# Rappels de quelques résultats en calcul des probabilités

## 1) Généralités :

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ou :

a) $\Omega$ est un ensemble qui décrit l'espace des réalisations possibles d'une expérience aléatoire.

b) $\mathcal{A}$ est une tribu de sous-ensembles de $\Omega$, c.a.d telle que :

1. $\Phi$ et $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. si $A \in \mathcal{A}$ alors $\overline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}$
3. si $A_1, A_2, \ldots\ldots \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{k\geq 1} \mathbf{A_k} \in \mathcal{A}$

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements (aléatoires). En particulier $\Phi$ désigne l'événement dit impossible et $\Omega$ l'événement dit certain.

c) $P( . )$ est une application de $\mathcal{A} \to [0\ ,\ 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $P(\Omega)=1$
2. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{\mathbf{k}\geq 1} \mathbf{A_k}\right) = \sum_{\mathbf{k}\geq 1} \mathbf{P(A_k)}$ pour toute suite $(\mathbf{A_k})_{\mathbf{k}\geq 1}$ dans $\mathcal{A}$ avec $A_i \cap A_j = \Phi$ si $i \neq j$.

## 2) Variables aléatoires :

Définition : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire X est une fonction de $\Omega \to IR$ telle que, pour tout scalaire $a \in IR$, l'ensemble $[X \leq a] = X^{-1}(]-\infty\ ,\ a]) = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$. c.a.d $\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leq a\}$ est un événement c.a.d un élément de la tribu $\mathcal{A}$ .

- Si $X(\Omega)=\{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ on dit que X est une variable aléatoire discrète finie.
- Si $X(\Omega)=\{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n, \ldots.\}$ on dit que X est une variable aléatoire discrète (v.a.d)
- Si $X(\Omega)=(a,b)$ (éventuellement $a=-\infty$, $b=+\infty$) on dit que X est une v.a continue.

## 3) Loi de probabilité d'une v.a discrète :

$X(\Omega)=\{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n, \ldots.\}$

$[X=x]=X^{-1}(\{x\})=\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega)=a\}$

Pour déterminer la loi de X, il suffit de calculer :$P[X=x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

### 3.1) Espérance mathématique d'une v.a discrète (moyenne) :

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P[X = x_i]$$

#### 3.1.1) Propriétés :

1. Si X est une v.a constante égale à $\lambda$ alors $E(X)= \lambda$
2. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ et $E(\lambda.X)=\lambda E(X)$ ($\lambda$ constante).
3. Soit f une application de $IR \to IR$, si $f(X)=f\circ X$ est une v.a.d :
   $$E[f(X)] = \sum_{x_i \in X(\Omega)} f(x_i) P[X = x_i]$$
4. Le moment d'ordre k ($k\geq 1$) :
   $$E[X^k] = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k P[X = x_i]$$

### 3.2) Variance d'une v.a discrète :

$$V(X) = E[(X-E(X))^2]=E(X^2) - (E(X))^2$$

#### 3.2.1) Propriétés :

1. Si X est une v.a constante égale à $\lambda$ alors $V(X)=V(\lambda)=0$
2. $V(\lambda X)= \lambda^2 V(X)$ ($\lambda$ constante)
3. Si X et Y sont deux v.a indépendantes : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

## 4) Exemples de v.a discrètes :

1. Variable aléatoire de Bernoulli :
Soit une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles.
On note e= échec ; s= sucée
$\Omega=\{e,s\}$ avec $P(s)=p$ et $P(e)=1-p=q$, $(0<p<1)$
$X : \Omega \to \{0,1\}$
$X(e)=0$ et $X(s)=1$
X v.a de Bernoulli, $X \to B(p)$
Loi de X : $P[X=0]=q$ ; $P[X=1]=p$

$E(X)=p$ ; $V(X)=pq$

2. Loi Binomiale B(n,p) :
Il s'agit de la répétition de n épreuves indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètres p.
$\Omega = \{e , s\}^n$
$X : \Omega \to \{0 , 1 , 2 , \ldots\ldots., n\}$
$\omega \to X(\omega)$ = nombre de succès dans les épreuves.
X suit une loi Binomiale de paramètres n et p et on note : $X \to B(n,p)$
Loi de X :
$P[X=k]= C_n^k p^k q^{n-k}$ $\quad k \in \{0 , 1 , 2 , \ldots., n\}$

L'espérance et la variance sont :
$E(X) = np$ et $V(X) = npq$

3. Variable aléatoire de Poisson :
Une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda$ ($\lambda>0$), est une v.a.d à valeurs dans IN ($X(\Omega)$=IN) avec la loi de probabilité :

$$P[X = k] = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} \quad , \quad k \in IN$$

on note $X \to P(\lambda)$

$E(X)=V(X)= \lambda$

## 5) Variables aléatoires continues :

$X(\Omega)=(a,b)$
$F(x)=P[X\le x]$ est appelée fonction de répartition de X.
S'il existe $f \ge 0$ tq $F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ alors X est dite absolument continue de densité f(.).
Si X est absolument continue : $\forall \lambda \in IR$, $P[X=\lambda]=0$.

