И. А. Шакиров, Об одном подходе к исследованию квадратурных формул наивысшей степени точности, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1992, выпуск 8, 91–95

6. A l f s e n E. M. Compact convex sets and boundary integrals. - Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971. - 210 p.

7. A l f s e n E. M., S h u l t z F. W. Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets // Memoirs Amer. Math. Soc. - 1976. - V.6. - No.172. - XII, 120 p.

8. A l f s e n E. M., S h u l t z F. W. On non-commutative spectral theory and Jordan algebras // Proc. London Math. Soc. (3). - 1979. - V.38. - P.497 - 516.

И.А.Шакиров

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НАИВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

Рассмотрим квадратурную формулу (к.ф.) прямоугольников

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)\,ds \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(s_k) \quad (x = x(s) \in \tilde{C}) \tag{1}$$

по семейству равномерно распределенных на отрезке $[0, 2\pi]$ узлов

$$s_k = s_k^* - 2\pi\theta/N \quad (s_k^* = 2\pi k/N,\ k = \overline{1,N},\ N \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

зависящих от параметра $\theta$, где $\theta \in [0, 1]$, $\tilde{C} = \tilde{C}[0, 2\pi]$ - множество непрерывных комплекснозначных $2\pi$ - периодических функций действительного аргумента. Варьируя $\theta$ в указанном промежутке (при фиксированном $N$), получаем всевозможные равноотстоящие узлы на периоде.

Обозначим через $\mathcal{H}_n$ множество тригонометрических полиномов (т.п.) степени не выше $N$. Известно [1, с.162], [2, с.119], что к.ф. прямоугольников по $N$ равноотстоящим узлам из отрезка $[0, 2\pi]$ точна для любого полинома $T(s) \in \mathcal{H}_{N-1}$, а также для некоторых подмножеств т.п. степени $N$ при соответствующем выборе этих узлов. Здесь эти результаты несколько усилены в том смысле, что они являются следствиями одной общей теоремы, в которой установлена связь между точностью к.ф. прямоугольников для т.п. произвольной степени и расположением узлов квадратурной формулы на периоде $[0, 2\pi]$.

Т е о р е м а. К.ф. (I) по узлам (2) точна для т.п. $T_m = T_m(s)$ произвольной степени $m$ $(m \in N)$, если выполнено следующее ограничение на его коэффициенты $a_0$, $a_k$, $b_k$ $(k=\overline{1,m})$:

$$\sum_{r=1}^{[m/N]} (-1)^{r(N+1)} (a_{rN} \cos 2\pi\theta r - b_{rN} \sin 2\pi\theta r) = 0 \quad , \tag{3}$$

где $[x]$ – целая часть числа $x$.

С л е д с т в и е I. Среди семейства квадратурных формул (I) – (2) существует хотя бы одна к.ф. (например, при $\theta = \theta' \in [0,1]$), точная для полинома произвольной степени.

С л е д с т в и е 2. Для каждого полинома $T(s) \in \mathcal{H}_{2N-1}$ существуют вполне определенные равноотстоящие узлы

$$s_k = s_k^* - 2\pi\theta/N \; , \; \theta = (1/2\pi) \operatorname{arctg} | a_N/b_N | + \theta^* \quad (k=\overline{1,N}) \; , \tag{4}$$

зависящие от его коэффициентов при $\cos Ns$ и $\sin Ns$, и такие, что к.ф. (I) по этим узлам точна для полинома $T(s)$, где $\theta^* \in \{0; 1/4; 1/2; 3/4\}$, если $a_N \neq 0$, $b_N \neq 0$; $\theta^* \in \{0; 1/2; 1\}$, если $a_N = 0$, $b_N \neq 0$; $\theta^* \in \{0; 1/2\}$, если $a_N \neq 0$, $b_N = 0$; $\theta^* \in [0,1]$, если же $a_N = b_N = 0$.

