Ф. Г. Авхадиев, Функционал Минковского по областям значений логарифма производной и условия однолистности, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 3–21

Ф.Г.Авхадиев

ФУНКЦИОНАЛ МИНКОВСКОГО ПО ОБЛАСТЯМ ЗНАЧЕНИЙ ЛОГАРИФМА ПРОИЗВОДНОЙ И УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ

При изучении аналитических функций часто возникает такая ситуация: разрешимость той или иной проблемы зависит от области задания функций. Если задача решена для простейшей области, например, для круговой или выпуклой, то распространение результата на области более сложного вида связано с поиском новых методов доказательства и подходящих классов областей. И лишь в редких случаях удается описать в геометрических терминах предельно широкий класс областей, характеризуемых разрешимостью проблемы. В конце 70-х и в 80-е годы рядом авторов было показано (см. обзор Геринга [1]), что для нескольких задач, связанных в основном с продолжимостью или с достаточными условиями инъективности отображений, таким предельно широким классом служит класс однородных областей. Напомним [2, 3], что конечносвязная область $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$ однородна тогда и только тогда, когда любая ее граничная компонента есть либо квазиконформная кривая, либо точка.

В терминах функционала Минковского по областям значений $\ln f'(z)$ или $\ln[f'(z)/R'(z)]$, где $R(z)$ - рациональная функция, в настоящей статье даны достаточные условия однолистности или p -листности аналитических или мероморфных функций, заданных в однородных областях. Центральный результат (теорема 1) относится к функционалу Минковского специального вида, равносильному функционалу $J_1(f) = \sup\{|\arg f'(z)| : z \in \mathcal{D}\}$, и связан с выходом за пределы однородных областей.

§ 1. Определения и основные результаты

Пусть $\mathcal{D}$ - область в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{D})$ - некоторое подмножество мероморфных в $\mathcal{D}$ функций $f(z)$, J -

неотрицательный функционал на $\mathcal{M}$ со значениями $t = \mathcal{J}(f) \in [0, \infty]$, p – натуральное число.

<u>Определение I</u>. Функционал $\mathcal{J}$ назовем p-допустимым (допустимым при p = I) для $\mathcal{M}$ в $\mathcal{D}$, если существует постоянная $\varkappa_p > 0$ такая, что

$f \in \mathcal{M}, \mathcal{J}(f) < \varkappa_p \Rightarrow f(z)$ не более чем p-листна в $\mathcal{D}$,

в частности, при p = I,

$f \in \mathcal{M}, \mathcal{J}(f) < \varkappa_1 \Rightarrow f(z)$ однолистна в $\mathcal{D}$.

Очевидно, наилучшее из возможных значений $\varkappa_p$ определяется как решение экстремальной задачи

$$\varkappa_p^* = \varkappa_p(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \mathcal{J}) = \inf \left\{ \mathcal{J}(f) : f \in \mathcal{M}, n(f, \mathcal{D}) \geq p+1 \right\}, \qquad \text{(I)}$$

где $n(f, \mathcal{D})$ – число листов $f(z)$ в $\mathcal{D}$, т.е.

$$n(f, \mathcal{D}) = \sup_{w \in \bar{\mathbb{C}}} \# \left\{ f^{-1}(w) \right\}.$$

Здесь $\# X$ означает число элементов множества X.

Таким образом, p-допустимость функционала $\mathcal{J}$ равносильна существованию нетривиального решения $\varkappa_p^* > 0$ экстремальной проблемы (I).

Для фиксированного множества $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{D})$ функционал $\mathcal{J}$ определяет класс областей $G(\mathcal{J})$ такой, что $\mathcal{J}$ допустим в

$$\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D} \in G(\mathcal{J}). \qquad (2)$$

В утверждениях вида (2) возникает необходимость ограничиться усеченными множествами областей. В случаях, когда $G(\mathcal{J})$ выделяется из некоторого собственного подмножества всех областей на плоскости, мы будем писать $G'(\mathcal{J})$, где штрих указывает на то, что рассматриваются лишь области с некоторым дополнительным свойством, оговоренным заранее. Ниже используются два вида усеченных множеств областей: конечносвязные области в предположении кусочной гладкости граничных кривых и без этого предположения.

Утверждение (2) станет содержательным, если будет найдено описание $G(\mathcal{J})$ в геометрических терминах. Введем сейчас некоторые классы областей, которые нам потребуются.

Через $\gamma = \gamma(z_1, z_2)$ будем обозначать жорданову спрямляемую дугу, соединяющую точки z_1 и z_2. Пусть $z = z(s)$ – параметрическое представление этой дуги от натурального параметра s, $0 \le s \le l = l(z_1, z_2)$, где $l = l(z_1, z_2)$ – длина дуги $\gamma = \gamma(z_1, z_2)$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{D}$ – область в $\bar{\mathbb{C}}$, λ – положительная постоянная. Будем писать $\mathcal{D} \in G_1^1(\lambda)$, если для любых двух точек z_1 и z_2 из $\mathcal{D} \setminus \{\infty\}$ существует дуга $\gamma = \gamma(z_1, z_2)$ такая, что

$$\frac{l \min\{s, l-s\}}{dist(z(s), \partial\mathcal{D})} \le \lambda |z_1 - z_2| \quad , \quad \forall z = z(s) \in \gamma \ , \tag{3}$$

где $l = l(z_1, z_2)$, $dist(z, \partial\mathcal{D})$ – расстояние от точки z до границы области $\mathcal{D}$.

Положим

$$G_1^1 = U_{\lambda > 0}\, G_1^1(\lambda) \ . \tag{4}$$

Как показано нами [4], условие (3) равносильно двум неравенствам

$$l \le A|z_1 - z_2|, \min\left\{s, l-s\right\} \le B\, dist(z(s), \partial\mathcal{D}), \ \forall z(s) \in \gamma \ , \tag{5}$$

с некоторыми постоянными $A \ge 1$, $B \ge 1$. Следовательно, определенный в (4) класс областей G_1^1 есть в точности класс однородных областей (см. определения Мартио и Сарваса [2], Геринга и Осгуда [3] с ограничениями вида (5)).

В дальнейшем под кусочной гладкостью кривой L в $\bar{\mathbb{C}}$ подразумевается следующее: угол между касательной к кривой L и фиксированным направлением является кусочно-непрерывной функцией точек кривой, причем эта функция имеет конечное число точек разрыва и при подходе к этим точкам сохраняет одностороннюю непрерывность.

Определение 3. Будем писать $\mathcal{D} \in G^*$ и говорить, что $\mathcal{D}$ удовлетворяет условию расходимости лучей, если $\mathcal{D}$ – конечносвязная область с кусочно-гладкой границей $\partial\mathcal{D} = U L_\nu$ и выполняются требования:

а) либо каждая компонента L_ν границы $\partial\mathcal{D}$ является кусочно-гладкой замкнутой жордановой кривой в $\mathbb{C}$, либо $\infty \in L_\nu$ и $L_\nu \setminus \{\infty\}$ представляет собой конечное объединение взаимно непересекающихся кривых L_ν^j таких, что $L_\nu^j \, U \{\infty\}$ – кусочно-гладкая замкнутая жорданова кривая в $\bar{\mathbb{C}}$;

б) область $\mathcal{D}$ не имеет нулевых внешних углов, и, кроме того, либо на $(\partial\mathcal{D})\setminus\{\infty\}$ нет точек возврата, т.е. область не имеет и внутренних нулевых углов в конечных точках;

в) либо пусть z_1, ..., z_μ – все точки возврата на $(\partial\mathcal{D})\setminus\{\infty\}$, $\Gamma_j=\{z: z=z_j+w_j t, |w_j|=1, 0\le t<\infty\}$ – луч, проведенный из z_j в направлении острия, причем Γ_j является односторонней касательной к обеим дугам $\partial\mathcal{D}$, подходящим к точке z_j, $j=$ I, ..., μ. Тогда

в$_\mathrm{I}$) $\Gamma_j\cap\Gamma_{j'}=\emptyset$, $w_j\ne w_{j'}$ при $j\ne j'$;

в$_2$) $\Gamma_j\cap\overline{\mathcal{D}}=\{z_j\}$, $j=1,\dots,\mu$;

в$_3$) в случае $\infty\in L_\nu\subset\partial\mathcal{D}$, $z_j\in L_\nu^\kappa\subset L_\nu$ луч Γ_j не является касательной к L_ν^κ в точке $z=\infty$, т.е. оба предельных значения $(z-z_j)/(w_j|z-z_j|)$ при $z\in L_\nu^\kappa$, $z\to\infty$, отличны от единицы.

