<u>CHAP. 2</u> : Généralités sur les Processus Markoviens Cas particulier le Processus de Naissance et de Mort

Cette classe de processus aléatoire a été introduite pour la première fois en 1907 par A.A Markov. Un processus markovien se caractérise par une forme d'absence de mémoire de telle manière que son évolution future est indépendante du passé. Cette propriété remarquable simplifie considérablement l'analyse mathématique de cette classe de processus.

2.1 Les processus markoviens et leurs propriétés :

2.1.1 Définition :

Le processus stochastique {X(t) ; t ≥ 0} définie sur l'espace des états discret E est un processus de Markov (on dit encore chaîne de Markov) si :

$$P\{X(t_{n+1}) = j / X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, ..., X(t_n) = i_n\} = P\{X(t_{n+1}) = j / X(t_n) = i_n\} \quad (1)$$

$\forall\ 0 \le t_1 < t_2 < .... < t_n < t_{n+1}$; $\forall\ x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in E$

La relation (1) est connue sous le nom de propriété de Markov ; elle signifie que la distribution du processus en un instant futur ne dépend que de son état présent, et non de son évolution dans le passé (processus sans mémoire).

Supposons que le processus soit dans l'état *i* au temps *s* la probabilité que le processus évolue vers l'état *j* au temps *t (t > s)* est égale à :

$$p_{ij}(s,t) = P\{X(t) = j / X(s) = i\} \quad (2)$$

Les $p_{ij}(s,t)$ sont appelées probabilités de transition.

Les probabilités de transition caractérisent entièrement le processus markovien avec la donnée supplémentaire de la distribution de probabilité initiale :

$$p_i^0 = P\{X(t_0) = i\} \quad , i \in E$$

En effet, on a :

$$P\{X(t_0) = i, X(t_1) = i_1, ..., X(t_n) = i_n\} = p_i^0\, p_{ii_1}(t_0, t_1) p_{i_1 i_2}(t_1, t_2) ....p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1}, t_n) \quad (3)$$

Pour tous i, i_1,……..,$i_n \in$ E et pour tous $0 \le t_0 \le t_1 \le .... \le t_n$

le processus markovien est *homogène (stationnaire),* si les probabilités $p_{ij}(s,t)$ ne dépendent que de la différence t-s (t > s) :

$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) = p_{ij}(\tau, \tau + (t-s)) : \forall \tau \geq 0$ (4)

Nous nous limiterons par la suite uniquement aux chaines de Markov homogènes dans le temps. Les fonctions $p_{ij}(t)$ ainsi définies vérifient toujours les propriétés suivantes :

a) $p_{ij}(t) \geq 0$ pour $t>0$ et $i,j \in E$

b) $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$ pour $t>0$ et $i \in E$

c) On définit la matrice des probabilités de transition associée au processus de Markov
$P(t) = (p_{ij}(t))_{(i,j)\in E^2}$ (5)

d) Equation de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \quad (6)$$

preuve :

$$p_{ij}(s+t) = P[X(s+t) = j / X(0) = i] = \sum_{k \in E} P[X(s+t) = j, X(s) = k / X(0) = i]$$
$$= \sum_{k \in E} P[X(s+t) = j / X(s) = k, X(0) = i].P[X(s) = k / X(0) = i]$$
$$= \sum_{k \in E} P[X(s+t) = j / X(s) = k].P[X(s) = k / X(0) = i] = \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

Grâce à cette relation nous avons :

$$P(s+t) = P(s).P(t) \quad (7)$$

e) On impose aux probabilités $p_{ij}(t)$ la condition initiale :

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

ce qui signifie que les transitions de i vers j lorsque $i \neq j$, ne se font pas de manière instantanée, mais pendant un intervalle de temps de durée positive.

ie $P(0) = I$ la matrice identité

f) les fonctions $p_{ij}(t)$ sont continues.

g) Equations forward de Kolmogorov.
Soit *$\{X(t) ; t \geq 0\}$* une chaine de Markov homogène dans le temps et
$p_{ij}(t) = P\{X(t) = j / X(0) = i\}$

