Р. Б. Салимов, Е. В. Стрежнева, К решению обратной смешанной краевой задачи, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 95–117

2. Н а с ы р о в С. Р. Топологическое пространство римановых поверхностей над сферой, связанное со сходимостью к ядру // ДАН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. - 1988.- № 5.- С.19 - 22.

3. К р о у э л л Р., Ф о к с Р. Введение в теорию узлов.- М.: Мир, 1967. - 348 с.

4. М а с с и У., С т о л л и н г с Д ж. Алгебраическая топология. Введение. - М.: Мир, 1977. - 343 с.

5. С п е н ь е р Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1971. - 680 с.

6. С п р и н г е р Д ж. Введение в теорию римановых поверхностей. - М.: ИЛ, 1960. - 343 с.

Р.Б.Салимов, Е.В.Стрежнева

К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

1. Пусть $\mathcal{D}_z$ - односвязная конечная область, расположенная в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и ограниченная кривой $\mathcal{L}_z$, состоящей из двух жордановых линий - ломаной $\mathcal{L}_z^1$, содержащей $n-1$ прямолинейных звеньев, и кривой $\mathcal{L}_z^2$, соединяющей концы A_1, A_n ломаной $\mathcal{L}_z^1$.

Пусть $w = w(z)$ - функция, аналитическая в области $\mathcal{D}_z$ и отображающая конформно область $\mathcal{D}_z$ на однолистную область $\mathcal{D}_w$, расположенную внутри кривой $\mathcal{L}_w$ в плоскости переменного $w = \varphi + i\psi$; обозначим через $\mathcal{L}_w^1$ и $\mathcal{L}_w^2$ части $\mathcal{L}_w$, отвечающие соответственно $\mathcal{L}_z^1$ и $\mathcal{L}_z^2$ при указанном отображении.

Рассмотрим решение следующей задачи, называемой обратной смешанной краевой задачей. Дана часть кривой $\mathcal{L}_z$ в виде ломаной $\mathcal{L}_z^1$, остальная часть $\mathcal{L}_z^2$ неизвестна. На $\mathcal{L}_z^2$ заданы значения функции $w = w(z)$ в виде

$$w = \varphi(x) + i\psi(x) \quad , \tag{1}$$

где x - абсцисса точки $\mathcal{L}_z^2$. Задана кривая $\mathcal{L}_w^1$, которая вместе с кривой $\mathcal{L}_w^2$, определяемой уравнением (1), образует замкнутую жорданову кривую $\mathcal{L}_w$, причем положительному направлению обхода на $\mathcal{L}_z$, при котором область $\mathcal{D}_z$ остается слева, отвечает положительное направление обхода на $\mathcal{L}_w$, при котором область $\mathcal{D}_w$ остается слева. Требуется определить форму линии $\mathcal{L}_z^2$ и функцию $w(z)$.

Эта задача поставлена и исследована В.Н.Монаховым [3], [4] (с.108), она является естественным обобщением известных в гидромеханике и теории фильтрации обратных смешанных задач [10] (с.23, 24), последнее обстоятельство отмечено также в статье [3]. В связи с тем, что область $\mathcal{D}_z$ является конечной, задачу будем называть внутренней.

Вершины ломаной $\mathcal{L}_z^1$ обозначим через A_j, $j=\overline{2,n-1}$, внутренний по отношению к области $\mathcal{D}_z$ угол при вершине A_j – через $\alpha_j \pi$, $0<\alpha_j<2$. Примем, что при обходе $\mathcal{L}_z^1$ в положительном направлении точки A_1, A_2, A_3, ..., A_n следуют друг за другом. Пусть x_1, x_n – абсциссы точек соответственно A_1, A_n.

Здесь нужно рассмотреть следующие два случая задания функции (I):

I) функция (I) задана в интервале $[x_n, x_1]$ (в интервале $[x_1, x_n]$ при $x_1 < x_n$, для простоты в дальнейшем этот вариант выделять не будем), то есть искомая кривая $\mathcal{L}_z^2$ расположена в полосе $x_n \leq x \leq x_1$;

2) функция (I) задана в интервале $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_1]$, $\tilde{x}_n \leq x_n$, $\tilde{x}_1 \geq x_1$, причем хотя бы одно из этих неравенств является строгим, то есть искомая кривая $\mathcal{L}_z^2$ имеет участки, лежащие вне полосы $x_n \leq x \leq x_1$ (здесь возможен случай, когда $x_n = x_1$). Обозначим $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_n$, точки кривой $\mathcal{L}_z^2$, абсциссы которых равны соответственно $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_n$.

Пусть A_0 – некоторая точка кривой $\mathcal{L}_z^2$ с заранее выбранной абсциссой из интервала (x_n, x_1), отличная от концов линии $\mathcal{L}_z^2$ при $x_n = x_1$.

В случае задания функции (I) в интервале $[x_n, x_1]$ будем считать, что она однозначна и имеет производную, отличную от нуля и удовлетворяющую условию Гельдера в интервале $[x_n, x_1]$.

Во втором случае функцию (I) будем задавать отдельно для участков $A_n\tilde{A}_n$, $\tilde{A}_n A_0 \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_1 A_1$ кривой $\mathcal{L}_z^2$ в виде однозначных ветвей, непрерывно переходящих друг в друга в точках $\tilde{A}_n$, $\tilde{A}_1$, для которых выражение $[\varphi'(x)+i\psi'(x)](x-\tilde{x}_n)^{\tau_n} \,|\, x-\tilde{x}_1|^{\tau_1}$ (τ_1, $\tau_n = const$, $0<\tau_1<1$, $0<\tau_n<1$) является функцией, отличной от нуля и удовлетворяющей условию Гельдера в соответствующих интервалах

$[\tilde{x}_n, x_n], [\tilde{x}_n, \tilde{x}_1], [x_1, \tilde{x}_1]$ для $\tilde{x}_n < x_n, x_1 < \tilde{x}_1$, причем это выражение для соответствующей пары ветвей функции (I) в точке $\tilde{x}_n$, как и в точке $\tilde{x}_1$, имеет значения, отличающиеся лишь знаком.

Примем, что $\mathcal{L}_w^1$ является кривой Ляпунова (см., напр., [2], с.II6, II7). В силу сделанных выше предположений относительно функции (I) линия $\mathcal{L}_w^2$ также является кривой Ляпунова. Концы линии $\mathcal{L}_w^2$ обозначим A_1 и A_n (здесь и всюду в дальнейшем соответственные точки в разных плоскостях будем обозначать одной и той же буквой). Пусть $\nu_j \pi$ есть внутренний по отношению к области $\mathcal{D}_w$ угол, образованный касательными к линиям $\mathcal{L}_w^1$ и $\mathcal{L}_w^2$ в точке A_j , $j = 1, n$, причем $0 < \nu_j < 2$.

Для простоты предположим, что малые прилегающие к концам участки линий $\mathcal{L}_w^1$ и $\mathcal{L}_w^2$, включающие в себя эти концы, являются аналитическими кривыми (см., напр., [2], с.I62), в частности, на соответствующих интервалах изменения аргумента x функция (I) имеет производные любого порядка.