Отметим, что если область $\mathcal{D}$ конечносвязна, ограничена кусочно-гладкими кривыми и $\mathcal{D}\in G_1^1$, то $\mathcal{D}\in G^*$.

Пусть $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}_0(\mathcal{D})$ – множество всех мероморфных в области $\mathcal{D}\subset\overline{\mathbb{C}}$ функций $f(z)$, для которых можно определить ветвь $\ln f'(z)$ в $\mathcal{D}$. В частности, $f(z)$ должна быть аналитичной в $\mathcal{D}\setminus\{\infty\}$ и иметь простой полюс в точке $z=\infty$, если $\infty\in\mathcal{D}$. Полагаем $\ln f'(\mathcal{D})=\{\ln f'(z): z\in\mathcal{D}\}$.

Заметим, что если конформное отображение $f:\mathcal{D}\to\overline{\mathbb{C}}$ произвольной области $\mathcal{D}\subset\overline{\mathbb{C}}$ однолистно и $f'(z)\ne 0$ и ∞ в $\mathcal{D}$, то изменение $\arg df(z)$ вдоль любой замкнутой жордановой кривой из $\mathcal{D}$ равно изменению $\arg dz$, т.е. $\arg(df/dz)$ допускает выделение однозначной ветви и, следовательно, $f\in\mathcal{M}_0(\mathcal{D})$.

Пусть, далее, Ω – односвязная область в $\mathbb{C}$, имеющая не менее двух граничных точек, $0\in\Omega$, $t\Omega=\{tz: z\in\Omega\}$, $r(\Omega,w)$ – конформный радиус Ω в точке w, $r_0(\Omega)=\sup\{r(\Omega,w): w\in\Omega\}$. Исходя из функционала Минковского, определенного на подмножествах плоскости, образуем функционал

$$J(f;\Omega)=\inf\left\{t\ge 0: \ln f'(\mathcal{D})\subset t\Omega\right\}. \tag{6}$$

Если $R(z)$ – рациональная функция, $R(z)\ne const$ и $\ln[f'(\mathcal{D})/R'(\mathcal{D})]=\{\ln[f'(z)/R'(z)]: z\in\mathcal{D}\}$, то можно определить функционал, обобщающий (6). А именно, полагаем

$$\mathcal{I}(f;Q,R)=\inf\left\{t\geq 0: \ln\left[f'(\mathcal{D})/R'(\mathcal{D})\right]\subset tQ\right\}. \tag{7}$$

Очевидно, $\mathcal{I}(f,Q)\equiv\mathcal{I}(f;Q,R)$ при $R(z)\equiv z$; далее, если $Q_0=\{w: |\operatorname{Im} w|<1\}$, то $\mathcal{I}(f;Q_0)\equiv\mathcal{I}_1(f)=\sup\{|\arg f'(z)| : z\in\mathcal{D}\}$.

Сформулируем центральный результат относительно класса $\mathcal{M}_0(\mathcal{D})$, в котором корректно определен $\mathcal{I}_1$.

<u>Теорема I</u>. а) $G_1^1\cup G^*\subset G(\mathcal{I}_1)$.

б) В классе конечносвязных областей из $\bar{\mathbb{C}}$, ограниченных кусочно-гладкими в $\bar{\mathbb{C}}$ кривыми, $G'(\mathcal{I}_1)=G^*$, т.е. если $\mathcal{D}$ - конечносвязная область в $\bar{\mathbb{C}}$, ограниченная кусочно-гладкими в $\bar{\mathbb{C}}$ кривыми, то

$\mathcal{I}_1$ допустим для $\mathcal{M}_0$ в $\mathcal{D}\Leftrightarrow\mathcal{D}\in G^*$.

Теорема I является прямым аналогом утверждения, полученного к 1980 году усилиями ряда авторов (Альфорс, Мартио и Сарвас, Геринг и Осгуд, см. обзор [5]): если $\mathcal{D}\in G_1^1$, то функционал $\mathcal{I}_0(f)=\sup\{\operatorname{dist}^2(z,\partial\mathcal{D})|(f''/f')'-(f''/f')^2/2| : z\in\mathcal{D}\}$ допустим в $\mathcal{D}$; если дополнительно предположить конечносвязность областей $\mathcal{D}$, то $G_1^1\supset G'(\mathcal{I}_0)$.

Обозначим $\mathcal{I}_2(f)=\sup\{\operatorname{dist}(z,\partial\mathcal{D})|f''(z)/f'(z)| : z\in\mathcal{D}\}$. Известный факт $G(\mathcal{I}_0)\subset G(\mathcal{I}_2)$ (см., напр., [3]), теорема I и ее доказательство позволяют дать следующее утверждение в классе мероморфных в области $\mathcal{D}$ функций.

<u>Следствие I.I</u>. $G(\mathcal{I}_0)\subset G(\mathcal{I}_2)\subset G(\mathcal{I}_1)$.

Отметим, что из теоремы I (с учетом определения G^*) следует, что $G(\mathcal{I}_1)$ существенно шире, чем $G(\mathcal{I}_0)$. Но имеется ряд доводов в пользу следующего утверждения.

<u>Гипотеза</u>. Если область $\mathcal{D}\in G(\mathcal{I}_1)$ и $\infty\in\mathcal{D}$, то $\mathcal{D}\in G_1^1$, т.е. область однородна.

Следующие теоремы развивают и дополняют пункт а) теоремы I.

<u>Теорема 2</u>. а) Пусть $\mathcal{D}$ - конечносвязная область в $\bar{\mathbb{C}}$ с невырожденными граничными компонентами, $\mathcal{D}\in G_1^1$. Тогда

$\mathcal{I}(\cdot;\mathcal{D})$ допустим для $\mathcal{M}_0$ в $\mathcal{D}\Leftrightarrow\tau_0(Q)<\infty$.

б) Если $\mathcal{D}\in G_1^1(\lambda)$ и $\tau_0(Q)<\infty$, то однолистность $f(z)$ в $\mathcal{D}$ гарантируется условиями: $f\in\mathcal{M}_0$, $\mathcal{I}(f;Q)\leq\varkappa/[\lambda\,\tau_0(Q)]$, где постоянная $\varkappa$ = 0,6... - единственный в интервале (0,I) корень уравнения

$$(1-\varkappa)\exp\varkappa = \varkappa\int_0^1 \exp\left[\varkappa t^{1/(1-\varkappa)}\right]dt \quad . \tag{8}$$

Следствие 2.1. Пусть $\mathcal{D}\in G_1^1(\lambda)$, $f\in \mathcal{M}_0(\mathcal{D})$. Если $J_1(f)\le \pi\varkappa/(4\lambda)$, то $f(z)$ однолистна в $\mathcal{D}$.