But : comment calculer les $p_{ij}(t)$ (les éléments de P(t))

dans les processus de Markov il existe deux types d'équations différentielles pour la détermination des $p_{ij}(t)$. Ce sont les équations de Kolmogorov forward (en avant) et les équations différentielles backward (en arrière). en raison de leur structure commode les équations différentielles forward sont celles qui sont couramment utilisées dans la pratique.

pour avoir les équations forward, nous procédons comme suit :

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E} p_{ik}(s)\,p_{kj}(t)$$

posons s=Δt , alors

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in E} p_{ik}(t)\,p_{kj}(\Delta t)$$

on soustrait $p_{ij}(t)$ dans les deux équations, puis on divise par Δt

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t)-p_{ij}(t)}{\Delta t}=\sum_{k\neq j}\frac{p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)}{\Delta t}+p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(\Delta t)-1}{\Delta t} \qquad (8)$$

En utilisant le développement en série de Taylor de la fonction $p_{kj}(\Delta t)$ au voisinage de 0 on a :

$$p_{kj}(\Delta t)=p_{kj}(0)+\Delta t.p'_{kj}(0)+\frac{\Delta t^2}{2!}p''_{kj}(0)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{p_{kj}(\Delta t)-p_{kj}(0)}{\Delta t}=p'_{kj}(0)+\frac{\Delta t}{2}p''_{kj}(0)+\cdots$$

En faisant $\Delta t\to 0$,on a les équations :

$$si\ \ k\neq j \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{kj}(\Delta t)}{\Delta t}=p'_{kj}(0)=\lambda_{kj} \qquad (9)$$

$$si\ \ k=j \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{jj}(\Delta t)-1}{\Delta t}=p'_{jj}(0)=-\lambda_{jj} \qquad (10)$$

ces quantités sont appelées ; taux de transition.

comme $\sum_{j\in E} p_{kj}\,(\Delta t)=1$

alors les λ_{kj} sont tels que : $\sum_{k\neq j}\lambda_{kj}=\lambda_{jj}$ avec $\lambda_{kj}\geq 0$

a partir des relations (9) et (10) on peut ecrire aussi :

$$\begin{aligned} p_{kj}(\Delta t)&=\lambda_{kj}\Delta t+o(\Delta t) \qquad (k\neq j)\\ p_{jj}(\Delta t)&=1+\lambda_{jj}\Delta t+o(\Delta t)\end{aligned} \qquad (11)$$

Les taux de transition jouent un role fondamental dans l'etude des chaines de Markov à temps continu. Si on les regroupes sous forme matricielle, on appelera $A=(\lambda_{ij})$ la matrice des taux de transition

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02}\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11} & \lambda_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -\lambda_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

<u>Exemple :</u>

- Pour le processus de Poisson de paramètre λ, les seuls taux de transitions différents de zéro sont : $\lambda_{ii+1}=\lambda$ et $\lambda_{ii}=\lambda$

- tandis que pour le processus de naissance et de mort, les seuls taux de transition différents de zéro sont : $\lambda_{ii+1} = \lambda_i$ et $\lambda_{ii-1} = \mu_i$ et $\lambda_{ii} = (\lambda_i + \mu_i)$

Donc toujours quand $\Delta t \to 0$, la relation (8) devient :

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_{jj} p_{jj}(t) + \sum_{k\neq j} \lambda_{kj}\, p_{kj}(t) \qquad (12)$$

les équations (12) sont appelées les équations de Kolmogorov forward. En utilisant la notation matricielle, on peut écrire :

P'(t)=P(t).A

avec A la matrice des taux de transition :

les probabilités de transition $p_{ij}(t)$, peuvent être déterminées en solvant ces équations différentielles avec la condition initiale P(0)=I.
Formellement, la solution pour les deux types d'équations (forward et backward) peuvent être donnée par :

$$P(t) = e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}$$

2.2 Chaînes de Markov à temps discret :

Le temps *t* est assimilé à une variable discrète à valeurs dans *T = {0, 1, 2,……}*. La chaîne représente alors une suite $\{X_n ; n \geq 0\}$ ou X_n est l'état du système à l'instant *t=n*,
La propriété de Markov (1) s'écrit :

$$P[X_{n+1} = j / X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i_n] = P[X_{n+1} = j / X_n = i_n] \qquad (15)$$