Здесь для простоты, в отличие от работ [3], [4], вышеуказанную задачу рассмотрим в видоизмененной постановке, считая, что на $\mathcal{L}_w^1$ заданы образы вершин A_j , $j = \overline{2, n-1}$, ломаной $\mathcal{L}_w^1$, а длины звеньев линии $\mathcal{L}_z^1$ (и, следовательно, положения точек A_2 , A_3 , ..., A_n этой линии относительно A_1) определяются в процессе решения, и более подробно, чем в книге [4], исследуем картину разрешимости задачи, учитывая также, что ряд вопросов, относящихся сюда, В.Н.Монаховым оставлен без исследования [4] (с.II4).

2. Область $\mathcal{D}_w$ отобразим конформно функцией $w = w(\zeta)$ на круг $|\zeta| < 1$ в плоскости комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\gamma}, 0 \leq \gamma < 2\pi$, так, чтобы точки A_n , A_0 , A_1 кривой $\mathcal{L}_w^2$ перешли в заданные точки окружности $\zeta = e^{i\gamma}$ соответственно $e^{i\gamma_n}$, I, $e^{i\gamma_1}$, $0 < \gamma_1 < \gamma_n < 2\pi$. Части этой окружности, отвечающие $\mathcal{L}_w^1$, $\mathcal{L}_w^2$, обозначим соответственно $\mathcal{L}_\zeta^1, \mathcal{L}_\zeta^2$.

Пусть $z = z(\zeta)$ есть функция, отображающая конформно область $\mathcal{D}_z$ на круг $|\zeta| < 1$, для которой

$$w[z(\zeta)] = \omega(\zeta) . \tag{2}$$

Ясно, что рассматриваемая задача будет решена, если будет найдена функция $z(\zeta)$, при этом функция $w(z)$ определяется из соотношений $w = \omega(\zeta)$, $z = z(\zeta)$.

Как будет ясно из дальнейшего, целесообразнее искать не функцию $z(\zeta)$ непосредственно, а ее производную $z'(\zeta)$.

Граничное значение функции $z(\zeta)$ обозначим $z(t)=x(\gamma)+iy(\gamma)$ $(t=e^{i\gamma})$. Тогда $itz'(t)=x'(\gamma)+iy'(\gamma)=[z(e^{i\gamma})]'_{\gamma}$ $(t=e^{i\gamma})$ есть граничное значение функции $i\zeta z'(\zeta)$, аналитической в круге $|\zeta|<1$ (и обращающейся в нуль в точке $\zeta=0$).

3. Пусть $\eta_1\pi$ есть угол, образованный звеном A_1A_2 ломаной $\mathcal{L}_z^1$ с действительной осью, $-\pi/2 \leq \eta_1\pi < 3\pi/2$. Тогда, обозначая через γ_j значение γ для точки A_j окружности $\zeta = e^{i\gamma}$, $j=\overline{2,n-1}$, для точек линии $\mathcal{L}_\zeta^1$ запишем

$$itz'(t)=|x'(\gamma)+iy'(\gamma)|\,e^{i\Phi(\gamma)} \qquad (t=e^{i\gamma}),$$

где

$$\Phi(\gamma)=\begin{cases}\eta_1\pi & \text{при } \gamma_1<\gamma<\gamma_2,\\ \eta_1\pi+\sum\limits_{j=2}^{k}(1-\alpha_j)\pi & \text{при } \gamma_k<\gamma<\gamma_{k+1},\quad k=\overline{2,n-1}\end{cases} \tag{3}$$

или

$$e^{-i(\pi/2+\Phi(\gamma))}\,itz'(t)=-i\,|x'(\gamma)+iy'(\gamma)|, \tag{4}$$

следовательно,

$$Re\left[e^{-i(\pi/2+\Phi(\gamma))}\,itz'(t)\right]=0, \tag{5}$$

$$Im\left[e^{-i(\pi/2+\Phi(\gamma))}\,itz'(t)\right]\leq 0, \tag{6}$$

поскольку последние два соотношения равносильны (4). Отметим, что $\Phi(\gamma)$ есть угол, образованный с действительной осью касательной к кривой $\mathcal{L}_z^1$. В дальнейшем этот угол для звена $A_{n-1}A_n$ будем обозначать

$$\eta_{n-1}\pi=\Phi(\gamma_n-0)=\eta_1\pi+\sum_{j=2}^{n-1}(1-\alpha_j)\pi. \tag{7}$$

Так как значения функции $W=W(z)$ на $\mathcal{L}_z^2$ заданы (в виде (I)), то в силу (2) на $\mathcal{L}_\zeta^2$ имеем

$$\varphi(x)+i\psi(x)=\omega(e^{i\gamma}), \tag{8}$$

это соотношение определяет функцию $x=x(\gamma)$ для точек $\mathcal{L}_\zeta^2$. Поэтому на $\mathcal{L}_\zeta^2$ известна

$$Re[itz'(t)]=x'(\gamma) \qquad (t=e^{i\gamma}). \tag{9}$$

Таким образом, нахождение функции $i\zeta z'(\zeta)$ приводится к отысканию решения краевой задачи Гильберта (по терминологии

Ф.Д.Гахова [I], с.264) с краевыми условиями (5) на $\mathcal{L}_\zeta^1$ и (9) – на $\mathcal{L}_\zeta^2$, причем это решение должно удовлетворять неравенству (6) на $\mathcal{L}_\zeta^1$.

Как известно (см., напр., [2], с.I7I), в окрестности точки $t_j = e^{i\gamma_j}$, $j=\overline{2,n-1}$, для производной $z'(\zeta)$ справедливо представление

$$z'(\zeta) = (\zeta - t_j)^{\alpha_j - 1} B_j(\zeta) , \tag{I0}$$

где $B_j(\zeta)$ – функция, аналитическая в окрестности точки t_j, $B_j(t_j) \neq 0$.

Для граничных значений $\omega'(t)$ производной $\omega'(\zeta)$ вблизи точек $t_j = e^{i\gamma_j}$, $j=1,n$, справедливо представление [8]

$$\omega'(t) = (t - t_j)^{\nu_j - 1} Q_j(t) , \tag{II}$$

где $Q_j(t)$ – функция, удовлетворяющая условию $H(\nu_j)$ – условию Гельдера с показателем ν_j при $\nu_j < 1$, условию $H(1-\varepsilon)$ при $\nu_j \geq 1$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $Q_j(t_j) \neq 0$.

