С. П. Гаврилов, Топологические пространства с конечными топологиями и несимметричные псевдометрики, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 43–62

С.П. Гаврилов

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С КОНЕЧНЫМИ ТОПОЛОГИЯМИ И НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПСЕВДОМЕТРИКИ

Аннотация

Развита теория топологических пространств с конечными топологиями на основе понятий простого открытого и простого замкнутого множеств. Изучено строение открытых и замкнутых множеств. Введено понятие схемы и матрицы подчинения. Выяснено какие условия на топологические пространства с конечными топологиями налагают аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2, T_3, T_4. Показано, что топологические пространства с конечными топологиями локально линейно связны, а каждое простое открытое и простое замкнутое множества гомотопически эквивалентны точке. Доказано, что топологическое пространство топологической группы имеет конечную топологию тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число связных компонент, а связная компонента единицы имеет тривиальную топологию. Введено понятие несимметричной псевдометрики и определены три топологии, ею порожденные. Доказано, что любое топологическое пространство с конечной топологией можно задать несимметричной псевдометрикой, принимающей всего два значения.

Abstract

S.P. Gavrilov **Topological spaces with finite topologies and non-symmetric pseudometrics**

In the present paper we study the topological spaces with finite topologies using the notion of elementary open (closed) set. We describe the family of open (closed) sets in terms of subordination matrix and subordination diagram, and characterize finite topologies satisfying the separability axioms T_0, T_1, T_2, T_3, T_4. We prove that topological spaces with finite topologies are locally linear connected, and each elementary open (closed) subset is homotopically equivalent to a point. We demonstrate that a topology of topological group is finite if and only if the set of connected components is finite and the connected component of unit has trivial topology. Also we define the nonsymmetric pseudometric and three topologies generated by this pseudometric. We prove that each finite topology is determined by a nonsymmetric pseudometric with two values.

1. Строение открытых множеств топологического пространства с конечной топологией

Пусть (X, Φ) — топологическое пространство, $\Phi = \{U_\alpha\}$ — топология на X, то есть семейство подмножеств $U_\alpha \subset X$ называемых открытыми множествами, удовлетворяющее аксиомам топологического пространства: 1) объединение любого подсемейства открытых множеств открыто; 2) пересечение конечного подсемейства открытых множеств открыто; 3) пустое множество $\emptyset$ открыто; 4) пространство X открыто.

Определение 1. Назовем топологию Φ *конечной*, если она Φ — конечное семейство множеств.

Замечание 1. Топологическое пространство с конечной топологией (далее кратко ТПКТ) всегда компактно, ибо любое его открытое покрытие конечно.

Определение 2. Назовем *минимальной окрестностью точки* x пересечение всех окрестностей точки x, и обозначим ее через W_x. Так как число открытых множеств конечно, то W_x — открытое множество.

Замечание 2. Для произвольного топологического пространства пересечение всех окрестностей точки x не обязано быть открытым. Например, для $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ $W_x = \{x\}$ — точка, не являющаяся открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Открытое множество U назовем *составным*, если его можно представить в виде объединения двух непустых открытых собственных подмножеств.

Определение 4. Открытое непустое множество W назовем *простым* открытым множеством (кратко ПОМ), если оно не является составным.

Замечание 3. Если топология бесконечна, то в X может не существовать простых открытых множеств. Например, в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ каждое непустое открытое множество — составное.

Теорема 1. *В топологическом пространстве с конечной топологией открытое множество* $W \in \Phi$ *является простым тогда и только тогда, когда* W *— минимальная окрестность некоторой своей точки, то есть существует* $x_1 \in W$, *для которой* $W_{x_1} = W$.

Доказательство. Докажем необходимость. Для любого $x \in W$, $W_x \subset W$, ибо W_x — минимальная окрестность. Тогда

$$W = \bigcup_{x \in W} W_x = \bigcup_{i \in K} W_{x_i}$$

есть объединение конечного числа минимальных окрестностей, ибо топология конечна. Если все $W_{x_i} \neq W$, то W — составное. Так как W — простое, то существует x_1 такое, что $W = W_{x_1}$.

Докажем достаточность. Если минимальная окрестность W_{x_1} точки x_1 — составное множество, то она представляется в виде объединения двух непустых открытых множеств U_1 и U_2 отличных от W_{x_1}. Пусть для определенности $x_1 \in U_1$, тогда W_{x_1} не минимальная окрестность, ибо $U_1 \subset W_{x_1}$. Следовательно, W_{x_1} — простое. □

Определение 5. Назовем подмножество $kerW = \{x \in W : W_x = W\}$ *ядром* ПОМ, а подмножество $cokerW = W \setminus kerW = \{y \in W : W_y \neq W\}$ *коядром* ПОМ.

Теорема 2. *Коядро любого простого открытого множества открыто.*

Доказательство. Если коядро пусто, то оно открыто. Пусть коядро не пустое множество. Обозначим

$$V = \bigcup_{y \in cokerW} W_y$$

Так как $y \in W_y \subset W$, то $cokerW \subset V \subset W$. Для любого $z \in V$ существует такое W_y, что $z \in W_y$. Откуда $W_z \subset W_y$. Но тогда $W_z \neq W$, ибо $W_y \neq W$, следовательно, $z \in cokerW$. Итак, $V \subset cokerW$. Из этих двух включений получаем, что $cokerW = V$ открыто как объединение открытых множеств. □

Теорема 3. *Ядра двух различных простых открытых множеств не пересекаются.*

Доказательство. Пусть пересечение ядер двух ПОМ не пусто. Тогда для любой точки из этого пересечения имеем $W_y = W_1$, ибо $y \in kerW_2$, и, одновременно, $W_y = W_2$, ибо, $y \in kerW_2$, откуда $W_1 = W_2$.□

Следствие теоремы 3. *Любое открытое множество есть дизъюнктное объединение ядер всех ПОМ, содержащихся в нем.*

Определение 6. Будем говорить, что ПОМ W_1 *подчинено* ПОМ W_2 (и писать $W_1 \le W_2$), если $W_1 \subset W_2$, и *соподчинено*, если не существует такого ПОМ W_3, отличного от W_1 и W_2, что $W_1 \subset W_3 \subset W_2$.

