

Рис. 3. Деформированное состояние упругой плиты, ограниченной жесткой поверхностью и сжатой жёстким штампом

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (9.9786.2017/8.9).

Литература

1. Konyukhov A., Izi R. *Introduction to computational contact mechanics: a geometrical approach*. – John Wiley and Sons Ltd, 2015. – 302 с.
2. Голованов А. И., Султанов Л. У. *Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. – Казань, 2008. – 164 с.

NUMERICAL MODELLING OF FINITE DEFORMATIONS WITH CONTACT INTERACTION

A.I. Abdrakhmanova, L.U. Sultanov

In the paper a method of numerical investigation of the stress-strain state of elastic solids with contact interaction is presented. To perform the contact conditions in finite element implementation the method of penalty is used, under which additional conditions for contact conditions are imposed locally on the element, which leads to the possibility of constructing the so-called contact elements locally. For normal contact without friction is formulated functionality based on functions of the penetration. The contact functionality is add to the function of elastic potential for the two bodies. To search the contact area, we use “the closest point projection algorithm”. This algorithm allows building the contact elements, based on the approach called “master-slave”. The contact problem, formulated in a variational form, with the use of these approaches, is nonlinear and to solve this problem, we apply Newton’s iteration method. The results were obtained under the state assignment of the Russian Ministry of Education and Science (9.9786.2017/8.9).

Keywords: finite deformations, contact interaction, penalty method, closest point projection algorithm, contact element.

УДК 519.67

МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ЖИДКОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ С РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ СЕЛЕКТИВНОЙ МЕМБРАНОЙ

И.А. Авдеев¹

¹ avdeyev.iv@gmail.com; Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук

В статье обсуждается построение математической модели для процесса переноса заряженных частиц через селективную мембрану в жидком диэлектрике, а также решение прикладной задачи по определению значений напряжения и тока во внешней цепи при известных сопротивлении во внешней цепи и концентрациях ионов в рабочей камере.

Ключевые слова: селективная мембрана, диэлектрик, ионообмен, электрическое поле, поток ионов, напряжение, сила тока, сопротивление.

Рассмотрим селективную мембрану, выполненную в форме тонкой плоской пластины из диэлектрического материала. Погрузим её в некоторый водный раствор. Всё пространство, в котором находится раствор, делится вертикально расположенной мембраной на две камеры: левую и правую. Левую камеру условно назовём анодной, а правую – катодной. Селективность мембраны проявляется в том, что сквозь неё фильтруются лишь положительно заряженные ионы. Поместим в анодную и катодную камеры электроды, замкнутые через внешнюю цепь. Для простоты будем считать, что электроды представляют собой бесконечные плоские пластины, расположенные параллельно мембране. Выберем цилиндрическую плоскую поверхность с образующей, параллельной оси O_x и поперечным сечением площади S . Эта цилиндрическая поверхность ограничивает в пространстве между электродами область, представляющую собой гальванический элемент. Предполагается, что при разности потенциалов U и сопротивлении r во внешней цепи течёт ток I . Нас будет интересовать, какое напряжение U и ток I во внешней цепи мы сможем получить при определенных концентрациях ионов в рабочей камере и известном сопротивлении внешнего участка r . Подвижность ионов u считается известной. Подчеркнём, что нас интересует исключительно стационарный процесс. Если пренебречь конкретикой окислительно-восстановительных реакций и связанных с ними скачками электрического поля на электродах, то при некоторых дополнительных предположениях получается достаточно простая модель, в которой показатели напряжения и тока во внешней цепи восстанавливаются по падению концентраций внутри рабочей камеры. Всё что при этом потребуется – это знание коэффициентов диффузии и подвижности ионов во всех трёх областях: в анодной и катодной камерах, а также в толще мембраны. Определение концентраций сводится к решению трансцендентного уравнения. Характеристика u транспортных свойств мембраны при этом предполагается заранее известной. Тогда можно сформулировать основные положения модели:

1. В электролите возникает потенциал двойного слоя с локализацией на мембране.
2. Любая область внутри анодной или катодной камеры сохраняет свою электриче-

скую нейтральность.

3. Потенциал электрического поля непрерывен на границе электродов.

Непрерывность потенциала электрического поля на границе электродов означает выполнение равенства

$$\Delta\Phi = U,$$

а чисто диффузионный характер движения ионов в рабочих камерах приводит к частному случаю уравнения потока:

$$j = -D \frac{d[c]}{dx}.$$

Так как мы изучаем стационарный процесс, то концентрация $[c]$ в соответствующих областях представляется линейной функцией. Получаем два уравнения, отдельно для анодной камеры и катодной камеры

$$\frac{h_a}{D_a} j = [ox] - [c_a],$$

$$\frac{h_k}{D_k} j = [c_k] - [red].$$

В таком случае уравнение для напряжения принимает вид:

$$U = \mu \ln \frac{[c_a] + \frac{hj}{uU}}{[c_k] + \frac{hj}{uU}}. \quad (1)$$

С целью определения предельных значений тока и напряжения во внешней цепи кажется целесообразным ввести средние по рабочим камерам значения концентраций:

$$[c_1] = \frac{[ox] + [c_a]}{2}, \quad [c_2] = \frac{[red] + [c_k]}{2}, \quad [c_1] \geq [c_2].$$

Перенос ионов в толще мембраны происходит лишь вследствие диффузионного механизма, поле \tilde{A} оказывает тормозящее действие на движение ионов в толще мембраны. Если разомкнуть внешнюю цепь, с течением времени плотность потока j будет равна нулю, а значит сам процесс перейдет в равновесное состояние.

