Е. А. Широкова, Решение обратной задачи напорной фильтрации в неоднородном изотрошом грунте при задании распределения напоров как функции параметра x, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1992, выпуск 27, 140–147

ее обобщения и приложения: Сб.науч.тр. - Киев: Наукова думка, 1982. - С.116 - 126.

3. T a n D. On the dilatation estimates for Beurling - Ahlfors quasiconformal extension // Proc. Amer. Math. Soc. - 1987. - V.100. - N 4. - P.655 - 660.

4. С т о и л о в С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. - М.: Наука, 1964. - 227 с.

5. А к с е н т ь е в Л. А., Ш а б а л и н П. Л. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение // Изв. вузов. Мат. - 1983. - № 2. - С.6 - 14.

Доложено на семинаре 25 января 1988 г.

Е.А.Широкова

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ ПРИ ЗАДАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПОРОВ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА x

Обратная задача напорной фильтрации в анизотропном неоднородном грунте в случае конечного фильтрующего слоя была поставлена в [1]. Там же указан метод решения этой задачи, основанный на результатах В.Н.Монахова и С.Н.Антонцева и связанный с отображением области, получаемой в плоскости обобщенного потенциала, на каноническую область с помощью функции, удовлетворяющей квазилинейному уравнению Бельтрами. Существование и единственность такого отображения доказаны [2], однако способ построения отображающей функции не указан. В случае, когда фильтрующий слой бесконечен по глубине, подобная задача не рассматривалась. В случае однородного грунта переход от конечного слоя к бесконечному связан с расширением множества решений - появлением в выражении для функции, отображающей каноническую область на область фильтрации, слагаемого, умноженного на произвольную вещественную константу A [3]. В нашем случае такое слагаемое также появится, однако призвол константы A ограничен.

<u>Постановка задачи</u>. Пусть требуется найти неизвестный контур $L_z(BC)$ подземной части непроницаемой плотины, если вдоль L_z с концами в точках $B(0,0)$ и $C(\ell,0)$ задано распределе-

ние напоров $h=f(x)$, $x\in[0,\ell]$, со свойствами: $f(0)=H$, $f(\ell)=0$, $f'(x)<0$ при $x\in(0,\ell)$, $f'(0)=f'(\ell)=-\infty$, $f^{-1}(h)\in C_{\alpha}^{1}[-H,0]$. Границы бьефов AB и CD прямолинейны и расположены на одном уровне. Коэффициент фильтрации $k(x,y)$ таков, что $k(x,y)\equiv k_0$ при $\sqrt{x^2+y^2}>M$, и функция $\lambda(z)=(k_0-k(x,y))(k_0+k(x,y))^{-1}$, $z=x+iy$, удовлетворяет условиям: $|\lambda(z)|\le\lambda_0<1$ при $\operatorname{Im} z<0$ и

$|\lambda(z_1)-\lambda(z_2)|\le N|z_1-z_2|$, $\operatorname{Im} z_j<0$, $j=1,2$.

Вектор скорости фильтрующейся жидкости $\vec V=(A(x,y),B(x,y))$ удовлетворяет уравнениям: $\vec V=-k(x,y)\cdot\operatorname{grad} h$ и $\operatorname{div}\vec V=0$, поэтому введем функции $\varphi=\int k_0[k(x,y)]^{-1}[A\,dx+B\,dy]$, $\psi=\int[-B\,dx+A\,dy]$ и обобщенный комплексный потенциал $W=\varphi+i\psi$, для которого в области фильтрации $\mathcal{D}_z$ справедливо уравнение: $W'_{\bar z}=\lambda(z)\cdot\overline{W'_z}$.

В плоскости W получим полуполосу $\mathcal{D}_W$: $\psi<0$, $-k_0\cdot H<\varphi<0$, причем $\varphi\big|_{z\in L_z}=-k_0\cdot f(x)$, $x\in[0,\ell]$.

Продолжим $W(z)$ из области фильтрации $\mathcal{D}_z$, расположенной в нижней полуплоскости, в область $\mathcal{D}_z^-(A'B'CD)$, симметричную $\mathcal{D}_z$ относительно CD, по формуле: $\tilde W(z)=-\overline{W(\bar z)}$, $\operatorname{Im} z>0$.