Производная функции $x(\gamma)$, определяемой из соотношения (8), выражается формулой

$$x'(\gamma) = \frac{\omega'(e^{i\gamma}) i e^{i\gamma}}{\varphi'(x) + i\psi'(x)} \quad (x = x(\gamma)) , \tag{I2}$$

$\gamma_n < \gamma \leq 2\pi$, $0 \leq \gamma < \gamma_1$. Отсюда с учетом (II), замечая, что $|t - t_j| = |e^{i\gamma} - e^{i\gamma_j}| = |2 \sin \frac{\gamma - \gamma_j}{2}|$, для рассматриваемой полуокрестности точки γ_j (правой для γ_n и левой для γ_1) будем иметь

$$x'(\gamma) = \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_j}{2} \right|^{\nu_j - 1} \chi_j(\gamma) , \tag{I3}$$

где $\chi_j(\gamma)$ есть функция, удовлетворяющая условию $H(1-\varepsilon)$ при $\nu_j \geq 1$ и условию $H(\nu_j)$ при $\nu_j < 1$ в указанной полуокрестности, включая точку γ_j, $\chi_j(\gamma_j) \neq 0$, $j = 1, n$. В самом деле, в рассматриваемой (правой или левой в зависимости от постановки задачи) полуокрестности точки x_j, включая эту точку, функция $\varphi(x) + i\psi(x)$ имеет производные любого порядка, следовательно, $\varphi'(x) + i\psi'(x)$ удовлетворяет условию $H(1)$. При $\nu_j \geq 1$ из формул (II), (I2) видно, что производная $x'(\gamma)$ существует всюду в рассматриваемой полуокрестности точки γ_j, включая γ_j, поэтому в этой полуокрестности $x(\gamma)$ удовлетворяет условию $H(1)$, но тогда $\varphi'[x(\gamma)]+i\psi'[x(\gamma)]$ и $(\varphi'[x(\gamma)]+i\psi'[x(\gamma)])^{-1}$ также удовлетворяют условию $H(1)$ (см., напр., [5], с.19, 22).Теперь из формул (11), (12) видно, что функция $\chi_j(\gamma)$ удовлетворяет условию $H(1-\varepsilon)$ в указанной полуокрестности; при $\nu_j<1$ вначале с учетом (11) убедимся в том, что в рассматриваемой полуокрестности точки γ_j, включая γ_j, функция $\omega(e^{i\gamma})$ удовлетворяет условию $H(\nu_j)$, затем на основании (8) проверим, что функция $x(\gamma)$ обладает этим же свойством, поэтому $(\varphi'[x(\gamma)+$ $+i\psi'[x(\gamma)])^{-1}$, а, следовательно, и $\chi_j(\gamma)$ удовлетворяет условию $H(\nu_j)$ в указанной полуокрестности.

Аналогичным образом, используя теорему Келлога (см., напр., [2], с. 117) и формулу (12), убеждаемся в том, что производная $x'(\gamma)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\mathcal{L}^2_\zeta$ всюду, включая концы при $\nu_j>1$, $j=1,n$; причем в случае, когда функция (1) является двузначной, производная $x'(\gamma)$ обращается в нуль при значениях γ, отвечающих точкам $\mathcal{L}^2_z$ с абсциссами $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_n$.

Как видно из формулы (10), решение вышеуказанной краевой задачи Гильберта мы должны искать в классе функций, ограниченных при $\alpha_j\geqslant 1$ и не ограниченных при $\alpha_j<1$ вблизи точки t_j, $j=2,n-1$; кроме того, для большей общности будем предполагать, что искомая функция $i\zeta z'(\zeta)$ обращается в бесконечность интегрируемого порядка вблизи точек t_1, t_n, когда последние являются неособенными точками (по терминологии Н.И.Мусхелишвили [5], с.256). Отметим, что при $\nu_j<1$, как показывают формулы (9), (13), функция $i\zeta z'(\zeta)$ не может быть ограниченной вблизи точки t_j, $j=1,n$.

Ясно, что рассматриваемая обратная смешанная краевая задача может быть сведена к краевой задаче Гильберта для функции $z(\zeta)$. Но рассуждения и выкладки при этом будут более сложными.

4. Для нахождения решения вышеупомянутой краевой задачи Гильберта воспользуемся результатами статьи [9].

Число $\eta_{n-1}\pi$, определяемое формулой (7), представим следующим образом:

$$\eta_{n-1}\pi=N\pi+\eta_n\pi, \qquad (14)$$

где N – целое число, и

$$-\pi/2 < \eta_n \pi \le \pi/2 \quad . \tag{I5}$$

С учетом (3), (7), (I4) краевые условия (5), (9) запишем так

$$Re\left[e^{-i(\pi/2+\Phi(\gamma))} it\, z'(t)\right] = c(\gamma) \quad (t = e^{i\gamma}) , \tag{I6}$$

где

$$\Phi(\gamma) = \begin{cases} \mp\pi/2 & \text{при } 0 \le \gamma < \gamma_1 , \\ \eta_1 \pi & \text{при } \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 , \\ \eta_1\pi + \sum_{j=2}^{k}(1-\alpha_j)\pi & \text{при } \gamma_k < \gamma < \gamma_{k+1}, k=\overline{2,n-2}, \\ N\pi + \eta_n \pi & \text{при } \gamma_{n-1} < \gamma < \gamma_n , \\ N\pi + \pi/2 & \text{при } \gamma_n < \gamma \le 2\pi , \end{cases} \tag{I7}$$

$$c(\gamma) = \begin{cases} \pm x'(\gamma) & \text{при } 0 \le \gamma < \gamma_1 , \\ 0 & \text{при } \gamma_1 < \gamma < \gamma_n , \\ (-1)^{N+1} x'(\gamma) & \text{при } \gamma_n < \gamma \le 2\pi , \end{cases} \tag{I8}$$

здесь и всюду в дальнейшем верхние знаки берутся для случая $-\pi/2 \le \eta_1\pi < \pi/2$, нижние – для случая $\pi/2 \le \eta_1\pi < 3\pi/2$. В частности, в силу такого выбора имеем $0 \le \eta_1 \pm 1/2 < 1$. Из (I5) следует, что $0 \le 1/2 - \eta_n < 1$.

Пусть $arg(\zeta - t_j)$ есть непрерывная в круге $|\zeta| < 1$ ветвь, которая на окружности $t = e^{i\gamma}$ принимает значение

$$\theta_j(\gamma) = \begin{cases} 3\pi/2 + (\gamma + \gamma_j)/2 & \text{при } 0 < \gamma < \gamma_j , \\ \pi/2 + (\gamma+\gamma_j)/2 & \text{при } \gamma_j < \gamma < 2\pi ; \end{cases}$$

в дальнейшем будем считать, что $\zeta - t_j = |\zeta - t_j|\, e^{i\,arg(\zeta - t_j)}$, на окружности $t = e^{i\gamma}$ эта функция принимает значение $t - t_j = |t-t_j| e^{i\theta_j(\gamma)}$ (а в точке $\zeta = 0$ – значение $e^{i(\pi+\gamma_j)}$), $j = \overline{1,n}$.

Индекс краевой задачи Гильберта (I6) равен $\varkappa = [\Phi(2\pi) - \Phi(0)]/\pi$, поэтому согласно (I7)

$$\varkappa = \begin{cases} N+1 & \text{при } -\pi/2 \le \eta_1\pi < \pi/2 , \\ N & \text{при } \pi/2 \le \eta_1 \pi < 3\pi/2 . \end{cases}$$

Отсюда видно, что $\varkappa = N + 1/2 \pm 1/2$, поэтому в силу (7),(I4) имеем $\varkappa = 1/2 - \eta_n + \eta_1 \pm 1/2 + \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \alpha_j)$.

Из этой формулы находятся целое число $\varkappa$ и число $1/2 - \eta_n$, $0 \le 1/2 - \eta_n < 1$, когда η_1, α_j, $j = \overline{2, n-1}$, известны.

