Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, Абелевы группы с мономорфизмами, инвариантными относительно эпиморфизмов, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 12, 86–93

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 178.205.19.235
7 июня 2024 г., 16:18:22

Известия вузов. Математика
2018, №12, с. 86–93

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Р. ЧЕХЛОВ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С МОНОМОРФИЗМАМИ, ИНВАРИАНТНЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЭПИМОРФИЗМОВ

Аннотация. Если для любых инъективного эндоморфизма α и сюръективного эндоморфизма β абелевой группы найдется такой ее эндоморфизм γ, что $\beta\alpha = \alpha\gamma$ (соответственно $\alpha\beta = \gamma\alpha$), то такое свойство группы названо *R-свойством* (соответственно *L-свойством*). Показано, что если редуцированная группа без кручения обладает R- или L-свойством, то кольцо эндоморфизмов группы нормально. Описаны делимые группы, а также прямые суммы циклических групп с R- или L-свойством.

Ключевые слова: инъективный эндоморфизм, сюръективный эндоморфизм, нормальное кольцо эндоморфизмов.

УДК: 512.541

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Напомним, что подгруппа H группы G называется *вполне инвариантной*, если $\varphi(H) \subseteq H$ для всякого φ из кольца эндоморфизмов $E(G)$ группы G. Если $f \in E(G)$, то через $f|A$ обозначается ограничение f на $\varnothing \neq A \subseteq G$, а через $\langle A \rangle$ — подгруппа, порожденная A, $Z(n)$ — циклическая группа порядка n, $Z(p^\infty)$ — квациклическая p-группа, $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$, $o(g)$ — порядок элемента g, 1_G — тождественный эндоморфизм группы G, G_p — p-компонента группы G, где p — простое число, $h(a)$ — высота элемента a p-группы, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Кольцо с центральными идемпотентами называется *нормальным*. Хорошо известно, что нормальность кольца эндоморфизмов группы эквивалентна вполне инвариантности ее прямых слагаемых. Группы, а также модули с нормальными кольцами эндоморфизмов изучались в [1], [2], в [3] исследовались обобщения нормальных колец.

Будем говорить, что группа A обладает *R-свойством* (соответственно *L-свойством*), если для любых ее инъективного эндоморфизма α и сюръективного эндоморфизма β найдется такой $\gamma \in E(A)$, что $\beta\alpha = \alpha\gamma$ (соответственно $\alpha\beta = \gamma\alpha$). Если γ — сюръективный эндоморфизм, то равенство $\beta\alpha = \alpha\gamma$ (соответственно $\alpha\beta = \gamma\alpha$) означает правую инвариантность (соответственно левую инвариантность) α относительно сюръективных эндоморфизмов β, γ. Группы с инвариантными инъективными эндоморфизмами (т. е. в вышеприведенных равенствах все эндоморфизмы α, β, γ инъективные) изучались в [4], [5]; в [6] рассматривались группы с перестановочными коммутаторами эндоморфизмов; в [7] изучались действия некоммутативных групп на абелевых группах; а [8], [9] — недавние статьи о группах с достаточным числом эндоморфизмов.

Ясно, что если в группе каждый ее инъективный эндоморфизм является автоморфизмом, то ее инъективные эндоморфизмы инвариантны относительно сюръективных эндоморфизмов как слева, так и справа.

Поступила 17.11.2017

Для краткости иногда инъективные эндоморфизмы называются *мономорфизмами*, а сюръективные эндоморфизмы — *эпиморфизмами.*

Если $A = B \oplus G$ и $\pi : A \to B$, $\theta : A \to G$ — проекции, то напомним ([11], § 106), что можно произвести отождествление $E(B) = \pi E(A)\pi$. При этом отождествлении если $f \in E(A)$, то $\pi f \pi$ — эндоморфизм группы B, а эндоморфизм f можно представить в виде матрицы $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где $\alpha = \pi f \pi$, $\beta = \pi f \theta$, $\gamma = \theta f \pi$ и $\delta = \theta f \theta$, что соответствует равенству

$$f = (\pi + \theta) f (\pi + \theta) = \pi f \pi + \pi f \theta + \theta f \pi + \theta f \theta.$$