Следствие 2.2. Пусть $\mathcal{D}\in G_1^1(\lambda)$, функция $f(z)$ аналитична в $\mathcal{D}\setminus\{\infty\}$ и имеет простой полюс в точке $z=\infty$, если $\infty\in$ $\in\mathcal{D}$. Если существуют положительные постоянные a и b такие, что $b/a\le\exp[\pi\varkappa/(2\lambda)]$ и

$$a\le |f'(z)|\le b \;,\quad \forall z\in\mathcal{D} \quad ,$$

то $f(z)$ однолистна в $\mathcal{D}$.

Следствие 2.3. Пусть $\mathcal{D}\in G_1^1(\lambda)$, $f\in\mathcal{M}_0(\mathcal{D})$. Функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, если для любой точки $z\in\mathcal{D}$ либо $|\arg f'(z)|\le\delta$, либо $\exp(-q)\le|f'(z)|\le\exp q$ и постоянные δ, q удовлетворяют неравенству $\sqrt{\delta^2+q^2}\le\pi\varkappa/(4\lambda)$.

Следствия 2.1 - 2.3 получаются из пункта б) теоремы 2, когда область Ω - полоса или объединение двух полос с перпендикулярными осями. Величина $r_0(\Omega)$ для таких областей нетрудно вычисляется. Отметим также, что в силу хорошо известных связей между конформным радиусом, коэффициентом гиперболической метрики и расстоянием $dist\,(w,\partial\Omega)$ будем иметь

$$r_0(\Omega)<\infty \Leftrightarrow \sup\left\{dist\,(w,\partial\Omega): w\in\Omega\right\}<\infty \quad .$$

В следующей теореме предполагаем, что рассматриваются мероморфные в области $\mathcal{D}$ функции $f(z)$, для которых могут быть выделены ветви $\ln[f'(z)/R'(z)]$ в $\mathcal{D}$. Здесь $R(z)$ - фиксированная рациональная функция, $R(z)\not\equiv const$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{D}$ - конечносвязная область с невырожденными граничными компонентами, $\overline{\mathcal{D}}\subset\mathbb{C}$. Если $\mathcal{D}\in G_1^1$ и $r_0(\Omega)<\infty$, то функционал $J(\cdot\,;\Omega,R)$ является p - допустимым в $\mathcal{D}$, причем $p=n(R,\mathcal{D}+0)=\inf n\,(R,\mathcal{D}')$, где нижняя грань берется по всем областям $\mathcal{D}'\supset\overline{\mathcal{D}}$.

Ясно, что $n(R,\mathcal{D})\le n(R,\overline{\mathcal{D}})\le n(R,\mathcal{D}+0)$, и в обоих случаях возможны знаки строгого неравенства. В общем случае указанное в теореме 3 значение $p=n(R,\mathcal{D}+0)$ нельзя заменить величиной

$n(R,\mathcal{D})$ или даже $n(R,\bar{\mathcal{D}})$: существуют области $\mathcal{D}$ и Ω, удовлетворяющие условиям теоремы 3, и рациональная функция $R(z)\neq const$ такие, что $n(R,\mathcal{D}+0)>n(R,\bar{\mathcal{D}})$ и функционал $J(\cdot;\Omega,R)$ не является p-допустимым ни при каком $p<n(R,\mathcal{D}+0)$.

Для частных случаев областей $\mathcal{D}$ и функций $R(z)$ удается оценить снизу число $\varkappa_p^*$ из (2) для функционала $J(\cdot;\Omega,R)$. Следующее утверждение соответствует такому выбору: $\mathcal{D}=E=\{z:|z|<1\}$, $R(z)=z^n$.

Пусть n – целое число, $n\neq 0$, функция $f(z)$ аналитична в $E\setminus\{0\}$ и в окрестности нуля имеет следующее поведение:

$$\lim_{z\to 0}\left[f(z)z^{-n}\right]=1\,,\quad \left|\lim_{z\to 0}\left[f(z)-z^{n}\right]/|z|^{|n|}\right|<\infty\,, \tag{9}$$

в частности, $f(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль (при $n>0$) или полюс (при $n<0$) порядка $|n|$. В этих предположениях имеет место

<u>Теорема 4</u>. Функция $f(z)$ является $|n|$-листной в E, т.е. $n(f,E)=|n|$, если $J(f;\Omega,z^n)\leq \alpha_n/r_0(\Omega)$, где $\alpha_n=1$ при $n\geq 1$ и $\alpha_n=1/2$ при $n\leq -1$.

<u>Следствие 4.I.</u> Пусть функция $f(z)$ аналитична в E и в точке $z=0$ имеет нуль порядка $n\geq 1$. Функция $f(z)$ будет n-листной в E, если для фиксированного $a>0$ и любого $z\in E$ имеют место неравенства $a\leq|f'(z)/z^{n-1}|\leq a\,exp\,(\pi/2)$.

Пусть теперь $\mathcal{D}=E=\{z:|z|<1\}$, $R_0(z)=(z+1/z)/2$. Для функции Жуковского $R_0(z)$ имеем $n(R_0,E)=1$, $n(R_0,\bar{E})=n(R_0,E+0)=2$. Поэтому функционал $J(\cdot;\Omega,R_0)$ будет 2-допустимым в E по теореме 3 при условии $r_0(\Omega)<\infty$. Имеет место

<u>Теорема 5</u>. Пусть $f(z)$ аналитична в $E\setminus\{0\}$ и имеет простой полюс в точке $z=0$. Если $J(f;\Omega,R_0)\leq 1/r_0(\Omega)$, то $f(z)$ не более чем двулистна в E.

Случаю, когда Ω – вертикальная или горизонтальная полоса, соответствует

<u>Следствие 5.I</u>. Функция $f(z)$, аналитичная в E за исключением простого полюса в нуле, будет не более чем двулистной в E, если выполняется одно из требований

1°. $1 \leq |z^2 f'(z)/(1-z^2)| \leq e^{\pi/2}$, $\forall z \in E$;

или

2°. $|\arg[z^2 f'(z)/(1-z^2)]| \leq \pi/4$, $\forall z \in E$.

Теорема I была анонсирована нами ранее в [5], гл.2, § 4. В пункте 2.2 главы I, а также в § 3 главы 2 обзора [5] имеется подробное описание предшествующих результатов.

§ 2. Вспомогательные результаты, доказательства

Наиболее сложным оказывается доказательство теоремы I. Докажем сначала теоремы 4, 3 и 5, затем – теоремы 2 и I.

