Л. Б. Смолякова, О представлениях голономии многообразий моделируемых модулями над алгеброй Вейля, *Тр. геом. сем.*, 2003, том 24, 129–138

Л.Б. Смолякова

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГОЛОНОМИИ МНОГООБРАЗИЙ МОДЕЛИРУЕМЫХ МОДУЛЯМИ НАД АЛГЕБРОЙ ВЕЙЛЯ

Аннотация

В работах [5], [6] В.В.Шурыгиным были введены и исследованы представления голономии слоев канонических слоений, определяемых идеалами на гладком многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$ над локальной алгеброй $\mathbf{A}$, моделируемом n-мерным $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$. В настоящей работе аналогичные представления определяются для слоев канонических слоений на слоеном $\mathbf{A}$-гладком многообразии $M^{\mathbf{L}}$, моделируемом $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, где $\mathbf{B}$ — некоторая факторалгебра алгебры $\mathbf{A}$. Установлены соотношения между введенными представлениями голономии и представлениями голономии в смысле теории слоений [3], [4] и в смысле теории (X, G)-многообразий [1].

Abstract

L.B. Smolyakova **On holonomy representations of manifolds modelled on modules over Weil algebra**

In [5], [6], for the canonical foliations of manifolds over local algebra $\mathbf{A}$ determined by ideals of $\mathbf{A}$, V.V. Shurygin defined and studied holonomy leaf representations. In the present paper we define holonomy representations for manifolds modelled on an $\mathbf{A}$-module $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, where $\mathbf{B}$ is a quotient algebra of $\mathbf{A}$, and find interrelation of these representations with the holonomy representations defined in the foliation theory [3], [4] and in the theory of (X, G)-manifolds [1].

Введение

Пусть $\mathbf{R}(N,q)$ — алгебра срезанных многочленов степени $\leq q$ от N переменных и $\mathbf{A} = \mathbf{R}(N,q)/\mathbf{I}_{\mathbf{A}}$ — локальная алгебра Вейля высоты q и ширины N [2], [6]. Алгебру $\mathbf{A}$ можно представить в виде полупрямой суммы $\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \overset{\circ}{\mathbf{A}}$, где $\overset{\circ}{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$ — максимальный идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов алгебры $\mathbf{A}$. Символом $\mathbf{A}^n$ будем обозначать модуль строк длины n над $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$ — некоторый идеал, $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — факторалгебра и $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — канонический эпиморфизм. $\mathbf{B}$-модуль $\mathbf{B}^m$ может рассматриваться и как $\mathbf{A}$-модуль, где $\alpha X = 0$ для любых $\alpha \in \mathbf{I}$ и $X \in \mathbf{B}^m$, поэтому естественная структура $\mathbf{A}$-модуля имеется и на векторном пространстве $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$. Символом $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$ будем обозначать подмодуль $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \oplus \overset{\circ}{\mathbf{B}}{}^m \subset \mathbf{L}$. Элемент $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L}$ определяется координатами $X^i = x^i + \overset{\circ}{X}{}^i \in \mathbf{A}$, $Y^\alpha = y^\alpha + \overset{\circ}{Y}{}^\alpha \in \mathbf{B}$, где $x^i, y^\alpha \in \mathbf{R}$, $\overset{\circ}{X}{}^i \in \overset{\circ}{\mathbf{A}}$, $\overset{\circ}{Y}{}^\alpha \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}$, $i = 1,\ldots,n$, $\alpha = 1,\ldots,m$. Будем предполагать, что в алгебре $\mathbf{A}$ выбран некоторый базис

$$\{e_a\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}, e_{\check{a}}\} \tag{1}$$

такой, что $\{e_{a^*}, e_{\check{a}}\}$ — базис максимального идеала $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$, а $\{e_{\check{a}}\}$ — базис идеала $\mathbf{I}$. При таком выборе базиса в $\mathbf{A}$ набор классов вычетов элементов $\{e_{\bar{a}}\} = \{e_0 = 1, e_{a^*}\}$ является базисом в факторалгебре $\mathbf{B}$.

