Ф. Ф. Султанбеков, Заряды и автоморфизмы одного класса конечных логик множеств, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 57–68

3. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во КГУ. – 1980. – 232 с.

4. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М. : Наука, 1980. – 414 с.

5. Раджабов Б. Х., Салаев В. В. О полной непрерывности одного сингулярного оператора // ДАН Тадж. ССР. – 1973. – Т.16. – № 12.

6. Габдулхаев Б. Г. Об одном прямом методе решения интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1965.– № 3.– С.51 – 60.

7. Габдулхаев Б. Г. К численному решению полных сингулярных интегральных уравнений // Краевые задачи и их приложения / Чуваш. ун-т. – Чебоксары, 1988. – С.139 – 146.

Ф.Ф.Султанбеков

ЗАРЯДЫ И АВТОМОРФИЗМЫ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ЛОГИК МНОЖЕСТВ

Пусть k, m – натуральные числа, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_{km}\}$– конечное множество. Через $X(km, k)$ обозначается логика множеств (σ-класс) на X, состоящая из всех подмножеств X, число элементов которых кратно k. В работе [1] показано, что любая мера на логике $X(km,k)$ имеет единственное продолжение до заряда на алгебре всех подмножеств X. Доказательство этого опирается на интересную комбинаторную лемму, утверждающую, что в качестве образующих логики $X(km, k)$ можно выбрать $km-1$ некоторых k-элементных подмножеств X.

В настоящей работе мы приводим новое прямое доказательство упомянутого выше результата. Затем описываются крайние точки пространства состояний логики $X(km, k)$ и автоморфизмы этой логики. Более подробно с тематикой σ-классов и мер на них можно познакомиться в работах [2], [3].

§ I. Заряды на логиках множеств

Зарядом на логике $X(km,k)$ называется ортоаддитивная функция $\nu : X(km,k) \to \mathbb{R}$. Например, если $f: X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, то отображение $\nu_f(A) \equiv \sum_{x \in A} f(x)$, $A \in X(km,k)$ является зарядом на $X(km,k)$. Такие заряды будем называть регулярными.

Т е о р е м а I. Пусть $m \geq 3$. Тогда для любого заряда ν на логике $X(km,k)$ существует единственная функция f такая, что $\nu = \nu_f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим регулярность любого заряда на логике $X(3k,k)$. Пусть ν – произвольный заряд на $X(3k,k)$ и $\nu(X)=w$. Введем регулярный заряд ν_h по функции $h(x)=\frac{w}{3k}\,(x \in X)$. Тогда $\nu_0 \equiv \nu - \nu_h$ – заряд на логике $X(3k,k)$ такой, что $\nu_0(X)=0$. Покажем, что ν_0 – регулярный заряд.

Пусть $x \in X$ и A – атом $X(3k,k)$, не содержащий x. Обозначим $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, $A_i = A \setminus \{a_i\}$ и рассмотрим функцию

$$p(x,A)=\sum_{i=1}^{k} \nu_0(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\,\nu_0(A).$$

Установим, что функция $p(x,A)$ на самом деле не зависит от A.

Случай I. A и B – непересекающиеся атомы, не содержащие x. Обозначим $B \equiv \{b_1,b_2,\dots,b_k\}$, $B_i \equiv B \setminus \{b_i\}$, $C \equiv \{x,c_2,c_3,\dots,c_k\}$. Тогда $X = A \cup B \cup C$. Надо установить равенство $p(x,A)=p(x,B)$, которое равносильно такому равенству:

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_0(A_i \cup \{x\}) + (k-1)\,\nu_0(B) = \sum_{i=1}^{k} \nu_0(B_i \cup \{x\}) + (k-1)\,\nu_0(A). \tag{I}$$

Шаг I. Имеем $\nu_0(A_1 \cup \{x\}) + \nu_0(B) = -\nu_0(\{a_1,c_2,\dots,c_k\}) \equiv -\nu_0(a_1c_2\dots c_k)$ (в дальнейшем мы будем использовать подобную сокращенную запись), $\nu_0(B_1 \cup \{x\}) + \nu_0(A) = -\nu_0(b_1c_2c_3\dots c_k)$. Значит, (I) равносильно

$$\nu_0(b_1c_2\dots c_k) + \sum_{i=2}^{k} \nu_0(A_i \cup \{x\}) + (k-2)\,\nu_0(B) = \nu_0(a_1c_2\dots c_k) + \sum_{i=2}^{k} \nu_0(B_i \cup \{x\}) + (k-2)\,\nu_0(A). \tag{2}$$

Шаг 2. Имеем $\nu_0(b_1c_2\dots c_k) + \nu_0(A_2 \cup \{x\}) = -\nu_0(a_2b_2b_3\dots b_k)$, $\nu_0(a_1c_2\dots c_k)+$