Доказательство теоремы 4. Ввиду (9) и односвязности E существует однозначная ветвь $\ln[f'(z)/z^{n-1}]$, и значения этой ветви $g(z)=\ln[f'(z)/z^{n-1}]$ лежат в области $\alpha_n Q$. Следовательно, $g(z) = \Psi(\varphi(z))$, где Ψ – конформное отображение E на область $\alpha_n Q$, $\Psi(0) = g(0)$, а $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| < 1$ и в силу (9) при $n \leq -1$ имеют место равенства $\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(2|n|-1)}(0) = 0$. Имеем $g'(z)=\Psi'(w)\varphi'(z)$, $w = \varphi(z)$, и, по определению конформного радиуса $r(w,\alpha_n Q)=|\Psi'(w)|(1-|w|^2)$. Кроме того, $r(w,\alpha_n Q)=\alpha_n r(w,Q) \leq \alpha_n r_0(Q)$, и в силу известных неравенств [6], гл. УШ, $(1-|\varphi(z)|^2)^{-1}|\varphi'(z)| \leq \{(1-|z|^2)^{-1}$ при $n \geq 1$ и $2|n||z|^{2|n|-1}(1-|z|^{4|n|})^{-1}$ при $n \leq -1\}$. Следовательно, при любом $z \in E$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{n-1}{z}\right| \leqslant \begin{cases} r_0(Q)(1-|z|^2)^{-1}, & n \geq 1, \\ 2r_0(Q)|n||z|^{2|n|-1}(1-|z|^{4|n|})^{-1}, & n \leq -1. \end{cases}$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 4, так как справедливо следующее

Предложение I. Пусть $f(z)$ аналитична при $0<|z|<1$, n целое число, $n \neq 0$, $\lim\limits_{z\to 0}[z^{-n}f(z)] = a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Функция $f(z)$ будет $|n|$-листной в E, если

$$J_{2,n}(f)=\sup_{z\in E}\left|(1-|z|^{2n})\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}-n+1\right)\right| \leq |n| . \qquad (10)$$

Постоянная $|n|$ в правой части (I0) точна: при любом $\varepsilon>0$ существует $2|n|$ -листная в E функция $f(z)$ из указанного класса, для которой $J_{2,n}(f)\leq|n|+\varepsilon$, т.е. $\varkappa_p^*=|n|$ при $|n|\leq p\leq 2|n|-1$.

Доказательство предложения I. Пусть $r\in$ (0,I), рассмотрим функцию $g(z)=f(r\,z)$ в круге $\bar{E}$. Запишем в явном виде ее продолжение на всю плоскость

$$\tilde{g}(z)=\left\{g(z),|z|\leq 1;\, g(1/\bar{z})+(z^n-1/\bar{z}^n)g'(1/\bar{z}^n)/(n\bar{z}^{1-n}),|z|\geq 1\right\},$$

хорошо известное при n = I.

Из аналитичности $g(z)$ при $|z|\leq 1$ и неравенств $J_{2,n}(g)<|n|$, $g'(z)\neq 0$ при $0<|z|<1$ следует, что $\tilde{g}(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, якобиан $\tilde{g}$ непрерывен и положителен при $0<|z|\leq 1$ и $1\leq|z|<\infty$. Учитывая локальное поведение $f(z)$ вблизи точки z = 0, привлекая лемму о склейке [7] и известную теорему Стоилова, получаем, что отображение $\tilde{g}$ топологически эквивалентно отображению с помощью функции z^n. Следовательно, функция $f(r\,z)$ будет $|n|$ -листной в E . А это дает $|n|$ -листность $f(z)$ в E с учетом произвольности $r\in$ (0,I) и локального поведения $f(z)$ в нуле.

При n = ±I из (I0) получаем известные достаточные условия однолистности Беккера. Как показали позже Беккер и Поммеренке [8] с использованием одного примера Мане, Сада и Сулливана, если n = = ±I и $\varepsilon>0$, то существует функция $f_\pm(z;\varepsilon)$, для которой $J_{2,\pm 1}(f_\pm)<1+\varepsilon$ и $n(f_\pm,E)>1$. Точность $|n|$ в (I0) в случае $|n|>1$ показывает, очевидно, пример $f_\pm(z^{|n|};\varepsilon)$.

Предложение I и теорема 4 доказаны полностью.

Доказательство теоремы 3. Имеем $\ln[f'(z)/R'(z)]\in t_0 Q$ при любом $z\in\mathcal{D}$ и $t_0=J(f;Q,R)$. Поэтому по принципу гиперболической метрики [6]

$$\frac{1}{\rho(z,\mathcal{D})}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{R''(z)}{R'(z)}\right|\leqslant\frac{J(f;Q,R)}{\rho(f(z),Q)},\quad\forall z\in\mathcal{D},\tag{II}$$

где ρ - коэффициент гиперболической метрики. Таким образом, утверждение теоремы 3 - следствие нашей теоремы 2.33 из [5], с. 5I, так как $1/\rho(w,Q)=r(w,Q)$ ограничен равномерно по $w\in Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Так как $r(w,\Omega) \le r_0(\Omega)$ по определению $r_0(\Omega)$, то на основании (II) и условия $J(f;\Omega,R_0) \le 1/r_0(\Omega)$ теоремы 5 имеем неравенство

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{R_0''(z)}{R_0'(z)}\right| \equiv \left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2}{z^3-z}\right| \le \frac{1}{1-|z|^2}, \ \forall z \in E. \qquad (I2)$$

<u>Предложение 2</u>. Условие (I2) влечет оценку $n(f,E) \le 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}_w = \bar{C} \setminus [-1,1]$, $Q_0: \mathcal{D}_w \to E$ – конформное отображение, обратное к R_0. В силу (I2) для функции $g(w) = f(Q_0(w))$ имеем

$$\frac{g''(w)}{g'(w)} \equiv \left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{R_0''(z)}{R_0'(z)}\right| \frac{1}{|R_0'(z)|} \le \rho(w, \mathcal{D}_w), \ w = R_0(z).$$

Коэффициент гиперболической метрики не возрастает при расширении области (см., напр., [6]), поэтому $\rho(w,\mathcal{D}_w)$ не превосходит коэффициента гиперболической метрики верхней или нижней полуплоскости, следовательно, $|g''(w)/g'(w)| \le 1/|2\,\mathrm{Im}\,w|$, $w \in \mathcal{D}_w$. Но тогда по теореме Кюнау и автора (см. [5], с.42) $g(w)$ однолистна как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Следовательно, $n(g, \mathcal{D}_w \setminus \mathbb{R}) \le 2$. Так как $g(w)$ локально однолистна на отрезках $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ вещественной оси, то $n(g,\mathcal{D}_w) \le 2$, что равносильно требуемой оценке $n(f,E) \le 2$.

Таким образом, предложение 2 и теорема 5 доказаны.

Отметим, что изучая продолжение $\tilde{f}(z) = \{f(z), |z| \le 1;$ $f(1/\bar{z}) + [R_0(z) - R_0(1/\bar{z})] f'(1/\bar{z}) / R_0'(1/\bar{z}), |z| > 1\}$, можно заменить условие (I2) в предложении 2 менее стеснительным требованием: при любом $z \in E$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{R_0''(z)}{R_0'(z)}\right| < \frac{|R_0'(1/\bar{z})|}{|z|^2 |R_0(z) - R_0(1/\bar{z})|} = \left|\frac{1-z^2}{z-\bar{z}}\right| \frac{1}{1-|z|^2}. \qquad (I3)$$

Условие (I3) сравнимо с (I2), так как $|(1-z^2)/(z-\bar{z})| \ge 1$ при $|z| \le 1$, причем знак равенства имеет место лишь при $|z| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. С учетом известного соотношения $dist(z,\partial\mathcal{D}) \le 1/\rho(z,\mathcal{D})$ из (II) при $R(z) \equiv z$ получаем

$$|dist(z,\partial\mathcal{D}) f''(z)/f'(z)| \le r_0(\Omega)\, J(f;\Omega). \qquad (I4)$$

Поэтому пункт б) теоремы 2 непосредственно вытекает из следующего утверждения.

<u>Предложение 3</u>. Мероморфная в области $\mathcal{D} \subset \bar{\mathbb{C}}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, если $\mathcal{D} \in G_1^1(\lambda)$ и

$$|dist(z, \partial\mathcal{D}) f''(z)/f'(z)| \leq \varkappa/\lambda \ , \quad \forall z \in \mathcal{D} \ , \tag{I5}$$

где $\varkappa = 0{,}6 \ldots$ – корень уравнения (8).