Лемма 1. 1) *Если группа обладает R-свойством* (*соответственно L-свойством*), *то и всякое прямое слагаемое группы также обладает этим свойством.*

2) *Если инъективные эндоморфизмы группы инвариантны справа* (*соответственно слева*) *относительно сюръективных эндоморфизмов, то и всякое прямое слагаемое группы также обладает этим свойством.*

Доказательство. Действительно, пусть $A = B \oplus C$ и $\alpha, \beta \in E(B)$, где α — мономорфизм, а β — эпиморфизм группы B. Продолжим их до мономорфизма $\overline{\alpha}$ и эпиморфизма $\overline{\beta}$ группы A, полагая $\overline{\alpha} \mid C = 1_C$, $\overline{\beta} \mid C = 1_C$.

Если A обладает R-свойством и $\overline{\beta}\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\gamma$ для некоторого $\gamma \in E(A)$, то $\gamma \mid C = 1_C$. Поэтому $\gamma \mid B \in E(B)$ и $\beta\alpha = \alpha(\gamma \mid B)$. Несложно проверить, что если γ — эпиморфизм, то и $\gamma \mid B$ — эпиморфизм.

Пусть теперь A обладает L-свойством и $\pi : A \to B$ — проекция. Если $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \gamma\overline{\alpha}$ для некоторого $\gamma \in E(A)$, то $\pi\overline{\alpha}\overline{\beta} = (\pi\gamma)\overline{\alpha}$. Отсюда следует справедливость равенства $\alpha\beta = (\pi\gamma\pi)\alpha$, где $\pi\gamma\pi \in E(B)$. Из равенства $\overline{\beta}\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\gamma$, где $\overline{\alpha} \mid C = 1_C$ и $\overline{\beta} \mid C = 1_C$, следует $\gamma \mid C = 1_C$. Поэтому если γ — эпиморфизм, то и $\pi\gamma\pi$ — эпиморфизм. Таким образом, п. 2) леммы также доказан. □

В дальнейшем, чтобы не выделять отдельным утверждением случай инвариантности мономорфизмов относительно эпиморфизмов, будем лишь кратко отмечать, что соответствующий корректирующий эндоморфизм является эпиморфизмом. Если группа обладает свойством взаимной перестановочности инъективных и сюръективных эндоморфизмов, то так же, как это сделано в лемме 1, несложно проверить, что и прямые слагаемые группы также обладают этим свойством. Этот факт используется в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть G — группа, у которой инъективные и сюръективные эндоморфизмы взаимно перестановочны. Тогда ее кольцо эндоморфизмов нормально.*

Доказательство. Нужно показать, что если $G = A \oplus B$, где $A, B \neq 0$, то слагаемые A и B вполне инвариантны. Доказательство разобьем на следующие этапы.

1) Допустим, что нашелся $0 \neq \phi \in \operatorname{Hom}(A, B)$. Зададим автоморфизмы α, β группы G следующим образом:

$$\alpha(a) = a + \phi(a), \quad \alpha(b) = b, \quad \beta(a) = a, \quad \beta(b) = -b, \quad \text{где} \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Имеем $\alpha\beta(a) = a + \phi(a)$ и $\beta\alpha(a) = a - \phi(a)$. Поэтому если $\alpha\beta = \beta\alpha$, то $2\phi(a) = 0$ для всякого $a \in A$. Следовательно, $\phi(A) \subseteq B_2$ и, значит, $B_2 \neq 0$.

Если $A_2 = 0$, то отображение $\alpha(a) = 2a$, $\alpha(b) = b$, где $a \in A$, $b \in B$, является мономорфизмом. Тогда для автоморфизма $\beta(a) = a + \phi(a)$, $\beta(b) = b$ имеем

$$\alpha\beta(a) = 2a + \phi(a) \neq \beta\alpha(a) = 2a + 2\phi(a).$$

Таким образом, если $\mathrm{Hom}(A,B) \neq 0$, то $B_2 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$. Из доказанного также следует, что если A и B содержат прямые слагаемые, изоморфные $Z(2^x)$ и $Z(2^y)$ соответственно, где $x, y \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то по крайней мере одна из величин x или y является константой, равной единице, т. е. хотя бы одна из подгрупп A_2 или B_2 является элементарной. Естественно считать элементарной подгруппу A_2, так как в случае делимости подгруппы A_2 (а она в этом случае выделялась бы прямым слагаемым в A) условие $\mathrm{Hom}(A_2, B) \neq 0$ исключало бы элементарность подгруппы B_2. Поэтому A_2 — элементарная группа, т. е. прямая сумма групп, изоморфных $Z(2)$.