$+\nu_0(B_2 U\{x\}) = -\nu_0(b_2 a_2 a_3 \ldots a_k)$. Значит, (2) равносильно

$$\nu_0(b_2 a_2 \ldots a_k) + \sum_{i=3}^{k} \nu_0(A_i U\{x\}) + (k-2)\nu_0(B) = \nu_0(a_2 b_2 \ldots b_k) + \sum_{i=3}^{k} \nu_0(B_i U\{x\}) + \tag{3}$$
$$+ (k-2)\,\nu_0(A).$$

Шаг 3. Имеем $\nu_0(A_3 U\{x\}) + \nu_0(B) = -\nu_0(a_3 c_2 \ldots c_k)$, $\nu_0(B_3 U\{x\}) + \nu_0(A) = -\nu_0(b_3 c_2 \ldots c_k)$. Значит, (3) будет равносильно равенству $\nu_0(b_2 a_2 a_3 \ldots a_k) + \nu_0(b_3 c_2 \ldots c_k) + \sum_{i=4}^{k} \nu_0(A_i U\{x\}) + (k-3)\nu_0(B) = \nu_0(a_2 b_2 b_3 \ldots b_k) + \nu_0(a_3 c_2 \ldots c_k) + \sum_{i=4}^{k} \nu_0(B_i U\{x\}) + (k-3)\nu_0(A)$ или такому

$$\nu_0(a_1 b_1 x a_4 a_5 \ldots a_k) + \sum_{i=4}^{k} \nu_0(A_i U\{x\}) + (k-3)\nu_0(B) =$$
$$= \nu_0(a_1 b_1 x b_4 b_5 \ldots b_k) + \sum_{i=4}^{k} \nu_0(B_i U\{x\}) + (k-3)\nu_0(A). \tag{4}$$

Шаг 4. Имеем $\nu_0(A_4 U\{x\}) + \nu_0(B) = -\nu_0(a_4 c_2 \ldots c_k)$ и $\nu_0(B_4 U\{x\}) + \nu_0(A) = -\nu_0(b_4 c_2 \ldots c_k)$. Далее $\nu_0(a_1 b_1 x a_4 \ldots a_k) + \nu_0(b_4 c_2 \ldots c_k) = -\nu_0(a_2 a_3 b_2 b_3 b_5 \ldots b_k)$ и $\nu_0(a_1 b_1 x b_4 \ldots b_k) + \nu_0(a_4 c_2 \ldots c_k) = -\nu_0(b_2 b_3 a_2 a_3 a_5 \ldots a_k)$. Следовательно, (4) равносильно равенству

$$\nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 a_5 \ldots a_k) + \sum_{i=5}^{k} \nu_0(A_i U\{x\}) + (k-4)\nu_0(B) =$$
$$= \nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 b_5 \ldots b_k) + \sum_{i=5}^{k} \nu_0(B_i U\{x\}) + (k-4)\nu_0(A). \tag{5}$$

Повторяя шаги 3, 4 с множествами A_5, A_6, B_5, B_6, получим, что (5) равносильно такому равенству:

$$\nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 a_5 b_5 a_7 \ldots a_k) + \sum_{i=7}^{k} \nu_0(A_i U\{x\}) + (k-6)\nu_0(B) =$$
$$= \nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 a_5 b_5 b_7 \ldots b_k) + \sum_{i=7}^{k} \nu_0(B_i U\{x\}) + (k-6)\nu_0(A). \tag{6}$$

Поэтому, если $k = 2\ell$ четно, то, повторяя шаги 3, 4 нужное количество раз, получим, что (6) равносильно соотношению

$$\nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 a_5 b_5 \ldots a_{2\ell-1} b_{2\ell-1}) = \nu_0(b_2 a_2 b_3 a_3 b_5 a_5 \ldots b_{2\ell-1} a_{2\ell-1}),$$

которое верно. Если же $k=2\ell+1$ нечетно, то (6) будет равносильно соотношению

$$\nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 a_5 b_5 \dots a_{2\ell-1} b_{2\ell-1} a_{2\ell+1}) + \nu_0(A_{2\ell+1} \cup \{x\}) + \nu_0(B) =$$
$$= \nu_0(b_2 a_2 b_3 a_3 b_5 a_5 \dots b_{2\ell-1} a_{2\ell-1} b_{2\ell+1}) + \nu_0(B_{2\ell+1} \cup \{x\}) + \nu_0(A). \quad (7)$$

Так как $\nu_0(A_{2\ell+1} \cup \{x\}) + \nu_0(B) = -\nu_0(a_{2\ell+1} c_2 \dots c_k)$, $\nu_0(B_{2\ell+1} \cup \{x\}) + \nu_0(A) = -\nu_0(b_{2\ell+1} c_2 \dots c_k)$, то (7) равносильно равенству $\nu_0(a_2 b_2 a_3 b_3 a_5 b_5 \dots a_{2\ell-1} b_{2\ell-1} a_{2\ell+1}) + \nu_0(b_{2\ell+1} c_2 \dots c_k) = \nu_0(b_2 a_2 b_3 a_3 b_5 a_5 \dots b_{2\ell-1} a_{2\ell-1} b_{2\ell+1}) + \nu_0(a_{2\ell+1} c_2 \dots c_k)$, которое верно, поскольку левая часть есть $-\nu_0(a_1 b_1 x a_4 b_4 a_6 b_6 \dots a_{2\ell} b_{2\ell})$, а правая $-\nu_0(b_1 a_1 x b_4 a_4 b_6 a_6 \dots b_{2\ell} a_{2\ell})$.

