ভেক্টর

সূচীপত্র

Basic

All Formula

Typewise Math

যে টপিকে যেতে চান সে টপিকে Click করুন

রাশি

সংজ্ঞা

বস্তু জগতে যা কিছু পরিমাপ করা যায়, তাকে **রাশি** বলে।

প্রকারভেদ

রাশি **দুই** প্রকার। যথা: ১. স্কেলার বা নির্দিক রাশি
২. ভেক্টর বা সদিক রাশি

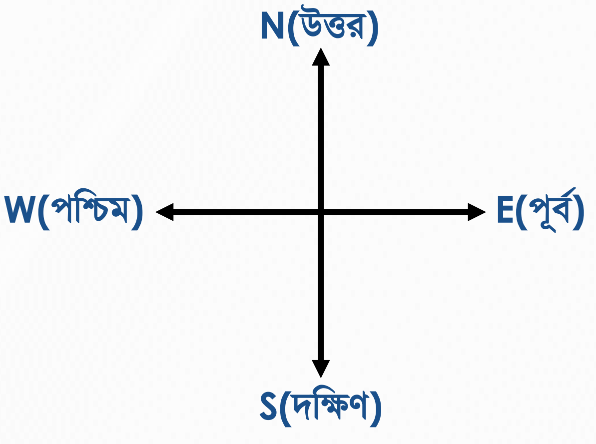
১. স্কেলার রাশি:

i. শুধুমাত্র মান প্রয়োজন।
ii. সাধারণ বীজগাণিতীক নিয়ম মেনে চলে।
iii. ভর, সময় হল স্কেলার রাশি।

২. ভেক্টর রাশি:

i. মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন।
ii. ভেক্টর বীজগাণিতীক নিয়ম মেনে চলে।
iii. বেগ,বল ইত্যাদি হল স্কেলার রাশি।

দিক সম্পর্কিত জ্ঞান



সূচীপত্রে ফেরত

ভেক্টর রাশিসমূহ মনে রাখার কৌশল

ভবে সব প্রিয়তম

ভরবেগ	বেগ	সরণ	বল	প্রাবল্য	ওজন	ত্বরণ	মন্দন

ভেক্টর রাশির মান ও দিক দুটিই আছে। কিন্তু, স্কেলার রাশির শুধুমাত্র মান আছে, কোনো দিক নাই। তাই, **ভেক্টর রাশিসমূহ মনে রাখতে পারলেই সহজে স্কেলার রাশি মনে রাখা যায়**। অর্থাৎ, এখানে দ্রুতি স্কেলার হবে।

সূচীপত্রে ফেরত

ভেক্টর রাশি

ভেক্টর প্রকাশ

সাধারণত তীর চিহ্ন দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $\vec{A}$ $\xrightarrow{\vec{A}}$

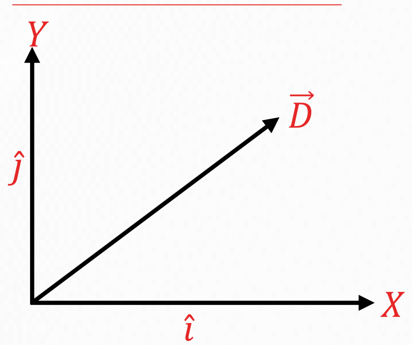
ভেক্টর উপস্থাপনা

১. সচিত্র বা চিত্র দ্বারা
২. সমীকরণ দ্বারা

১. সচিত্র উপস্থাপনা:

তীর চিহ্ন দ্বারা $\xrightarrow{\vec{A}}$

২. সমীকরণীক উপস্থাপনা:



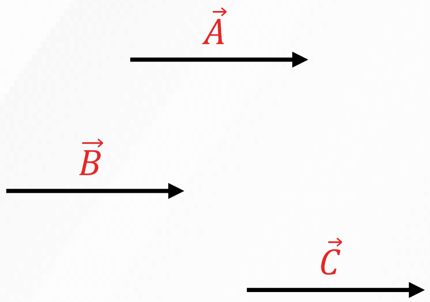
$\vec{D}$ = ভেক্টর
$|\vec{D}|$ = ভেক্টরের মান
প্রকাশ $\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j}$

সূচীপত্রে ফেরত

কতিপয় ভেক্টর

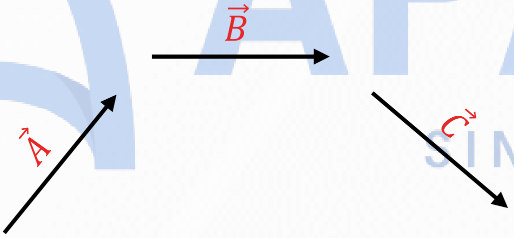
○ **সমরেখ ভেক্টর:**

১. দুই বা ততোধিক ভেক্টর।
২. একই সরলরেখায় বা সমান্তরালে অবস্থিত।



○ **সমতলীয় ভেক্টর:**

১. একই তলে অবস্থিত দুই বা ততোধিক ভেক্টর।



○ **সঠিক ভেক্টর:**

১. যে ভেক্টরের মান শূন্য হতে পারে না।

○ **নাল ভেক্টর:**

১.যে ভেক্টরের মান শূন্য।
২. $\vec{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

⊡ **বিন্দুটিকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে।**

সূচীপত্রে ফেরত

কতিপয় ভেক্টর

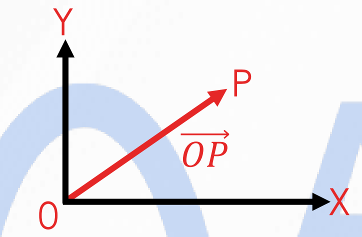
○ একক ভেক্টর:

১. যে ভেক্টরের মান ১।

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\text{ভেক্টর রাশি}}{\text{ভেক্টর রাশির মান}}$$

○ অবস্থান ভেক্টর:

১. প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে।
২. অবস্থান প্রকাশ করা হয়।

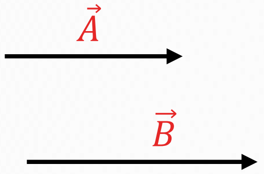


$\overrightarrow{OP}$ অবস্থান ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টরকে ব্যাসার্ধ ভেক্টরও বলে।

○ সদৃশ ভেক্টর:

১. সমজাতীয়।
২. দিক একই।
৩. কিন্তু মান সমান নয়।

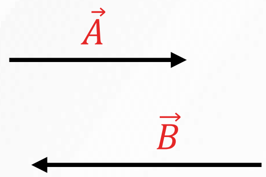


সূচীপত্রে ফেরত

কতিপয় ভেক্টর

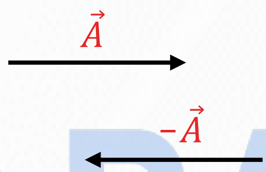
বিসদৃশ ভেক্টর:

১. সমজাতীয়।
২. দিক বিপরীত।
৩. কিন্তু মান সমান নয়।



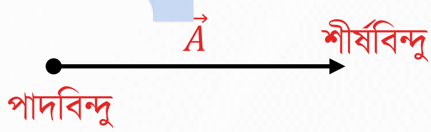
বিপরীত ভেক্টর:

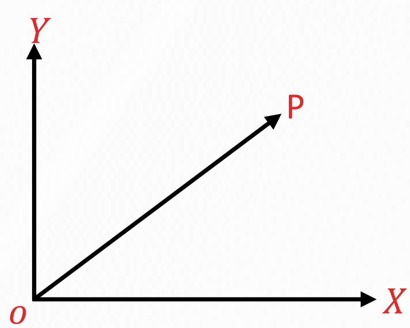
১. সমজাতীয়।
২. দিক বিপরীত।
৩. মান একই।



সীমাবদ্ধ ভেক্টর:

১. পাদবিন্দু ইচ্ছেমতো নেওয়া যায় না।





$\overrightarrow{OP}$ ভেক্টর এর পাদবিন্দু O নির্দিষ্ট তাই এটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর।

সূচীপত্রে ফেরত

কতিপয় ভেক্টর

○ স্বাধীন ভেক্টর:

১. পাদবিন্দু ইচ্ছেমতো নেওয়া যায়।

A ⟶ B

$\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর এর পাদবিন্দু কে A ইচ্ছেমতো নির্ধারণ করা যায়।

○ বিপ্রতীপ ভেক্টর:

১. সমজাতীয়।
২. সমান্তরাল।
৩. একটির মান অপরটির বিপরীত।

যেমন : $\vec{A} = 7\hat{i}$ এবং $\vec{B} = \frac{1}{7}\hat{i}$ $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় বিপ্রতীপ ভেক্টর।

○ সমান ভেক্টর:

১. সমজাতীয়।
২. দিক একই।
৩. মান একই।

$\vec{A}$ ⟶

$\vec{B}$ ⟶

$\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মান ও দিক একই এবং এরা উভয়ই সমজাতীয় বলে এদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

সূচীপত্রে ফেরত

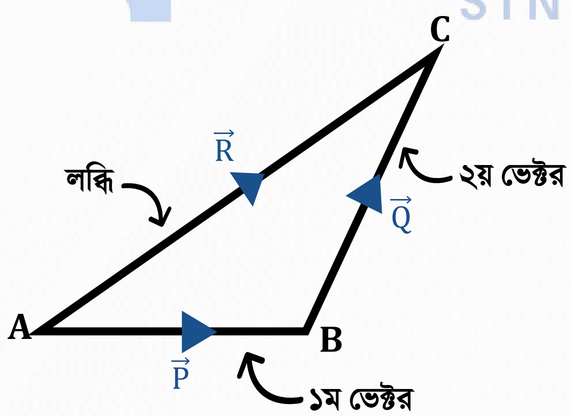
ভেক্টরের যোগ (Addition of Vectors)

ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম

- সাধারণ সূত্র (General Law)
- ত্রিভূজ সূত্র (Law of triangle)
- বহুভূজ সূত্র (Law of polygon)
- সামান্তরিক সূত্র (Law of parallelogem)
- উপাংশ সূত্র (Law of components)

i. General Law of vector:

দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষ বিন্দু দ্বিতীয়টির আদি বিন্দু একই বিনুতে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু এবং দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখাই হবে দুটি ভেক্টরের লব্ধি।



ইনপুট	আউটপুট
দুই বা দুইয়ের অধিক ভেক্টর।	১টি নতুন ভেক্টর বা লব্ধি।

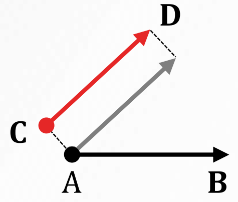
$$\therefore \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

সূচীপত্রে ফেরত

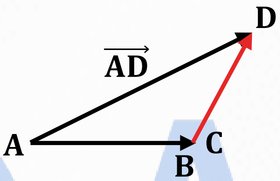
ii. Law of triangle (ত্রিভূজ সূত্র): Head-Tail method

3 STEPS SHOULD BE FOLLOWED:

1. প্রথম ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দু দ্বিতীয় ভেক্টরের আদি বিন্দুতে থাকবে।



2. প্রথম এবং দ্বিতীয় ভেক্টরের ক্রম যাতে একই থাকে।



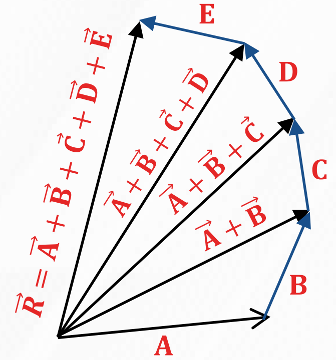
3. লব্ধি ভেক্টর হবে ঐ দুটি ভেক্টরের ক্রমের বিপরীত।

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

সূচীপত্রে ফেরত

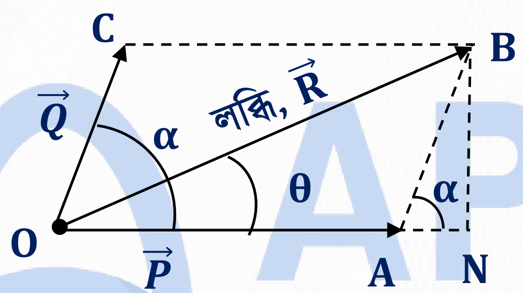
iii. বহুভূজ সূত্রঃ

একের অধিক ভেক্টরের ক্ষেত্রে ক্রমান্বয়ে সাজিয়ে ১ম ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুতে যোগ করলে যে ভেক্টর উৎপন্ন হয় তাই বহুভূজ সমর্থন করে।



iv. সামান্তরিক সূত্রঃ

কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে; তাহলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।



R = লব্ধি
α = P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ
θ = P এর সাথে লব্ধির কোণ

লব্ধির মান:

$$\boxed{R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

লব্ধির দিক:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}}$$

যার সাথে Angle, সে থাকবে Single.