Условие (I5) – частный случай условия инъективности для отображений n-мерных областей, опубликованного нами в [4]. Отметим, что в случае $\infty \notin \mathcal{D}$ условие (I5) влечет аналитичность $f(z)$ в $\mathcal{D}$. Таким образом, предложение 3 при $\mathcal{D} \not\ni \infty$ представляет собой вариант теоремы Мартио и Сарваса [2]. Но предложение 3 включает и иную ситуацию, когда $\infty \in \mathcal{D}$, $f(z)$ аналитична в $\mathcal{D} \setminus \{\infty\}$ и имеет простой полюс в точке $z = \infty$.

Если $r_0(\mathcal{Q}) J(f;\mathcal{Q}) \leq \varkappa/\lambda$, то из (I4) следует (I5), поэтому $f(z)$ будет однолистной в $\mathcal{D}$, что и утверждается в пункте б), а также в обратной импликации в пункте а). Остается обосновать прямую импликацию в пункте а) теоремы 2.

Пусть $\mathcal{D}$ – конечносвязная область с невырожденными граничными компонентами, $\mathcal{D} \in G_1^1$, и пусть $r_0(\mathcal{Q}) = \infty$. Покажем, что $J(\cdot\,;\mathcal{Q})$ не является допустимым в $\mathcal{D}$, а именно, при любом $t > 0$ найдется неоднолистная в $\mathcal{D}$ функция $f(z;t)$ из класса $\mathcal{M}_0(\mathcal{D})$, для которой $\ln f'(z;t) \in at\mathcal{Q}$ при любом $z \in \mathcal{D}$, $a = const$.

Через $\mathcal{D}_1$ обозначим односвязную область со свойствами $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$, $\partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_1 = \partial\mathcal{D}_1$, т.е. $\mathcal{D}_1$ ограничена одной из компонент $\partial\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$. И пусть $w = \varphi(z)$ – однолистная функция, конформно отображающая $\mathcal{D}_1$ на $\mathcal{Q}$. Без дополнительных пояснений будем также пользоваться известным фактом: вблизи границы $\partial\mathcal{D}_1$ $dist(z, \partial\mathcal{D}_1)$ и $1/\rho(z, \mathcal{D}_1)$ – величины одного и того же порядка малости.

Предположим сначала, что $\infty \notin \mathcal{D}_1$. Рассмотрим функцию $\mathcal{D}_1 \ni z \mapsto f(z;t) = \int exp[t\varphi(z)]\,dz$, $t > 0$; обозначим $a(z,t) = dist(z, \partial\mathcal{D}_1) f''(z;t) / f'(z;t)$. Если $f(z;t)$ однолистна в $\mathcal{D}$, то, как известно (см., напр., [2]), $|a(z,t)| \leq 4$ при любом $z \in \mathcal{D}$. Но $|a(z,t)| = t\,dist(z, \partial\mathcal{D}_1)|\varphi'(z)| = t\,dist(z, \partial\mathcal{D}_1)\rho(z, \mathcal{D}_1) r[\varphi(z), \mathcal{Q}]$, т.е. при любом $t > 0$ величина $|a(z,t)|$ неограничена по z в $\mathcal{D}$ в силу условия $r_0(\mathcal{Q}) = \infty$. Следовательно, $f(z;t)$ неоднолистна в $\mathcal{D}_1$, а значит, и в $\mathcal{D}$, при любом $t>0$. Но по построению $\mathcal{J}[f(\cdot;t);\mathcal{Q}]\equiv t\to 0$ при $t\to 0$.

Если же $\infty\in\mathcal{D}_1$, то можно взять $a_1=\lim\limits_{z\to\infty} z[\varphi(z)-\varphi(\infty)]$, $f'(z;t)=\exp\{t[\varphi(z)-a_1/(z-z_0)]\}$, где $z_0\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{D}}_1$, и предыдущие рассуждения о неоднолистности $f(z;t)$ сохраняются, $\mathcal{J}[f(\cdot;t);\mathcal{Q}]\leq ta$, $a=const$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы I. Нам потребуется

Теорема В.С.Рогожина [9]. Пусть $\theta_0\in[0,\pi)$, $\mathcal{D}$ - область в $\mathbb{C}$ со свойством: две любые точки z_1 и z_2 из $\mathcal{D}$ можно соединить гладкой дугой из $\mathcal{D}$, колебание угла касательной к которой не превосходит θ_0. Если $f(z)$ аналитична в $\mathcal{D}$, $f'(z)\neq 0$ и $|\arg f'(z)|<(\pi-\theta_0)/2$ для любой точки $z\in\mathcal{D}$, то $f(z)$ однолистна в $\mathcal{D}$.

Лемма "о буферной зоне". Пусть $\mathcal{D}$ - непустое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{D}_0$ - подмножество $\mathcal{D}$, $f:\mathcal{D}\to\overline{\mathbb{C}}$ - произвольное отображение. Пусть, далее, $K_1,\ldots,K_\mu$ - конечная система взаимно непересекающихся множеств в $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0\subset K_1\cup\ldots\cup K_\mu$, K_j^* - некоторое подмножество K_j такое, что $V_j^*\subset K_j^*$, где $V_j^*=V_j\setminus\mathcal{D}_0$, $V_j=\mathcal{D}\cap K_j$, $j=1,\ldots,\mu$. Отображение f будет инъективным в $\mathcal{D}$, если выполняются требования:

I) f инъективно в $\mathcal{D}_0$ и в каждом из V_j, $j=1,\ldots,\mu$;

II) $f(\mathcal{D}\setminus\bigcup_{j=1}^{\mu}V_j)\cap K_j^*=\emptyset$, $j=1,\ldots,\mu$;

III) $f(V_j^*)\subset K_j^*$, $j=1,\ldots,\mu$;

IV) $f(\mathcal{D}_0\cap V_j)\cap K_{j'}=\emptyset$ при $j'\neq j$.

Доказательство. Если z_1 и $z_2\in\mathcal{D}$, $z_1\neq z_2$, $f(z_1)=f(z_2)$, то z_1 и z_2 не могут лежать одновременно в $\mathcal{D}_0$ или в одном и том же V_j. Следовательно, возможны лишь ситуации двух типов:

а) $z_1\in\mathcal{D}\setminus\bigcup_{j=1}^{\mu}V_j$, $z_2\in V_j^*$,

что противоречит II и III;

б) $z_1\in V_j$, $z_2\in V_{j'}^*$, $j\neq j'$,

а это в силу III влечет $z_1\in V_j\setminus V_j^*=V_j\cap\mathcal{D}_0$, $z_2\in V_{j'}^*$, что противоречит IУ. Лемма доказана. Как видно из доказательства, существенную роль играет наличие "буферной зоны" $V_j \setminus V_j^* = \mathcal{D}_0 \cap V_j$.

<u>Лемма о сходимости</u>. Пусть $\mathcal{D}$ - конечносвязная область с невырожденными граничными компонентами, $\bar{\mathcal{D}} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D} \in G_1^1$; пусть, далее, последовательность $(f_n) \subset \mathcal{M}_0(\mathcal{D})$ нормирована условиями $f_n(z_0) = z_0$, $f_n'(z_0) = 1$ (n = I,2, ...) для некоторой точки $z_0 \in \mathcal{D}$, $r_0(\mathcal{Q}) < \infty$. Если $\lim\limits_{n \to \infty} J(f_n; \mathcal{Q}) = 0$, то $f_n(z)$ непрерывна в $\bar{\mathcal{D}}$ для достаточно больших n , $f_n(z)$ сходится к $f_0(z) \equiv z$ при $n \to \infty$ равномерно по $z \in \bar{\mathcal{D}}$.

