А. В. Казанцев, О внутреннем радиусе для бесконечных областей, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 63–67

А.В.Казанцев

О ВНУТРЕННЕМ РАДИУСЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Для односвязной гиперболической области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ внутренний радиус в точке $w \in D$ представляет собой величину, обратную гиперболической метрике D, и определяется с помощью конформного отображения $w=f(\zeta)$ единичного круга $E=\{\zeta : |\zeta|<1\}$ на область D:

$$R(\zeta) \equiv R(D, f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2). \tag{I}$$

В работе [I] (теорема 2) показано, что при выполнении условия однолистности Нехари [2]

$$|\{f,\zeta\}| \leqslant 2/(1-|\zeta|^2)^2, \zeta \in E \; (\{f,\zeta\} = (f''(\zeta)/f'(\zeta))' - (f''(\zeta)/f'(\zeta))^2/2), \tag{2}$$

для регулярной или мероморфной в E функции $f(\zeta)$ внутренний радиус (I) обладает не более одной критической точкой в E; при этом в случае регулярности $f(\zeta)$ в E постоянная 2 неулучшаема.

В настоящей статье исследуется внутренний радиус (I) для бесконечных областей D, являющихся образами единичного круга под действием мероморфных в E или $\bar{E}$ функций $f(\zeta)$. Построен аналог приведенного утверждения для более общих условий со шварцианом $\{f, \zeta\}$; с помощью этого аналога показано, что постоянную 2 в условии (2) можно увеличить с сохранением единственности критической точки (I) лишь в некоторой неулучшаемой подобласти E.

В статье [3] доказана следующая

Теорема А. Пусть $f(\zeta)$ – непостоянная аналитическая функция в E, и пусть $\mathcal{F}(r)$ – вещественнозначная функция на $[0,I)$ со следующими свойствами: $\mathcal{F} \in C^3[0,1)$; $\mathcal{F}'(r)>0$, $\{\mathcal{F}, r\} \geqslant 0$, $r \in [0,1)$; $\mathcal{F}''(0) \geqslant 0$; выражение $(1-r^2)^2\{\mathcal{F}, r\}$ не возрастает с ростом r. Тогда если выполняется условие

$$|\{f, re^{i\alpha}\}| \leqslant \{\mathcal{F}, r\} \tag{3}$$

при любых r, $\alpha/2\pi \in [0,1)$, то $f(\zeta)$ однолистна в E.

При замене условия невозрастания функции $(1-r^2)^2\{\mathcal{F}, r\}$ неравенством

$$|f''(0)/f'(0)| \leq \mathcal{F}''(0)/\mathcal{F}'(0) \tag{4}$$

предположения теоремы А описывают один из случаев в следующем условии единственности.

Теорема I. Пусть функции $f(\zeta)$ и $\mathcal{F}(\zeta)$, мероморфные и локально однолистные в E, имеют в окрестности точки $\zeta = 0$ представления $f(\zeta)=a/\zeta+\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k$ и $\mathcal{F}(\zeta)=b/\zeta+\sum_{k=0}^{\infty} b_k\zeta^k$, при $a = b = 0$ связаны соотношением (4), а случай $a=0$, $b\neq 0$ исключается. Пусть, кроме того, существует $r_1 \in (0,1]$ такое, что функция $\mathcal{F}(\zeta)$ обладает следующими дополнительными свойствами: $(i)\ \mathcal{F}:(0,r_1)\to\mathbb{R}$; $0<\mathcal{F}'(r)<+\infty$, $r\in(0,r_1)$; $(ii)\ \{\mathcal{F},r\}\geq 0$, $r\in(0,r_1)$ или $\mathcal{F}''(0)\geq 0$ – в случае (3) или (4), соответственно. Тогда при выполнении условия

$$Re(e^{i2\alpha}\{f, re^{i\alpha}\}) \leq \{\mathcal{F}, r\} \tag{5}$$

либо условия (3), r/r_1, $\alpha/2\pi\in[0,1)$, функция $f(\zeta)$ будет регулярной в кольце $0<|\zeta|<r_1$, и имеет место неравенство

$$Re(e^{i\alpha}f''(re^{i\alpha})/f'(re^{i\alpha})) \leq \mathcal{F}''(r)/\mathcal{F}'(r),\ r/r_1,\ \alpha/2\pi\in[0,1), \tag{6}$$

со знаком равенства при $0<|\zeta|<r_1$ только в случае

$$f(\zeta)=A\mathcal{F}(\varepsilon\zeta)+B, \tag{7}$$

$A,B\in\mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$. Таким образом, $\zeta=0$ – единственная критическая точка (максимума, бесконечного при $a\neq 0$) функции

$$R_{\mathcal{F}}(\zeta)=|f'(\zeta)|/\mathcal{F}'(|\zeta|) \tag{8}$$

в $|\zeta|<r_1$, либо $f(\zeta)$ имеет вид (7). (Последняя возможность обретает смысл только в случае, когда функция (7) сама удовлетворяет (3) или (5))

Доказательство теоремы I следует схеме, использованной при обосновании теоремы 2 в [I] и основано на применении следующего утверждения.

