В. П. Чуев, С. Б. Шабалина, Достаточные условия однолистности функций, аналитических в неограниченных областях с границами, для которых отношение длины дуги к хорде конечно, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 134–140

В.П.Чуев, С.Б.Шабалина

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦАМИ, ДЛЯ КОТОРЫХ ОТНОШЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ К ХОРДЕ КОНЕЧНО

Рассмотрим класс $\mathfrak{M}(C)$ односвязных областей G с границами $\mathcal{L}=\partial G$. Здесь $\mathcal{L}$ – локально спрямляемая кривая, $z=\infty\in\in\mathcal{L}$, для которой

$$\sup_{z_1,z_2\in\mathcal{L}} \ell(z_1,z_2)/|z_1-z_2| = C\;(1\le C<\infty), \qquad (1)$$

где $\ell(z_1,z_2)$ – длина дуги $\breve{z_1z_2}\subset\mathcal{L}$, соединяющей точки z_1 и z_2.

Теорема. Пусть $f(z)$ – аналитическая в области $G\in\mathfrak{M}(C)$ функция и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)/z>0$. Существуют положительные постоянные $a(C)$ и $b(C)$, зависящие только от C, такие, что если выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(z,\partial G)\,|f''(z)/f'(z)|\le a(C),\; z\in G,$$

или

$$\operatorname{dist}^2(z,\partial G)\,|\{f(z),z\}|\le b(C),\; z\in G,$$

$\{f(z),z\}=(f''/f')'-2^{-1}(f''/f')^2$, то $f(z)$ однолистна в G.

Впервые этот результат был получен Л.Альфорсом (см., напр., [1]). С тех пор вопрос о явном виде $a(C)$ и $b(C)$ остается открытым. Постоянные, которые будут получены в ходе доказательства теоремы, позволяют, хотя и достаточно грубо, оценить $a(C)$ и $b(C)$ снизу. При этом существенно используется методика Т.Г.Латфуллина [2].

1. Вспомогательные результаты

Зафиксируем точку $z_0\in\mathcal{L}=\partial G\,(G\in\mathfrak{M}(C))$ и построим с центром в этой точке окружность произвольного радиуса: $\beta_\rho=\{z: |z-z_0|=\rho,\,0<\rho<\infty\}$. Кривая $\mathcal{L}$ разобьет β_ρ на конечное число связных дуг, из которых мы выберем дугу σ, целиком лежащую в области G, концы которой z_1 и z_2 лежат на $\mathcal{L}$ по разные стороны от z_0. Тогда $|z_0-z_1|=|z_0-z_2|\le\ell(z_1,z_2)/2\le C|z_1-z_2|/2$. Таким образом, справедлива

Лемма I. Для угловой меры α дуги σ имеем

$\alpha \geq 2 \arcsin C^{-1} = \alpha_0$.

Этот же результат справедлив для σ из G_-, так как $G_- = \mathbb{C} \setminus \bar{G} \in \mathfrak{M}(C)$.

Обозначим через $\varphi(\zeta)$ функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $H = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ на область $G \in \mathfrak{M}(C)$, с неподвижными точками 0 и ∞.

Лемма 2. Функция $S(x) = \operatorname{sign}(x)\, \ell(0, \varphi(x)),\, x \in \partial H$, удовлетворяет М-условию Альфорса, т.е.

$$M^{-1} \leq \frac{S(x+t) - S(x)}{S(x) - S(x-t)} \leq M,$$

где $M = M(C) \leq C e^{2\pi - \alpha_0}$.

Докажем правую оценку. Полагая $z_+ = \varphi(x+t)$, $z_0 = \varphi(x)$, $z_- = \varphi(x-t)$, получим

$$\frac{S(x+t) - S(x)}{S(x) - S(x-t)} \leq \frac{C\, |z_+ - z_0|}{|z_0 - z_-|}.$$

Если $|z_+ - z_0| \leq |z_0 - z_-|$, то $M = C$. Пусть $|z_+ - z_0| > |z_0 - z_-|$. С центром в точке $z_0 \in \mathcal{L}$ построим кольцо $K(R, r)$ с граничными окружностями радиусов $R = |z_+ - z_0|$ и $r = |z_- - z_0|$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{L}(z_0, z_-)$ образ отрезка $[x-t, x]$ при отображении φ, а через $\mathcal{L}(z_+)$ – образ полуинтервала $[x+t, \infty[$, $\mathcal{L}(z_0, z_-) \cap \mathcal{L}(z_+) = \emptyset$. Для модуля семейства кривых Γ, лежащих в G и соединяющих $\mathcal{L}(z_0, z_-)$ и $\mathcal{L}(z_+)$, имеем

$$m(\Gamma) \leq \iint_G \rho\, dx\, dy \Big/ \inf_{\gamma \in \Gamma} \Big(\int_\gamma \rho\, |dz| \Big)^2,$$