$\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \subset \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m \to \mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$ будем называть слоеным [7], если оно расслоено по отношению к слоению на $\mathbf{L}$, определяемому канонической проекцией $\mathbf{L} \to \mathbf{A}^n$. $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M^{\mathbf{L}}$, моделируемое модулем $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}$-многообразие), называется слоеным [7], если оно снабжено максимальным атласом $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M^{\mathbf{L}} \to U'_\alpha \subset \mathbf{L}\}_{\alpha \in A}$, карты которого принимают значения в $\mathbf{L}$, а преобразования координат $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\mathbf{L})$ локальных слоеных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов модуля $\mathbf{L}$. В дальнейшем карты на многообразиях со значениями в $\mathbf{L}$ будем называть $\mathbf{L}$-картами, а $\Gamma(\mathbf{L})$-атлас будем называть просто $\mathbf{L}$-атласом.

Пусть $U = U_1 \oplus U_2 \subset \mathbf{L}$ и $V = V_1 \oplus V_2 \subset \mathbf{L}$ — открытые координатные параллелепипеды по отношению к вещественным координатам в $\mathbf{A}^n \oplus \mathbf{B}^m$, определяемым вышеуказанным базисом $\{e_a\}$. Всякий слоеный $\mathbf{A}$-диффеоморфизм $(\Phi : U \to V) \in \Gamma(\mathbf{L})$ задается уравнениями:

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \overset{\circ}{X}{}^p, \tag{2}$$

$$Y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha) + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v}\varphi^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{X}{}^u \overset{\circ}{Y}{}^v, \tag{3}$$

где u, v и p — мультииндексы, q — высота алгебры $\mathbf{A}$, а функции $\varphi^{i'}(x^i)$ и $\varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$ принимают значения, соответственно, в $\mathbf{A}$ и в $\mathbf{B}$ (см. [7]).

1. Канонические соприкасающиеся расслоения и гомотопические группоиды многообразия $M^{\mathbf{L}}$.

Множество касательных отображений к росткам $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов $(\mathbf{L}, 0) \to (\mathbf{L}, 0)$ вида (2), (3) есть группа Ли $GL'_{\mathbf{A}}(\mathbf{L})$ расслоенных автоморфизмов модуля $\mathbf{L}$ [7], то есть автоморфизмов, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $X, X' \in \mathbf{A}^n$, $Y, Y' \in \mathbf{B}^m$, ξ_1 — матрица с элементами из $\mathbf{A}$, а ξ_3 и ξ_4 — матрицы с элементами из $\mathbf{B}$.

Из (4), (2) и (3) следует, что всякому подмодулю $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, инвариантному относительно действия группы $GL'_{\mathbf{A}}(\mathbf{L})$, соответствует каноническое слоение $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ (будем называть его $\mathbf{K}$-слоением) на многообразии $M^{\mathbf{L}}$, определяемое гладким вполне интегрируемым распределением подмодулей касательных $\mathbf{A}$-модулей к $M^{\mathbf{L}}$, которые отображаются всякой $\mathbf{L}$-картой на $M^{\mathbf{L}}$ изоморфно на подмодуль $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$ (касательное пространство $T_X\mathbf{L}$ к модулю $\mathbf{L}$ при каждом $X \in \mathbf{L}$ отождествляется с самим модулем $\mathbf{L}$). Примерами таких инвариантных подмодулей в $\mathbf{L}$ могут служить подмодули $\mathbf{B}^m = 0 \oplus \mathbf{B}^m$ и $\overset{\circ}{\mathbf{L}} = \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \oplus \overset{\circ}{\mathbf{B}}{}^m$.