IMPORTANT NOTE

i. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 0°$ হলে ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে।

ii. $\alpha = 120°$ হলে দুটি ভেক্টরের লব্ধি প্রত্যেকের সমান হবে।

iii. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 180°$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করবে।

সূচীপত্রে ফেরত

ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র

সংজ্ঞা

যদি দু'টি ভেক্টর একটি সামান্তরিকের দু'টি সন্নিহিত বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল হয় তবে ঐ সন্নিহিত বহুগামী কর্ণ ঐ ভেক্টর দু'টির লব্ধি নির্দেশ করে। আর এটিই **সামন্তরিকের সূত্র** নামে পরিচিত।

শর্ত

- ✓ একই সময়ে ক্রিয়া করতে হবে।
- ✓ একই বিন্দুতে ক্রিয়া করতে হবে।

লব্ধির মান নির্ণয়

$$|\vec{R}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$\vec{P}$ = ক্রিয়াশীল ১ম ভেক্টর

$\vec{Q}$ = ক্রিয়াশীল ২য় ভেক্টর

α = $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ

$\vec{R}$ = লব্ধি ভেক্টর

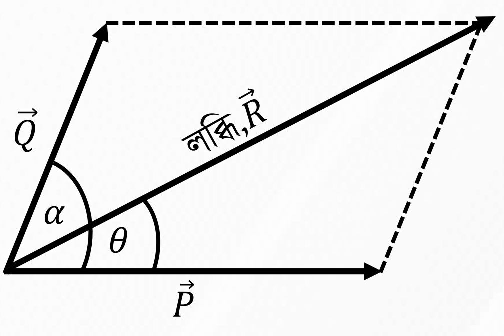
লব্ধির দিক নির্ণয়

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

এক্ষেত্রে,
θ = $\vec{R}$ ও $\vec{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ

$$\tan\theta' = \frac{P\sin\alpha}{Q + P\cos\alpha}$$

এক্ষেত্রে,
θ' = $\vec{R}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ



বি.দ্র: যার সাথে লব্ধির কোণ তাকে হরে সঙ্গবিহীনভাবে আলাদাভাবে রাখতে হয়।

সূচীপত্রে ফেরত

লব্ধির সর্বোচ্চ মান

দু'টি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান।
$R_{max} = P + Q$

লব্ধির সর্বোচ্চ মানের জন্য কোণের মান: $\alpha = 0°$

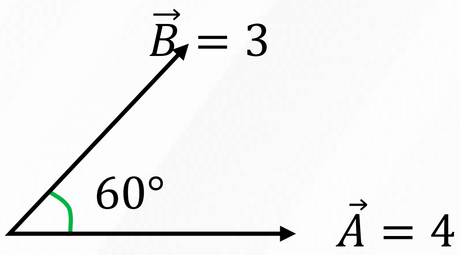
লব্ধির সর্বনিম্ন মান

দু'টি ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান।
$R_{min} = P \sim Q$

লব্ধির সর্বনিম্ন মানের জন্য কোণের মান: $\alpha = 180°$

সূচীপত্রে ফেরত

QUESTION



Find $\vec{A} + \vec{B}$ and $\vec{A} - \vec{B}$ in the diagram shown.

$\vec{A} + \vec{B}$: 1^{st} CASE

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos a}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{16 + 9 + 2 \times 4 \times 3\cos 60°}$$

$$\therefore R = \sqrt{37}\ units$$

দিক:

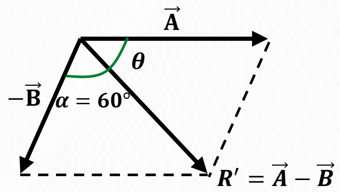
$$\tan\theta = \frac{A\sin\alpha}{A+B\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4\sin 60°}{4+3\cos 60°}\right)$$

$$\therefore \theta = 25.3°$$

$\vec{A} + \vec{B}$ এর ক্ষেত্রে, $R = \sqrt{37}$ units এবং $\theta = 25.3°$

$\vec{A} - \vec{B}$: 2^{nd} CASE



$$R' = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos a}$$

$$\Rightarrow R' = \sqrt{13}\ units$$

দিকঃ

$$\tan\theta = \frac{B\sin\alpha}{A+(-B\cos\alpha)}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4\sin 60°}{3+(-4\cos 60°)}\right)$$

$$\therefore \theta = 46.01°$$

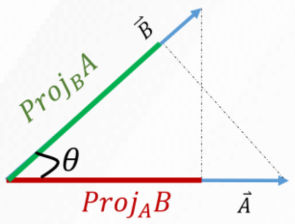
$\vec{A} - \vec{B}$ এর ক্ষেত্রে, $R' = \sqrt{13}$ units এবং $\theta = 46.01°$

সূচীপত্রে ফেরত

অভিক্ষেপ

সংজ্ঞা

যদি একটি লাঠি ভূমি থেকে সমান্তরালে কিছুটা উপরে উঠানো যায় তাহলে ভূমির উপর যে ছায়াটুকু পড়বে তাই হচ্ছে ভূমির লাঠির **অভিক্ষেপ**।



$\vec{A}$ = যার উপর অভিক্ষেপ

$\vec{B}$ = যার অভিক্ষেপ

θ = $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ

B এর উপর A এর অভিক্ষেপ, $Proj_B A = |A|\cos\theta$

A এর উপর B এর অভিক্ষেপ, $Proj_A B = |B|\cos\theta$

∴ সোজা কথায় যার অভিক্ষেপ তার সাথে $\cos\theta$

যদি বলি অপার ভাইয়ার অভিক্ষেপ, তাহলে **অপার ভাইয়া $\cos\theta$**

সূচীপত্রে ফেরত

উপাংশ

একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টরের বিভাজন বলে এবং বিভক্ত অংশগুলোকে মূল ভেক্টরের **উপাংশ** বলে।

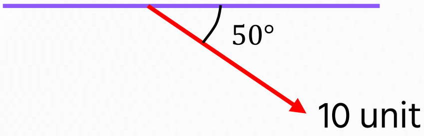
উপাংশ

- **উল্লম্ব উপাংশ (লম্বের দিকে)**
- **অনুভূমিক উপাংশ (ভূমির দিকে)**

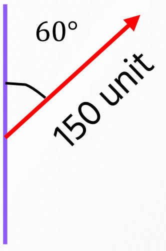
অভিক্ষেপ ও উপাংশ একই রকম হলেও সামান্য তফাৎ আছে। দ্রুতি যেমন শুধু মান আর বেগ হচ্ছে মান ও দিক এর সমষ্টি তেমনি অভিক্ষেপ হচ্ছে শুধু মান আর উপাংশ হচ্ছে মান ও দিক এর সমষ্টি ।

QUESTION

(i)

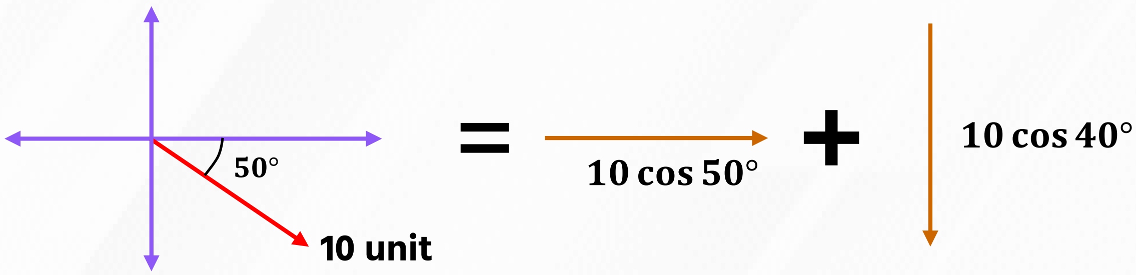


(ii)

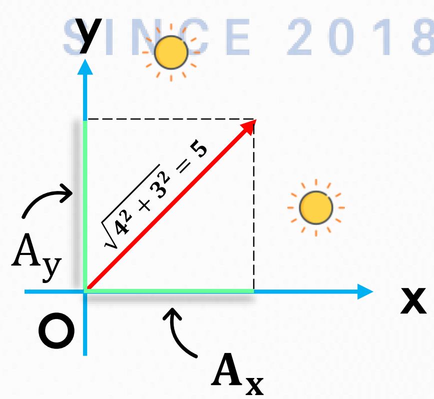


সূচীপত্রে ফেরত

(i) নং



(ii) নং



A_x = x এর উপর A এর অভিক্ষেপ

A_y = y এর উপর A এর অভিক্ষেপ

A এর মান $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

সূচীপত্রে ফেরত

দ্বিমাত্রিক

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$$

ত্রিমাত্রিক

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

দিক

- ✓ $A_x = |\vec{A}| \cos\theta_x = 4 = 5\cos\theta_x = \theta_x = 36.87°$
- ✓ $A_y = |\vec{A}| \cos\theta_y = 3 = 5\cos\theta_y = \theta_y = 53.13°$
- ✓ $A_z = |\vec{A}| \cos\theta_z =$ যদি z এর সাথে কোণ থাকতো তাহলে similarly.

সূচীপত্রে ফেরত

ভেক্টরের বিয়োগ (Substraction of Vectors)

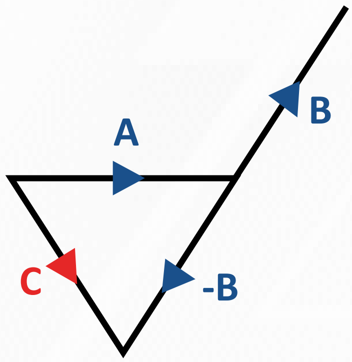
শর্ত

যে ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরকে অপর ভেক্টরের সাথে যোগ করতে হবে।

সূত্র

$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

$\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$



যেহেতু **ভেক্টরের বিয়োগ এক প্রকার যোগ ছাড়া কিছুই নয়,** কাজেই যেসকল ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তাদের ঋণাত্মক ভেক্টর নিয়ে যোগ করলেই বিয়োগফল পাওয়া যাবে।

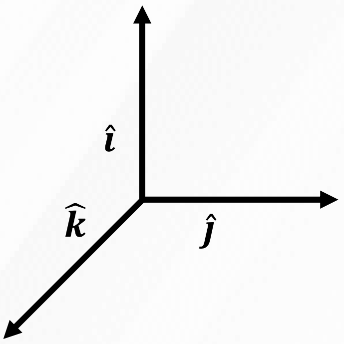
A থেকে B বিয়োগ করলে যদি বিয়োগফল C হয়, তাহলে,

C = A – B = A + (-B)

অর্থাৎ, A ভেক্টরের সাথে -B ভেক্টর যোগ করলেই A এবং B এর বিয়োগফল পাওয়া যায়।

সূচীপত্রে ফেরত

আয়ত একক ভেক্টর



$|\hat{i}| = 1$

$|\hat{j}| = 1$

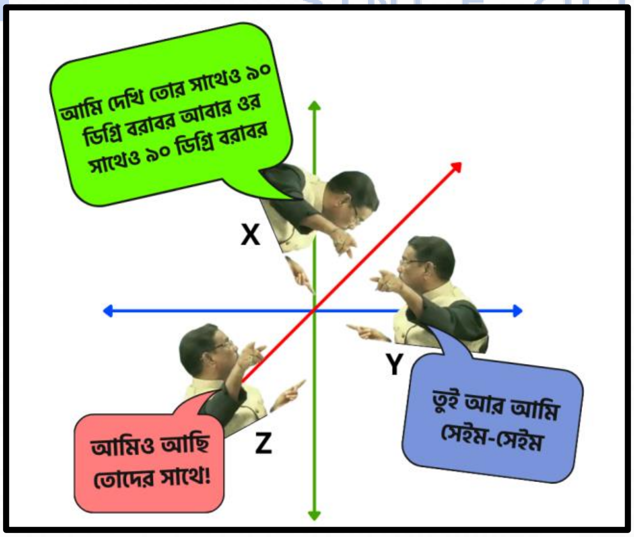
$|\hat{k}| = 1$

সূত্র

$|\hat{i}|$ = X অক্ষ বরাবর একক মানের একটি ভেক্টর

$|\hat{j}|$ = Y অক্ষ বরাবর একক মানের একটি ভেক্টর

$|\hat{k}|$ = Z অক্ষ বরাবর একক মানের একটি ভেক্টর



X, Y ও Z অক্ষ এরা সকলেই একে অপরের সাথে সমকোণে অবস্থান করে।

সূচীপত্রে ফেরত

ভেক্টরের গুণন (Multiplication of Vectors)

