ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7
Варіант 2

Інтерполяція та апроксимація

Мета роботи: навчитись на практиці будувати інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона, а також використовувати метод найменших квадратів апроксимації функції.

Хід роботи:

Звіт складається з таких пунктів:

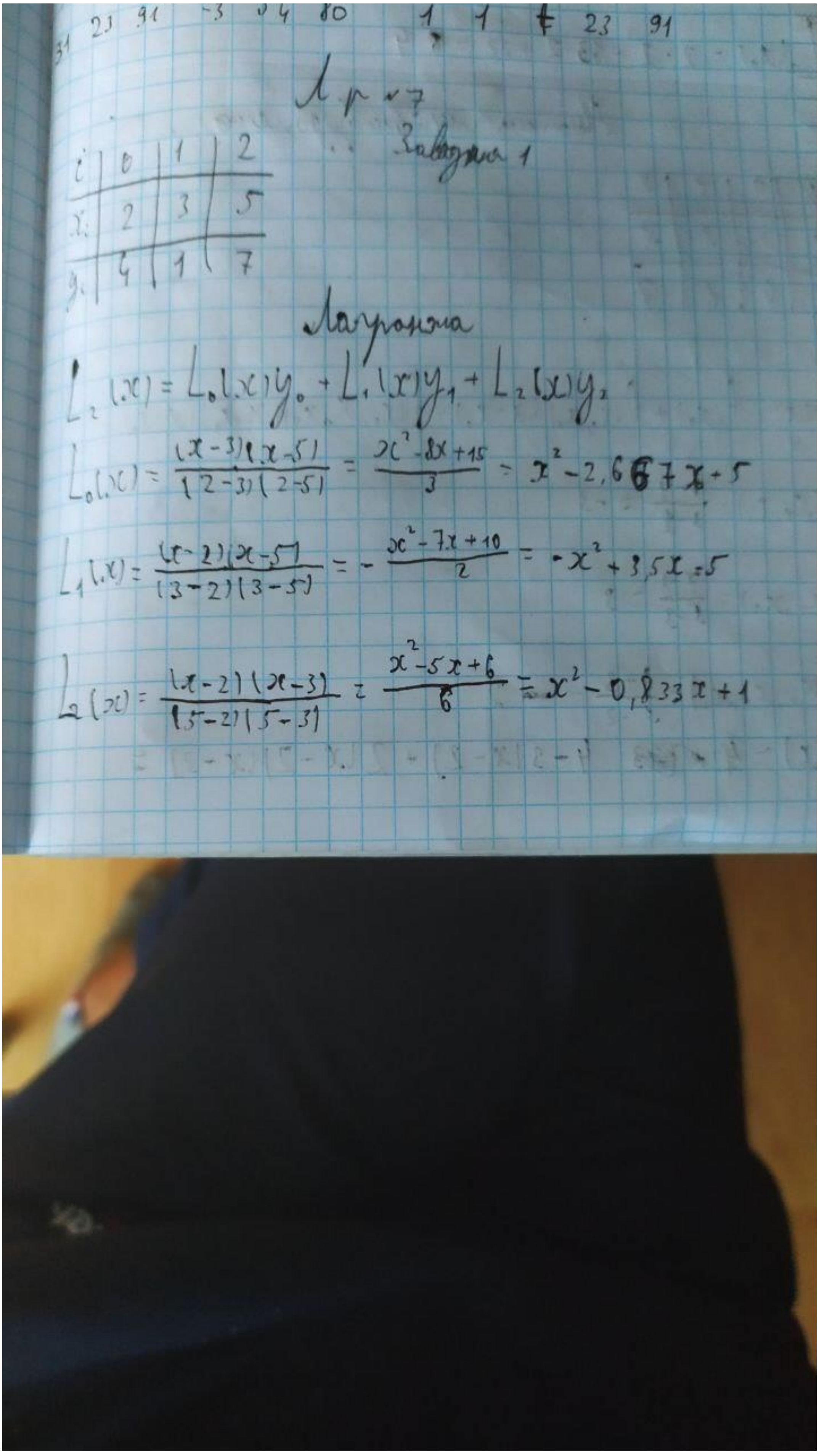
1. Побудовані інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона, апроксимальний поліном вставити фото у звіт.
2. Побудувати зазначені поліноми, що проходить через задані точки в MS Excel.