2) Группа B_2 является редуцированной. Поэтому B содержит прямое слагаемое, изоморфное $Z(2^n)$, где n — некоторое натуральное число. Переходя к прямым слагаемым, считаем, что $A = \langle a \rangle \cong Z(2)$, а $B = \langle b \rangle \cong Z(2^n)$. Рассмотрим автоморфизмы

$$\alpha(a) = a, \quad \alpha(b) = a + b \quad \text{и} \quad \beta(a) = a + 2^{n-1}b, \quad \beta(b) = b.$$

Имеем $\alpha\beta(b) = a + b \neq \beta\alpha(b) = a + 2^{n-1}b + b$. Противоречие.

3) Пусть, наконец, B_2 — делимая группа. Переходя к прямым слагаемым, считаем, что $A \cong Z(2)$, а $B \cong Z(2^\infty)$. Слагаемое B вполне инвариантно, поэтому эндоморфизмы α, β группы G можно представить в виде следующих матриц:

$$\alpha = \begin{pmatrix} g & 0 \\ f & h \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & w \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad g, u \in E(A), \quad f, v \in \mathrm{Hom}(A,B), \qquad \text{а} \quad h, w \in E(B).$$

Пусть α — мономорфизм, а β — эпиморфизм. Так как $\mathrm{Hom}(Z(2), Z(2^\infty)) \neq 0$, то α можно выбрать так, чтобы $f \neq 0$.

Кольца $E(A)$ и $E(B)$ коммутативны, поэтому равенство $\alpha\beta = \beta\alpha$ равносильно равенству $fu + hv = vg + wf$. Выберем w так, чтобы $B[2] \subseteq \ker w$ и $v = 0$. Поскольку $u = 1_A$ (это следует из строения группы A и из того, что β — эпиморфизм), то равенство $\alpha\beta = \beta\alpha$ приводит к противоречию: $0 \neq f = wf = 0$.

Таким образом, $\mathrm{Hom}(A,B) = 0$ и аналогично $\mathrm{Hom}(B,A) = 0$. Это означает, что кольцо $E(G)$ нормально. □

Следствие 1. В периодической группе инъективные и сюръективные эндоморфизмы взаимно перестановочны тогда и только тогда, когда ее кольцо эндоморфизмов коммутативно, т. е. каждая p-компонента группы является коциклической.

Итак, взаимная перестановочность инъективных и сюръективных эндоморфизмов довольно сильное ограничение на группы. Кроме случая периодических групп, это свойство влечет коммутативность кольца эндоморфизмов [1] в случае делимых групп, сепарабельных групп без кручения, копериодических групп и др.

Предложение 1. *Пусть каждое прямое слагаемое A_i в прямой сумме $\bigoplus_{i\in I} A_i$ вполне инвариантно, а A — такая вполне инвариантная подгруппа в $\prod_{i\in I} A_i$, что $\bigoplus_{i\in I} A_i \subseteq A$. Группа A обладает R-свойством (L-свойством) тогда и только тогда, когда R-свойством (L-свойством) обладает каждая группа A_i.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1. *Достаточность* вытекает из того, что $\bigoplus_{i\in I} A_i$ и $\prod_{i\in I} A_i$ обладают соответствующим свойством, а вполне инвариантность A в $\prod_{i\in I} A_i$ гарантирует выполнение этого свойства и в A. □

Предложение 2. *Для p-группы G, являющейся прямой суммой циклических групп, эквивалентны следующие условия*:

1) *G обладает R-свойством,*

2) *инъективные эндоморфизмы группы G инвариантны справа относительно сюръективных эндоморфизмов,*

3) *группа G конечная.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Если G бесконечна, то можно так выбрать ее сюръективный эндоморфизм β и инъективный эндоморфизм α, что $\beta\alpha(G) \nsubseteq \alpha(G)$. Поэтому $\beta\alpha \neq \alpha\gamma$ для всякого $\gamma \in E(G)$.