где $\rho = 1 / |z - z_0|$ – метрика, допустимая в области G. В силу леммы I угловая мера дуг, принадлежащих G из $\mathfrak{M}(C)$, не превосходит $2\pi - \alpha_0$, следовательно, числитель этой дроби оценивается сверху величиной $(2\pi - \alpha_0) \ln R/r$. Кроме того,

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \rho\, |dz| \geq \int_r^R \rho\, |dz| = \ln R/r.$$

Таким образом,

$$m(\Gamma) \leq (2\pi - \alpha_0) / \ln R/r.$$

Но в силу конформной инвариантности модуля семейств кривых $m(\Gamma)$ $= 1$. Поэтому

$$|z_+ - z_0| / |z_0 - z_-| \le e^{2\pi - \alpha_0}.$$

При доказательстве левой оценки аналогичные рассуждения проводятся для отношения

$$[S(x) - S(x-t)] / [S(x+t) - S(x)] .$$

Пусть $F(\zeta)$ является K -квазиконформным отображением H на $G \in \mathfrak{M}(C), \mathcal{L} = \partial G = F(\partial H)$, $F(\infty) = \infty$, причем $\ell(F(x_1), F(x_2)) = |x_1 - x_2|$ для любых двух точек $x_1, x_2 \in \partial H$. Справедлива

Лемма 3. Справедливы неравенства

$$\mathcal{D}^{-1} \le \frac{dist\,(z, \partial G)}{dist\,(\zeta, \partial H)} \le \mathcal{D}, \quad z = F(\zeta),$$

с положительной постоянной $\mathcal{D} \le C\, exp[(\pi - \alpha_0/2)K]$.

Для получения левой оценки предположим, что $\delta(z)/\delta(\zeta) < C^{-1}$, $\delta(z) = dist\,(z, \partial G)$, $\delta(\zeta) = dist\,(\zeta, \partial H)$ (если $\delta(z)/\delta(\zeta) \ge C^{-1}$, то $\mathcal{D} = C$). На $\mathcal{L}$ выберем точку z_0 так, что $|z - z_0| = \delta(z)$. Обозначим через $\mathcal{L}_\delta$ все те точки кривой $\mathcal{L}$, которые отстоят вдоль $\mathcal{L}$ от z_0 на расстояние, не меньшее, чем $\delta(\zeta)$, а через t – прямолинейный отрезок, соединяющий z и z_0. С центром в точке z_0 построим кольцо $K(R', r')$ с граничными окружностями радиусов $R' = \delta(\zeta)/C$ и $r' = \delta(z)$ соответственно. Тогда, как и при доказательстве леммы 2, для модуля семейства кривых Γ, лежащих в области G и соединяющих $\mathcal{L}_\delta$ и t, получим

$$M(\Gamma) \le (2\pi - \alpha_0) / \ln(R'/r').$$

С другой стороны, в силу K-квазиинвариантности модуля семейства кривых

$$M(\Gamma) \ge K^{-1} M(\Gamma'),$$

где Γ' – прообраз семейства Γ при отображении $F(\zeta)$. Применим в плоскости ζ преобразование $(\zeta - x_0)^2/\delta^2(\zeta)$ ($x_0 = F^{-1}(z_0)$) и дополним преобразованное семейство Γ' кривыми, содержащими отрезки из интервала $(0, 1)$, что не изменит $M(\Gamma')$ ([1], с.38 – 39). Минимум $M(\Gamma')$ достигается и, как нетрудно убедиться, равен 2. Итак,

$$2/K \leq (2\pi - \alpha_0)/\ln(R'/r')$$

или

$$\delta(z)/\delta(\zeta) \geq \left[Ce^{(\pi-\alpha_0/2)K}\right]^{-1}.$$

Для получения правой оценки предположим, что $\delta(z)/\delta(\zeta) > 1$. Пусть $t = F((x_0 - \delta(\zeta), x_0 + \delta(\zeta)))$, $x_0 = \operatorname{Re}\zeta$, $z_0 = F(x_0)$, $R' = \delta(z)$, $r' = \delta(\zeta)$. Обозначим через ρ некоторый неограниченный континуум, содержащий точку z, лежащий в области G и не имеющий общих точек с $K(R', r')$. Рассуждения, описанные выше, приводят к неравенству

$$\delta(z)/\delta(\zeta) \leq e^{(\pi-\alpha_0/2)K}.$$

Таким образом, $\mathcal{D} \leq Ce^{(\pi-\alpha_0/2)K}$.