Лемма I (ср. с [4], [I]). Пусть $g(t)$ – комплекснозначная мероморфная функция на множестве $T=[t_0, t_1)$, $-\infty\leq t_0<t_1\leq+\infty$ (т.е. мероморфная функция в окрестности каждой точки множества

T), удовлетворяющая условию $g'(t)\neq 0$ для любого $t\in T$ и имеющая в окрестности $t=t_0$ одно из следующих представлений:

I) $g(t)=At+B+\sum_{k=2}^{\infty} A_k(t-t_0)^k$ или 2) $g(t)=A/(t-t_0)+B+\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t-t_0)^k$, если $t_0>-\infty$, и 3) $g(t)=At+B+\sum_{k=1}^{\infty} A_k t^{-k}$, если $t_0=-\infty$; $A\neq 0$. Тогда при выполнении неравенства

$$Re\{g,t\}\leq 0 \quad , t\in T \quad , \tag{9}$$

и начального условия $\lim_{t\to t_0} Re\, g''(t)/g'(t)\leq 0$ (сводящегося к равенству в случаях 2) и 3)) функция $g(t)$ регулярна в $T\setminus\{t_0\}$ и удовлетворяет неравенству

$$Re\, g''(t)/g'(t)<0 \quad , \quad t\in T\setminus\{t_0\} \quad , \tag{I0}$$

либо (в случае разложения I) или 3))

$$g(t)=At+B \quad . \tag{II}$$

Таким образом, вещественная функция $|g'(t)|$ будет иметь единственную критическую точку $t=t_0$ (максимума, бесконечного для разложения 2)) на множестве T, за исключением случая, когда $g(t)$ имеет вид (II).

Связь между теоремой I и леммой I устанавливает суперпозиция $g(t)=f[\mathcal{F}^{-1}(t)e^{i\alpha}]$ для произвольного фиксированного $\alpha\in[0, 2\pi)$, где функция $t=\mathcal{F}(r)$ в силу условия (i) теоремы I реализует взаимно-однозначное соответствие между множествами $[0,r_1)$ и $T=[t_0,t_1)$. При этом неравенство (5) переходит в (9), (6) – в (I0) (с возможным знаком равенства), правая часть (8) – в $|g'(t)|$, а функция (7) соответствует (II). (Отметим, что исключенному из условий теоремы случаю $a=0$, $b\neq 0$ отвечает разложение $g(t)=B+\sum_{k=1}^{\infty} A_k t^{-k}$ в окрестности $t_0=-\infty$, которое под действием (9) приводит к противоречию.)

Легко проверить, что утверждение теоремы 2 из [I] (за исключением неулучшаемости) получается из теоремы I при $r_1=1$ и $\mathcal{F}(\zeta)=\frac{1}{2}\ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$. Неулучшаемость коэффициента 2 в (2) в классе функций, имеющих полюсы в E, устанавливается с помощью функции

$$f_\gamma(\zeta)=\frac{1}{i}\left[\omega_\gamma(\zeta)+1\right]/\left[\omega_\gamma(\zeta)-1\right], \omega_\gamma(\zeta)=(1+\zeta)^{i\gamma}(1-\zeta)^{-i\gamma}, \gamma>0 \; . \tag{I2}$$

Действительно, внутренний радиус (I) при $f(\zeta)=f_\gamma(\zeta)$ будет иметь счетное число бесконечных максимумов при $\zeta=th(\pi k/\gamma)$ и седел при $\zeta=th[\pi(2k+1)/(2\gamma)]$, $k\in\mathbb{Z}$. Шварциан равен $\{f_\gamma,\zeta\}=2(1+\gamma^2)/(1-\zeta^2)^2$.

