В. Н. Тарасов, А. А. Михайлов, А. С. Миляев, А. К. Тоболкин, Расчет параметров нестационарного взаимодействия цилиндрической оболочки с вязкоупругой средой, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 1992, выпуск 25, 35–40

лочки вращения в жидкости // ИПМ АН СССР. - М., 1986. - № 3. - Т.275. - 61 с.

В.Н.Тарасов, А.А.Михайлов, А.С.Миляев, А.К.Тоболкин

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДОЙ

Дифракция нестационарных упругих волн на цилиндрической оболочке рассматривалась в [1] для условий жесткого контакта, в [2] - для условий проскальзывания.

В настоящей работе рассматривается нестационарное взаимодействие плоской продольной вязкоупругой волны с цилиндрической оболочкой при условиях жесткого контакта и трения.

На бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку набегает продольная ступенчатая вязкоупругая волна, фронт которой параллелен оси оболочки. Задача решается в полярных координатах r,

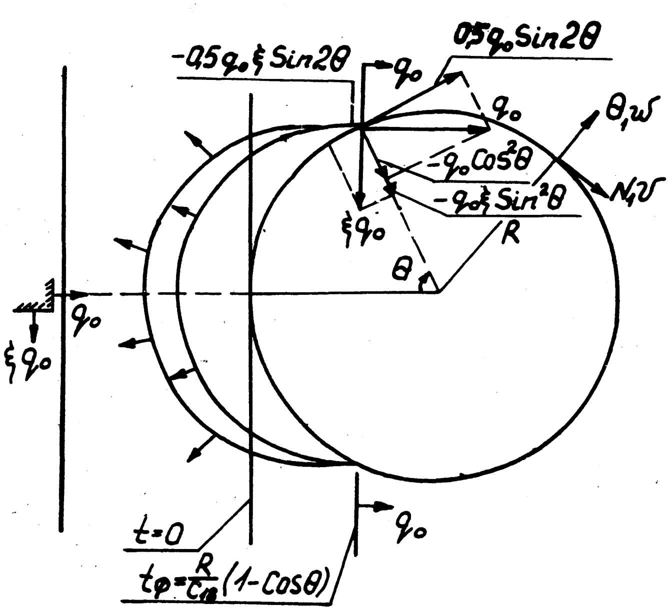

Рис.1

θ (рис.I). Отсчет времени производится с момента соприкосновения падающей волны с оболочкой.

Математически задача сводится к совместному решению системы уравнений движения вязкоупругой среды [3] для потенциалов дифракционных продольной $\varphi(r, \theta, t)$ и поперечной $\psi(r, \theta, t)$ волн и уравнений движения оболочки [4] в перемещениях $w(t,\theta)$ и $v(t, \theta)$ при заданных граничных и нулевых начальных условиях.

Решение выполняется с помощью преобразования Лапласа по времени t и конечного преобразования Фурье по углу θ.

Уравнения движения среды, оболочки и граничные условия для жесткого контакта в изображениях имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi^{LC}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\varphi^{LC}}{\partial r} - \dfrac{n^2}{r^2}\cdot\varphi^{LC} - \dfrac{p^2}{a(p+\alpha)}\cdot\varphi^{LC} = 0 \;, \\ \dfrac{\partial^2\psi^{LS}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\psi^{LS}}{\partial r} - \dfrac{n^2}{r^2}\cdot\psi^{LS} - \dfrac{p^2}{b(p+\beta)}\psi^{LS} = 0 \;, \end{cases} \tag{I}$$

$$v^{LS}\left[n^2 + p^2\frac{(1-\nu^2)R^2\rho_0}{E}\right] + w^{LC}\cdot n = \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh}\Big[Q_1 +$$

