И. В. Лебедева, В. А. Пятецкий, А. Ф. Улитко, Расщепление нормальных мод колебаний тонкостенной пьезокерамической оболочки при ее вращательном движении, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 3–9

И.В.Лебедева, В.А.Пятецкий, А.Ф.Улитко

РАСЩЕПЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ МОД КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЕЕ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В предлагаемой работе исследуется влияние вращения с постоянной угловой скоростью на колебания тонкой пьезокерамической сферической оболочки. На примере этой задачи излагаются основные идеи предлагаемого авторами подхода к анализу явления расщепления нормальных мод колебаний упругих тел при их вращательном движении.

Вопрос о воздействии сил Кориолиса на колебания тонкой оболочки в форме поверхности вращения впервые был исследован Брайеном в 1890 году [1]. Им было установлено, что стоячая изгибная волна при вращении цилиндрической оболочки прецессирует, сохраняя свою форму. Причем угловая скорость прецессии пропорциональна угловой скорости вращения самой оболочки. Явление прецессии нормальных мод колебаний тонкой цилиндрической оболочки и пропорциональность угловых скоростей были использованы позднее для создания датчиков инерциальной информации. Описания некоторых из них можно найти, например, у Бердесса [2] - тонкий пьезоэлектрический цилиндрический гироскоп, у А.Ф.Журавлева и Д.М.Климова [3] - тонкое упругое кольцо.

На самом деле следствием вращения вибрирующей оболочки является не только прецессия нормальной моды колебаний, но и изменение формы самой моды из-за появления в движении соседних мод колебаний. Для тел сферической геометрии явление расщепления нормальных мод особый интерес вызывает у сейсмологов в связи с определением нормальных мод нашей планеты, вращающейся, как известно, с постоянной угловой скоростью [4].

С целью более детального исследования этого явления ниже изучается расщепление нормальных мод колебаний и изменение собственных частот при равномерном вращении тонкой пьезокерамической сферической оболочки.

Пусть задана тонкостенная сферическая оболочка с толщинной поляризацией. Выберем две системы координат: неподвижную X_1, Y_1, Z_1, ось Z_1 которой совпадает с осью вращения оболочки, и подвижную z, ϑ, φ, вращающуюся вместе с оболочкой. Обозначим смещение точек серединной поверхности оболочки через $\vec{U} = \vec{e}_\vartheta u + \vec{e}_\varphi V + \vec{e}_z W$, где $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ – орты подвижной системы координат.

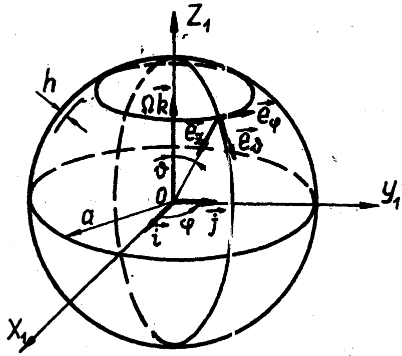

Рис. I

В этих обозначениях уравнения колебаний вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ тонкой пьезокерамической сферической оболочки записываются в виде [5]:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\operatorname{div}\vec{u}) + (1-\nu)\left(\omega_\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\omega_r}{\partial\varphi}\right) + D\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\nabla^2 W + \operatorname{div}\vec{u} + 2W) - (1+\nu)\,d_{31}\cdot a\,\frac{\partial E_0}{\partial\vartheta} = \frac{\rho h a^2}{D_N}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\left[\vec{\Omega}\times\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right]\cdot\vec{e}_\vartheta\right\};$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\operatorname{div}\vec{u}) - (1-\nu)\left(\omega_\vartheta - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_r}{\partial\vartheta}\right) + \frac{D}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\nabla^2 W + \operatorname{div}\vec{u} + 2W) - (1+\nu)\,d_{31}\frac{a}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_0}{\partial\varphi} = \frac{\rho h a^2}{D_N}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\left[\vec{\Omega}\times\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right]\cdot\vec{e}_\varphi\right\}; \quad \text{(I)}$$

$$(1+\nu)\operatorname{div}\vec{u} - D\left[(\nabla^2 + (1-\nu))(\nabla^2 W + \operatorname{div}\vec{u} + 2W)\right] - 2(1+\nu)\cdot d_{31}\cdot a\cdot E_0 = \frac{\rho h a^2}{D_N}\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\left[\vec{\Omega}\times\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right]\cdot\vec{e}_z\right\}.$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + ctg\,\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$;

