М. Л. Славутин, Обратная краевая задача для областей со спиралеобразными границами, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 117–133

функции, реализующей конформное отображение, вблизи угловой точки границы области // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 2.– С.100 – 110.

9. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Тр. семинара по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск.ун-та.– 1979.– Вып. 16. – С.149 – 162.

10. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казанск.ун-та, 1965. – 333 с.

Доложено на семинаре 2.02.89 г.

М.Л.Славутин

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СО СПИРАЛЕОБРАЗНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В настоящей статье рассматривается обратная краевая задача по параметру s для случая бесконечного искомого контура. Исследуется связь между точечными особенностями элементарного характера заданных в краевых условиях задачи функций и особенностями получаемого контура.

Работа развивает и уточняет результаты, полученные Ф.Д.Гаховым и И.М.Мельником в [1].

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $E=\{\zeta:\zeta=re^{i\theta},|r|<1,0\le\theta\le2\pi\}$, $\partial E=\{\tau:\tau=e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi\}$, $\tau_0=e^{i\theta_0}$, $0<\theta_0<2\pi$, – фиксированное. Для точек круга E будем считать $\zeta-\tau_0=|\zeta-\tau_0|\exp[i\arg(\zeta-\tau_0)]$, понимая под $\arg(\zeta-\tau_0)$ непрерывную однозначную в $\bar{E}$ (кроме точки τ_0) ветвь, которая на окружности ∂E принимает значения

$$\arg(\tau-\tau_0)=\begin{cases}\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\theta+\theta_0}{2}, & 0\le\theta<\theta_0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta+\theta_0}{2}, & \theta_0<\theta\le2\pi.\end{cases}$$

Далее, пусть

$$\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{i\tau_0}\right)=\arg(\tau-\tau_0)-\frac{\pi}{2}-\theta_0,\ \arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right)=\arg(\tau-\tau_0)-\frac{3\pi}{2}-\theta_0 .$$

Тогда

$$\frac{A_2}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{i\tau_0}\right)\to\begin{cases}A_2,\theta\to\theta_0-0,\\ 0,\theta\to\theta_0+0,\end{cases}\quad -\frac{A_1}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right)\to\begin{cases}0,\theta\to\theta_0-0,\\ A_1,\theta\to\theta_0+0,\end{cases} \tag{I.I}$$

где A_1 , A_2 – действительные постоянные. Таким образом, для функции $\Phi_1(\tau)=\frac{iA_1}{\pi}\ln\left(\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right)-\frac{iA_2}{\pi}\ln\left(\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right)$ имеет место следующее свойство

$$Re\ \Phi_1(\tau)\to\begin{cases}A_2\ ,\ \theta\to\theta_0-0\ ,\\ A_1\ ,\ \theta\to\theta_0+0\ .\end{cases} \tag{I.2}$$

Функцию $\Phi_1(\tau)$ можно записать в виде

$$\Phi_1(\tau)=\frac{i}{\pi}(A_1-A_2)\ln(\tau-\tau_0)+const\ . \tag{I.3}$$

Пусть $\Phi_2(\tau)=-\frac{iB_2}{2\pi}\ln^2\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0 i}\right)+\frac{iB_1}{2\pi}\ln^2\left(\frac{\tau-\tau_0}{-\tau_0 i}\right)$, где B_1 , B_2 – действительные постоянные, тогда

$$Re\ \Phi_2(\tau)=-\frac{B_1}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right)\ln|\tau-\tau_0|+\frac{B_2}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{i\tau_0}\right)\ln|\tau-\tau_0|\ ,$$

причем

$$\frac{Re\ \Phi_2(\tau)}{\ln|\tau-\tau_0|}\longrightarrow\begin{cases}B_2\ ,\ \theta\to\theta_0-0\ ,\\ B_1\ ,\ \theta\to\theta_0+0\ .\end{cases} \tag{I.4}$$

Для функции $\Phi_2(\tau)$ представление

$$\Phi_2(\tau)=\frac{i}{2\pi}(B_1-B_2)\ln^2(\tau-\tau_0)+\frac{1}{\pi}\Big[B_2\Big(\theta_0+\frac{\pi}{2}\Big)- \tag{I.5}$$

$$-B_1\Big(\theta_0+\frac{3\pi}{2}\Big)\Big]\ln(\tau-\tau_0)+const\ .$$

Пусть $\Phi_3(\tau)=-\frac{iA_2}{2\pi}\left[\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\ln\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0 i}\right)\right]^2+\frac{iA_1}{2\pi}\left[\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\ln\left(\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right)\right]^2$, следовательно,

$$Re\ \Phi_3(\tau)=\frac{1}{\pi}(A_2-A_1)\arg[-\ln(\tau-\tau_0)]\ \ln|\tau-\tau_0|+$$

$$+\frac{A_2}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0 i}\right)\ln|\ln(\tau-\tau_0)|-\frac{A_1}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{-\tau_0 i}\right)\ln|\ln(\tau-\tau_0)|.$$

Под $\arg[-\ln(\zeta-\tau_0)]$ будем понимать непрерывную и однозначную в круге E ветвь, для которой $\arg[-\ln(\zeta-\tau_0)]$ при $\zeta\to\tau_0$, $\zeta\in\bar{E}$. В силу (I.I) получим

$$\frac{Re\,\Phi_3(\tau)}{\ln|\ln(\tau-\tau_0)|}\to\begin{cases}A_2, & \theta\to\theta_0-0,\\ A_1, & \theta\to\theta_0+0.\end{cases} \tag{I.6}$$

Функцию $\Phi_3(\tau)$ представим в виде

$$\Phi_3(\tau)=\frac{i}{2\pi}(A_1-A_2)\ln^2\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\frac{i}{\pi}(A_1-A_2)\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}\cdot\ln(\tau-\tau_0)+$$
$$+\frac{i}{2\pi}(A_1-A_2)\ln^2(\tau-\tau_0)+\frac{1}{\pi}\left[A_2\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)-A_1\left(\theta_0+\frac{3\pi}{2}\right)\right]\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+ \tag{I.7}$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[A_2\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)-A_1\left(\theta_0+\frac{3\pi}{2}\right)\right]\ln(\tau-\tau_0)+const.$$

Нам также понадобится функция

$$\Phi_4(\tau)=-\frac{iB_2}{2\pi}\left[\ln\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\ln\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0 i}\right]^2+$$
$$+\frac{iB_1}{2\pi}\left[\ln\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\ln\frac{\tau-\tau_0}{-i\tau_0}\right]^2,$$