$$+\rho p^2\psi^{LS} - \frac{2\mu(1+t_* p)}{R}\cdot\left(\frac{\partial\psi^{LS}}{\partial r} - \frac{n^2}{R}\psi^{LS} + \frac{n}{R}\varphi^{LC} - n\frac{\partial\varphi^{LC}}{\partial r}\right)\Big], \tag{2}$$

$$v^{LS}\cdot n + w^{LC}\cdot\left[c^2n^4 + 1 - \frac{(1-\nu^2)R^2\rho_0}{E}\cdot p^2\right] = \frac{(1-\nu^2)\cdot R^2}{Eh}\cdot\Big[Q_2 -$$

$$-\rho p^2\varphi^{LC} + \frac{2\mu(1+t_* p)}{R}\cdot\left(\frac{\partial\varphi^{LC}}{\partial r} - \frac{n^2}{R}\varphi^{LC} + \frac{n}{R}\psi^{LS} - n\frac{\partial\psi^{LS}}{\partial r}\right)\Big], \tag{3}$$

$$w^{LC} = Q_3 - \frac{\partial\varphi^{LC}}{\partial r} - \frac{n}{R}\psi^{LS} \;, \tag{4}$$

$$v^{LS} = Q_4 + \frac{n}{R}\varphi^{LC} - \frac{\partial\psi^{LS}}{\partial r} \;, \tag{5}$$

где

$$Q_1 = q_0(1-\xi)\,0{,}5\pi\frac{e^{-y}}{p}\cdot[I_{n-2}(y) - I_{n+2}(y)] \;,$$

$$Q_2 = q_0\frac{e^{-y}}{p}\pi\{\xi I_n(y) + 0{,}5(1-\xi)[I_{n-2}(y) + I_{n+2}(y)]\} \;,$$

$$Q_3 = -\frac{q_0\, e^{-y}}{\rho\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}\cdot p^2}\pi[I_{n-1}(y) + I_{n+1}(y)] \;,$$

$$Q_4 = \frac{q_0 e^{-y}}{\rho\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}\cdot p^2}\,\pi\,[I_{n-1}(y) - I_{n+1}(y)],$$

p, n – параметры преобразования Лапласа и Фурье, E, ρ_0, ν – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки, h, R – толщина и радиус срединной поверхности оболочки, ρ, ξ – плотность и коэффициент бокового давления среды,

$$a = \frac{4\mu}{3\rho}t_*,\ b = \frac{\mu t_*}{\rho},\ \alpha = \frac{1+\frac{3k}{4\mu}}{t_*},\ \beta = \frac{1}{t_*},\ t_* = \frac{\vartheta}{\mu},\ y = \frac{Rp}{\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}},$$

K, μ – модули соответственно объемного сжатия и сдвига упругой среды, ϑ – коэффициент вязкости [3], $I_n(y)$ – модифицированная функция Бесселя I-го рода.

Решение уравнений (I) запишем в виде [5]

$$\varphi^{LC} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cdot K_n\left(y\cdot\frac{r}{R}\right),\quad \psi^{LS} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n\left(\frac{p}{\sqrt{b}\sqrt{p+\beta}}\cdot r\right),$$

где $K_n(y)$ – функция Макдональда индекса n.

Из совместного решения уравнений (2) – (5), пренебрегая малыми членами, находим w^{LC}, v^{LS}, A_n и B_n.

В частности, w^{LC} получаем в следующей форме:

$$w^{LC} = \frac{n\sqrt{b}\sqrt{p+\beta}\,\pi}{Rp^3\rho}\,q_0 e^{-y}\left\{\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}}[I_{n-1}(y) - I_{n+1}(y)] + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{pR}\left[1 + \frac{2\mu(t_* + p^{-1})}{h\rho_0\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}}\right][I_{n-1}(y) + I_{n+1}(y)]\right\}.$$

Обращение по углу θ выполняется с помощью разложения Якоби [6].