В дальнейшем нас будут интересовать в основном инвариантные подмодули, являющиеся подмодулями в $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$. Пусть $\mathbf{K} \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ — один из таких подмодулей. Построим $\mathbf{A}$-модуль $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$, получающийся из $\mathbf{L}$ с помощью процедуры удвоения подмодуля $\mathbf{K}$ аналогичной процедуре удвоения идеала $\mathbf{I}$ в локальной алгебре $\mathbf{A}$ из [6]. Пусть $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L}/\mathbf{K}$ — фактормодуль. Обозначим через $p : \mathbf{L} \to \overline{\mathbf{L}}$ — канонический эпиморфизм, пусть $p \oplus p$ — прямая сумма двух копий эпиморфизма p и $\Delta : \overline{\mathbf{L}} \ni \overline{Z} \mapsto (\overline{Z}, \overline{Z}) \in \overline{\mathbf{L}} \oplus \overline{\mathbf{L}}$ — диагональное вложение. Определим $\mathbf{A}$-модуль $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$ как полный прообраз диагонали $\Delta(\overline{\mathbf{L}}) \subset \overline{\mathbf{L}} \oplus \overline{\mathbf{L}}$ относительно эпиморфизма $p \oplus p$. При этом образ $\Delta(\mathbf{L})$ при диагональном вложении $\Delta : \mathbf{L} \to \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}$ содержится в $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$. Соответствующее вложение $\mathbf{L}$ в $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$ обозначим символом $\widehat{\Delta} : \mathbf{L} \to \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$. Имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{K} \oplus \mathbf{K} & \xrightarrow{i} & \mathbf{L} \oplus \mathbf{L} & \xrightarrow{p \oplus p} & \overline{\mathbf{L}} \oplus \overline{\mathbf{L}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \mathrm{id} & & \uparrow i & & \uparrow \Delta & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{K} \oplus \mathbf{K} & \xrightarrow{i} & \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} & \xrightarrow{p} & \overline{\mathbf{L}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \Delta & & \uparrow \widehat{\Delta} & & \uparrow \mathrm{id} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{K} & \xrightarrow{i} & \mathbf{L} & \xrightarrow{p} & \overline{\mathbf{L}} & \longrightarrow & 0,
\end{array} \qquad (5)$$

где знаки i означают включения, а p — проекции.

Пусть p_k $(k = 1, 2)$ — проекция модуля $\mathbf{L} \oplus \mathbf{L}$ на k-тое прямое слагаемое, а i_k — вложение $\mathbf{K}$ в $\mathbf{K} \oplus \mathbf{K}$ как k-того прямого слагаемого. Для простоты композицию $p_k \circ i : \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{L}$ отображения p_k и вложения i из среднего столбца диаграммы (5) будем обозначать тем же символом p_k. Аналогичным образом, композицию $i \circ i_k : \mathbf{K} \to \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$, где i — вложение из средней строки диаграммы (5), будем обозначать символом i_k. Пусть $\overline{k} = 1$, если $k = 2$ и $\overline{k} = 2$, если $k = 1$. Имеют место точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbf{K} \xrightarrow{i_k} \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \xrightarrow{p_{\overline{k}}} \mathbf{L} \longrightarrow 0 .$$

Произвольное слоеное $\mathbf{A}$-гладкое отображение $F : U \subset \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ имеет уравнения вида (2), (3). Вложение $\widehat{\Delta} : \mathbf{L} \to \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$ позволяет рассматривать модуль $\mathbf{L}$ как подмодуль в $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$. В этом случае $\mathbf{A}$-гладкое отображение F может быть однозначно продолжено до слоеного $\mathbf{A}$-гладкого отображения $\widehat{F} : p_1^{-1}(U) \subset \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}} \to \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$ такого, что $\widehat{F} \circ \widehat{\Delta}|U = F$. Это отображение $\widehat{F}$ задается формулами

$$X^{i'} = \widehat{\varphi}^{i'} + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \widehat{\varphi}^{i'}}{Dx^p} \overset{\circ}{\widehat{X}}{}^p ,$$

$$Y^{\alpha'} = \widehat{\varphi}^{\alpha'} + \sum_{|u|+|v|=1}^{q} \frac{1}{u!v!} \frac{D^{u+v}\widehat{\varphi}^{\alpha'}}{Dx^u Dy^v} \overset{\circ}{\widehat{X}}{}^u \overset{\circ}{\widehat{Y}}{}^v,$$

