ভেক্টর

High voltage for Board CQ

- ★★ basic
- ★★ স্কেলার বা ডট গুনফল
- ★★★ ভেক্টর গুণন
- ★★★ নদী ও নৌকা সংক্রান্ত
- ★ বৃষ্টি ও ছাতা
- ★★★ ভেক্টরে ক্যালকুলাস

For any suggestions or
queries, please contact us.

ASG Compressed Note

Type 1 - basic

বেসিক কিছু জিনিস। আশা করি সবাই জানো তারপরও একবার রিভিউ হয়ে যাক।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর:

$O(0,0,0)$ এর সাপেক্ষে $P(1,2,3)$ এর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

বা, $\overrightarrow{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ যেটি পরে থাকবে তা থেকে প্রথম টা বিয়োগ

$P(1,2,3), Q(3,2,3),\ R(5,-2,-3)$ হলে

$\overrightarrow{PQ} = (3-1)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (3-3)\hat{k} = 2\hat{i}$

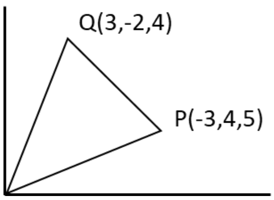
$\overrightarrow{PR} = (5-1)\hat{i} + (-2-2)\hat{j} + (-3-3)\hat{k} = 4\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{RP} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

যেকোনো ভেক্টর $\vec{p} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ হলে এর মান,

$|\vec{P}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{68}$ একক



a) P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QP}$ নির্ণয় কর ও এদের মান নির্ণয় কর।

২. $\vec{A} = 2i - 2j + 2k$ এর সমান্তরাল বা A বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

একটি ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(3,-2,1), B(1,3,5)$, C $(2,1,-4)$ হলে

ক. BC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

খ. ত্রিভুজটি সমকোণী কি-না মূল্যায়নপূর্বক মতামত দাও।

ভেক্টরের বিভিন্ন সূত্র সংক্রান্ত

- **সাধারণ সূত্র:** সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষবিন্দু এবং দ্বিতীয়টির আদি বিন্দু একই বিন্দুতে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু ও দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখার দিকে লব্ধি ভেক্টরের দিক এবং ঐ সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করবে
- **ত্রিভুজ সূত্র:** দুটি ভেক্টর কোনো ত্রিভূজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচীত করা হলে ত্রিভূজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীত ক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করে।
- **বহুভুজ সূত্র:** দুই এর অধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে বহুভূজ পাওয়া যায় এর শেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।
- $\bar{P}+\bar{Q}=\bar{Q}+\bar{P} \rightarrow$ **বিনিয়ম সূত্র**
- $(\bar{P}+\bar{Q})+\bar{R}=\bar{P}+(\bar{Q}+\bar{R}) \rightarrow$ **সংযোগ সূত্র**
- $(m+n)\bar{P}=m\bar{P}+n\bar{P} \rightarrow$ **বন্টন সূত্র**
- $(\bar{Q}+\bar{R})\times\bar{P}=(\bar{Q}\times\bar{P})+(\bar{R}\times\bar{P}) \rightarrow$ **বন্টন সূত্র**
- ভেক্টর রাশি সংযোজন সূত্র মেনে চলে।
- দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মানে না। তবে স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

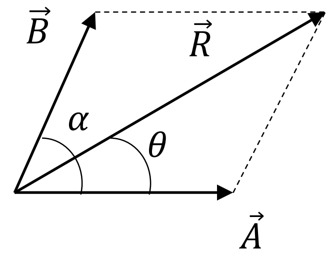
প্র্যাকটিস প্রবলেম

$\vec{A}=2i-2j+2k, \vec{B}=3i+2j+3k, \vec{C}=i+5k$ সংযোগ সূত্র ও বন্টন সূত্র মেনে চলে কিনা?

সূচীপত্রে ফেরত

সামান্তরিক সূত্র: কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপরে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে তা হলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। একে ভেক্টর রাশির যোজনের সামান্তরিক সূত্র বলে।

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

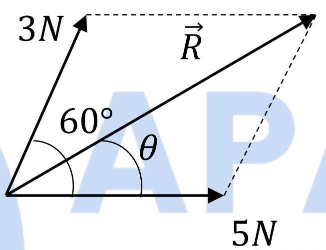


$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$

$\tan\theta = \frac{B\sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{\theta} = R$ এর A

এর সাথে কোণ যার সাথে angle সে থাকবে single

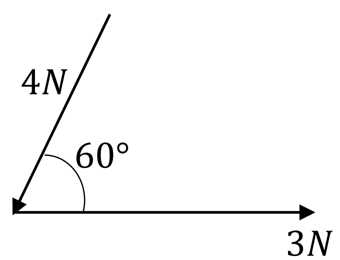
প্র্যাকটিস প্রবলেম



A) $R\ = ?$ **[7N]**

B) $\theta\ = ?$ **[21.78°]**

C) $R, 3N$ এর সাথে কত ডিগ্রি কোণ তৈরি করে? **[38.22°]**



A) $R\ = ?$ **[3.6N]**

B) $R, 3N$ এর সাথে কত ডিগ্রি কোণ তৈরি করে? $[73.9°N]$

সূচীপত্রে ফেরত

বায়ু উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্যদিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বেগের উত্তর দিকের অংশক ঘণ্টায় 5 km এবং পূর্ব দিকের অংশক ঘণ্টায় 12km । লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক, $P = 5\ \text{km h}^{-1}$

এবং পূর্ব দিকের অংশক, $\text{Q} = 12\text{kmh}^{-1}$

উত্তর দিক ও পূর্ব দিকের মধ্যবর্তী কোণ, $\text{Q} = 12\text{kmh}^{-1}$

লব্ধি বেগ বা বায়ু বেগের মান, $R\ = ?$

উত্তর দিকের সঙ্গে লব্ধি বেগের দিক, $\text{Q} = ?$

আমরা জানি,

$$\text{R} = \sqrt{\text{P}^2 + \text{Q}^2 + 2\text{PQ}\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(5\text{kmh}^{-1})^2 + (12\text{kmh}^{-1})^2 + 2 \times 5\text{kmh}^{-1} \times 12\text{kmh}^{-1} \times \cos 90^\circ}$$

$$= \sqrt{25 + 144 + 0}\text{kmh}^{-1}$$

$$= \sqrt{169}\text{kmh}^{-1}$$

$$\therefore \text{R} = 13\text{kmh}^{-1}$$

আবার, $\tan\theta = \frac{\text{Q}\sin\alpha}{\text{P}+\text{Q}\cos\alpha}$

$$= \frac{12\text{kmh}^{-1} \times \sin 90}{5\text{kmh}^{-1} + 12\text{kmh}^{-1} \times \cos 90}$$

$$= \frac{12}{5}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{12}{5} = 67.23'$$

অতএব লব্ধি বেগের মান 13kmh^{-1} এবং দিক উত্তর দিকের সাথে $67^\circ 23'$

সূচীপত্রে ফেরত

বায়ু উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বেগের উত্তর দিকের অংশক ঘণ্টায় $5\ km$ এবং পূর্ব দিকের অংশক ঘণ্টায় $5\sqrt{3}\ km$। লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, বায়ুর বেগের উত্তর দিকের অংশক,

$P = 5\ kmh^{-1}$

এবং পূর্ব দিকের অংশক,

$Q = 5\sqrt{3}\ kmh^{-1}$

উত্তর দিক ও পূর্ব দিকের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

লব্ধি বেগ বা বায়ু বেগের মান,

$R = ?$

উত্তর দিকের সঙ্গে লব্ধি বেগের দিক,

$Q = ?$

আমরা জানি,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{3})^2 + 2 \times 5 \times 5\sqrt{3} \times \cos 90°}$$

$$= \sqrt{25 + 75 + 0}$$

$$= \sqrt{100}\text{kmh}^{-1}$$

$$\therefore R = 10\text{kmh}^{-1}$$

আবার, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$$= \frac{5\sqrt{3}\times\sin 90°}{5+5\sqrt{3}\times\cos 90°}$$

$$= \sqrt{3}$$

বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{5}$

$$\therefore \theta = 60°$$

অতএব, লব্ধি বেগের মান 10kmh^{-1} এবং দিক উত্তর দিকের সাথে $60°$

একটি বস্তুকে $50\ N$ বল দ্বারা পশ্চিম দিকে এবং $20\ N$ বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। **[উত্তর: 53.852., 21.80°]**

একটি বস্তুকে $50\ N$ বল দ্বারা পূর্বদিকে এবং $20\ N$ বল দ্বারা পূর্বদিকের সাথে $60°$ কোণ করে উত্তরে টানা হলো। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।

[উত্তর: 62.45 N পূর্বদিকের সাথে 16.1° কোণে উত্তর দিকে]

সূচীপত্রে ফেরত

লব্ধি না বলে যদি দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে বলে তাহলে ভেক্টরের বিয়োগ বিধি ব্যবহার হবে।

$$|\vec{P}-\vec{Q}| = P^2 + Q^2 - 2PQcos\alpha$$

বৃহত্তম লব্ধি $R_{\max} = P + Q \rightarrow P + Q = \vec{P}.\vec{Q}$ **ভেক্টরের মানের যোগফল**

ক্ষুদ্রতম লব্ধি $R_{\min} = P - Q \rightarrow P - Q = \vec{P}.$ **ও** $\vec{Q}$ **ভেক্টরের মানের পার্থক্য**

দুইটি কণা যথাক্রমে $10ms^{-1}$ ও $22ms^{-1}$ বেগে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে কোনো একটি বিন্দুকে অতিক্রম করল। $3s$ পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কত হবে?