La distribution initiale est donnée par :

$$p_i^0 = P\{X_0 = i\} \quad , i \in E \qquad (16)$$

on définit les probabilités de transition en n pas par :

$$p_{ij}(m, n+m) = P\{X_{n+m} = j / X_m = i\} \qquad (17)$$

Qui est la probabilité de transition de l'état *i* à l'état *j* en *n* pas.
Si la chaîne de Markov est homogène en vertu de la relation (4) on a :

$$P_{ij}(m, m + n) = p_{ij}(n) = p_{ij}^{(n)} \qquad (18)$$

Comme précédemment dans tout ce qui suivra on se limitera aux chaînes de Markov <u>homogènes </u>dans le temps ou <u>stationnaire</u>.

$$P = P^{(1)} = (p_{ij})_{(i,j)\in E^2}$$

ou :

$$p_{ij} = P\{X_n = j / X_{n-1} = i\} \qquad (19)$$

ne dépendent pas du temps, toujours en vertu de l'homogénéité dans le temps.
La matrice des probabilités de transition *P* vérifie toujours les deux conditions suivantes :

a) $p_{ij} \geq 0 \;, \quad \forall \; (i,j) \in E^2$

b) $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1 \quad , \forall i \in E$

par récurrence, on montre que la matrice $P^{(n)}$ vérifie l'équation de *Chapman-Kolmogorov*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \qquad (20)$$

qui signifie que pour passer de l'état i à l'état j en $n+m$ pas, on passe d'abord de i à k en n pas, puis de k à j en m pas (indication, pour vérifier ce résultat utiliser la formule des probabilités totales et la propriété de Markov).

La relation (20) s'écrit sous forme matricielle :

$$P^{(m+n)} = P^{(n)}.P^{(m)} \qquad (21)$$

Remarque :

On pose $P^{(0)} = Id.$ c-a-d. $p_{jj}^{0} = 1$ et $p_{jk}^{0} = 0$ pour $j \neq k$

Par récurrence de nouveau, on vérifie que la matrice des probabilités de transition en n pas s'exprime en fonction de la matrice des probabilités de transition en 1 pas $P^{(n)} = P^n$ et la relation (21) s'écrit :

$P^{n+m} = P^n.P^m$

Exemple 1 :

On considère une suite de jets d'une pièce de monnaie avec comme probabilité de succès p (pile). A la date n (après n jets) l'état du processus (X_n) est le nombre de succès dans les n jets.

a. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov, préciser l'espace des états.
b. Déterminer la matrice des probabilités de transition.

Solution :

a. Soit i_n le nombre de succès après n jets $\Rightarrow X_n = i_n$

On considère l'état du système après $(n+1)$ jets

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si on a un succès c-a-d. pile} \\ X_n & \text{si on a un échec c-a-d. face} \end{cases}$$

$X_n \in \{0 , 1 , 2 ,\ldots\ldots\} = IN = E$ pour $n \geq 1$

$$P\left[X_{n+1} = j / X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots\ldots\ldots, X_n = i_n\right] = P\left[X_{n+1} = j / X_n = i_n\right]$$

$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n \in E$

Donc $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov.

Espace des états $E = IN$

Espace des indices $T = \{1, 2, \ldots.\} = IN^*$

Les probabilités de transition : à partir de l'état i, les seules transitions possibles sont :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\text{succès}"] \arrow[d, "\text{échec}"] & i+1 \\ i & \end{tikzcd}$$

$$P\,[X_{n+1} = j / X_n = i] = \begin{cases} p & \text{si } j = j+1 \\ q & si\ j = i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$P\,\{X_{n+1} = j / X_n = i\} = p_{ij}$ ne dépendent pas de n donc la chaîne est stationnaire ou homogène dans le temps.