где $\widehat{\varphi}^{i'} = \widehat{\Delta} \circ \varphi^{i'} \circ \mathrm{pr}_1 \circ p_1 : p_1^{-1}(U) \to \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$, $\widehat{\varphi}^{\alpha'} = \widehat{\Delta} \circ \varphi^{\alpha'} \circ p_1 : p_1^{-1}(U) \to \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$, $\{\overset{\circ}{\widehat{X}}{}^p\} \in p_1^{-1}(U \cap \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n)$, $\{\overset{\circ}{\widehat{Y}}{}^v\} \in p_1^{-1}(U \cap \overset{\circ}{\mathbf{B}}{}^m)$. Через pr_1 здесь обозначена каноническая проекция $\mathrm{pr}_1 : \mathbf{L} \to \mathbf{A}^n$.

В сложных выражениях продолжение $\widehat{F}$ функции F будем обозначать также следующим образом: $F\widehat{\ }$.

Пусть теперь $M^{\mathbf{L}}$ — слоеное $\mathbf{L}$-многообразие и $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M^{\mathbf{L}} \to U'_\alpha \subset \mathbf{L}\}_{\alpha \in A}$ — $\mathbf{L}$-атлас на $M^{\mathbf{L}}$. Координатные преобразования $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ имеют вид (2),(3). С каноническим $\mathbf{K}$-слоением на $M^{\mathbf{L}}$ ассоциируется локально тривиальное расслоение $\pi_{\mathbf{K}} : O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \to M^{\mathbf{L}}$ со стандартным слоем $\mathbf{K}$, определяемое атласом

$$\{H_\alpha : \pi_{\mathbf{K}}^{-1}(U_\alpha) \to U'_\alpha \times \mathbf{K}\}_{\alpha \in A} \tag{6}$$

с функциями перехода $H_\alpha \circ H_\beta^{-1} = (h_\alpha \circ h_\beta^{-1})\widehat{\ }$. По построению расслоение $\pi_{\mathbf{K}} : O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \to M^{\mathbf{L}}$ является расслоением со структурной группой Ли $D(\mathbf{K})$, действие которой на стандартном слое $\mathbf{K}$ задается ограничением на этот слой $\mathbf{A}$-гладких диффеоморфизмов вида (2), (3). В случае $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{L} = \mathbf{A}^n$ и подмодуля $\mathbf{K} = \mathbf{I}^n$ получается группа Ли $D_n(\mathbf{I})$ (см. [6]). Непосредственно из определения атласа (6) следует, что многообразие $O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ несет на себе структуру $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого модулем $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$. Расслоение $\pi_{\mathbf{K}} : O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \to M^{\mathbf{L}}$ будем называть *каноническим соприкасающимся* $\mathbf{K}$*-расслоением* многообразия $M^{\mathbf{L}}$. Каноническое соприкасающееся $\overset{\circ}{\mathbf{L}}$-расслоение многообразия $M^{\mathbf{L}}$ будем обозначать следующим образом $\pi : O^V(M^{\mathbf{L}}) \to M^{\mathbf{L}}$.

Отметим, что по определению группы $D(\mathbf{K})$ каждый слой канонического $\mathbf{K}$-слоения на $M^{\mathbf{L}}$ несет на себе структуру (X, G)-многообразия в смысле У.Терстона [1] для $X = \mathbf{K}$, $G = D(\mathbf{K})$.

Относя точке $Z \in M^{\mathbf{L}}$ с координатами $\{X^i, Y^\alpha\}$ в некоторой $\mathbf{L}$-карте (U, h) точку $\widehat{Z} \in O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ с координатами $\{\widehat{X}^i = \widehat{\Delta}(X^i), \widehat{Y}^\alpha = \widehat{\Delta}(Y^\alpha)\}$ в соответствующей $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$-карте $(\pi_{\mathbf{K}}^{-1}(U), H)$ атласа (6), получим корректно определенное сечение $\sigma : M^{\mathbf{L}} \to O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$. Сечение σ будем называть *каноническим сечением расслоения* $O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$.