С л е д с т в и е 3. К.ф. правых ($\theta$ = 0), средних ($\theta = 1/2$) и левых ($\theta$ = I) прямоугольников по $N$ равноотстоящим узлам точны для любого т.п. фида

$$T(s) = T_{N-1}(s) + b_N \sin Ns \quad . \tag{5}$$

С л е д с т в и е 4. К.ф. (I) по узлам $s_k = s_k^* - \pi/2N$ или $s_k = s_k^* - 3\pi/2N$ $(k=\overline{1,N})$ точна для произвольного т.п. степени $N$ вида $T(s) = T_{N-1}(s) + a_N \cos Ns$.

С л е д с т в и е 5. Не существует к.ф. прямоугольников с $N$ равноотстоящими узлами из отрезка $[0, 2\pi]$, точной для всех тригонометрических многочленов степени $N$.

С л е д с т в и е 6. Тригонометрическая степень точности формулы прямоугольников по любым $N$ равноотстоящим узлам из отрезка $[0, 2\pi]$ равна $N-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в а теоремы и следствий. Нетрудно вычисляются следующие суммы:

$$\sum_{k=1}^{N} \sin \nu s_k^* = \sin \pi\nu \left[ \sin \pi\nu \,\mathrm{ctg}(\pi\nu/N) + \cos \pi\nu \right] = 0 \qquad (\nu \in \mathbb{N}); \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos \nu s_k^* = \sin \pi\nu \left[ \cos \pi\nu \,\mathrm{ctg}(\pi\nu/N) - \sin \pi\nu \right] =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{r(N+1)} N, & \nu = rN, \\ 0, & \nu \neq rN \ (r \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{7}$$

Используя теперь ортогональность триногометрической системы, соотношения (6), (7), (3), вычислим для многочлена $T_m$ левую и правую части к.ф. (I) по узлам (2):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_0 \, ds = a_0 \ ;$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} T(s_k) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \Big[ a_\nu \sum_{k=1}^{N} \cos \nu \Big(s_k^* - \frac{2\pi\theta}{N}\Big) +$$

$$+ b_\nu \sum_{k=1}^{N} \sin \nu \Big(s_k^* - \frac{2\pi\theta}{N}\Big) \Big] = a_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \Big( a_\nu \cos \frac{2\pi\theta\nu}{N} -$$

$$- b_\nu \sin \frac{2\pi\theta\nu}{N} \Big) \sum_{k=1}^{N} \cos \nu s_k^* = a_0 + N \sum_{r=1}^{[m/N]} (-1)^{r(N-1)} \cdot$$

$$\cdot (a_{rN} \cos 2\pi\theta r - b_{rN} \sin 2\pi\theta r) = a_0 \ .$$

Таким образом, при выполнении ограничения (3) в формуле (I) достигается равенство, и теорема доказана.

Для доказательства следствия I достаточно показать выполнение ограничения (3) хотя бы при одном значении параметра $\theta$ из отрезка $[0,1]$ . Для этого обозначим левую часть (3) через $f(\theta)$ ($\theta\in[0,1]$ ). Ясно, что эта функция непрерывна и интеграл от нее по отрезку $[0,1]$ всегда равен нулю. Следовательно, существует хотя бы одна точка $\theta=\theta'\in[0,1]$ , где функция $f(\theta)$ принимает нулевое значение, и следствие I доказано.

Если в условиях теоремы положим $m=2N-1$ , то соотношение (3) примет следующий простой вид:

$$a_N \cos 2\pi\theta - b_N \sin 2\pi\theta = 0 . \tag{8}$$

В этом случае, как нетрудно убедиться, ограничение (8) выполняется при $\theta=(1/2\pi)\ \mathrm{arctg}\,|a_N/b_N|+\theta^*$ (допустимые значения $\theta^*$ см. в следствии 2). Следовательно, существуют вполне определенные узлы вида (4) из семейства (2), зависящие от коэффициентов $a_N$ и $b_N$ полинома $T(s)\in H_{2N-1}$ такие, что (I) по ним точна для $T(s)$ . Следствие 2 доказано.

Следствия 3 и 4 следуют из следствия 2 при $a_N=0$ и $b_N=0$ соответственно. Пусть для определенности $a_N=0$ , а $b_N$ – произвольное действительное число, отличное от нуля. Тогда в (4) $\theta$ может принимать значения $0$ , $1/2$ и $1$ . Теперь ясно, что к.ф. (I) для узлов, соответствующих этим значениям параметра $\theta$ , точна для полиномов вида (5).