Обозначим

$$H_0(\zeta) = (\zeta - t_1)^{\eta_1 \pm 1/2} \prod_{j=2}^{n-1} (\zeta - t_j)^{1-\alpha_j} (\zeta - t_n)^{1/2 - \eta_n}. \tag{I9}$$

В случае, когда $\varkappa$ - четное число, условие (I6) запишем в виде

$$Re\left[e^{-i(\pi/2 + \Psi)} H_0(t) \cdot t^{-\varkappa/2} \cdot itz'(t)\right] = c_1(t), \tag{20}$$

где

$$c_1(t) = c(\gamma)/|H_0(t)|$$

$$\Psi = \varphi(\gamma) + (\eta_1 \pm 1/2)\theta_1(\gamma) + \sum_{j=2}^{n-1} (1-\alpha_j)\theta_j(\gamma) + \\ +(1/2 - \eta_n)\theta_n(\gamma) - (\varkappa/2)\cdot\gamma = const, \quad 0 \le \gamma \le 2\pi. \tag{2I}$$

При $\varkappa > 2$ выражение в квадратных скобках в левой части условия (20) представляет собой граничные значения функции, аналитической всюду в круге $|\zeta| < 1$, исключая точку $\zeta = 0$, в которой она имеет полюс порядка $\varkappa/2 - 1$; так как согласно (20) действительная часть этих значений известна, то указанная функ - ция определяется формулой [I] (с.269 - 27I)

$$e^{-i(\pi/2 + \Psi)} H_0(\zeta)\, iz'(\zeta)/\zeta^{\varkappa/2 - 1} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma}) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + ib_0 + \\ + \sum_{k=1}^{\frac{\varkappa}{2}-1} \left[(a_k + ib_k)\zeta^k - (a_k - ib_k)\zeta^{-k}\right], \tag{22}$$

где b_0, a_k, b_k - произвольные действительные постоянные, $k = \overline{1, \varkappa/2 - 1}$. Отсюда находится производная $z'(\zeta)$, она зави - сит от $\varkappa - 1$ действительных произвольных постоянных.

При $\varkappa = 2$ в формуле (22) надо положить равными нулю все

$a_k, b_k, k=\overline{1, æ/2-1}$, в этом случае $z'(\zeta)$ будет зависеть от одной произвольной постоянной b_0.

При $æ \leq 0$ производная $z'(\zeta)$ определяется формулой, получаемой из (22) отбрасыванием слагаемых, содержащих b_0, a_k, b_k, $k=\overline{1, æ/2-1}$, если выполняются условия $\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})e^{-ik\gamma}d\gamma=0$, $k = 0, 1, \ldots, -æ/2$, то есть, здесь $z'(\zeta)$ может быть найдена лишь при выполнении $-æ+1$ действительных условий разрешимости

$$\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})d\gamma=0, \int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})\begin{Bmatrix}\cos k\gamma\\ \sin k\gamma\end{Bmatrix}d\gamma=0, \quad k=1,2,\ldots,-æ/2. \tag{23}$$

В случае, когда $æ$ – нечетное число, условие (16) представим так

$$Re\left[e^{-i(\pi+\psi)}H_0(t)\frac{t-1}{t^{(æ+1)/2}}itz'(t)\right]=c_1(t)|t-1|, \tag{24}$$

где ψ, $H_0(t)$, $c_1(t)$ обозначают то же, что и выше, $t-1 = |t-1|e^{i(\pi+\gamma)/2}$ при $t=e^{i\gamma}$, $0\leq\gamma\leq 2\pi$.

Отсюда видно, что при $æ>1$ будет справедлива формула, аналогичная (22),

$$\begin{aligned} &e^{-i(\pi+\psi)}H_0(\zeta)\frac{\zeta-1}{\zeta^{(æ-1)/2}}iz'(\zeta)=\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma+ib_0+\\ &+\sum_{k=1}^{(æ-1)/2}\left[(a_k+ib_k)\zeta^k-(a_k-ib_k)\zeta^{-k}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Ясно, что граничное значение правой части этой формулы в точке $t=1$ должно обращаться в нуль, но действительная часть его $c_1(t)\cdot|t-1|$ будет равна нулю при $t=1$, следовательно, в точке $t=1$ должна обращаться в нуль мнимая часть указанного граничного значения, то есть, должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,ctg\frac{\gamma}{2}d\gamma-b_0-\sum_{k=1}^{(æ-1)/2}2b_k=0.$$

Из последней формулы выразим b_0, полученное подставим в формулу (25), тогда при $\varkappa > 1$ придем к соотношению

$$e^{-i(\pi+\psi)} H_0(\zeta)\, \frac{\zeta-1}{\zeta^{(\varkappa-1)/2}}\, i z'(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\, \frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\, d\gamma + i\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\, ctg\,\frac{\gamma}{2}\, d\gamma + \tag{26}$$

$$+\sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2} [a_k(\zeta^k-\zeta^{-k}) + i b_k(\zeta^k+\zeta^{-k}-2)]\,.$$

Отсюда определяется производная $z'(\zeta)$, она зависит от $\varkappa-1$ произвольных действительных постоянных.

При $\varkappa = 1$ в формуле (26) надо взять равными нулю все величины a_k, b_k, в этом случае $z'(\zeta)$ определяется единственным образом.

При $\varkappa \leqslant -1$ производная $z'(\zeta)$ определяется формулой, получаемой из (26) отбрасыванием слагаемых, содержащих a_k, b_k, если выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\, d\gamma = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\, ctg\,\frac{\gamma}{2}\, d\gamma = 0, \\ &\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1| \begin{Bmatrix} \cos k\gamma \\ \sin k\gamma \end{Bmatrix} d\gamma = 0\,, \quad k = 1,2,\ldots,(-\varkappa-1)/2\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Следовательно, здесь $z'(\zeta)$ может быть найдена лишь при выполнении $-\varkappa+1$ действительных условий разрешимости.

После того, как найдена производная $z'(\zeta)$, определяется функция $z(\zeta) = \int_{t_1}^{\zeta} z'(\zeta)\, d\zeta + x_1 + i y_1$, где y_1 – произвольная действительная постоянная, равная ординате точки A_1. В дальнейшем для определенности будем считать $y_1 = 0$. Граничные значения $z(e^{i\gamma})$ этой функции при $0 \leqslant \gamma < \gamma_1$ и $\gamma_n \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$ выражают комплексные координаты точек кривой $\mathcal{L}_z^2$, а длины звеньев $A_j A_{j+1}$ ломаной $\mathcal{L}_z^1$ вычисляются по формуле

$$L_j = \int_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} |z'(e^{i\gamma})|\, d\gamma \;, \quad j=\overline{1,n-1} \;. \tag{28}$$

5. Принимая во внимание (I0), (I9), заключаем, что граничные значения правых частей формул (22), (26) должны быть отличны от нуля во всех внутренних точках линии $\mathcal{L}_\zeta^1$. Следовательно, неравенство (6) можно записать в виде

$$\operatorname{Im}\Big[e^{-i(\pi/2+\varphi(\gamma))} \prod_{j=2}^{n-1} |t-t_j|^{1-\alpha_j} i t z'(t)\Big] < 0 \,, \; t=e^{i\gamma}, \; \gamma_1<\gamma<\gamma_n \;. \tag{29}$$

Найденная выше производная $z'(\zeta)$ должна удовлетворять этому неравенству.