Обозначим множество всех ПОМ через $P = \{W_i\}_{i \in I}$. Оно, очевидно, образует базу конечной топологии Φ. Назовем эту базу *простой.*

Отношение подчиненности обладает свойством транзитивности и антисимметричности, ибо этими свойствами обладает отношение включения множеств, и, следовательно, отношение подчиненности является отношением частичной упорядоченности. Поэтому множество $(P, \le)$ -- конечное частично упорядоченное множество.

Определение 7. $W \in P$ назовем ПОМ *первого уровня* и обозначим $\overset{1}{W}$, если оно не подчинено никакому отличному от себя самого ПОМ. Множество всех ПОМ 1-го уровня обозначим

$$\overset{1}{P} = \{\overset{1}{W}_{i_1}\}_{i_1 \in I_1}, I_1 \subset I$$

Далее приведем, опуская несложные доказательства, ряд теорем.

Теорема 4. *Топологическое пространство с конечной топологией есть объединение всех ПОМ первого уровня.*

Теорема 5. *Ядро каждого ПОМ первого уровня замкнуто, а следовательно, его дополнение в X открыто.*

Теорема 6. *Топологическое пространство X с конечной топологией представляется в виде дизъюнктного объединения $X = \overset{1}{F} \bigsqcup \overset{2}{X}$, где $\overset{1}{F} = \bigsqcup_{i_1 \in I_1} ker\overset{1}{W}_{i_1}$ замкнуто в X, $\overset{2}{X} = \bigcup_{i_1 \in I_1} coker\overset{1}{W}_{i_1}$ открыто в X.*

Определение 8. Назовем $W \in \overset{2}{X}$ ПОМ *второго уровня* и обозначим $\overset{2}{W}$, если в $\overset{2}{X}$ нет другого ПОМ его содержащего. Обозначим через $\overset{2}{P} = \{\overset{2}{W}_{i_2}\}_{i_2 \in I_2}$ семейство всех ПОМ второго уровня. И далее по индукции назовем $W \in P$ ПОМ s-го уровня и обозначим $W = \overset{s}{W}$ $(s \ge 1)$, если $\overset{s}{W} \subset \overset{s}{X}$ $(\overset{1}{X} \equiv X)$ и в X нет других ПОМ, содержащих $\overset{s}{W}$, где

$$\overset{s}{X} = \bigcup_{i_{s-1} \in I_{s-1}} coker\overset{s-1}{W}_{i_{s-1}}, \quad (s \ge 2).$$

Теорема 4(s). $\overset{s}{X} = \bigcup_{i_s \in I_s} \overset{s}{W}_{i_s}$, *где* $\overset{s}{P} = \{\overset{s}{W}_{i_s}\}_{i_s \in I_s \subset I}$ *— семейство всех ПОМ s-го уровня.*

Теорема 5(s). $ker\overset{s}{W}_{i_s}$ *замкнуто в* $\overset{s}{X}$, $X\setminus ker\overset{s}{W}_{i_s}$ *открыто в* X.

Теорема 6(s). $\overset{s}{X} = \overset{s}{F}\bigsqcup\overset{s+1}{X}$ *— прямое объединение, где* $\overset{s+1}{X} = \bigcup\limits_{i_s\in I_s} coker\overset{s}{W}_{i_s}$ *открыто в* X, $\overset{s}{F} = \bigsqcup\limits_{i_s\in I_s} coker\overset{s}{W}_{i_s}$ *замкнуто в* $\overset{s}{X}$.

Определение 9. Будем говорить, что конечная топология Φ *r-уровневая*, если $\overset{r}{X} \neq \emptyset$, $\overset{r+1}{X} = \emptyset$. Таким образом

$$X = \overset{1}{F}\bigsqcup\overset{2}{X} = \dots = \overset{1}{F}\bigsqcup\overset{2}{F}\bigsqcup\dots\bigsqcup\overset{s}{F}\bigsqcup\overset{s+1}{X} = \dots = \overset{1}{F}\bigsqcup\dots\bigsqcup\overset{r}{F},$$

и имеем цепочку включений

$$X = \overset{1}{X} \supset \overset{2}{X} \supset \dots \supset \overset{r}{X} \supset \overset{r+1}{X} = \emptyset,$$

где все $\overset{s+1}{X}$ открыты в X, а следовательно все множества

$$\overset{1}{F}, \overset{1}{F}\bigsqcup\overset{2}{F}, \dots, \overset{1}{F}\bigsqcup\dots\bigsqcup\overset{s}{F}$$

замкнуты в X. Все точки $x \in \overset{r}{F}$ будем называть точками s-го уровня $(1 \le s \le r)$ и обозначать через $\overset{s}{X}$. Будем также говорить, что уровень $\overset{t}{F}$ *более низкий*, чем $\overset{s}{F}$, а $\overset{s}{F}$ *более высокий*, чем $\overset{t}{F}$, если $t > s$.

2. Схема подчинения и матрица подчинения

Теоремы 1–6 позволяют представить строение открытых множеств произвольного ТПКТ и указать способ задания любой конечной топологии на любом множестве X следующим образом.

1 этап. Задаем произвольное разбиение множества X на конечное семейство непустых непересекающихся подмножеств, каждое из которых берем за ядро некоторого простого открытого множества, то есть задаем разбиение $X = \bigsqcup\limits_{i\in I} X_i$, где I — конечное множество из m индексов, и полагаем $kerW_i = X_i$. Это разбиение назовем *первичным*.

2 этап. Задаем схему подчинения ядер следующим образом. Разбиваем все ядра на r уровней $(r \le m)$ и задаем подчинение ядер. Ядра первого уровня не подчинены никаким другим ядрам. Каждое ядро $(s+1)$-уровня $(s > 1)$ соподчинено по крайней мере одному ядру соседнего более высокого s-го уровня и не может быть подчинено ни одному ядру того же $(s+1)$-уровня или более низкого $t > s+1$ уровня. Но, разумеется, оно может подчиняться каким-либо другим ядрам соседнего s-уровня или других более высоких уровней $t < s$, причем как через ядро s-го уровня или промежуточных ядер q-уровней $(t < q < s)$, так и непосредственно, то есть соподчиняться.

Замечание 4. В теории частично упорядоченных множеств соподчинение называется покрытием (a покрывает b, если $a > b$ и не существует $x \in P$, $a > x > b$), схема соподчинения — диаграммой, число r — длиной упорядоченного множества, множества самого верхнего первого уровня — максимальными элементами, а самого низшего r-уровня — минимальными (см. [4,с. 15-16]).