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + u \cdot ctg\,\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - 2W; \quad \omega_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + u;$$

$$\omega_r = \frac{\partial v}{\partial \varphi} + v \cdot ctg\,\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}; \quad \omega_\vartheta = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial W}{\partial \varphi} - v;$$

$D = \frac{\bar{D}}{a^2 D_N}$; $D_N = \frac{h}{S_{11}^E(1-\bar{\nu}^2)}$ – жесткость оболочки при растяжении,

$\bar{D} = \frac{h^3}{12 S_{11}^E(1-\bar{\nu}^2)}\left(1 + \frac{1+\nu}{2}\,\frac{k_p^2}{1-k_p^2}\right)$ – жесткость при изгибе,

$\bar{\nu} = \dfrac{\nu + \frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{k_p^2}{1-k_p^2}}{1 + \frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{k_p^2}{1-k_p^2}}$, k_p – планарный коэффициент электромеханической связи, d_{31} – пьезомодуль,

S_{11}^E – упругая податливость при постоянном электрическом поле, E_0 – напряженность электрического поля вдоль $(0Z_1)$, ρ – плотность материала оболочки.

Уравнения (I) содержат в правых частях компоненты силы Кориолиса $2\rho[\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}]$ и тем самым учитывают вращение. Отсутствующая в этих уравнениях центробежная сила при равномерном вращении приводит к статической деформации оболочки и не влияет на ее колебания.

Согласно методу собственных векторных функций [6] решение уравнений (I) ищем в виде суперпозиции нормальных мод

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left[u_n^{(k)}\vec{L}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi) + V_n^{(k)}(\omega)\vec{M}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi) + W_n^{(k)}(\omega)\vec{N}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)\right]\cdot e^{i\omega t}. \tag{2}$$

Здесь $\vec{L}_n^{(k)} = -\vec{e}_z\, S_n^{(k)}$;

$$\vec{M}_n^{(k)} = \vec{e}_\vartheta \frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial \varphi}; \quad N_n^{(k)} = \frac{\vec{e}_\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial \varphi} - \vec{e}_\varphi \frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial \vartheta}$$

– собственные векторные функции, $S_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)$ – сферические функции Лапласа.

В разложении (2) амплитудные функции $u_n^{(k)}$, $V_n^{(k)}$, $W_n^{(k)}$ подлежат определению. В силу ортогональности векторных гармоник $\vec{L}_n^{(k)}$, $\vec{M}_n^{(k)}$, $\vec{N}_n^{(k)}$ для соотношения (2) справедлива формула обращения

$$-\vec{e}_z u_n^{(k)} + n(n+1)(\vec{e}_\vartheta V_n^{(k)} + \vec{e}_\varphi W_n^{(k)}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [-W(\vartheta,\varphi)\vec{L}_n^{(k)*}(\vartheta,\varphi) + u(\vartheta,\varphi)\vec{M}_n^{(k)*}(\vartheta,\varphi) + V(\vartheta,\varphi)\vec{N}_n^{(k)*}(\vartheta,\varphi)] \sin\vartheta \cdot d\vartheta. \quad (3)$$

Чтобы получить уравнения относительно неизвестных амплитудных функций, необходимо каждое слагаемое в уравнениях (I) представить в виде (2). Эта процедура вызывает трудности лишь в случае преобразования векторного произведения. Положим

$$[\vec{k}\times\vec{u}] = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}[U_\ell^{(m)}(\omega)\vec{L}_\ell^{(m)} + V_\ell^{(m)}(\omega)\vec{M}_\ell^{(m)} + W_\ell^{(m)}(\omega)\vec{N}_\ell^{(m)}], \quad (4)$$

С другой стороны,

$$[\vec{k}\times\vec{u}] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\{u_n^{(k)}[\vec{k}\times\vec{L}_n^{(k)}] + V_n^{(k)}[\vec{k}\times\vec{M}_n^{(k)}] + W_n^{(k)}[\vec{k}\times\vec{N}_n^{(k)}]\} = \vec{e}_z U_z + \vec{e}_\vartheta U_\vartheta + \vec{e}_\varphi U_\varphi ,$$

откуда

$$U_z = -\sin\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(W_n^{(k)}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\vartheta} - \frac{V_n^{(k)}}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\varphi}\right);$$

$$U_\vartheta = \cos\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(W_n^{(k)}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\vartheta} - \frac{V_n^{(k)}}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\varphi}\right); \quad (5)$$

$$U_\varphi = \cos\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(u_n^{(k)}\operatorname{tg}\vartheta\cdot S_n^{(k)} + V_n^{(k)}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\vartheta} + \frac{W_n^{(k)}}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\varphi}\right).$$

Далее амплитудные функции $U_\ell^{(m)}$, $V_\ell^{(m)}$, $W_\ell^{(m)}$ в разложении (4) находятся после подстановки компонент U_z, U_ϑ, U_φ в формулу обращения (3).