সমাধান :

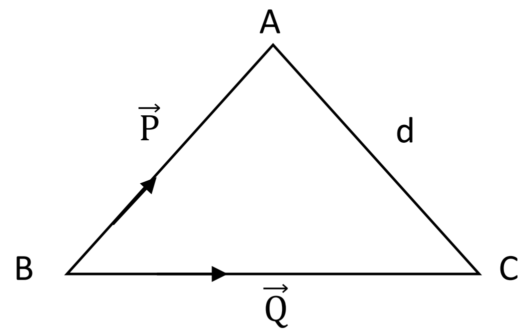
দেওয়া আছে,

3 s পর ১ম কণার সরণ $\vec{P}$ এর মান, $P = (10 \times 3) = 30$ m

3 s পর ২য় কণার সরণ $\vec{Q}$ এর মান, $Q = (22 \times 3) = 66$ m

মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$

$\therefore$ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = |\vec{P}-\vec{Q}|$ [ভেক্টরের বিয়োগ বিধি]



$\therefore d^2 = |\vec{P}-\vec{Q}|^2$

$= P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$

$= 30^2 + 66^2 - 2 \times 30 \times 66\cos 120°$

$\Rightarrow d = \sqrt{900 + 4356 + 1980}$ m

$\therefore d = 44.49$ m

সুতরাং, 3 s পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব $= 44.49$ m

সূচীপত্রে ফেরত

প্র্যাকটিস প্রবলেম

দুটি কণা $60°$ কোণ উৎপন্ন করে $6ms^{-1}$ ও $8\,ms^{-1}$ বেগে একটি বিন্দুকে অতিক্রম করে। $5s$ পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কত? [উত্তর: $36.055m$]

দুটি ভেক্টর রাশির মান 5 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

দুটি বলের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে $29\,kg - wt$ ও $5\,kg - wt$; যদি প্রত্যেকটি বলের মান $3kg - wt$ করে বাড়ানো হয়, তবে নতুন বলদ্বয়ের লব্ধির মান নির্ণয় কর যেন বলদ্বয় পরস্পরের সাথে সমকোণে থাকে।

যদি A, B ও C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টরত্রয় যথাক্রমে $i + 2j - 3k, 3i - 4j + 5k$ এবং $5\mathrm{i} - 10j + 13k$ হয় তবে দেখাও যে, AB ও BC ভেক্টরদ্বয় সমরৈখিক বা collinear.

সূচীপত্রে ফেরত

স্কেলার বা ডট গুনফল

ছোট্ট একটা টপিক হলেও পরীক্ষায় গ নাম্বারে কিন্তু প্রশ্ন চলে আসে

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

- $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
- A ও B এর মধ্যবর্তী কোন $\theta = Cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$
- $\Rightarrow \vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হবে যদি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$\Rightarrow \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\Rightarrow \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

নমুনা প্রশ্ন

$\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণের কোসাইন নির্ণয় -

সমাধান :

এখানে,

$\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণের কোসাইন

$\cos\theta = ?$

আমরা জানি,

$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{PQ}$

$= \frac{(4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k})\cdot(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(1)^2}}$

$= \frac{(4)(2)+(-4)(-2)+(1)(1)}{(\sqrt{16+16+1})(\sqrt{4+4+1})}$

$= \frac{8+8+1}{\sqrt{33}\times 3}$

$= \frac{17}{3\sqrt{33}}$

সূচীপত্রে ফেরত

দুটি ভেক্টরের যোগফল $\vec{A}+\vec{B}= 12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$ এবং বিয়োগফল $\vec{A}-\vec{B}=-6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ নির্ণয় কর এবং এদের স্কেলার গুণন নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, $\vec{A}+\vec{B} = 12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$

$\vec{A}-\vec{B}=-6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k}$

$\therefore (\vec{A}+\vec{B})+(\vec{A}-\vec{B}) = (12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k})+(-6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k})$

বা, $2\vec{A} = 6\hat{i}+8\hat{j}+18\hat{k}$

বা, $\vec{A} = 3\hat{i}+4\hat{j}+9\hat{k}$

আবার, $(\vec{A}+\vec{B})-(\vec{A}-\vec{B})$

$= (12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k})-(-6\hat{i}+12\hat{j}+10\hat{k})$

বা, $2\vec{B} = 12\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}+6\hat{i}-12\hat{j}-10\hat{k}$

বা, $2\vec{B} = 18\hat{i}-16\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore \vec{B} = 9\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i}+4\hat{j}+9\hat{k})\cdot(9\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k})$

$= 27-32-9$

$= 27-41$

$= -14$

প্র্যাকটিস প্রবলেম

$\vec{P} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}, \vec{Q} = 3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$ হলে $\vec{P}\cdot\vec{Q}$ এর মান কত? [উত্তর: – 28]

$\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 22\hat{i}+2\hat{j}-10\hat{k}$ হলে $\vec{A}\cdot\vec{B}$ এর মান কত?

[উত্তর: 100]

a এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি সমান্তরাল হবে? [উত্তর: -1]

সূচীপত্রে ফেরত

ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি ভেক্টর তিনটি ধনাত্মক অক্ষের সাথে যে তিনটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের কোসাইনের মানকে দিক কোসাইন বলে। এখন,

যেকোনো ভেক্টর $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$

- $\cos\alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2}}$ [α, X অক্ষের সাথে কোন]
- $\cos\beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2}}$ [β, Y অক্ষের সাথে কোন]
- $\cos\gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z}}$ [γ, Z অক্ষের সাথে কোন]

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}, \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ এবং

$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হলে,

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$$

$2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরের তিনটি ধনাত্মক অক্ষের সাথে কোণগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore$ x অক্ষের সাথে কোণ, $\alpha = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}$

$= 73°23''54.42''$

$\therefore$ Y অক্ষের সাথে কোণ, $\beta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}$

$= 115°22'36.9''$

$\therefore$ Z অক্ষের সাথে কোণ, $\gamma = \cos^{-1}\frac{6}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = 31°$

$\vec{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{x}$, $\vec{c} = \hat{i} + b\hat{j} - 5\hat{k}$ b এর মান কত হলে ভেক্টরে এর সমতলীয় হবে?

সমাধান :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{x}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{x}$$

$$\vec{c} = \hat{i} + b\hat{j} - 5\hat{x}$$

∴ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & b & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(-15 - 3b) - 5(-10 - 3) - 3(2b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -45 - 9b + 65 - 6b + 9 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{29}{15}$$

প্র্যাকটিস প্রবলেম

$\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

[উত্তর: 48.19°, 70.53°, 131.81°]

$5\hat{\imath} - 3\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে অক্ষ ত্রয়ের কোণগুলো নির্ণয় কর।

[উত্তর: 30°57', 120°57', 90°]

$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, দেখাও যে, ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

[উত্তর: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়]

তিনটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + m\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}, m$ এর মান কত হলে ভেক্টর তিনটি - একই সমতলে অবস্থিত হবে।

[উত্তর: -5]

সূচীপত্রে ফেরত

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হলে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন $\vec{A} \times \vec{B} = (\mathrm{AB}\sin\theta)\hat{\eta}$ **যেখানে,** $\hat{\eta}$ **একক ভেক্টর।**

- $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
- $(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})$
- **একক ভেক্টর** $\hat{\eta} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$
- **ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে,** $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = 0$

অনুরূপভাবে,

$\Rightarrow \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

$\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}$

সূচীপত্রে ফেরত

দেখাও যে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

সমাধান :

ভেক্টরদ্বয় সমকোণে তখনই অবস্থিত হবে যখন $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ হবে।

এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2 \times 3(\hat{i} \cdot \hat{i}) + 4 \times (-5)(\hat{j} \cdot \hat{j}) + 7 \times 2(\hat{k} \times \hat{k})$

$= 6 \times 1 - 20 \times 1 + 14 \times 1$

$= 6 - 20 + 14$

$= 0$

যেহেতু, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$সুতরাং ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণন নির্ণয় কর। এবং দেখাও যে, এরা পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান :

এখানে, $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং দেখাতে হবে যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$= (3 - 3)\hat{i} + (3 - 3)\hat{j} + (3 - 3)\hat{k}$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = 0$

আবার, যেহেতু $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ রাশিদ্বয়ের ভেক্টর গুণফলের মান শূন্য সেহেতু রাশিদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। (দেখানো হলো)

দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 18 একক। এদের ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{3}$ একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

সমাধান :

দেওয়া আছে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 18$ একক

$|\vec{A} \times \vec{B}| = 6\sqrt{3}$

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $18 = AB\cos\theta$

$\therefore AB\cos\theta = 18$ ....(i)

আবার, $|\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}| = \mathrm{AB}\sin\theta$

বা, $6\sqrt{3} = AB\sin\theta$

$\therefore AB\sin\theta = 6\sqrt{3}$ ....(ii)

$(ii) \div (i)$নং হতে পাই,

বা, $\frac{\mathrm{ABsin}\,\theta}{\mathrm{ABcos}\,\theta} = \frac{6\sqrt{3}}{18}$

বা, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$

সূচীপত্রে ফেরত

ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

ক্ষেত্রফল নির্ণয় থেকে কিন্তু প্রতিবছরই প্রশ্ন আসে।

- **সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ হলে ক্ষেত্রফল,** $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- **সন্নিহিত বাহু না হয়ে কর্ণ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল** $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- **ত্রিভুজের দুই বাহু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ হলে ক্ষেত্রফল**$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

মনে রাখবা কর্ণ হলে $\frac{1}{2}$ দিয়ে গুণ হবে।

ডিরেক্ট ভেক্টর না দিয়ে স্থানাংক দেওয়া থাকলে অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে।

একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান :

এখানে, সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় হলো

$\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$= |(\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}) \times (-2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |(-4 - 2)\hat{i} - (1 - 4)\hat{j} + (-1 - 8)\hat{k}\,|$$

$$= |-6\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 1 + 81}$$

$$= \sqrt{126}$$

অতএব, সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{126}$ বর্গ একক [Ans.]

$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি

$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= i(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1)$

$= -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (10)^2}$

$= \sqrt{4 + 196 + 100}$

$= \sqrt{300}$

$= 17.32$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

$= \frac{1}{2} \times 17.32$

$= 8.66$ বর্গ একক।

$\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[উত্তর: 8.5 একক]**

$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করে। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত হবে? **[উত্তর: 8.9]**

একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(1,3,2)$, $Q(2,-1,1)$, R(-1, 2, 3)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[উত্তর: 5.17 বর্গ একক]**

একক ভেক্টর ও ভেক্টরের মান:

প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ-

১. একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

২. $\vec{R}_1$ ও $\vec{R}_2$ ভেক্টরের লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর,

$\hat{\eta} = \frac{\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_2}}{|\overrightarrow{R_1}+\vec{R}_2|}$

৩. $\vec{R}_1$ ও $\vec{R}_2$ ভেক্টরদ্বয় যে তলের ওপর অবস্থিত তার উলম্ব দিকে

একটি একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\vec{R}_1 \times \vec{R}_2}{|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2|}$

$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে,

$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ লব্ধি ভেক্টর, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{x} + 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{x}$

$= 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{x}$

লব্ধি বরাবর একক ভেক্টর, $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$

$= \frac{5\hat{i}+\hat{j}+3\hat{x}}{\sqrt{5^2+1^2+(3)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{35}}(5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{x})$

সূচীপত্রে ফেরত

দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4-6) + \hat{j}(3+8) + \hat{k}(4+1)$

$= -2\hat{i} + 11\hat{j} + 5\hat{k}$

ধরি, একক ভেক্টর $= \hat{\eta}$

$\therefore \hat{\eta} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

$= \frac{-2\hat{i}+11\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{(-2)^2+(11)^2+(5)^2}}$

$= \frac{-2\hat{i}+11\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{4+121+25}}$

$= \frac{-2\hat{i}+11\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{150}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{150}}\hat{i} + \frac{11}{\sqrt{150}}\hat{j} + \frac{5}{\sqrt{150}}\hat{k}$

সূচীপত্রে ফেরত

$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ **এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।**

সমাধান :

এখানে, $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

একক ভেক্টর, $\vec{a} = ?$

আমরা জানি, $\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2+(6)^2}}$

$= \frac{3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}}{7}$

$= \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$

অতএব, সমান্তরাল একক ভেক্টর- $= \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$

এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা XY **তলের সমান্তরাল এবং** $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ **এর সাথে সমকোণে অবস্থিত।**

সমাধান :

ধরি, XY তলের সমান্তরাল ভেক্টর $x\hat{i} + y\hat{j}$

এখন, ভেক্টরটি XY তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে

সমকোণে অবস্থিত হলে,$(x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot (2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = 0$

বা, $2x - 2y = 0$

বা, $x = y$

$\therefore$ একক ভেক্টর,$n = \pm\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\frac{y\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{y^2+y^2}}$

$= \pm\frac{y(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2y^2}} = \pm\frac{y(\hat{i}+\hat{j}}{y\sqrt{2}}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

অতএব, একক ভেক্টরের মান $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

অভিক্ষেপ → উপাংশ

- $\overrightarrow{\text{উপাংশ}}$ = অভিক্ষেপ × একক ভেক্টর

- দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 30\,\hat{\imath} - 100\,\hat{k}$ ও $\vec{B} = 3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 10\,\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর?

সমাধান :

অভিক্ষেপ নির্ণয়ঃ

A এর উপর B এর অভিক্ষেপ= $\dfrac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{|\vec{A}|}$

$$\rightarrow Proj_A\ B = \frac{(30)(3)+(0)(4)+(-100)(-10)}{\sqrt{30^2+0^2+100^2}} = \sqrt{109}$$

একক ভেক্টর নির্ণয়ঃ

$$|\vec{A}| = \sqrt{30^2 + 0^2 + 100^2} = 10\sqrt{109}$$

$\vec{A}$ এর একক ভেক্টর $\quad \hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{30\,\hat{\imath} - 100\,\hat{k}}{10\sqrt{109}}$

অভিক্ষেপ হতে উপাংশ নির্ণয়ঃ

A এর উপর B এর উপাংশ= $(Proj_A\ B)(\hat{A})$

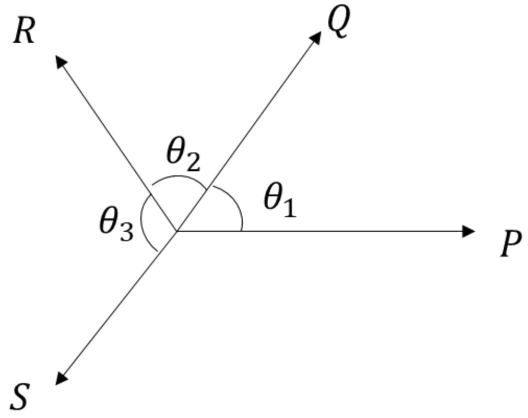
$$= (\sqrt{109})\left(\frac{30\,\hat{\imath} - 100\,\hat{k}}{10\sqrt{109}}\right)$$

$$= \left(\frac{30\,\hat{\imath} - 100\,\hat{k}}{10}\right)$$

$$= 3\,\hat{\imath} - 10\,\hat{k}$$

সূচীপত্রে ফেরত

একাধিক বলের লব্ধি:



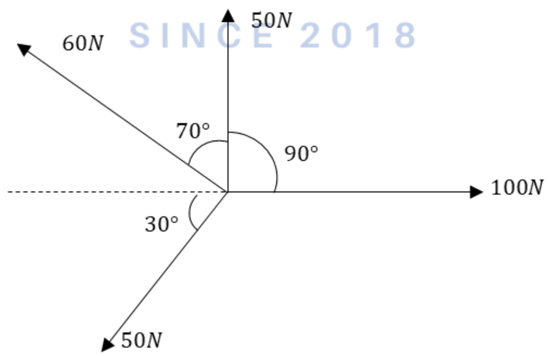
লব্ধি A **হলে,** $A_x = P\cos 0^\circ + Q\cos\theta_1 + R\cos(\theta_1+\theta_2) + S\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$