<u>Случай 2.</u> A и B – произвольные атомы, не содержащие x. Поскольку $card\, A = card\, B = k$, а $card\, X = 3k$, то существует атом C, не содержащий точку x и $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. По доказанному в случае I имеем $p(x,A) = p(x,C)$; $p(x,B) = p(x,C)$. Значит, $p(x,A) = p(x,B)$ для любых атомов A, B, не содержащих x.

Теперь положим

$$f_0(x) \equiv \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \nu_0(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\nu_0(A)\right]. \qquad (*)$$

Остается проверить, что $\nu_0 = \nu_{f_0}$. Достаточно установить это равенство на атомах логики $X(3k, k)$. Пусть $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ – атом и $a \notin B$. Для вычисления значения $f_0(b_j)$ по формуле (*) выберем в качестве атома $A = (B \setminus \{b_j\}) \cup \{a\}$. Тогда $f_0(b_1) =$

$$= \frac{1}{k}\Big[\nu_0(B) + \nu_0(a b_1 b_3 \dots b_k) + \nu_0(a b_2 b_1 b_4 \dots b_k) + \dots + \nu_0(a b_2 \dots b_{k-1} b_1) -$$
$$-(k-1)\nu_0(a b_2 \dots b_k)\Big] = \frac{1}{k}\Big[\nu_0(B) + \nu_0(B_2 \cup \{a\}) + \nu_0(B_3 \cup \{a\}) + \dots + \nu_0(B_k \cup \{a\}) -$$
$$-(k-1)\nu_0(B_1 \cup \{a\})\Big] = \frac{1}{k}\Big[\nu_0(B) + \sum_{i=1}^{k} \nu_0(B_i \cup \{a\}) - k\nu_0(B_1 \cup \{a\})\Big].$$

Аналогично, $f_0(b_j) = \frac{1}{k}\Big[\nu_0(B) + \sum_{i=1}^{k} \nu_0(B_i \cup \{a\}) - k\nu_0(B_j \cup \{a\})\Big]$.

Поэтому
$$\nu_{f_0}(B) = \sum_{j=1}^{k} f_0(b_j) = \frac{1}{k}\Big[k\nu_0(B) + k\sum_{i=1}^{k} \nu_0(B_i \cup \{a\}) -$$

$-k\sum_{j=1}^{k} \nu_0(B_j \cup \{a\})] = \nu_0(B)$. Итак, любой заряд ν на логике $X(3k,k)$ регулярен; функция, порождающая ν, задается по формуле

$$f(x) = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \nu(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\nu(A)\right], \qquad (**)$$

где $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ – любой атом $X(3k,k)$, не содержащий точку x, $A_i = A\setminus\{a_i\}$. Единственность функции f следует из таких рассуждений. Поскольку равенство $(**)$ для регулярных зарядов вырождается в тождество, то предположение $\nu = \nu_g$ влечет

$$g(x) = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \nu_g(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\nu_g(A)\right] = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \nu(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\nu(A)\right] = f(x).$$

Наконец, покажем, как общий случай логики $X(km,k)$ $(m>3)$ редуцируется к логике $X(3k,k)$.

Пусть $X' \subset X$, $card\, X' = 3k$, ν – заряд на $X(km,k)$. Сужение заряда ν на логику $X'(3k,k)$, которое мы обозначим ν', по доказанному регулярно. Соответствующая ν' функция f' имеет вид

$$f'(x) = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \nu'(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\nu'(A)\right] =$$
$$= \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \nu(A_i \cup \{x\}) - (k-1)\nu(A)\right],$$

где $A \subset X'$, $card\, A = k$, $x \notin A$, $x \in X'$.

Пусть ν'' и f'' – аналогичные объекты для другого множества $X'' \subset X$, $card\, X'' = 3k$. Установим согласованность функции f', f'': если $x \in X' \cap X''$, то $f'(x) = f''(x)$.