С помощью (I2) можно обосновать неулучшаемость постоянной 2 в (2) и в классе функций с единственным полюсом в E (и даже в $\bar{E}$). Для этого рассмотрим $\tilde{f}(\zeta)=f_\gamma(\zeta\, th\frac{\pi}{\gamma})$ при $\gamma>0$, достаточно близких к нулю. Функция $\tilde{f}(\zeta)$ имеет три полюса в точках 0, $\pm$I. В силу теоремы о неявных функциях существует $r=r(\gamma)>$ $>th\frac{\pi}{2\gamma}/th\frac{\pi}{2\gamma}$, такое что (I) при $f(\zeta)=\tilde{f}_r(\zeta)\equiv\tilde{f}(r\zeta)$ имеет два локальных максимума в E, лежащих в окрестностях точек $\pm$I. С другой стороны, $\{\tilde{f}_r,\zeta\}=2(1+\gamma^2)r^2(\gamma)\,th^2\frac{\pi}{\gamma}/(1-\zeta^2)^2$, и доказательство завершают оценки $2(1+\gamma^2)r^2(\gamma)\,th^2\frac{\pi}{\gamma}>2(1+\gamma^2)\,th^2\frac{\pi}{2\gamma}>2$ и $\lim\limits_{\gamma\to0}2(1+\gamma^2)r^2(\gamma)\,th^2\frac{\pi}{\gamma}\le\lim\limits_{\gamma\to0}2(1+\gamma^2)\,th^2\frac{\pi}{\gamma}=2$.

Полагая в теореме I $\mathcal{F}(\zeta)=f_\gamma(\zeta)$, получим такое утверждение.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $f(\zeta)$ – мероморфная и локально однолистная в E функция с разложением $f(\zeta)=a/\zeta+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^k$, $a\neq0$, в окрестности начала, для которой выполняется оценка

$$|\{f,\zeta\}|\le2(1+\gamma^2)/(1-|\zeta|^2)^2,\quad \zeta\in E, \tag{I3}$$

для произвольного фиксированного $\gamma>0$. Тогда (I) не будет иметь критических точек в кольце $0<|\zeta|<th(\pi/(2\gamma))$, причем последняя постоянная является неулучшаемой.

Доказательство. Так как $f''_\gamma(\zeta)/f'_\gamma(\zeta)=2\zeta[1+\gamma f_\gamma(\zeta)/$ $/\zeta]/(1-\zeta^2)$ и $f_\gamma(r)<0$, $r\in(0,th\frac{\pi}{2\gamma})$, то оценка (6) в данном случае приводит к

$$Re(e^{i\alpha}f''(re^{i\alpha})/f'(re^{i\alpha}))\le2r[1+\gamma f_\gamma(r)/r]/(1-r^2)<2r/(1-r^2)$$

при $0<r<th\frac{\pi}{2\gamma}$, $\alpha\in[0,2\pi)$. По теореме I $\zeta=0$ – единственный экстремум (I) в $|\zeta|<th\frac{\pi}{2\gamma}$. Неулучшаемость $th\frac{\pi}{2\gamma}$ реализуется функцией $f_\gamma(\zeta)$. Теорема 2 доказана.

По аналогии с [5] дадим инвариантную формулировку теоремы 2 в терминах гиперболической геометрии.

Пусть $f(\zeta)$ – мероморфная и локально однолистная в E функция и $P(f)$ – множество ее полюсов, лежащих в E. Определим величину $r(z, f)$ как гиперболический радиус наибольшего гиперболического круга в E с центром в $z \in P(f)$, в котором, кроме z, не будет других критических точек (I). Пусть

$$r(f) = \inf_{z \in P(f)} r(z, f).$$

Справедлива

<u>Теорема 3</u>. Пусть функция $f(\zeta)$ мероморфна и локально однолистна в E. Если выполняется оценка (I3), то $r(f) \geqslant \frac{\pi}{2\gamma}$, и эта нижняя граница является неулучшаемой для любого $\gamma > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированного $z \in P(f)$ автоморфизм $\varphi(\zeta) = (\zeta + z)/(1 + \bar{z}\zeta)$ $(\varphi(0) = z)$ круга E отображает гиперболический круг с центром в $\zeta = 0$ и гиперболическим радиусом $\pi/(2\gamma)$ на круг с центром в $\zeta = z$ с тем же радиусом. В силу инвариантности (I) и условия (2) относительно автоморфизмов E требуемое заключение будет следовать из теоремы 2, так как круг $\{\zeta : |\zeta| < th[\pi/(2\gamma)]\}$ имеет гиперболический радиус $\pi/(2\gamma)$.

Л и т е р а т у р а

I. А к с е н т ь е в Л. А., К а з а н ц е в А. В. Новое свойство класса Нехари и его применение // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, I990. – Вып.25. – С.33. – 5I.

2. N e h a r i Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. – I949. – V. 55. – N 6. – P.545 – 55I.

3. N e h a r i Z. Univalence criteria depending on the schwarzian derivative // Illinois j. math. – I979. – V.23.– N 3.– P.345 – 35I.

4. G e h r i n g F. W., P o m m e r e n k e C h. On the Nehari univalence criterion and quasicircles // Comment. Math. Helv. – I984. – V.59. – P.226 – 242.

5. M i n d a D. The Schwarzian derivative and univalence criteria // Contemporary Math. – I985. – V.38. – P.43 – 52.

Доложено на семинаре 2.02.I989 г.