$A_y = P\sin 0^\circ + Q\sin\theta_1 + R\sin(\theta_1+\theta_2) + S\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$

$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{Ax}$

৩৮. নিচের চিত্রের 50 N এবং 100 N এর দিকে বলের লব্দি নির্ণয় কর।



50 N বলের লম্ব দিকে মোট বল $= 50\sin 90^\circ + 60\sin(90^\circ + 70^\circ) + 50\sin(180^\circ + 30^\circ) = 45.52\ N$

100 N বলের অনুভূমিক দিকে মোট বল $= 100\cos 0^\circ + 60\cos(90^\circ + 70^\circ) + 50\cos(180^\circ + 30^\circ) = 0.32N$

এদের লব্ধি $(\vec{R})$ চিত্রে দেখানো হলো,

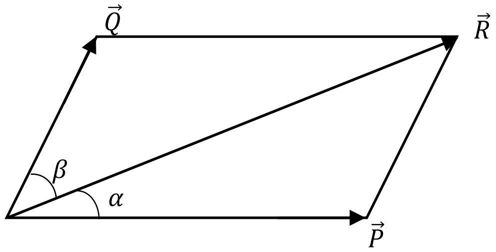
$R^2 = \{(45.52)^2 + (1.69)^2]N = 2074.92$

$R = 45.55\ N$

সূচীপত্রে ফেরত

উপাংশ

একটি ভেক্টরকে অসংখ্য উপাংশে ভাগ করা যায়।



$\vec{P} = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ → **যে বাহু তার বিপরীত কোন**

$\vec{Q} = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$70N$ বলের দুটি উপাংশের মান বের কর যার একটি 70N বলের সাথে একদিকে $30°$ কোণ এবং অপরটি অপরদিকে $65°$ কোণ করে থাকে?

সমাধান :

আমরা জানি, যেকোনো দুটি উপাংশ,

$X = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$Y = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore$ 70 N বলের একটি উপাংশ $X = \frac{70\sin 30°}{\sin(30°+65°)}$

$= 35.13$ N

$\therefore$ 70 N বলের অপর উপাংশ $Y = \frac{70 sin 65°}{\sin(30°+65°)}$

$= 63.68$ N

পরস্পরের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি $80N$। যদি লব্ধি একটি বলের সঙ্গে $60°$ কোণে আনত থাকে, তবে বল দুইটির মান নির্ণয় করো।

[RUET: '17-18]

সমাধান :

এখন, $Rcos60° = Pcos0° + Qcos90°$

$\therefore P = 80\cos60° = 40N$

আবার, $Rsin60° = Psin0° + Qsin90°$

বা, $Q = 80\sin60°$

$= 40\sqrt{3}N$

সূচীপত্রে ফেরত

নদী ও নৌকা সংক্রান্ত

নদী নৌকা থেকে একটি প্রশ্ন আসবেই বলা চলে। এই ক্ষেত্রে শুধুমাত্র শর্টকাটগুলো মুখস্ত না করে বেসিক সূত্রগুলো ভালোমতো মাথায় রাখো।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

- নদীর দৈর্ঘ্য বরাবর মোট বেগ, $u + v\cos\alpha$
- t যাত্রাকাল হলে সাঁতারুর দৈর্ঘ্য বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব $x = (u + v\cos\alpha)t$
- নদীর প্রস্থ বরাবর মোট বেগ, $v\sin\alpha + 0 = v\sin\alpha$
- t যাত্রাকাল হলে সাঁতারুর প্রস্থ বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব $y = (v\sin\alpha)t$

u = স্রোতের বেগ (দৈর্ঘ্য বরাবর)

v = সাঁতারুর বেগ

$\alpha = u$ ও v এর মধ্যবর্তী কোণ

t = যাত্রাকাল

পারাপারে প্রয়োজনীয় সময়, $T = \dfrac{d}{v\sin\alpha}$ **Any case**

লব্ধির মান:

$$|\vec{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$$

লব্ধির দিক(দৈর্ঘ্যের সাথে):

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

সূচীপত্রে ফেরত

ন্যূনতম সময়ে পারাপারের ক্ষেত্রে - $\alpha = 90°$

- পারাপারে প্রয়োজনীয় ন্যূনতম সময়, $T_{minimum} = \frac{d}{v\sin 90°} = \frac{d}{v}$
- লব্ধির মান, $|\vec{w}| = \sqrt{u^2 + v^2}$
- লব্ধির দিক(দৈর্ঘ্যের সাথে), $\tan\theta = \frac{v}{u}$

ন্যূনতম পথে বা সোজাসুজি পারাপারের ক্ষেত্রে - $\theta = 90°$

- $\cos\alpha = \frac{-u}{v}$
- লব্ধির মান, $|\vec{w}| = \sqrt{v^2 - u^2}$
- পারাপারে প্রয়োজনীয় সময়, $T = \frac{d}{|\vec{w}|} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$

কোন নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে যথাক্রমে 18 এবং $6 km/hour$। নৌকাটি কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছাবে? [RUET: '17-18]

সমাধান :

$v + u = 18, v - u = 6$

$\therefore v = 12kmh, u = 6kmh^{-1}$

$u\cos 0 + v\cos\alpha = R\cos 90$

$\Rightarrow u + v\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{u}{v}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{12}\right)$

সুতরাং, $12kmh^{-1}$ বেগে $120°$ কোণে

এখানে,

স্রোতের বেগ $= u$

নৌকার বেগ $= v$

a = স্রোতের ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ।

সূচীপত্রে ফেরত

কোনো নদীতে স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ $24\ kmh^{-1}$ এবং স্রোতের প্রতিকূলে $8\ kmh^{-1}$। সোজা অপর পাড়ে পৌঁছতে নৌকা কোন দিকে এবং কত বেগে চালাতে হবে? [RUET: '17-18]

সমাধান :

মনে করি, স্রোতের বেগ $= v$ এবং নৌকার বেগ $= u$

প্রশ্নানুসারে, $v + u = 24$ ………… (i)

$u - v = 8$ ………… (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2u = 32$

$\therefore u = 16\ kmh^{-1}$

সমীকরণ (i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$2v = 16$

$\therefore v = 8\ kmh^{-1}$

ধরা যাক, স্রোতের সাথে α কোণ করে নৌকা চালনা করলে তা R বেগে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছাবে। এক্ষেত্রে v ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$

$\therefore \tan\theta = \frac{16\sin\alpha}{8+16\cos\alpha}$

বা, $\tan 90° = \frac{16\sin\alpha}{8+16\cos\alpha}$

বা, $\infty = \frac{16\sin\alpha}{8+16\cos\alpha}$

বা, $8 + 16\cos\alpha = \frac{16\sin\alpha}{\infty}$

বা, $8 + 16\cos\alpha = 0$

বা, $16\cos\alpha = -8$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120°$

নৌকার লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

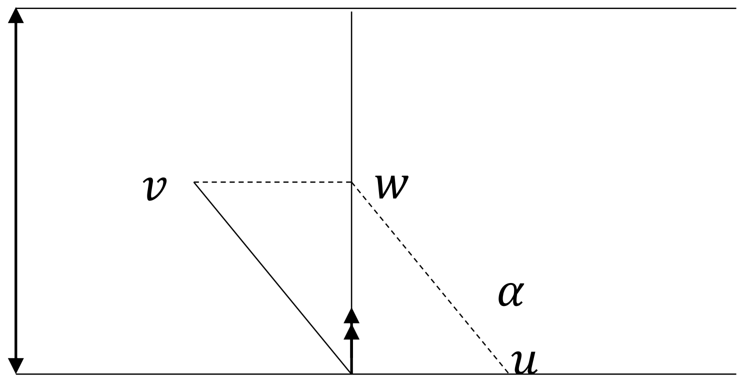
$= \sqrt{8^2 + 16^2 + 2\cdot 8\cdot 16\cdot\cos 120°}$

$= 13.856\text{kmh}^{-1}$

একটি নদীর স্রোতের বেগ $5\ ms^{-1}$। $10\ ms^{-1}$ বেগের একটি নৌকার সোজাসুজিভাবে নদী পাড়ি দিতে 1 min 40 *second* সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত?