Это очевидно, если $card\, X' \cap X'' = \ell > k$. Пусть $1 \le \ell \le k$ и $X' = \{x, x_1, \dots, x_{\ell-1}, x'_{\ell+1}, \dots, x'_{3k}\}$, $X'' = \{x, x_1, \dots, x_{\ell-1}, x''_{\ell+1}, \dots, x''_{3k}\}$. Обозначим $X''' = \{x, x_1, \dots, x_{\ell-1}, x'_{\ell+1}, \dots, x'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_{k+\ell}, x''_{\ell+1}, \dots, x''_k, x''_{k+1}, \dots, x''_{2k}\}$. Тогда $card\, X''' = 3k$ и существует атом $A \subset X' \cap X'''$, не содержащий x. Поэтому $f'''(x) = f'(x)$. Аналогично, существует атом $B \subset X'' \cap X'''$, не содержащий x, $f'''(x) = f''(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим оставшиеся логики вида $X(km, k)$.

1) $m=2$, $k\geq 3$. В этом случае размерность пространства зарядов на логике $X(2k, k)$ равна $\frac{1}{2}C_{2k}^{k}+1$, размерность пространства функций на X равна $2k$. Поскольку $\frac{1}{2}C_{2k}^{k}+1>2k$, то на $X(2k, k)$ существуют нерегулярные заряды. Вот пример нерегулярного заряда. Рассмотрим множество $N=\{1,2,\ldots,2k\}$. Каждый атом логики $N(2k, k)$ будем записывать в порядке возрастания его чисел и введем порядок на атомах: $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}<B=\{b_1, b_2,\ldots,b_k\}\Leftrightarrow b_1>a_1$, или $b_1=a_1, b_2>a_2, \ldots$, или $a_1=b_1, a_2=b_2,\ldots,a_{k-1}=b_{k-1}, b_k>a_k$. Затем все атомы $N(2k,k)$ расположим по возрастанию в смысле этого порядка: $A_1<A_2<\ldots<A_{C_{2k}^{k}}$, где $A_1=\{1,2,\ldots,k\}$, $A_2=\{1,2,\ldots,k-1,k+1\},\ldots, A_{C_{2k}^{k}}=\{k+1,k+2,\ldots,2k\}$. Положим $\nu(A_j)=j-1$. Тогда ν – заряд на $N(2k,k)$, $\nu(N)=C_{2k}^{k}-1$, который не является регулярным. Проверим это, например, в случае $N(6,3)$. Достаточно показать, что функция $p(x, A)$ зависит от атома A:

$$p(1,\{2,3,4\})=\nu(123)+\nu(124)+\nu(134)-2\cdot\nu(234)=0+1+4-2\cdot 10=-15,$$
$$p(1,\{2,4,5\})=\nu(124)+\nu(125)+\nu(145)-2\cdot\nu(245)=1+2+7-2\cdot 13=-16.$$

2) на логиках $X(4,2)$, $X(2,1)$, $X(k,k)$ любой заряд регулярен.

§ 2. Состояния и автоморфизмы логик $X(km,k)$

В этом параграфе будем предполагать $m\geq 3$, $k\geq 2$. Мера μ на логике $X(km,k)$ такая, что $\mu(X)=1$ называется <u>состоянием</u>. Множество всех состояний на $X(km,k)$ обозначим $S(X(km,k))=S$. Ближайшая наша цель – найти крайние точки выпуклого множества S.

Т е о р е м а 2. Пусть $\mu\in S(X(km,k))$ – двузначное на атомах логики $X(km,k)$. Тогда существуют единственные $y\in X$ и $t\in\left[0,\frac{1}{m}\right)\cup\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}\right]$ такие, что функция f, порождающая μ, имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}1-t\left(m-\dfrac{1}{k}\right), & \text{если } x=y\\ \dfrac{t}{k}, & \text{если } x\neq y\end{cases}\qquad (x\in X).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть μ на атомах $X(km,k)$ принимает значения α, β; $0\leq\alpha<\beta\leq 1$. Тогда для любых $x_1\neq x_2$, $x_1,x_2\in X$ положим $A=\{x_1,z_1,\ldots,z_{k-1}\}$, $B=\{x_2,z_1,\ldots,z_{k-1}\}$. Тогда $f(x_1)-f(x_2)=\mu A-\mu B$ и значит, $|f(x_1)-f(x_2)|=0$ или

$\beta-\alpha$. Пусть $f(x_0)=\min_{x\in X} f(x)$. Таким образом, f может принимать лишь два значения: $f(x_0)$ и $f(x_0)+\beta-\alpha$. Обозначим $X_0 \equiv \{x \mid f(x)=f(x_0)\}$, $X_1\equiv\{x \mid f(x)=f(x_0)+\beta-\alpha\}$.

