А. В. Казанцев, Об одной задаче, связанной с экстремумом внутреннего радиуса, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 47–62

9. Becker J., Pommerenke Ch. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete // J. reine und angew. Math. - 1984. - V.354. - P.74 - 94.

Доложено на семинаре 3 апреля 1989 г.

А.В.Казанцев

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЭКСТРЕМУМОМ ВНУТРЕННЕГО РАДИУСА

Одной из величин, связанных с областью $f(E)$, в которую преобразуется единичный круг $E=\{\zeta : |\zeta|<1\}$ под действием регулярной и локально однолистной функции $f(\zeta)$, является внутренний (конформный) радиус этой области

$$R(\zeta)\equiv R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) \tag{I}$$

в точке $f(\zeta)$. Примечательным свойством функции $R(\zeta)$ является ее связь с обратными краевыми задачами (окз) [I]: если $f(\zeta)$ - решение внутренней окз по некоторым граничным условиям, то число решений внешней окз по этим условиям не превосходит числа критических точек (I), которые определяются из уравнения Гахова [2]

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2). \tag{2}$$

Единственность критической точки (I) является критерием однозначной разрешимости соответствующей внешней задачи ([I], [3]). Первые достаточные признаки единственности критической точки (I) в связи с окз были выделены в статье [I] с помощью метода подчиненности и получили дальнейшее развитие в работах [3] - [5].

В данной статье с использованием подходов из [6] (с.3I) и [7] указанный метод применяется к исследованию следующей задачи.

Пусть H - класс регулярных и локально однолистных в E функций $\mathcal{F}(\zeta)$ с условием

$$\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}'(0) - 1 = 0 \quad ; \tag{3}$$

$A_n,\ n \geqslant 2$, - подкласс H функций $f(\zeta)$ с дополнительными ограничениями

$$f''(0)=f'''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=0 \quad . \tag{4}$$

Равенство $f''(0)=0$ в силу (2) выделяет нулевую критическую точку (I). Для $\mathcal{F}(\zeta)\in H$, $a\geqslant 0$ и $n\geqslant 2$, обозначим через $A_n(a, \mathcal{F})$ подкласс A_n функций $f(\zeta)$, удовлетворяющих условию подчиненности

$$\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) \prec a\mathcal{F}(\zeta) \ , \ \zeta\in E \ , \tag{5}$$

т.е.

$$\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) = a\,\mathcal{F}(\varphi(\zeta)) \ , \ \zeta\in E \tag{6}$$

(см. напр., [8], с.356 - 357), где $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца ([8], с.319);

$$\partial A_n(a, \mathcal{F}) = \left\{ f(\zeta)\in A_n : \zeta f''(\zeta)/f'(\zeta) = a\mathcal{F}(\eta\zeta^n), |\eta|=1, \zeta\in E \right\} .$$

Через $k(f)$ обозначим число критических точек (I) и для произвольного фиксированного $n\geqslant 2$ рассмотрим функционал

$$a_n(\mathcal{F}) = \sup\left\{ a\geqslant 0 : f(\zeta)\in A_n(a,\mathcal{F}) \Rightarrow k(f)=1 \right\}$$

(ср. с [3]) при $\mathcal{F}(\zeta)\in H$.

Задача состоит в описании множества $\mathcal{M}_n\subset H$ функций $\mathcal{F}(\zeta)$ с ненулевыми значениями $a_n(\mathcal{F})$, $n\geqslant 2$. Таким образом, при $\mathcal{F}(\zeta)\in\mathcal{M}_n$ и $0<a<a_n(\mathcal{F})$ подчиненность (5) будет условием единственности нулевой критической точки (I).

В первом разделе статьи исследуется действие функционала $a_n(\mathcal{F})$ на классе

$$H_{\mathbb{R}} = \left\{ \mathcal{F}(\zeta)\in H : |\mathcal{F}(\zeta)| \leqslant \mathcal{F}(|\zeta|) \ , \ \zeta\in E \right\} ;$$

в частности, показано, что решение указанной задачи на этом классе допускает эквивалентное описание в терминах некоторого банахова пространства. С использованием полученных результатов во втором и третьем разделах устанавливается вложение в подмножество

$$\Gamma_n = \left\{ \mathcal{F}(\zeta)\in H : a_n(\mathcal{F})\geqslant n \right\} \subset \mathcal{M}_n \ , \ n\geqslant 2 \ ,$$

класса S^0 выпуклых нормированных функций и некоторых его расширений.

I. <u>Класс функций H_R</u>. Явный вид и область значений $a_n(\mathcal{F})$ при $\mathcal{F}(\zeta)\in H_R$ устанавливает следующая

<u>Теорема I</u>. **Пусть** $\mathcal{F}(\zeta)\in H_R$, $n\geq 2$ **и функция** $g_n(\rho;\mathcal{F})$ **задана на отрезке** $[0,1]$ **соотношениями** $g_n(\rho;\mathcal{F})=2\rho^2/[(1-\rho^2)\mathcal{F}(\rho^n)]$, $\rho\in[0,1)$, $g_n(1;\mathcal{F})=\lim\limits_{\rho\to 1} g_n(\rho;\mathcal{F})$. **Тогда**

$$a_n(\mathcal{F})=\min_{\rho\in[0,1]} g_n(\rho;\mathcal{F}), \tag{7}$$

и образ H_R **под действием функционала** a_n **целиком заполняет отрезок** $[0,a_n(\mathcal{F}_0)]$, **где** $\mathcal{F}_0(\zeta)=\zeta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $g_n(\rho;\mathcal{F})$ непрерывна на $[0, 1)$ и полунепрерывна снизу в точке $\rho=1$, следовательно, достигает своего минимума на $[0,1]$ (см., напр., [9], с.93).

Пусть $\alpha=\min\limits_{\rho\in[0,1]} g_n(\rho;\mathcal{F})$ и $f(\zeta)\in A_n(a,\mathcal{F})$, $0\leq a\leq\alpha$, т.е. выполняются соотношения (5) и (6), причем в силу леммы Шварца и ограничений (4) будет

$$|\varphi(\zeta)|\leq|\zeta|^n,\ \zeta\in E, \tag{8}$$

с равенством (при $\zeta\neq 0$) только в случае $\varphi(\zeta)=\eta\zeta^n, |\eta|=1$ ([8], с.323).

