. с. р.) однородного уравнения

$$T\varphi = 0 \tag{7}$$

можно выбрать так, что входящие туда функции удовлетворяют либо условию (3), либо противоположному условию

$$\varphi = -W\varphi \tag{8}$$

(например, [5]). □

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет не более конечного числа условий разрешимости, причем это условия разрешимости уравнения* (5).

Доказательство. Пусть уравнение (5) разрешимо. Тогда оно имеет решение со свойством (3) ([5]) и (5) $\Rightarrow$ (1), поскольку однородная задача Карлемана $a^+ = -Wa^+$ имеет лишь тривиальное решение. □

2. При $\lambda = 2.6$ теорему 1 можно уточнить. Покажем, что тогда уравнение (7) имеет лишь тривиальное решение. Для этого оценим сверху модуль ядра (6). Прежде всего заметим, что $K(t,\tau) = 0$, если точки τ и t лежат на одной стороне трапеции. В силу условий (3) и (8) достаточно рассмотреть всего два случая: либо $t \in \ell_1$, либо $t \in \ell_4$.

1) $t \in \ell_1 \Rightarrow \alpha(t) = it$. Возможны следующие подслучаи.

a) $\tau \in \ell_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = \lambda^{-1}\tau$. Тогда

$$|K(t,\tau)| = \left|(\tau + it)^{-1} - \left(\tau - \lambda^{-1}t\right)^{-1} + (\tau + \lambda t)^{-1} - \left(\tau - \lambda^2 it\right)^{-1}\right| < A_1,$$

где $A_1 = 0.42$.

b) $\tau \in \ell_3 \Rightarrow \alpha(\tau) = -i\tau$. Имеем

$$|K(t,\tau)| = \left|(\tau + \lambda t)^{-1} + \left(\tau + \lambda^{-1}t\right)^{-1} - (\tau - \lambda t)^{-1} - \left(\tau - \lambda^{-1}t\right)^{-1}\right| < A_2,$$

где $A_2 = 0.96$.

c) $\tau \in \ell_4 \Rightarrow \alpha(\tau) = \lambda\tau$. Получим

$$|K(t,\tau)| = \left|(\tau + it)^{-1} - (\tau - \lambda t)^{-1} + \left(\tau + \lambda^{-1}t\right)^{-1} - \left(\tau - \lambda^{-2}it\right)^{-1}\right| < A_3,$$

где $A_3 = 0.95$.

С учетом длин сторон имеем $5.2A_1 + 1.6\sqrt{2}A_2 + 2A_3 = 6.257 < 2\pi$. Итак, $M = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$.

2) $t \in \ell_4 \Rightarrow \alpha(t) = \lambda t$. Возможны следующие подслучаи.

a) $\tau \in \ell_1 \Rightarrow \alpha(\tau) = i\tau$. Тогда

$$|K(t,\tau)| = \left|(\tau - it)^{-1} - \left(\tau - \lambda^{-1}t\right)^{-1} + (\tau + \lambda t)^{-1} - \left(\tau + \lambda^2 it\right)^{-1}\right| < A_4,$$

где $A_4 = 0.766$.

b) $\tau \in \ell_2 \Rightarrow \alpha(\tau) = \lambda^{-1}t$. Имеем

$$\begin{aligned}|K(t,\tau)| = |\,(\tau - it)^{-1} + (\tau + it)^{-1} - \left(\tau - \lambda^{-1}t\right)^{-1} - \left(\tau - i\lambda^2 t\right)^{-1} - \\ - \left(\tau + i\lambda^2 t\right)^{-1} + \left(\tau - \lambda^3 t\right)^{-1}\,| < A_5,\end{aligned}$$

где $A_5 = 0.54$.

c) $\tau \in \ell_3$. В силу симметрии справедлива оценка, приведенная в подслучае a).

Поскольку $3,2\sqrt{2}A_1 + 5.2A_5 = 6.275 < 2\pi$, то $\varphi \equiv 0$. Сформулируем полученный результат.

Лемма 2. *Ф. с. р. уравнения* (7) *пуста.*

Замечание 1. Основную трудность при доказательстве леммы 2 представляет собой выбор $\lambda > 1$. Это число должно быть таким, чтобы обе суммы $2\lambda A_1 + (\lambda - 1)\sqrt{2}A_2 + 2A_4$ и $2(\lambda - 1)\sqrt{2}A_4 + 2\lambda A_5$ были меньше 2π. За счёт выбора λ можно уменьшить одно из этих чисел, но при этом увеличивается другое.