Тогда $\tilde W'_z(z)=-\overline{W'_z(\bar z)}$, $\tilde W'_{\bar z}(z)=-\overline{W'_{\bar z}(\bar z)}$, $\tilde W'_{\bar z}\cdot[\overline{\tilde W'_z}]^{-1}\big|_z=$

$=[\overline{-W'_{\bar z}}]\cdot[-W'_z]^{-1}\big|_{\bar z}=\overline{\lambda(z)}\big|_{\bar z}=\lambda(\bar z)$, $\operatorname{Im} z>0$.

В $\mathcal{D}_z\cup\mathcal{D}_z^-$ рассмотрим функцию $W(z)=\begin{cases}W(z), & z\in\mathcal{D}_z,\\ \tilde W(z), & z\in\mathcal{D}_z^-,\end{cases}$

для которой справедливо уравнение $W'_{\bar z}=\tilde\lambda(z)\cdot\overline{W'_z}$, где

$$\tilde\lambda(z)=\begin{cases}\lambda(z), & z\in\mathcal{D}_z,\\ \lambda(\bar z), & z\in\mathcal{D}_z^-,\end{cases}\qquad \operatorname{Re} W\big|_{z\in BC}=-k_0\,f(x)\quad\text{при } x\in[0,\ell],$$

$\operatorname{Re} W\big|_{z\in B'C'}=k_0\cdot f(x)$ при $x\in[0,\ell]$.

Как и в [3], перейдем к вспомогательной плоскости, отобразив круг $|\zeta|\le1$ на удвоенную полуполосу $\mathcal{D}_W\cup\tilde{\mathcal{D}}_W$ с помощью функции $W=-k_0\cdot H\cdot(\pi i)^{-1}\ln\zeta$. Из соответствия точек плоскостей z и ζ имеем: функция $\zeta=\zeta(z,\bar z)$ взаимнооднозначно отображает

$\mathcal{D}_z \cup \mathcal{D}_z^- \cup AB$ на внутренность единичного круга с соответствием $\infty \longleftrightarrow 0$ и удовлетворяет в $\mathcal{D}_z \cup \mathcal{D}_z^-$ уравнению $\zeta'_{\bar z} = -\tilde\lambda(z)\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot\overline{\zeta'_z}$. Тогда для обратной функции $z = z(\zeta,\bar\zeta)$ справедливо уравнение

$$z'_{\bar\zeta} = \tilde\lambda(z)\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_\zeta\ ,\quad |\zeta|<1 \tag{I}$$

(при $\zeta=0$ получим $\tilde\lambda(z(\zeta))=0$).

Из сравнения граничных данных найдем

$$Re\, z\Big|_{\zeta=e^{i\theta}} = f^{-1}\left(\frac{H\cdot\theta}{k_0\cdot\pi}\right) = p(\theta)\ ,\ \theta\in[-\pi,\pi]\ . \tag{2}$$

Благодаря условию $\tilde\lambda(z)\equiv 0, |z|>M$, получим представление $z(\zeta)$ вблизи $\zeta=0: z(\zeta)=A\cdot\zeta^{-1}+F(\zeta,\bar\zeta)$, где $F(\zeta,\bar\zeta)$ ограничена при $\zeta\to 0$, A – положительная константа.

Исследуем возможность построения методом итерации функции $z(\zeta), |\zeta|<1$, удовлетворяющей уравнению (I) с краевым условием (2) и с заданным поведением вблизи $\zeta=0$.

Пусть сначала $\tilde\lambda(z)\equiv 0$. Тогда

$$z_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} p(\gamma)\,\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\,d\gamma + A\cdot(\zeta^{-1}-\zeta) \equiv g(\zeta)+A(\zeta^{-1}-\zeta)\ . \tag{3}$$