Фундаментальный группоид $\Pi(W)$ топологического пространства W определяется как множество гомотопических классов путей в W с фиксированными концами. Имеются естественные проекции $\pi_0 : \Pi(W) \to W$ и $\pi_1 : \Pi(W) \to W$, относящие классу $[\gamma]$ пути $\gamma : [0,1] \to W$ соответственно его начало $\gamma(0)$ и конец $\gamma(1)$. Гомотопический группоид $\Pi(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$ на гладком многообразии W определяется как фундаментальный группоид W, рассматриваемого как топологическое пространство со слоевой топологией (то есть, $\Pi(\mathcal{F})$ является множеством гомотопических классов слоевых путей) [4]. Гомотопический группоид $\Pi(\mathcal{F})$ снабжается фактортопологией, определяемой топологиями на $[0,1]$ и W и компактно-открытой топологией на пространстве путей в W. На $\Pi(\mathcal{F})$ индуцируется также структура гладкого многообразия. Для обозначения гомотопического группоида канонического $\mathbf{K}$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ на многообразии $M^{\mathbf{L}}$ будем использовать обозначение $\Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$.

Предложение 1. *Гомотопический группоид $\Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ канонического $\mathbf{K}$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ на $M^{\mathbf{L}}$ несет на себе структуру $\mathbf{A}$-гладкого $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$-многообразия.*

Доказательство. Рассмотрим слой $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$, проходящий через точку $Z_0 \in M^{\mathbf{L}}$, $\mathbf{L}$-карту $(U, h : U \to U' \subset \mathbf{L})$ на $M^{\mathbf{L}}$ такую, что $U \ni Z_0$, а U' — открытый координатный параллелепипед в $\mathbf{L}$ (и, следовательно, простое открытое множество для канонических слоений на $\mathbf{L}$), и непрерывный путь $\gamma : [0,1] \to C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$, соединяющий Z_0 с $Z_1 \in C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$. Пусть $(\pi^{-1}_{\mathbf{K}}(U), H)$ — $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$-карта, индуцированная картой (U,h) на расслоении $O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$, и $H_{Z_0} = \mathrm{pr}_2 \circ H | \pi^{-1}_{\mathbf{K}}(Z_0) : \pi^{-1}_{\mathbf{K}}(Z_0) \to \mathbf{K}$, где pr_2 — проекция $U' \times \mathbf{K}$ на $\mathbf{K}$. Карта (U,h) индуцирует также $(\mathbf{K}, D(\mathbf{K}))$-карту $(U \cap C^{\mathbf{K}}_{Z_0}, h^{\mathbf{K}}_{Z_0})$ на слое $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$, являющемся $(\mathbf{K}, D(\mathbf{K}))$-многообразием [1]. Поскольку преобразования координат на слое $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ являются полиномиальными, отображение $h^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ может быть распространено вдоль пути γ (см., например, [1]). Отнесем классу $[\gamma] \in \Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ точку $D_{\mathbf{K}}([\gamma]) = H^{-1}_{Z_0}(h^{\mathbf{K}}_{Z_0}(Z_1)) \in O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$. Тем самым определится отображение

$$D_{\mathbf{K}} : \Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \to O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}). \tag{7}$$

Отображение $D_{\mathbf{K}}$ является локальным гомеоморфизмом, что позволяет ввести на $\Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ структуру $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$, относительно которой отображение $D_{\mathbf{K}}$ является локальным $\mathbf{A}$-диффеоморфизмом. □

Обозначим символом $\widetilde{C}^{\mathbf{K}}_{Z_0} = \pi_0^{-1}(Z_0) \subset \Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ множество классов слоевых путей на многообразии $M^{\mathbf{L}}$ с началом в точке Z_0. $\widetilde{C}^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ является универсальным накрывающим пространством слоя $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$, а отображение $H \circ D_{\mathbf{K}}$, ограниченное на $\widetilde{C}^{\mathbf{K}}_{Z_0}$, совпадает с развертывающим отображением $\mathbf{K}$-многообразия $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$, поэтому будем называть отображение $D_{\mathbf{K}}$ *развертывающим отображением для канонического* $\mathbf{K}$*-слоения* $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ *на* $M^{\mathbf{L}}$. Отображение $D = D_{\overset{\circ}{\mathbf{L}}}$ будем называть *развертывающим отображением многообразия* $M^{\mathbf{L}}$.