Тогда w^L получаем в виде

$$w^L = q_0\frac{\sqrt{b}\sqrt{p+\beta}}{p^3 R\rho}\,e^{-y(1-\cos\theta)}\left\{\frac{1 + \frac{2\mu(t_* + p^{-1})}{h\rho_0\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}}}{pR}[\cos\theta + \right.$$

$$\left. + y\cos 2\theta - y\sin^2\theta(1 + y\cos\theta)] + \frac{\cos\theta - y\sin^2\theta}{\sqrt{a}\sqrt{p+\alpha}}\right\}.$$

Для построения оригинала $w(t, \theta)$ надо обратить выражения вида

$$\frac{e^{-y(1-\cos\theta)}\sqrt{p+\beta}}{p^{m}(p+\alpha)^{j}}\,, \qquad (5')$$

где $m=1\div 5$, $j=\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}$.

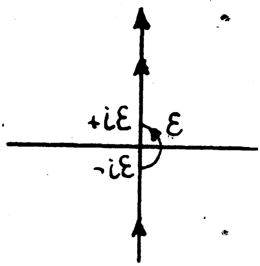

Рис. 2

Обращение этих выражений производится по формуле Меллина с интегрированием в комплексной плоскости переменного поля p по контуру (рис.2), идущему из бесконечности по отрицательной мнимой полуоси, огибающему справа по полуокружности бесконечно малого радиуса начало координат и вновь уходящему на бесконечность вдоль положительной мнимой полуоси. Особенности подынтегральных выражений $(5')$ в точках $p=0,-\alpha,-\beta$ располагаются левее контура интегрирования. Стремление радиуса полуокружности к нулю вызывает бесконечный рост вклада от интеграла по полуокружности из-за полюса подынтегральной функции $p=0$.

Однако посредством интегрирования по частям на вертикальных участках контура легко показать, что бесконечный рост интеграла по полуокружности компенсируется бесконечно большими вкладами интегралов по мнимой полуоси. В результате упомянутого выше предельного перехода для оригиналов получаются выражения, состоящие из суммы элементарного внеинтегрального выражения и несобственного интеграла, имеющего экспоненциальную сходимость на бесконечности, и, как легко видеть из структуры подынтегральной функции, не имеющего особенности в нуле.

Для выражения $e^{-y}\sqrt{p+\beta}\,p^{-4}$ получаем такой оригинал:

$$-\frac{3\sqrt{\beta}\,K}{16\alpha^{5/3}}+\frac{K\sqrt{\beta}}{4\alpha^{3/2}}\left(t-\frac{K}{\sqrt{\alpha}}\right)+\frac{\sqrt{\beta}}{12}\left(t-\frac{K}{\sqrt{\alpha}}\right)^{3}+\frac{K}{8\alpha^{3/2}\sqrt{\beta}}+\frac{\left(t-\frac{K}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2}}{8\sqrt{\beta}}-$$

$$-\frac{1}{16\beta^{3/2}}\left(t-\frac{K}{\sqrt{\alpha}}\right)+\frac{1}{32\beta^{5/2}}+\frac{1}{12\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{W(ix)-W(-ix)}{x}\,dx\,, \qquad (6)$$

где $K=\frac{R}{\sqrt{a}}(1-\cos\theta)$, $W(p)=\frac{d^{3}}{dp^{3}}\left(e^{pt}e^{-kp(p+\alpha)^{-0,5}}\sqrt{p+\beta}\right)$.

Несобственный интеграл в (6) вычисляется с помощью ЭВМ. Для начальных моментов времени особенно эффективен метод Симпсона.

Граничные условия трения выражают равенство радиальных ско - ростей частиц грунта и оболочки (4) и пропорциональность суммар - ного касательного напряжения в грунте разности тангенциальных скоростей частиц грунта и оболочки. Обращение изображений искомых функций выполнялось аналогично предыдущей задаче.