ভেক্টর গুণন ২ প্রকার।

ভেক্টর গুণন

- ডট গুণন (ভেক্টর.ভেক্টর)
- ক্রস গুণন (ভেক্টর×ভেক্টর)

জেনে রাখো:
(স্কেলার)(ভেক্টর) = ভেক্টর

$$\begin{aligned} C(\vec{A}) &= C(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \\ &= CA_x\hat{i} + CA_y\hat{j} + CA_z\hat{k} \end{aligned}$$

C = স্কেলার
$\vec{A}$ = ভেক্টর

সূচীপত্রে ফেরত

ডট গুণন

স্কেলার গুণফলের মান হয় রাশি দুটির মানের এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের cosine এর গুণফলের সমান।

$\vec{A}.\vec{B}$

যখন ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান জানা থাকবে।

$|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$
$=AB\cos\theta$
(যখন $0<\theta<x$)

যখন ভেক্টরদ্বয়ের অভিক্ষেপগুলো জানা থাকবে অর্থাৎ ভেক্টর প্রকাশ জানা থাকবে।

$A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$
$B = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$
$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

গুণফলের প্রকৃতি

(ভেক্টর).(ভেক্টর) = স্কেলার

❖ ভেক্টরের ডট গুণন বিনিময় সূত্র ও বন্টন সূত্র মেনে চলে:

বিনিময় সূত্র: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
বন্টন সূত্র : $\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{B}.\vec{C}$

❖ আয়ত একক ভেক্টরের স্কেলার গুণফল:

$\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$
$\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$

❖ লম্ব ভেক্টর ও স্কেলার গুণফলের সম্পর্ক:

- ✓ দু'টি ভেক্টরের ডট গুণফল যদি শূন্য হয় এবং তাদের কোনোটি যদি নাল ভেক্টর না হয়, তাহলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।
- ✓ দু'টি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° হলে তাদের ডট গুণফল শূন্য হয়।

সূচীপত্রে ফেরত

ক্রস গুণন

দু'টি ভেক্টরের গুণনে যদি ভেক্টর $\vec{A}$ রাশি পাওয়া যায় তখন রাশি দুটির ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন হয়, একে **ক্রস গুণফল** বলে।

দিক

ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম হতে পাওয়া যায়।

$\vec{A} \times \vec{B}$

যখন ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান জানা থাকবে।

$|\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta\, \hat{\eta}$

$= \text{AB} \sin\theta$

(যখন $0 < \theta < x$)

যখন ভেক্টরদ্বয়ের অভিক্ষেপগুলো জানা থাকবে অর্থাৎ ভেক্টর প্রকাশ জানা থাকবে।

$\text{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

$\text{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$

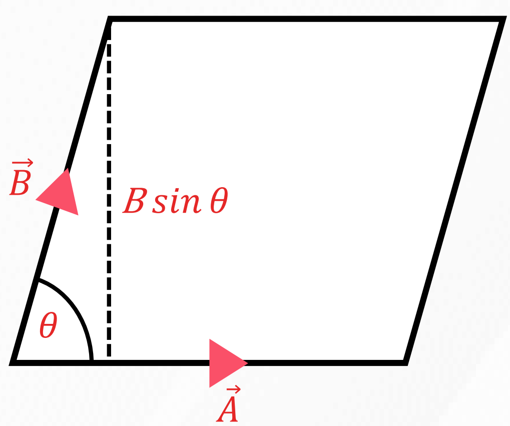
$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

❖ ক্রসগুণনের সাথে সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক:

দু'টি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর দু'টিকে সন্নিহিত বাহু ধরে কল্পিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

অর্থাৎ,

$AB\sin\theta$ = **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল**



সূচীপত্রে ফেরত

❖ ক্রস বা ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মানে না:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

❖ আয়ত একক ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$
$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

❖ সমান্তরাল ভেক্টর ও ভেক্টর গুণফলের সম্পর্ক:

- ✓ দু'টি ভেক্টরের ক্রস গুণফল যদি নাল ভেক্টর হয় এবং তাদের কোনোটি যদি নাল ভেক্টর না হয়, তাহলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।
- ✓ দু'টি ভেক্টরের অন্তর্ভূক্ত কোণ 0° হলে তাদের ক্রস গুণফল নাল ভেক্টর হবে।

সূচীপত্রে ফেরত

ত্রিগুণফল

তিনটি ভেক্টর রাশির গুণফলকে **ত্রিগুণফল** (Triple Product) বলে।

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$$

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

তিনটি ভেক্টরের ত্রিগুণফল শূন্য হলে ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত হবে।
অর্থাৎ, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ একই সমতলে অবস্থিত হবে।

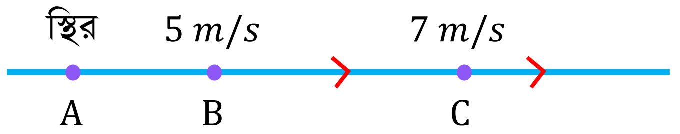
সূচীপত্রে ফেরত

আপেক্ষিক বেগ

আপেক্ষিক বেগ ও প্রকৃত বেগঃ

আপেক্ষিক বেগঃ কোনো গতিশীল একটি বস্তুর সাপেক্ষে বেগ।

প্রকৃত বেগঃ স্থির পর্যবেক্ষকের সাপেক্ষে বেগ।



⌘ A এর সাপেক্ষে B এর বেগ $= (5-0) \Rightarrow 5+(-0)$

⌘ A এর সাপেক্ষে C এর বেগ $= (7-0) \Rightarrow 7+(-0)$

⌘ B এর সাপেক্ষে C এর বেগ $= (7-5) \Rightarrow 7+(-5) = 2$

⌘ B এর সাপেক্ষে A এর বেগ $= (0-5) \Rightarrow 0+(-5) = -5$

⌘ C এর সাপেক্ষে B এর বেগ $= (5-7) \Rightarrow 5+(-7) = -2$

⌘ C এর সাপেক্ষে A এর বেগ $= (0-7) \Rightarrow 0+(-7) = -7$

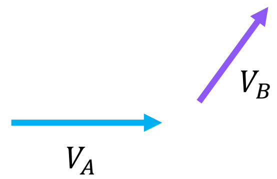
মূল কথা (নোট)

"যার সাপেক্ষে বেগ, তাকে বিয়োগ করতে হবে।"

◉ স্থির বস্তু বা ব্যক্তির সাপেক্ষে যে বেগ পাওয়া যাবে তাই উক্ত বস্তু বা ব্যক্তির প্রকৃত বেগ।

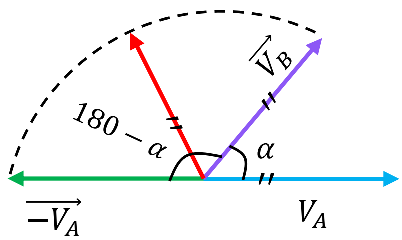
⌘ A এর সাপেক্ষে B এর বেগ $= V_B + (-V_A) = 7 + \{-(-5)\} = 12$

⌘ B এর সাপেক্ষে A এর বেগ $= V_A + (-V_B) = 5 + \{-(-7)\} = 12$



A এর সাপেক্ষে B এর বেগ?

» $V_{BA} \Rightarrow V_B - V_A \Rightarrow V_B + (-V_A)$

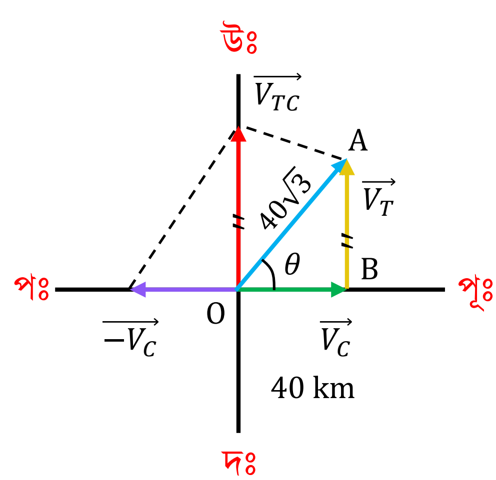


$$|V_{BA}| = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 + 2 \cdot V_A \cdot V_B \cos(180 - \alpha)}$$

$$|V_{BA}| = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 + 2V_AV_B \cos\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{V_B \sin(180 - \alpha)}{V_A + V_B \cos(180 - \alpha)}$$

ঘন্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘন্টায় $40\sqrt{3}$ বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। ট্রাকটি কোন দিকে চলছে? ট্রাকটির বেগ কত?



» $V_{TC} = V_T - V_C$

$= V_T + (-V_C)$

$\Delta\, OAB$ -তে

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2}$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{\left(40\sqrt{3}\right)^2 + (40)^2}$$

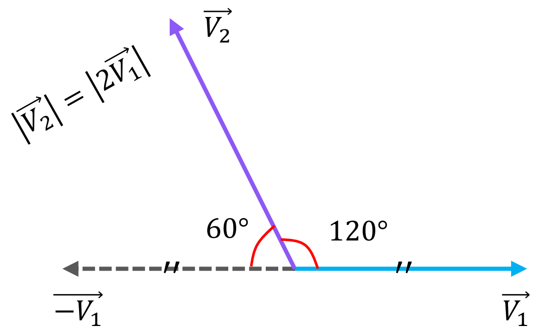
$$\therefore OA = 80\ km/hr$$

$$\tan\theta = \frac{40\sqrt{3}}{40}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$\theta = 60^\circ$ পূর্বের সাথে উত্তর দিক বরাবর।

◉ দুটি বস্তুর একটি অপরটির বেগের দ্বিগুণ বেগে তার সঙ্গে 120° কোণ করে চলছে। এদের একটির সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক বেগ কত?



» ১ম বস্তু সাপেক্ষে ২য় বস্তুর বেগ $= \vec{V_2} - \vec{V_1} = \vec{V_2} + (-\vec{V_1})$

$$|\vec{V_{21}}| = \sqrt{V_2^2 + V_1^2 + 2\cdot V_2\cdot V_1\cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{(2V_1)^2 + V_1^2 + 2\cdot V_1\cdot 2V_1\cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{4V_1^2 + V_1^2 + 2V_1^2}$$

$$= \sqrt{7V_1^2}$$

$$= \sqrt{7}\,V_1$$

$$\tan\theta = \frac{2V_1\sin 60^\circ}{V_1 + 2V_1\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 60^\circ}{1 + 2\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \theta = 40.89^\circ$$

$\therefore \theta = 40.89^\circ$ V_1 এর বিপরীতের সাথে।

» আবার, ২য় বস্তু সাপেক্ষে ১ম বস্তুর বেগ $= \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$

একই চিত্র হতে,

$$|\vec{V_{12}}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cos 60°}$$

$$= \sqrt{V_1^2 + (2V_1)^2 + 2 \cdot V_1 \cdot 2V_1 \cdot \frac{1}{2}}$$

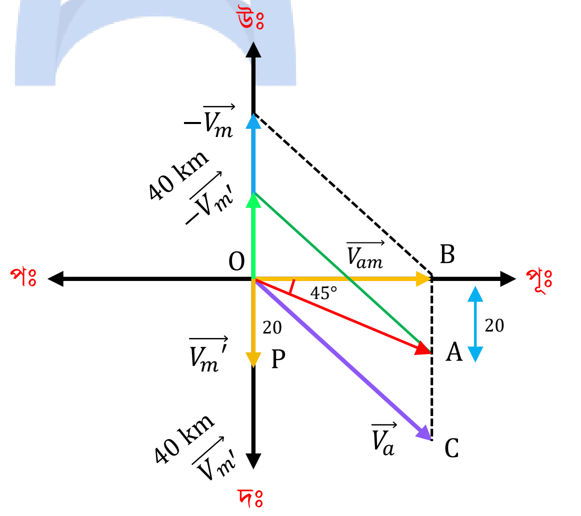
$$= \sqrt{V_1^2 + 4V_1^2 + 2V_1^2}$$

$$= \sqrt{7V_1^2}$$

$$= \sqrt{7}\, V_1$$

একই ভাবে, $\theta = 40.89°$ কিন্তু এক্ষেত্রে V_1 এর সাথে।

◉ 40 km/hr বেগে দক্ষিণ দিকে চলা একটি মোটরগাড়ির চালকের মনে হচ্ছে যেন বাতাস পূর্বদিকে বইছে। মোটরগাড়ির বেগ কমিয়ে 20 km/hr করা হলে চালকের মনে হয় বাতাস উত্তর-পশ্চিম দিক থেকে আসছে। বাতাসের প্রকৃত বেগ ও বেগের অভিমুখ নির্ণয় করো।