у которой

$$Re\,\Phi_4(\tau)=\frac{B_2-B_1}{\pi}\arg\left[\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}\right]\ln(\tau-\tau_0)+$$
$$+\frac{B_2-B_1}{\pi}\arg\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau_0 i}\right)\cdot\ln|\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}|.$$

Под $\arg[\ln\ln(\zeta-\tau_0)^{-1}]$ будем понимать непрерывную и однозначную в круге E ветвь, которая при $\zeta\to\tau_0$ ($\zeta\in\bar{E}$) стремится к нулю. Тогда в силу (I.I) получим

$$\frac{Re\,\Phi_4(\tau)}{\ln|\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}|}\to\begin{cases}B_2, & \theta\to\theta_0-0,\\ B_1, & \theta\to\theta_0+0.\end{cases} \tag{I.8}$$

Нетрудно видеть, что функция $\Phi_4(\tau)$ представима в виде

$$\Phi_4(\tau)=\frac{i}{2\pi}(B_1-B_2)\ln^2\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\frac{i}{2\pi}(B_1-B_2)\ln\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}\ln(\tau-\tau_0)+$$
$$+\frac{i}{2\pi}(B_1-B_2)\ln^2(\tau-\tau_0)+\frac{1}{\pi}\left[B_2\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)-B_1\left(\theta_0+\frac{3\pi}{2}\right)\right]\ln\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[B_2\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)-B_1\left(\theta_0+\frac{3\pi}{2}\right)\right]\ln(\tau-\tau_0)+const\ . \tag{I.9}$$

Обозначим через $z(\zeta)$ функцию, осуществляющую конформное отображение круга E на область $\mathcal{D}_z$ в плоскости переменного $z=x+iy$, $z(\tau)$ – граничное значение $z(\zeta)$ на ∂E. Пусть замкнутая кривая Жордана L_z – граница области $\mathcal{D}_W$ в плоскости переменного $W=u+iv$, имеющая угловую точку $W=0$ с внутренним по отношению к L_W углом $\alpha\pi$, $0\le\alpha\le 2\pi$. Пусть при этом кривая L_W состоит из двух дуг L_{W1} и L_{W2}, имеющих общую точку $W=0$ и являющихся кривыми Ляпунова. Положим, что функция $\omega(\zeta)$ отображает конформно круг E в плоскости ζ на область $\mathcal{D}_W$ в плоскости W, $\omega(\tau)$ – граничное значение функции $\omega(\zeta)$ на ∂E.

Справедлива

<u>Теорема I</u> [2]. На малой дуге окружности ∂E, содержащей точку $\tau=\tau_0$, имеет место следующее представление:

$$\omega'(\tau)=(\tau-\tau_0)^{\alpha-1}\omega_0(\tau)\ ,$$

причем функция $\omega_0(\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера и $\omega_0(\tau_0)\neq 0$.

В дальнейшем нам понадобится также следующий результат С.Е.Варшавского [3].

Пусть дуги L_{W1} и L_{W2} образуют нулевой угол и имеют в полярных координатах уравнения $\varphi=\Phi_1(\rho),\varphi=\Phi_2(\rho)$, $0<\rho\le a$, $\Phi_1(\rho)<\Phi_2(\rho)$, где $\Phi_1(\rho)$, $\Phi_2(\rho)$ – функции, непрерывные в интервале $0<\rho\le a$ $(W=\rho e^{i\varphi})$. Положим, что в $\mathcal{D}_W$ содержится область $\{0<\rho<a,\Phi_1(\rho)<\varphi<\Phi_2(\rho)\}$. Пусть $\Phi_1(\rho)$, $\Phi_2(\rho)$ – абсолютно непрерывны в любой замкнутой части интервала $0<\rho\le a$ и производные $\rho\frac{d}{d\rho}\Phi_1(\rho),\rho\frac{d}{d\rho}\Phi_2(\rho)$, существующие почти всюду на интервале $\delta\le\rho\le a$, стремится при $\rho\to 0$ к одному и тому же пределу $tg\gamma$, $|\gamma|<\pi/2$. Пусть, наконец, $\zeta=\zeta(W)$ – функция, отображающая область $\mathcal{D}_{\tilde{W}}$ на круг $|\zeta-1|<1$ так, что $w=0$ соответствует $\zeta=0$, $w=\tilde{\omega}(\zeta)$ – обратное отображение. В сделанных выше предположениях имеет место следующая

Теорема 2 [3]. (I) Если сходятся интегралы $\int_0^a \rho\left(\frac{d\varphi_k}{d\rho}\right)^2\frac{d\rho}{\tilde{\theta}(\rho)}$ ($k=1$; 2), где $\tilde{\theta}(\rho)=\varphi_2(\rho)-\varphi_1(\rho)$, то $\gamma=0$ и существует постоянная $c>0$, такая, что

$$|\zeta(w)|=c\ exp\left\{-\pi\int_\rho^a \frac{dr}{r\tilde{\theta}(r)}+O(1)\right\}$$

при $w=\rho e^{i\varphi}\to 0$ произвольным образом в $\mathcal{D}_w$.

(II) Равномерно в любом угле $|arg\,\zeta|\leq\beta<\pi/2$ при $\zeta\to 0$

$$|\tilde{\omega}'(\zeta)|\Big/\left|\frac{\tilde{\omega}(\zeta)}{\zeta}\right|\sim\frac{\tilde{\theta}(\rho)}{\pi}\cos\gamma\ .$$

Обозначим через H класс функций действительного или комплексного переменного, удовлетворяющих условию Гельдера в некотором интервале или некоторой области (которые будут определяться в дальнейшем в каждом случае отдельно), через H_0 – класс функций действительного переменного, принадлежащих классу H и стремящихся к нулю при стремлении аргумента к одному из концов интервалов, в которых они определены.

Постановка задачи

Требуется найти односвязную область $\mathcal{D}_z$, ограниченную искомым контуром $L_z=L_{z1}\cup L_{z2}$, а также аналитическую в $\mathcal{D}_z$ и непрерывную на L_z функцию $w(z)$ по ее граничным значениям:

$$\begin{aligned} w\big|_{L_{z1}}&=w(s)\equiv u_1(s)+iv_1(s)\ ,\quad 0\leq s<+\infty\ ,\\ w\big|_{L_{z2}}&=w(s)\equiv u_2(s)+iv_2(s)\ ,\quad -\infty<s<0\ ,\end{aligned}\qquad (I.10)$$

где $|s|$ – дуговая абсцисса контура L_z, отсчитываемая от некоторой точки L_z, знак указывает направление отсчета.