В силу условия $\mathcal{F}(\zeta)\in H_R$ и определения α из (5), (6) и (8) следует, что

$$|\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)|=a|\mathcal{F}(\varphi(\zeta))|\leq\alpha\mathcal{F}(|\varphi(\zeta)|)\leq\alpha\mathcal{F}(|\zeta|^n)\leq 2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2),\zeta\in E \tag{9}$$

(предположение о знаке равенства в (2) при $\zeta_0\neq 0$ приводит к заключению $\alpha>0$ и $f\in\partial A_n(\alpha,\mathcal{F})$). Таким образом, при $a<\alpha$ или при $\alpha=0$ цепочка неравенств (9) с учетом (2) дает $k(f)=1$, т.е. $a_n(\mathcal{F})\geq\alpha$.

Пусть теперь $M_n(\mathcal{F})\subseteq[0,1]$ – число точек глобального минимума функции $g_n(\rho;\mathcal{F})$. Исследуем два возможных случая.

1) $M_n(\mathcal{F})=[0,1]$. Тогда $n=2$, $\alpha=g_n(\rho;\mathcal{F})=2$ и $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1(\zeta)\equiv\zeta/(1-\zeta)$ в силу $\mathcal{F}(\zeta)\in H$ и теоремы единственности для аналитических функций. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим функцию $f_\varepsilon(\zeta)$ с уравнением (6), где $a=2+\varepsilon$ и $\varphi(\zeta)=r\zeta^2$, $r\in(2/(2+\varepsilon),1)$. Имеем $f_\varepsilon\in A_2(2+\varepsilon,\mathcal{F}_1)\setminus A_2(2,\mathcal{F}_1)$ и $k(f_\varepsilon)=3$. В силу определения функционала a_n следует, что $a_2(\mathcal{F}_1)=2$.

2) $M_n(\mathcal{F})\neq[0,1]$. В этом случае $\sup_{\rho\in[0,1]} g_n(\rho;\mathcal{F})>\alpha$. Полагая $f\in\partial A_n(\alpha+\varepsilon,\mathcal{F})$ для достаточно малого $\varepsilon>0$, с помощью

несложной модификации теоремы Больцано – Коши, примененной к $g_n(\rho;\mathcal{F})$, можно показать, что (I), кроме $\zeta=0$, имеет по меньшей мере n критических точек в E, т.е. $k(f)\geq n+1$. Таким образом, $a_n(\mathcal{F})=\alpha$ по определению a_n, и формула (7) установлена.

Для обоснования второй части теоремы I воспользуемся оценкой

$$\mathcal{F}(|\zeta|)\geq|\zeta|\ ,\ \zeta\in E\ ,\ \mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}\ , \tag{IO}$$

которая получается с учетом (3) интегрированием неравенства $u'_{\theta^2}(\rho,0)=-\rho(d/d\rho)\rho(\mathcal{F}'/\mathcal{F})(\rho)\leq 0$, выражающего необходимое условие максимума функции $u(\rho,\theta)=\ln|\mathcal{F}(\rho e^{i\theta})|$ при $\theta=0$. С использованием (IO) и следствия

$$\mathcal{F}(\rho)\leq\mathcal{F}^*(\rho),\rho\in[0,1]\Rightarrow a_n(\mathcal{F})\geq a_n(\mathcal{F}^*),\ n\geq 2\ , \tag{II}$$

формулы (7) имеем $\max\limits_{\mathcal{F}\in H_{\mathbb{R}}} a_n(\mathcal{F})=a_n(\mathcal{F}_0)$, и доказательство теоремы I завершается анализом функций $\mathcal{F}_\alpha(\zeta)=\zeta(1-(1-\alpha)\zeta)/(1-\zeta)$, $0\leq\alpha\leq 1$, и $\mathcal{F}_\beta(\zeta)=\beta(1-(1-\zeta)^{1/\beta})/(1-\zeta), 1\leq\beta\leq\infty\ (a_n(\mathcal{F}_\beta)=n/\beta)$ из $H_{\mathbb{R}}$.

Укажем значения a_n, $n\geq 2$, на некоторых $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$. Соотношения

$$a_2(\mathcal{F}_0)=2\ ,\ a_n(\mathcal{F}_0)=n[1+2/(n-2)]^{(n-2)/2},\ n\geq 3$$

(с импликацией $f\in\partial A_n(a_n(\mathcal{F}_0),\mathcal{F}_0)\Rightarrow k(f)=n+1, n\geq 3$), по-существу, были доказаны в [5] (теорема 6) так же, как и равенство $a_2(\mathcal{F}_S)=2$ для функции $\mathcal{F}_S(\zeta)=\frac{1}{2}\ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$, отображающей E на полосу $\{w:|\operatorname{Im} w|<\pi/4\}$ (теорема 5). Оценку $a_n(\mathcal{F}_S)\geq n$ можно получить с учетом $\mathcal{F}_S(|\zeta|)\leq\mathcal{F}_1(|\zeta|)$, $\zeta\in E$, из (II), непосредственно вычисляя $a_n(\mathcal{F}_1)=n$, $n\geq 2$.

Из доказательства теоремы I немедленно вытекает

<u>Следствие I</u>. Пусть $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$ и $n\geq 2$. **Тогда множество функций $f(\zeta)$ из $A_n(a_n(\mathcal{F}),\mathcal{F})$, для которых $k(f)>1$, либо пусто, либо в точности совпадает с $\partial A_n(a_n(\mathcal{F}),\mathcal{F})$.**

С помощью формулы (7), определения $g_n(1;\mathcal{F})$ и неравенства $a_2(\mathcal{F})\leq 2$, $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$, получается

<u>Следствие 2</u>. Если $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$, то

$a_2(\mathcal{F}) \leq \min\left\{2{,}2/\overline{\lim\limits_{\rho\to 1}}(1-\rho)\mathcal{F}(\rho)\right\}, a_n(\mathcal{F}) \leq n/\overline{\lim\limits_{\rho\to 1}}(1-\rho)\mathcal{F}(\rho), n \geq 3$.
Как показывает следующее утверждение, класс $ker_{H_{\mathbb{R}}} a_n = \{\mathcal{F}(\zeta) \in H_{\mathbb{R}} : a_n(\mathcal{F}) = 0\} \subset H_{\mathbb{R}}$ не зависит от $n \geq 2$.