[CUET: '03-04]

সমাধান :



u = স্রোতের বেগ = $5ms^{-1}$

v = নৌকার বেগ = $10ms^{-1}$

ধরি, v এবং u এর মধ্যবর্তী কোন $= \alpha$ এবং লব্ধি বেগ $= w$

u বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$v\ cos\alpha + ucos0° = wcos90°$

$\Rightarrow cos\alpha = -\frac{u}{V} = -\frac{5}{10}$

$\Rightarrow \alpha = 120°$

w বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$vcos(120° - 90°) + ucos90° = wcos0°$

$\Rightarrow w = 10\cos30° = 5\sqrt{3}$

$\therefore d = wt = 5\sqrt{3} \times (60 + 40)$

$= 500\sqrt{3}m$

সূচীপত্রে ফেরত

একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় $510\ m$ প্রশস্ত একটি নদী 15 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পার হতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 17 মিনিটে একে অতিক্রম করতে পারে। স্রোতের গতি বের কর।

সমাধান :

আমরা জানি,

$S = v_1 t_1$

বা, 510 মিটার $= v_1 \times 15$ মিনিট

$\therefore\ v_1 = 34$ মিটার/মিনিট

ধরি, লব্ধি বেগ $= V_2$

আমরা জানি, $S = v_2 t_2$

এখানে,

প্রস্থ, $S = 100$ মিটার

সময়, $t_1 = 15$ মিনিট

এবং $t_2 = 17$ মিনিট

ধরি, স্রোতের বেগ, $v = ?$

লোকটির বেগ $= V_1$

বা, $V_2 = \frac{510m}{17}$

$= 30$ মিটার/মিনিট

আবার,

আমরা জানি, $v_1 = v^2 + v^2$

অর্থাৎ $(34)^2 = v^2 + (30)^2$

$\therefore\ v = 16$ মিটার/মিনিট

নির্ণেয় স্রোতের গতিবেগ 16 মিটার/মিনিট

প্র্যাকটিস প্রবলেম

সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য স্বপন ফেরিতে করে $15 kmh^{-1}$ বেগে নদী পার হওয়ার সময় দেখল, ফেরিটি সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাচ্ছে। [স্রোতের বেগ $= 10\ kmh^{-1}$]

ক. লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের কতগুণ নির্ণয় কর।

খ. ফেরিটির দিক পরিবর্তনের কারণ বিশ্লেষণ কর। **[উত্তর: 5 গুণ, $\alpha = 131.8°$]**

স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু $4\ kmh^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। $2\ kmh^{-1}$ বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি। নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে। সাঁতারুকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে?

[উত্তর: $\alpha = 120°$]

- $1\ km$ প্রশস্ত একটি নদীতে $10.8\ km^{-1}$ বেগে স্রোত ও নৌকা। $18\ kmh^{-1}$ বেগে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌছানোর লক্ষ্যে রওনা হলো। ওপারে পৌছাতে নৌকার কত সময় লাগবে? **[উত্তর: 4.167 minutes.]**
- একটি electric machine দিয়ে একটি স্থির নদীর পানিকে নদীর পাড়ের সাথে $30°$ কোণে প্রবহমান করা হলো। একটি নৌকা এই অবস্থায় $4\ ms^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে $45°$ কোণ করে ওপারের উদ্দেশ্যে। যাত্রা করল। নদীর $1.5\ km$ প্রশস্ত এবং স্রোতের বেগ $5\ ms^{-1}$ ওপারে। পৌছাতে নৌকার প্রয়োজনীয় সময় কত? **[উত্তর: 3.92 min.]**

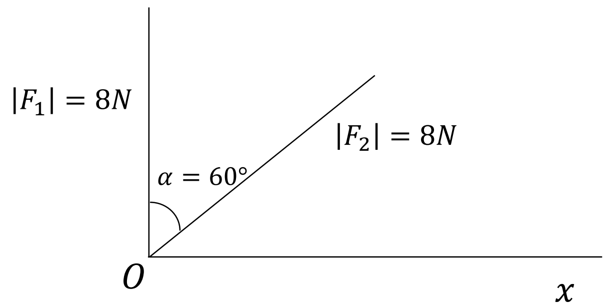
প্র্যাকটিস CQ

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দু $(0,0,0), P(2,4,2)$ এবং $Q(2,4,-4)$

(গ) $\overrightarrow{PQ}$ এর মান নির্ণয় কর।

(ঘ) P ও Q এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে কি-না যাচাই কর।

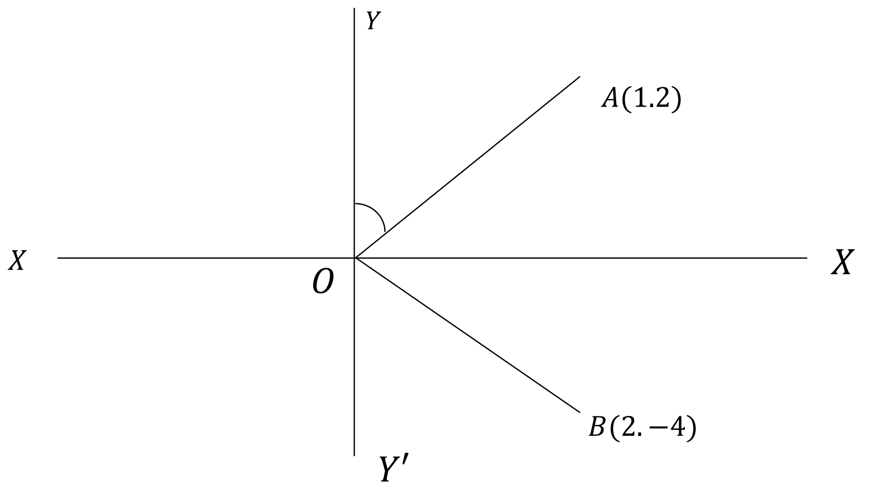
[উত্তর: 3.92 min.]



(গ) বল দুটির লব্ধি X –অক্ষের সাথে যে কোণে ক্রিয়াশীল তা নির্ণয় কর।

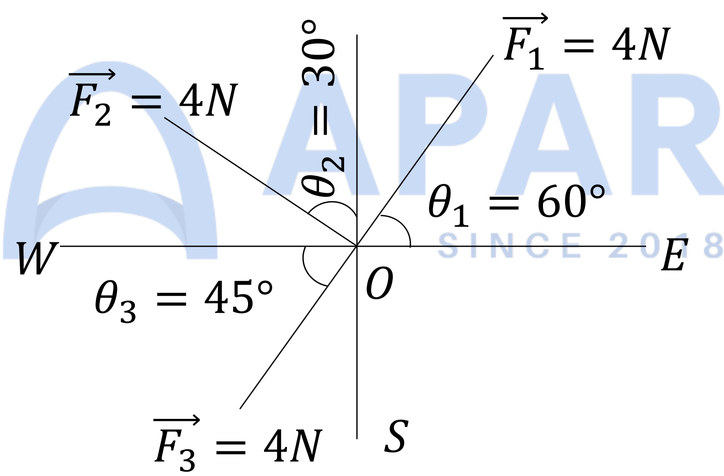
(ঘ) বল দুটির লব্ধির অনুভূমিক উপাংশ ও উলম্ব উপাংশের মধ্যে কোনটি বেশি? তোমার মতামত গাণিতিক যুক্তিসহ দাও।

সূচীপত্রে ফেরত



(গ) উদ্দীপকের $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরটি Y অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে?

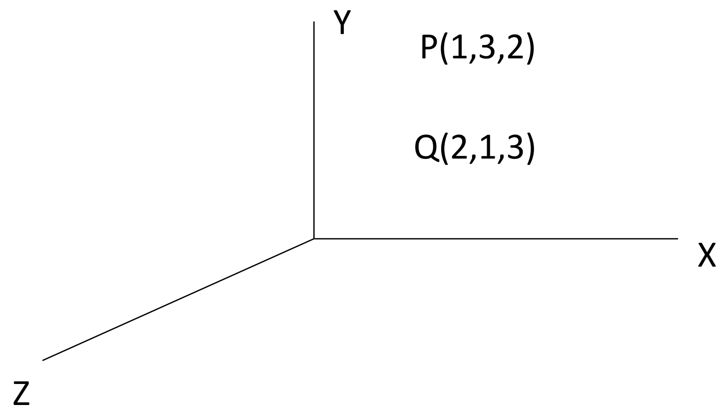
(ঘ) উদ্দীপকের $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব কিনা? গাণিতিকভাবে



(গ) $\vec{F}$ ও $\vec{F}$ ভেক্টর দুটি একটি সামান্তরিকের দুটি বাহু নির্দেশ করলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ঘ) $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ ও $\vec{F_3}$ ভেক্টর তিনটির মিলিত ফল কোন দিকে ক্রিয়া করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মন্তব্য কর।

সূচীপত্রে ফেরত

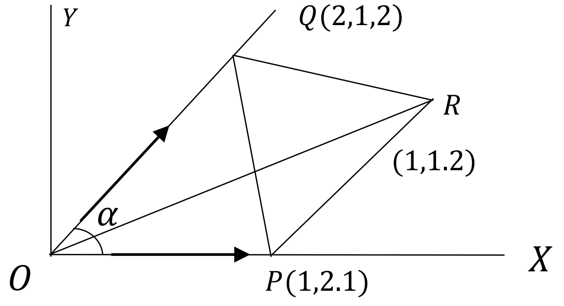


চিত্রের P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$.