3 этап. Каждое простое открытое множество s-го уровня $\overset{s}{W}$ получается как прямое объединение ядра $ker\overset{s}{W}$ со всеми ядрами ему подчиненными.

Далее все открытые множества U конечной топологии Φ на X строятся как всевозможные объединения ПОМ разных уровней. Схеме подчинения можно сопоставить некоторую матрицу, которую назовем *матрицей подчинения*. Занумеруем как-то все простые открытые множества $P = \{W_i\}_{i \in I}$, где $I = \{1, \dots, m\}$, и зададим элементы a_{ij} m-мерной матрицы следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} W_i \subset W_j \\ 0, & \text{если} W_i \not\subset W_j. \end{cases}$$

Очевидно, $a_{ii} = 1$, ибо $W_i \subset W_i$.

Занумеруем теперь все ПОМ специальным образом: разобьем натуральное число $m = m_1 + \ldots + m_r$, где m_s $(1 \leq s \leq r)$ — число всех ПОМ s-го уровня, а индекс i_s, $m_1 + \ldots + m_{s-1} + 1 \leq i_s \leq m = m_1 + \ldots + m_s$, отвечает ПОМ s-го уровня.

Тогда, если $i < j$, то $W_i \not\subset W_j$ и, следовательно, $a_{ij} = 0$, ибо любое следующее за W_i ПОМ W_j либо того же уровня, либо более низкого, и W_i ему подчинено быть не может. Поэтому, матрица подчинения при такой специально выбранной нумерации становится нижнетреугольной с единицами на главной диагонали

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 \\ * & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Более того, если ее разбить на r^2 блоков, отвечающих разбиению

$m = m_1 + \ldots + m_r$, то r диагональных блоков будут единичными матрицами.

3. Замкнутые подмножества топологического пространства с конечной топологией

Обозначим через Φ^* множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства X, то есть все возможные дополнения $F = X \setminus U$ открытых множеств $U \in \Phi$.

Определение 1'. Если Φ — конечная топология на X , то множество Φ^* относительно операций объединения и пересечения также образует конечную топологию, которую назовем *дуальной* к Φ. Очевидно, дуальная топология к Φ^* будет совпадать с Φ.

Как известно, для любого подмножества $M \subset X$ его замыкание есть по определению подмножество

$$\overline{M} = \{y \in X : \forall U_y \in \Phi, U_y \bigcap M \neq \emptyset\}$$

Замыкание $\overline{M}$ является замкнутым подмножеством, совпадающим с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих множество M.

Определение 2'. Назовем *минимальным замкнутым множеством*, содержащим точку x, пересечение всех замкнутых множеств, содержащих точку x, и обозначим его через H_x. Согласно вышесказанному $H_x = \overline{\{x\}}$ совпадает с замыканием одноточечного подмножества $\{x\}$.

Для Φ с конечной топологией, взяв в качестве окрестности U_y минимальную окрестность W_y, содержащуюся в любой окрестности точки y, получим, что

$$H_x = \overline{\{x\}} = \{y \in X : W_y \bigcap x \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in W_y\}.$$

Определение 3'. Замкнутое множество F назовем *составным*, если его можно представить в виде объединения двух непустых замкнутых собственных подмножеств.

Определение 4'. Замкнутое множество H назовем *простым* (кратко ПЗМ), если оно не является составным.

Доказательства следующих трех теорем слово в слово повторяют доказательства теорем 1, 2, 3 из параграфа 1, поэтому далее идут лишь их формулировки.

Теорема 1'. *Для ТПКТ замкнутое множество $H \in \Phi^*$ является простым тогда и только тогда, когда H — замыкание некоторой своей точки, то есть существует такая $x_1 \in H$, что $H = H_{x_1}$.*

Определение 5'. Назовем множество $kerH = \{x \in H : H_x = H\}$ *ядром* простого замкнутого множества H, а $cokerH = \{Y \in H : H_Y \neq H\}$ — *коядром* ПЗМ.

Теорема 2'. *Коядро любого простого замкнутого множества замкнуто.*

Теорема 3'. *Ядра различных простых замкнутых множеств не пересекаются.*

Следствие теоремы 3'. *Любое замкнутое $F \in \Phi^*$ есть дизъюнктное объединение ядер всех простых замкнутых множеств, содержащихся в F:*

$$F = \bigsqcup_{H_i \subset F} kerH_i$$

Теорема 7.

$$kerH_x = kerW_x, \quad W_x = \bigsqcup_{W_k \subset W_x} kerW_k, \quad H_x = \bigsqcup_{W_l \supset W_x} kerW_l.$$

Доказательство. Следствие теоремы 3, примененное к $W_x \in \Phi$ дает искомое выражение для W_x. Из определения замыкания $H_x = \{y \in X : x \in W_y\}$ следует, что $W_x \subset W_y$. Для любого $z \in kerW_y$, $W_z = W_y$ и если $x \in W_y = W_z$, то и $z \in H_x$. Так что $kerW_y \subset H_x$ для любого $y \in H_x$. Откуда получаем

$$H_x = \bigcup_{W_x \subset W_y} kerW_y = \bigsqcup_{W_x \subset W_l} kerW_l,$$

ибо по теореме 3 ядра различных ПОМ не пересекаются. Очевидно, что $H_x \bigcap W_x = kerW_x$. Из полученного выражения H_x через прямое объединение ядер ПОМ видно, что $H_y = H_x$ равносильно $W_y = W_x$. Но $H_y = H_x$ равносильно $y \in kerH_x$, а $W_y = W_x$ равносильно $y \in kerW_x$, поэтому $y \in kerH_x$ равносильно $y \in kerW_x$, то есть $kerH_x = kerW_x$.□

Следствие из теоремы 7. *Если $x \in ker\overset{1}{W}$, то $W_x = \overset{1}{W}$, $H_x = ker\overset{1}{W}$.*

Определение 10. Назовем *минимальной окрестностью* множества $M \subset X$ пересечение всех открытых множеств, содержащих M

и обозначим его через W_M. Так как каждое $U \in \Phi$ есть объединение конечного числа простых, то W_M — открытое множество и

$$W_M = \bigcap_{M \subset U \in \Phi} = \bigcup_{y \in M} W_y = \bigsqcup_{M \bigcap W_k \neq \emptyset} kerW_k$$

Следствие 2 теоремы 7. $W_{H_x} = \bigcup\limits_{W_x \subset \overset{1}{W_l}} ker\overset{1}{W_l}$.