Теорема 2. **Значения функционалов a_n, $n = 2,3, \ldots,$ на функции $\mathcal{F}(\zeta) \in H_{\mathbb{R}}$ образуют неубывающую последовательность, либо целиком состоящую из нулей, либо положительную и удовлетворяющую условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(\mathcal{F}) = +\infty$. Вторая из указанных возможностей имеет место тогда и только тогда, когда выполняется соотношение**

$$(1-\rho)\,\mathcal{F}(\rho) = O(1)\ ,\ \rho \to 1\ . \tag{I2}$$

Доказательство. Пусть $\{a_n(\mathcal{F})\}_{n=2}^{\infty}$ содержит ненулевые элементы. Тогда с помощью следствия 2 получим соотношение (I2), которое в силу импликаций $a_n(\mathcal{F}) = 0 \Rightarrow M_n(\mathcal{F}) = \{1\} \Rightarrow \overline{\lim\limits_{\rho\to 1}}(1-\rho)\mathcal{F}(\rho) = +\infty, n \geq 2$, влечет за собой положительность рассматриваемой последовательности.

Пусть теперь $h_n(\rho;\mathcal{F}) = 1/g_n(\rho;\mathcal{F})$, $n = 2,3, \ldots$. Функции $h_n(\rho;\mathcal{F})$ положительны на (0,I), непрерывны на [0,I) и полунепрерывны сверху в точке $\rho = $ I; $a_n(\mathcal{F}) = 1/\max\limits_{\rho\in[0,1]} h_n(\rho;\mathcal{F}), n \geq 2$. Так как $h_n(0;\mathcal{F}) = 0$, $n \geq 3$, и $h_n(1;\mathcal{F}) \equiv \frac{1}{n}\overline{\lim\limits_{\rho\to 1}}(1-\rho)\mathcal{F}(\rho) = O(1/n)$, $n \to \infty$, в силу определения $g_n(1;\mathcal{F})$ и соотношения (I2), то из условия монотонности $\mathcal{F}(\rho)$ на (0,I) следует, что последовательность функций $h_n(\rho;\mathcal{F})$ монотонна и сходится к нулю в каждой точке $\rho \in$ [0,I] при $n \to \infty$, поэтому $\max\limits_{\rho\in[0,1]} h_n(\rho;\mathcal{F}) \downarrow 0, n \to \infty$ ([I0], с.87, № I26), а значит, последовательность $a_n(\mathcal{F})$ монотонна, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(\mathcal{F}) = +\infty$. Теорема 2 доказана.

Критерием, выделяющим $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}} \setminus ker_{H_{\mathbb{R}}} a_n$ из $H_{\mathbb{R}}$, служит следующая

Теорема 3. **Класс $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ содержит те и только те функции $\mathcal{F}(\zeta) \in H_{\mathbb{R}}$, которые являются элементами комплексного банахова пространства $\widetilde{B}_1$ ([II]) аналитических в E функций с нормой $\|\mathcal{F}\|_{\widetilde{B}_1} = \sup_{\zeta\in E}(1-|\zeta|)\,|\mathcal{F}(\zeta)|$.**

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Тогда согласно теореме I имеем, в частности $(1-\rho^2)\mathcal{F}(\rho^2) \leq 2\rho^2/a_2(\mathcal{F})$, $\rho \in [0,1)(a_2(\mathcal{F}) > 0)$, откуда $(1-\rho)\mathcal{F}(\rho) \leq 2/a_2(\mathcal{F}), \rho \in [0,1)$, что по определению $H_{\mathbb{R}}$ дает $\mathcal{F}(\zeta) \in \widetilde{B}_1$.

Обратно, пусть $\mathcal{F}(\zeta) \in \tilde{B}_1 \cap H_R$. Тогда существует $b > 0$, такое что $\| \mathcal{F} \|_{\tilde{b}_1} \leq b$, т.е.

$$|\mathcal{F}(\zeta)| \leq b/(1 - |\zeta|), \quad \zeta \in E. \tag{13}$$

По лемме Шварца из (13) с учетом (3) получим

$$|\mathcal{F}(\zeta)| \leq 4b|\zeta|, \quad |\zeta| \leq 1/2 \tag{14}$$

(см., напр., [3]). Рассмотрим $h_n(\rho; \mathcal{F})$, $n \geq 2$. В силу (13) и (14) имеем

$$h_n(\rho; \mathcal{F}) \leq \max\left\{ 2b \max_{\rho^n \leq 1/2} h_{1,n}(\rho), \frac{b}{2} \max_{\rho^n \geq 1/2} h_{2,n}(\rho) \right\}, \tag{15}$$

где $h_{1,n}(\rho) = 2h_n(\rho; \mathcal{F}_0) \equiv (1-\rho^2)\rho^{n-2}$, $h_{2,n}(\rho) = (1-\rho^2)/[\rho^2(1-\rho^n)]$, $n \geq 2$. Функция $h_{1,n}(\rho)$ достигает своего максимума в единственной точке $\rho_n = \sqrt{(n-2)/2} < \sqrt[n]{1/2}$, функция $h_{2,n}(\rho)$ убывает на $[\sqrt[n]{1/2}, 1)$. Поэтому в силу $2bh_{1,n}(\rho_n) > 2bh_{1,n}(\sqrt[n]{1/2}) = \frac{b}{2} h_{2,n}(\sqrt[n]{1/2})$ неравенство (15) перепишется в виде $h_n(\rho; \mathcal{F}) \leq 2bh_{1,n}(\rho_n)$, $\rho \in [0, 1]$, что приведет к неравенству $a_n(\mathcal{F}) \equiv 1/\max_{\rho \in [0,1]} h_n(\rho; \mathcal{F}) \geq 1/[2bh_{1,n}(\rho_n)] > 0$, $n \geq 2$ и $\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Теорема 3 доказана.