(গ) $\Delta\, OPQ$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ঘ) $\vec{P}+\vec{Q}$ ও $\vec{P}-\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় $+Y$ অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে কি-না? গানিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

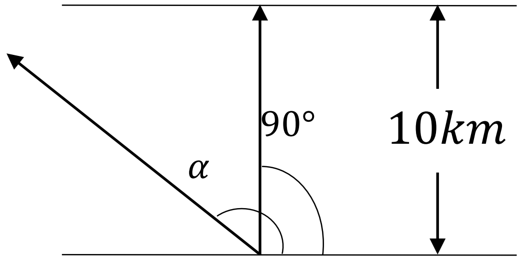
ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় দুটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $P(1.2.1)$ ও $Q(2,1,1)$। বিন্দু দুটির জন্য সৃষ্ট অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$। অবস্থান ভেক্টরদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিক অংকন করলে R বিন্দুর স্থানাংক $R(1,1,2)$ হয়।



(গ) α কোণের মান নির্ণয় কর।।

(ঘ) উদ্দীপকের $\Delta APQR$ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কি-না গাণিতিক ব্যাখ্যা কর।

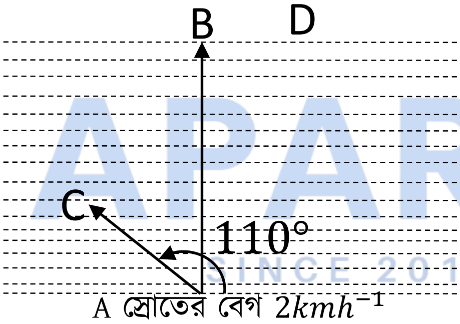
সূচীপত্রে ফেরত



$10\ km$ প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদীতে স্রোতের বেগ $5\ kmh^{-1}$। প্রথম মাঝি $10\ kmh^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে α কোণে এবং ২য় মাঝি $10\ kmh^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে লম্বভাবে নদী পার হতে যাত্রা করল।

(গ) α কোণের মান কত হলে ১ম মাঝি সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে?

(ঘ) কোন মাঝি নদীর অপর পাড়ে আগে পৌঁছাতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।



চিত্রে স্রোতের নদীতে একজন লোক এক পাড় হতে অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য $4kmh^{-1}$ বেগে AC বরাবর নৌকা চালানো শুরু করে। সে অপর পাড়ে D বিন্দুতে পৌঁছে। $BD = 0.5\ km$, নদীর প্রস্থ $= AB$

(গ) নদীর প্রস্থ AB নির্ণয় কর।

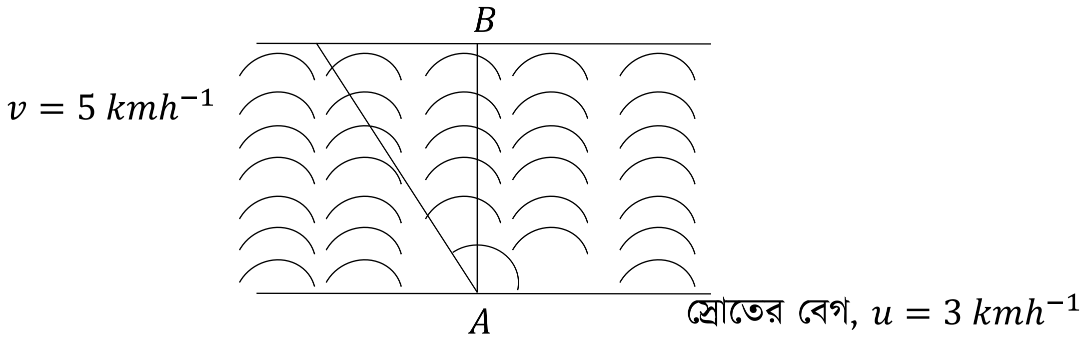
(ঘ) AC বরাবর নৌকা চালানো শুরু করলে অপর পাড়ে পৌঁছাতে যে সময় লাগে এই বেগে AB বরাবর নৌকা চালানো শুরু করলে অপর পাড়ে পৌঁছাতে তার চেয়ে কম নাকি বেশি সময় লাগবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক উত্তরের সপক্ষে মতামত দাও।

সূচীপত্রে ফেরত

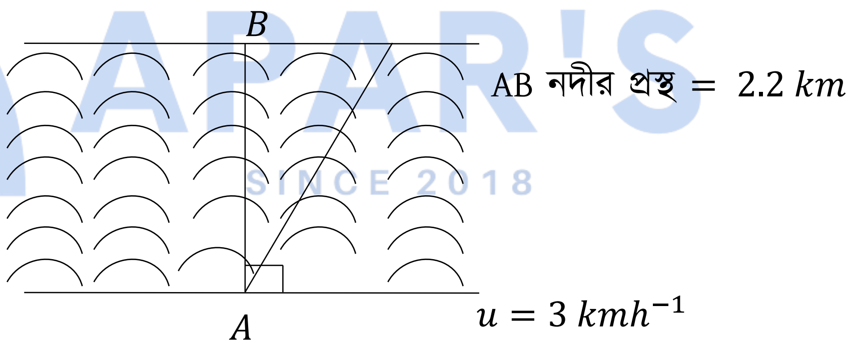
$500m$ প্রস্থের একটি নদীতে $6\ kmh^{-1}$ বেগে স্রোত প্রবাহিত হচ্ছে। এই নদীটি মাহীর ও নিধি প্রতিযোগিতার উদ্দেশ্যে সাঁতার কেটে পার হওয়ার সিদ্ধান্ত নিলো। মাহীর $10\ kmh^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে কোণে এবং নিধি $9\ kmh^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে লম্বভাবে সাঁতার কাটতে শুরু করল।

(গ) α কোণের মান কত হলে মাহীর সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে?

(ঘ) উদ্দীপক অনুসারে কে জিতবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।



চিত্র-১



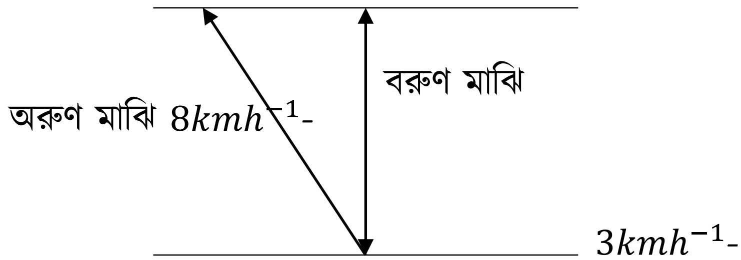
চিত্র-২

$2.2\ km$ প্রস্থের একটি নদীতে স্রোতের বেগ $3\ kmh^{-1}$। সাঁতার প্রতিযোগিতায় নদী পাড়ি দেওয়ার লক্ষ্যে প্রথম সাঁতারু $5\ kmh^{-1}$ বেগে চিত্র-১ অনুসারে এবং দ্বিতীয় সাঁতারু একই বেগে চিত্র-২ অনুসারে সাঁতার আরম্ভ করল।

(গ) প্রথম সাঁতারুর লব্ধি বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) উক্ত সাঁতার প্রতিযোগিতার ফলাফল গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

সূচীপত্রে ফেরত



অরুণ মাঝি $8\ kmh^{-1}$ বেগে নৌকা চালিয়ে নদীর প্রস্থ বরাবর পার হয়। বরুণ মাঝি একই বেগে নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকা চালায়। নদীর প্রস্থ $2km$।

(গ) উদ্দীপকে অরুণ মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হয়েছিল?