Случай I. $card\, X_0 \geq k$. Тогда $card\, X_1 < k$. Иначе, если $k \leq card\, X_1$, то существуют два атома $A_1 \subset X_0$, $A_2 \subset X_1$ и значит, $\mu A_1 = k f(x_0)=\alpha$, $\mu A_2 = k(f(x_0)+\beta-\alpha)=\beta$. Из этих равенств получаем $k=1$, что противоречит нашему предположению относительно k. Рассмотрим атом A, состоящий из $card\, X_1$ точек множества X_1 и $k-card\, X_1$ точек множества X_0. Тогда $\mu A = card\, X_1(f(x_0)+\beta-\alpha)+(k-card\, X_1)f(x_0)$. Так как $card\, X_0 \geq k$, то имеем также равенство $f(x_0)=\frac{\alpha}{k}$. Поэтому $\mu A = card\, X_1(\beta-\alpha)+\alpha$. Предположение $\mu A=\alpha$ влечет $card\, X_1 = 0$, $f\equiv const$, что противоречит двузначности состояния μ. Следовательно, $\mu A=\beta$, откуда получаем $card\, X_1=1$. Итак, $card\, X_0 = km-1$, $f(x_0)=\frac{\alpha}{k}$. Так как μ – состояние, то имеем также $(mk-1)\frac{\alpha}{k}+\frac{\alpha}{k}+\beta-\alpha=1$ или $(m-1)\alpha+\beta=1$. Отсюда $1-(m-1)\alpha=\beta>\alpha$ и значит, $\alpha<\frac{1}{m}$. Таким образом, существуют $y\in X_1$, $0\leq\alpha<\frac{1}{m}$ такие, что

$$f(x)=\begin{cases} 1-\alpha(m-\frac{1}{k}), & \text{если } x=y \\ \frac{\alpha}{k}, & \text{если } x\neq y \end{cases} \qquad (x\in X).$$

Случай 2. $card\, X_0<k$. Тогда $card\, X_1\geq k$ и, взяв атом $B\subset X_1$, найдем $\mu B = k(f(x_0)+\beta-\alpha)=\beta$, $f(x_0)=\alpha-\frac{k-1}{k}\beta$. Рассмотрим атом A, состоящий из $card\, X_0$ точек множества X_0 и $k-card\, X_0$ точек множества X_1. Тогда $\mu A = card\, X_0(\alpha-\frac{k-1}{k}\beta)+(k-card\, X_0)\frac{\beta}{k}\in\{\alpha,\beta\}$. Снова, как для случая I, равенство $\mu A=\beta$ противоречит двузначности μ на атомах. Равенство же $\mu A=\alpha$ дает $card\, X_0=1$, $card\, X_1 = mk-1$. Из равенства $\mu X=1$ найдем $\alpha-\frac{k-1}{k}\beta+(mk-1)\frac{\beta}{k}=1$ или $\alpha+\beta(m-1)=1$. Отсюда получим $0\leq\alpha=1-\beta(m-1)<\beta$ или $\beta>\frac{1}{m}$; $\beta\leq\frac{1}{m-1}$. Итак, существуют $y\in X_0$, $\frac{1}{m}<\beta\leq\frac{1}{m-1}$ такие, что

$$f(x) = \begin{cases} 1-\beta(m-\frac{1}{k}), & \text{если } x=y \\ \frac{\beta}{k} & \text{если } x \neq y \end{cases} \qquad (x \in X).$$

Случаи I, 2 доказывают теорему.

С л е д с т в и е . Пусть μ – двузначное состояние на логике $X(km,k)$. Тогда существует единственное $y \in X$ такое, что

$$\mu A = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin A \\ 1, & \text{если } y \in A \end{cases} \quad (A \in X(km,k)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию μ двузначно на атомах, причем $\alpha = 0$, $\beta = $ I. Это соответствует случаю I. Поэтому существует $y \in X$ такое, что

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x=y \\ 0, & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (x \in X).$$

Отсюда получаем требуемое.

З а м е ч а н и е. Формальная подстановка значения $t = \frac{1}{m}$ в теореме 2 приводит к состоянию, однозначному на атомах логики $X(km,k)$. Другим граничным значением в этой теореме является $t = \frac{1}{m-1}$. Как мы покажем ниже, именно граничные значения $t=0$ и $t = \frac{1}{m-1}$ описывают все крайние точки пространства состояний S.

Т е о р е м а 3. Множество крайних точек $\mathcal{E} \times t\, S(X(km,k)) = \mathcal{E}$ состоит из состояний $\hat{y}$, $\check{y}$ $(y = x_1, x_2, \ldots, x_{km})$, функции которых имеют вид

$$f_{\hat{y}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq y \\ 1, & \text{если } x = y \end{cases}, \qquad f_{\check{y}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k(m-1)}, & \text{если } x \neq y \\ -\frac{k-1}{k(m-1)}, & \text{если } x = y \end{cases}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $f \geqslant g$ влечет $\mu_f \geqslant \mu_g$. Пусть $\mu \in S$ и f функция, соответствующая μ.