2. Доказательство теоремы

Построим квазиконформное отражение $\lambda(z): G_- = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{G} \to G$ относительно кривой $\mathcal{L} = \partial G$ следующим образом. Пусть $\varphi_+ : H_+ \to G$ функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость H_+ на область G, $\varphi_- : H_- \to G_-$ – функция, конформно отображающая нижнюю полуплоскость H_- на G_-, причем $\varphi_+(0) = \varphi_-(0)$, $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi_\pm(z) = \infty$. Как показано в лемме 2, такие функции $S_+(x)$ и $S_-(x)$ удовлетворяют M-условию Альфорса, причем $M = M(C)$. В этом случае $S_+^{-1}(S_-^{-1})$ можно продолжить до K-квазиконформного отображения $h_+(h_-)$ полуплоскости $H_+(H_-)$ на себя, причем $K \leq M^2$ ([1], [3]). Определим в H_+ и H_- две функции: $F_+ = \varphi_+ \circ h_+$ и $F_- = \varphi_- \circ h_-$. Как показано в [2], такие функции являются квазиизометрическими отображениями, коэффициент квази-изометрии K^* не превосходит $N(C) = 16\mathcal{D}M^2(M+1)$.

Нетрудно видеть, что функция

$$\lambda(z) = F_+ \circ \overline{F_-^{-1}(z)}, \quad z \in G_-,$$

осуществляет квазиконформное отражение относительно $\mathcal{L} = \partial G$. Коэффициент квазиконформности K_λ этого отображения не превосходит M^4 (суперпозиция двух квазиконформных отображений), а коэффициент квазиизометрии K_λ^* не превосходит $N^2(C)$ (суперпозиция двух квазиизометрических отображений).

Для доказательства достаточного условия однолистности в виде ограничения на $|f''(z)/f'(z)|$ мы определим функцию

$$g(z)=\begin{cases} f(z) & , \quad z\in G \ , \\ f\circ\lambda+(z-\lambda)f'\circ\lambda & , \quad z\in G_- \ . \end{cases}$$

Эта функция конформна в G ($f'(z)\neq 0$ при $z\in G$) и, как мы покажем ниже, она квазиконформна в G_-. А так как $\mathcal{L}=\partial G$ – квазиконформная кривая, то отсюда следует, что к $g(z)$ применима теорема Адамара ([4], с.164), согласно которой $g(z)$ – гомеоморфизм всей плоскости на себя ($g(\infty)=\infty$ в силу поведения $f(z)$ при $z\to\infty$).

Покажем, что функция $g(z)$ квазиконформна в G_- (см.[1], [5]). Для этого убедимся, что $|g_{\bar z}/g_z|<1$ для $z\in G_-$, а это эквивалентно проверке следующего неравенства

$$|z-\lambda(z)|(|\lambda_z|+|\lambda_{\bar z}|)\,|f''(\lambda)/f'(\lambda)|<1 \ , \quad z\in G_- \ .$$

В силу свойств отображения λ имеем

$$|d\lambda|\geq ||\lambda_{\bar z}|-|\lambda_z||\,|dz| \qquad \text{и}$$

$$(K_\lambda^*)^{-1}|dz|\leq|d\lambda|\leq K_\lambda^*|dz| \ .$$

Учитывая эти оценки, нетрудно установить, что

$$|\lambda_z|+|\lambda_{\bar z}|\leq M^4(C)N^2(C) \ .$$

Обозначим через τ прямолинейный отрезок, соединяющий z и $\lambda(z)$, а через $\Phi(s)$ образ прямолинейного отрезка, соединяющего точки ζ' и $\bar\zeta'$ при отображении

$$\Phi=\begin{cases} F_+ \ , & \zeta\in\overline{H}_+ \ , \\ F_- \ , & \zeta\in H_- \ , \end{cases}$$

где $\zeta'=F_-^{-1}(z)$, $z\in G_-$. Тогда, с учетом леммы 3, обеспечивающей квазиизометричность F_+ и F_-, получаем

$$|z-\lambda(z)|=\left|\int_\tau dz\right|\leq\left|\int_{\Phi(s)}dz\right|\leq 2N\mathcal{D}\,\delta(\lambda) \ .$$

Окончательно имеем

$$|z-\lambda(z)|(|\lambda_z|+|\lambda_{\bar z}|)\leq 2M^4N^3\mathcal{D}\,\delta(\lambda) \ .$$

Таким образом, существует константа $a(C)$, которая обеспечивает квазиконформность $g(z)$ в области G_- при выполнении условий теоремы. Это обеспечивает гомеоморфность $g(z)$, а значит и однолистность $f(z)$ в области G .