Завдання 1:

Завдання 1.

1. Побудувати інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона (для рівновіддалених та нерівновіддалених вузлів інтерполяції) для заданої дискретної функції.
2. Зробити перевірку – обчислити значення функції у вузлі x_0.

Варіант	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
2	2	3	5	4	1	7



31 23 91 -3 34 80 1 1 7 23 91

Лр №7

Завдання 1

i	0	1	2
x_i	2	3	5
y_i	4	1	7

Лагранжа

$$L_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-5)}{(2-3)(2-5)} = \frac{x^2-8x+15}{3} = x^2 - 2,667x + 5$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(3-2)(3-5)} = -\frac{x^2-7x+10}{2} = -x^2 + 3,5x - 5$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(5-2)(5-3)} = \frac{x^2-5x+6}{6} = x^2 - 0,833x + 1$$

$$\frac{4(x^2-8x+15)}{3}+\frac{x^2-7x+10}{-2}+\frac{7(x^2-5x+6)}{6}=\frac{4x^2-32x+60}{3}-$$

$$-\frac{x^2-7x+10}{2}+\frac{7x^2-35x+42}{6}=\frac{8x^2-64x+120-3x^2+21x-30+7x^2-35x+42}{6}$$

$$=\frac{12x^2-78x+132}{6}=2x^2-13x+22$$

$$L_2(x_0)=2\cdot 2^2-13\cdot 2+22=4$$

Ньютона (нерівновіддалені)

i	0	1	2
x_i	2	3	5
y_i	4	1	7

$$P_2(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$f(x_0,x_1)=\frac{1-4}{3-2}=-3$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{7-1}{5-3}=3$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{3+3}{5-2}=2$$

$$P_2(x)=4-3(x-2)+2(x-2)(x-3)=$$

$= 4 - 3x + 6 + 2x^2 - 6x - 4x + 12 = 2x^2 - 13x + 22$

$P_2(x_0) = 2 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + 22 = 4$

Ньютона (рівновіддалено)

i	0	1	2
x_i	2	3	5
y_i	4	1	7

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = 1 - 4 = -3$$

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) = 7 - 1 = 6$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) = 6 + 3 = 9$$

$$P_2(x) = 4 + \frac{-3}{1}(x - 2) + \frac{9}{2}(x - 2)(x - 9) =$$

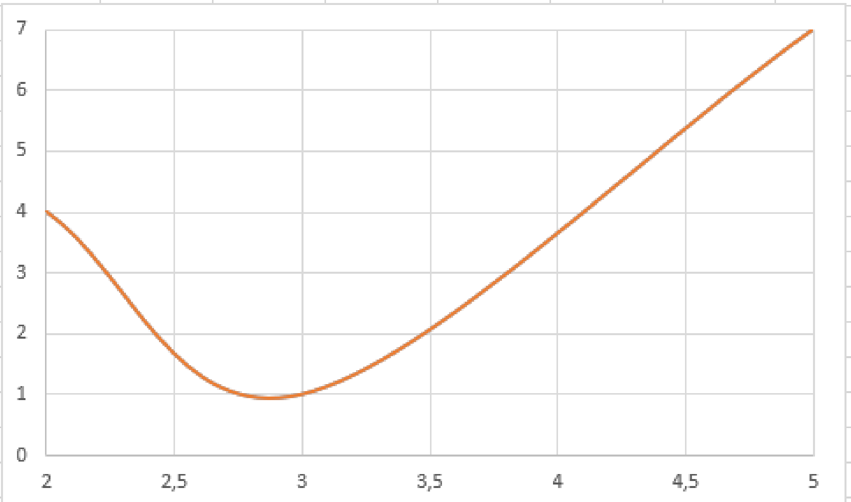
$$= 4 - 3x + 6 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{2}x - 9x + 81 = \frac{9}{2}x^2 - \frac{105}{2}x + 91$$

$$P_2(x_0) = \frac{9}{2} \cdot 2^2 - \frac{105}{2} \cdot 2 + 91 = 4$$

i	0	1	2
xi	2	3	5
yi	4	1	7

P(x)=2x^2-13x+22

xi	2	3	5
yi	4	1	7



Завдання 2:

Завдання 2.