Доказательство. Так как для любого $y \in kerW_l$ имеем $W_y = W_l$, то $W_{H_x} = \bigcup\limits_{y \in H_x} W_y = \bigcup\limits_{W_x \subset W_l} W_l = \bigcup\limits_{W_x \subset \overset{1}{W_k}} \overset{1}{W_k}$, ибо каждое W_l входит хотя бы в одно ПОМ первого уровня.□

Замечание 4. $\overline{M} = \bigcup\limits_{y \in M} H_y$, ибо Φ^* — конечное множество.

4. Связь матрицы подчинения дуальной конечной топологии Φ* с матрицей подчинения конечной топологии Φ

Занумеруем каким-либо способом простые открытые множества $W_1, \ldots, W_m \in P$ и образуем матрицу $A = [a_{ij}]$ подчинения конечной топологии Φ полагая

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } W_i \subset W_j \\ 0, & \text{если } W_i \not\subset W_j \end{cases}$$

Занумеруем теперь простые замкнутые множества $H_1, \ldots, H_m$ так, чтобы $kerH_i = kerW_i$, и образуем матрицу $A^* = [a^*_{ij}]$ подчинения дуальной конечной топологии Φ^*, полагая

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } H_i \subset H_j \\ 0, & \text{если } H_i \not\subset H_j \end{cases}$$

Теорема 8. *Матрица подчинения дуальной топологии Φ^* совпадает с транспонированной матрицей топологии Φ, то есть $a^*_{ij} = a_{ji}$.*

Доказательство. Согласно теореме 7 имеем

$$W_i = kerW_i \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{\forall W_k \subset W_i (W_k \neq W_i)} kerW_k \Big),$$

$$H_i = kerW_i \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{W_i \subset \forall W_l (W_i \neq W_k)} kerW_l \Big).$$

Откуда видно, что если $W_i \subset W_j$, то $H_i \supset H_j$ и наоборот, если $H_i \subset H_j$, то $W_i \supset W_j$. А это ведет к тому, что $a^*_{ij} = a_{ji}$.□

Замечание 5. Если $W_i \subset W_j$, то мы говорим, что ПОМ W_i подчинено ПОМ W_j и записываем это как $W_i < W_j$ или пишем стрелку $W_j \longrightarrow W_i$. Теорема 8 говорит о том, что схема подчинения дуальной топологии Φ^* получается из схемы подчинения конечной топологии Φ обращением знака подчинения или обращением стрелок, то есть если $W_i \leq W_j$ или $W_j \longrightarrow W_i$ то $H_i \geq H_j$ (равносильно $H_j \leq H_i$) или $H_j \longleftarrow H_i$ (равносильно $H_i \longrightarrow H_j$).

5. Аксиомы отделимости в топологических пространствах с конечными топологиями

Выясним какие условия на топологические пространства с конечными топологиями налагают аксиомы отделимости.

Напомним основные аксиомы отделимости (см. [1, с.84]) вместе с их равносильными формулировками.

T_0 (Колмогоров). Для любых точек $x \neq y$ существует либо окрестность U_x, непересекающаяся с y, либо окрестность U_y, непересекающаяся с x.

Равносильная формулировка: замыкания различных точек — различны, то есть $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

T_1 (Рисс). Для любых точек $x \neq y$ существуют одновременно окрестности U_x и U_y, непересекающиеся с x и y соответственно.

Равносильная формулировка: каждая точка является замкнутым множеством, то есть $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

T_2 (Хаусдорф). Для любых точек $x \neq y$ существуют непересекающиеся окрестности U_x и U_y.

T_3 (Вьеторис). Для любой точки x и любого не содержащего эту точку замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности U_x и U_F.

Равносильная формулировка: для любой окрестности U_x каждой точки x существует окрестность V_x, входящая в U_x вместе с замыканием, то есть $\overline{V_x} \subset U_x$.

T_4 (Титце). Для любых замкнутых непустых непересекающихся множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся окрестности U_{F_1} и U_{F_2}.

Равносильная формулировка: для любой окрестности U_F любого замкнутого множества F существует окрестность, входящая в U_F вместе с замыканием, то есть $\overline{V_F} \subset U_F$.

Топологическое пространство называется регулярным, если одновременно выполняются аксиомы T_1 и T_3, и нормальным, если выполняются T_2 и T_4. Из нормальности следует регулярность, из регулярности хаусдорфовость, из хаусдорфовости T_1 отделимость, из T_1 отделимости следует T_0 отделимость.

Используя доказанные ранее теоремы 1–6 и особенно теорему 7 и ее следствия и применяя аксиомы отделимости к минимальным окрестностям W_x и W_y различных точек $x \neq y$ и минимальным окрестностям замыканий W_{H_x}, можно доказать следующие теоремы, дающие необходимы и достаточные условия выполнения аксиом отделимости T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 для топологических пространств с конечными топологиями.

Теорема T_0. *X с конечной топологией T_0 отделимо, ядро каждого ПОМ одноточечно, то есть $kerW_x = \{x\}$.*

Теоремы $T_1(T_2)$. *X с конечной топологией $T_1(T_2)$ отделимо тогда и только тогда, когда X — дискретное топологическое пространство, то есть $W_x = \{x\}$.*

Определение 11. Назовем топологическое пространство X *квазидискретным*, если оно есть дизъюнктное объединение множеств X_α, каждое из которых открыто и имеет тривиальную топологию, то есть в X_α открыты лишь X_α и пустое множество.

Теорема T_3. *Пусть X — пространство с конечной топологией. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *X с конечной топологией T_3 отделимо;*

б) *каждое ПОМ замкнуто, то есть $\overline{W} = W$;*

в) *каждое ПОМ является ПОМ первого уровня;*

г) *X — квазидискретно и для каждого ПОМ $W = kerW$.*

Следствие теоремы T_3. *Если X является T_3 отделимым, то матрица подчинения соответствующей конечной топологии единична.*

Теорема T_4. *X с конечной топологией T_4 отделимо тогда и только тогда, когда различные ПОМ первого уровня попарно не пересекаются, то есть*

$$X = \bigsqcup_{i_1 \in I_1} \overset{1}{W}_{i_1}.$$

6. Связность в топологических пространствах с конечными топологиями

Напомним некоторые определения, относящиеся к понятию связности и гомотопии. Топологическое пространство X называется не-связным, если его можно представить в виде прямого объединения двух открытых непустых подмножеств и связным, если такого представления не существует. X называется линейно связным, если для любых точек x_0 и x_1 существует путь, соединяющий эти точки, то есть непрерывное отображение $\varphi : [0,1] \to X$, $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$. X называется локально линейно связным, если для любой окрестности U_x каждой точки x существует линейно связная окрестность $V_x \subset U_x$.