2. <u>Экстремальное свойство класса выпуклых функций</u>. Следующее утверждение позволяет выделять подклассы в $\mathcal{M}_n$, $n \geq 2$, с помощью функций из $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $\mathcal{H} \subset H$, $n \geq 2$ и существует функция $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ с условием

$$|\mathcal{F}(\zeta)| \leq \tilde{\mathcal{F}}(|\zeta|), \quad \zeta \in E, \quad \mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{H}. \tag{16}$$

Тогда $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_n$. Если, кроме того, $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta) \equiv \mathcal{F}_1(\zeta)$, то $\mathcal{H} \subset \Gamma_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной функции $f \in A_n(a_n(\tilde{\mathcal{F}}), \mathcal{F})$, $\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{H}$, в силу (16) справедлива цепочка неравенств (9) с $\alpha = a_n(\tilde{\mathcal{F}})$. Поэтому $a_n(\mathcal{F}) \geq a_n(\tilde{\mathcal{F}})$, $\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{H}$, откуда по определению $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{M}_n$ и Γ_n следует заключение леммы 1.

Таким образом, при выполнении условий леммы 1 соотношение (5) с $a = a_n(\tilde{\mathcal{F}})$, $n \geq 2$, является условием единственности критической точки (1) при любой функции $\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{H}$.

Обозначив $A_n(a, \mathcal{H}) = \bigcup_{\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{H}} A_n(a, \mathcal{F})$, $\partial A_n(a, \mathcal{H}) = \bigcup_{\mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{H}} \partial A_n(a, \mathcal{F})$ для $a \geq 0$, $\mathcal{H} \subset H$ и $n \geq 2$, введем следующее

Определение. Пусть для некоторого класса $\mathcal{H}\subset H$ функций $\mathcal{F}(\zeta)$ подчиненность (5) при $0<a<\bar{a}$, $n\geqslant 2$ и $f(\zeta)\in A_n(a,\mathcal{H})$ представляет собой условие единственности критической точки (I). Постоянная $\bar{a}$ называется неулучшаемой (для класса $\mathcal{H}$), если существует $\mathcal{F}(\zeta)\in\mathcal{H}$ с $a_n(\mathcal{F})=\bar{a}$, либо для любого $\varepsilon>0$ существует функция $f(\zeta)\in A_n(\bar{a}+\varepsilon,\mathcal{H})\setminus A_n(\bar{a},\mathcal{H})$ (или $f(\zeta)\in\partial A_n(\bar{a}+\varepsilon,\mathcal{H})$), для которой $\kappa(f)>1$.

Для класса $\mathcal{H}=\{\mathcal{F}\}$ неулучшаемой будет постоянная $a_n(\mathcal{F})$ в силу определения a_n.

Применяя лемму I к классу $\mathcal{H}=S^0\subset H$, получим такой результат.

Теорема 4. Пусть $f(\zeta)\in A_n(n,S^0)$ **при произвольном фиксированном $n\geqslant 2$. Тогда внутренний радиус (I) имеет единственную критическую точку $\zeta=0$ за исключением случая, когда $f(E)$ – полоса, что возможно только для $n=2$, при этом $\mathcal{F}(E)$ – полуплоскость $\{w: \operatorname{Re} w>-\frac{1}{2}\}$. Постоянная $\bar{a}=n$ неулучшаема.**

Доказательство. Из оценки на модуль для выпуклой нормированной функции $\mathcal{F}(\zeta)$:

$$|\mathcal{F}(\zeta)|\leqslant \mathcal{F}_1(|\zeta|)\equiv|\zeta|/(1-|\zeta|),\ \zeta\in E, \tag{I7}$$

с равенством при $\zeta\neq 0$ только в случае

$$\mathcal{F}(\zeta)=\varepsilon^{-1}\mathcal{F}_1(\varepsilon\zeta),\ |\varepsilon|=1 \tag{I8}$$

(см., напр., [I2], с. 70). В силу $\mathcal{F}_1(\zeta)\in S^0$, $a_n(\mathcal{F}_1)=n$ и леммы I следует, что $S^0\subset\Gamma_n$ и постоянная $\bar{a}=n$ в условии (5) с $\mathcal{F}(\zeta)\in S^0$ неулучшаема для класса S^0. Для завершения доказательства остается проанализировать предположение о неединственности нулевой критической точки (I). В силу (2) оно влечет за собой равенство в некоторой точке $\zeta_0\neq 0$ между левым и правым концами (9) с $\alpha=n$. Последнее, в свою очередь, по лемме Шварца приводит к заключению $n=2$ и $f(\zeta)\in\partial A_2(2,\mathcal{F})$, т.е.

$$\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)=2\mathcal{F}(\eta\zeta^2),\ |\eta|=1. \tag{I9}$$

Поэтому уравнение (2) в точке $\zeta=\zeta_0$ после взятия модуля примет вид $|\mathcal{F}(\omega_0)|=\mathcal{F}_1(|\omega_0|)$, $\omega_0=\eta\zeta_0^2\neq 0$. Это будет означать, что в оценке (I7) для выпуклой функции $\mathcal{F}(\zeta)$ при $\zeta=\omega_0$ достигается равенство; оно приведет к функции вида (I8) (отображающей E на полуплоскость). Подставляя эту функцию в (I9), получим $\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)=2\varepsilon^{-1}\mathcal{F}_1(\varepsilon\eta\zeta^4)$. Анализ уравнения Гахова в данном случае позволяет сделать вывод о том, что выдвинутое предположение о неединственности выполняется только при $\varepsilon=1$, т.е. при $f(\zeta)=\eta^{-1/2}\mathcal{F}_S(\eta^{1/2}\zeta)$. (При этом, как известно [I3], критические точки (I) целиком покрывают некоторый диаметр единичного круга.) Теорема 4 доказана.

Исключительный случай в теореме 4 не появится, если выпуклость функции $\mathcal{F}(\zeta)$, входящей в соотношение (5), заменить на принадлежность классу Нехари с условием [I4]

$$(1-|\zeta|^2)^2\left|\{\mathcal{F},\zeta\}\right|\le 2\ ,\quad \zeta\in E\ , \tag{20}$$

где $\{\mathcal{F},\zeta\}$ – шварциан, и дополнительно потребовать, чтобы $\mathcal{F}''(0)=0$, т.е. $\mathcal{F}(\zeta)\in A_2$. Действительно, в этом случае для функции $\mathcal{F}(\zeta)$ справедливо неравенство

$$Re\left\{\zeta\mathcal{F}''(\zeta)/\mathcal{F}'(\zeta)\right\}<2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2)\ ,\ 0<|\zeta|<1 \tag{2I}$$

(см. [3]), откуда с помощью интегрирования можно заключить, что

$$|\mathcal{F}(\zeta)|\le\mathcal{F}_S(|\zeta|)=\frac{1}{2}\ln\left[(1+|\zeta|)/(1-|\zeta|)\right]<\mathcal{F}_1(|\zeta|),\ 0<|\zeta|<1. \tag{22}$$

Дальнейшее обоснование аналогично доказательству теоремы 4. Как показывает следующий пример, условие $\mathcal{F}''(0)=0$ в данном случае оказывается существенным.