Положим: (а) $w(s_1)\neq w(s_2)$ при любых $s_1\neq s_2$, отличных от бесконечности; (б) производная $w'(s)$ удовлетворяет условию Гельдера ($w'(s)\in H$) при $-\infty<s<+\infty$ (при $|s|$, близких к бесконечности, это условие понимаем как неравенство вида: $|w'(s_1)-w'(s_2)|<K|s_1^{-1}-s_2^{-1}|^{\delta}$, $K>0, 0<\delta\leq 1$) ; (в) $w(s)\to 0$ при $|s|\to\infty$.

(В) Уравнение (I.10) определяют в плоскости W кривые Ляпунова L_{W1} и L_{W2}, причем $L_W = L_{W1} \cup L_{W2}$ – граница области $\mathcal{D}_W$, не содержащей точку $W=\infty$. Пусть σ – дуговая абсцисса точки контура L_W, $0 \le \sigma \le \ell$, ℓ – периметр L_W, точке $W=0$ соответствует $\sigma=\sigma_0$, причем на L_{W1} $\sigma_0 \le \sigma \le \ell$, на L_{W2} $0 \le \sigma < \sigma_0$. (г) Пусть кривые L_{W1} и L_{W2} образуют в точке $W=0$ внутренний по отношению к $\mathcal{D}_W$ угол $\alpha\pi$, $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Для определения геометрии искомого контура L_z при $|S| \to \infty$ уточним условие (в). Возьмем функции из (I.10) в достаточно широком классе функций, имеющих следующие представления при $|S|$, близких к бесконечности

$$u_1(S) = a_1 Q_{11}^{-q_{11}}(S) + R_{11}(S), \quad v_1(S) = \ell_1 Q_{12}^{-q_{12}}(S) + R_{12}(S), \tag{I.11}$$

$$u_2(S) = a_2 Q_{21}^{-q_{21}}(S) + R_{21}(S), \quad v_2(S) = \ell_2 Q_{22}^{-q_{22}}(S) + R_{22}(S), \tag{I.12}$$

причем часть функций $Q_{kj}(S)$ $(k,j=1;2)$ тождественно равны $|S|$, а остальные – $e^{|S|}$. Функции $R_{kj}(S)$ $(k,j=1;2)$ и их производные суть бесконечно малые большего порядка, чем функции $Q_{kj}^{-q_{kj}}(S)$ и их производные соответственно, $q_{kj}>0$. Для простоты потребуем, чтобы $a_k>0$, $\ell_k>0$ $(k=1;2)$.

Пусть $p_k = \max(q_{k1}, q_{k2})$, $F_k(S) = R_{k1}(S) + iR_{k2}(S)$,

$$c_k = \begin{cases} a_k, & q_{k1} > q_{k2}, \\ i\ell_k, & q_{k1} < q_{k2}, \\ a_k + i\ell_k, & q_{k1} = q_{k2}, \end{cases}$$

где $0 \le \arg c_k \le 2\pi$ $(k=1;2)$.

Решение задачи разделим на две части, именно, когда $\arg c_1 \ne \arg c_2$ $(\alpha \ne 0)$ и $\arg c_1 = \arg c_2$ $(\alpha = 0)$.

§ 2. Решение задачи $(\alpha \ne 0)$

I.I. Пусть $Q_{kj}(S) \equiv |S|$.

Тогда уравнение (I.10) вблизи $|S|=\infty$ примет вид

$$W(S) = c_j |S|^{-p_j} + R_j(S) \tag{2.I}$$

(при $j=1$ $S>0$, при $j=2$ $S<0$), где

$$R_j(s)=\begin{cases} ib_j|s|^{-q_{j2}}+F_j(s), & q_{j1}>q_{j2}, \\ a_j|s|^{-q_{j1}}+F_j(s), & q_{j1}<q_{j2}, \\ F_j(s), & q_{j1}=q_{j2}, \end{cases}$$

для определенности будем считать $\rho_1<\rho_2$.

Отсюда

$$w'(s)=\mp c_j\rho_j|s|^{-\rho_j-1}(1+R_{j0}(s)),\quad R_{j0}(s)\in H_0 \quad . \tag{2.2}$$

Пусть $\sigma=\sigma(s)$ – длина дуги кривой L_w, значению $\sigma=\sigma_0$ соответствует точка $w=0$, тогда

$$\sigma'(s)\equiv|w'(s)|=|c_j|\rho_j|s|^{-\rho_j-1}(1+R_{j1}(s)),\quad R_{j1}(s)\in H_0, \tag{2.3}$$

$$s'(\sigma)=\frac{1}{|c_j|\rho_j}|s|^{\rho_j+1}(1+R_{j2}(s)),\quad R_{j2}(s)\in H_0, \tag{2.4}$$

где $s=s(\sigma)$ – функция, обратная к $\sigma(s)$. Интегрируя (2.3), получим

$$|\sigma-\sigma_0|=|c_j||s|^{-\rho_j}(1+R_{j3}(s)),\quad R_{j3}(s)\in H_0, \tag{2.5}$$

следовательно,

$$|s|=|\sigma-\sigma_0|^{-1/\rho_j}|c_j|^{1/\rho_j}(1+P_{j0}(\sigma)),\quad P_{j0}(\sigma)\in H_0 \tag{2.6}$$

(при $j=1$ $\sigma>\sigma_0$, при $j=2$ $\sigma<\sigma_0$).

Из (2.6) и (2.3) имеем

$$s'(\sigma)=\frac{|c_j|^{1/\rho_j}}{\rho_j}|\sigma-\sigma_0|^{-1-1/\rho_j}(1+P_{j1}(\sigma)),\quad P_{j1}(\sigma)\in H_0 . \tag{2.7}$$

Так как $w'_\sigma=w'(s)/\sigma'(s)$, то в силу (2.2), (2.3), а также (2.6), получим

$$w'_\sigma=\frac{\mp c_j}{|c_j|}(1+P_{j2}(\sigma)),\quad P_{j2}(\sigma)\in H_0 .$$

Пусть $\beta(\sigma)$ – угол, образованный с осью u касательной к кривой L_w, проведенной в точке $w=w(\sigma)$ в положительном направлении, при котором область $\mathcal{D}_W$ остается слева. Тогда в правой и левой полуокрестностях точки $\sigma = \sigma_0$ в силу равенства $\beta(\sigma) = -i \ln w'(\sigma)$ будем иметь

$$\beta(\sigma) = \arg(\mp c_j) + B_j(\sigma), \quad B_j(\sigma) \in H ,$$

где $\arg(-c_1) = \arg c_1 + \pi$. Таким образом, из равенства $\beta(\sigma_0 - 0) - \beta(\sigma_0 + 0) = (\alpha - 1)\pi$ получим

$$\alpha\pi = \arg c_2 - \arg c_1 . \tag{2.8}$$

Отсюда согласно теореме I в окрестности $\theta = \theta_0$ получим

$$\sigma'(\theta) \equiv |\omega'(\tau)| = |\theta - \theta_0|^{\alpha - 1} \Omega(\theta), \; |\sigma - \sigma_0| = |\theta - \theta_0|^{\alpha} \Omega_1(\theta), \tag{2.9}$$

$$\Omega(\theta), \Omega_1(\theta) \in H, \; \Omega(\theta_0) \neq 0, \; \Omega_1(\theta_0) \neq 0 .$$