Гомотопией из X в Y называется непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$, при этом $F_0 : X \to Y$, $F_0(x) = F(x,0)$ — начальное, а $F_1 : X \to Y$, $F_1(x) = F(x,1)$ — конечное отображения гомотопии. Непрерывное отображение $f_0 : X \to Y$ гомотопно непрерывному отображению $f_1 : X \to Y$, если существует гомотопия F такая, что $F_0 = f_0$ и $F_1 = f_1$ и пишут $f_0 \sim f_1$.

Топологическое пространство X называется гомотопически эквивалентным топологическому пространству Y и пишут $X \sim Y$, если существуют непрерывные $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что, $g \circ f \sim id_X$, $f \circ g \sim id_Y$. X называется стягиваемым, если тождественное отображение id_X гомотопно постоянному отображению c_{x_0}.

Имеют место следующие факты:

1) линейно связное топологическое пространство связно;

2) для локально линейно связного топологического пространства понятия связного и линейно связного совпадают;

3) X стягиваемо тогда и только тогда, когда X гомотопически эквивалентно точке;

4) если X стягиваемо, то X линейно связно.

Докажем теперь следующие две теоремы для топологических пространств с конечными топологиями.

Теорема 9. *X с конечной топологией несвязно тогда и только тогда, когда все ПОМ первого уровня можно разбить на две группы так, что ПОМ первого уровня из разных групп не пересекаются.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X — несвязно, тогда существуют открытые непустые U и V, такие, что $X = U \bigsqcup V$. Если ни одна точка первого уровня не входит в U, то все они входят в V. Но тогда все ПОМ первого уровня входят в V, ибо V открыто. Так как по теореме 4 X есть объединение всех ПОМ первого уровня, имеем $X = V$, следовательно $U = \emptyset$, что противоречит условию $U \neq \emptyset$.

Итак, точки первого уровня входят как в U, так и в V, следовательно в них входят целиком и соответствующие ПОМ первого уровня, ибо U и V открыты. Так что все ПОМ первого уровня разбиваются на две группы, первые входят в U, а вторые в V.

Достаточность. Если все ПОМ первого уровня разбиты на две группы, где ПОМ из разных групп не пересекаются, то, полагая $U = \bigcup\limits_{i_1' \in I_1'} \overset{1}{W}_{i_1'}, V = \bigcup\limits_{i_1'' \in I_1''} \overset{1}{W}_{i_1''}$ где $I_1' \bigsqcup I_1'' = I_1$ получим $X = U \bigsqcup V$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, то есть X — несвязно.□

Следствие теоремы 9. *Матрица подчинения несвязного X с конечной топологией распадается на два ненулевых диагональных блока, если в одну группу выделить индексы, относящиеся к ПОМ, входящим в U, а в другую к ПОМ, входящим в V.*

Теорема 10. *Каждое простое открытое и простое замкнутое множества стягиваемы.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : W \times J \to W$, задаваемое формулой

$$F(x,t) = \begin{cases} x, & \forall t \in J_1 \ni 0 \\ x_0, & \forall t \in J_2 \ni 1 \end{cases}$$

$$J_1 \bigsqcup J_2 = J = [0,1], x_0 \in kerW.$$

Все открытые множества V пространства W, отличные от $\emptyset$ и W, содержатся в $U = cokerW$. Нетрудно видеть, что

$$F^{-1}(W) = W \times J, \qquad F^{-1}(W_k) = W_k \times J_1, \ (W_k \neq W),$$

$$F^{-1}(V = \bigcup W_k) = \bigcup F^{-1}(W_k) = \bigcup (W_k \times J_1) = V \times J_1.$$

Подмножество $F^{-1}(V) = V \times J_1$ открыто в $W \times J \Longleftrightarrow J_1$ открыто в J, в частности, можно взять $J_1 = [0, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, тогда $J_2 = [\alpha, 1]$. Итак, прообразы всех открытых в W множеств открыты. Следовательно, F непрерывно и является гомотопией, связывающей $F_0 = id_X$ с $F_1 = c_{x_0}$.

Аналогично, для ПЗМ рассматриваем отображение $F : H \times J \to H$,

$$F(x,t) = \begin{cases} x, & \forall t \in J_1 \ni 0 \\ x_0, & \forall t \in J_2 \ni 1, \end{cases}$$

где $x_0 \in kerH = kerW$.

Тогда $F^{-1}(H_k) = H_k \times J_1$ — замкнуто, если $J_1 = [0, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, замкнуто в J.□

Следствие теоремы 10. *Каждое ПОМ и каждое ПЗМ линейно связны, следовательно ТПКТ всегда локально линейно связно.*

Замечание 6. Топология на $kerW$ всегда тривиальная, поскольку $W\bigcap kerW = kerW$.

7. Топологические группы с конечными топологиями

Дадим ответ на вопрос: какие конечные топологии может иметь топологические пространство топологической группы? Напомним, что топологической группой называется группа, снабженная топологией, относительно которой групповые операции непрерывны (см.[2,с.105]).

Приведем основные известные факты из теории топологических групп ([2]).

1) Топологическое пространство любой топологической группы однородно. Каждый левый $L_a : G \to G$, $L_a(x) = ax$ и правый $R_a : G \to G$, $R_a(x) = xa$ сдвиги являются гомеоморфизмами.

2) Топологическое пространство любой топологической группы и фактор-пространства левых и правых смежных классов по любой под- группе удовлетворяют аксиоме отделимости T_3.

3) Связная компонента единицы $\overset{0}{G}$ топологической группы G является замкнутой нормальной подгруппой в G.

4) Любая топологическая группа есть прямое объединение связных компонент G_α, каждая из которых является смежным классом G по $\overset{0}{G}$, то есть $G_\alpha = g_\alpha\overset{0}{G} = L_{g_\alpha}(\overset{0}{G})$, и гомеоморфна $\overset{0}{G}$.