Пусть

$$\mathcal{F}(\zeta)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha}-1\right]\ , \tag{23}$$

где $1<\alpha\le\sqrt{2}$. Имеем $\mathcal{F}''(0)=2\alpha\ne 0$. Так как $\{\mathcal{F},\zeta\}=2(1-\alpha^2)/(1-\zeta^2)^2$, и при указанных значениях параметра α всегда будет $|1-\alpha^2|\le 1$, то $\mathcal{F}(\zeta)$ удовлетворяет условию (20). Однако, поскольку $\mathcal{F}(\zeta)\in H_R$, но $\mathcal{F}(\zeta)\notin\tilde{B}_1$, то по теореме 3 имеем $a_n(\mathcal{F})=0$, $n\ge 2$.

Полученный результат можно переформулировать в терминах линейно-инвариантных семейств. Для этого напомним некоторые определения и утверждения из работы [I5].

Семейство функций $\mathfrak{M}\subset H$ называется линейно-инвариантным, если вместе с $\mathcal{F}(\zeta)$ ему принадлежит также и функция

$$[\mathcal{F}(\varphi(\zeta))-\mathcal{F}(\varphi(0))]\ /\varphi'(0)\ \mathcal{F}'(\varphi(0)) \tag{24}$$

для любого автоморфизма $\varphi(\zeta)$ круга E .

Линейно-инвариантное семейство, порожденное функцией $\mathcal{F}(\zeta)$, по определению, состоит из функций вида (24) для всевозможных автоморфизмов $\varphi(\zeta)$.

Порядок α линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$ есть величина $\alpha=\sup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{M}}|\mathcal{F}''(0)|/2$. Имеет место неравенство $\alpha\geqslant 1$, причем $\alpha=1$ тогда и только тогда, когда все функции из $\mathfrak{M}$ выпуклые. Объединение всех линейно-инвариантных семейств порядка $\leqslant\alpha(1\leqslant\alpha<\infty)$ называется универсальным линейно-инвариантным семейством порядка α и обозначается через $\mathcal{U}_\alpha$; $\mathcal{U}_1=S^0$.

Теперь вернемся к рассмотренному примеру и напомним, что порядок линейно-инвариантного семейства, порожденного функцией (23), равен α , т.е. $\mathcal{F}(\zeta)\in\mathcal{U}_\alpha$ ([I5]). Тогда полученный выше результат будет означать, что для любых $n\geqslant 2$ и $\alpha>1$ суще - ствует функция $\mathcal{F}(\zeta)\in\mathcal{U}_\alpha$ (вида (23)) такая, что $\mathcal{F}(\zeta)\notin\mathcal{M}_n$ и, кроме того, $\mathcal{F}(\zeta)\notin\Gamma_n$. Таким образом, справедливо следующее утверждение, выражающее неулучшаемость вложения $S^0\subset\mathcal{M}_n$ (а также $S^0\subset\Gamma_n$), $n\geqslant 2$ (экстремальность семейства $\mathcal{U}_1$).

<u>Теорема 5</u>. **Максимальным универсальным линейно-инвариантным семейством, целиком содержащимся в $\mathcal{M}_n$ (и более того, в Γ_n) при любом $n\geqslant 2$, является класс S^0 выпуклых функций.**

3. <u>Расширения класса S^0 , не выводящие из Γ_n , $n\geqslant 2$</u> . Как показывает теорема 5, поиск подклассов Γ_n в виде универ - сальных линейно-инвариантных семейств дает весьма ограниченную информацию о структуре Γ_n . Прежде чем перейти к более подробному ее описанию, докажем следующее дополнение к лемме I.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathcal{F}(\zeta)\in H$ и $n\geqslant 2$. Тогда

I) если при $0<|\zeta|<1$ выполняется строгая оценка (I7) либо

$$Re\ \mathcal{F}(\zeta)<\mathcal{F}_1(|\zeta|) \quad , \tag{25}$$

то $\mathcal{F}(\zeta)\in\Gamma_n$. Если, кроме того,

$$\mathcal{F}:[0,1)\to[0,+\infty) \quad , \tag{26}$$

то $a_n(\mathcal{F})=n$, в случае $n=2$ всегда, а для $n\geqslant 3$ – при условии

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}\,(1-\rho)\,\mathcal{F}(\rho)=1\ , \tag{27}$$

необходимом, когда $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$;

2) если же при выполнении (26) в некоторой точке $\rho\in(0,1)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{F}(\rho)>\mathcal{F}_1(\rho)\ , \tag{28}$$

то $\mathcal{F}(\zeta)\notin\Gamma_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы получается из (6) при $a=n$ с помощью (I8) и с учетом (2) аналогично (9): $|\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)|<2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2),0<|\zeta|<1$; точно так же можно показать, что неравенство (25) приводит к оценке (2I) для $f(\zeta)\in A_n(n,\mathcal{F})$.