В силу (2.7) и (2.I0) вблизи $\theta = \theta_0$ будем иметь

$$s'(\theta) = s'_\sigma[\sigma(\theta)]\sigma'(\theta) = \frac{|c_j|^{1/p_j}}{p_j} |\theta - \theta_0|^{-1-\alpha/p_j} \Omega_2(\theta) ,$$

где $\Omega_2(\theta) = [\Omega_1(\theta)]^{-1-1/p_j}(1 + p_j[\sigma(\theta)])\Omega(\theta) =$

$$= [\Omega_1(\theta)]^{-1/p_j} \Omega_0(\theta), \; \Omega_0(\theta_0 + 0) = \Omega_0(\theta_0 - 0)$$

(здесь и далее при $j = 1$ $\theta > \theta_0$, при $j = 2$ $\theta < \theta_0$).
Таким образом,

$$\ln s'(\theta) = \frac{1}{p_j} \ln|c_j| - \ln p_j - \left(1 + \frac{\alpha}{p_j}\right) \ln|\theta - \theta_0| - \frac{1}{p_j} \ln \Omega_1(\theta) + \ln \Omega_0(\theta) \tag{2.II}$$

Обозначим

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\left[\ln \frac{|c_1|^{1/p_1}}{p_1} - \ln \frac{|c_2|^{1/p_2}}{p_2} + \frac{1}{p_2} \ln \Omega_1(\theta_0) - \frac{1}{p_1} \ln \Omega_2(\theta_0)\right],$$

$$\varkappa_1 = \frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right), \quad \nu_1 = \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{\theta_0 + \pi/2}{p_2} - \frac{\theta_0 + 3\pi/2}{p_1}\right] .$$

Учитывая (I.2), (I.3) и (I.4), (I.5), в силу равенства (2.II) получим

$$\ln z'(\tau) = (i\mu_1 + \nu_1 - 1)\ln(\tau - \tau_0) - i\varkappa_1 \ln^2(\tau - \tau_0) + M_1(\tau), M_1(\tau) \in H, M_1(\tau_0) \neq 0 . \tag{2.I2}$$

Следовательно, при $p_1 \neq p_2$ в круге E имеет место следующее представление:

$$z'(\zeta)=\chi_1(\zeta)(\zeta-\tau_0)^{\nu_1-1+i\mu_1-i\varkappa_1\ln(\zeta-\tau_0)},\ \chi_1(\zeta)\in H,\ \chi_1(\tau_0)\neq 0. \quad (2.13)$$

Если же $\rho_1=\rho_2$ и $|c_1|\neq|c_2|$, то $\varkappa_1=0$, $\nu_1=-\alpha/\rho_1$, $\mu_1=(\pi\rho_1)^{-1}\ln|c_1/c_2|$. При $\rho_1=\rho_2$, $|c_1|=|c_2|$ имеем $\varkappa_1=\mu_1=0$, $\nu_1=-\alpha/\rho_1$.

I.2. Пусть теперь $Q_{kj}(s)\equiv e^{-|s|}$, $k,j=1;2$.

Уравнения (I.II), (I.I2) примут вид $w(s)=c_j e^{-\rho_j|s|}+\tilde{R}_j(s)$. Поступая таким же образом как и в пункте I.I, получим

$$s'(\sigma)=\frac{1}{\rho_j}|\sigma-\sigma_0|^{-1}(1+\tilde{P}_{j1}(\sigma)),\ \tilde{P}_{j1}(\sigma)\in H_0. \quad (2.14)$$

Используя (2.I0), будем иметь

$$s'(\theta)=\frac{1}{\rho_j}|\theta-\theta_0|^{-1}\tilde{\Omega}_2(\theta),\ \tilde{\Omega}_2(\theta)=\frac{\Omega(\theta)}{\tilde{\Omega}_1(\theta)}(1+\tilde{P}_{j1}[\sigma(\theta)]),$$

функция $\tilde{\Omega}_2(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta_0$. Отсюда $\ln s'(\theta)=-\ln\rho_j-\ln|\theta-\theta_0|+\ln\tilde{\Omega}_2(\theta)$. Восстанавливая функцию $\ln z'(\tau)$ по ее действительной части, получим

$$\ln z'(\tau)=(i\mu_2-1)\ln(\tau-\tau_0)+M_2(\tau),\ M_2(\tau)\in H,\ M_2(\tau_0)\neq 0,$$

где при $\rho_1\neq\rho_2$ $\mu_2=\frac{1}{\pi}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$, при $\rho_1=\rho_2$ $\mu_2=0$.

Итак, в круге E

$$z'(\zeta)=(\zeta-\tau_0)^{i\mu_2-1}\chi_2(\zeta),\ \chi_2(\zeta)\in H,\ \chi_2(\tau_0)\neq 0. \quad (2.15)$$

I.3. Пусть $Q_{11}(s)=Q_{12}(s)\equiv|s|^{-1}$, $Q_{21}(s)=Q_{22}(s)\equiv e^{-|s|}$.

В этом случае представления (I.II) и (I.I2) запишем в виде

$$w=c_1 s^{-\rho_1}+\hat{R}_1(s),\ s>0;\quad w=c_2 e^{\rho_2 s}+\hat{R}_2(s),\ s<0,$$

где функции $\hat{R}_j(s)$ определяются так же, как и функции $R_j(s)$ в п.I.I. Используя вычисления, приведенные выше, будем иметь вблизи $\sigma=\sigma_0$

$$s'(\sigma)=|c_1|^{1/\rho_1}|\sigma-\sigma_0|^{-1-1/\rho_j}(1+P_1^*(\sigma)),\ P_1^*(\sigma)\in H_0,\ \sigma>\sigma_0, \quad (2.16)$$

$$s'(\sigma)=\frac{1}{\rho_2}|\sigma-\sigma_0|^{-1}(1+P_2^*(\sigma)),\ P_2^*(\sigma)\in H_0,\ \sigma<\sigma_0.$$