Ответ на поставленный вопрос сформулируем в виде теоремы.

Теорема 11. *Топологическое пространство топологической группы G имеет конечную топологию тогда и только тогда, когда G имеет конечное число связных компонент и связная компонента единицы $\overset{0}{G}$ имеет тривиальную топологию.*

Доказательство. Доказательство состоит в применении теоремы T_3 и приведенных выше свойств 2, 3, 4.

Необходимость. Согласно 2 топологическая группа всегда T_3- отделима. Но тогда по теореме T_3 топология на G квазидискретна, то есть все G_α открыты и имеют тривиальную топологию, причем число всех связных компонент конечно.

Достаточность очевидна.□

Следствие теоремы 11. *Если G — конечная группа, то каждую конечную топологию Φ, превращающую G в топологическую группу можно задать так. Возьмем любую нормальную подгруппу $N \subset G$, объявим ее связной компонентой единицы, то есть $\overset{0}{G} = N$,* *и наделим тривиальной топологией* $\overset{0}{\Phi} = (\emptyset, \overset{0}{G})$. *После чего получим* $G = \bigsqcup_{i=1}^{m} G_i$, *где* $G_1 = \overset{0}{G}$, $G_i = g_i\overset{0}{G}$ *— смежные классы* G *по* N, $m = card(G/\overset{0}{G})$.

8. Топологии, задаваемые несимметричными псевдометриками

Напомним, что семейство открытых подмножеств $B = \{B_\alpha\}_{\alpha\in A\subset\Phi}$ называется базой топологического пространства X, если любое открытое $U \in \Phi$ есть объединение некоторого подсемейства из B. Семейство открытых подмножеств $P = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma\subset\Phi}$ называется предбазой X, если всевозможные конечные пересечения элементов из P образуют базу топологии Φ на X. В этом случае будем писать $\Phi =< P >$ и говорить, что топология Φ порождена предбазой P.

Любое семейство $P = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ подмножеств в X такое, что $\bigcup P_\alpha = X$ задает предбазу топологии $\Phi =< P >$.

Напомним следующий критерий базы [3, с.73]. Семейство подмножеств $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ можно взять за базу некоторой топологии Φ на $X = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in B_\alpha \bigcap B_\beta \neq \emptyset$ где B_α, $B_\beta \in \mathcal{B}$ существует такое $B_\gamma \in \mathcal{B}$, что $x \in B_\gamma \subset B_\alpha \bigcap B_\beta$.

Определение 12. Функцию $\rho : X \times X \to R$ назовем *несимметричной псевдометрикой* или *несимметричным расстоянием* (будем говорить, что $\rho(x, y)$ — расстояние от точки x до точки y), если она удовлетворяет условиям:

1) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника);

2) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, x) = 0$ (положительная полуопределенность).

Если условие 2) усилить, потребовав дополнительно, что $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, и добавить условие:

3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность),

то ρ есть обычная (симметричная) метрика.

Если же выполняются условия 1), 2), 3), то имеем псевдометрическое пространство по Келли [3. с.162].

Как известно, каждая (симметричная) метрика задает топологию, база которой состоит из открытых шаров $B(\underset{0}{x}, r) = \{x \in X : \rho(\underset{0}{x}, x) < r\}$ ($r > 0$ —радиус, $\underset{0}{x} \in X$ —центр), причем соответствующее топологическое пространство называется метризуемым и содержится в классе нормальных пространств. Аналогично (симметричная) псевдометрика задает топологию с базой из открытых шаров, которая уже не хаусдорфова. Однако, если ввести на псевдометрическом пространстве отношение эквивалентности [3, с.102] считая $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, y) = 0$, то фактор пространство будет обычным метрическим пространством.

Отказ от условия симметричности приводит к тому. что несимметричная псевдометрика задает три топологии на множестве X.

Определение 13. Множество $B^+(\underset{0}{x}, r) = \{x \in X : \rho(\underset{0}{x}, x) < r\}$ ($B^-(\underset{0}{x}, r) = \{x \in X : \rho(x, \underset{0}{x}) < r\}$) назовем *выходящим* (*входящим*) открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке $\underset{0}{x} \in X$.

Теорема 12. *Семейства всех выходящих шаров* $\mathcal{B}^+ = \{B^+(\underset{0}{x}, r), \underset{0}{x} \in X, r > 0\}$ *и всех входящих шаров* $\mathcal{B}^- = \{B^-(\underset{0}{x}, r), \underset{0}{x} \in X, r > 0\}$ *образуют базы топологий* Φ^+ *и* Φ^- *на множестве* X.

Доказательство. Доказательство состоит в проверке выполнения критерия базы. Для любого $\underset{3}{x} \in B^+(\underset{1}{x}, \underset{1}{r}) \bigcap B^+(\underset{2}{x}, \underset{2}{r}) \neq \emptyset$, возьмем $B^+(\underset{3}{x}, \underset{3}{r})$, где $0 < \underset{3}{r} < min\{\underset{1}{r} - \rho(\underset{1}{x}, \underset{3}{x}), \underset{2}{r} - \rho(\underset{2}{x}, \underset{3}{x})\}$, тогда для любого $x \in B^+(\underset{3}{x}, \underset{3}{r})$ будем иметь

$$\rho(\underset{1}{x}, x) \leq \rho(\underset{1}{x}, \underset{3}{x}) + \rho(\underset{3}{x}, x) \leq \rho(\underset{1}{x}, \underset{3}{x}) + \underset{3}{r} < \rho(\underset{1}{x}, \underset{3}{x}) + \underset{1}{r} - \rho(\underset{1}{x}, \underset{3}{x}) = \underset{1}{r}$$

$$\rho(\underset{2}{x}, x) \leq \rho(\underset{2}{x}, \underset{3}{x}) + \rho(\underset{3}{x}, x) \leq \rho(\underset{2}{x}, \underset{3}{x}) + \underset{3}{r} < \rho(\underset{2}{x}, \underset{3}{x}) + \underset{2}{r} - \rho(\underset{1}{x}, \underset{3}{x}) = \underset{2}{r}$$

Поэтому $B^+(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}) \subset B^+(\underset{1}{x}, \underset{1}{r}) \bigcap B^+(\underset{2}{x}, \underset{2}{r})$, следовательно $\underset{3}{x} \in B^+(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}) \subset B^+(\underset{1}{x}, \underset{1}{r}) \bigcap B^+(\underset{2}{x}, \underset{2}{r})$, то есть критерий базы выполняется.