3) $\Rightarrow$ 2), поскольку в конечной группе всякий инъективный эндоморфизм является автоморфизмом.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) справедлива всегда. □

Лемма 2. *Если A — такая группа, что $\alpha(A)$ — прямое слагаемое в A для всякого ее инъективного эндоморфизма, то A обладает L-свойством.*

Доказательство. Действительно, в этом случае существует $\delta \in E(A)$ со свойством $\delta\alpha = 1$. Отсюда $\alpha\beta = (\alpha\beta\delta)\alpha$ при всех $\beta \in E(A)$. □

Следствие 2. 1) Всякая делимая группа, а также прямая сумма циклических p-групп одного и того же порядка обладают L-свойством.

2) Пусть в предложении 1 I есть некоторое множество простых чисел Π, а каждая A_p, где $p \in \Pi$, есть делимая p-группа или прямая сумма циклических групп того же порядка p^{k_p}. Тогда группа A из предложения 1 обладает L-свойством.

Доказательство. 1) Пусть α — инъективный эндоморфизм группы A. Тогда если A делима, то $\alpha(A)$ как ее делимая подгруппа есть прямое слагаемое группы A. Если же A — прямая сумма циклических групп одного порядка p^k, то ее подгруппа $\alpha(A)$ также является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^k, поскольку $\alpha(A) \cong A$. А так как $\alpha(A) \cap p^kA \subseteq p^kA = 0$, то согласно предложению 27.1 из [11] $\alpha(A)$ — прямое слагаемое в A.

П. 2) следует из п. 1). □

Лемма 3. *Пусть группа A имеет подгруппу вида $H = \langle b\rangle \oplus \langle g\rangle \oplus C$, где $o(b) \leq o(g)$, а C — бесконечная прямая сумма циклических групп, каждый образующий которой имеет порядок $> o(g)$, причем инъективные и сюръективные эндоморфизмы подгруппы H продолжаются соответственно до инъективных и сюръективных эндоморфизмов группы A. Тогда A не обладает L-свойством.*

Доказательство. Действительно, так как группа C бесконечна, то можно построить такие инъективный эндоморфизм α и сюръективный эндоморфизм β группы H, что $\alpha(b) = b$, $\alpha(g) = p^kx$, где $x \in C$, $k \geq 1$, и $\beta(g) = b + g$. Тогда $\alpha\beta(g) = b + p^kx \neq \gamma\alpha(g) = \gamma(p^kx)$ для любого $\gamma \in E(A)$. □

Из леммы 3 следует, что если A — p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп и обладающая L-свойством, то либо A — конечная группа, либо имеет вид

$$A = B \oplus G \oplus F, \tag{$*$}$$

где $B = \langle b\rangle$ — циклическая группа, G — бесконечная прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^r, $F = 0$ или $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \langle x_i\rangle$ — такая конечная группа, что $p^r < o(x_i)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$, и если $B \neq 0$, то $p^r > o(b)$.

Теорема 2. *Всякая p-группа A, имеющая вид $(*)$, обладает L-свойством.*

Доказательство. Пусть α — инъективный, а β — сюръективный эндоморфизмы группы A. Так как высоты элементов из цоколя $F[p]$ группы F больше высот элементов из $B \oplus G$, то $\alpha(F[p]) \cap (B \oplus G) = 0$. А поскольку $\alpha(F) \cong F$, то $\alpha(F[p]) = (\alpha(F))[p]$ и, значит, $\alpha(F) \cap (B \oplus G) = 0$ в силу существенности подгруппы $(\alpha(F))[p]$ в $\alpha(F)$. Следовательно, если θ — проекция группы A на F, то $(\theta\alpha) \mid F$ — мономорфизм конечной группы F, поэтому $\theta\alpha(F) = F$. Таким образом, $(B \oplus G) \oplus \alpha(F) = A$.