Докажем соотношение $a_n(\mathcal{F})=n$ при условии (26). В этом случае для $\zeta=\rho\in(0,1)$ оба неравенства леммы, приводящие к $\mathcal{F}(\zeta)\in\Gamma_n$, эквивалентны оценке

$$\mathcal{F}(\rho)<\rho/(1-\rho)\ ,\quad \rho\in(0,1)\ . \tag{29}$$

Требуется установить существование функции $f(\zeta)$, удовлетворяющей условию (5) с $a=n(1+\varepsilon)$ при сколь угодно малом $\varepsilon>0$, для которой выполняется $k(f)>1$. Положим $f(\zeta)\in\partial A_n(n(1+\varepsilon),\mathcal{F})$ с $\eta=0$, где выберем $\varepsilon>0$ таким, чтобы $(1+\varepsilon)\mathcal{F}(\rho_0^n)<\rho_0^n/(1-\rho_0^n)$ для некоторого $\rho_0\in(0,1)$, что возможно в силу (29). Поэтому

$$\rho_0 f''(\rho_0)/f'(\rho_0)=n(1+\varepsilon)\mathcal{F}(\rho_0^n)<n\rho_0^n/(1-\rho_0^n)\le 2\rho_0^2/(1-\rho_0^2)\ . \tag{30}$$

Устанавливаемое утверждение будет следовать теперь с помощью известной теоремы классического анализа из (30) и оценки

$$\rho_1 f''(\rho_1)/f'(\rho_1)>2\rho_1^2/(1-\rho_1^2) \tag{31}$$

для некоторого $\rho_1\in(0,1)$, $\rho_1\ne\rho_0$, поскольку в результате уравнение (2) обратится в тождество в некоторой точке из (0,I), заключенной между ρ_0 и ρ_1 . При $n=2$ неравенство (3I) получается для достаточно малого ρ_1 из соотношения $\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}f''(\rho)/f'(\rho)=2(1+\varepsilon)>2$, справедливого в силу определения $f(\zeta)$; при $n\geqslant 3$ – для ρ_1 , достаточно близкого к единице, из равенства (27):

$$\overline{\lim_{\rho\to 1}}(1-\rho^2)\rho f''(\rho)/f'(\rho)=\overline{\lim_{\rho\to 1}}\ 2n(1+\varepsilon)(1-\rho)\mathcal{F}(\rho^n)>$$

$$>\overline{\lim_{\rho\to 1}}\ 2n(1-\rho)\mathcal{F}(\rho^n)=\overline{\lim_{\rho\to 1}}\ 2(1-\rho^n)\mathcal{F}(\rho^n)=\lim_{\rho\to 1}\ 2\rho^2 .$$

Покажем необходимость соотношения (27) для выполнения $a_n(\mathcal{F})=n$, $n\geqslant 3$, при $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$. Из условия (29) следует, что $\overline{\lim_{\rho\to 1}}(1-\rho)\mathcal{F}(\rho)\leq 1$. Если бы это неравенство было строгим, то в силу (29) оказалась бы справедливой оценка $g_n(\rho,\mathcal{F})>n$, $\rho\in[0,1]$, откуда $a_n(\mathcal{F})>n$.

Чтобы обосновать последнее утверждение леммы, рассмотрим семейство функций $f_\tau(\zeta)$, $\tau\in[0,1]$, с условием $\zeta f_\tau''(\zeta)/f_\tau'(\zeta)=$ $=2\mathcal{F}(\tau\zeta^2)$, $\zeta\in E$. Уравнение Гахова при $\zeta=\rho\in(0,1)$ для $f_\tau(\zeta)$ записывается в виде $h(\tau)\equiv\mathcal{F}(\tau\rho^2)-\rho^2(1-\rho^2)=0$. Имеем $h(0)<0$ в силу (3) и $h(1)>0$ в силу (28). Поэтому существует $\tau_0\in(0,1)$ такое, что $h(\tau_0)=0$, т.е. $\zeta=\rho$ – еще одна (помимо $\zeta=0$) критическая точка (I) для функции $f_{\tau_0}(\zeta)$. Следовательно, $\mathcal{F}(\zeta)\notin\Gamma_2$, и лемма 2 доказана.

Приводимый ниже результат устанавливает вложение в Γ_n и $\mathcal{M}_n$ некоторых подклассов, ставших традиционными в геометрической теории функций. Их стандартные обозначения таковы: $S^*(b)$, $b>0$, – класс звездообразных функций $\mathcal{F}(\zeta)$ порядка b, т.е. удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{Re}\{\zeta\mathcal{F}'(\zeta)/\mathcal{F}(\zeta)\}>b\ ,\quad \zeta\in E \tag{32}$$

([I6], с.II), $S^*=S^*(0)$ – класс звездообразных функций, $\overline{co}\ S^o$ – выпуклая замкнутая оболочка ([I6], с.I72) класса S^o, состоящая из функций $\mathcal{F}(\zeta)$ с условием

$$\operatorname{Re}\{\mathcal{F}(\zeta)/\zeta\}>1/2\ ,\quad \zeta\in E \tag{33}$$

([I6], с.II), и $S^{(2)}$ – класс нечетных однолистных функций. Далее, обозначим через R класс функций $\mathcal{F}(\zeta)$, таких что

$$\operatorname{Re}\ \mathcal{F}'(\zeta)>0\ ,\quad \zeta\in E\ , \tag{34}$$

через N – класс Нехари с оценкой (20).

Имеет место

<u>Теорема 6</u>. **Подклассами Γ_n при произвольном фиксированном $n\geqslant 2$ являются классы $\overline{co}\ S^o$, $S^*(1/2)$, R и $S^{(2)}$, а в**

дополнительном предположении $\mathcal{F}''(0)=0$ – также классы S^* и N. Постоянная $a=n$ в (5) неулучшаема для произвольного $n\geq 2$ только в случае первых двух из рассматриваемых подклас- сов, для которых при $n=2$ появляется семейство $\partial A_2(2,\mathcal{F}_1)$ исключительных функций. Неулучшаемость $a=n$ в (5) для ос- тальных подклассов имеет место только при $n=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем в два этапа: I) получение неравенства (I7) и исследование исключительной ситуации (там, где она возникает) и 2) обоснование неулучшаемости посто- янной $a=n$ в (5).