Следствие 5 также следует из следствия 2. Действительно, предположение о существовании квадратуры с равноотстоящими фиксированными узлами (т.е. в (2) $\theta$ фиксировано) противоречит следствию 2.

Если в условиях теоремы $m=N-1$ , то, как видно из (3), никаких ограничений на коэффициенты тригонометрического полинома $T_m$ не будет, следовательно, справедливо утверждение следствия 6.

Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е. Из следствия I и аппроксимационной теоремы Вейерштрасса легко следует интегральная теорема о среднем (вернее, ее обобщенный вариант): для произвольной функции $x\in\tilde{C}$ существует $N\ (N\in\mathbb{N})$ фиксированных равноотстоящих узлов из семейства (2) (например, при $\theta=\theta'\in[0,1]$ ) таких, что к.ф. (I) по ним точна для $x$ . А при $N=1$ получаем обычную теорему о среднем [3, с.363].

Л и т е р а т у р а

I. К р ы л о в В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.

2. Бахвалов Н. С. Численные методы, I. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 632 с.

3. Никольский С. М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1983. – Т.I. – 464 с.

П.Г.Овчинников

## МЕРЫ НА ЛОГИКАХ ГАДДЕРА И МАРШАНА

Пусть $n, L \in N$, $n \geq 2$, $L \geq 2$; $N = n \cdot L$ и пусть $Q = \{0, \ldots, N-1\}$. Множество $Q$ есть группа относительно сложения по модулю $N$. Через $\Sigma$ обозначим наименьший $\sigma$-класс подмножеств множества $Q$, содержащий все множества вида $I_k = k + \{0, \ldots, L-1\}$, где $k \in Q$ [I]. Через $\mathcal{P}(Q)$ обозначим алгебру всех подмножеств множества $Q$.

Теорема. I). Любой заряд на $\Sigma$ продолжается до заряда на $\mathcal{P}(Q)$. 2). Если $n \geq 3$ или $n = L = 2$, то любая мера на $\Sigma$ продолжается до меры на $\mathcal{P}(Q)$. 3). Если $n = 2$, $L \geq 3$, то существует мера на $\Sigma$, которая не продолжается до меры на $\mathcal{P}(Q)$.

Замечание. Утверждение I) равносильно теореме I [I]. Мы приводим другое доказательство. Утверждение 2) в работе [I] доказано для частного случая $L = 2$ (теорема 2). К сожалению, в теореме 3 [I] ошибочно утверждается, что если $L \geq 3$, то на $\Sigma$ существует мера, которая не продолжается до меры на $\mathcal{P}(Q)$ (на самом деле это так лишь при $n = 2$). Для случая $n = L = 3$ в [I] говорится, что на $\Sigma$ существует мера $\mu$, для которой $(\mu(I_0), \ldots, \mu(I_8)) = (5, 3, 3, 2, 5, 2, 3, 2, 5)$. Покажем, что такой меры $\mu$ на $\Sigma$ не существует. В противном случае $\mu(\{1,2,6\}) = 10 - \mu(I_3) - \mu(I_7) = 10 - 2 - 2 = 6$, $\mu(\{0,4,8\}) = 10 - \mu(I_1) - \mu(I_5) = 10 - 3 - 2 = 5$, $\mu(\{3,5,7\}) = 10 - \mu(\{1,2,6\}) - \mu(\{0,4,8\}) = 10 - 6 - 5 = -1 < 0$ – противоречие.

Доказательство I). Пусть $W$ и $V$ – векторные пространства всех (вещественных) зарядов на $\mathcal{P}(Q)$ и $\Sigma$ соответственно; линейное отображение $\sigma: W \to V$ ставит в соответствие каждому $\mu \in W$ его ограничение на $\Sigma$. Пусть $\mu \in \operatorname{Ker} \sigma$ и $\mu(\{1\}) = \ldots = \mu(\{L-1\}) = 0$. Легко видеть, что тогда $\mu = 0$. Следовательно, $\dim \operatorname{Ker} \sigma \leq L - 1$. Пусть $\nu \in V$ и $\nu(I_1) = \ldots =$