а). Допустим, что $f \geqslant 0$ и $\mu \neq \hat{y}$ ни при каком $y \in X$. Тогда $\min\limits_{x \in X} \{ f(x) \mid f(x) > 0 \} = f(x_0)$, $0 < f(x_0) < 1$ и $f > f(x_0)\, I_{\{x_0\}}$, где $I_{\{x_0\}}$ есть характеристическая функция множества $\{x_0\}$. Положим $g = (f - f(x_0) I_{\{x_0\}}) \frac{1}{1-f(x_0)}$. Тогда $g \geqslant 0$ и $\sum\limits_{x \in X} g(x) = (\sum\limits_{x \in X} f(x) - f(x_0)) \frac{1}{1-f(x_0)} = \frac{1-f(x_0)}{1-f(x_0)} = 1$. Значит, $\mu_g \in S$ и равенство $f =$

$=f(x_0)I_{\{x_0\}}+(f-f(x_0)I_{\{x_0\}})$ влечет $\mu=f(x_0)\hat{x}_0+(1-f(x_0))\mu_g$. Следовательно, $\mu\notin\mathcal{E}$.

б). Допустим, что f имеет отрицательные значения. Пусть $f(x_0)=\min\limits_{x\in X}f(x)=-\varepsilon,\ \varepsilon>0$. Тогда $\mu_f(A)>0$ для любого атома A, не содержащего точку x_0. Действительно, если бы существовал атом $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}\not\ni x_0$ нулевой меры, то хотя бы для одного i $f(a_i)\geqslant 0$ мы бы имели

$$0=\mu_f(A)=\sum_{j=1}^{k}f(a_j)>f(a_1)+\dots+f(a_{i-1})+f(x_0)+f(a_{i+1})+\dots+f(a_k)=\mu_f(a_1\dots a_{i-1}x_0a_{i+1}\dots a_k).$$

Пусть $\mathfrak{A}$ – совокупность всех атомов логики $X(km,k)$, не содержащих точку x_0. Положим $\lambda=\min\limits_{A\in\mathfrak{A}}\mu_f(A)$. Тогда $0<\lambda<1$. В самом деле, $\lambda>0$, так как семейство $\mathfrak{A}$ конечно и $\mu_f(A)>0$ для всех $A\in\mathfrak{A}$. Предположение $\lambda=1$ означало бы $\mu_f(A)=1$ для всех $A\in\mathfrak{A}$. Так как $km-1>2k$, то в $\mathfrak{A}$ существуют два непересекающихся атома. Это противоречит условию $\mu_f(X)=1$.

Состояние $\check{x}_0$ на атомах имеет вид

$$\check{x}_0(A)=\begin{cases}0, & \text{если } x_0\in A,\\ \dfrac{1}{m-1}, & \text{если } x_0\notin A.\end{cases}$$

Покажем, что $\mu_f\geqslant\lambda\check{x}_0$. Достаточно проверить это неравенство на атомах. Если A – атом и $x_0\in A$, то $\lambda\check{x}_0(A)=0,\ \mu_f(A)\geqslant 0$. Если $x_0\notin A$, то $\mu_f(A)\geqslant\lambda\geqslant\dfrac{\lambda}{m-1}=\lambda\check{x}_0(A)$. Поэтому, если $\mu_f\neq\check{x}_0$, то $\nu\equiv\dfrac{\mu_f-\lambda\check{x}_0}{1-\lambda}\neq\check{x}_0$, $\nu\in S$ и $\mu_f=(1-\lambda)\nu+\lambda\check{x}_0$. Следовательно, $\mu=\mu_f\notin\mathcal{E}$.

Теперь покажем, что состояния $\hat{y},\check{y}\in\mathcal{E}$. Проверим это для $\check{y}$. Допустим, что $\check{y}=\lambda\mu_f+(1-\lambda)\mu_g$, где $0<\lambda<1$. Покажем, что $f=g=f_{\check{y}}$. Действительно, для всех атомов $A\ni y$ имеем $\check{y}(A)=$ $=0=\lambda\sum\limits_{x\in A}f(x)+(1-\lambda)\sum\limits_{x\in A}g(x)$. Отсюда, пользуясь тем, что 0 – крайняя точка отрезка $[0,1]$, получим $f(x)=f(z)$ для любых $x,z\in$ $\in X\setminus\{y\}$. Если B – множество, состоящее из $m-1$ не пересекающихся атомов $A\not\ni y$, то $\check{y}(B)=1=\lambda\sum\limits_{x\in B}f(x)+(1-\lambda)\sum\limits_{x\in B}g(x)$. Значит, $(m-1)kf(x)=1,\ f(x)=\dfrac{k}{m-1}\ (x\in X\setminus\{y\})$. Теперь из равенства

$f(y)+f(x_1)+\ldots+f(x_{k-1})=0$ получим $f(y)=-\frac{k-1}{k(m-1)}$. Итак, $f=f_{\check{y}}$. Аналогично $g=f_{\check{y}}$. Теорема доказана.