В силу (2.I0), получим

$$\ln s'(\theta)=\frac{1}{\rho_1}\ln|c_1|-\ln\rho_1-\left(1+\frac{\alpha}{\rho_1}\right)\ln|\theta-\theta_0|-\frac{1}{\rho_1}\ln\hat{\Omega}_1(\theta)+\ln\hat{\Omega}_0(\theta),\ \theta>\theta_0,$$

$$\ln s'(\theta)=-\ln\rho_2-\ln|\theta-\theta_0|+\ln\hat{\Omega}_2(\theta),\ \theta<\theta_0,$$

где $\hat{\Omega}_0(\theta)=(1+\rho_2^*[\delta(\theta)])\Omega(\theta)/\hat{\Omega}_1(\theta), \hat{\Omega}_2(\theta)=(1+\rho_1^*[\delta(\theta)])\Omega(\theta)/\hat{\Omega}_1(\theta)$, причем $\ln\Omega_0(\theta)$ и $\ln\hat{\Omega}_j(\theta)$, $j=1;2$, непрерывны в точке $\theta=\theta_0$. Согласно (I.4), (I.5) получим

$$\ln z'(\tau)=(i\mu_3+\nu_3-1)\ln(\tau-\tau_0)+i\varkappa_3\ln^2(\tau-\tau_0)+M_3(\tau),$$

$$M_3(\tau)\in H,\ M_3(\tau_0)\neq 0,$$

где $\mu_3=[\ln|c_1|^{1/\rho_1}+\ln(\rho_2/\rho_1)-\Omega_1(\theta_0)/\rho_1]/\pi$, $\nu_3=-\alpha(\theta_0+3\pi/2)/(\rho_1\pi)$, $\varkappa_3=\alpha/(2\rho_1\pi)$. Следовательно, в круге E

$$z'(\zeta)=\chi_3(\zeta)(\zeta-\tau_0)^{\nu_3-1+i\mu_3+i\varkappa_3\ln(\zeta-\tau_0)},\ \chi_3(\zeta)\in H, \chi_3(\tau_0)\neq 0.$$

§ 3. Решение задачи ($\alpha=0$)

Наложим ряд условий на постоянные. В случае, когда $Q_{k1}(s)\equiv\equiv Q_{k2}(s)$ ($k=1;2$), не умаляя общности, положим $m_k=q_{k2}/q_{k1}>1$. Чтобы обход L_W соответствовал указанному выше, необходимо и достаточно выполнения следующих неравенств: $m_1\geqslant m_2$, причем при $m_1=m_2$ $b_2/a^{m_2}>b_1/a^{m_1}$. Если же $Q_{k1}(s)\equiv|s|$, $Q_{k2}(s)\equiv e^{|s|}$, то для сохранения обхода L_W потребуем, чтобы $q_{11}\leqslant q_{21}<1$ и $n_2\geqslant n_1$ где $n_k=q_{k2}a_k^{1/q_{k1}}$ ($k=1;2$).

В предыдущем параграфе мы зафиксировали значение $\arg(-c_1)=\arg c_1+\pi$. Поэтому при $\arg c_1=\arg c_2$ получаем, что $W=0$ – точка возврата с нулевым углом. Если же положить $\arg(-c_1)=\arg c_1-\pi$, тогда $w=0$ будет точкой возврата с углом 2π, при этом все полученные в § 2 представления для $z'(\zeta)$ будут справедливы и для $\alpha=2\pi$.

Пусть $Q_{11}(s)=Q_{12}(s)$, $Q_{21}(s)=Q_{22}(s)$. Из (I.II),(I.I2) следует, что вблизи точки $W=0$ кривые L_{W1} и L_{W2} определяются уравнениями:

$$v = u^{q_{k2}/q_{k1}}[A_k + \Delta_k(u)], \ \Delta_k(u) \in H_0, \ A_k = \frac{b_k}{a_k^{m_k}}, \quad k = 1\,;2\,. \tag{3.I}$$

Будем считать, что если $m_1 = m_2$, то $A_2 - A_1 > 0$.

Следуя С.Е.Варшавскому ([3], с.II4), получим

$$\tilde\theta(\rho) \sim A_2 \rho^{m_2-1}, \ m_1 > m_2; \ \tilde\theta(\rho) \sim (A_2 - A_1)\rho^{m_2-1}, \ m_1 = m_2 \tag{3.2}$$

при $\rho \to 0$, причем $[\rho/\tilde\theta(\rho)](d\varphi_k/d\rho)^2 = \theta(\rho^{m_k-2}), \ \rho \to 0$. Таким образом, справедливо утверждение I теоремы 2 и имеет место следующее представление

$$|\zeta(w)| = c \exp\left\{-\pi \int_\rho^a \frac{dr}{Br^{m_2}} + O(1)\right\}, \ B = \begin{cases} A_2, & m_1 > m_2, \\ A_2 - A_1, & m_1 = m_2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Отсюда

$$\rho = B_0^{1/(m_2-1)}[\ln \zeta^{-1}]^{1/(1-m_2)}(1 + o(1)), \ B_0 = -\pi(1-m_2)^{-1}B^{-1}.$$

Учитывая, что φ ограничена, получим $\tilde\omega(\zeta) = (B_0/\ln\zeta^{-1})^{1/(m_2-1)}(1 + o(1))$. Следовательно,

$$\omega(\zeta) = B_0^{1/(m_2-1)}\left[\ln(\zeta - \tau_0)^{-1}\right]^{1/(1-m_2)}(1 + o(1)) \tag{3.5}$$

при $\zeta \to \tau_0$ произвольным образом в $\bar E$. Заметим, что формула (I.6) из [I] получается лишь при $m_2 = 2$, т.е. при $q_{22} = 2q_{21}$.