$\vec{V_a}$ = বাতাসের বেগ

$$\vec{V_{am}} = \vec{V_a} - \vec{V_m}$$

$$= \vec{V_a} + (-\vec{V_m})$$

$\Delta\, OBA$ –এ

$$\tan 45° = \frac{20}{OB}$$

$$\therefore OB = 20$$

$$\therefore \tan \angle BOC = \frac{BC}{OB}$$

$$\therefore BOC = 63.43°$$

পূর্বের সাথে দক্ষিণ দিক বরাবর।

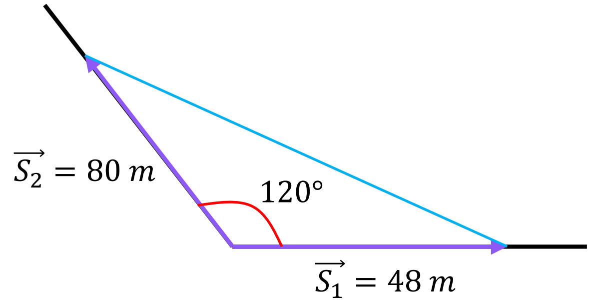
» $\Delta\, OBC$ –এ

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + 40^2}$$

$$= 20\sqrt{5}\ km/hr$$

◉ দুইটি কণা $12\,m/s$ বেগে ও $20\,m/s$ $120°$ কোণ উৎপন্ন করে কোন একটি বিন্দুকে অতিক্রম করল। $4s$ পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কত?



» দূরত্ব = একটির সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক সরণের মান

$$|\vec{S_1} - \vec{S_2}| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cos 120°} = 112m$$

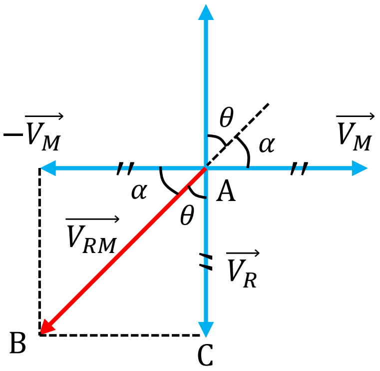
অথবা, $$|\vec{S_2} - \vec{S_1}| = \sqrt{S_2^2 + S_1^2 - 2 \cdot S_2 \cdot S_1 \cos 120°} = 112m$$

বৃষ্টির অংক সমূহের ব্যাসিক

Case-01:

⌘ বাতাসের বেগের কোনো ভূমিকা নেই।

$$\vec{V_{RM}} = \vec{V_R} - \vec{V_M}$$
$$= \vec{V_R} + (-\vec{V_M})$$



উলম্বের সাথে হলে,

$\Delta\, ABC$ –তে

$\tan\theta = \frac{BC}{AC}$

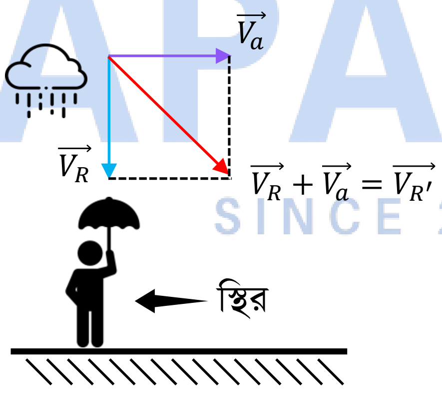
$\tan\theta = \frac{|-\vec{V}_M|}{|\vec{V}_R|}$ $\left[\frac{|\text{মানুষের বেগ}|}{|\text{বৃষ্টির বেগ}|}\right]$

আনুভূমিকের সাথে হলে,

$\tan\alpha = \frac{|\vec{V}_R|}{|-\vec{V}_M|}$ $\left[\frac{|\text{বৃষ্টির বেগ}|}{|\text{মানুষের বেগ}|}\right]$

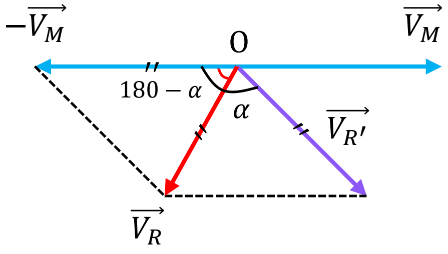
Case-02:

⌘ বাতাসের বেগ উপস্থিত।



লোকটিকে গতিশীল করলে,

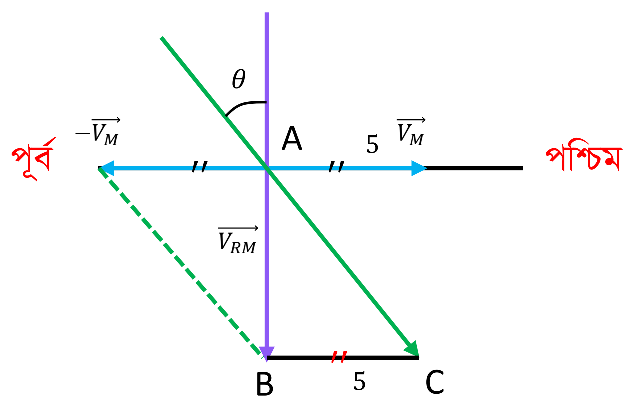
$\tan\theta = \frac{V_R \sin(180-\alpha)}{V_M + V_R\cos(180-\alpha)}$



$\overrightarrow{V_M}$

◉ একজন লোক পশ্চিম দিক বরাবর $5\ km/hr$ বেগে চলছে। বৃষ্টি সরাসরি তার মাথার উপর $12\ km/hr$ বেগে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ কত?

$\overrightarrow{V_{RM}}$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{V_R} = ?$



» $\overrightarrow{V_{RM}} = \overrightarrow{V_R} - \overrightarrow{V_M}$

$= \overrightarrow{V_R} + \left(-\overrightarrow{V_M}\right)$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{12^2 + 5^2}$

$= 13\ km/hr$

$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{12}\right)$

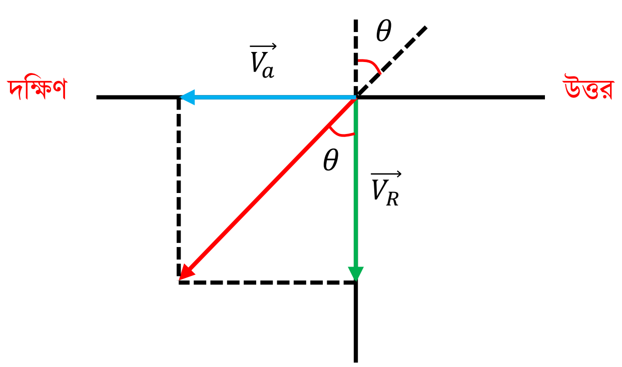
$\therefore \theta = 22.61°$ উলম্বের সাথে পশ্চিম দিকে।

◉ কোনো একদিন 30 m/s গতিতে উলম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। যদি বায়ু 10 m/s গতিতে উত্তর থেকে দক্ষিণ দিকে বইতে শুরু করে তাহলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তোমার ছাতা কোন দিকে মেলে ধরতে হবে? *(বুয়েটঃ ০৬-০৭)*

» $\tan\theta = \dfrac{10}{30}$

$\Rightarrow \theta = 18.44°$

$\therefore \theta = 18.44°$ উলম্বের সাথে পশ্চিম দিক বরাবর।



সৃজনশীল প্রশ্ন

রাজশাহী বোর্ডঃ ২০১৯

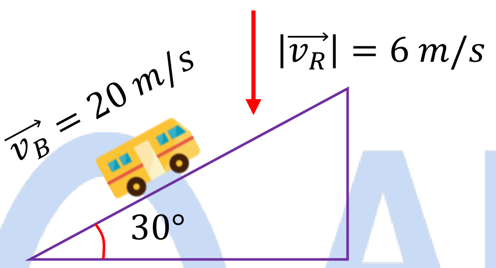
$\boxed{20\ m/s}$

◉ 30° কোণে আনত একটি পাহাড়ের ঢাল বেয়ে $72\ km/h$ সমবেগে একটি বাস উপরে উঠছে। এমন সময় হঠাৎ বৃষ্টি $6\ m/s$ সমবেগে খাড়া নিচে পড়তে শুরু করল। বৃষ্টি যখন প্রায় শেষ তখন অনুভূমিকভাবে বায়ুপ্রবাহ শুরু হল।

(গ) শুরুতে বাসচালক কত কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে নির্ণয় কর।

(ঘ) বায়ু প্রবাহের দরুন বাসচালক খাড়া নিচের দিকে বৃষ্টি পড়তে দেখলে বায়ু প্রবাহের প্রকৃত মান ও দিক গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

⌘ 'গ' এর সমাধানঃ

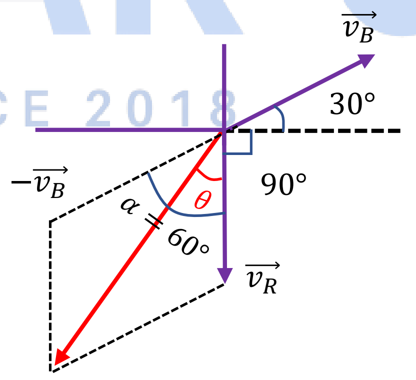


$$\overrightarrow{V_{RB}} = \overrightarrow{V_R} - \overrightarrow{V_B}$$
$$= \overrightarrow{V_R} + \left(-\overrightarrow{V_B}\right)$$

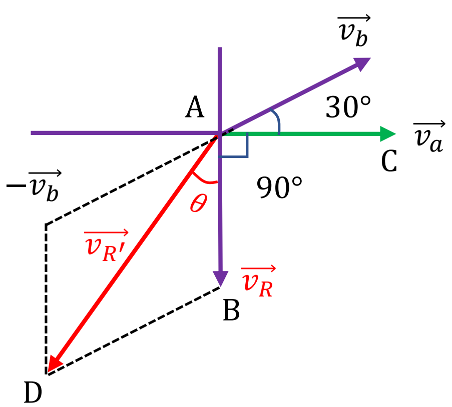
$$\tan\theta = \frac{V_B \sin 60°}{V_R + V_B \cos 60°}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{20 \sin 60°}{6 + 20 \cos 60°}$$

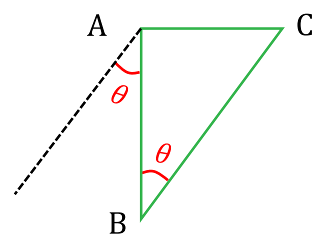
$\therefore \theta = 47.27°$ উলম্বের সাথে।



⌘ 'ঘ' এর সমাধানঃ



$$\overrightarrow{V_{R'b}} = \overrightarrow{V_{R'}} - \overrightarrow{V_b}$$
$$= \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_b}$$
$$= \overrightarrow{V_{R_1}} + \overrightarrow{V_a}$$



‘গ’ হতে

$$AD = \sqrt{V_R^2 + V_B + 2\,V_R V_B \cos 60°}$$
$$= \sqrt{6^2 + 20^2 + 2 \times 6 \times 20 \times \frac{1}{2}}$$
$$= 23.58 = BC$$

এবং $\Delta\, ABC$ তে–

$$\sin\theta = \frac{AC}{23.58}$$
$$\therefore \theta = 47.27°$$

সুতরাং, $AC = 17.32\, m/s$ গাড়ির গতি বরাবর আনুভূমিক।

বুয়েটঃ (০৪-০৫)

◉ $10\, km/hr$ বেগে উলম্ব ভাবে বৃষ্টি পড়ছে এবং $60\, km/hr$ বেগে পূর্ব থেকে পশ্চিমে বাতাস বইছে। পূর্ব থেকে পশ্চিম অভিমুখী চলন্ত গাড়ির গতিবেগ নির্ণয় করো।