La matrice des probabilités de transition :

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & q & p & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & q & p & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & q & p \\ . & . & . & . & . & . & p \end{pmatrix}$$

2.2.1 loi de probabilité de X_n :

Soit $\{X_n \,;\, n \in IN\}$ une chaîne de Markov avec l'espace des états $E = \{1, 2, \ldots, k, ..\}$

On définit les probabilités d'états à la date n par :

$q_k(n) = P\,[X_n = k] \qquad n \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots\ldots$

Le vecteur des probabilités d'états à la date n est :

$Q(n) = (q_1(n), q_2(n), \ldots\ldots\ q_k(n), \ldots\ldots)$

Considérons la composante $q_j(n)$ du vecteur $Q(n)$ (j-ieme composante de $Q(n)$) :

$$q_j(n) = P[X_n = j] = \sum_{k \in E} P[X_n = j, X_{n-1} = k] = \sum_{k \in E} P[X_n = j / X_{n-1} = k] \cdot P[X_{n-1} = k]$$

$$= \sum_{k \in E} q_k(n-1) \cdot p_{ij}$$

C'est la j^{-ieme} composante du vecteur $Q\,(n\text{-}1).P$

Donc $Q(n) = Q\,(n\text{-}1).P$ (22)

De la relation (22) on obtient :

$Q(n) = Q\,(0).P^n$ (23)

ou $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \ldots\ldots\ldots) = (P[X_0 = 1], P[X_0 = 2], \ldots\ldots\ldots)$

est le vecteur des probabilités d'états initial.

En effet :

$Q(n) = Q(n-1) \cdot P = Q(n-2) \cdot P \cdot P = Q(n-2) \cdot P^2 = \ldots\ldots$ect

On retrouve la formule (23).

2.2.2 Graphe associé à une chaîne de Markov:

a une chaîne de Markov homogène dont l'ensemble des états est E et la matrice des probabilités de transition P, nous associons un graphe simple orienté G dont l'ensemble des sommets est l'espace des états E.

On note $G = (E, U)$ ou

U = l'ensemble des arcs (i,j) avec :

$(i\,, j) \in U \equiv P_{ij} > 0$ ($i \xrightarrow{P_{ij}} j$)

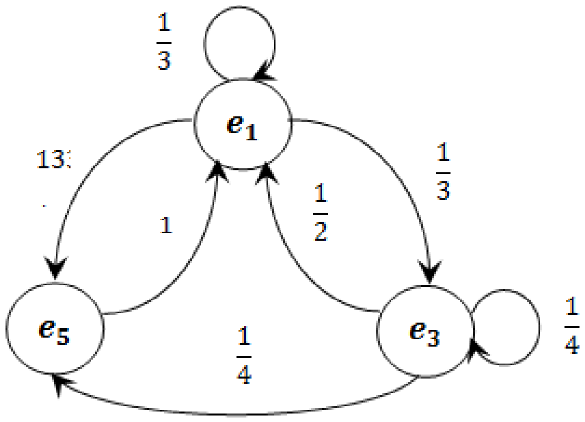
$(j\,, i) \in U \equiv P_{ji} > 0$ ($i \xleftarrow[P_{ji}]{} j$)

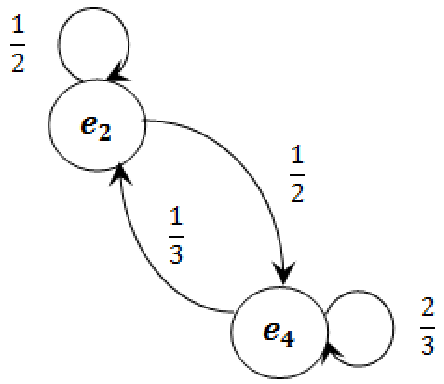
Exemple :

Soit une chaine de Markov avec l'espace des états $E = \{e_1 ,\ e_2 ,\ e_3 , e_4 ,\ e_5\}$ et dont la matrice des probabilités de transitions est :

$$
P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}
$$

Le graphe associé à cette matrice est :





Les questions essentielles qui se posent pour l'étude des chaines de Markov sont les suivantes :

a) Conditions d'existence des limites $q_j^* = \lim\limits_{n\to\infty} P[X_n = j] = \lim\limits_{n\to\infty} q_j(n)$, $\forall j \in E$

b) Conditions pour lesquelles $\{q_j^*\}$ forment une distribution de probabilité.