При четном $\varkappa > 2$, переходя к пределу при $\zeta \to t = e^{i\gamma}$, $0 \le \gamma \le 2\pi$ из соотношения (22) получим

$$e^{-i(\pi/2+\varphi(\gamma))} |H_0(t)|\, i t z'(t) = c_1(e^{i\gamma}) - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\, d\sigma + \tag{30}$$

$$+ i b_0 + i\, 2\sum_{k=1}^{\varkappa/2-1} (a_k \sin k\gamma + b_k \cos k\gamma) \;,$$

поэтому условие (29) можно записать так

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\, d\sigma - b_0 - 2\sum_{k=1}^{\varkappa/2-1}(a_k \sin k\gamma + b_k \cos k\gamma) > 0 \,, \tag{31}$$

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_n \,.$$

При $\varkappa = 2$ условие (29), поступая аналогично предыдущему, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\, d\sigma - b_0 > 0 \;, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_n \;, \tag{32}$$

а при четном $\varkappa \le 0$ – в виде

$$\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\, d\sigma > 0 \;, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_n \;. \tag{33}$$

При нечетном $\varkappa > 1$ из соотношения (26) будем иметь

$$e^{-i(\pi/2+\Phi(\gamma))} \left| H_0(t) \right| \left| t-1 \right| i t z'(t) = c_1(e^{i\gamma}) \left| e^{i\gamma}-1 \right| -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\left|e^{i\sigma}-1\right| \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\left|e^{i\sigma}-1\right| \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma+ \tag{34}$$

$$+i2\sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2}\left[a_k \sin k\gamma + b_k(\cos k\gamma - 1)\right], \quad 0\le\gamma\le 2\pi ,$$

поэтому условие (29) может быть записано так

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\left|e^{i\sigma}-1\right| \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\left|e^{i\sigma}-1\right| \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma-$$

$$-2\sum_{k=1}^{(\varkappa-1)/2}\left[a_k \sin k\gamma + b_k(\cos k\gamma - 1)\right]>0, \quad \gamma_1<\gamma<\gamma_n , \tag{35}$$

а при нечетном $\varkappa \le 1$ – в виде

$$\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\left|e^{i\sigma}-1\right| \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma-\int_0 c_1(e^{i\sigma})\left|e^{i\sigma}-1\right| \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma>0 , \tag{36}$$

$$\gamma_1<\gamma<\gamma_n .$$

Поведение сингулярных интегралов с ядром Гильберта, входящих в полученные формулы (30) – (36) вблизи γ_1 и γ_n, можно выяснить, пользуясь результатами Н.М.Мусхелишвили [5] (с.73 – 78), а также результатами работ [6], [7] (с.128 – 131), если плотности этих интегралов терпят разрыв в точках γ_1, γ_n. Как видно из формул (18), (21), плотности указанных интегралов тождественно равны нулю в интервале (γ_1 , γ_n).

Для левой окрестности точки γ_1 в силу (13), (18),(19),(21) имеем

$$c_1(e^{i\gamma})\left|e^{i\gamma}-1\right|^{\frac{1-(-1)^{\varkappa}}{2}}=\pm\left|\sin\frac{\gamma-\gamma_1}{2}\right|^{\nu_1-1+\eta_1\pm1/2}\chi_1(\gamma)\,T_1(\gamma) , \tag{37}$$

где

$$T_1(\gamma)=2^{\eta\pm 1/2}\prod_{j=2}^{n-1}|t-t_j|^{1-\alpha_j}|t-t_n|^{1/2-\eta_n}|t-1|^{\frac{1-(-1)^{\varkappa}}{2}}\quad (t=e^{i\gamma}).$$

Для правой окрестности точки γ_n получим

$$c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|^{\frac{1-(-1)^{\varkappa}}{2}}=(-1)^{N+1}\left|\sin\frac{\gamma-\gamma_n}{2}\right|^{\nu_n-1+1/2-\eta_n}\chi_n(\gamma)T_n(\gamma), \tag{38}$$

где

$$T_n(\gamma)=2^{1/2-\eta_n}|t-t_1|^{\eta_1\pm 1/2}\prod_{j=2}^{n-1}|t-t_j|^{1-\alpha_j}|t-1|^{\frac{1-(-1)^{\varkappa}}{2}}\quad (t=e^{i\gamma}).$$

6. Пусть $1-\nu_1<\eta_1\pm 1/2$, $1-\nu_n<1/2-\eta_n$. В этом случае плотности сингулярных интегралов, входящих в формулы (30)-(36), как показывают соотношения (37), (38), удовлетворяют условию Гельдера в окрестностях точек γ_1, γ_n, следовательно, вышеуказанные интегралы являются функциями, удовлетворяющими условию Гельдера в окрестностях точек γ_1, γ_n [5] (с.64).

В рассматриваемом случае выполнения условий (31), (32),(35) можно добиться подбором входящих в них произвольных постоянных, в чем легко убедиться.

7. Пусть $1-\nu_1>\eta_1\pm 1/2$, $1-\nu_n>1/2-\eta_n$.

Положим $\varkappa_1=1-\nu_1-(\eta_1\pm 1/2)$, $\varkappa_n=1-\nu_n-(1/2-\eta_n)$ (будем помнить, что $\eta_1\pm 1/2\geqslant 0$, $1/2-\eta_n\geqslant 0$). Тогда $0<\varkappa_1<1$, $0<\varkappa_n<1$, плотности вышеуказанных сингулярных интегралов, как это видно из формул (37), (38), в точках γ_1, γ_n обращаются в бесконечность интегрируемого порядка.

В окрестности точки γ_1 будем иметь для $\gamma>\gamma_1$

$$\int_0^{2\pi}|e^{i\sigma}-1|^{\frac{1-(-1)^{\varkappa}}{2}}c_1(e^{i\sigma})\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma=$$

$$=\mp 2\pi\frac{\chi_1(\gamma_1)T_1(\gamma_1)}{\sin\varkappa_1\pi}\left|\sin\frac{\gamma-\gamma_1}{2}\right|^{-\varkappa_1}+X_1(\gamma)\left|\sin\frac{\gamma-\gamma_1}{2}\right|^{-\tilde{\varkappa}_1}, \tag{39}$$

в окрестности точки γ_n для $\gamma<\gamma_n$ получим

$$\int_0^{2\pi}|e^{i\sigma}-1|^{\frac{1-(-1)^{\varkappa}}{2}}c_1(e^{i\gamma})\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma= \tag{40}$$

$$= 2\pi(-1)^{N+1}\frac{\chi_n(\gamma_n)T_n(\gamma_n)}{\sin \varkappa_n\pi}\left|\sin\frac{\gamma-\gamma_n}{2}\right|^{-\varkappa_n} + X_n(\gamma)\left|\sin\frac{\gamma-\gamma_n}{2}\right|^{-\tilde{\varkappa}_n},$$

где $\tilde{\varkappa}_j$ – положительное число, меньшее $\varkappa_j$, $X_j(\gamma)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера в окрестности точки γ_j, $j=1,n$.

Из формулы (39) видно, что если имеет место условие $\chi_1(\gamma_1)>0$ при $-\pi/2 \le \eta_1\pi < \pi/2$ или условие $\chi_1(\gamma_1)<0$ при $\pi/2 \le \eta_1\pi < 3\pi/2$, сингулярный интеграл этой формулы стремится к $-\infty$ при $\gamma \to \gamma_1$. Следовательно, неравенства (3I) – (33), (35), (36) не могут быть выполнены.