Числовые расчеты выполнялись с помощью ЭВМ для следующих ис- ходных данных:

оболочка $R = 5$ м; $h = 0{,}6$ м; $\nu = 0{,}17$; $\rho_0 = 2{,}7$ т/м^3;
$E = 3 \cdot 10^4$ МПа;

грунт $\rho = 2{,}4$ т/м^3; $\xi = 0{,}7$; $C_1 = 1500$ м/с; $C_2 = 600$ м/с;
$n_\beta = 10^5$ с$^{-1}$; $E_г = 1{,}08 \cdot 10^3$ МПа; $K_{тр} = 0{,}3$;

нагрузка $q_0 = 0{,}2$ МПа.

Результаты расчета прогиба w/h в лобовой точке $(\theta = 0^\circ)$ по- казаны на рис.3 пунктирной линией для условий жесткого контакта и сплошной линией для условий трения. На этом рисунке для тех же исходных данных штрих-пунктирной, двойной пунктирной и двойной штрих-пунктирной линиями показано изменение во времени прогиба w/h при набегании упругой волны, вычисленное по результатам работы [7] соответственно для условий трения полного проскальзы- вания и жесткого контакта.

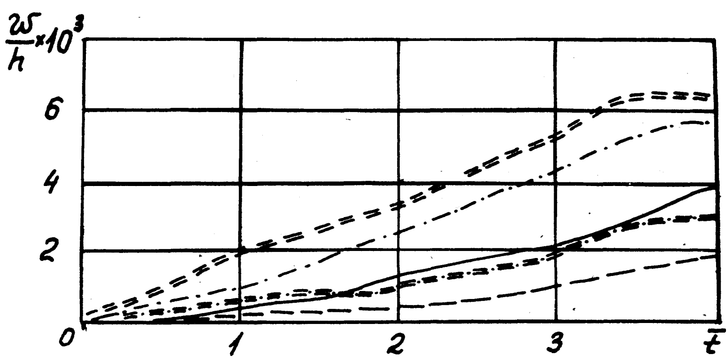

Рис. 3

Анализ полученных результатов показал следующее:

- Учет вязкости среды приводит к резкому уменьшению проги - бов; для условий трения на интервале $0 < \bar{t} < 1$ в 2,5 - 3 раза, на интервале $2 < \bar{t} < 4$ в 1,5 - 2 раза; при жестком контакте в 1,5 - 2 раза для $0 < \bar{t} < 2$ и на 30 - 40 % для $2 < \bar{t} < 4$.

– Уменьшение коэффициента вязкости среды на I порядок ведет к увеличению прогибов на 10 – 15 %, на 2 порядка – на 25 – 30 %.

– Учет вязкости среды приводит к уменьшению окружного усилия N, причем для условий жесткого контакта оно оказывается на 30 – 50 % меньше, чем при трении.

– При условии жесткого контакта прогибы оболочки в вязкоупругой среде снижаются в 2 – 3 раза по сравнению с упругой средой [7].

Полученное решение позволяет оценить влияние вязкости грунта и вида граничных условий на параметры взаимодействия оболочки с набегающей волной.

Л и т е р а т у р а

I. B a r o n M.L., P a r n e s R. Diffraction of a pressure wave by a cylindrical shell in an elastic medium. Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., I. (63 – 75), 1962.

2. М и х а й л о в А.А., М и л я е в А. С., Т а з и х и н а Е.Н. Нестационарное взаимодействие плоской продольной волны с упругой цилиндрической оболочкой в грунте // Строит. механика и расчет сооружений. – 1988. – № I. – С.40 – 44.

3. Н о в а ц к и й В.К. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.

4. В л а с о в В.З. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – Т.I. – 528 с.

5. А р с е н и н В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.

6. К о р е н е в В.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

7. М и х а й л о в А.А., М и л я е в А.С., Т а р а с о в В.Н. Анализ влияния граничных условий на напряженно-деформированное состояние подземных трубопроводов при набегании волновых нагрузок // Строительная механика сооружений. Л.,1989.– С.43 – 47.