Avant de répondre à ces questions, nous allons procéder à une classification des états de la chaine de Markov $\{X_n\}$

2.3. Classification des classes d'une chaine de Markov :

2.3.1 Définition : *un état j est dit être accessible à partir de l'état i, s'il existe n≥0 tq* $p_{ij}^{n} > 0$ *et on note* $i \rightarrow j$

2.3.2 Définition : *deux états i et j sont dit être communiquant si* $i \rightarrow j$ *et* $j \rightarrow i$ *et on note* $i \leftrightarrow j$
2.3.3 Proposition : *dans E, la relation R définie sur E par :* $i \, R \, j \Leftrightarrow i \leftrightarrow j$ *et une relation d'équivalence.*
On peut partitionner *E* en classes communicantes à l'aide de *R* pour obtenir *E/R*
Remarque :
On peut passer d'une classe à une autre, mais on ne peut jamais revenir à une autre classe.
2.3.4 Définition : *une chaine de Markov réduite à une seule classe d'équivalence est dite irréductible. Dans ce cas tous les états de la chaine communiquent.*
2.3.5 Périodicité :
2.3.5.1 Définition : o*n appelle période de l'état i et on note d(i), le pgcd s'il existe de tous les entiers* $n \geq 1$*, satisfaisant* $p_{ii}^{n} > 0$ *ie :*
$d(i) = pgcd\{ n \geq 1 \; ; \; p_{ii}^{n} > 0 \}$
si $p_{ii}^{n} = 0, \forall \, n \geq 1$, alors on pose $d(i) = 0$, et on dit que la période n'existe pas
2.3.5.2 Théorème :
Si $i \leftrightarrow j$ *alors* $d(i) = d(j)$
2.3.5.3 Corollaire : *tous les états d'une même classe d'équivalence ont la même période.*
Si $d(i) = 1$, alors l'état *i* (classe contenant *i*) est apériodique.
Conséquence :

1. Si *n* est différent d'un multiple de *d(i)* alors $p_{ii}^{n} = 0$
2. Le retour à l'état i ne peut se produire qu'au bout d'un nombre de transitions multiples de *d(i)*
3. Si $p_{ii} > 0$ alors $d(i) = 1$, l'état i est apériodique

2.3.6 Graphe réduit :
La relation *R* est une relation d'équivalence. Ce concept permet de réaliser un partition de *E* en classes disjointes : $E' = E/R = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$.
$E = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \; ; \; C_i \cap C_j = \Phi, \; i \pm j$
telle que tous les états d'une même classe communiquent entre eux et que les états appartenant à deux classes différentes ne communiquent jamais.
2.3.6.1 Définition : on appelle graphe réduit de $G=(E,U)$, le graphe $G'=(E',U')$ ou $E' = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$ est l'ensemble des classes et *U'* l'ensemble des arcs.
On definit $(C_k,C_l) \in U' \Leftrightarrow$ il existe un sommet *i* de *G* appartenant à la classe C_k et un sommet *j* de *G* appartenant à la classe C_l tq $(i,j) \in U$.

Si $(C_k,C_l) \in U'$ on note $C_k \longrightarrow C_l$

2.3.7 Classification des classes d'une chaine de Markov :

On peut passer d'une classe à une autre, mais on ne peut jamais revenir à une autre classe. Il est alors possible de distinguer deux types de classes, les classes récurrentes et les classes transitoires.

2.3.7.1 Définition : *Une classe est dite récurrente s'il est impossible de la quitter.*

2.3.7.2 Définition : *Une classe qui n'est pas récurrente est dite transitoire.*

Dans une classe transitoire il est bien sur possible d'en sortir, bien sur sans jamais y retourner.

2.3.3 Théorème :
Les états d'une chaîne de Markov appartenant à une classe récurrente sont des états récurrents. Les états d'une classe transitoire sont des états transitoires.