За методом найменших квадратів побудувати апроксимальний поліном 2-го степеня для заданої дискретної функції та порахувати мінімальну суму квадратів похибок.

		0	*1*	*2*	*3*	*4*
Варіант 2	*x*	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40
	y	4,48	5,47	6,05	7,39	8,11

Завдання 2

x	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
y	4,48	5,47	6,05	7,39	8,11

$$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = 1,3 \qquad \sum_{i=0}^{4} y_i = 31,5$$

$$\sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 0,375 \qquad \cancel{\sum_{i=0}^{4} y_i = 206} \qquad \sum_{i=0}^{4} y_i x_i = 8,74$$

$$\sum_{i=0}^{4} x_i^3 = 0,118 \qquad \sum_{i=0}^{4} y_i x_i^2 = 2,66$$

$$\sum_{i=0}^{4} x_i^4 \approx 0,04$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 1,3a_1 + 0,375a_2 = 31,5 \\ 1,3a_0 + 0,375a_1 + 0,118a_2 = 8,74 \\ 0,375a_0 + 0,118a_1 + 0,04a_2 = 2,66 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 5 & 1,3 & 0,375 & 31,5 \\ 1,3 & 0,375 & 0,118 & 8,74 \\ 0,375 & 0,118 & 0,04 & 2,66 \end{array}\right| :5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,26 & 0,075 & 6,3 \\ 1,3 & 0,375 & 0,118 & 8,74 \\ 0,375 & 0,118 & 0,04 & 2,66 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1,3) \\ \cdot(-0,37) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,26 & 0,075 & 6,3 \\ 0 & 0,037 & 0,0205 & 0,55 \\ 0 & 0,0205 & 0,0119 & 0,2975 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,26 & 0,075 & 6,3 \\ 0 & 1 & 0,5541 & 14,8649 \\ 0 & 0,0205 & 0,01188 & 0,2975 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,0691 & 2,4351 \\ 0 & 1 & 0,5541 & 14,8649 \\ 0 & 0 & 1 & -13,9869 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1,4693 \\ 0 & 1 & 0 & 23,6144 \\ 0 & 0 & 1 & -13,9869 \end{array}\right)$$

$a_0 = 1,469$

$a_1 = 23,614$

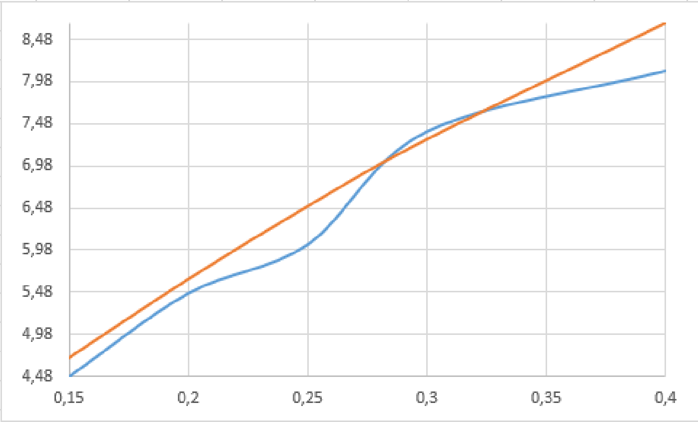
$a_3 = -13,987$

$P_2(x) = 1,469 + 23,614x - 13,987x^2$

i	0	1	2	3	4
xi	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
yi	4,48	5,47	6,05	7,39	8,11

P(x)=1,469+23,614x-13,987x^2

xi	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4
yi	4,696	5,632	6,498	7,294	8,677



Висновки: я навчився на практиці будувати інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона, а також використав метод найменших квадратів апроксимації функції.