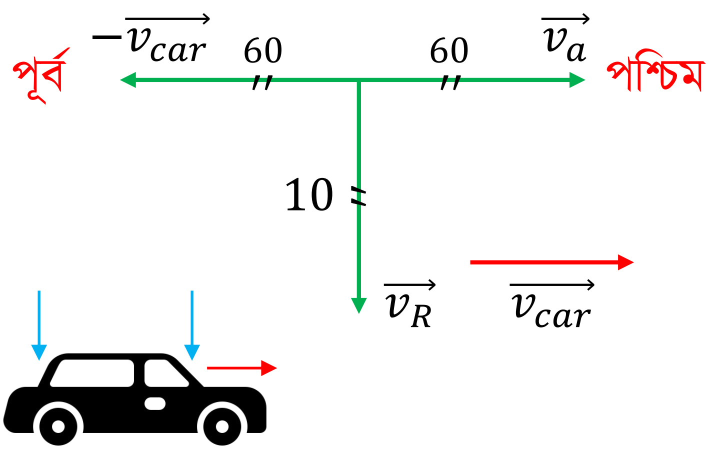
(a) যাতে গাড়ির সামনের ও পিছনের কাঁচ ভিজে।

(b) শুধুমাত্র পিছনের কাঁচ ভিজে।

(b) শুধুমাত্র সামনের কাঁচ ভিজে।

⌘ ‘a’ এর সমাধানঃ

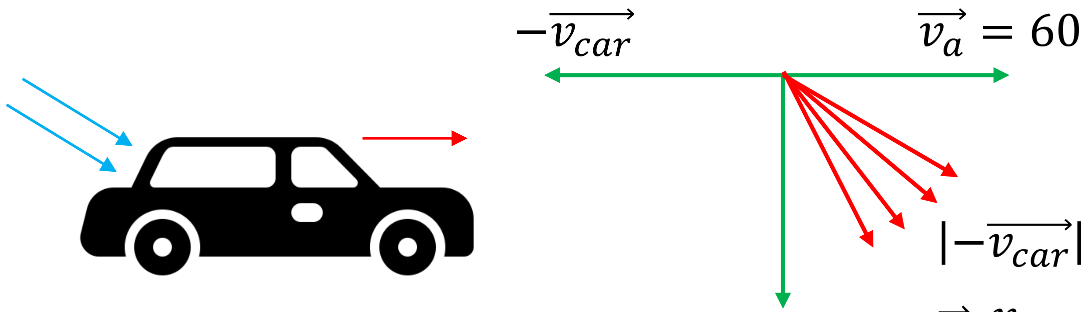
$$\overrightarrow{V_{car}} = \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_{car}}$$
$$= \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_a} + \left(-\overrightarrow{V_{car}}\right)$$



এখন,

$$\left|-\overrightarrow{V_{car}}\right| = 60\, km/hr$$
$$\therefore \overrightarrow{V_{car}} = 60$$

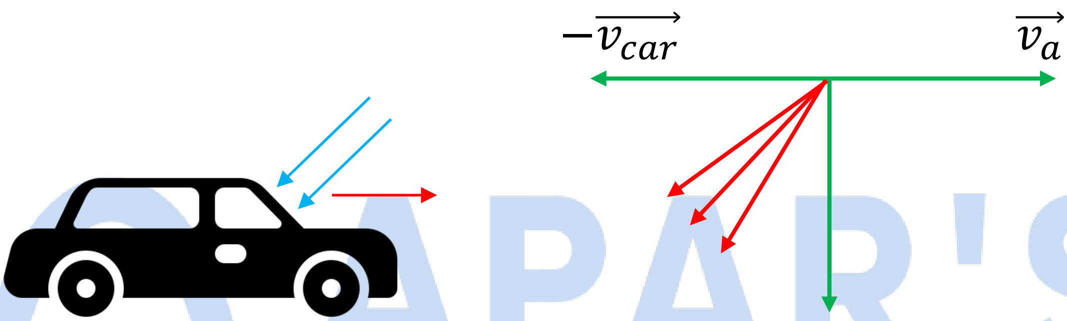
⌘ 'b' এর সমাধানঃ



$|-\overrightarrow{v_{car}}| < 60$

$\Rightarrow v_{car} < 60$

⌘ 'c' এর সমাধানঃ



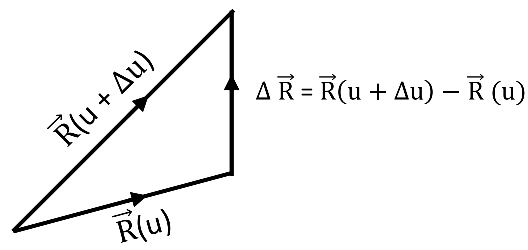
$|-\overrightarrow{v_{car}}| > 60$

$\therefore v_{car} > 60$

ভেক্টর ক্যালকুলাস

ভেক্টরের অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন (Differentiation of Vector):

ধরা যাক, $\vec{R}$ একটি। ভেক্টর যা স্কেলার রাশি u এর উপর নির্ভর করে অর্থাৎ ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ স্কেলার রাশি u এর অপেক্ষক বা $\vec{R}(u)$। তাহলে



$$\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u+\Delta u) - \vec{R}\,(u)}{\Delta u}$$

এখানে Δu হলো u এর বৃদ্ধি এবং $\Delta\vec{R}$ হলো $\vec{R}$ এর বৃদ্ধি

তাহলে u এর সাপেক্ষে $\vec{R}$ এর অন্তরক হবে,

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{R}(u+\Delta u) - \vec{R}\,(u)}{\Delta u}$$

ভেক্টরের যোগজীকরণ বা সমাকলন (Integration of Vector)

ধরা থাক, $\vec{R}\,(u) = R_x(u)\hat{\imath} + R_y(u)\hat{\jmath} + R_z(u)\hat{k}$ একটি ভেক্টর যা একটি মাত্র স্কেলার চলক u এর উপর নির্ভর করে। এখানে $R_x(u)$, $R_y(u)$ এবং $R_z(u)$ হচ্ছে একটি নির্দিষ্ট ব্যবধানের মধ্যে নিরবচ্ছি। তাহলে

$\int \vec{R}(u)du = \hat{\imath}\int R_x(u)dx + \hat{\jmath}\int R_y(u)dy + \hat{k}\int R_z(u)dz$ হচ্ছে $\vec{R}\,(u)$ এর একটি অনির্দিষ্ট যোগজ। যদি এমন একটি ভেক্টর $\vec{S}(u)$ থাকে যে,

$\vec{R}(u) = \frac{d}{du}\{\vec{S}(u)\}$ হয় তাহলে $\int \vec{R}(u)du = \int \frac{d}{du}\{\vec{S}(u)\}\ du = \vec{S}(u) + \vec{C}$ হবে।

এখানে $\vec{C}$ হচ্ছে স্বেচ্ছিক ধ্রুবক, যা অবশ্যই u এর উপর নির্ভরশীল নয়। $u = a$ থেকে $u = b$ এর মধ্যে এর যোগজ হবে

$$\int_a^b \vec{R}(u) = \int_a^b \frac{d}{du}\{\vec{S}(u)\}\ du = [\vec{S}(u)]_a^b = \vec{S}(b) - \vec{S}(a)$$

ভেক্টর যোগজকেও সাধারণ যোগজীকরণের ন্যায় সমষ্টি হিসেবে গণ্য করা যায়। ভেক্টর যোগজ তিন রকমের হয়ে থাকেঃ

১। রেখা যোগজ বা রেখা সমাকল (Line integrals) :

ধরা যাক, কোনো বক্ররেখা C এর একটি দৈর্ঘ্য উপাদান হচ্ছে $\overrightarrow{d1}$ । বক্ররেখাটি a বিন্দু থেকে b বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত। এখন যদি $\overrightarrow{d1}$ এর উপাংশগুলো হয় dx, dy, dz

অর্থাৎ যদি $\overrightarrow{d1} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz$ হয়, তাহলে

$$\int_a^b \vec{A}.\overrightarrow{d1} = \int_a^b (A_x dx + A_x dx + A_x dx)$$

কে বলে a এবং b বিন্দুর মধ্যে $\vec{A}$ ভেক্টরের রেখা যোগজ।

২। তল যোগজ বা তল সমাকল (Surface integrals) :

ধরা যাক, $\overrightarrow{da}$ হচ্ছে কোনয় তল S এর একটি তল উপাদান। তাহলে,

$$\int_S \vec{A}.\overrightarrow{da} = \int_S (A_x da_x + A_y da_y + A_z da_z)$$

হচ্ছে S তল ব্যাপী $\vec{A}$ এর তল যোগজ। তল যোগজকে $\int_S$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এখানে da_x,da_yএবং da_z হচ্ছে $\overrightarrow{da}$ এর উপাংশসমূহ।

৩। আয়তন যোগজ বা আয়তন সমাকল (Volume integrals) :

ধরা যাক, dV হচ্ছে কোনো আয়তন V এর একটি আয়তন উপাদান। তাহলে,

$$\int_v \vec{A}dV = \hat{\imath}\int_v A_x dV + \hat{\jmath}\int_v A_y dV + \hat{k}\int_v A_z dV$$

হচ্ছে আয়তন V ব্যাপী $\vec{A}$ এর আয়তন যোগজ। আয়তন যোগজকে $\int_v$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার
Uses of Vector Operators

গ্রেডিয়েন্ট (Gradient) :

গ্রেডিয়েন্টের সংজ্ঞা এবং ব্যাখ্যা দেয়ার পূর্বে ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ডেল $\vec{\Delta}$ স্কেলার ভেক্টর ক্ষেত্র এবং রেখা ইন্টিগ্রাল সম্পর্কে জানা দরকার।

ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর Δ :

ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটরটি স্যার হ্যামিলটন প্রথম আবিষ্কার করেন গিবস একে 'ডেল' নামকরণ করেন। এর অন্য নাম ন্যাবলা। ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয়।

$$\text{ডেল, } \vec{\Delta} = \hat{\imath}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{\jmath}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}$$

$$\text{তবে, } \vec{\Delta}.\vec{\Delta} = \Delta^2 = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{\imath} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{\jmath} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right).\left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{\imath} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{\jmath} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$, একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\frac{\delta}{\delta x}$, $\frac{\delta}{\delta y}$, $\frac{\delta}{\delta z}$ আংশিক অন্তরীকরণ বুঝায়।

স্কেলার ক্ষেত্রঃ

।ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে। ঘনত্ব, উষ্ণতা, বিভব ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্রের উদাহরণ। গাণিতিকভাবে, $\varphi(x, y, z) = 3x^2yx + 2xy^2z + 5zy^2$ স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে

ভেক্টর ক্ষেত্রঃ

ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে। বেগ , তড়িৎ প্রাবল্য, মহাকর্ষ প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্রের উদাহরণ।

$\vec{F}(x, y, z) = ax^2y\,\hat{\imath} + bx^2yz^2\,\hat{\jmath} + 4zx^2y\,\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

গ্রেডিয়েন্টঃ

ধরা যাক, $\varphi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে। তাহলে φ -এর গ্রেডিয়েন্টকে $\vec{\Delta}\varphi$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{অর্থাৎ } grad\ \varphi = \vec{\Delta}\varphi = \left(\hat{\imath}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{\jmath}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right)\varphi = \frac{\hat{\imath}\,\delta\varphi}{\delta x} + \frac{\hat{\jmath}\,\delta\varphi}{\delta y} + \frac{\hat{k}\,\delta\varphi}{\delta z}$$

সংজ্ঞাঃ গ্রেডিয়েন্ট হলো একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যা অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে। একে স্কেলার অপেক্ষকও বলে।

গ্রেডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of Gradient)

(i) স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ক্ষেত্র অর্থাৎ একটি ভেক্টর রাশি।

(ii) উক্ত ভেক্টর রাশির মান ঐ কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারের সমান।

(iii) স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের উপরই নির্ভর করে না, যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানে হয় সেদিকের উপরেও নির্ভর করে।

ডাইভারজেন্স (Divergence) :

মনে করি, ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় R অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর

$$\vec{V}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\hat{\imath} + v_2(x,y,z)\hat{\jmath} + v_3(x,y,z)\hat{k}$$