Положим теперь $\tilde\lambda(z)=\tilde\lambda(z_0(\zeta))$. Требуется найти следующую итерацию $z_1(\zeta), |\zeta|<1$, если $z_1(\zeta)$ удовлетворяет уравнению $z'_{1\bar\zeta} = \tilde\lambda(z_0(\zeta))\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_{1\zeta}$ и граничному условию (2). Согласно [4] $z_1(\zeta)=z_0(\zeta)+T_1[\omega_1](\zeta)$, где

$$T_1[\omega](\zeta) = -\frac{1}{\pi}\left\{\iint\limits_{|t|\le 1}\left[\frac{\omega(t)}{t-\zeta}+\frac{\zeta\cdot\bar\omega(t)}{1-\zeta\cdot\bar t}-\frac{\omega(t)}{t-1}-\frac{\bar\omega(t)}{1-\bar t}\right]d\sigma_t\right\}\ ,$$

а $\omega_1(\zeta)$ находится из уравнения

$$\omega_1(\zeta) = \tilde\lambda(z_0(\zeta))\cdot e^{2i\arg\zeta}\circ S_1[\omega_1(\zeta)] + \tilde\lambda(z_0(\zeta))\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z_0'(\zeta)\ . \tag{4}$$

Здесь оператор

$$S_1[\omega](\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|\le 1}\left[\frac{\omega(t)}{(t-\zeta)^2}+\frac{\overline{\omega(t)}}{(1-\zeta\bar t)^2}\right]d\sigma_t$$

получен из оператора $T_1[\omega]$ дифференцированием по ζ. Уравнение (4) в некотором пространстве $L_p, p>2$, разрешимо, что следует из свойств оператора S_1 [4] и ограниченности последнего слагаемого в правой части (4) (так как $\tilde{\lambda}(z_0(0))=0$), если $\lambda_0 \cdot \|S_1\|_{L_p} < 1$.

Аналогичным способом ищутся все последующие итерации:

$$z_n(\zeta) = z_0(\zeta) + T_1[\omega_n](\zeta) \quad ,$$

где

$$\omega_n(\zeta) = \left[J - \tilde{\lambda}(z_{n-1}(\zeta)) \cdot e^{2i \arg \zeta} \cdot S_1 \right]^{-1} \circ \left[\tilde{\lambda}(z_{n-1}(\zeta)) e^{2i \arg \zeta} \cdot z_0'(\zeta) \right]. \quad (5)$$

Для того, чтобы оценить $\| \tilde{\lambda}(z_{n-1}(\zeta)) e^{2i \arg \zeta} \cdot z_0'(\zeta) \|_{L_p}$, найдем $\tilde{\rho}$ такое, что $|z_n(\zeta)| > M$ при $|\zeta| < \tilde{\rho}$. Пусть ρ_n таково, что $|z_n(\zeta)| > M$ при $|\zeta| < \rho_n$.

Имеем $\|z_n - z_0\|_C \equiv \|T_1[\omega_n]\|_C \le \|T_1\|_C \cdot \|\omega_n\|_{L_p}$ [5], где $\|T_1\|_C \le 8/(2\pi)^{1/p} \cdot [(p-2)^{\frac{1}{p}-1} + 3{,}3]$, и из (5)

$$\|\omega_n\|_{L_p} \le \lambda_0 \cdot [\|g'\|_C + A \cdot (\rho_{n-1}^{-2} + 1)] \pi^{\frac{1}{p}} \cdot (1 - \rho_{n-1}^2)^{\frac{1}{p}} (1 - \lambda_0 \cdot \|S_1\|_{L_p})^{-1} <$$
$$< \lambda_0 [\|g'(\zeta)\|_C + A \cdot (\rho_{n-1}^{-2} + 1)] \pi^{\frac{1}{p}} (1 - \lambda_0 \|S_1\|_{L_p})^{-1},$$

где $\|g'(\zeta)\|_C = \sup\limits_{|\zeta| \le 1} |g(\zeta)|$.

Оценка $\|S_1\|_{L_p}$ также получена в [5]:

$$\|S_1\|_{L_p} \le \begin{cases} C^{(p-2)/p}, & 2 \le p \le p_0, \\ \Psi(p), & p \ge p_0, \end{cases}$$

где $\Psi(p) = \pi^2 2^{1/p-1} \cdot [\{p/(p-1)\}^{2/p} - 1]^{-1}$, $p \approx 5{,}5$ – единственный на интервале ($2, +\infty$) корень уравнения $p(p-2) \cdot \Psi'(p) = 2\Psi(p) \cdot \ln \Psi(p)$, $C = \Psi(p_0)^{p_0/(p_0-2)}$.