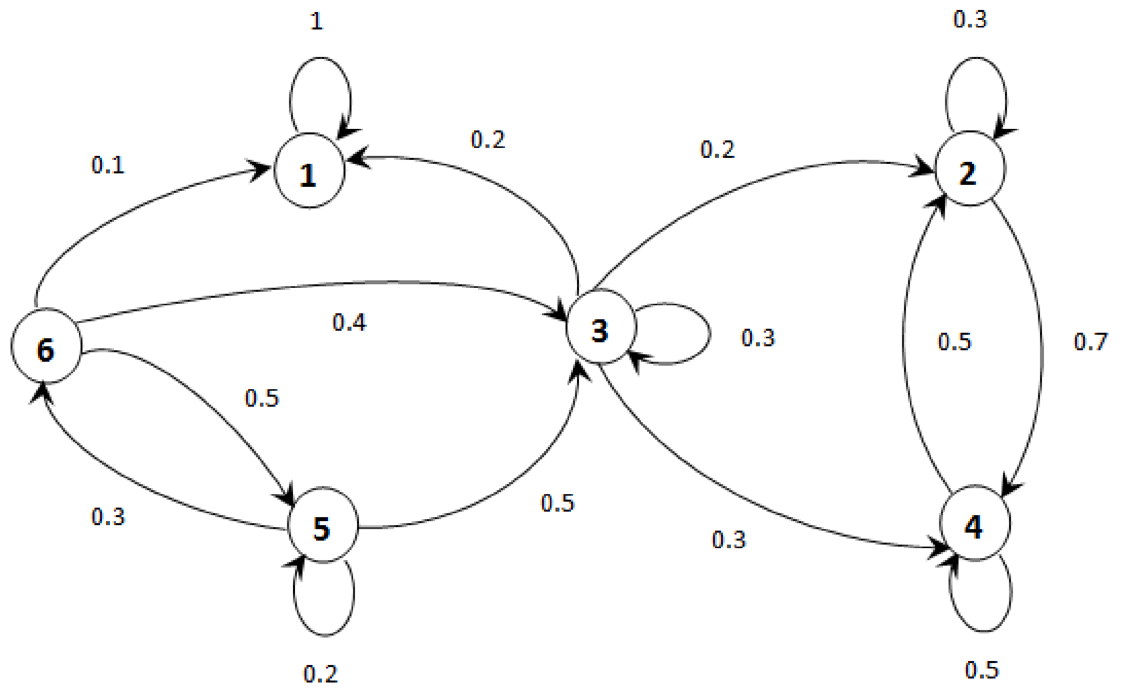
Exemple :
Soit une chaîne de Markov dont la matrice des probabilités de transition est ;

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

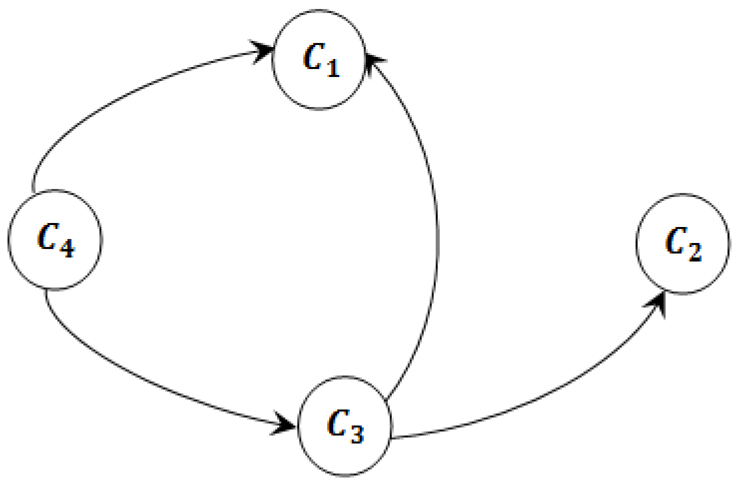
E= {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

1. Tracer le graphe associé à la chaîne de Markov.
2. Déterminer les différentes classes.
3. Tracer le graphe réduit.
4. Classer les classes et calculer les périodes.

Solution :
Graphe associé :



On distingue 4 classes $C_1= \{1\}$; $C_2= \{2 ; 4\}$; $C_3= \{3\}$; $C_4= \{5 ; 6\}$
Le graphe réduit :



Les classes C_1 et C_2 sont récurrentes, les classes C_3 et C_4 sont transitoires.