Действительно, из условия $J(f_n; \mathcal{Q}) \to 0$ при $n \to \infty$ в силу (I3) следует сходимость к нулю $\sup\{|\mathrm{dist}(z, \partial\mathcal{D}) f_n''(z)/f_n'(z)| : z \in \mathcal{D}\}$, что влечет требуемые свойства $f_n(z)$ в силу вспомогательных результатов [2].

Утверждение $G_1^1 \subset G(J_1)$ теоремы I следует из уже обоснованного пункта б) теоремы 2. Используя это утверждение, а также теорему В.С.Рогожина и обе леммы, докажем, что $G^* \subset G(J_1)$. Построением серии теоретических примеров докажем оставшееся утверждение (прямую импликацию пункта б) теоремы I), чем и завершится доказательство теоремы I.

Итак, пусть $\mathcal{D} \in G^*$, докажем допустимость J_1 в области $\mathcal{D}$. Рассмотрим 3 случая.

I. Если любая граничная компонента области $\mathcal{D}$ является жордановой в $\mathbb{C}$ или в $\bar{\mathbb{C}}$ кривой и на $\partial\mathcal{D}$ нет точек возврата, то, как известно, $\mathcal{D} \in G_1^1$, поэтому требуемое утверждение снова получается из теоремы 2.

2. Пусть $\infty \notin \bar{\mathcal{D}}$, на граничной компоненте $L \subset \partial\mathcal{D}$ имеется μ точек возврата z_1 , ..., z_μ . Из определения G^* следует тогда, что L является "внешней" границей $\mathcal{D}$ (т.е. L - граница компоненты $\bar{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$, содержащей точку $z = \infty$), на других компонентах $\partial\mathcal{D}$ точек возврата нет, а в точках z_j имеются внутренние нулевые углы.

Проведем построения, позволяющие применить лемму о буферной зоне. Пусть ε_0 , ε_1 и ε_2 принадлежат (0,I); обозначим

$$K_j = K_j(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left\{z : z_j - \varepsilon_1 w_j + w_j t e^{i\tau}, 0 \le t < \infty, |\tau| \le \varepsilon_2 \right\} ,$$

$$K_j^* = K_j(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2) , \quad z_j^* = z_j - (\varepsilon_1/2) w_j ,$$

$V_j = \mathcal{D} \cap K_j$, $V_j^* = \mathcal{D} \cap \{z : |z - z_j| \le \varepsilon_0\}$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu} V_j^*$.
Из кусочной гладкости $\partial\mathcal{D}$ и требования расходимости лучей следует возможность выбора ε_1 и ε_2 настолько малыми, чтобы $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$ при $j \ne j'$, V_j - односвязная область. И, кроме того, ε_1 и ε_2 будем считать такими, чтобы, кроме перечисленных, выполнялось требование: при любом j область V_j удовлетворяет условиям теоремы В.С.Рогожина с общим для всех j значением $\theta_0 \in (0, \pi)$. Тогда условие $J_1(f) \le (\pi - \theta_0)/2$ гарантирует инъективность f в каждом из V_j .

Число ε_0 выберем настолько малым, чтобы а) $0 < \varepsilon_0 < (\varepsilon_1/2)\sin\varepsilon_2$, $|\arg[\bar{w}_j(z'' - z_j)]| < \varepsilon_2/2$ для любой точки $z'' \in \bar{V}_j^* \setminus \{z_j\}$; б) V_j^* лежит строго внутри K_j^* ; в) для любой точки $z' \in V_j^*$ существует точка $z'' \in \mathcal{D} \cap \partial V_j^*$ такая, что

$$\left| \arg\left[\bar{w}_j \int_{z''}^{z'} f'(\zeta)\, d\zeta \right] \right| < J_1(f) + \varepsilon_2/2$$

(это неравенство можно удовлетворить при $J_1(f) + \varepsilon_2/2 < \pi/2$); г) область $\mathcal{D}_0$ ограничена простыми кусочно-гладкими кривыми. Поскольку на границе $\mathcal{D}_0$ нет нулевых углов, то $\mathcal{D}_0 \in G_1^1(\lambda_0)$ с некоторым $\lambda_0 > 0$.

Пусть $z_0 \in \mathcal{D}_0$, $F(z) = z_0 + [f(z) - f(z_0)] / |f'(z_0)|$, тогда $F(z_0) = z_0$, $|F'(z_0)| = 1$, $J_1(f) = J_1(F)$. Покажем существование постоянной $\varkappa = \varkappa(\mathcal{D}) > 0$ такой, что при условии $J_1(F) \le \varkappa_*$ отображение F и построенные выше множества $\mathcal{D}_0$, K_j , K_j^* , V_j , V_j^* удовлетворяют условиям леммы о "буферной зоне".

По построению V_j и $\mathcal{D}_0$ функция $F(z)$ будет однолистной в V_j при условии $0 < \varkappa \le \varkappa_1 = (\pi - \theta_0)/2$, а в $\mathcal{D}_0$ при условии $0 < \varkappa \le \varkappa_2 = \pi/(8\lambda_0)$ (см. следствие 2.I). По лемме о сходимости для любого $\varepsilon_3 > 0$ существует $\varkappa_3 > 0$ такое, что неравенство $J_1(F) \le \varkappa_3$ влечет непрерывность $F(z)$ в $\bar{\mathcal{D}}_0$ и оценку $\sup\{|F(z) - z| : z \in \mathcal{D}_0\} < \varepsilon_3$.

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}$, где $\varepsilon_4 = \varepsilon_2(\varepsilon_1/2 - \varepsilon_0)/\pi > 0$, $\varepsilon_5 = (\varepsilon_1/2)\sin\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_6 = \inf\{\operatorname{dist}(z, K_{j'}) : z \in V_j, j \ne j'\}$.
Пусть $0 < \varkappa < \varkappa_3$. Тогда в силу выбора $\varepsilon_6 \ge \varepsilon_3$ выполняется требование IУ леммы. Далее, если $z \in \mathcal{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu} V_j$ и $w \in K_j^*$ для некоторого j , то $|z - w| \ge \varepsilon_5$, следовательно, справедливо

условие II леммы о буферной зоне. Остается подтвердить свойство III.

Пусть $z' \in V_j^*$, уменьшая в случае необходимости $\varkappa_3$, будем считать, что $0 < \varkappa_3 < \varepsilon_2/2$. По построению V_j^* существует точка $z'' \in \mathcal{D} \cap \partial V_j^* \subset \partial\mathcal{D}_0$, для которой

$$|\arg\{\bar{w}_j[F(z')-F(z'')]\}| \le J_1(F)+\varepsilon_2/2 < \varepsilon_2 ,$$

и, кроме того, $|\arg[\bar{w}_j(z''-z_j^*)]| < \varepsilon_2/2$. Пользуясь соотношениями

$$|F(z'')-z''| < \varepsilon_4 , \quad |z''-z_j^*| \geqslant \varepsilon_1/2-\varepsilon_0 ,$$

оценим $\theta^* = \arg(\bar{w}_j[F(z')-z_j^*])$. Имеем

$$F(z')-z_j^* = (z''-z_j^*)\left(1+\frac{F(z'')-z''}{z''-z_j^*}\right)+(F(z')-F(z'')) .$$

Поэтому $|\theta^*| \le \max\{\varepsilon_2, \varepsilon_2/2+(\pi/2)\varepsilon_4/(\varepsilon_1/2-\varepsilon_0)\} = \varepsilon_2$, т.е. $F(z') \in K_j^*$, что и требовалось.