Критерий базы для семейства $\mathcal{B}^-$ проверяется аналогично.□

Согласно общепринятой терминологии топология Φ_2 сильнее топологии Φ_1 (а Φ_1 слабее топологии Φ_2), если $\Phi_1 \subset \Phi_2$. Очевиден следующий критерий сравнения топологий: если для любого $x \in X$ и любого элемента базы $B_1 \in \mathcal{B}_1$, содержащего точку x, существует такой элемент базы $\underset{x_2}{B} \in \mathcal{B}_2$, что $x \in \underset{x_2}{B} \subset B_1$, то топология Φ_2 с базой $\mathcal{B}_2$ сильнее топологии Φ_1 с базой $\mathcal{B}_1$.

Определение 14. Будем говорить, что топология Φ на X есть сумма топологий Φ_1 и Φ_2 и писать $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, если $\Phi =< \Phi_1 \bigcup \Phi_2 >$ порождена предбазой, состоящей из объединения топологий Φ_1 и Φ_2.

Очевидно, что топология Φ всегда сильнее каждой из топологий Φ_1 и Φ_2 и что $\Phi =< \Phi_1 \bigcup \Phi_2 >$ порождена также и предбазой, состоящей из объединения предбаз P_1 и P_2 или баз $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ топологий $\Phi_1 =< P_1 >=< \mathcal{B}_1 >$ и $\Phi_2 =< P_2 >=< \mathcal{B}_2 >$.

Будем говорить, что топология Φ есть *сумма семейства* $\{\Phi_\alpha\}$, $\alpha \in \Gamma$, *топологий* на X и писать $\Phi = \sum\limits_{\alpha\in\Gamma} \Phi_\alpha$, если $\Phi =< \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} \Phi_\alpha >$ порождена предбазой, состоящей из объединения всех топологий данного семейства.

Теорема 13. *Любая несимметричная псевдометрика ρ задает симметричную псевдометрику ρ_c, если положить $\rho_c(x,y) = \rho(x,y)+\rho(y,x)$, при этом топология Φ, задаваемая этой симметричной псевдометрикой ρ_c есть сумма топологий Φ^+ и Φ^-.*

Лемма. $B(\underset{0}{x},r) \subset B^+(\underset{0}{x},r)\bigcap B^-(\underset{0}{x},r) \subset B(\underset{0}{x},2r)$.

Доказательство леммы. Для любого $x \in B(\underset{0}{x},r) = \{x \in X : \rho_c(\underset{0}{x},x) = \rho(\underset{0}{x},x)+\rho(x,\underset{0}{x})\}$ имеем $\rho(\underset{0}{x},x) < r-\rho(x,\underset{0}{x})$, ибо $\rho(x,\underset{0}{x}) \geq 0$, так что $x \in B^+(\underset{0}{x},r)$. Аналогично $\rho(x,\underset{0}{x}) < r-\rho(\underset{0}{x},x)$, ибо $\rho(\underset{0}{x},x) \geq 0$, так что $x \in B^-(\underset{0}{x},r)$, и следовательно $B(\underset{0}{x},r) \subset B^+(\underset{0}{x},r)\bigcap B^-(\underset{0}{x},r)$.

Далее для любого $y \in B^+(\underset{0}{x},r)\bigcap B^-(\underset{0}{x},r)$ имеем $\rho(\underset{0}{x},y) < r$, ибо $y \in B^+(\underset{0}{x},r)$, и $\rho(y,\underset{0}{x}) < r$, ибо $y \in B^-(\underset{0}{x},r)$. Отсюда мы получаем, что $\rho_c(\underset{0}{x},y) = \rho(\underset{0}{x},y) + \rho(y,\underset{0}{x}) < r + r = 2r$, поэтому имеем $B^+(\underset{0}{x},r)\bigcap B^-(\underset{0}{x},r) \subset B(\underset{0}{x},2r)$.$\square$

Доказательство теоремы 13. Нетрудно проверить, что $\rho_c : X \times X \to R$ — симметричная псевдометрика. Покажем, что $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$.

Для любого $\underset{3}{x} \in B^+(\underset{1}{x},\underset{1}{r})\bigcap B^-(\underset{2}{x},\underset{2}{r}) \neq \emptyset$ выберем $0 < \underset{3}{r} < min\{\underset{1}{r} - \rho(\underset{1}{x},\underset{3}{x}), \underset{2}{r} - \rho(\underset{3}{x},\underset{2}{x})\}$, тогда

$\rho(\underset{1}{x},x) \leq \rho(\underset{1}{x},\underset{3}{x}) + \rho(\underset{3}{x},x) \leq \rho(\underset{1}{x},\underset{3}{x}) + \underset{3}{r} < \rho(\underset{1}{x},\underset{3}{x}) + \underset{1}{r} - \rho(\underset{1}{x},\underset{3}{x}) = \underset{1}{r}$,
поэтому $B^+(\underset{3}{x},\underset{2}{r}) \subset B^+(\underset{1}{x},\underset{1}{r})$. Аналогично, для любого $x \in B^-(\underset{3}{x},\underset{3}{r})$ будем иметь

$\rho(x,\underset{2}{x}) \leq \rho(x,\underset{3}{x}) + \rho(\underset{3}{x},\underset{2}{x}) < \underset{3}{r} + \rho(\underset{3}{x},\underset{2}{x}) + \underset{3}{r} < \underset{3}{r} + \underset{2}{r} - \rho(\underset{3}{x},\underset{2}{x}) = \underset{2}{r}$,
поэтому $B^-(\underset{3}{x},\underset{3}{r}) \subset B^-(\underset{2}{x},\underset{2}{r})$.

Итак, $\underset{3}{x} \in B^+(\underset{3}{x},\underset{3}{r})\bigcap B^-(\underset{3}{x},\underset{3}{r}) \subset B^+(\underset{1}{x},\underset{1}{r})\bigcap B^-(\underset{2}{x},\underset{2}{r})$.