(ঘ) উদ্দীপকের কোন মাঝি কম সময়ে নদী পার হবে? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

বৃষ্টি ও ছাতা

বৃষ্টির বেগ v এবং লোকটির বেগ u হলে বৃষ্টি হতে রক্ষাপেতে ছাতা ধরতে হবে,

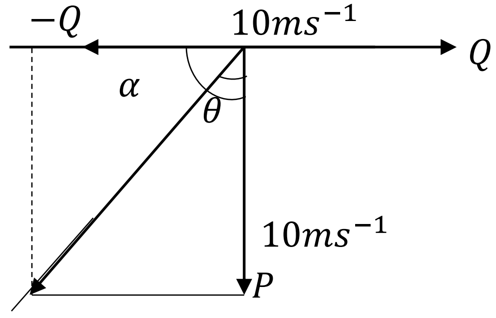
$\theta = \tan^{-1}\frac{u}{v}$ **কোণে**

বৃষ্টির ফোটা লোকটির গায়ে θ কোণে পড়লে $tan\theta = \frac{v\ sin\alpha}{u + v\ cos\alpha}$

কোন এক দিন $30ms^{-1}$গতিতে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। যদি বায়ু $10\ ms^{-1}$ গতিতে উত্তর থেকে দক্ষিণে বইতে শুরু করে। তাহলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তোমার ছাতা কোন দিকে মেলে ধরতে হবে বের কর। [BUET: '06-07]

সমাধান :

আমরা জানি,



$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$= \frac{10\sin 90°}{30+10\cos 90°}$

$= \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = \tan\frac{1}{3} = 18.43°$

সূচীপত্রে ফেরত

$4\ ms^{-1}$ বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক $6\ ms^{-1}$ বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে?

[উত্তর. 33.7°]

সাদিক $5\ ms^{-1}$ বেগে হাঁটছিল, বৃষ্টি উল্লম্বভাবে $7\ ms^{-1}$ বেগে পড়ছিল। সাদিকের বৃষ্টি থেকে বাঁচতে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে? [উত্তর. $35.53°$]

শান্ত বাতাসে $6kmh^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছে। এ সময়ে সাইকেলে চড়ে আবিদ $8\ kmh^{-1}$ বেগে বাড়ি ফিরছে। হঠাৎ আবিদের চলার বিপরীত দিকে $2kmh^{-1}$ বেগে বাতাস প্রবাহিত হতে লাগল। উভয় ক্ষেত্রে বৃষ্টি থেকে বাঁচতে আবিদ ছাতা ব্যবহার করল।

(গ) স্থির বাতাসে বৃষ্টির লব্ধি বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) বাতাস প্রবাহিত হওয়ার আগে ও পরে একইভাবে ছাতা ধরলে আবিদ বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে কি-না? গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

সূচীপত্রে ফেরত

কোনো একদিন $10ms^{-1}$ বেগে খাড়াভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। এ সময় একজন ব্যক্তি $20ms^{-1}$ বেগে গাড়ি চালিয়ে যাচ্ছিলেন।

(গ) গাড়ি চালক বৃষ্টির বেগ কত পরিলক্ষিত করবেন?

(ঘ) যদি গাড়ির গতির বিপরীত দিকে $25ms^{-1}$ বেগে বায়ুপ্রবাহ চলে তবে ঐ ব্যক্তি দুই ক্ষেত্রে বৃষ্টি বেঁকে পড়ার পরিমাপ একই পরিলক্ষিত করবেন কি? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত উপস্থাপন কর।

সমাধান :

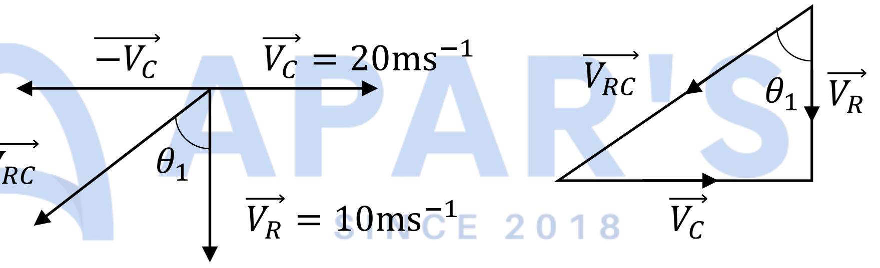
এখানে, গাড়ির বেগ, $\overrightarrow{V_C} = 20\ ms^{-1}$ (অনুভূমিক বরাবর)

বাতাসের বেগ,$\overrightarrow{V_A} = -25ms^{-1}$ (গাড়ির গতির বিপরীত দিকে)

এবং বৃষ্টির বেগ, $\overrightarrow{V_R} = 10\ ms^{-1}$ (উল্লম্বভাবে)

এখন,

বায়ুপ্রবাহ না থাকা অবস্থায়:



এখানে, গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $\overrightarrow{V_{RC}}$ হলে,

$\overrightarrow{V_{RC}} = \overrightarrow{V_R} - \overrightarrow{V_C}$

এবং এই বেগ উল্লম্বের সাথে θ_1 কোণ উৎপন্ন করলে, ত্রিভুজ হতে আমরা পাই,

$$\tan\theta_1 = \frac{v_C}{v_R} = \frac{20}{10}$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{20}{10}\right) = 63.43°$$

বায়ুপ্রবাহ থাকা অবস্থায়:

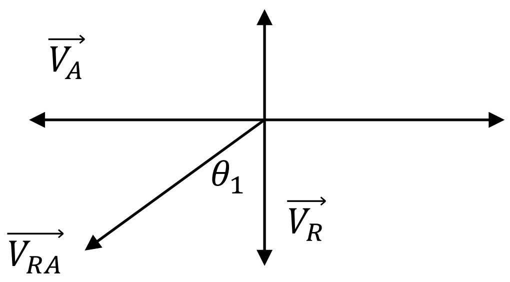
বৃষ্টি ও বাতাসের লব্ধি বেগ, VRA হলে,

$$v_{RA} = \sqrt{v_R^2 + v_A^2 + 2v_R v_A \cos\alpha}$$

সূচীপত্রে ফেরত

$= \sqrt{10^2 + 25^2 + 2 \times 10 \times 25 \times \cos 90^\circ}$

$= 26.926 \text{ ms}^{-1}$



এখানে,

বৃষ্টির বেগ, $\overrightarrow{V_R} = 10ms^{-1}$

বাতাসের বেগ, $\overrightarrow{V_A} = 10ms^{-1}$

বৃষ্টি ও বাতাসের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90^\circ$

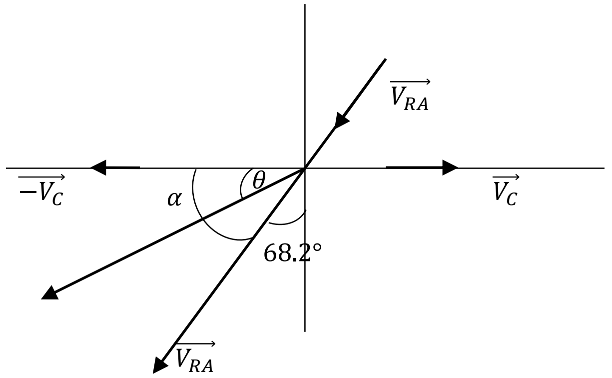
বৃষ্টি ও বাতাসের লব্ধি বেগ θ উল্লম্বের সাথে কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \frac{v_A}{v_R}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{25}{10}$

$= 68.2^\circ$

যেহেতু গাড়ি চালকের সাপেক্ষে বায়ুপ্রবাহ থাকা অবস্থায় পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ নির্ণয় করতে হবে সেহেতু গাড়ির চালকের বেগের মান শূন্য করতে হবে। সেজন্য $\overrightarrow{V_C}$ এর সাথে $-\overrightarrow{V_C}$ যোগ করি এবং $\overrightarrow{V_{RA}}$ কে মূলবিন্দু O তে স্থাপন করি।



গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টি ও বাতাসের লব্ধি বেগ অনুভূমিকের সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta' = \frac{v_{RA}\sin\alpha}{v_C + v_{RA}\cos\alpha}$

সূচীপত্রে ফেরত

$= \frac{26.926\sin 21.8^\circ}{20+26.926\cos 21.8^\circ}$

$= 0.222$

$\therefore \theta' = \tan^{-1}(0.222)$

$= 12.53^\circ$

$\therefore$ উল্লম্বের সাথে কোণ $= 90^\circ - 12.53^\circ$

$= 77.47^\circ$

সুতরাং, গাড়িতে বসা ব্যক্তি দুইক্ষেত্রে বৃষ্টি বেঁকে পড়ার পরিমাণ ভিন্ন পরিলক্ষণ করবেন।

এখানে, বৃষ্টি ও বাতাসের লব্ধি বেগ, $v_{RA} = 26.926\, ms^{-1}$

বৃষ্টি ও বাতাসের লব্ধি বেগের সাথে $-v_C$ এর মধ্যবর্তী কোণ

$\alpha' = 90^\circ - 68.2^\circ$

$= 21.8^\circ$

গাড়ির বেগ, $v_C = 20ms^{-1}$

কোন একদিন সেলিম ও মুরাদ কোনো স্থানে দন্ডায়মান ছিল। তখন বাতাসের বেগ $5ms^{-1}$ যা দক্ষিণ থেকে উত্তরে প্রবাহিত হচ্ছিল। এমন সময় $3\ ms^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়তে শুরু করল। বৃষ্টি শুরু হবার পর সেলিম দক্ষিণ থেকে উত্তরে এবং মুরাদ উত্তর থেকে দক্ষিণে সমান $7\ ms^{-1}$ বেগে চলতে শুরু করল।

(গ) দন্ডায়মান অবস্থায় বৃষ্টি তাদের গায়ে কত বেগে আঘাত করবে?