Формула (40) показывает, что эти неравенства не будут выполнены также, если имеет место условие $\chi_n(\gamma_n)>0$ при четном N или условие $\chi_n(\gamma_n)<0$ при нечетном N.

Из формулы (I4) видно, что при четном N звено $A_{n-1}A_n$ лежит в полуплоскости $x \le x_n$, при нечетном N – в полуплоскости $x \ge x_n$.

Можно показать, что если имеет место хотя бы одно из только что указанных условий, то неравенства (3I) – (33), (35), (36) не могут быть выполнены и в случае, когда $1-\nu_1 = \eta_1 \pm 1/2$, $1-\nu_n = 1/2 - \eta_n$.

На основании формулы (I3) заключаем, что знак производной $x'(\gamma)$ в соответствующей полуокрестности сколь угодно малой длины ε точки γ_j совпадает со знаком $\chi_j(\gamma_j)$, $j=1,n$. Таким образом, приходим к следующему результату:

<u>Теорема I</u>. В случае, когда имеют место соотношения $1-\nu_1 \ge \eta_1 \pm 1/2$, $1-\nu_n \ge 1/2 - \eta_n$, рассматриваемая обратная смешанная краевая задача неразрешима, если выполняется хотя бы одно из условий

$x'(\gamma)>0$ для $\gamma_1-\varepsilon<\gamma<\gamma_1$ при $-\pi/2 \le \eta_1\pi < \pi/2$,
$x'(\gamma)<0$ для $\gamma_1-\varepsilon<\gamma<\gamma_1$ при $\pi/2 \le \eta_1\pi < 3\pi/2$,
$x'(\gamma)>0$ для $\gamma_n<\gamma<\gamma_n+\varepsilon$ при четном N,
$x'(\gamma)<0$ для $\gamma_n<\gamma<\gamma_n+\varepsilon$ при нечетном N.

Выполнение последних условий проверяется непосредственно по заданным функциям и величинам. Например, если достаточно малой длины участок $\mathcal{L}_1^2$ с концом A_1 лежит в полуплоскости $x<x_1$ и, следовательно, соответствующие значения функции (I) заданы в левой полуокрестности точки x_1, то в левой полуокрестности точки γ_1 будет $x'(\gamma)>0$.

8. Изложенные выше результаты можно сформулировать в виде следующего утверждения:

Теорема 2. Пусть выполняются неравенства $1-\nu_1 < \eta_1 \pm 1/2$, $1-\nu_n < 1/2-\eta_n$, или имеют место условия $1-\nu_1 \geq \eta_1 \pm 1/2$, $1-\nu_n \geq 1/2-\eta_n$, в интервале $\gamma_1-\varepsilon < \gamma < \gamma_1$, $x'(\gamma) < 0$ при $-\pi/2 \leq \eta_1\pi < \pi/2$ и $x'(\gamma) > 0$ при $\pi/2 \leq \eta_1\pi < 3\pi/2$, в интервале $\gamma_n < \gamma < \gamma_n + \varepsilon$, $x'(\gamma) < 0$ при четном N и $x'(\gamma) > 0$ при нечетном N. Тогда рассматриваемая обратная смешанная краевая задача в случае $\varkappa > 1$ разрешима и ее решение зависит от $\varkappa - 1$ действительных произвольных постоянных, удовлетворяющих неравенству (3I) для четного $\varkappa > 2$, неравенству (32) – для $\varkappa = 2$, неравенству (35) – для нечетного $\varkappa$. В случае $\varkappa \leq 1$ разрешима лишь при выполнении $-\varkappa + 2$ действительных условий: $-\varkappa + 1$ равенств (23) и неравенства (33) для четного $\varkappa$, $-\varkappa + 1$ равенств (27) и неравенства (36) для нечетного $\varkappa$.

Отметим, в частности, что в случае, когда $\pi/2 \leq \eta_1\pi < 3\pi/2$, функция (I) задана в интервале (x_n, x_1) и является однозначной, для нечетного $\varkappa = N \leq 1$ неравенство (36) будет выполняться автоматически.

Ясно, что найденная область $\mathcal{D}_z$ может оказаться неоднолистной. Вопрос об однолистности области $\mathcal{D}_z$ требует особого рассмотрения.

9. Рассмотрим теперь внешнюю обратную смешанную краевую задачу. Постановка задачи отличается от приведенной выше только тем, что область $\mathcal{D}_z$ теперь содержит бесконечно удаленную точку $z = \infty$, в которой функция $w(z)$ принимает значение $w(\infty) = w_0$, причем точка w_0 является внутренней для области $\mathcal{D}_w$. Примем, что в окрестности точки $z = \infty$ справедливо разложение

$$w(z) = w_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ \ldots\ , \quad c_{-1} \neq 0 . \tag{4I}$$

Будем считать, что значение w_0 задано.

Функцию $w = \omega(\zeta)$, отображающую конформно круг $|\zeta| < 1$ на область $\mathcal{D}_w$, определим так, чтобы $\omega(0) = w_0$ и, как и выше, точке A_0 кривой $\mathcal{L}_w^2$ отвечала точка $\zeta = 1$.

С учетом (4I) на основании (2) приходим к выводу, что точка $\zeta = 0$ является простым полюсом функции $z(\zeta)$ и полюсом второго порядка ее производной $z'(\zeta)$, причем вычет этой производной в точке $\zeta = 0$ должен обращаться в нуль.

Задача решается так же, как и выше, в полученные там формулы нужно внести очевидные изменения.

Обозначим $H_1(\zeta)=H_0(\zeta)(\zeta-1)$, где $H_0(\zeta)$ – функция, определяемая формулой (I9).

В случае, когда $æ$ – четное число, на основании краевого условия (20), учитывая, что функция $z'(\zeta)/\zeta^{æ/2-1}$ в точке $\zeta = 0$ теперь имеет полюс порядка $æ/2+1$ и ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки $\zeta=0$ не должно иметь слагаемого, содержащего $\zeta^{-æ/2}$, при $æ\geqslant 2$ придем к формуле, аналогичной (22),

$$e^{-i(\pi/2+\psi)} H_0(\zeta)iz'(\zeta)/\zeta^{æ/2-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})\,\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\,d\gamma +$$

$$+ib_0+\sum_{k=1}^{æ/2+1}\left[(a_k+ib_k)\zeta^{k}-(a_k-ib_k)\zeta^{-k}\right] , \qquad (42)$$

в которой постоянные a_k , b_k для $k=æ/2$, $æ/2+1$ связаны соотношением

$$H_0(0)(a_{æ/2}-ib_{æ/2})-H_0'(0)(a_{æ/2+1}-ib_{æ/2+1})=0 \ . \qquad (43)$$

Отсюда видно, что постоянные $a_{æ/2}$, $b_{æ/2}$ (в силу того, что $H_0(0)\neq 0$) выражаются через $a_{æ/2+1}$, $b_{æ/2+1}$; следовательно, производная $z'(\zeta)$, определяемая формулой (42), зависит от $æ+1$ действительных произвольных постоянных.