2. Представления голономии многообразия $M^{\mathbf{L}}$

Пусть, как и прежде, $\mathbf{K} \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ — подмодуль, инвариантный относительно действия группы Ли $GL'_{\mathbf{A}}(\mathbf{L})$. Рассмотрим слой $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ канонического $\mathbf{K}$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ на $M^{\mathbf{L}}$, проходящий через точку Z_0, и $\mathbf{L}$-карту $(U, h : U \to U' \subset \mathbf{L})$ такую, что $U \ni Z_0$, а $U' = U'_1 \oplus U'_2$ — открытый координатный параллелепипед в $\mathbf{L}$ по отношению к вещественным координатам, определяемым базисом (1). Пусть $\gamma : [0,1] \to C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ — путь, соединяющий Z_0 с $Z_1 \in C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$. Отображение h может быть распространено вдоль пути γ следующим образом. Возьмем набор $\{(U_k, h_k : U_k \to U'_k)\}$, $k = 1, \ldots, s$, $\mathbf{L}$-карт на $M^{\mathbf{L}}$, удовлетворяющих условиям: U'_k — открытый координатный параллелепипед в $\mathbf{L}$, $(U_1, h_1) = (U, h)$ и имеется разбиение $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ интервала $[0,1]$ такое, что $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_{k+1}$. Слоеное $\mathbf{A}$-гладкое преобразование $\Phi_k = h_k \circ h_{k+1}^{-1}$, ограниченное на некоторую простую окрестность V_k точки $\gamma(t_k)$, может быть продолжено до слоеного $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\widetilde{\Phi}_k$, определенного на области $p_0^{-1}(p_0(V_k))$, где $p_0 : \mathbf{L} \to \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$ — канонический эпиморфизм. Поэтому на некоторой области вида $p_0^{-1}(V)$, где $V \subset \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$ — открытая окрестность точки $p_0(h_1(Z_1)) \in \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m$, можно взять композицию $\Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_{s-1}$. Тогда на некоторой окрестности W точки Z_1 определена $\mathbf{L}$-карта $(W, h(\gamma))$, где $h(\gamma) = \Phi_1 \circ \ldots \circ \Phi_{s-1} \circ h_s$. Эту $\mathbf{L}$-карту будем называть *продолжением* $\mathbf{L}$*-карты* (U, h) *вдоль пути* γ. Росток этой карты в точке Z_1 зависит только от гомотопического класса пути γ в слое $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$.

С каждым слоем C_X слоения $\mathcal{F}$ на многообразии W ассоциируется представление голономии — гомоморфизм из фундаментальной группы $\Pi_1(L)$ слоя C_X в группу ростков диффеоморфизмов локальной трансверсали [3], определяемый скольжением локальной трансверсали вдоль слоевых путей. В частности, представление такого вида ассоциируется с каждым слоем $C_Z^{\mathbf{K}}$ всякого канонического $\mathbf{K}$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ на $M^{\mathbf{L}}$, порожденного подмодулем $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, инвариантным относительно действия группы $GL'_{\mathbf{A}}(\mathbf{L})$. Слой $C_Z^{\mathbf{K}}$ канонического $\mathbf{K}$-слоения на многообразии $M^{\mathbf{L}}$, определенного инвариантным подмодулем $\mathbf{K} \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}$, является $(\mathbf{K}, D(\mathbf{K}))$-многообразием и поэтому с $C_Z^{\mathbf{K}}$ в этом случае ассоциируется представление голономии в смысле теории (X, G)-многообразий [1]. В настоящем параграфе мы построим представление голономии слоя канонического $\mathbf{K}$-слоения на $M^{\mathbf{L}}$, соответствующего инвариантному подмодулю $\mathbf{K} \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}$, которые порождается $\mathbf{A}$-гладкой структурой многообразия $M^{\mathbf{L}}$ и определяет оба вышеуказанных представления.