Для определения ρ_n потребуем, чтобы выполнялось неравенство $A \cdot (\rho_n^{-1} - \rho_n) - \|g\|_C - \|T_1\|_C \cdot \|\omega_n\|_{L_p} > M$, то есть

$$\rho_n < \sqrt{(M + \|g\|_C + \|T_1\|_C \cdot \|\omega_n\|_{L_p})^2 \cdot (4A^2)^{-1} + 1} - (M + \|g\|_C + \|T_1\|_C \cdot \|\omega_n\|_{L_p}) \cdot (2A)^{-1}, \quad (6)$$

$\|g\|_C = \sup\limits_{|\zeta| \le 1} |g(\zeta)|$.

С учетом оценки нормы $\| \omega_n \|_{L_p}$ заметим, что неравенство (6) будет выполняться, если $\rho_n = \sqrt{(\gamma+\beta\cdot\rho_{n-1}^{-2})^2+1}-(\gamma+\beta\cdot\rho_{n-1}^{-2}) \equiv \equiv \tau(\rho_{n-1})$, где

$$\gamma=\left\{M+\|g\|_C+\left[\|T_1\|_C\cdot\pi^{1/p}\cdot\lambda_0\cdot(\|g'\|_C+A)\right]\cdot\left[1-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p}\right]^{-1}\right\}\cdot(2A)^{-1}, \tag{7}$$

$$\beta=\|T_1\|_C\cdot\lambda_0\cdot\pi^{1/p}\cdot 2^{-1}\cdot(1-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})^{-1}, \rho_0=\sqrt{(M+\|g\|_C)^2\cdot 4^{-1}A^{-2}+1}-(M+\|g\|_C)\cdot 2^{-1}\cdot A^{-1}.$$

Для того, чтобы итерационный процесс получения ρ_n по формуле $\rho_n=\tau(\rho_{n-1})$, $n=1,2$, сходился, но не к $\rho=0$, потребуем, чтобы существовало значение $\rho^*\in(0,1)$ такое, что $\tau(\rho^*)>\rho^*$ и $\rho_0>\rho^*$. Тогда сходимость итерационного процесса на интервале $(\rho^*,1)$ следует из того, что $\tau'(\rho)>0, \tau(0)=0, \tau'(0)=0, \tau(1)<1$, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n>\rho^*$.

Условие $\tau(\rho^*)>\rho^*$ выполняется, например, при

$$16\beta(\gamma+4\beta)<1 \tag{8}$$

и

$$\rho^*=\left\{(1-8\gamma\cdot\beta)-\left[(1-8\gamma\cdot\beta)^2-64\beta^2(\gamma^2+1)\right]^{1/p}\right\}^{1/p}\cdot 4^{-1}\cdot(\gamma^2+1)^{-1/2}. \tag{9}$$

Очевидно, что $\rho_0>\rho^*$ при достаточно малых значениях β, то есть малых значениях λ_0 или достаточно большом значении A.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n>\rho^*$, имеем: $|z_n(\zeta)|>M$ при $|\zeta|<\rho^*$, то есть $\tilde{\rho}=\rho^*$.

Теперь оценим сходимость итерационного процесса получения $z_n(\zeta)$ в пространстве непрерывных при $\rho^*\le|\zeta|\le 1$ функций. Имеем

$$\|z_{n+1}-z_n\|_C\le\|T_1\|_C\cdot\|\omega_{n+1}-\omega_n\|_{L_p}, \tag{10}$$

где $\|\omega_{n+1}-\omega_n\|=\|[J-\hat{S}_n]^{-1}\circ(\mu_n\cdot z_0')-[J-\hat{S}_{n-1}]^{-1}\circ(\mu_{n-1}\cdot z_0')\|_{L_p}$.

Здесь введены обозначения: $\mu_n(\zeta)=\tilde{\lambda}(z_n(\zeta))\cdot e^{2i\arg\zeta}$, $\hat{S}_n(\omega)=\mu_n\cdot S_1(\omega)$.