Применяя теперь вышеуказанную лемму, получим, что

$\underset{3}{x} \in B(\underset{3}{x},\underset{3}{r}) \subset B^+(\underset{3}{x},\underset{3}{r})\bigcap B^-(\underset{3}{x},\underset{3}{r}) \subset B^+(\underset{1}{x},\underset{1}{r})\bigcap B^-(\underset{2}{x},\underset{2}{r})$,

то есть в каждый элемент предбазы топологии $\Phi^+ + \Phi^- =< \Phi^+ \bigcup \Phi^- >$, содержащий точку $\underset{3}{x}$, можно вписать элемент базы топологии Φ, содержащий эту же точку, то есть топология Φ сильнее топологии

$\Phi^+ + \Phi^-$.

Возьмем теперь любую точку $\underset{3}{x} \in B(\underset{0}{x}, r)$ и выберем такое $\underset{3}{r}$, что $0 < \underset{3}{r} < r - \rho_c(\underset{0}{x}, \underset{3}{x})$. Тогда $B(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}) \subset B(\underset{0}{x}, r)$. Но по лемме имеем $B^+(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}/2) \bigcap B^-(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}/2) \subset B(\underset{3}{x}, \underset{3}{r})$.

Следовательно для любой точки $\underset{3}{x} \in B(\underset{0}{x}, r)$ имеем

$$\underset{3}{x} \in B^+(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}/2) \bigcap B^-(\underset{3}{x}, \underset{3}{r}/2) \subset B(\underset{0}{x}, r),$$

то есть в каждый элемент базы топологии Φ можно вписать элемент предбазы топологии $\Phi^+ + \Phi^-$, поэтому топология $\Phi^+ + \Phi^-$ сильнее топологии Φ. Из включений $\Phi \supset \Phi^+ + \Phi^- \supset \Phi$ следует равенство $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$. □

9. Задание любой конечной топологии несимметричной псевдометрикой

Покажем теперь, что любая конечная топология может быть индуцирована некоторой несимметричной псевдометрикой.

Теорема 14. *Если несимметричная псевдометрика ρ такова, что порождаемые ей топологии Φ^+ и Φ^- конечны, то соответствующие минимальные окрестности имеют вид*:

$$W_x^+ = \bigcap_{r>0} B^+(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) = 0\};$$

$$W_x^- = \bigcap_{r>0} B^-(x, r) = \{y \in X : \rho(y, x) = 0\};$$

$$W_x = \bigcap_{r>0} B(x, r) =$$

$$= \left\{y \in X : \rho_c(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \rho(x, y) = 0 \\ \rho(y, x) = 0 \end{array} \right\}\right\} = W_x^- \bigcap W_x^+$$

При этом $H_x^+ = W_x^-$, $H_x^- = W_x^+$, $\overset{*+}{\Phi} = \Phi^-$, $\overset{*-}{\Phi} = \Phi^+$, так что топологии Φ^+ и Φ^- взаимно-дуальны, то есть замкнутые множества в Φ^+ являются открытыми в Φ^- и наоборот, а топология $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ квазидискретна.

Доказательство. Очевидно, что W_x^+ есть пересечение всех шаров $B^+(x, r)$ с центром в точке x, ибо они образуют базу окрестностей точки x в топологии Φ^+. Затем для любой точки $y \in W_x^+$

должно быть $\rho(x,y) = 0$, в противном случае, если $\rho(x,y) > 0$, то, выбрав $0 < r < \rho(x,y)$, получим, что $y \notin B^+(x,r)$ и следовательно $y \notin W_x^+$, ибо W_x^+ входит в любой шар $B^+(x,r)$. Аналогичные рассуждения имеют место для W_x^-.

Далее по определению замыкания

$$H_x^+ = \{y \in X : x \in W_y^-\} = \{y \in X : \rho(y,x) = 0\} = W_x^-,$$
$$H_x^- = \{y \in X : x \in W_y^+\} = \{y \in X : \rho(x,y) = 0\} = W_x^+.$$

Отсюда имеем

$$\overset{*+}{\Phi} =< \{H_x^+\}, x \in X >=< \{W_x^-\}, x \in X >= \Phi^-,$$
$$\overset{*-}{\Phi} =< \{H_x^-\}, x \in X >=< \{W_x^+\}, x \in X >= \Phi^+.$$

Так как $W_x = W_x^+ \bigcap W_x^- = W_x^+ \bigcap H_x^+$, а по теореме 7 $W_x^+ \bigcap H_x^+ = kerW_x^+$, то $W_x = kerW_x^+$. По теореме 3 ядра различных ПОМ в конечной топологии Φ^+ не пересекаются и следовательно имеют тривиальную топологию в качестве индуцированной. Тогда топология Φ квазидискретна, ибо все ее различные ПОМ $W = W_x = kerW_x^+$ не пересекаются.□

Теорема 15. *Любая конечная топология ψ на X может быть индуцирована несимметричной псевдометрикой $\rho(x,y)$, принимающей всего два значения 0 и 1: $\rho(x,y) = 1$, если $y \in W_x^+$, $\rho(x,y) = 0$ если $y \notin W_x^+$. При этом $\psi = \Phi^+$.*

Доказательство. Надо проверить выполнение аксиом 1) м 2) не- симметричной псевдометрики. Так как $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,x) = 0$, ибо $x \in W_x^+$, то аксиома положительной определенности выполнена. Далее, если $y \in W_x^+$, то $\rho(x,y) = 0$ и неравенство треугольника очевидно выполнено.

Пусть теперь $y \notin W_x^+$, тогда $\rho(x,y) = 1$. Рассмотрим два случая:

а) если $z \in W_x^+$, то $W_z^+ \subset W_x^+$,и так как $y \notin W_x^+$, имеем $y \notin W_z^+$. Следовательно, $\rho(x,y) = 1$, $\rho(x,z) = 0$, $\rho(z,y) = 1$ и неравенство треугольника выполняется;

б) если $z \notin W_x^+$, то $\rho(x,z) = 1$, и поскольку $\rho(x,y) = 1$, при любом $\rho(z,y)$ неравенство треугольника выполняется. □

Литература

[1] Энгелькинг Р. *Общая топология.*, М.Мир, 1986 – 752 с.

[2] Понтрягин Л,С. *Непрерывные группы.*, Изд, 3-е, М. Наука, 1973 – 520 с.

[3] Келли Дж. Л. *Общая топология*, М. Наука, 1968 – 348 с.

[4] Биргкгоф Г. *Теория решеток.*, М. Наука, 1984 – 568с.

Адрес: *Казанский государственный университет, кафедра теории относительности и гравитации, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Department of Physics, Chair of Gravitation and General Relativity, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Sergei.Gavrilov@ksu.ru*