Группу всех автоморфизмов логики $X(km,k)$ обозначим через $Aut\,X(km,k)$, а через $G(X)$ – группу всех биекций множества X в себя.

Т е о р е м а 4. Для любого $p\in Aut\,X(km,k)$ существует единственная биекция $\pi_p\in G(X)$ такая, что $p(A)=\{\pi_p(x)\,|\,x\in A\}(A\in\in X(km,k))$. При этом соответствие $p\mapsto\pi_p$ устанавливает изоморфизм групп $Aut\,X(km,k)$ и $G(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p\in Aut\,X(km,k)$ и $\hat{y}$ – двузначное состояние. Очевидно, что $\hat{y}\circ p$ – снова двузначное состояние. В силу следствия теоремы 2 существует единственный элемент $\sigma_p(y)\in X$ такой, что $\hat{y}\circ p=\widehat{\sigma_p(y)}$. Нетрудно проверить, что $\sigma_p(\cdot)$ – биекция множества X в себя. Положим $\pi_p\equiv=\sigma_p^{-1}$. Покажем, что $p(A)=\{x\,|\,\sigma_p(x)\in A\}=\{\pi_p(z)\,|\,z\in A\}$.

Пусть $z\in p(A)$. Тогда $(\hat{z}\circ p)(A)=1=\widehat{\sigma_p(z)}(A)$. Значит, $\sigma_p(z)\in A$, то есть $z\in\{x\,|\,\sigma_p(x)\in A\}$. Обратно, если $\sigma_p(x)\in A$, то $\widehat{\sigma_p(x)}(A)==1=(\hat{x}\circ p)(A)$ и значит, $x\in p(A)$. Теперь покажем, что такая биекция π_p единственна. Допустим биекция $\pi\in G(X)$ такова, что $p(A)=\{\pi(x)\,|\,x\in A\}$ и существует $y\in X$ такое, что $\pi(y)\neq\sigma_p^{-1}(y)$. Выберем атом $A=\{y,y_1,\ldots,y_{k-1}\}$ такой, что $\sigma_p^{-1}(y_i)\neq\pi(y)$ ($i==1,2,\ldots,k-1$) . Тогда $p(A)=\{\pi(y),\pi(y_1),\ldots,\pi(y_{k-1})\}==\{\sigma_p^{-1}(y),\sigma_p^{-1}(y_1),\ldots,\sigma_p^{-1}(y_{k-1})\}$. Противоречие.

Пусть $\mathbb{1}$, I – тождественные отображения в $G(X)$ и $Aut\,X(km,k)$ соответственно. В силу единственности $\pi_I=\mathbb{1}$. Пусть $p,q\in Aut\,X(km,k)$. Тогда $\widehat{\sigma_{pq}(x)}=\hat{x}\circ(pq)=(\hat{x}\circ p)\circ q==\widehat{\sigma_p(x)}\circ q=\widehat{\sigma_q(\sigma_p(x))}$. Отсюда $\sigma_{pq}=\sigma_q\sigma_p$, $\pi_{pq}=(\sigma_{pq})^{-1}=(\sigma_q\sigma_p)^{-1}==\sigma_p^{-1}\sigma_q^{-1}=\pi_p\pi_q$, $\mathbb{1}=\pi_{pp^{-1}}=\pi_p\pi_{p^{-1}}$, $\pi_{p^{-1}}=(\pi_p)^{-1}$.

Обратно, каждая биекция $\pi\in G(X)$ по формуле $p_\pi(A)=\{\pi(x)\,|\,|\,x\in A\},A\in X(km,k)$ задает автоморфизм логики $X(km,k)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Комбинаторное доказательство теоремы 4 было получено в [4]. Через $\mathcal{J}$ обозначим множество всех инволютивных автоморфизмов логики $X(km,k)$: $\mathcal{J}\equiv\{p\in Aut\,X(km,k)\,|\,p^2=I\}$. Тогда эквивалентны следующие условия для меры μ :

$(i)\ \mu\circ pq=\mu\circ qp$ для любых $p,q\in Aut\,X(km,k)$,

$(ii)\ \mu\circ pq=\mu\circ qp$ для любых $p, q \in J$,

$(iii)\ \mu\circ p=\mu\circ p^{-1}$ для любого $p\in Aut\, X(km,k)$.

Утверждение $(i)\Rightarrow(ii)$ очевидно. Так как $Aut\, X(km,k)$ изоморфно $G(X)$, то импликация $(ii)\Rightarrow(iii)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть X – множество, $f: X\to X$ – биекция. Тогда существуют инволюции g_1, g_2 из X в себя такие, что $f = g_1\circ g_2$. Установим справедливость импликации $(iii)\Rightarrow(i)$. Имеем $\mu(pq(A))=\mu((pq)^{-1}(A))=\mu(q^{-1}[p^{-1}(A)])=\mu(q[p^{-1}(A)])=\mu\circ qp^{-1}(A)=\mu\circ pq^{-1}(A)$. Таким образом, если мера μ удовлетворяет условию (iii), то $\mu\circ p$ тоже удовлетворяет (iii) с любым автоморфизмом p. Итак, $\mu\circ pq=\mu\circ q^{-1}p^{-1}=(\mu\circ q^{-1})\circ p^{-1}=(\mu\circ q)\circ p^{-1}=\mu\circ qp$. Меру μ, удовлетворяющую одному из эквивалентных условий $(i)-(iii)$, назовем <u>следом</u> на логике $X(km,k)$.