I) Для класса $N\cap A_2$ строгая оценка (I7) была доказана в предыдущем разделе; для остальных классов она будет следовать из соответствующих неравенств с использованием подчиненности, причем для $S^{(2)}$ таким неравенством является

$$|\mathcal{F}(z)|\leq |z|/(1-|z|^2)\ , \quad z\in E \tag{35}$$

(см., напр., [I2], с.70). Действительно, для каждого из рассматриваемых классов функций $\mathcal{F}(z)$ получается оценка (I6), в которой мажоранта $\tilde{\mathcal{F}}(z)$ имеет один из следующих видов:

$$\tilde{\mathcal{F}}(z)=\begin{cases} \mathcal{F}_1(z) & , \quad \mathcal{H}=\overline{co}\ S^0\ ,\ S^*(1/2)\ , \\ z/(1-z^2) & , \quad \mathcal{H}=S^{(2)}\ ,\ S^*\cap A_2, \\ 2\ln(1-z)^{-1}-z & , \quad \mathcal{H}=R\ , \\ \mathcal{F}_S(z) & , \quad \mathcal{H}=N\cap A_2\ , \end{cases}$$

в силу (32) – (35) и (20). Легко проверить, что во всех этих случаях справедливо соотношение

$$\tilde{\mathcal{F}}(|z|)\leq \mathcal{F}_1(|z|)\ , \quad z\in E\ , \tag{36}$$

с достижением равенства при $z\neq 0$ только в случае $\overline{co}\ S^0$ и $S^*(1/2)$. Поскольку для остальных подклассов оценка (I7), следующая из (I6) и (36), будет строгой, то вложение этих подклассов в Γ_n немедленно следует из первого утверждения леммы 2 и исключительной функции при этом не возникает. Доказательство существования такой функции для $\overline{co}\ S^0$ и $S^*(1/2)$ аналогично соответствующей части обоснования теоремы 4. В случае этих двух классов при $\mathcal{F}(\zeta)\neq\mathcal{F}_1(\zeta)$ выполняется неравенство (25) и поэтому оба они вкладываются в Γ_n, так как $a_n(\mathcal{F}_1)=n$.

2) Поскольку $\mathcal{F}_1(\zeta)\in S^0\subset\overline{co}\,S^0,\ S^*(1/2)$ ([I6], с.II), то в случае этих двух классов постоянная $a=n\geqslant 2$ в (5) будет неулучшаемой. Для остальных подклассов в силу точного неравенства (I6) достаточно применить лемму 2 к соответствующим мажорантам $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta)$. Так как последние удовлетворяют (26) и строгому неравенству (I7), то по лемме 2 постоянная $n=2$ является неулучшаемой для указанных подклассов. Наконец, поскольку $\mathcal{F}(\zeta)\in H_{\mathbb{R}}$, то отсутствие неулучшаемости $a=n\geqslant 3$ в (5) эквивалентно нарушению равенства в (27), которое проверяется непосредственно:

$$\lim_{\rho\to 1}(1-\rho)\,\tilde{\mathcal{F}}(\rho)=\begin{cases}1/2\ , & \tilde{\mathcal{F}}(\zeta)\in S^{(2)},\ S^*\cap A_2\ ,\\[2ex] 0\ , & \tilde{\mathcal{F}}(\zeta)\in R\ ,\ N\cap A_2\ .\end{cases}$$

Теорема 6 доказана.

Кратко остановимся на взаимосвязи между подклассами, участвующими в теореме 6. Как уже отмечалось в ее доказательстве, $S^0\subset\overline{co}\,S^0$, $S^0\subset S^*(1/2)\subset S^*$. Кроме того, $S^0\subset N$ ([I7], с.9). Покажем, что при условии $\mathcal{F}''(0)=0$ имеют место включения $S^*\subset\subset\overline{co}\,S^0$ и $S^0\subset\{\mathcal{F}(\zeta):\mathrm{Re}\,\mathcal{F}'(\zeta)>1/2\}\subset R$. Дадим обоснование первого из них (второе доказывается аналогично).

Пусть

$$g(z)=\int_a^z\frac{dz}{z\mathcal{F}'(1/z)}=z+a_0+a_1/z+\ldots,\ a,z\in E^-=\{z:|z|>1\}\qquad(37)$$

(условие $\mathcal{F}''(0)=0$ обеспечивает отсутствие логарифмической особенности у функции $g(z)$). Из (37) имеем $1+zg''(z)/g'(z)=\zeta\mathcal{F}'(\zeta)/\mathcal{F}(\zeta)$, $z\in E^-$, $\zeta=1/z\in E$. Поэтому из $\mathcal{F}(\zeta)\in S^*$ следует, что $g(z)$ принадлежит классу Σ^0 функций, отображающих E^- на области с выпуклым дополнением. В этом случае, как известно ([I8]), для $g(z)$ выполняется неравенство $|g'(z)-1|<1$, $z\in E^-$. Переходя к $\mathcal{F}(\zeta)$, получим $|\zeta/\mathcal{F}(\zeta)-1|<1,\ \zeta\in E$, или (33), что и требовалось доказать.

Замечания. I) В условиях теоремы 6 оценки (32) – (34) и (20) нельзя улучшить, не выходя из Γ_2, если $n=2$, а для классов R и $S^*\cap A_2$ – более того, не выходя из $\mathcal{M}_n$, $n\geqslant 2$.

Действительно, при уменьшении постоянных в неравенствах, определяющих R и $S^*\cap A_2$, получающиеся классы будут обязательно содержать функции, не являющиеся локально однолистными, и потому не принадлежащие $\mathcal{M}_n$.

Далее, функции $\mathcal{F}(\zeta)=\zeta/(1-\zeta)+(1-2b)\zeta^2/(1-\zeta)$ и $\mathcal{F}(\zeta)=\zeta/(1-\zeta)^{2(1-b)}$ $(0<b<1/2)$ удовлетворяют, соответственно, неравенствам $Re\{\mathcal{F}(\zeta)/\zeta\}>b$, $\zeta\in E$, и (32). Легко убедиться в том, что для этих функций выполняется последнее утверждение леммы 2, поэтому замечание доказано для $\overline{co}\,S^o$ и $S^*(1/2)$.

Обратимся теперь к классу $N\cap A_2$ и рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(\zeta)=\frac{1}{i\sqrt{1+b}}\left[\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)^{\sqrt{1+b}}-1\right]\Bigg/\left[\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)^{\sqrt{1+b}}+1\right]\in H$$

$(b>1)$, для которой $\mathcal{F}''(0)=0$ и $\{\mathcal{F},\zeta\}=2b/(1+\zeta^2)^2$. Так как $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\mathcal{F}''(\rho)/\mathcal{F}'(\rho)=\{\mathcal{F},0\}=2b$, то для любого $b>1$ существует $\rho_0\in(0,1)$, такое что при $\rho\in(0,\rho_0)$ имеет место неравенство (31) для $\mathcal{F}(\rho)$. Отсюда интегрированием получаем, что при $\rho\in(0,\rho_0)$ выполняется условие (28) леммы 2, т.е. $\mathcal{F}(\zeta)\notin\Gamma_2$. Таким образом, постоянную 2 в оценке (20) нельзя увеличить, не выходя из Γ_2.