$d(1)=1$
$d(2)= PGCD\,\{1 ; 2 ; 3 ;\ldots.\} = 1 = d(4)$
$d(3)= 1$
$d(5)= PGCD\,\{1 ; 2 ; ..\} = 1 = d(6)$
$d(6)= PGCD\,\{2 ; 3 ; \ldots\} = 1$

2.4 Classification probabiliste des états d'une chaine de Markov :

2.4.1 Temps de premier passage à un état :

Notons T_{ij} la variable aléatoire définie par :

$$T_{ij} = Min\{k\geq 1 : [X_k = j / X_0 = i]\} \qquad (24)$$

T_{ij} : est le temps de premier passage en j partant de i (ce temps est évalué en nombre de transitions).
$\{T_{ij} = n\} = \{X_n = j \,;\, X_{n-1} \neq j \,;\, X_{n-2} \neq j \,;\, \ldots\ldots \,;\, X_1 \neq j \,/\, X_0 = i\}$
On définit de même pour $n \geq 1$: $f_{ij}(n) = P\{T_{ij} = n\}$ (25)
$f_{ij}(n) = P\{ X_n = j \,;\, X_{n-1} \neq j \,;\, X_{n-2} \neq j \,;\, \ldots\ldots \,;\, X_1 \neq j \,/\, X_0 = i\}$ (26)
$f_{ij}(n)$: est la probabilité pour que le systématisant initialement dans l'état i, soit pour la première fois dans l'état j au bout de n transitions.

Notons $F_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$ (27)

F_{ij} = représente la probabilité pour que le système, partant de l'état i, atteigne j.
$F_{ij} > 0 \Leftrightarrow$ il existe un chemin possible de i à j
F_{ii} = probabilité pour que le système partant de i, repasse par i.

2.4.2 Temps moyen de premier retour à un état :

On définit le temps moyen de premier retour à l'état i :

$$\mu_i = E(T_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) \tag{28}$$

2.4.3 Différenciation des états :

On définit la nature d'un état i d'une chaîne de Markov par les propriétés suivantes :

a. En partant de i, on est sur (ou non) que le système repassera par i.
b. Le temps moyen de premier retour à l'état i est fini (ou non).

2.4.3.1 Etats récurrent (ou persistant) :

Définition : *Un état i est récurrent si* $F_{ii} = 1$
Le système partant de l'état i, repassera sûrement par i au cours de son évolution.

On distingue deux types d'états récurrents :

a. Les états récurrents non nuls (ou positif) tq : $\mu_i = E(T_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) < +\infty$

Partant de i, le système repassera par l'état i au bout d'un temps fini.

b. Les états récurrents nuls sont tell que : $\mu_i = E(T_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) = +\infty$

2.4.3.2 Etats transitoires :

Définition : *un état i est dit transitoire si* $F_{ii} < 1$
Le système, partant de i, peut ne pas repasser par i.

2.5 Distribution stationnaire :

2.5.1 Définition *: Une distribution de probabilité* $Q = (q_1, q_2, \ldots..)$ *est appelée stationnaire par rapport à une matrice des probabilités de transition P si QP = Q (i.e. : si Q est un vecteur propre à gauche de P associé à la valeur propre 1).*

Pour calculer les composantes d'une vectrice ligne stationnaire $Q = (q_1, q_2, \ldots..)$ d'une chaîne de Markov, on résout le système d'équations linéaires formé de : $QP = P$ et de la condition de normalisation : $\sum_{k \geq 1} q_k = 1$

Exemple :

Considérons une chaîne de Markov de matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad E = \{1 ; 2 ; 3\}$$

On résout le système d'équations linéaires : $QP = P$

$q_1 = 0q_1 + 1/4\, q_2 + 1/4\, q_3$

$q_2 = 3/4\, q_1 + 0q_2 + 1/4\, q_3$

$q_3 = 1/4\, q_1 + 3/4\, q_2 + 1/2\, q_3$

Avec la condition de normalisation : $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

La solution est :