Запишем выражение, норма которого оценивается, в виде ряда:

$$\|\omega_{n+1}-\omega_n\|_{L_p}=\|(\mu_n-\mu_{n-1})\cdot z_0'+\sum_{k=1}^{\infty}[\tilde{S}_n^k(\mu_n\cdot z_0')-\tilde{S}_{n-1}^k(\mu_{n-1}\cdot z_0')]\|_{L_p}.$$

Так как $\|\tilde{S}_n^k(\mu_n\cdot z_0')-\tilde{S}_{n-1}^k(\mu_{n-1}\cdot z_0')\|_{L_p}\le\|\tilde{S}_n^k[(\mu_n-\mu_{n-1})\cdot z_0']\|_{L_p}+$
$+\|(\tilde{S}_n^k-\tilde{S}_{n-1}^k)(\mu_{n-1}\cdot z_0')\|_{L_p}\le[\|g'\|_C+A\cdot(\rho^{*-2}+1)]\cdot\pi^{1/p}\cdot\lambda_0^k\|S_1\|_{L_p}^k\times$
$\times(1+k)\cdot\|\mu_n-\mu_{n-1}\|_C\le[\|g'\|_C+A(\rho^{*-2}+1)]\cdot\pi^{1/p}\lambda_0^k\cdot\|S_1\|_{L_p}^k\times(1+k)\times$
$\times N\cdot\|z_n-z_{n-1}\|_C$, имеем

$$\|\omega_{n+1}-\omega_n\|_{L_p}\le N\cdot[\|g'\|_C+A\cdot(\rho^{*-2}+1)]\pi^{1/p}\cdot\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})^k\cdot(1+k)\right\}\cdot\|z_n-z_{n-1}\|_C. \quad (11)$$

С помощью (10) получим оценку для $\|z_{n+1}-z_n\|_C$:

$$\|z_{n+1}-z_n\|_C\le\|T_1\|_C\cdot N\cdot[\|g'\|_C+A(\rho^{*-2}+1)]\pi^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\left\{1+\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p}\cdot(1-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})^{-2}\cdot(2-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})\right\}\cdot\|z_n-z_{n-1}\|_C.$$

В результате, если $\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p}<1$, значение ρ^* получено по формуле (9), где для β и γ из (7) справедливо (8) и для ρ_0 из (7) справедливо $\rho^*<\rho_0$; то при

$$\delta\equiv\|T_1\|_C\cdot N\cdot[\|g'\|_C+A(\rho^{*-2}+1)]\pi^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{1+\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p}\cdot(1-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})^{-2}(2-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})\right\}<1 \quad (12)$$

итерационный процесс сходится в пространстве C, то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(\zeta)=z(\zeta)\in C$. В оценку (12) входит еще $\|g'\|_C$, где $g(\zeta)$ – интеграл Шварца из (3). Из предположений относительно $f^{-1}(h)$ следует, что $p'(\theta)\in C_\alpha[-\pi,\pi]$, и следовательно, входящий в выражение для $g'(e^{i\theta})$ интеграл Гильберта ограничен. Поэтому оценка $\|g'\|_C$ может быть получена из [6].

Заметим, что, зная δ (12), легко оценить расстояние между n-й итерацией и предельной функцией:

$$\|z(\zeta)-z_n(\zeta)\|_C \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\|z_1-z_0\|_C \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\|T_1\|_C\cdot\lambda_0\cdot\left[\|g'\|_C+A\cdot(\rho^{*^{-2}}+1)\right]\cdot\pi^{1/p}.$$

Из (I0) и (II) при условии (I2) следует, что последовательность $\{\omega_n(\zeta)\}$ сходится в пространстве L_p к функции $\omega(\zeta)\in L_p$, так что $z(\zeta)=z_0(\zeta)+T_1[\omega](\zeta)$. Благодаря свойствам оператора T_1 [4] $z(\zeta)$ имеет обобщенные производные по ζ и $\bar\zeta$: $z'_\zeta=z'_0+S_1[\omega]$, $z'_{\bar\zeta}=\omega$, причем $z'_\zeta=\lim_{n\to\infty} z'_{n\zeta}$, $z'_{\bar\zeta}=\lim_{n\to\infty} z'_{n\bar\zeta}$ (сходимость по норме пространства L_p).

При $|\zeta|<\rho^*$, согласно (5), $z'_{\bar\zeta}\equiv 0$ и $\tilde\lambda(z(\zeta))\equiv 0$. Значит, уравнение (I) для $z(\zeta)$ в области $|\zeta|<\rho^*$ справедливо.