2) Неулучшаемость указанных оценок не препятствует возможности расширения соответствующих подклассов внутри Γ_n при наличии дополнительных ограничений. Так, для класса R имеют место включения $R\cap A_2\subset R^2\cap A_2\subset\Gamma_n$, где $R^2=\{\mathcal{F}(\zeta)\in H: |\arg\mathcal{F}'(\zeta)|<\pi, \zeta\in E\}$. Действительно, условие $\mathcal{F}(\zeta)\in R^2\cap A_2$ эквивалентно представлению $\mathcal{F}'(\zeta)=((1+\varphi(\zeta))/(1-\varphi(\zeta)))^2$, $|\varphi(\zeta)|\le|\zeta|^2$, $\zeta\in E$, откуда $|\mathcal{F}'(\zeta)|\le((1+|\zeta|^2)/(1-|\zeta|^2))^2<1/(1-|\zeta|)^2$, $0<|\zeta|<1$, и строгая оценка (17) получается интегрированием (дальнейший анализ не проводим).

3) Классу Γ_n, $n\geq 2$, будут принадлежать и функции $\mathcal{F}(\zeta)$ с заданным поведением внутреннего радиуса. В качестве конкретных условий можно предложить, например, оценку $|\mathcal{F}'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)\le 1$, определяющую единичный шар в пространстве Блоха (см., напр., [19]) и приводящую к (22), или неравенство (21), которое выражает условие строгого убывания (1) для $\mathcal{F}(\zeta)$ вдоль отрезков $[0,e^{i\alpha})$, $0\le\alpha<2\pi$. Последнее позволяет строить подклассы Γ_n с помощью различных признаков единственности нулевой кри -

тической точки внутреннего радиуса $|\mathcal{F}'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$, получен - ных в [I], [3] - [5] и, вообще говоря, допускающих расширения в Γ_n . Примером такого признака служит условие Беккера $|\zeta\mathcal{F}''(\zeta)/\mathcal{F}'(\zeta)|\leq(1/2)/(1-|\zeta|^2)$, $\zeta\in E$ (выделяющее неулучшаемый под - класс в N ([3])); легко проверить, что постоянную I/2 можно увеличить до четверки, при этом $\mathcal{F}(\zeta)\in\Gamma_n$.

4) Если в определении Γ_n нормировку $\mathcal{F}'(0)=1$ заменить на $|\mathcal{F}'(0)|\leq 1$, то такое видоизмененное семейство будет, в частности, содержать класс B Бибербаха-Эйленберга, состоящий из функций $\mathcal{F}(\zeta)$, регулярных в E и таких, что $\mathcal{F}(\zeta)\mathcal{F}(\omega)\neq 1$ для любых пар точек $\zeta,\omega\in E$. Это вложение основано на оценке $|\mathcal{F}(\zeta)|\leq|\zeta|/(1-|\zeta|^2)^{1/2}$, $\zeta\in E$, справедливой в B (см. [I2],с.265).

В заключение отметим, что полученные результаты допускают аналоги для внешности E^- единичного круга.

Автор благодарит профессора Л.А.Аксентьева за ценные советы и внимание к работе, а также доктора физ.-мат.наук В.В.Горяйнова за полезные замечания.

Литература

I. Аксентьев Л. А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Математика.- 1984. - № 2. - С.3 - II.

2. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах //ДАН СССР.- 1952. - Т.86. - № 4. - С.649 - 652.

3. Аксентьев Л. А., Казанцев А. В. Новое свойство класса Нехари и его применения // Тр.семинара по краевым задачам. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. - Вып.25. - С.33 - 5I.

4. Аксентьев Л. А., Казанцев А.В., Киндер М. И., Киселев А. В. О классах единственности внешней обратной краевой задачи // Тр.семинара по краевым задачам. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990.- Вып.24.- С.39 - 62.

5. Аксентьев Л. А., Казанцев А. В., Киселев А. В. О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. - 1984. - № 10.- С.8 - 18.

6. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи мат.наук. - 1975. - Т.30.- № 4.- С.3 - 60.

7. Х о х л о в Ю. Е. О разрешимости внешних обратных краевых задач для аналитических функций // ДАН СССР. - 1984. - Т.278. - № 2. - С.298 - 301.

8. Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / 2-е изд. перераб. и доп. - М.: Наука, 1966. - 628 с.

9. Г р а у э р т Г., Л и б И., Ф и ш е р В. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Мир, 1971. - 680 с.

10. П о л и а Г., С е г е Г. Задачи и теоремы из анализа. 3-е изд. - М.: Наука, 1978. - Ч.I. - 432 с.

11. К р у ш к а л ь С. Л. Дифференциальные операторы и однолистные функции // ДАН СССР. - 1985. - Т.280. - 13. - С.541 - 544.

12. D u r e n P.L. Univalent functions // N.Y.: Springer-Verlag, 1983. - 383 p.

13. H a e g i H. R. Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen // Compositio Math. - 1950. - V.8.- F.2. - P.81 - 111.

14. N e h a r i Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions//Bull.Amer.Math. Soc. - 1949. - V.55. N 6. - P. 545 - 551.

15. P o m m e r e n k e C h. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen, I // Math. Ann. - 1964. - Bd. 155. - S.108 - 154.

16. S c h o b e r G. Univalent functions - selected topics // Lect. Netes Math. - 1975. - V.478. - P.1 - 200.

17. А в х а д и е в Ф. Г. Об условиях однолистности аналитических функций // Изв. вузов. Математика. - 1970.- № 11.- С.3-13.

18. А к с е н т ь е в Л. А., А в х а д и е в Ф. Г. Об одном классе однолистных функций // Изв. вузов. Математика.- 1970.- № 10. - С.12 - 20.

19. C i m a J. A., W o g e n W. R. Extreme points of the unit ball of Bloch space B_0 // Michigan Math. J. - 1978.- V.25.- P.213 - 222.

Доложено на семинаре 23.01.89 г.