Поскольку α — мономорфизм, то $\alpha(B) \cap \alpha(G) = 0$ и $\alpha(B \oplus G) \cap \alpha(F) = 0$. Далее, прямое слагаемое $\alpha(F)$ группы A является абсолютным ([11], § 9, упр. 8), поэтому существует такое разложение $A = C \oplus \alpha(F)$, что $\alpha(B \oplus G) \subseteq C$. Здесь $C \cong B \oplus G$ и $\alpha(G) \cong G$. Следовательно, $\alpha(G)$ является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^r и $\alpha(G) \cap p^r C \subseteq p^r C = 0$, значит, как и в следствии 2, $\alpha(G)$ — прямое слагаемое в C, $C = \alpha(G) \oplus K$. Если $B = 0$, то $\alpha(A)$ — прямое слагаемое в A, по лемме 2 A обладает L-свойством. Поэтому считаем далее, что $B \neq 0$. В K найдется прямое слагаемое V, изоморфное B, имеем $C = V \oplus (\alpha(G) \oplus W)$, где $V \cong B$, а $\alpha(G) \oplus W \cong G$. Итак,

$$A = V \oplus (\alpha(G) \oplus W) \oplus \alpha(F).$$

Далее $\alpha(b) = x + y + z$, где $x \in V$, $y \in \alpha(G)$, а $z \in W$. Возможны два случая.

1) Если $o(x) = o(b)$, то $C = \langle \alpha(b) \rangle \oplus (\alpha(G) \oplus W)$. Поскольку $\langle \alpha(b) \rangle \oplus \alpha(G) \oplus \alpha(F) \cong A$, то существует $\delta \in E(A)$ со свойством $\delta\alpha = 1_A$. Отсюда $\alpha\beta = (\alpha\beta\delta)\alpha$.

2) Если $o(x) < o(b)$, то из $\alpha(B) \cap \alpha(G) = 0$ следует $o(z) = o(b)$.

Пусть $\beta(b) = sb + g + h$, где s — целое число, $0 \leq s \leq o(b)$, $g \in G$ и $h \in F$. Имеем

$$\alpha\beta(b) = sx + \alpha(g) + sz + \alpha(h), \quad \text{где} \;\; sx \in V, \;\; \alpha(g) \in \alpha(G), \;\; sz \in W \;\; \text{и} \;\; \alpha(h) \in \alpha(F).$$

Здесь $o(g), o(h) \leq o(b)$. Поэтому $o(\alpha(g)), o(\alpha(h)) \leq o(b) = o(z)$. Элемент z можно вложить в циклическое прямое слагаемое H группы W. Действительно, если $o(b) = p^m$ и $p^{r-m}z' = z$, то можно взять $H = \langle z' \rangle$. Определим такой гомоморфизм

$$\delta : V \oplus H \to A, \;\; \text{что} \;\; \delta(x) = sx, \;\; \delta(z) = \alpha(g) + sz + \alpha(h).$$

Это можно сделать согласно лемме 65.5 из [11], так как из строения групп B, G и F вытекает справедливость неравенств $o(\alpha(g))$, $o(sz)$, $o(\alpha(h)) \leq o(z) = p^m$ и $h(p^i(\alpha(g)))$, $h(p^i(sz))$, $h(p^i(\alpha(h))) \geq h(p^i(z))$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Продолжим δ до эндоморфизма группы A, заставив его действовать как нулевой гомоморфизм на дополнительном к $V \oplus H$ прямом слагаемом. Далее $\alpha(G) \oplus \alpha(F) \cong G \oplus F$, поэтому найдется такой $\sigma \in E(A)$, что

$$\sigma(V \oplus W) = 0 \;\; \text{и} \;\; (\sigma\alpha) \mid (G \oplus F) = 1_{G \oplus F}.$$

Тогда $(\delta + \alpha\beta\sigma)\alpha = \alpha\beta$. Действительно, $(\delta + \alpha\beta\sigma)\alpha(b) = (\delta + \alpha\beta\sigma)(x + z) = sx + \alpha(g) + sz + \alpha(h) = \alpha\beta(b)$, так как $\sigma(x) = \sigma(z) = 0$, а $(\delta + \alpha\beta\sigma)\alpha \mid (G \oplus F) = \alpha\beta \mid (G \oplus F)$, так как $\delta\alpha(G \oplus F) = 0$. □

Предложение 3. *Для делимой группы D эквивалентны следующие условия*:

1) *она обладает R-свойством,*
2) *все ее инъективные эндоморфизмы являются автоморфизмами,*
3) *ее часть без кручения, а также каждая p-компонента имеют конечный ранг.*

Доказательство. Импликация 1) ⇒ 3) доказывается аналогично предложению 2. Эквивалентность 2) и 3) очевидна, а импликация 2) ⇒ 1) справедлива всегда. □

Теорема 3. *Пусть $A = D \oplus G$, где $D \neq 0$ — делимая часть группы A, причем у группы G нет ненулевых делимых гомоморфных образов, содержащихся в группе D.*

1) *Если у группы D часть без кручения, а также каждая p-компонента имеют конечный ранг, то группа A обладает L-свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладает группа G.*

2) *Группа A обладает R-свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы D и G.*

Доказательство. Пусть $A = D \oplus G$, где $\pi : A \to D$ и $\theta : A \to G$ — проекции, $f \in E(A)$ — мономорфизм, а $\varphi \in E(A)$ — эпиморфизм. Необходимость как 1), так и 2) следует из леммы 1. Поэтому обратимся к доказательству достаточности.

1) Ясно, что $(\theta\varphi) \mid G = \theta\varphi\theta$ — эпиморфизм группы G. Далее $\varphi \mid D$ — эпиморфизм группы D. Действительно, если $\varphi(D) \neq D$, то $D = \varphi(D) \oplus B$ для некоторой подгруппы $0 \neq B \leq D$. Имеем $\pi\varphi(A) = \varphi(D) \oplus B$. Поэтому, если ϑ — проекция группы D на B, то, поскольку $\vartheta\pi\varphi(D) = 0$, имеем $\vartheta\pi\varphi(A) = \vartheta\pi\varphi(G) = B$, что противоречит условию.

Допустим, что $\theta f(g) = 0$ для $0 \neq g \in G$. По условию f является автоморфизмом, поэтому $f(g) = \pi f(g) = f(x)$ для некоторого $x \in D$. Отсюда $f(g - x) = 0$, противоречие. Значит, $\theta f\theta$ — мономорфизм группы G.

По условию

$$(f\varphi) \mid D = \delta((\pi f) \mid D) \quad \text{и} \quad (\theta f\theta\varphi) \mid G = \gamma((\theta f) \mid G) \quad \text{для некоторых} \quad \delta \in E(D) \quad \text{и} \quad \gamma \in E(G).$$

Имеем

$$f\varphi = (\pi f + \theta f)(\pi\varphi + \theta\varphi) = \pi f\pi\varphi + \pi f\theta\varphi + \theta f\theta\varphi;$$

здесь $\theta f\pi\varphi = 0$. Отображение $(\theta f)g \mapsto (\pi f\pi\varphi + \pi f\theta\varphi - \delta\pi f)g$, где $g \in G$, в силу инъективности группы D продолжается до гомоморфизма $\xi : G \to D$.

Положим

$$\delta \mid G = 0, \quad \xi \mid D = 0, \quad \gamma \mid D = 0,$$

и пусть $\psi = \delta + \xi + \gamma$. Тогда

$$\psi f = f\varphi.$$

Действительно, если $x \in D$, то $(\psi f)x = (\delta f)x = (f\varphi)x$. Если же $y \in G$, то

$$(\psi f)y = \psi(\pi fy + \theta fy) = \delta\pi fy + (\pi f\pi\varphi + \pi f\theta\varphi - \delta\pi f)y + \gamma\theta fy = \\ = (\pi f\pi\varphi + \pi f\theta\varphi)y + (\theta f\theta\varphi)y = (f\varphi)y.$$

Заметим, что ψ — эпиморфизм, если δ и γ — эпиморфизмы соответствующих групп. Действительно, если $x \in D$, то $\psi a = \delta a = x$ для некоторого $a \in D$. Если же $g \in G$, то $\psi g = \xi g + \gamma g$; здесь $\xi g \in D$, а γ — эпиморфизм группы G. Поэтому $\psi(A) = A$.