Замечание 2. Предложенный метод равносильной регуляризации задачи (1) применим и к некоторым другим частным случаям группы с двумя предельными точками с порождающими преобразованиями $\sigma_1(z) = \exp(\pi i/n)z$, $\sigma_2(z) = \lambda^{-1}z$, где $n > 2$. Каждая вершина D является общей для четного числа конгруэнтных фундаментальных многоугольников, сходящихся в этой точке. Это критерий того, что частный случай задачи Карлемана $a^+ \pm Wa^+ = g$ допускает регуляризацию посредством интегрального представления неизвестной функции, ядро которого не содержит в качестве одного из своих слагаемых ядра Коши (более подробно в [6]).

Теорема 2. *При* $\lambda = 2.6$ *задача* (1) *безусловно разрешима.*

3. Будем рассматривать D как сопряженную индикаторную диаграмму нижней функции $f(z) \in B$, ассоциированной по Борелю ([7], § 1.1) с ц. ф. э. т. $F(z)$. Пусть $D_1 \subset D$ — прямоугольник с вершинами t_1, $\tau_2 = \lambda - i$, $\tau_3 = \overline{\tau}_2$, t_4. Возьмем $z \in D_1$. Точки $\pm iz$, $\lambda^{-1}z$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$, а точка λz — в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$. Поэтому вместо (1) получим сотношение

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)N(z,x)dx + \int_{0}^{+\infty} F(x)\exp(-\lambda zx)dx = g(z), \quad z \in D_1, \tag{9}$$

где $N(z,x) = 2\cos(zx) - \exp(-\lambda^{-1}xz)$.

Пусть

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k (z - z_0)^k}{k!}, \quad z \in D_1. \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты Тейлора в точке z_0 левой и правой частей (9), имеем

$$i^k \int_{-\infty}^{0} F(x)x^k \exp(iz_0x)dx + (-i)^k \int_{-\infty}^{0} F(x)x^k \exp(-iz_0x)dx -$$
$$- (-\lambda^{-1})^k \int\limits_{-\infty}^{0} F(x)x^k \exp(-\lambda^{-1}xz_0)dx + \int_{0}^{\infty} F(x)x^k \exp(-\lambda z_0 x)dx = \beta_k,\ k = \overline{0,\infty}, \tag{11}$$

при следующих предположениях.

1) Заданные числа β_k таковы, что у ряда (10) радиус сходимости $R > \max \operatorname{dist}(z_0, t_j)$, $j = \overline{1,4}$.

2) Решение ищется в классе ц. ф. э. т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижними функциями $f(z) \in B$.

Основным результатом статьи является

Теорема 3. *Проблема моментов Гамбургера* (11) *безусловно разрешима и имеет единственное решение, если* $\lambda = 2.6$.

В случае произвольного λ можно лишь утверждать, что проблема моментов (11) имеет не более чем конечное число условий разрешимости.

Обсудим полученные результаты. Хорошо известно ([1], гл. 14, п. 14.5), что группа с двумя предельными точками изоморфна двоякопериодической группе. Приложения такой группы к проблеме моментов Стильтьеса для ц. ф. э. т., как уже отмечалось выше, были указаны в работе [3]. Но это удается сделать только в том частном случае, когда параллелограммом периодов является квадрат. Естественно было ожидать, что и для рассмотренной здесь задачи произойдет подобное.

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 3 (Наука, М., 1967).

[2] Гарифьянов Ф.Н. *Биортогональные ряды, порожденные группой диэдра*, Изв. вузов. Матем., № 4, 11–15 (2001).

[3] Гарифьянов Ф.Н. *Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа*, Матем. заметки **67** (5), 674–679 (2000).

[4] Зверович Э.И. *Метод локально-конформного склеивания*, ДАН СССР **205** (4), 767–770 (1972).

[5] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана*, Изв. вузов. Матем., № 4, 43–51 (1983).

[6] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложении*, Сиб. матем. журнал **43** (5), 977–986 (2002).

[7] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* (Наука, М., 1976).

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Нургаяз Фархатович Гарифьянов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: nf.garifyanov@gmail.com

Елена Васильевна Стрежнева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: strezh@yandex.ru

F.N. Garif'yanov, N.F. Garif'yanov, and E.V. Strezhneva

On Hamburger moments problem generated by a group with two limit points

Abstract. We study a linear four-element equation in the class of solutions that are holomorphic outside an isosceles trapezium and vanish at infinity. The equation is used here to investigate the Hamburger moments problem for entire functions of exponential type.

Keywords: equivalent regularization, Carleman's problem, moments of entire functions of exponential type.

Farkhat Nurgayazovich Garif'yanov

Kazan Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Nurgayaz Farkhatovich Garif'yanov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: nf.garifyanov@gmail.com

Elena Vasil'evna Strezhneva

Kazan National Research University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

e-mail: strezh@yandex.ru