В итоге получена бесконечная цепочка линейных алгебраических уравнений относительно нормированных неизвестных амплитудных функций

$$\overset{*}{u}{}_n^{(k)} = \left[\frac{2n-1}{4\pi}\cdot\frac{(n-k-1)!}{(n+k-1)!}\right]^{-\frac{1}{2}} u_n^{(k)}; \quad \overset{*}{V}{}_n^{(k)} = \left[\frac{2n-1}{4\pi}\cdot\frac{(n-k-1)!}{(n+k-1)!}\right]^{-\frac{1}{2}} V_n^{(k)} \quad (6)$$

$$\overset{*}{W}{}_n^{(k)} = \left[\frac{2n-1}{4\pi}\cdot\frac{(n-k-1)!}{(n+k-1)!}\right]^{-\frac{1}{2}} W_n^{(k)} :$$

$$\{2(1+\nu)+D\cdot n(n+1)[n(n+1)-(1-\bar{\nu})]-(\varkappa a)^2\}\overset{*}{u}{}_n^{(k)}+\{-n(n+1)(1+\nu)-$$

$$-D\cdot n(n+1)[n(n+1)-(1-\bar{\nu})+2\varepsilon k(\varkappa a)^2\}\overset{*}{V}{}_n^{(k)} =$$

$$=2i(\varkappa a)^2\frac{\varepsilon}{2n+1}[-(n-1)(n+k)\overset{*}{W}{}_{n-1}^{(k)}+(n+2)(n-k+1)\overset{*}{W}{}_{n+1}^{(k)}]+\overset{*}{\ell}{}_n^{(k)};$$

$$\{(1+\nu)+D\cdot n(n+1)-\frac{2\varepsilon k(\varkappa a)^2}{n(n+1)}\}\overset{*}{u}{}_n^{(k)}+\{-n(n+1)+(1-\nu)-D\cdot n(n+1)+$$

$$+(\varkappa a)^2-\frac{2\varepsilon k(\varkappa a)^2}{n(n+1)}\}\overset{*}{V}{}_n^{(k)}=2i(\varkappa a)^2\frac{\varepsilon}{2n+1}\{\frac{n-1}{n}(n+k)\overset{*}{W}{}_{n-1}^{(k)}+$$

$$+\frac{n+2}{n-1}(n-k+1)\overset{*}{W}{}_{n+1}^{(k)}\}+\overset{*}{m}{}_n^{(k)}; \qquad (7)$$

$$\{(1-\nu)[1-\frac{n(n+1)}{2}]+(\varkappa a)^2-\frac{2\varepsilon k(\varkappa a)^2}{n(n+1)}\}\overset{*}{W}{}_n^{(k)}=2i\varepsilon\frac{(\varkappa a)^2}{2n+1}\{-\frac{n-1}{n}\times$$

$$\times(n+k)\overset{*}{V}{}_{n-1}^{(k)}-\frac{n+2}{n+1}(n-k+1)\overset{*}{V}{}_{n+1}^{(k)}+\frac{n+k}{n}\overset{*}{u}{}_{n-1}^{(k)}-\frac{n-k+1}{n+1}\overset{*}{u}{}_{n+1}^{(k)}\}+\overset{*}{n}{}_n^{(k)}.$$

Здесь $\overset{*}{\ell}{}_n^{(k)}$, $\overset{*}{m}{}_n^{(k)}$, $\overset{*}{n}{}_n^{(k)}$ – компоненты внешней нагрузки, $\varkappa a = \omega a/C$ – безразмерное волновое число, $\varepsilon = \Omega/\omega$ – малый параметр, $E_0 = 0$.

Если в уравнениях (7) отбросить слагаемые при ε, то получим элементарную линейную систему алгебраических уравнений. Но именно эти слагаемые описывают влияние вращения на амплитудные функции n–й нормальной моды $u_n^{(k)}$, $V_n^{(k)}$, $W_n^{(k)}$. К тому же, если до вращения $\forall k: |k| \leq n$ частота моды была одной и той же – ω_n, то вращение снимает эту вырожденность: каждой паре чисел n, k соответствует своя частота $\omega_n^{(k)}$.