2) Перейдя к матричному представлению, имеем $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ и $\varphi = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \varsigma \end{pmatrix}$. Ввиду доказанного п. 1) α, γ — мономорфизмы, а δ, ς — эпиморфизмы соответственно групп D и G. Поэтому $\delta\alpha = \alpha\eta$, $\varsigma\gamma = \gamma\lambda$ для некоторых $\eta \in E(D)$, $\lambda \in E(G)$. Согласно предложению 3 все мономорфизмы группы D являются автоморфизмами, поэтому существует α^{-1} и определен гомоморфизм

$$\mu = \alpha^{-1}(\delta\beta + \varepsilon\gamma - \beta\lambda) \in \mathrm{Hom}(G, D).$$

Если теперь $\psi = \begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $\varphi f = f\psi$. Ясно, что если η, λ — эпиморфизмы соответствующих групп, то ψ — эпиморфизм. □

Если D и G — вполне инвариантные подгруппы группы A из п. 1) теоремы 3 и G обладает L-свойством, то и группа A обладает L-свойством. Однако в общем случае условие конечности рангов в п. 1) теоремы 3 ослабить нельзя, что показывает

Пример. Пусть D — делимая p-группа бесконечного ранга $\mathfrak{m}$, а G — группа ранга $\mathfrak{n}$, где $1 < \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$, разложимая в прямую сумму циклических групп одного и того же порядка p^r для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Тогда группа $A = D \oplus G$ не обладает L-свойством. Напомним, что согласно п. 1) следствия 2 группы D и G обладают L-свойством.

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$, где $G_1 \cong G_2$, а $G_3 = 0$ или $G_3 \cong Z(p^r)$, если ранг группы G есть конечное нечетное число. Пусть далее $D = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} D_k$, где $D_k \cong D_{k+1}$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда $D_k \cong D$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Определим мономорфизм α и эпиморфизм β группы A следующим образом: $\alpha : G_1 \to G_2$ и $\alpha : D_k \to D_{k+1}$ — изоморфизмы, $\alpha : G_2 \to D_1$ — вложение, а $\alpha \mid G_3 = 1_{G_3}$; $\beta : G_1 \to G_2$, $\beta : G_2 \to G_1$ — изоморфизмы, $\beta \mid G_3 = 1_{G_3}$ и $\beta \mid D = 1_D$. Здесь для простоты обозначений одной и той же буквой обозначены эндоморфизмы группы A и гомоморфизмы, ими индуцированные. Тогда если $0 \neq x \in G_2$, то $0 \neq \alpha\beta(x) \in G_2$, а $\alpha(x) \in D_1$. Поскольку слагаемое D вполне инвариантно в A, то $\alpha\beta \neq \gamma\alpha$ для всякого $\gamma \in E(A)$. □

Предложение 4. *Пусть $A = B \oplus C$. Тогда*

1) *если C есть группа без кручения, B — редуцированная группа и A обладает L-свойством, то слагаемое C вполне инвариантно*;

2) *если B есть редуцированная группа без кручения и A обладает R-свойством, то слагаемое C вполне инвариантно.*

Доказательство. Допустим, что $A = B \oplus C$ и $f : C \to B$ — ненулевой гомоморфизм. Зададим мономорфизмы α (для п. 1)), δ (для п. 2)) и автоморфизм β группы A следующим образом: $\alpha(b) = b$, $\alpha(x) = nx$, $\beta \mid B$ — произвольный автоморфизм группы B, $\beta(x) = f(x)+x$, $\delta(b) = nb$, $\delta(x) = x$, где $b \in B$, $x \in C$; причем n — такое натуральное число, что $f(x_0) \notin nB$ для некоторого $x_0 \in C$. Имеем $\alpha\beta(x) = f(x) + nx$. Допустим, что $\alpha\beta = \gamma\alpha$ для некоторого $\gamma \in E(A)$. Тогда если $\pi : A \to B$ — проекция, то $\pi\gamma\alpha(x_0) = n\pi\gamma(x_0) = f(x_0)$, противоречие. Если же $\beta\delta = \delta\gamma$ и $\gamma(x_0) = u+v$, где $u \in B$, $v \in C$, то $\beta\delta(x_0) = f(x_0)+x_0 = \delta\gamma(x_0) = nu+v$. Поэтому $f(x_0) = nu$, противоречие. □

Согласно следствию 5 редуцированное прямое слагаемое без кручения группы, обладающей R-свойством, не обязано быть вполне инвариантным.