Итак, пусть $\mathbf{K} \subset \overset{\circ}{\mathbf{L}}$ подмодуль, инвариантный относительно действия $GL'_{\mathbf{A}}(\mathbf{L})$ на $\mathbf{L}$, и $C_{Z_0}^{\mathbf{K}}$ — слой канонического $\mathbf{K}$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ на $M^{\mathbf{L}}$, проходящий через $Z_0 \in M^{\mathbf{L}}$. Рассмотрим $\mathbf{L}$-карту $(U, h : U \to U' \subset \mathbf{L})$ на $M^{\mathbf{L}}$ такую, что $U \ni Z_0$, U' — открытый координатный параллелепипед в $\mathbf{L}$, содержащий 0, и $h(Z_0) = 0$. Пусть $\gamma : [0,1] \to C_{Z_0}^{\mathbf{K}}$ — замкнутый путь, лежащий в слое $C_{Z_0}^{\mathbf{K}}$ и проходящий через точку Z_0. Отображение h может быть распространено вдоль пути γ, в результате чего возникает $\mathbf{L}$-карта (W, h_γ), где $W \ni Z_0$. Обозначим символом $\alpha_{Z_0}^{\mathbf{K}}(\gamma) = \alpha_{Z_0 h}^{\mathbf{K}}(\gamma)$ росток композиции $h_\gamma \circ h^{-1}$ в $0 \in \mathbf{L}$. Этот росток определен вдоль всего подмодуля $\overset{\circ}{\mathbf{L}} \subset \mathbf{L}$ и зависит только от гомотопического класса пути γ. Пусть теперь γ_1 и γ_2 — два пути в слое $C_{Z_0}^{\mathbf{K}}$, начинающиеся и заканчивающиеся в точке Z_0, а $\gamma_3 = \gamma_2 * \gamma_1$, тогда $\alpha_{Z_0}^{\mathbf{K}}(\gamma_3) = \alpha_{Z_0}^{\mathbf{K}}(\gamma_2) \circ \alpha_{Z_0}^{\mathbf{K}}(\gamma_1)$. В результате получаем гомоморфизм

$$\alpha_{Z_0}^{\mathbf{K}} : \Pi_1(C_{Z_0}^{\mathbf{K}}, Z_0) \ni [\gamma] \mapsto \alpha_{Z_0}^{\mathbf{K}}(\gamma) \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K}), \tag{8}$$

где символом $\mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K})$ обозначена группа ростков слоеных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов вида $p^{-1}(V) \subset \mathbf{L} \to p^{-1}(V') \subset \mathbf{L}$, $p : \mathbf{L} \to \overline{\mathbf{L}}$, V и V' — окрестности нуля в $\overline{\mathbf{L}}$, то есть слоеных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов, переводящих в себя подмодуль $\mathbf{K}$.

Гомоморфизм $\alpha^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ будем называть *представлением* $\mathbf{K}$*-голономии многообразия* $M^{\mathbf{L}}$ *в* Z_0, а его образ $\alpha^{\mathbf{K}}_{Z_0}(\Pi_1(C^{\mathbf{K}}_{Z_0}, Z_0)) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K})$ — *группой* $\mathbf{K}$*-голономии многообразия* $M^{\mathbf{L}}$ *в* Z_0. Группа голономии определяется с точностью до замены на сопряженную подгруппу в группе $\mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K})$ относительно некоторого внутреннего автоморфизма (соответствующего замене начальной $\mathbf{L}$-карты (U, h) на $M^{\mathbf{L}}$).

Гомоморфизм $\overset{\circ}{\alpha}_{Z_0} = \alpha^{\overset{\circ}{\mathbf{L}}}_{Z_0}$ будем называть *представлением голономии многообразия* $M^{\mathbf{L}}$ *в* Z_0.