তাহলে ডেল (Δ) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে। ডাইভারজেন্সকে $\vec{\Delta}.\vec{V}$ বা $\text{div}.\vec{V}$ লিখে প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\Delta}.\vec{V} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{\imath} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{\jmath} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right).(v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k})$$

$$= \frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} + \frac{\delta v_3}{\delta z}$$,একটি স্কেলার রাশি।

সংজ্ঞা : ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলো একটি কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র। যারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনয় বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (বহি/অন্ত) জানা যায়।

ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্ম (Physical properties of divergence)

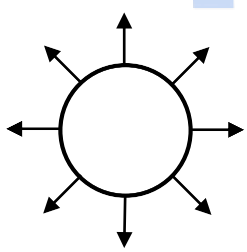
(i) ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\Delta}.\ \vec{V}$ বা $\text{div}.\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায় ; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে।

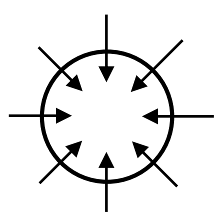
(iii) মান ঋণাত্মক হলে, আয়তনের সংকোচন ঘটে; ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

(iv) মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়।

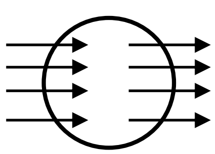
(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\Delta}.\ \vec{V} = 0$ হলে, ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনইডাল (solenoidal) বলে।



ধনাত্মক ডাইভারজেন্স



ঋণাত্মক ডাইভারজেন্স



শূন্য ডাইভারজেন্স

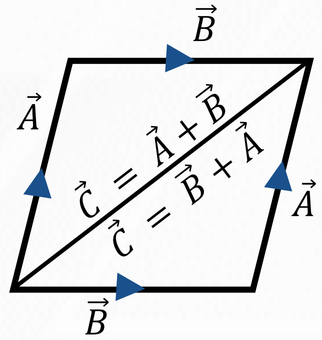
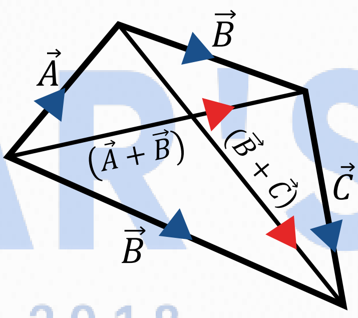
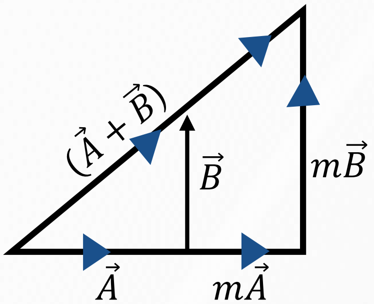
কার্ল (Curl):

ধরা যাক, কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\hat{V}(x,y,z) = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$ তাহলে অপারেটর Δ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষর দিকে একটি ভেক্টর যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে। সুতরাং $\vec{V}$ এর কার্ল

$$curl\,\vec{V} = \vec{\Delta}\times\vec{V} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{\imath} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{\jmath} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)\times(v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ভেক্টরের বীজগণিতের কতিপয় সূত্র

নাম	সূত্র	চিত্র
বিনিময় সূত্র বা **Communicative Law**	$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$	
সংযোগ সূত্র বা **Associate Law**	$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=$ $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$	
বন্টন সূত্র বা **Distribute Law**	$m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+$ $m\vec{B}$	

সূচীপত্রে ফেরত

All Formula

Topic	Formula	Explanation
ভেক্টরের মান নির্ণয় সংক্রান্ত	$\lvert\vec{A}\rvert = A = \sqrt{A^2x + A^2y + A^2z}$ $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{\lvert\vec{A}\rvert}$	$\lvert\vec{A}\rvert$=ভেক্টর মান A_x A_Yও A_Z X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ উপাংশ $\vec{A}$=ভেক্টর $\lvert\vec{A}\rvert$=ভেক্টর মান $\hat{a}$=একক ভেক্টর
উপাংশ সংক্রান্ত	অনুভুমিক উপাংশ, $\vec{R}_x = R\cos\alpha$ উলম্ব উপাংশ, $\vec{R}_y = R\sin\alpha$	R লব্ধির মান α=R এর সাথে অনুভুকের উৎপন্ন কোণ
লব্ধি সংক্রান্ত	লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ লব্ধির দিক, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ $R_{max} = P + Q$ $R_{min} = P \sim Q$	$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর α=$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ R_{max} =সর্বচ্চো লব্ধি R_{min} =সর্বনিম্ন লব্ধি
স্কেলার গুণফল সংক্রান্ত	$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$ $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{i}.\hat{k} = 0$	$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর θ=$\vec{A}$ ও $\vec{B}$এর মধ্যবর্তী কোণ
ভেক্টর গুণফল সংক্রান্ত	$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$ $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0};$ $\hat{i} \times \hat{j} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = \hat{k}$ $\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}$ $\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}$	$\hat{i} = x$ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{j} = y$ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{k} = z$ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর θ=$\vec{A}$ ও $\vec{B}$এর মধ্যবর্তী কোণ

সূচীপত্রে ফেরত

অভিক্ষেপ সংক্রান্ত	$\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $B\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\lvert\vec{A}\rvert}$ $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $A\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\lvert\vec{B}\rvert}$	$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর θ=$\vec{A}$ ও $\vec{B}$এর মধ্যবর্তী কোণ $\lvert\vec{A}\rvert, \lvert\vec{B}\rvert$=ভেক্টর মান
লম্বদিকে একক ভেক্টর সংক্রান্ত	$\vec{\eta} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\lvert\vec{A}\times\vec{B}\rvert}$	$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর $\vec{\eta}$ = $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ লম্বঅভিমুখে একক ভেক্টর
ভেক্টর বেগ ত্বরণ সংক্রান্ত	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$ $= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$	$\vec{r}$ =অবস্থান ভেক্টর $\vec{v}$ =বেগ $\vec{a}$ =ত্বরণ
ডেলটা অপারেটর	$\vec{\Delta} = \hat{i}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}$	
গ্রেডিয়েন্ট কার্ল ডাইভারজেন্স সংক্রান্ত	$\text{grad}\,\varphi = \vec{\Delta}\varphi$ $\text{div}.\vec{A} = \vec{\Delta}.\vec{V}$ $\text{curl}\,\vec{A} = \vec{\Delta}\times\vec{A}$ $\text{grad}\,\varphi = \vec{\Delta}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right)\varphi$ $= \frac{\hat{i}\,\delta\varphi}{\delta x} + \frac{\hat{j}\,\delta\varphi}{\delta y} + \frac{\hat{k}\,\delta\varphi}{\delta z}$ $\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\Delta}\times\vec{V}$ $= \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)\times(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$ $= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ $\vec{\Delta}.\vec{V} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right).(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$ $= \frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} + \frac{\delta v_3}{\delta z}$	φ একটি স্কেলার $\vec{B}$ একটি ভেক্টর রাশি $\vec{\Delta}$ একটি ভেক্টর অপারেটর

সূচীপত্রে ফেরত

TYPE 1: লব্ধির মান ও দিক

1 6 একক এবং 8 একক মানের দুটি ভেক্টর 60° কোণে কোনো কণার ওপর একই সময় ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

Solution

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2 \times 8 \times 6\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \mathbf{R = 12.16} \text{ একক}$$

$$\mathbf{R} = \sqrt{\boldsymbol{P^2} + \boldsymbol{Q^2} + \mathbf{2PQ}\,\boldsymbol{\cos\alpha}}$$

$P = 6$ একক

$Q = 8$ একক

$\alpha = 60^\circ$ (p এর সাথে কোণ)

দিকঃ

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{8\sin 60^\circ}{6+8\cos 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{8\sin 60^\circ}{6+8\cos 60^\circ}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta} = \mathbf{34.72^\circ}$$

যার সাথে Angle
সে থাকবে Single

সূচীপত্রে ফেরত

2 **10 একক মানের একটি ভেক্টরকে দুটি উপাংশে বিভক্ত করায় একটির মান 8 একক পাওয়া যায়। অপরটির মান নির্ণয় কর।**

Solution

$R = 10$ একক

$P = 8$ একক

P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$

$$P = R\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{P}{R}$$

$$\Rightarrow Q = R\sin\alpha$$

$$\Rightarrow Q = R\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow Q = R\sqrt{1-\left(\frac{P^2}{R^2}\right)}$$

$$\Rightarrow Q = R\sqrt{\frac{R^2-P^2}{R^2}}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{R^2-P^2}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{10^2-8^2}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{36}$$

$\therefore Q = 6$ একক

সূচীপত্রে ফেরত

3 **P ও Q দুইটি ভেক্টরের যোগ করা হলো। প্রমান কর যে এদের লব্ধির মান P + Q এর চেয়ে বেশি বা P − Q এর চেয়ে কম হতে পারেনা।**

Solution

$$\boldsymbol{R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}}$$

cos এর মানের উপর Base করে প্রমান করতে হবে।

cos এর সর্বোচ্চ মান $= 1$

$\cos\alpha = \cos 0°$

cos এর সর্বনিম্ন মান $= -1$

$\cos\alpha = \cos 180°$

$\alpha = 0°$ হলে সর্বোচ্চ এবং $\alpha = 180°$ হলে সর্বনিম্ন মান হবে।

1st Case, $\alpha = 0°$ হলে,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(P+Q)^2}$$

$$\Rightarrow R = P + Q$$

2nd Case, $\alpha = 180°$ হলে,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(P-Q)^2}$$

$$\Rightarrow R = P - Q$$

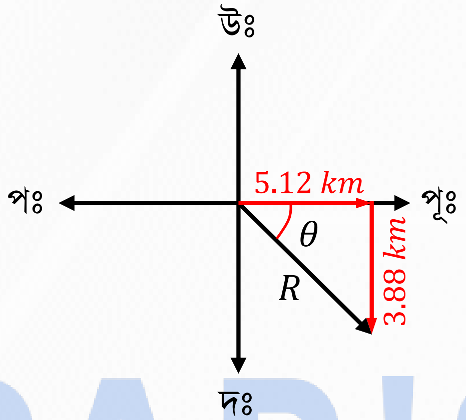
∴ লব্ধির সর্বোচ্চ মান হতে পারে: P + Q

লব্ধির সর্বনিম্ন মান হতে পারে: P − Q (প্রমাণিত)

4

একজন লোক প্রথমে পূর্বদিকে $5.12\ km$ এবং তারপর দক্ষিণ দিকে $3.88\ km$ গিয়ে বিশ্রাম নেয়। যাত্রাবিন্দু হতে লোকটির বিশ্রামের দূরত্ব R এর মান ও দিক নির্ণয় কর।

Solution



মনে করি,

R, θ কোণ উৎপন্ন করেছে,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(5.12)^2 + (3.88)^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R = 6.42\ m}$$

দিকঃ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = 37.1^\circ}$$

$P = 5.12\ km$
$Q = 3.87\ km$
$\alpha = 90^\circ$
$\theta = ?\quad R = ?$

সূচীপত্রে ফেরত

TYPE 2: ভেক্টর গুণন

সূত্র	পরিচিতি
$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta$	$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	$A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ মূলত x ও y অক্ষ বরাবর উপাংশ।
$P\cos\theta = \dfrac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{Q}$	$P\cos\theta = \vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।
$Q\cos\theta = \dfrac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{P}$	$Q\cos\theta = \vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\theta$	

1 $\vec{P} = 4$ একক পূর্ব দিকে $\vec{Q} = 3$ একক পূর্ব দিকের সাথে 45° উত্তর দিকে হলে $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ এর মান কত?