Нетрудно показать, следуя доказательству теоремы II б в [3], что так как L_w – кривая Ляпунова, то утверждение II теоремы 2 верно при $|\arg\zeta| \le \pi/2$. Поэтому будем иметь

$$\sigma'(\theta) \equiv |\omega'(\tau)| = \pi^{-1} B_0^{m_2/(m_2-1)} |\theta - \theta_0|^{-1} |\ln|\theta - \theta_0||^{m_2/(m_2-1)}(1 + o(1)). \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует

$$|\sigma - \sigma_0| = B_0^{1/(m_2-1)} |\ln|\theta - \theta_0||^{1/(1-m_2)}(1 + o(1)). \tag{3.7}$$

2.I. В случае, когда $Q_{kj}(s) \equiv |s|^{-1}$, получим в силу (2.7), (3.6) и (3.7)

$$s'(\theta)=K_j\,|\ln|\theta-\theta_0||^{1/(\rho_j(m_2-1))+1}\,|\theta-\theta_0|^{-1}(1+Q^*(\theta)),\ Q^*(\theta_0)=0\ ,$$

$$K_j=|c_j|^{1/\rho_j}\rho_j^{-1}(m_2-1)^{-1}B_0^{-1/(\rho_j(m_2-1))}.$$

Заметим, что так как $q_{\kappa 2}>q_{\kappa 1}$, то $c_j=b_j\ (\kappa,j=1;2)$. Отсюда

$$\ln s'(\theta)=\ln K_j+((m_2-1)\rho_j)^{-1}\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\theta-\theta_0|+Q_1^*(\theta),$$
$$Q_1^*(\theta_0)=0\ .$$

Используя (I.6) и (I.7), получим

$$\ln z'(\tau)=i\tilde{\varkappa}_1\ln^2\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+2\tilde{\varkappa}_1 i\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}\cdot\ln(\tau-\tau_0)+i\tilde{\varkappa}_1\ln(\tau-\tau_0)+$$
$$+(2\tilde{\nu}_1-1)\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+(2\tilde{\nu}_1-1+i\tilde{\mu}_1)\ln(\tau-\tau_0)+\tilde{M}_1(\tau)\ ,$$

$$\tilde{\varkappa}_1=\frac{1}{2\pi(m_2-1)}\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right),\ \tilde{\nu}_1=\frac{1}{\pi(m_2-1)}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\rho_1}\left(\theta_0+\frac{3\pi}{2}\right)\right],\ \tilde{\mu}_1=\frac{1}{\pi}\ln\frac{K_1}{K_2},$$

где $\ln M_1(\tau)$ – непрерывная в точке $\tau=\tau_0$ функция, K_j из (3.8). Отсюда в круге E будем иметь

$$z'(\zeta)=\tilde{\chi}_1(\zeta)(\zeta-\tau_0)^{2\tilde{\nu}_1-1+i\tilde{\mu}_1}[\ln(\zeta-\tau_0)]^{i\tilde{\varkappa}_1\ln\ln(\zeta-\tau_0)^{-1}+2\varkappa_1 i\ln(\zeta-\tau_0)+2\tilde{\nu}_1-1},\quad(3.9)$$

где $\tilde{\chi}_1(\zeta)$ – непрерывная в точке $\zeta=\tau_0$ функция, $\tilde{\chi}_1(\tau_0)\neq 0$.

Если $\rho_1=\rho_2$, то $\tilde{\varkappa}_1=0,\ \tilde{\nu}_1=-1/(\rho_1(m_2-1)),\ \tilde{\mu}_1=(\pi\rho_1)^{-1}\ln|c_1/c_2|$.

При $\rho_1=\rho_2,\ |c_1|=|c_2|$ имеем $\tilde{\varkappa}_1=\tilde{\mu}_1=0,\ \tilde{\nu}_1=-1/(\rho_1(m_2-1))$.

2.2. Пусть $Q_{\kappa j}(s)\equiv e^{|s|}$, тогда с учетом (2.I4), (3.6) и (3.7) получим вблизи $\theta=\theta_0$ $\ln s'(\theta)=-\ln\rho_j-\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\theta-\theta_0|+Q_2^*(\theta)$, где $Q_2^*(\theta)$ непрерывна в точке $\theta=\theta_0$. Отсюда в круге E

$$z'(\zeta)=(\zeta-\tau_0)^{i\tilde{\mu}_2-1}\ln(\zeta-\tau_0)^{-1}\,\tilde{\chi}_2(\zeta)\ ,\ \tilde{\chi}_2(\tau_0)\neq 0\ ,$$

где $\tilde{\chi}_2(\zeta)$ непрерывна в точке $\zeta=\tau_0$, $\tilde{\mu}_2=\ln(\rho_2/\rho_1)$.

При $\rho_1=\rho_2$, очевидно, $\tilde{\mu}_2=0$.

2.3. Если $Q_{11}(s)=Q_{12}(s)\equiv|s|$, $Q_{21}(s)=Q_{22}(s)=e^{|s|}$, тогда согласно (2.I6), (3.6), (3.7) вблизи $\theta=\theta_0$ будем иметь

$$\ln s'(\theta)=\ln K_1+(1/(p_1(m_2-1))-1)\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\theta-\theta_0|+Q_3^*(\theta),\ \theta>\theta_0\ ;$$

$$\ln s'(\theta)=\ln K_2-\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\theta-\theta_0|+Q_4^*(\theta),\ \theta<\theta_0,\ Q_3^*(\theta_0)=Q_4^*(\theta_0)=0\ ,$$

где $K_1=|c_1|^{1/p_1}B_0^{1/(m_2-1)}/(p_1(m_2-1))$, $K_2=(p_1(m_2-1))^{-1}$.

Тогда

$$\ln z'(\tau)=i\tilde{\chi}_3\ln^2\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+2i\tilde{\chi}_3\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}\cdot\ln(\tau-\tau_0)-$$

$$-(\tilde{\nu}_3+1)\cdot\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\ln^2(\tau-\tau_0)-(\tilde{\nu}_3+1-i\mu_3)\ln(\tau-\tau_0)+\hat{M}(\tau)\ ,$$

где $\hat{M}(\tau)$ непрерывна в точке $\tau=\tau_0$, $\tilde{\chi}_3=(2\pi p_1(m_2-1))^{-1}$,
$\tilde{\nu}_3=2(\theta_0+3\pi/2)(\pi(m_2-1))^{-1}$, $\tilde{\mu}_3=\ln(K_1/K_2)$ ..

Отсюда в круге E

$$z'(\zeta)=\tilde{\chi}_3(\zeta)(\zeta-\tau_0)^{\ln(\zeta-\tau_0)+\tilde{\nu}_3-1+i\tilde{\mu}_3}[\ln(\zeta-\tau_0)^{-1}]^{i\tilde{\chi}_3\ln\ln(\zeta-\tau_0)^{-1}+2i\tilde{\chi}_3\ln(\zeta-\tau_0)+\tilde{\nu}_3-1},$$

$\tilde{\chi}_3(\zeta)$ – непрерывная в точке $\zeta=\tau_0$ функция, $\tilde{\chi}_3(\tau_0)\neq 0$.

Рассмотрим еще один возможный случай.

2.4. $Q_{11}(s)=Q_{21}(s)\equiv|s|$, $Q_{12}(s)=Q_{22}(s)=e^{|s|}$.