Таким образом, $F(z)$ однолистна в $\mathcal{D}$, если только $J_1(F) \leqslant \varkappa = \min\{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3\}$, следовательно, J_1 допустим в $\mathcal{D}$.

3. Пусть $\infty \in L \subset \partial\mathcal{D}$, L – граничная компонента области $\mathcal{D}$. По определению класса G^* и условию $\mathcal{D} \in G^*$, точки возврата $z_1, \ldots, z_\mu \in \mathbb{C}$ на границе $\mathcal{D}$ возможны лишь на L. Построим для этих точек множества K_j, K_j^*, V_j, V_j^*, $j=1, \ldots, \mu$ так же, как и в предыдущем случае.

Далее, если $\varepsilon_7 > 0$ достаточно мало, то в силу кусочной гладкости L множество $\mathcal{D} \cap \{z : |z| > 1/\varepsilon_7\}$ состоит из конечного числа односвязных областей $V_{\mu+1}(\varepsilon_7), \ldots, V_{\mu+\nu}(\varepsilon_7)$, $\nu \geqslant 1$, каждая из которых ограничена жордановой в $\mathbb{C}$ кривой, проходящей через точку $z=\infty$. Учитывая кусочную гладкость границы и отсутствие у области внешних нулевых углов, можно провести следующие построения. Во-первых, подобрать $\varepsilon_7 > 0$ настолько малым, чтобы, как и в предыдущем пункте, существовало число $\theta_0 \in (0, \pi)$ и условие $J_1(f) < (\pi-\theta_0)/2$ гарантировало однолистность $f(z)$ в $V_j(\varepsilon_7)$, $j=\mu+1, \ldots, \mu+\nu$. Во-вторых, построить множества K_j, K_j^*, V_j, V_j^*, $j=\mu+1, \ldots, \mu+\nu$, следующим образом:

$$V_{\mu+j} = V_{\mu+j}(\varepsilon_7) = \mathcal{D} \cap K_{\mu+j} , \quad j=1, \ldots, \nu ;$$

$$K_{\mu+j}=\{z: 1/\varepsilon_7<|z|<\infty, |\arg[\bar{w}_{\mu+j}(z-z^*_{\mu+j})]|<\varphi_{\mu+j}\},$$

$$K^*_{\mu+j}=\{z: 2/\varepsilon_7<|z|<\infty, |\arg[\bar{w}_{\mu+j}(z-z^*_{\mu+j})]|<\varphi_{\mu+j}-\varepsilon_8\}$$

с некоторыми $z^*_{\mu+j}\in\mathbb{C}$, $\varphi_{\mu+j}\in(0,\pi)$, $\varepsilon_8=(0,1)$, причем $\mathcal{D}\cap K^*_{\mu+j}=V_{\mu+j}(\varepsilon_7/2)$, $K_{\mu+j}\cap K_{\mu+j'}=\emptyset$, при $j\neq j'$, линии $\arg[\bar{w}_{\mu+j}(z-z^*_{\mu+j})]=\pm(\varphi_{\mu+j}-\varepsilon_8)$ не являются касательными к L в точке $z=\infty$. Кроме того, положим $V^*_{\mu+j}=\{z:|z|>1/\varepsilon_9\}\cap\cap V_{\mu+j}$, $\mathcal{D}_0=\mathcal{D}\setminus\bigcup_{j=1}^{\mu+\nu}V^*_j$, причем выбор $\varepsilon_9>0$ подчиняется требованиям, аналогичным условиям на ε_9 в пункте 2. Дальнейшее доказательство проводится точно так же, как и в предыдущем пункте с привлечением множеств K_j, K_j^*, V_j, V_j^*, j = I, ..., $\mu+\nu$, и леммы о "буферной зоне".

Итак, если $\mathcal{D}\in G^*$, то J_1 допустим. Построением ряда контрпримеров докажем обратное утверждение: если $\mathcal{D}$ – конечно-связная область в $\bar{\mathbb{C}}$, ограниченная кусочно-гладкими кривыми, и $\mathcal{D}\notin G^*$, то J_1 не является допустимым, т.е. существует последовательность $(f_\nu)\subset\mathcal{M}_0$ неоднолистных в $\mathcal{D}_0$ функций $f_\nu(z)$, для которых $J_1(f_\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$.

Нарушения требования а) или б) определения G^* отсекаются проще всего. Действительно, пусть z_1 и z_2 – несовпадающие точки, $\mathcal{D}'$ – область, получаемая из $\bar{\mathbb{C}}$ удалением некоторой простой дуги (разомкнутой и кусочно-гладкой) $\gamma(z_1,z_2)$ с концами в точках z_1 и z_2. При ν = I,2,... рассмотрим неоднолистные в $\mathcal{D}'$ функции $f_\nu(z;z_1,z_2)$ $(z_1\in\mathbb{C})$:

$$\zeta=f_\nu(z;z_1,\infty)=(z-z_1)^{1+1/\nu};$$

$$\zeta=f_\nu(z;z_1,z_2)=\frac{1}{z_1-z_2}\;\frac{w^{1+1/\nu}+1}{w^{1+1/\nu}-1},\; w=\frac{z-z_1}{z-z_2},\; z_2\in\mathbb{C}.$$

Нетрудно видеть, что $\sup\{|\arg f'_\nu(z;z_1,z_2)|: z\in\mathcal{D}'\}=O(1/\nu)$ при $\nu\to\infty$. С другой стороны, если $\mathcal{D}$ не удовлетворяет условию а) или б) определения G^*, то, взяв точки z_1 и z_2 в одной и той же компоненте $\mathbb{C}\setminus\mathcal{D}$, мы получаем $\mathcal{D}'\supset\mathcal{D}$. Причем $f_\nu(z;z_1,z_2)$ окажутся неоднолистными не только в $\mathcal{D}'$, но и в $\mathcal{D}$, если z_1 и z_2 выбраны так, чтобы точка z_1 (или z_2) совпала с вершиной нулевого внешнего угла при нарушении требования б) определения G^*, или при нарушении простоты $comp(\partial D)\setminus\{\infty\}$ точки z_1 и z_2 выбраны так, чтобы точка самопересечения компоненты $(\partial D)\setminus\{\infty\}$ лежала на $\gamma(z_1, z_2)$.

Для области D, удовлетворяющей условиям а) и б) определения G^*, остается обосновать требования в$_1$), в$_2$), в$_3$). Эти обоснования проводятся по единой схеме. А именно, предполагая противное, строим некоторую область $D' \supset D$ и неоднолистные отображения $f_\nu \in M_0(D')$, $\nu = 1,2, \ldots$. Окажется, что $f_\nu(z)$ неоднолистны и в D, $D_\nu = f_\nu(D')$ сходится к D' как к ядру в смысле Каратеодори, кроме того, $J_1(f_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Рассмотрим подробно один из случаев и поясним другие.

Пусть, например, существует конечная точка возврата $z_1 \in \partial D$, где D имеет нулевой внутренний угол, причем луч Γ_1 имеет общую с D точку z_1'. Пусть D' – односвязная область со свойствами: а) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $D \cap U_\varepsilon = D' \cap U_\varepsilon$, $U_\varepsilon = \{z : |z - z_1| < \varepsilon\}$; б) $\infty \in D'$; в) $D \subset D'$; г) $\partial D' = L_0$ – замкнутая жорданова кривая, гладкая за исключением точки $z = z_1$.