Solution

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta$$
$$= 4 \times 3\cos 45^\circ$$
$$= 6\sqrt{2}$$

$|\vec{P}| = 4$
$|\vec{Q}| = 3$
$\theta = 45^\circ$ উত্তরে

সূচীপত্রে ফেরত

2 $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$; $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

Solution

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $B\cos\theta$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

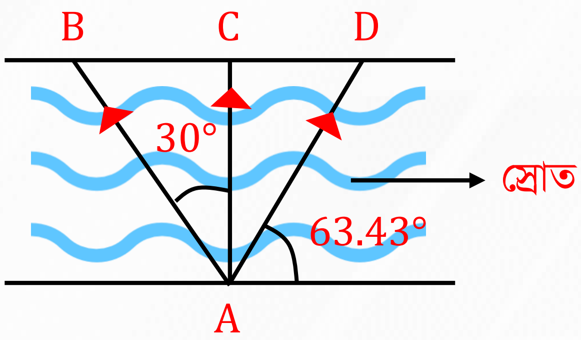
$$B\cos\theta = \frac{(3\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k})\cdot(\hat{\imath}-4\hat{\jmath}+2\hat{k})}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(3)^2}}$$

$$B\cos\theta = \frac{3+4+6}{\sqrt{19}}$$

$$\boldsymbol{B\cos\theta = \frac{13}{\sqrt{19}}}$$

NOTE:
$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1\cdot 1\cos 0^\circ = 1$
Similarly,
$\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$
$\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

TYPE 3: নদী নৌকা সংক্রান্ত



চিত্রানুযায়ী একটি নদী 31 km প্রশস্ত। দুটি ইঞ্জিন বোট আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য A হতে অভিন্ন বেগে যাত্রা শুরু করল। যাদের একটি AB বরাবর অপরটি AC বরাবর। প্রথমটি আড়াআড়ি পার হয়ে C বিন্দুতে পৌছালে দ্বিতীয়টি D বিন্দুতে পৌছায়। স্রোতের বেগ 9 kmh^{-1}।

1 নৌকাদ্বয়ের অভিন্ন বেগ হিসাব কর।

Solution

$u = 9\ kmh^{-1}$ = স্রোতের বেগ

$v = ?$ = নৌকার বেগ

$\alpha = 120°$ = কোণ

$\theta = 90°$ = লব্ধি ও স্রোতের কোণ

$$\tan\theta = \frac{v \sin 120°}{u + v\cos 120°}$$

$$\Rightarrow \tan 90° = \frac{1}{0} = \frac{v \sin 120°}{9 + v \cos 120°}$$

$$\therefore v = 18\ kmh^{-1}$$

SHORTCUT

যদি $\alpha = 120°$ হয় তাহলে $2u = v$ হয়।

সূচীপত্রে ফেরত

2 নৌকা দুটি কি একই সাথে পৌছাবে?

Solution

$\tan\theta = \frac{v \sin\alpha'}{u + v\cos\alpha'}$

$\Rightarrow \tan 63.43° = \frac{18\sin\alpha'}{9 + 18\cos\alpha'}$

$\therefore \alpha' = 90°$

দেওয়া আছে,

নদীর প্রস্থ, $d = 31km4$

স্রোতের বেগ, $u = 9\ kmh^{-1}$

$v = 18\ kmh^{-1}$

স্রোতের বেগ ও ২য় নোকার মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha' = ?$

1st Case

$$t = \frac{d}{v\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow t = \frac{31}{18\sin 120°}$$

$$\Rightarrow t = 1.988\ h$$

2nd Case

$$t' = \frac{d}{v\sin\alpha'}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{31}{18\sin 90°}$$

$$\Rightarrow t' = 1.722\ h$$

$\therefore t' < t$

$\therefore$ 1st Case এ নৌকা আগে যাবে।

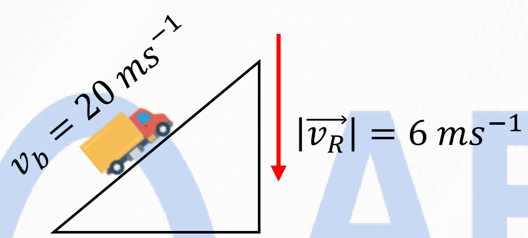
সূচীপত্রে ফেরত

TYPE 4: বৃষ্টির ম্যাথ

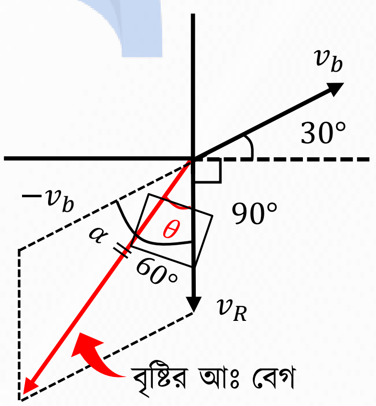
$30°$ কোণে আনত একটি পাহাড়ের ঢাল বেয়ে $72\ km/h$ সমবেগে একটি বাস উপরে উঠছে। এমন সময় হঠাৎ বৃষ্টি $6\ m/s$ সমবেগে খাড়া নিচে পড়তে শুরু করল। বৃষ্টি যখন প্রায় শেষ তখন অনুভূমিকভাবে বায়ুপ্রবাহ শুরু হল।

1 **শুরুতে বাসচালক কত কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে নির্ণয় কর।**

Solution



1st Step



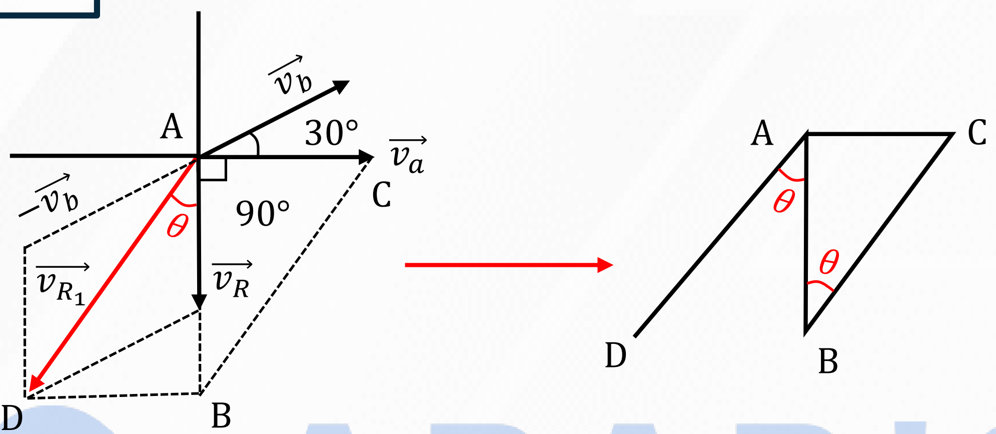
$$\tan\theta = \frac{v_b \sin 60°}{v_R + v_b \cos 60°}$$

$\therefore \boldsymbol{\theta = 47.27°}$ **উলম্বের সাথে।**

সূচীপত্রে ফেরত

2 বায়ু প্রবাহের দরুন বাসচালক খাড়া নিচের দিকে বৃষ্টি পড়তে দেখলে বায়ুপ্রবাহের প্রকৃত মান ও দিক গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

Solution



$AD = \sqrt{6^2 + 20^2 + 2 \times 6 \times 20 \times \cos 60°}$ | $\theta = 47.27°$

$AD = 23.58\ m/s$

$AD = BC$

ΔABC তে,

$$\sin\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC = \sin 47.27 \times 23.58$$

$\therefore AC = 17.32\ m/s$ গাড়ির গতি বরাবর অনুভূমিকভাবে।

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ০১

$7\ kg$ ভরের কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত একটি বল $\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})N$ হলে, যেখানে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টর, বস্তুটি কত ত্বরণ প্রাপ্ত হবে? *[BUET 13-14]*

SOLUTION

এখানে,

$$m = 7\ kg$$

$$\vec{F} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})N$$

$$\vec{a} = ?$$

এখন,

$$|\vec{F}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{4 + 9 + 36}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{49}$$

$$\therefore |\vec{F}| = 7\ N$$

আবার,

$$a = \frac{|\vec{F}|}{m}$$

$$\Rightarrow a = \frac{7\ N}{7\ kg}$$

$\therefore a = 1\ ms^{-2}$ **(Ans.)**

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ০২

একটি কণার উপর $\vec{F} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k})N$ বল কাজ করার ফলে বলের দিক কণাটির $\vec{r} = (2\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} - \hat{k})m$ সরণ হয়। λ –এর কোন মানের জন্য সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে?

[BUET 12-13]

SOLUTION

আমরা জানি, $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$\Rightarrow (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} - \hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2 - 3\lambda - 2 = 0$

$\therefore \lambda = 0$ **(Ans)**

এখানে,

$\vec{F} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k})N$

$\vec{r} = (2\hat{\imath} + \lambda\hat{\jmath} - \hat{k})m$

$W = 0\,\mathrm{J}$

প্রশ্ন ০৩

$\vec{P} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

[BUET 12-13; KUET 16-17]

SOLUTION

উত্তরঃ $37.17°$

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ০৪

একটি লন রোলার টানা বা ঠেলার জন্য অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে $19.6N$ বল প্রয়োগ করা হলো। টানার সময় ওজন ঠেলা অপেক্ষা কত কম হবে?

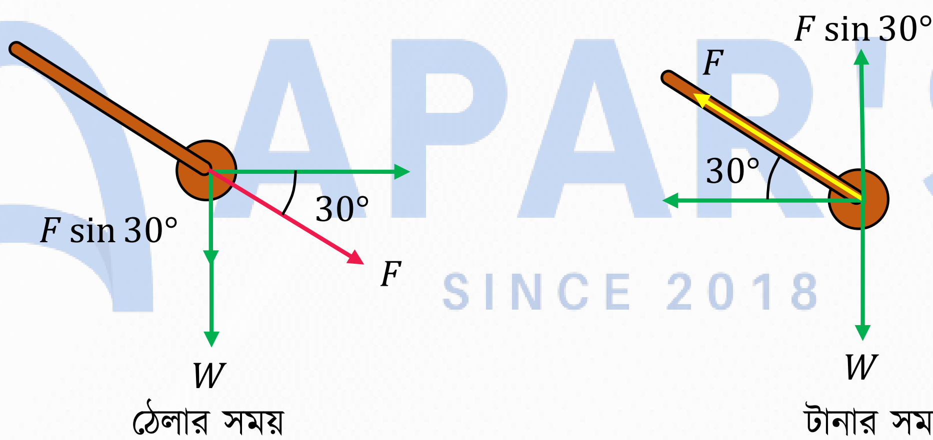
[BUET 10-11; JU 15-16]

SOLUTION

এখানে, প্রযুক্ত বল, $F = 19.6\ N$

অনুভূমিকের সাথে কোণ, $30°$

বলের উল্লম্ব উপাংশ, $F\sin 30° = 19.6\ N \times 0.5 = 9.8\ N$



ঠেলার সময় নিম্নমুখী লব্ধি বল তথা ওজন, $W + 9.8\ N$

টানার সময় নিম্নমুখী লব্ধি বল তথা ওজন, $W - 9.8\ N$

সুতরাং ঠেলা অপেক্ষা টানার সময় ওজন কম হবে,

$$(W + 9.8\ N) - (W - 9.8\ N) = 19.6\ N \quad (\text{Ans})$$

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ০৫

$\vec{A} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{\imath} + a\hat{\jmath} - 9\hat{k}$, a এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

[BUET 10-11]

SOLUTION

নিজে নিজে বের করে দেখাও

প্রশ্ন ০৬

ভেক্টর $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ এর উপর $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[BUET 09-10, 00-01]

SOLUTION

উত্তরঃ $\frac{8}{7}$

সূচীপত্রে ফেরত

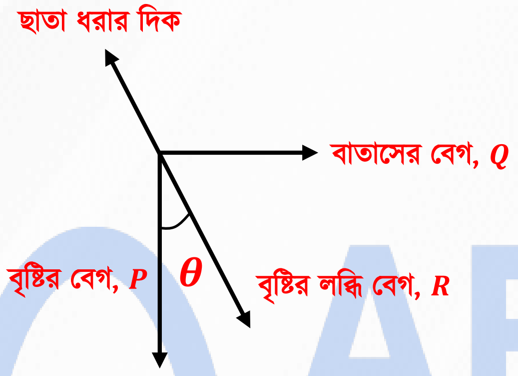
MATH PROBLEM

প্রশ্ন ০৭

কোনো একদিন উল্লম্বভাবে $30\ ms^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছিল। বাতাস উত্তর হতে দক্ষিণ দিকে $10\ ms^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হলে বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে কোন দিকে ছাতা ধরতে হবে?

[BUET 06-07]

SOLUTION



এখানে,

বৃষ্টির বেগ, $P = 30\ ms^{-1}$

বায়ুর বেগ, $Q = 10\ ms^{-1}$

বৃষ্টি ও বায়ুর মধ্যবর্তী কোণ (ছাতা ধরার কোণ) $\theta = ?$

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} = \frac{10\sin 90^\circ}{30+10\cos 90^\circ} = \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43^\circ$ (উলম্বের সাথে উত্তর দিকে)

প্রশ্ন ০৮

$\vec{P} = 4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[BUET 06-07]

SOLUTION

উত্তরঃ $\sqrt{200}$ একক।

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ০৯

ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ এর মান যথাক্রমে $12, 5$ এবং 13 একক এবং $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত হবে?