Выражение для ЭДС источника имеет вид:

$$U_{xx} = \mu \ln \frac{[c_1]}{[c_2]}.$$

Теперь найдем величину I_{kz} . Для этого воспользуемся соотношением (1), которое с учётом закона Ома для внешней цепи можно переписать и перейти к пределу при $r \rightarrow 0$. В результате получим величину I_{kz} :

$$I_{kz} = \frac{DnFS}{h} ([c_k^*] - [c_a^*]).$$

Эти предельные характеристики тока и напряжения являются вспомогательными, позволяют найти сопротивление источника для использования далее в задаче, а

также ограничивают соответствующие характеристики внешней цепи. Из закона Ома следует:

$$U + I \frac{\mu}{2nFS} \left(\frac{h_a}{D_a} + \frac{h_k}{D_k} \right) \frac{\ln \frac{[c_1]}{[c_2]}}{[c_1] - [c_2]} = \mu \ln \frac{[c_1]}{[c_2]}.$$

Если объединить все эти уравнения в одно, то для него можно сформулировать теорему о существовании и единственности решения:

Теорема. При условии $[c_1] > [c_2]$ уравнение имеет, и при том единственное, решение $(I, U) \in (0, I_{kz}) \times (0, U_{xx})$.

На аноде имеет место реакция: $O_2 + 4H + 4e^- = 2H_2O$. Это означает, что в результате восстановительной реакции выделяется элементарный заряд, который совершает необходимую работу во внешней цепи. Стоит отметить особую важность зависимости абсолютной диэлектрической проницаемости среды и подвижности иона водорода от температуры среды рабочих камер, это связано с явлением сверх подвижности иона водорода при высоких температурах. Предполагается, что следние концентрации $[c_1]$ и $[c_2]$ известны, и $[c_1] > [c_2]$

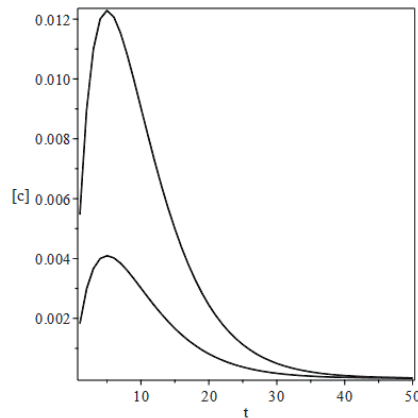


Рис. 1. Изменение средних концентраций ионов в камерах

В результате были получены следующие значения для тока

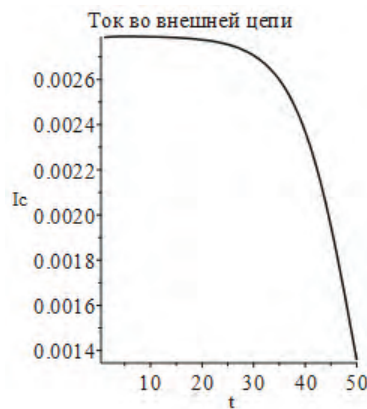


Рис. 2. Ток во внешней цепи

Литература

1. Джексон Дж. *Классическая электродинамика*. – М.: Мир, 1965.
2. Таланов В.М., Житный Г.М. *Ионные равновесия в водных растворах*. – М.: Академия естествознания, 2007.
3. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. *Физика в техническом университете, т.5. Квантовая физика*. – М.: МГУ, 2012.
4. Заболоцкий В.И., Никоненко В.В. *Перенос ионов в мембранах*. – М.: Наука, 1996.

MATH MODEL OF AN ELECTROCHEMICAL PROCESS IN A LIQUID DIELECTRIC WITH A SEPARATING SELECTIVE MEMBRANE

I.A. Avdeyev

This paper discusses the construction of a math model for the process of transfer of ions through the selective membrane in a liquid dielectric, and finding the solutions of amperage and voltage, obtained from known external impedance and concentrations of the ions in the cells.

Keywords: selective membrane, dielectric, ion exchange, electric potential, ionic current, voltage, amperage, impedance.

УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Ю.Р. Агачев¹, А.В. Гуськова²

¹ jagachev@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

² avsavina@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье исследуется задача Коши для одного класса линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной в главной части в случае, когда известные коэффициенты уравнения принадлежат классу Гельдера. Доказана корректность задачи в специальном образом построенной паре функциональных пространств. На основе аппарата алгебраических полиномов построены приближения к точному решению исследуемой задачи.

Ключевые слова: линейное уравнение, дробно-дифференциальное уравнение, задача Коши, корректная постановка, приближенное решение.

Пусть m – фиксированное натуральное число, вещественное число α подчинено условию $m - 1 < \alpha < m$.

В работе исследуется задача Коши

$$x^{(i)}(a) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (1)$$