При $æ=0$ мы должны принять, что постоянные, входящие в формулу (42), удовлетворяют соотношению

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})d\gamma+ib_0\right) H_0(0)+(a_1-ib_1)\, H_0'(0)=0 \ . \qquad (44)$$

При $H_0'(0)\neq 0$ из соотношения постоянные a_1 , b_1 выражаются через b_0 , и производная $z'(\zeta)$, определяемая из (42), будет зависеть от одной произвольной постоянной b_0 . При $H_0'(0)=0$ мы должны положить $b_0=0$ и принять, что выполняется условие $\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})d\gamma=0$, которое представляет собой условие разрешимости задачи. Следовательно, $z'(\zeta)$ может быть найдена лишь при выполнении одного условия разрешимости и в этом случае зависит от двух произвольных постоянных a_1, b_1.

При $\varkappa=-2$ производная $z'(\zeta)$ определяется формулой, получаемой из (42) отбрасыванием в правой части выражений в квадратных скобках, если имеет место равенство

$$H_0(0)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})e^{-i\gamma}d\gamma - H_0'(0)\left(ib_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})d\gamma\right)=0 . \quad (45)$$

Отсюда получаем два действительных соотношения, одно из которых в случае $H_0'(0)\neq 0$ служит для определения b_0, другое является условием разрешимости задачи. Следовательно, здесь в случае $H_0'(0)\neq 0$ производная $z'(\zeta)$ может быть найдена лишь при выполнении одного условия разрешимости, в случае $H_0'(0)=0$ производная $z'(\zeta)$ определяется формулой, зависящей от одной произвольной постоянной b_0, если выполняется условие $\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})e^{-i\gamma}d\gamma=0$, равносильное двум действительным условиям разрешимости задачи.

При $\varkappa<-2$ производная $z'(\zeta)$ находится по формуле, получаемой из (42) отбрасыванием в правой части выражений в квадратных скобках и слагаемого ib_0, если выполняются условия

$$\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})d\gamma=0 , \quad \int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})e^{-ik\gamma}d\gamma=0 , \quad k=1,2,\ldots,-\varkappa/2-2 ,$$

$$H_0(0)\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})e^{i\varkappa/2\gamma}d\gamma - H_0'(0)\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})e^{i(\varkappa/2+1)\gamma}d\gamma=0 .$$

Поэтому $z'(\zeta)$ может быть найдена лишь при выполнении $-\varkappa-1$ действительных условий разрешимости.

В случае, когда $\varkappa$ – нечетное число, на основании краевого условия (24) при $\varkappa\geq 1$ придем к формуле, аналогичной (26),

$$e^{-i(\pi+\psi)}H_1(\zeta)iz'(\zeta)/\zeta^{(\varkappa-1)/2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\,d\gamma+ \quad (46)$$

$$+i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,ctg\frac{\gamma}{2}d\gamma+\sum_{k=1}^{(\varkappa+3)/2}[a_k(\zeta^k-\zeta^{-k})+ib_k(\zeta^k+\zeta^{-k}-2)],$$

причем здесь постоянные a_k, b_k для $k=(\varkappa+1)/2$, $k=(\varkappa+3)/2$ должны удовлетворять условию

$$H_1(0)(a_{(\varkappa+1)/2}-ib_{(\varkappa+1)/2})-H_1'(0)(a_{(\varkappa+3)/2}-ib_{(\varkappa+3)/2})=0. \qquad (47)$$

Поскольку в силу последнего соотношения постоянные $a_{(\varkappa+1)/2}$, $b_{(\varkappa+1)/2}$ выражаются через $a_{(\varkappa+3)/2}$, $b_{(\varkappa+3)/2}$, то производная $z'(\zeta)$, определяемая по формуле (46), зависит от $\varkappa+1$ действительных произвольных постоянных.

При $\varkappa=-1$ постоянные, входящие в формулу (46), мы должны подчинить условию

$$H_1(0)\ \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,d\gamma+i\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,ctg\frac{\gamma}{2}d\gamma\right)- \qquad (48)$$

$$-H_1(0)\,2b_1i+H_1'(0)(a_1-ib_1)=0,$$

из которого в случае $H_1'(0)\neq 0$ и $1+2Re\dfrac{H_1(0)}{H_1'(0)}\neq 0$ находятся постоянные a_1, b_1. При этом производная $z'(\zeta)$ определяется единственным образом. В случае $H_1'(0)\neq 0$ и $1+2Re\dfrac{H_1(0)}{H_1'(0)}=0$ в силу (48) должно выполняться условие

$$Jm\,\frac{H_1(0)}{H_1'(0)}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,d\gamma+Re\,\frac{H_1(0)}{H_1'(0)}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,ctg\frac{\gamma}{2}d\gamma=0,$$

представляющее собой условие разрешимости задачи, и имеет место соотношение

$$Re\,\frac{H_1(0)}{H_1'(0)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,d\gamma-Jm\,\frac{H_1(0)}{H_1'(0)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,ctg\frac{\gamma}{2}d\gamma+$$

$$+a_1+2b_1\,Jm\,\frac{H_1(0)}{H_1'(0)}=0,$$

из которого находится выражение для a_1. При этом производная $z'(\zeta)$ определяется формулой, содержащей одну произвольную постоянную b_1. В случае $H_1'(0)=0$ производная $z'(\zeta)$ может быть

найдена лишь при выполнении одного действительного условия
$\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,d\gamma=0$, и при этом $z'(\zeta)$ определяется форму- лой, зависящей от одной произвольной постоянной a_1 , в которой

$$b_1=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,d\gamma .$$

При $\varkappa\le -3$ производная $z'(\zeta)$ определяется формулой, получаемой из (46) отбрасыванием в правой части выражений в квадратных скобках, если имеет место равенство

$$2H_1(0)\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|e^{-i\gamma}d\gamma-H_1'(0)\Big(\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,d\gamma+$$

$$+i\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,d\gamma\Big)=0$$

в случае $\varkappa=-3$, и если выполняются условия

$$\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\,d\gamma=0 \qquad \int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,d\gamma=0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|e^{-ik\gamma}d\gamma=0\ ,\quad k=1,2,\ldots,(-\varkappa-5)/2\ ,$$

$$H_1(0)\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|e^{i\gamma\frac{\varkappa+1}{2}}d\gamma-H_1'(0)\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\gamma})|e^{i\gamma}-1|e^{i\gamma(\varkappa+3)/2}d\gamma=0$$

в случае $\varkappa\le -5$. Следовательно, $z'(\zeta)$ может быть найдена лишь при выполнении $-\varkappa-1$ действительных условий разрешимости.

Ясно, что найденная производная должна, как и в случае внутренней задачи, удовлетворять условию (29), то есть, при четном $\varkappa$ должны выполняться неравенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma-b_0-2\sum_{k=1}^{\varkappa/2+1}(a_k\sin k\gamma+b_k\cos k\gamma)>0\ , \qquad (49)$$

$$\gamma_1<\gamma<\gamma_n\ , \text{ для } \varkappa\ge 0\ ,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\gamma}{2}\,d\sigma-b_0>0\ ,$$

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_n, \text{ для } \varkappa = -2,$$

$$\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\gamma}{2} > 0,$$

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_n, \text{ для } \varkappa < -2,$$

а при нечетном $\varkappa$ должны иметь место соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})|e^{i\sigma}-1| \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\gamma}{2} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})|e^{i\sigma}-1| \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} d\sigma - \tag{52}$$

$$-2\sum_{k=1}^{(\varkappa+3)/2} \left[a_k \sin k\gamma + b_k(\cos k\gamma - 1)\right] > 0,$$

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_n, \text{ для } \varkappa \geqslant -1,$$

$$\int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})|e^{i\sigma}-1| \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\gamma}{2} d\sigma - \int_0^{2\pi} c_1(e^{i\sigma})|e^{i\sigma}-1| \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2} d\sigma > 0,$$

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_n, \text{ для } \varkappa \leqslant -3.$$

Произвольные постоянные, входящие в эти неравенства, связаны равенствами (43), (44), (45) соответственно для $\varkappa \geqslant 2, \varkappa = 0, \varkappa = -2$ в случае четного $\varkappa$ и равенствами (47), (48) соответственно при $\varkappa \geqslant 1$, $\varkappa = -1$ в случае нечетного $\varkappa$.