$q_1 = 1/5 = 0.20$; $q_2 = 7/25 = 0.28$; $q_3 = 13/25 = 0.52$

La distribution stationnaire est $Q = (0.20, 0.28, 0.52)$

2.5.2 Définition *: Une chaîne de Markov est dite stationnaire si Q(0) est une distribution stationnaire.*

Dans ce cas $Q(n) = Q(0), \ \forall n \geq 1$

En effet $Q(1) = Q(0)\, P = Q(0)$

$Q(2) = Q(1)\, P = Q(0)\, P = Q(0)$

………………………………

$Q(n) = Q(0)$

Exemple :

Considérons la chaîne de Markov de l'exemple précédant avec

$Q(0) = (0.20, 0.28, 0.52)$

2.6 Comportement asymptotique d'une chaîne de Markov :

Soit $\{X_n ; n \geq 1\}$ une chaîne de Markov avec l'espace des états $E = \{1 ; 2 ; \ldots..\}$ et de matrice des probabilités de transition P.

2.6.1 Définition *: On appelle distribution limite, la distribution* $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots\ldots)$ *si elle existe définie par :* $q_j^* = \lim_{n \to \infty} P[X_n = j] = \lim_{n \to \infty} q_j(n) \quad , \ \forall j \in E$

Le vecteur $Q^* = \lim_{n \to \infty} Q(n)$ *est appelé distribution limite.*

2.6.2 Théorème de solidarité : *Les états d'une chaîne de Markov irréductible ont en commun les propriétés suivantes :*

- *soit ils sont tous récurrents positifs*
- *soit ils sont tous récurrent nuls*
- *soit ils sont tous transitoires.*

Si un état est apériodique, tous les autres états sont apériodiques et la chaîne est dite apériodique.

2.6.3 Théorème : *Soit* $\{X_n ; n \geq 1\}$ *une chaîne de Markov homogène, irréductible et apériodique, alors les* $q_j^* = \lim_{n \to \infty} P[X_n = j] = \lim_{n \to \infty} q_j(n) \quad , \ \forall j \in E$ *existent toujours et sont indépendantes de l'état initial, de plus on a l'un ou l'autre des cas suivants :*

a) Tous les états sont transitoires ou récurrents nuls, dans ce cas $q_j^* = 0$, $\forall j \in E$ *et la distribution stationnaire n'existe pas.*

b) Tous les états sont récurrents non nuls, dans ce cas $q_j^* > 0$, $\forall j \in E$

et le vecteur $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots\ldots)$ *es tel que :* $q_j^* = \dfrac{1}{\mu_j}$

Dans ce cas la distribution stationnaire coïncide avec la distribution limite Q^* *et peut être déterminée à partir du système d'équations linéaires :*

$$Q^* P = Q^* \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 1} q_j^* = 1$$

2.6.4 Corollaire : *Si* $\lim_{n \to \infty} Q(n) = Q^*$ avec $q^* > 0$, $\forall j \in E$ alors :

$\lim_{n \to \infty} P^n = P^*$ *, ou* P^* *est la matrice stochastique dont toutes les lignes sont identiques à* Q^**.*

$$P^* = \begin{pmatrix} q_1^* & q_2^* & q_3^* & \ldots. & q_j^* & \ldots. \\ q_1^* & q_2^* & q_3^* & \ldots. & q_j^* & \ldots. \\ .. & .. & .. & \ldots. & .. & \ldots. \\ q_1^* & q_2^* & q_3^* & \ldots. & q_j^* & \ldots. \end{pmatrix}$$

Remarque :

Les probabilités d'états $q_j(n) = P\,[X_n = j]$ définissent le régime transitoire de la chaîne de Markov. D'après la formule (23) du paragraphe (2.2.1), il est évident que la distribution de X_n (c.-à-d. $Q(n)$) varie généralement en fonction du temps et elle dépend de la distribution initiale $Q(0)$.

Si la distribution $Q(n)$ converge vers une distribution limite $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots\ldots)$ quand $n \to +\infty$, deux cas peuvent se présenter :

a) Si $q_j^* > 0$, $\forall j \in E$ dans ce cas on dit que la distribution limite Q^* définit le régime permanent de la chaîne de Markov. Contrairement au régime transitoire, le régime permanent est indépendant du choix de la distribution initiale.

b) Si $q_j^* = 0$, $\forall j \in E$ dans ce cas on dit que le régime permanent n'existe pas.