Для того, чтобы получить достаточное условие однолистности функции $f(z)$ в виде ограничения на $|\{f(z), z\}|$, где $\{\circ,\circ\}$ – шварциан, функцию $g(z)$ определим следующим образом:

$$g(z)=\begin{cases} f(z) & , \quad z \in G , \\ f\circ\lambda + \dfrac{(z-\lambda)f'\circ\lambda}{1-\frac{1}{2}(z-\lambda)f''\circ\lambda/f'\circ\lambda} & , \quad z\in G_- \end{cases}$$

В этом случае проверка неравенства $|g_{\bar z}/g_z| < 1$ для $z \in G_-$ сводится к проверке того, что

$$2^{-1}|z-\lambda(z)|^2(|\lambda_{\bar z}|+|\lambda_z|)|\{f(\lambda),\lambda\}|<1 , \quad \lambda\in G .$$

Ясно, что оценки, полученные для $|z-\lambda(z)|$ и $|\lambda_{\bar z}|+|\lambda_z|$, позволяют установить существование константы $b(C)$, зависящей только от C , и обеспечивающей однолистность $f(z)$ в области G при выполнении условий теоремы и в этом случае.

Хорошо известная связь между $dist(z,\partial G)$ и плотностью гиперболической метрики $\rho_{\mathcal D}(z)$ области $\mathcal D$ относительно точки z (см., напр., [I]):

$$[4\,dist(z,\partial G)]^{-1} \le \rho_{\mathcal D}(z) \le [dist(z,\partial G)]^{-1} ,$$

позволяет записывать полученные достаточные условия однолистности с включением как $dist(z,\partial G)$, так и $\rho_{\mathcal D}(z)$.

В заключение отметим, что полученный результат можно перенести и на области, границы которых лежат в конечной части плоскости и для которых выполняется условие, аналогичное (I), однако при этом приходится вводить некоторые дополнительные условия, сужающие рассматриваемый класс областей.

Авторя благодарят участников семинара за полезное обсуждение данной работы.

Литература

I. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, I969. – I33 с.

2. Латфуллин Т. Г. Геометрическая характеристика квазиизометрического образа полуплоскости // Теория отображений,

ее обобщения и приложения: Сб.науч.тр. - Киев: Наукова думка, 1982. - С.116 - 126.

3. Tan D. On the dilatation estimates for Beurling - Ahlfors quasiconformal extension // Proc. Amer. Math. Soc. - 1987. - V.100. - N 4. - P.655 - 660.

4. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. - М.: Наука, 1964. - 227 с.

5. Аксентьев Л. А., Шабалин П. Л. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение // Изв. вузов. Мат. - 1983. - № 2. - С.6 - 14.

Доложено на семинаре 25 января 1988 г.

Е.А.Широкова

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ ПРИ ЗАДАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПОРОВ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА x

Обратная задача напорной фильтрации в анизотропном неоднородном грунте в случае конечного фильтрующего слоя была поставлена в [1]. Там же указан метод решения этой задачи, основанный на результатах В.Н.Монахова и С.Н.Антонцева и связанный с отображением области, получаемой в плоскости обобщенного потенциала, на каноническую область с помощью функции, удовлетворяющей квазилинейному уравнению Бельтрами. Существование и единственность такого отображения доказаны [2], однако способ построения отображающей функции не указан. В случае, когда фильтрующий слой бесконечен по глубине, подобная задача не рассматривалась. В случае однородного грунта переход от конечного слоя к бесконечному связан с расширением множества решений - появлением в выражении для функции, отображающей каноническую область на область фильтрации, слагаемого, умноженного на произвольную вещественную константу A [3]. В нашем случае такое слагаемое также появится, однако призвол константы A ограничен.

<u>Постановка задачи</u>. Пусть требуется найти неизвестный контур $L_z(BC)$ подземной части непроницаемой плотины, если вдоль L_z с концами в точках $B(0,0)$ и $C(\ell,0)$ задано распределе-