Из уравнений (2),(3) слоеного $\mathbf{A}$-гладкого отображения следует, что росток $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\Phi \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K})$ порождает росток $\overline{\Phi} \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{L}}, 0)$, получающийся факторизацией φ^i и φ^α в соответствующих уравнениях по подмодулю $\mathbf{K}$. Рассмотрим гомоморфизм

$$p^{\mathbf{K}} : \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K}) \to \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{L}}, 0),$$

относящий ростку Φ росток $\overline{\Phi}$, и гомоморфизм

$$r^{\mathbf{K}} : \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K}) \to D(\mathbf{K}),$$

относящий ростку Φ его ограничение $\Phi|\mathbf{K}$. Сравнивая определение $\mathbf{K}$-голономии многообразия $M^{\mathbf{L}}$ соответственно с определениями голономии (X, G)-многообразия [1] и голономии слоения [3], [4], приходим к следующему предложению.

Предложение 2. 1) *Композиция* $\alpha^{\mathbf{K}}_{1Z_0} = r^{\mathbf{K}} \circ \alpha^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ *задает представление голономии слоя* $C^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ *как* $(\mathbf{K}, D(\mathbf{K}))$*-многообразия.*

2) *Композиция* $\alpha^{\mathbf{K}}_{\mathrm{tr}\,Z_0} = p^{\mathbf{K}} \circ \alpha^{\mathbf{K}}_{Z_0}$ *задает представление голономии слоения* $\mathcal{F}^{\mathbf{K}}$ *в точке* Z_0.

Определение. *Группоидом* $\mathbf{K}$*-голономии многообразия* $M^{\mathbf{L}}$ *называется факторпространство* $\Gamma_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ *гомотопического группоида* $\Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ *по следующему отношению эквивалентности:* $[\gamma_1] \sim [\gamma_2]$, *если* $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ *и* $\alpha^{\mathbf{K}}_{\gamma(0)}(\gamma_2^{-1} * \gamma_1) = \mathrm{id} \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{L}, \mathbf{K})$ *или, другими словами, совпадают ростки продолжений* $h(\gamma_1)$ *и* $h(\gamma_2)$ $\mathbf{L}$*-карты* (U, h), $U \ni \gamma_1(0)$, *в точке* $\gamma_1(1)$.

Естественная проекция $p_{\mathbf{K}} : \Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \to \Gamma_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ является локальным гомеоморфизмом и развертывающее отображение (7) определяет отображение $\widehat{D}_{\mathbf{K}} : \Gamma_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \to O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ такое, что имеет место коммутативная диаграмма локальных гомеоморфизмов

$$\begin{tikzcd} \Pi_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \arrow[rr, "p_{\mathbf{K}}"] \arrow[dr, "D_{\mathbf{K}}"'] & & \Gamma_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) \arrow[dl, "\widehat{D}_{\mathbf{K}}"] \\ & O^V_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}}) & \end{tikzcd} \tag{9}$$

Отображения диаграммы (9) являются локальными $\mathbf{A}$-диффеоморфизмами. Отсюда вытекает следующее

Предложение 3. *Группоид* $\mathbf{K}$*-голономии* $\Gamma_{\mathbf{K}}(M^{\mathbf{L}})$ *несет на себе структуру* $\mathbf{A}$*-гладкого* $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{K}}$*-многообразия.*

Литература

[1] Апанасов Б.Н. *Геометрия дискретных групп и многообразий.* М., Наука, 1991, 432 с.

[2] Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ), т. 12. М., 1981, с. 61–95.

[3] Molino P. *Riemannian foliations.* Birkhäuser, 1988, 339 pp.

[4] Reinhart B.L. *Differential Geometry of Foliations.* Springer, 1983.

[5] Shurygin V.V. *Smooth connections and horizontal distributions on manifolds over local algebras.* Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Applications. Aug. 28 – Sept. 1, 1995. Brno. Czech Republic., Brno, 1996, 309-319.

[6] Shurygin V.V., *The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras.* Lobachevskii J. of Math., vol. 5, 1999, 29–55.

[7] Shurygin V.V. and Smolyakova L.B., *An analog of the Vaisman-Molino cohomology for manifolds modelled on some types of modules over Weil algebras and its application.* Lobachevskii J. of Math., vol. 9, 2001, pp. 55–75.

Адрес: *Казанский государственный университет, каф. геометрии, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Mathematical Department, Chair of Geometry, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*

E-mail: *Larisa.Smolyakova@ksu.ru*