Тогда вблизи $|s|=\infty$

$$\begin{aligned} &u=a_1|s|^{-q_{11}}+R_{11}(s)\ ,\ v=b_1e^{-q_{11}|s|}+R_{12}(s)\ ,\ s>0\ ,\\ &u=a_2|s|^{-q_{21}}+R_{21}(s)\ ,\ v=b_2e^{-q_{22}|s|}+R_{22}(s)\ ,\ s<0\ . \end{aligned} \tag{3.I2}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &v=(b_1+\delta_1(u))\exp\left\{-n_1u^{-1/q_{11}}\right\}\ ,\ s>0\ ,\\ &v=(b_2+\delta_2(u))\exp\left\{-n_2u^{-1/q_{21}}\right\}\ ,\ s<0\ . \end{aligned} \tag{3.I3}$$

Возьмем уравнения L_{W1} и L_{W2} в полярных координатах $\varphi=\Phi_1(\rho)$ и $\varphi=\Phi_2(\rho)$. Из (3.I3) получим

$$\rho\sin\Phi_1(\rho)=(b_1+\delta_1[u(\rho)])\exp\left\{-\frac{n_1}{(\rho\cos\Phi_1)^{1/q_{11}}}\right\},\rho\sin\Phi_2(\rho)=$$

$$=(b_2+\delta_2[u(\rho)])\exp\left\{-\frac{n_2}{(\rho\cos\varphi_2)^{1/q_{21}}}\right\} .$$

Следовательно,

$$\rho\sin[\varphi_1(\rho)-\varphi_2(\rho)]=(b_1+\delta_1[u(\rho)])\exp\left\{-\frac{n_1}{(\rho\cos\varphi_1)^{1/q_{11}}}\right\}\cos\varphi_2 -$$

$$-(b_2+\delta_2[u(\rho)])\exp\left\{-\frac{n_2}{(\rho\cos\varphi_2)^{1/q_{21}}}\right\}\cdot\cos\varphi_1 .$$

Таким образом, находим

$$\tilde{\theta}(\rho)=\varphi_1(\rho)-\varphi_2(\rho)\sim G\,\frac{1}{\rho}\exp\left\{-n_1/\rho^{1/q_{11}}\right\},\ G=\begin{cases} b_1\ ,\ n_1=n_2,\ q_{11}=q_{21}\\ b_1-b_2,\ n_1\neq n_2 .\end{cases}$$

Дифференцируя по ρ равенства (3.13), получим

$$\varphi_j'(\rho)=(b_j+\delta_j[u(\rho)]\,\frac{n_j}{q_{j1}}\exp\left\{-n_j/\rho^{1/q_{1j}}\right\}\rho^{-2-n_j}(1+o(1)),\rho\to 0\ \ (j=1;2).$$

Поэтому

$$\frac{\rho}{\tilde{\theta}(\rho)}\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2=O(e^{-n_j/\rho^{-1/q_{j1}}}\rho^{-2-2/q_{j1}})\ ,\ \rho\to 0 .$$

Таким образом, в силу теоремы 2

$$|\zeta(w)|=c\cdot\exp\left\{-\frac{\pi}{G}\int_\rho^q e^{n_1 r^{-1/q_{11}}}dr+o(1)\right\},\ w=\rho e^{i\varphi}\to 0 .$$

Отсюда

$$\rho^{1+1/q_{11}}\cdot e^{n_1\rho^{-1/q_{11}}}=-\frac{Gn_1}{\pi q_{11}}\ln|\zeta|\,(1+o(1))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{n_1}{\rho^{1/q_{11}}}=\ln\ln|\zeta|^{-1}(1+O(1))\Rightarrow\rho=n_1^{q_{11}}\left[\ln\ln|\zeta|^{-1}\right]^{-q_{11}}(1+o(1))$$

Мы приходим к следующему представлению функции:

$$\omega(\zeta)=n_1^{q_{11}}[\ln\ln|\zeta-\tau_0|]^{-q_{11}}(1+o(1)) .$$

Следовательно,

$$|\sigma-\sigma_0|=n_1^{q_{11}}|\ln|\ln|\theta-\theta_0|||^{-q_{11}}(1+o(1)) . \qquad (3.15)$$

Учитывая, что утверждение теорему 2 в нашем случае справедливо для $|\arg\zeta|\leq\pi/2$, получим

$$|\tilde{\omega}'(\zeta)|\sim G\pi^{-1}|\zeta|^{-1}\exp\{-n_1/\rho^{1/q_{11}}\} .$$

Отсюда в силу (3.14)

$$\ln\sigma'(\theta)=\ln(G/\pi)-\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\theta-\theta_0|+Q_5^*(\theta),\ Q_5^*(\theta_0)=0 . \qquad (3.16)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (3.12) могут быть записаны в виде

$$w=a_1|s|^{-q_{11}}(1+o(1)), s>0 ;\ w=a_2|s|^{-q_{21}}(1+o(1)) , s<0 .$$

Поэтому воспользуемся формулой (2.7)

$$s'(\sigma)=a_k q_{k1}^{-1}|\sigma-\sigma_0|^{-1-1/q_{k1}}(1+\tilde{p}_{j1}(\sigma)) ,\ \tilde{p}_{j1}(\sigma)\in H .$$

Отсюда в силу (3.15) и (3.16) получим

$$\ln s'(\theta)=\ln(G/\pi)+\ln H_k+q_{11}(1+q_{k1}^{-1})\ln|\ln|\ln|\theta-\theta_0|||-$$
$$-\ln|\ln|\theta-\theta_0||-\ln|\theta-\theta_0|+Q_6^*(\theta) ,\quad Q_6^*(\theta_0)=0 ,$$

где $H_k=\ln a_k-\ln q_{k1}-q_{11}(1+q_{k1}^{-1})\ln n_1$.

Используя (1.2) – (1.9), приходим к следующему представлению функции

$$\ln z'(\tau)=i\tilde{\varkappa}_4\ln^2\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+2i\tilde{\varkappa}_4\ln\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}\cdot\ln(\tau-\tau_0)+$$
$$+i\tilde{\varkappa}_4\ln^2(\tau-\tau_0)+\tilde{\nu}_4\ln\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+\ln\ln(\tau-\tau_0)^{-1}+(\tilde{\nu}_4+i\tilde{\mu}_4+2)\ln(\tau-\tau_0)+\hat{M}_1(\tau),$$

где $\tilde{\mu}_4=(H_1-H_2)/\pi$, $\tilde{\varkappa}_4=q_{11}(q_{11}^{-1}-q_{21}^{-1})/(2\pi)$, $\tilde{\nu}_4=q_{11}((1+q_{21}^{-1})(\theta_0+\pi/2)-(1+q_{11}^{-1})\cdot(\theta_0+3\pi/2))/\pi$, $\hat{M}_1(\tau)$ – функция, непрерывная в точке $\tau=\tau_0$. Очевидно, при $q_{11}=q_{21}$ имеем $\tilde{\varkappa}_4=0$, $\tilde{\nu}_4=-q_{11}-1$.