Построим неоднолистные области D_ν, отправляясь от D' с помощью "вытягивания острия" вдоль Γ_1. Без ограничения общности можно считать, что $z_1 = 0$, $z_1' = 1$, Γ_1 – положительная полуось абсцисс, вблизи точки $z = 0$ частичные дуги $L'(\varepsilon)$, $L''(\varepsilon)$ кривой L_0 параметризуются функциями $y = h_1(x)$, $x' \le x \le 0$, $y = h_2(x)$, $x'' \le x \le 0$, соответственно, причем $h_1(x) \ge h_2(x)$, $h_j(0) = h_j'(0) = 0$, $j = 1,2$.

Пусть $x_\nu < 0$ таково, что $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = 0$, $|h_j(x)| < 1/\nu$ и $|h_j'(x)| < 1/\nu$ при любом $x \in [x_\nu, 0]$ ($j = 1,2$; $\nu = 1,2,\ldots$). Построим замкнутую и гладкую кроме одной точки кривую $L_\nu = L_0' \cup L_\nu' \cup L_\nu''$, где $L_0' = L_0 \setminus (L'(\varepsilon) \cup L''(\varepsilon))$, а дуги L_ν' и L_ν'' определяются соответственно как графики непрерывно дифференцируемых функций $y = h_{1\nu}(x)$, $x' \le x \le 1$, $y = h_{2\nu}(x)$, $x'' \le x \le 1$ со свойствами:

1) $h_{1\nu}(x) = h_1(x)$, $h_{2\nu}(x) = h_2(x)$ при $x \le x_\nu$;

2) $h_{1\nu}(1) = h_{2\nu}(1) = h_{1\nu}'(1) = h_{2\nu}'(1) = 0$;

3) $h_{1\nu}(x) > h_1(x) > h_2(x) > h_{2\nu}(x)$ при $x_\nu < x < 0$;

4) $h_{1\nu}(x) > 0 > h_{2\nu}(x)$ при $0 \le x < 1$;

5) для всех $\nu = 1,2,\ldots$ и $j = 1,2$ при любом $x \in [x_\nu, 1]$ выполнены неравенства $|h_{j\nu}(x)| \le 2/\nu$, $|h'_{j\nu}(x)| \le 2/\nu$.

Пусть $\mathcal{D}'_\nu$ – область ("клин"), граница которой образована графиками функций $y = h_j(x)$, $x_\nu \le x \le 0$, $y = h_{j\nu}(x)$, $x_\nu \le x \le 1$. Прикрепляя $\mathcal{D}'_\nu$ к $\mathcal{D}'$ вдоль $l'(\varepsilon)$ и $L'(\varepsilon)$, получаем неоднолистную (так как $1 \in \mathcal{D}'$ и $1 \in \partial\mathcal{D}'_\nu$) область $\mathcal{D}_\nu$ без точек ветвления. По построению $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_\nu$ при любом ν, $(\mathcal{D}_\nu)$ и $(\mathcal{D}'_\nu)$ – последовательности убывающих областей, причем $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{\mathcal{D}}'_\nu = [0,1]$. Следовательно, последовательность $(\mathcal{D}_\nu)$ сходится к $\mathcal{D}'$ как к ядру.

Рассмотрим конформные отображения $f_\nu : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}_\nu$, нормированные условиями $f_\nu(\infty) = \infty$, $f_\nu(0) = 1$. Пусть $g_\nu(w) = f_\nu^{-1}(w)$ – обратное отображение, однозначно определенное в $\overline{\mathcal{D}}'$. По теореме Фарреля (точную формулировку и обобщения см. в [10]) $g_\nu(w) \to w$ при $\nu \to \infty$ равномерно в $\overline{\mathcal{D}}'$, что дает равномерное в $\overline{\mathcal{D}}'$ стремление к нулю $\arg f'_\nu(z)$ при $\nu \to \infty$ с учетом ряда других обстоятельств: гладкости $(\partial\mathcal{D}')\setminus\{0\}$, $(\partial\mathcal{D}_\nu)\setminus\{1\}$, нормировки $f_\nu(0) = 1$, непрерывности $\arg f'_\nu(z)$ в $\overline{\mathcal{D}}'$ (по теореме Линделефа, см., напр., [6]) и геометрического смысла аргумента производной, равномерного на $[0,1]$ стремления $h_{j\nu}(x)$, $h'_{j\nu}(x)$ к нулю при $\nu \to \infty$. Далее, так как $0 \in \partial\mathcal{D}'$, $1 \in \mathcal{D}'$, $f_\nu(0) = 1$, $g_\nu(w) \to w$ при $\nu \to \infty$ равномерно в круге $E(r) = \{w : |w-1| < r = \operatorname{dist}(1, \partial\mathcal{D}')/2\}$, то $f_\nu(0) = 1$, $f_\nu(z_\nu) = 1$ для некоторой точки $z_\nu \in E(r)$ при всех ν достаточно больших, т.е. $f_\nu(z)$ неоднолистны в $\mathcal{D}'$ для всех ν достаточно больших. Но, с другой стороны, $J_1(f_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$, следовательно, J_1 не является допустимым в $\mathcal{D}$.

Аналогично рассматриваются нарушения других свойств из требования в) в определении G^*. Если, например, нарушено условие $\Gamma_j \cap \Gamma_{j'} = \emptyset$ при $j \ne j'$, то нужно "вытягивать" вдоль Γ_j и $\Gamma_{j'}$ два острия в точках z_j и $z_{j'}$ с тем, чтобы $\mathcal{D}_\nu$ дважды покрывала точку пересечения Γ_j, $\Gamma_{j'}$, и нормировать $f_\nu(z)$ так, чтобы угловые точки $\mathcal{D}'$ перешли в угловые точки $\mathcal{D}_\nu$. Сама область $\mathcal{D}'$ в этом случае берется совпадающей с $\mathcal{D}$ в малых окрестностях точек z_j и $z_{j'}$, $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, $\partial\mathcal{D}'$ имеет лишь две угловые точки.

Этим пояснением и завершается доказательство теоремы I.

Литература

I. Gehring F. W. Uniform Domains and the Ubiquitous Quasidisk // Iber. d.Dt.Math. Verein. - 1987 - 89. P.88 - 103.

2. Martio O., Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. fenn. ser AI, Math.- 1978/1979- V.4, N 2. - P.383 - 401.

3. Gehring F. W., Osgood B. G. Uniform domains and the quasihyperbolic metric // I.Anal. Math. - 1979. V. 36. - P. 50 - 74.

4. Авхадиев Ф. Г. Допустимые функционалы в условиях инъективности для дифференцируемых отображений n-мерных областей // Изв. вузов. Математика. - 1989. - № 4. - С.3 - 12.

5. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М. Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. - М.: ВИНИТИ, 1987. - Т.25. - С.3 - 121.

6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1965. - 628 с.

7. Авхадиев Ф. Г. Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений // Матем. заметки. - 1975. - Т. 18. - № 6. - С. 793 - 802.

8. Becker J., Pommerenke Ch. Schlichtheitskriterien and Jordangebiete// J.Reine und Angew. Math. - 1984. - Bd. 354. - S. 74 - 94.

9. Рогожин В. С. Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач // Прикл. мат. и мех. - 1958. - Т.22.- № 6. - С.804 - 807.

10. Маркушевич А. И. Sur la représentation conforme des domaines à frontières variables // Матем. сб. - 1936. - Т.143. - № 6. - С.863 - 886.

Доложено на семинаре 27 января 1986 года и 26 января 1987 года.