Поступая аналогично предыдущему, в частности, легко проверить, что в случае, когда имеют место условия теоремы 2, выполнения неравенства (49) при $\varkappa \geqslant 2$ можно добиться подбором постоянной b_0, выполнения неравенства (52) при $\varkappa \geqslant 3$ – подбором постоянной b_1.

Нетрудно проверить, что в случае рассматриваемой здесь внешней задачи также справедлива теорема I.

Для простоты лишь часть полученных выше результатов сформулируем в следующем виде:

<u>Теорема 3</u>. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда рассматриваемая внешняя обратная смешанная краевая задача в случае $\varkappa \geqslant 2$ разрешима и ее решение зависит от $\varkappa + 1$ произвольных действительных постоянных, удовлетворяющих неравенству (49) для четного $\varkappa$ и неравенству (52) для нечетного $\varkappa$.

Нетрудно сформулировать аналогичным образом результаты, относящиеся к случаю $\varkappa < 2$, но на этом здесь не будем останавливаться.

Как и в случае внутренней задачи, вопрос об однолистности области $\mathcal{D}_z$ требует особого рассмотрения.

10. Обратимся вновь к внутренней задаче, но в отличие от предыдущего рассмотрим ее в постановке В.Н.Монахова, когда форма ломаной $\mathcal{L}_z^1$ задана полностью, а положения точек A_2, A_3, ..., A_{n-1} на $\mathcal{L}_w^1$ - образов вершин ломаной $\mathcal{L}_z^1$ - подлежат определению.

Задача решается так же, как и выше, только теперь величины γ_j, $j=\overline{2,n-1}$, неизвестны и для их определения, помня, что длины ℓ_j звеньев $A_j A_{j+1}$, $j=\overline{1,n-1}$, заданы, с учетом (28) получим систему уравнений

$$\int_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} |z'(e^{i\gamma})|\, d\gamma = \ell_j\,, \qquad j=\overline{1,n-2}\,. \tag{50}$$

При $\eta_n \pi \neq \frac{\pi}{2}$ в случае разрешимой задачи, когда имеют место соотношения (50), условие

$$\int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} |z'(e^{i\gamma})|\, d\gamma = \ell_n \tag{51}$$

будет выполняться автоматически.

При $\eta_n \pi = \pi/2$ равенство (51) представляет собой дополнительное условие, которому должна удовлетворять искомая производная $z'(\zeta)$ (это обстоятельство В.Н.Монаховым не отмечено [3], [4], видимо, в связи с тем, что случай $\eta_n \pi = \pi/2$ он не исследовал).

При некоторых условиях В.Н.Монаховым [4] (с.115 - 123) доказана однозначная разрешимость системы (50).

В случае однозначной разрешимости системы (50) при $\eta_n \pi \neq \pi/2$ картина разрешимости рассматриваемой задачи будет аналогична изложенной выше; в частности, если производная $z'(\zeta)$ содержит произвольные постоянные, то величины γ_j, $j=\overline{1,n-2}$, определяемые из системы (50), будут зависеть от этих постоянных.

Для сравнения отметим, что В.Н.Монаховым [4] (с.124) доказана однозначная разрешимость рассматриваемой в настоящем пункте внутренней задачи. Этот результат является следствием того, что В.Н.Монахов, по-существу, исследовал лишь случай, когда (в наших обозначениях) $\pi/2 < \eta_1 \pi < 3\pi/2$, $\pi/2 < \eta_{n-1}\pi < 3\pi/2$, т.е. $N = I$, $\varkappa = 1$, и производная $z'(\zeta)$ определяется единственным образом.

Указанный результат нуждается в уточнении, так как при его получении не учтено, что для разрешимости задачи необходимо выполнение условия (36) (или аналогичного ему), обеспечивающего совпадение заданной ломаной $\mathcal{L}_z^1$ с образом дуги $\mathcal{L}_\zeta^1$ при отображении найденной функцией $z(\zeta)$, и упомянутое условие выполняется автоматически лишь в отдельных случаях (например, в случае, когда функция (I) является однозначной и задана в интервале (x_n, x_1), $\pi/2 \leq \eta_1 \pi \leq 3\pi/2$, $\varkappa$ - нечетное число).

Из геометрических соображений ясно, что рассматриваемая здесь задача может оказаться неразрешимой и в тех,случаях,когда соответствующая ей задача Гильберта разрешима.

Литература

I. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

2. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973.- 736 с.

3. М о н а х о в В. Н. Об обратной смешанной краевой задаче // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. - М.: ГИФМЛ, 196I. - С.375 - 380.

4. М о н а х о в В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. - Новосибирск: Наука, 1977. - 424 с.

5. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 5II с.

6. С а л и м о в Р. Б. К вычислению сингулярных интегралов с ядром Гильберта // Изв. вузов. Матем. - 1970. - № I2. - С.93 - 96.

7. С а л и м о в Р. Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости. - Казань: Изд-во Казанск.выс.ком.-инж. училища, 1970. - 364 с.

8. С а л и м о в Р. Б. К вопросу о поведении производной

функции, реализующей конформное отображение, вблизи угловой точки границы области // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 2.– С.100 – 110.

9. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Тр. семинара по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск.ун-та. – 1979.– Вып. 16. – С.149 – 162.

10. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казанск.ун-та, 1965. – 333 с.

Доложено на семинаре 2.02.89 г.

М.Л.Славутин

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СО СПИРАЛЕОБРАЗНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В настоящей статье рассматривается обратная краевая задача по параметру s для случая бесконечного искомого контура. Исследуется связь между точечными особенностями элементарного характера заданных в краевых условиях задачи функций и особенностями получаемого контура.

Работа развивает и уточняет результаты, полученные Ф.Д.Гаховым и И.М.Мельником в [1].

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $E=\{\zeta:\zeta=re^{i\theta},|r|<1,0\le\theta\le 2\pi\}$, $\partial E=\{\tau:\tau=e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi\}$, $\tau_0=e^{i\theta_0}$, $0<\theta_0<2\pi$, – фиксированное. Для точек круга E будем считать $\zeta-\tau_0=|\zeta-\tau_0|\exp[i\arg(\zeta-\tau_0)]$, понимая под $\arg(\zeta-\tau_0)$ непрерывную однозначную в $\bar{E}$ (кроме точки τ_0) ветвь, которая на окружности ∂E принимает значения

$$\arg(\tau-\tau_0)=\begin{cases}\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\theta+\theta_0}{2}, & 0\le\theta<\theta_0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta+\theta_0}{2}, & \theta_0<\theta\le 2\pi.\end{cases}$$

Далее, пусть