§ 4. О поведении контура L_z вблизи особой точки

4.1. Используя представление (2.13), выясним асимптотическое поведение функции $z(\tau)$ при $\tau\to\tau_0$ в случае 1.1.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d}{d\tau}\left(t^{k+1}e^{m\ln^2 t}\cdot\frac{1}{\ln t}\right)=2me^{m\ln^2 t}\cdot t^k\left(1+o\left(\frac{1}{|\ln t|}\right)\right),\ t\to 0 .$$

Поэтому вблизи $\tau=\tau_0$ при $\rho_1<\rho_2$

$$z(\tau)=d_1\exp\{(\nu_1+i\mu_1)\ln(\tau-\tau_0)-(i\varkappa_1+g)\ln^2(\tau-\tau_0)\},\ d_1,g=const.$$

Отсюда

$$|z(\tau)|\sim|d_1|\,Q_1^*(\theta)|\tau-\tau_0|^{\nu_1+\varkappa_1\arg(\tau-\tau_0)}|\ln|\tau-\tau_0||^{-g}, \tag{4.1}$$

$$\arg z(\tau)\sim\varkappa_1\ln^2|\tau-\tau_0| , \tag{4.2}$$

где $Q_1^*(\theta)=\exp\{-\mu_1\arg(\tau-\tau_0)+\arg^2(\tau-\tau_0)\}$.

Ясно, что если $M_1(\theta)=\nu_1+\varkappa_1\arg(\tau-\tau_0)>0$, то $|z(\tau)|\to 0$ при $\tau\to\tau_0$, если же $M_1(\theta)<0$, то $|z(\tau)|\to\infty$ при $\tau\to\tau_0$. Пусть $L_z=L_{z1}\cup L_{z2}$, причем L_{z1}, L_{z2} ветви, соответствующие частям окружности, где $\theta_0<\theta\le 2\pi$ и $0\le\theta<\theta_0$, при отображении функцией $z(\zeta)$ круга $\bar E$ на $\bar{\mathcal{D}}_z$.

(1) При $2\rho_1/(\rho_2-\rho_1)>1/2+\theta_0/\pi\,(M_1(\theta_0\pm 0)>0)$ обе ветви контура L_z , в силу (4.2) закручиваются вокруг нуля.

(2) При $2\rho_1/(\rho_2-\rho_1)<\theta_0/\pi-1/2\,(M_1(\theta_0\pm 0)<0)$ обе ветви уходят в бесконечность.

(3) При $|2\rho_1/(\rho_2-\rho_1)-\theta_0/\pi|<1/2$ ветвь L_{z1} закручивается вокруг нуля, L_{z2} – вокруг бесконечности.

Если $\rho_1=\rho_2$, то $z(\tau)\sim d_2\exp\{(\nu_1+i\mu_1)\ln(\tau-\tau_0)\},\ d_2=const$, значит, при $\tau\to\tau_0$

$$|z(\tau)|\sim|d_2||\tau-\tau_0|^{\nu_1},\ \arg z(\tau)\sim\mu_1\ln|\tau-\tau_0| .$$

Так как $\nu_1<0$, то $|z(\tau)|\to\infty$ и обе ветви закручиваются на бесконечности.

Если $\rho_1=\rho_2$, $|c_1|=|c_2|$, то $z(\tau)\sim d_3(\tau-\tau_0)^{\nu_1},\ \nu_1=-\alpha/\rho_1$. Здесь, очевидно, ветви L_{z1} и L_{z2} на бесконечности образуют угол $\nu_1\pi$.

В случае I.2 выводы о поведении функции $z(\tau)$ те же.

4.2. При $\rho_1<\rho_2$ в случае I.2

$$|z(\tau)|\sim|\tilde d_1|\exp\{-\mu_2\arg(\tau-\tau_0)\},\ \arg z(\tau)\sim\mu_2\ln|\tau-\tau_0|,\ \tilde d_1=const .$$

Следовательно,

$$|z(\tau)|\to|\tilde d_1|\exp\{-\mu_2(3\pi/2+\theta_0)\} ,\ \theta\to\theta_0-0 ;$$

$$|z(\tau)| \to |\tilde{d}_1| \exp\left\{-\mu_2(\pi/2+\theta_0)\right\}, \quad \theta \to \theta_0+0,$$
$$\arg z(\tau) \sim \mu_2 \ln|\tau-\tau_0|.$$

Если $\rho_1=\rho_2$, то $z(\tau)\sim \tilde{d}_2 \ln(\tau-\tau_0)$.

4.3. В случае I.3, как и в 4.I, получим

$$z(\tau)\sim d_3 \exp\left\{(\nu_3+i\mu_3)\ln(\tau-\tau_0)-(i\varkappa_3+1)\ln^2(\tau-\tau_0)\right\}.$$

Следовательно

$$|z(\tau)|\sim |d_3| Q_2^*(\theta)|\tau-\tau_0|^{\nu_3+\varkappa_3 \arg(\tau-\tau_0)} |\ln|\tau-\tau_0||^{-g_1}, \; d_3, g_1=const,$$

$$\arg z(\tau)\sim -\varkappa_3 \ln^2|\tau-\tau_0|, \; Q_2^*(\theta)=\exp\left\{-\mu_3 \arg(\tau-\tau_0)+\varkappa_3 \arg^2(\tau-\tau_0)\right\}.$$

Величина $M_2(\theta)=\nu_3+\varkappa_3 \arg(\tau-\tau_0)<0$ при θ, близких к θ_0, поэтому $|z(\tau)| \to \infty$ и обе ветви L_{z1} и L_{z2} закручиваются на бесконечности.

В заключение заметим, что аналогичным образом можно рассмотреть обратную краевую задачу и в случаях, когда, во-первых, $Q_{jk}(s)$ представляют из себя другие элементарные функции, во-вторых, контур L_z спрямляем (как в [2]), либо спрямляема только одна из ветвей L_z.

Литература

I. Гахов Ф.Д., Мельник И. М. Об особенностях контура в обратной краевой задаче теории аналитических функций// Укр. матем.журн. - I959. - Т.II, № I. - С.25 - 37.

2. Warschawski S. F. Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung// Math. Ztschr. - I932. - B.35, N 3 - 4. - C.32I - 456.

3. Варшавский С. Е. Конформное отображение бесконечных полос // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. - I958, 2:4, с.67 - II6.

Доложено на семинаре I9 июня I989 г.