(ঘ) চলমান অবস্থায় বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে দুই বন্ধুকে একই কোণে ছাতা ধরতে হবে কিনা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

সূচীপত্রে ফেরত

ভেক্টরে ক্যালকুলাস

ইদানিং এই টপিক থেকে ভালোই প্রশ্ন আসতেছে। তাই সূত্রগুলো দেখে বেশ কিছু ম্যাথ প্র্যাকটিস করে যাও।

$\vec{\nabla}$

GRADIENT $(\vec{\nabla})\,(f)$

SCALAR FIELD TO VECTOR FIELD

DIVERGENCE $(\vec{\nabla}).(\vec{f})$

(VECTOR FIELD TO SCALAR FIELD)

CURL $(\vec{\nabla}) \times (\vec{f})$

(VECTOR FIELD TO VECTOR FIELD)

$div\ \vec{V} = 0$	$div\ \vec{V} < 0$	$div\ \vec{V} > 0$
PARALLEL	**CONVERGENT**	**DIVERGENT**
সলিনয়েড		

$|curl\ \vec{V}| = 0$ হলে,
ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল

$|curl\ \vec{V}| \neq 0$ হলে,
ক্ষেত্রটি ঘূর্ণনশীল

সূচীপত্রে ফেরত

যদি $\varphi = 2xy^4 - x^2z$ হয়, তবে $(2,-1,2)$ বিন্দুতে $(\vec{\nabla})\varphi$ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে,

$$\varphi = 2xy^4 - x^2z$$

$$\bar{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(2xy^4 - x^2z) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4 - x^2z) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(2xy^4 - x^2z)$$

$$= \hat{i}(2y^4 - 2xz) + \hat{j}(8xy^3) + \hat{k}(-x^2)$$

$(2,-1,2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\{2(-1)^4 - 2.2.2\} + \hat{j}\{8.2\cdot(-1)^3\} + \hat{k}\{-(2)^2\}$

$$= \hat{i}(2-8) + \hat{j}(-16) - 4\hat{k}$$

$$= -6\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$= -(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$$

যদি $\varphi(x,y,z) = 3xy^2z^3 - 4xy$ হয়, তবে $\vec{\nabla}\varphi$ বের কর। $(2,-1,1)$ বিন্দুতে নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, $\varphi(x,y,z) = 3xy^2z^3 - 4xy$

আমরা জানি, $\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\varphi + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\varphi + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\varphi$

সুতরাং, $\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^3 - 4xy) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^3 - 4xy) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(3xy^2z^3 - 4xy)$

$$= \hat{i}(3y^2z^3 - 4y) + \hat{j}(6xyz^3 - 4x) + \hat{k}(9xy^2z^2)$$

$(2,-1,1)$ বিন্দুতে,

$$\vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\{3\cdot(-1)^2 1^3 - 4\cdot(-1)\} + \hat{j}\left\{(6\cdot 2\cdot(-1)\cdot 1^3 - 4\cdot 2\right\} + \hat{k}\{9\cdot 2\cdot(-1)^2\cdot 1\}$$

$$= \hat{i}(3+4) + \hat{j}(-12-8) + 18\hat{k}$$

$$= 7\hat{i} - 20\hat{j} + 18\hat{k}$$

যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হয় তবে $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ বের কর।

সমাধান :

এখানে, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

যদি $= (3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$ হয়, তবে $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে,

$$\vec{r} = (3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left\{(3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}\right.$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$

$$= 6xz + xz - x^3y^2$$

$(2.-1,2)$ বিন্দুতে,

$$\bar{\nabla}.\bar{r} = 6.2.2 + 2.2 - 2^3(-1)^2$$

$$= 24 + 4 - 8$$

$$= 20$$

সূচীপত্রে ফেরত

যদি $\vec{A} = (4xyz\hat{i} + 2x^2y\hat{j} - x^2y^2z)\hat{k}$ হয়, তবে $(2, -2, -1$ বিন্দুতে) $\vec{\nabla} \times \vec{r}$ নির্ণয় কর।

সমাধান :

এখানে, $\vec{A} = (4xyz\hat{i} + 2x^2y\hat{j} - x^2y^2z)\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(4xyz\hat{i} + 2x^2y\hat{j} - x^2y^2z\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xyz & 2x^2y & -x^2y^2z \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y)\right\}\hat{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(4xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(-x^2y^2z)\right\}\hat{j}$$

$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(4xyz)\right\}\hat{k}$$

$$= -2x^2yz\hat{i} + (4xy + 2xy^2z)\hat{j} + (4xy - xz)\hat{k}$$

এখন, $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -2 \cdot 2^2 \cdot (-2) \cdot (-1)\hat{i} + \{4 \cdot 2(-2) + 2 \cdot 2(-2)^2 \cdot (-1)\}$$

$$+ \{4 \cdot 2(-2) - 4 \cdot 2(-1)\}\hat{k}$$

$$= -16\hat{i} - 32\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$= -(16\hat{i} + 32\hat{j} + 8\hat{k})$$

p এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{V} = (5x + 2y)\vec{i} + (2py - z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$ সলিনয়ডাল হবে? [RUET: 15-16]

সমাধান :

কোন অবস্থান ভেক্টরের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রটিকে সলিনয়ডাল বলে।

$$\vec{V} = (5x + 2y)\vec{i} + (2py - z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial(5x+2y)}{\partial x} + \frac{\partial(2py-z)}{\partial y} + \frac{\partial(x-2z)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow 5 + 2p - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{3}{2}$$

প্র্যাকটিস প্রবলেম

যদি $\vec{A} = 2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}$ এবং $\varphi = 2z - x^3y$ হয়, তাহলে $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{A}.\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর। [উত্তর: -5]

যদি $\varphi = 2xz^4 - x^2y$ হয় তবে $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ এবং এর মান বের কর।

উত্তর: $10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}; \sqrt{372}$

যদি $\vec{A} = 2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}$ এবং $\varphi = 2z - x^3y$ হয়, তাহলে $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{A}.\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর। [উত্তর: -5]

যদি $\varphi(x, y, z) = 3xy^2z^3 - 4xy$ হয় $\vec{\nabla}\varphi$ (গ্রেড φ) বের - কর। $(2, 1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ কত হবে? [উত্তর: $-\hat{i} + 4\hat{j} + 18\hat{k}$]

৭৬. যদি $\varphi = 2xz^4 - x^2y$ হয় তবে $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ এবং এর মান বের কর। [উত্তর: $10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}; \sqrt{372}$]

প্র্যাকটিস CQ

$P(x, y, z) = 2xy^4 - x^2z$ একটি স্কেলার রাশি এবং $\vec{A} = (2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (-5z + x)\hat{k}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{B} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ অপর একটি ভেক্টর রাশি।

(গ) $(2, -1, -2)$ বিন্দুতে p এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকে বর্ণিত $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে কোনটি সলিনয়ডাল এবং কোনটি অঘূর্ণশীল তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর।

দেওয়া আছে একটি ভেক্টর ক্ষেত্র-

$= (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$

(গ) $(2,1,-1)$ বিন্দুতে $\vec{A}$এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

(ঘ) গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে দেখাও যেন $\vec{A}$ ভেক্টরটি সলিনয়েডাল নাকি সংরক্ষণশীল হবে?

একদিন একটি অঞ্চলের তাপমাত্রা ও বাতাসের বেগ পাওয়া গেলো যথাক্রমে,

$Q = 2xy^2z^3 - 4xy$ ও $\vec{V} = (y^2\cos x + z^3)\hat{i} + (2y\sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$.

(গ) বিন্দুতে ঐ অঞ্চলের তাপমাত্রার গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর।

(ঘ) ঐদিন ঐ অঞ্চলের বাতাসে কোনো ঘূর্ণন ছিলো কিনা তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মত দাও।

তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ **এবং** $\vec{C} = (6xy + z^3)\hat{i} - (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$

(গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকে $\vec{C}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল কি না যাচাই কর।

সূচীপত্রে ফেরত