Следствие 3. Если A — редуцированная группа без кручения с L- или R-свойством, то кольцо $E(A)$ является нормальным.

Следствие 4. Пусть $A = T \oplus G$ — редуцированная группа, где T — периодическая ее часть, а G — часть без кручения. Группа A обладает L-свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы T и G, причем слагаемое G вполне инвариантно.

Следствие 5. Пусть A — прямая сумма циклических групп. Тогда

1) A обладает L-свойством тогда и только тогда, когда либо A — периодическая группа, каждая p-компонента которой конечна или имеет вид $(*)$ из теоремы 2, либо A изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$;

2) A обладает R-свойством тогда и только тогда, когда $A = B \oplus C$, где $B = 0$ или B изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$, а C — периодическая группа, каждая p-компонента которой конечна.

Доказательство. Ввиду установленных выше свойств осталось доказать достаточность в п. 2) при $B \cong \mathbb{Z}$ и $C \neq 0$. Пусть $f \in E(A)$ — мономорфизм, а $\varphi \in E(A)$ — эпиморфизм. Имеем $f = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{smallmatrix}\right)$ и $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} \delta & 0 \\ \varepsilon & \varsigma \end{smallmatrix}\right)$. Поскольку γ — инъективный эндоморфизм периодической группы C, каждая p-компонента которой конечна, то γ является автоморфизмом. Далее $\alpha\delta = \delta\alpha$, так как кольцо эндоморфизмов группы B коммутативно. Поэтому если

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \gamma^{-1}(\varsigma\beta + \varepsilon\alpha - \beta\delta) & \gamma^{-1}\varsigma\gamma \end{pmatrix},$$

то $\varphi f = f\eta$. Заметим, что η также эпиморфизм группы A. $\square$

Литература

[1] Чехлов А.Р. *Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов*, Алгебра и логика **48** (4), 520–539 (2009).

[2] Călugăreanu G., Schultz Ph. *Modules with Abelian endomorphism rings*, Bull. Austral. Math. Soc. **82** (1), 99–112 (2010).

[3] Wei J.C., Li L.B. *Weakly normal rings*, Turk. J. Math. **36**, 47–57 (2012).

[4] Чехлов А.Р. *Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами*, Сиб. матем. журн. **54** (5), 1182–1187 (2013).

[5] Чехлов А.Р. *Об абелевых группах с инвариантными справа изометриями*, Сиб. матем. журн. **55** (3), 701–705 (2014).

[6] Чехлов А.Р. *Об абелевых группах с перестановочными коммутаторами эндоморфизмов*, Фундамент. и прикл. матем. **20** (5), 227–233 (2015).

[7] Журтов А.Х., Лыткина Д.В., Мазуров В.Д., Созутов А.И. *О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах*, Тр. ИММ УрО РАН **19** (3), 136–143 (2013).

[8] Чехлов А.Р. *О вполне квазитранзитивных абелевых группах*, Сиб. матем. журн. **57** (5), 1184–1192 (2016).

[9] Chekhlov A.R., Danchev P.V. *On projectively Krylov transitive and projectively weakly transitive Abelian p-groups*, J. Group Theory **20** (1), 39–59 (2017).

[10] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы* (Т. 2, Мир, М., 1977).

[11] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы* (Т. 1, Мир, М., 1974).

Андрей Ростиславович Чехлов

Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,

`e-mail:` cheklov@math.tsu.ru

A.R. Chekhlov

Abelian groups with monomorphisms invariant with respect to epimorphisms

Abstract. If for any injective endomorphism α and surjective endomorphism β of abelian group there exist its endomorphism γ such that $\beta\alpha = \alpha\gamma$ ($\alpha\beta = \gamma\alpha$, respectively), then such a property of the group is called R-property (L-*property*, respectively). It is shown that if reduced torsion-free group possesses R- or L-property, then endomorphism ring of a group is normal. We describe the divisible groups and direct sums of cyclic groups with R- or L-property.

Keywords: injective endomorphism, surjective endomorphism, normal endomorphism ring.

Andrei Rostislavovich Chekhlov

Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,

`e-mail:` cheklov@math.tsu.ru