Рассмотрим в кольце $\rho^*\leq|\zeta|\leq 1$ выражение $z'_{\bar\zeta}-\tilde\lambda(z)\times e^{2i\arg\zeta}\times z'_\zeta\equiv z'_{\bar\zeta}-z'_{n\bar\zeta}+z'_{n\bar\zeta}-\tilde\lambda(z_{n-1})e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_{n\zeta}+\tilde\lambda(z_{n-1})e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_{n\zeta}-\tilde\lambda(z)\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_\zeta.$

Заметим, что $\|z'_{\bar\zeta}-z'_{n\bar\zeta}\|_{L_p}\to 0$, $\|z'_\zeta-z'_{n\zeta}\|_{L_p}\to 0$ при $n\to\infty$, $z'_{n\bar\zeta}-\tilde\lambda(z_{n-1})\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_{n\zeta}\equiv 0$, $\forall n\in N$, $\|\tilde\lambda(z_{n-1})\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_{n\zeta}-\tilde\lambda(z)\times e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_\zeta\|_{L_p}\leq\|z'_{n\zeta}[\tilde\lambda(z_{n-1})-\tilde\lambda(z)]\|_{L_p}+\|\tilde\lambda(z)\cdot(z'_{n\zeta}-z'_\zeta)\|_{L_p}\leq\|z'_{n\zeta}\|_{L_p}\times N\cdot\|z_{n-1}-z\|_C+\lambda_0\cdot\|z'_{n\zeta}-z'_\zeta\|_{L_p}\leq\left[\|g'\|_C+A\cdot(\rho^{*^{-2}}+1)\right]\cdot\pi^{1/p}\cdot\left[1+\|T_1\|_C\cdot\frac{\delta^n}{1-\delta}\times\lambda_0\cdot(1-\lambda_0\cdot\|S_1\|_{L_p})^{-1}\right]\cdot N\cdot\frac{\delta^{n-1}}{1-\delta}\cdot\|T_1\|_C\cdot\lambda_0\cdot\left[\|g'\|_C+A\cdot(\rho^{*^{-2}}+1)\right]\cdot\pi^{1/p}+\lambda_0\cdot\|z'_\zeta-z'_{n\zeta}\|_{L_p}.$

Следовательно, $\|z'_{\bar\zeta}-\tilde\lambda(z)\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_\zeta\|_{L_p}$ может быть сделана сколь угодно малой при большом n. Таким образом, уравнение (I) выполняется для $z(\zeta)$ в области $\rho^*\leq|\zeta|\leq 1$ в том смысле, что $\|z'_{\bar\zeta}-\tilde\lambda(z)\cdot e^{2i\arg\zeta}\cdot z'_\zeta\|_{L_p}=0$.

В соответствии с приведенными рассуждениями и оценками может быть сформулирована

<u>ТЕОРЕМА</u>. При достаточно малых значениях констант λ_0 и N, введенных при постановке задачи, и достаточно большом значении параметра A решение задачи может быть получено методом итераций $z_n(\zeta)=z_0(\zeta)+T_1[\omega_n](\zeta)$, где функция ω_n определена в (5).

Для того, чтобы решение было физически реализуемым, то есть контур BC (кроме своих крайних точек) лежал ниже вещественной оси, следует выбрать константу A достаточно большой.

Выражаю благодарность С.Р.Насырову за внимание к работе и замечания, способствовавшие ее улучшению.

Литература

1. Ильинский Н. Б. Обратная задача напорной фильтрации в неоднородном анизотропном грунте под водопроницаемым подземным контуром // Тр. семин. по кр. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1968. – Вып. 5. – С.43 – 50.

2. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск : Наука, 1977. – 424 с.

3. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1963. – 140 с.

4. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. – 1957. – Т.43(85).– № 4. – С.451 – 503.

5. Насыров Р. М., Насыров С. Р. Сходимость приближенного метода С.А.Христиановича решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения // Изв. вузов. Матем. – 1987.– № 3.– С.60 – 67.

6. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолистности аналитических функций. ДАН СССР. – 1971. – 198:4. – С.743 – 746.

Доложено на семинаре 23.01.1989 г.