Теорема 5. Мера μ на логике $X(km,k)$ является следом тогда и только тогда, когда функция f, ей соответствующая, – константа.

Доказательство. Пусть $\pi\in G(X)$ и A – атом, не содержащий точку $\pi(x)$. Тогда $f(\pi(x))=\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i\cup\{\pi(x)\})-(k-1)\mu A\right]$.

Пусть $\pi(b_i)=a_i\ (i=1,2,\ldots,k)$; тогда, очевидно, $b_i\neq x\ (i=1,\ldots,k)$ и $\{\pi(x)\}\cup A_i=\pi(\{x\}\cup B_i)$. Следовательно, $f(\pi(x))=\frac{1}{k}\Big[\sum_{i=1}^{k}\mu(\pi(\{x\}\cup B_i))-$ $-(k-1)\mu(\pi(B))\Big]=\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}\mu(\{\pi^{-1}(x)\}\cup\pi^{-1}(B_i))-(k-1)\mu(\pi^{-1}(B))\right]=f(\pi^{-1}(x))$.

Итак, $f\circ\pi=f\circ\pi^{-1}$ для любой биекции $\pi\in G(X)$. Рассмотрим биекцию $\pi(x_i)=x_{i+1}$, $\pi(x_{mk})=x_1$, $i=\overline{1,mk}$. Тогда $\pi^{-1}(x_j)=x_{j-1}$, $j=2,\ldots,mk$; $\pi^{-1}(x_1)=x_{mk}$. Следовательно, $f(x_{i+1})=f(x_{i-1})$, $i=2,\ldots,mk-1$; $f(x_1)=$ $=f(\pi(x_{mk}))=f(\pi^{-1}(x_{mk}))=f(x_{mk-1})$. Итак, $f(x_1)=f(x_3)=f(x_5)=\ldots=f(x_{mk-1})$, $f(x_2)=f(x_4)=\ldots=f(x_{mk-2})=f(x_{mk})$. Теперь рассмотрим биекцию в X $\pi(x_1)=x_3$, $\pi(x_2)=x_1$, $\pi(x_3)=x_2$, $\pi(x_i)=x_i$, $i=\overline{4,mk}$. Тогда $\pi^{-1}(x_1)=x_2$, $\pi^{-1}(x_2)=$ x_3, $\pi^{-1}(x_3)=x_1$, $\pi^{-1}(x_i)=x_i$, $i=\overline{4,mk}$. Поэтому $f(x_2)=f(\pi(x_3))=f(\pi^{-1}(x_3))=f(x_1)$, то есть f –, константа.

Литература

1. Prather R. Generating the K-subsets of an n-set // Amer. Math. Monthly. - 1980. - V.87. - P. 740 - 743.

2. G u d d e r S. P. An extension of classical measure theory // SIAM Review. - 1984. - Vol.26. - No 1. - P.71 - 89.

3. G u d d e r S. P. Stochastic Methods in Quantum Mechanics. - North - Holland, New York, 1979.

4. О в ч и н н и к о в П. Г. Строение мер на квантовых логиках: Автореф. дисс. ... канд.физ.-мат.наук. - Казань, 1985.

Л.А.Сурай

МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ КУБАТУР ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим двумерное слабо сингулярное интегральное уравнение (с.с.и.у.) вида[1]

$$Ax \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right| \ln\left|\sin\frac{\tau-t}{2}\right| x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau + \tag{1}$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,t,\sigma,\tau)\,x(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau = y(s,t),$$

где $x(s,t)$ - неизвестная функция, которая ищется в пространстве $X = L_2[0,2\pi]^2 = L_2[0,2\pi;0,2\pi]$ с обычной нормой

$$\|x\|_{L_2[0,2\pi]^2} = \|x\|_2 = \left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(s,t)|^2 ds\,dt\right)^{1/2},$$

$h(s,t,\sigma,\tau)$, $y(s,t)$ - известные непрерывные 2π-периодические функции по каждой из переменных, а слабо сингулярный интеграл понимается как несобственный.

Приближенные методы решения одномерных интегральных уравнений такого типа достаточно хорошо разработаны (см., например,

---

[1] Двумерный случай рассматривается для простоты выкладок ; распространение всех полученных ниже результатов на уравнение с k $(k \geq 3)$ - переменными не представляет труда.