[BUET 06-07]

SOLUTION

নিজে নিজে বের করে দেখাও

প্রশ্ন ১০

$\vec{A}=5\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=15\hat{i}+m\hat{j}+9\hat{k}$। m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

[KUET 10-11]

SOLUTION

উত্তরঃ 6

প্রশ্ন ১১

$\vec{P}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\sqrt{3}\hat{k}$ ভেক্টর দুটি একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। $\vec{P}$ এর সাথে এদের লব্ধি ভেক্টরের দিক নির্ণয় করো। লব্ধির মান নির্ণয় করা সম্ভব কিনা গাণিতিক ভাবে যুক্তি দাও।

[KUET 06-07, 12-13; RUET 14-15; DU 07-08]

SOLUTION

উত্তরঃ $58.02°, 5.71$ একক।

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ১২

যদি $4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে তবে উহার ক্ষেত্রফল হবে-

[KUET 06-07]

SOLUTION

উত্তরঃ 8.49 বর্গ একক।

প্রশ্ন ১৩

এল সাইকেল আরোহী রাস্তার উপর দিয়ে কত বেগে চললে $6ms^{-1}$ বেগের বৃষ্টির ফোটা তার গায়ে $45°$ কোণে পড়বে? আরোহীর বেগ দ্বিগুণ করলে বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে?

[KUET 05-06, JUST 15-16]

SOLUTION

উত্তরঃ $6ms^{-1}$

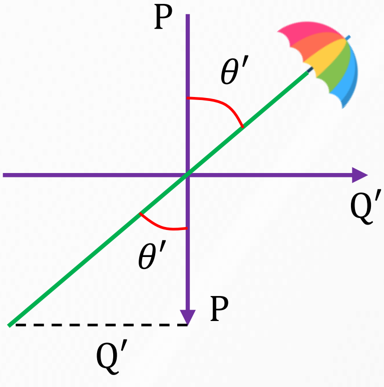
আবার, আরোহীর পূর্বের বেগ (প্রথম অংশ থেকে) $Q = 6ms^{-1}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, আরোহীর বেগ, $Q' = 2Q = 2 \times 6 = 12ms^{-1}$ বের করতে হবে, উৎপন্ন কোণ, $\theta' = ?$

$$\therefore \tan\theta' = \frac{Q'}{P}$$

$$\Rightarrow \theta' = \tan^{-1}\left(\frac{12}{6}\right)$$

$$\therefore \theta' = 63.43 \quad (\text{Ans.})$$



সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ১৪

বায়ু উত্তর দিকে ও পূর্ব দিকের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক $5\ km/hr$ এবং পূর্ব দিকের অংশক $12\ km/hr$। লব্ধিবেগ কত?

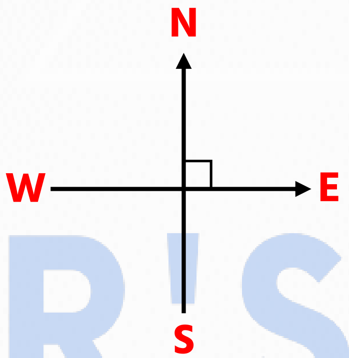
[KUET 05-06]

SOLUTION

দেওয়া আছে,

বায়ুর উত্তরমুখী অংশক, $v_N = 5\ km/hr$

বায়ুর পূর্বমুখী অংশক, $v_E = 12\ km/hr$



লব্ধিবেগ, $v = \sqrt{v_E^2 + v_N^2}$

$\Rightarrow v = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$\therefore \boldsymbol{v = 13\ km/hr}$

প্রশ্ন ১৫

p –এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{v} = (5x + 2y)\,\hat{\imath} + (2py - z)\,\hat{\jmath} + (x - 2z)\,\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে?

[RUET 15-16]

SOLUTION

দেওয়া আছে,

$$\vec{v} = (5x + 2y)\,\hat{\imath} + (2py - z)\,\hat{\jmath} + (x - 2z)\,\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\delta}{\delta x}(5x + 2y) + \frac{\delta}{\delta y}(2py - z) + \frac{\delta}{\delta z}(x - 2z) = 0$$

$$\Rightarrow 5 + 2p - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p = \frac{-3}{2}} \quad (\text{Ans.})$$

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ১৬

$P-$ এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{v}=(5x+2y)\,\hat{\imath}+(2py-z)\,\hat{\jmath}+(x-2z)\,\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে?

[RUET 15-16]

SOLUTION

উত্তরঃ $\frac{3}{2}$

প্রশ্ন ১৭

$\vec{A}=4\hat{\imath}-4\hat{\jmath}+2\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল কত?

[RUET 14-15; CUET 14-15]

SOLUTION

উত্তরঃ $2\sqrt{2}$

প্রশ্ন ১৮

$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}\cdot\vec{B}|$ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

[RUET 14-15; JnU 16-17]

SOLUTION

দেওয়া আছে, $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}\cdot\vec{B}|$

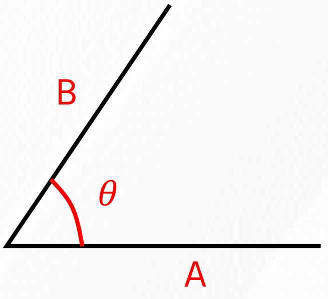
$$\Rightarrow AB\sin\theta=AB\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$$

$$\Rightarrow \tan\theta=1$$

$$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1)$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}\quad(\text{Ans.})$$



সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ১৯

একটি নৌকা নদীর প্রস্থ বরাবর $20\ ms^{-1}$ বেগে চলা শুরু করল। নদীর স্রোতের বেগ $15\ ms^{-1}$ হলে এবং নদীটি $2\ km$ প্রশস্ত হলে অপর পাড়ে পৌছাতে নৌকাটির কত সময় লাগবে? নৌকার লব্ধি বেগ কত হবে?

[RUET 13-14]

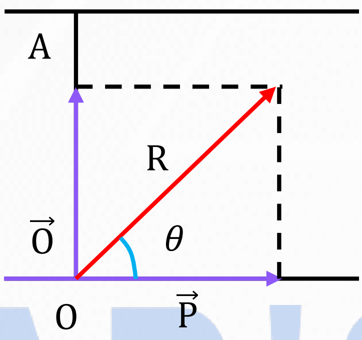
SOLUTION

ধরা যাক,

স্রোতের বেগ, $= \vec{P}$

নৌকার বেগ, $= \vec{Q}$

লব্ধি বেগ, $= \vec{R}$



$\therefore P = 15\ ms^{-1}$

$Q = 20\ ms^{-1}$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

$\vec{R}$ ও $\vec{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

$OA = 2\ km = 2000\ m$

আমরা জানি,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$\Rightarrow R^2 = (15)^2 + (20)^2 + 2 \times 15 \times 20 \times \cos 90°$$

$$\Rightarrow R^2 = 225 + 400 + 0$$

$$\Rightarrow R^2 = 625$$

$$\therefore R = 25\ ms^{-1} \quad (\textbf{Ans.})$$

আবার, OA বরাবর $\vec{R}$ এর উপাংশ $= R\sin\theta$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= \frac{OA}{R\sin\theta} = \frac{2000}{R\cdot\frac{Q}{R}} = \frac{2000}{Q} = \frac{2000}{20} = 100$ (একক ব্যতীত)

$\therefore$ সময় $= 100\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{min}\ 40\ \mathrm{sec} \quad (\textbf{Ans.})$

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ২০

a –এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

[DU 00-01]

SOLUTION

ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow (2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -2a = -b$$

$$\therefore \boldsymbol{a = 3} \quad \text{(Ans.)}$$

এখানে,

$$\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$a = ?$$

প্রশ্ন ২১

যদি $\vec{F} = 8\hat{i} - 2\hat{j}$ এবং $\vec{r} = 6\hat{i} - 8\hat{k}$ হয় তাহলে, $\vec{F} \times \vec{r} = ?$

[SUST 16-17]

SOLUTION

$$\vec{F} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{16\hat{i} + 64\hat{j} + 12\hat{k}}$$

এখানে,

$$\vec{F} = 8\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{r} = 6\hat{i} - 8\hat{k}$$

$$\vec{F} \times \vec{r} = ?$$

সূচীপত্রে ফেরত

MATH PROBLEM

প্রশ্ন ২২

দুইটি সমমানের বল কত ডিগ্রি কোণে ক্রিয়া করলে বলদ্বয়ের লব্ধি শুন্য হবে?

[SUST 16-17]

SOLUTION

এখানে,

ধরি, দুটি সমমানের বলের মান P

লব্ধি $R = 0$

বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = ?$

আমরা জানি, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\therefore P^2 + P^2 + 2P \cdot P\cos\alpha$

$\Rightarrow 2P^2 + 2P^2\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow 2P^2\cos\alpha = -2P^2$

$\Rightarrow \cos\alpha = -1$

$\therefore \boldsymbol{\alpha = 180°}$

সূচীপত্রে ফেরত

Technique 01

$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$ হবে।

Example:

$\vec{A} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{\imath} + a\hat{\jmath} - 9\hat{k}$. a এর মান কত হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান: $\frac{5}{15} = \frac{2}{a} = \frac{-3}{-9}$ $\quad \therefore a = 6 \quad (\textbf{Ans.})$

Technique 02

$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ ভেক্টরটি x, y ও z অক্ষের সাথে যথাক্রমে $\cos^{-1}\left(\frac{A_z}{A}\right), \cos^{-1}\left(\frac{A_y}{A}\right)$ এবং $\cos^{-1}\left(\frac{A_z}{A}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে $\mathrm{A} = \vec{A}$ এর মান।

Example:

$\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ ভেক্টরটি x, y ও z অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $A = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 12} = \sqrt{14}$

$\therefore x$ অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$\therefore y$ অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$

$\therefore z$ অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

সূচীপত্রে ফেরত

ADMISSION SHORTCUT

Technique 03

সোজাসুজি পাড়ি দেয়ার কোণ, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{v}{u}\right)$
এখানে, $v =$ স্রোতের বেগ
$u =$ নৌকার বেগ
$\alpha = u$ ও v এর মধ্যবর্তী কোণ।

Example:

একটি নদীতে স্রোতের বেগ $5\ kmh^{-1}$. $10kmh^{-1}$ বেগ বিশিষ্ট একটি নৌকা নিয়ে একজন মাঝি কত কোণে যাত্রা করলে নদী সোজাসুজি পাড়ি দিতে পারবে?

সমাধানঃ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{10}\right) = 120^\circ \quad (\text{Ans.})$

Technique 04

নদী পাড়ি দেয়ার সর্বনিম্ন সময়, $t_{min} = \frac{s}{u}$
এখানে, s= নদীর প্রস্থ
$u =$ নৌকার বেগ

Example:

একজন মাঝি $7\ kmh^{-1}$ স্রোতযুক্ত নদীতে $15\ kmh^{-1}$ বেগে গতিশীল নৌকায় যাত্রা করে। নদীর প্রস্থ $20\ km$ হলে, মাঝি সর্বনিম্ন কত সময়ে নদী পাড়ি দিতে পারবে?

সমাধানঃ $t_{min} = \frac{20}{15}\ hr = 800\ min \quad (\text{Ans.})$

সূচীপত্রে ফেরত

ADMISSION SHORTCUT

Technique 05

সর্বনিম্ন বা সোজাসুজি পথে পাড়ি দেওয়ার সময়, $t = \frac{s}{\sqrt{u^2-v^2}}$
এখানে, $s=$ নদীর প্রস্থ
$u =$ নৌকার বেগ
$v =$ স্রোতের বেগ

Example:

একজন সাতারু $4\ kmh^{-1}$ স্রোতযুক্ত নদীতে $6\ kmh^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারে। নদীর প্রস্থ $3\ km$ হলে, নদীটি সোজাসুজি পাড়ি দিতে সাতারুর কত সময় লাগবে?

সমাধানঃ $t = \frac{3}{\sqrt{6^2-4^2}}\ hr = 40.25\ min$ (Ans.)

সূচীপত্রে ফেরত