Уравнения (7) могут быть решены методом последовательных приближений.

Для простоты рассмотрим чисто радиальные колебания оболочки ($n = 0$, $k = 0$). Первое уравнение системы (7) записывается в виде

$$[2(1+\nu)-(\varkappa a)^2]\overset{*}{u}{}_0^{(0)}=(\varkappa a)^2\cdot 4i\varepsilon\overset{*}{W}{}_1^{(0)}+\overset{*}{\ell}{}_0^{(0)}. \qquad (8)$$

Отбрасывая член, возникающий вследствие вращения, находим нулевое приближение для амплитудной функции и безразмерной частоты

$$\overset{*}{u}{}^{(0)}_{0,0} = \frac{\overset{*}{l}{}^{(0)}_0}{2(1+\nu)-(\varkappa a)^2}\,; \quad (\varkappa a)_0 = \sqrt{2(1+\nu)}\,. \tag{9}$$

Далее из третьего уравнения системы (7) имеем

$$\overset{*}{W}{}^{(0)}_1 = \frac{2i\varepsilon}{3(1-\nu)}\,\overset{*}{u}{}^{(0)}_0\,. \tag{10}$$

После подстановки (10) в (8) получим уточненное уравнение для $u_0^{(0)}$, откуда

$$\overset{*}{u}{}^{(0)}_{0,1} = \frac{\overset{*}{l}{}^{(0)}_0}{2(1+\nu)-(\varkappa a)^2\left(1-\dfrac{8\varepsilon^2}{3(1-\nu)}\right)}\,; \quad (\varkappa a)_1 = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{1-\dfrac{8\varepsilon^2}{3(1-\nu)}}}\,. \tag{11}$$

Вычислим безразмерное отношение частот

$$\eta = \frac{(\varkappa a)_0}{(\varkappa a)_1} = \sqrt{1-\frac{8\varepsilon^2}{3(1-\nu)}} \tag{12}$$

при $\nu = 1/3$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\eta = 0{,}98$. Как видим, вследствие вращения частота колебаний оболочки возрастает.

Из сказанного выше следует, что уже в случае колебаний тонкой пьезокерамической сферической оболочки на основной моде имеет место расщепление последней. В результате вращения появляется побочное движение - крутильные колебания. Их амплитуда, как следует из соотношения (10), пропорциональна амплитуде основного движения радиальных колебаний с коэффициентом пропорциональности порядка ε.

Литература

1. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci. - 1890. - Vol.7. - P.101 - 111.

2. Burdess J.S. The dynamics of a thin piezoelectric cylinder gyroscope // Pros. Inst. Mech. Engrs. - 1986. - Vol.200. No C4. - P.271 - 280.

3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. - М.: Наука, 1985. - 126 с.

4. А к и К., Р и ч а р д с П. Количественная сейсмология. - М.: Мир, 1983. - Т.1. - 519 с.

5. Г р и н ч е н к о В.Т., У л и т к о А.Ф., Ш у л ь - г а Н.А. Электроупругость. - Киев: Наукова думка, 1989. - 279 с.

6. У л и т к о А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наукова дум - ка, 1979. - 261 с.

В.Л.Лобысев, А.А.Михайлов, Б.И.Гуревич

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

В линейно-упругой среде с параметрами Ламэ λ, μ и плотностью ρ размещены полость и включение цилиндрической формы, оси которых параллельны. Радиусы полости и включения соответственно l_0 и l, расстояние между ними r_0 (рис.1). Включение представляет собой тонкостенную круговую цилиндрическую оболочку толщиной h, плотностью ρ_0, с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν.

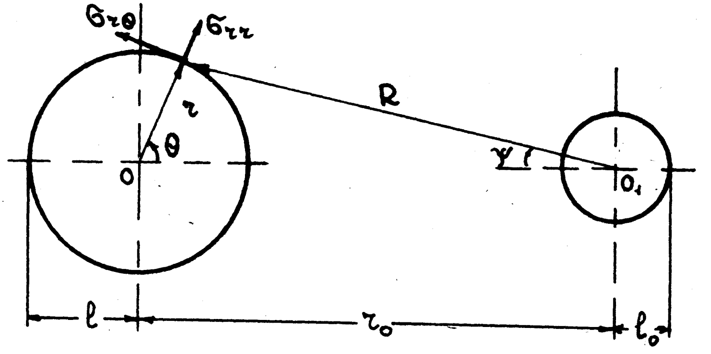

Рис. 1