**Remarque :**
Par la suite, on dira que X est continue.

### 5.1) Moment d'ordre m de X :

$E(X^m) = \int_{IR} x^m f(x)dx$

Si m=1, $E(X)= \int_{IR} \mathbf{x\ f(x)dx}$ c'est la moyenne ou l'espérance de X.

### 5.2) Le moment centré d'ordre m de X :

C'est le nombre : $E[(X-E(X))^m]$
Si m=2, $E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$ on retrouve la variance de X.

**Remarque :**
Les propriétés vues dans les parties (3.1.1) et (3.2.1) sont valables dans le cas continu.

**5.3) Exemples de v.a continues :**:

1. Loi uniforme :

On dit que la v.a X suit une loi uniforme sur [a, b] et on note $X \to U[a\ ,\ b]$ si sa fonction densité est

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{b - a}} & \mathbf{si\ \ x \in [a\ ,b]} \\ \mathbf{0} & \mathbf{sinon} \end{cases}$$

L'espérance et la variance sont :

$E(X)= \dfrac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{2}}$ et $V(X)= \dfrac{\mathbf{(b - a)^2}}{\mathbf{12}}$

2. Loi normale :

On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$ et on note $X \to N(\mu\ ,\ \sigma\ )$ si sa fonction densité est

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{\mathbf{2}\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ,\quad x \in IR$$

$E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

3. Loi exponentielle :

Une v.a X de f.d.r F définie par :

$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ $\forall t \geq 0$ , $(\lambda>0)$

s'appelle v.a exponentielle de paramètre $\lambda$ la densité est :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ ; $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

**4)Théorème des probabilités totales :**

*soit $\{B_1,B_2,\ldots\ldots\}$ une partition de l'ensemble fondamental $\Omega$, alors :*

$$P(A) = \sum_k P(A/B_k)\cdot P(B_k)$$

Si la partition $\{B_1,B_2,\ldots\ldots\}$ est engendré par une variable aléatoire discrète Y on a :

$$P(A) = \sum_k P(A/Y = y_k)\cdot P(Y = y_k)$$

Dans le cas ou la v.a Y est continu de densité *f(y)*, on a :

$$P(A) = \int P(A/Y = y)\cdot f(y)dy$$

Cette version est appelée version continue du théorème des probabilités totales.

**5) Théorème de multiplication :**

*Si les événements $A_1,A_2,\ldots\ldots,A_n$ sont de probabilités non nulle, on a :*

$P(A_1\cap A_2\cap \quad \cap A_n)= P(A_1/A_2\cap \quad \cap A_n)\times \ P(A_2/A_3\cap \quad \cap A_n)\ )\times\ldots \times P(A_{n-1}/A_n)P(A_n)$

*D'autre part, si A,B et C sont de probabilités non nulle, on a :*

$P(A\cap B/C)= P(A/B\cap C) \times P(B/C)$

**6)Espérance mathématique conditionnelle :**

Soit $\{B_1,B_2,\ldots\ldots\}$ une partition de $\Omega$ et X une variable aléatoire discrète de distribution :

$P_n=P[X=x_n]$. alors :

$$p_n = \sum_k P[X = x_n / B_k]\cdot P(B_k)$$

Si d'autre part X est continue de densité f(x), on obtient :

$$f(x) = \sum_k f(x/B_k)\cdot P(B_k)$$

ou $f(x/B_k)$ est la densité conditionnelle de X sachant que l'événement $B_k$ s'est réalisé.
Pour calculer l'espérance mathématique de X, on a :

$$E(X) = \sum_k E(X/B_k) \cdot P(B_k)$$

ou $E(X/B_k)$ est l'espérance mathématique conditionnelle de X sachant que $B_k$ s'est produit, elle est définie par :

$$E(X/B_k) = \begin{cases} \sum_k x_n P[X = x_n / B_k] & \text{si X est discréte} \\ \int xf(x/B_k)dx & \text{si X est continue} \end{cases}$$

**6) Quelques propriétés de la loi exponentielle :**
La loi exponentielle est très employée dans les problèmes de fiabilité, les files d'attente, elle est aussi connue sous le nom de v.a sans mémoire (ou de Markov).

**Définition :**
*Une v.a X est dite sans mémoire si elle vérifie : $P[X>t+s/X>t]=P[X>s]$ pour tout $t, s >0$*
*(ou encore $P[X>t+s] = P[X>t]\times P[X>s]$ )*

La v.a $T \to Exp(\lambda)$ est sans mémoire, en effet, pour s , t >0, on a :

$$\mathbf{P[T > s + t/T > t] = \frac{P[T > s + t, T > t]}{P[T > t]}}$$

$$\mathbf{= \frac{P[T > s + t]}{P[T > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[T > s]}$$

**Remarque:**
La loi exponentielle est la seule loi continue qui possède cette propriété.

**Proposition :**
*Soient $T_1, T_2,\ldots\ldots,T_n$ des v.a indépendantes et identiquement distribuées selon des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$. Alors $T=\min(T_1, T_2,\ldots\ldots,T_n)$suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$*

Preuve : Exercice.

**8) Loi Gamma :**
La loi gamma est généralisation de la loi exponentielle. Supposons $T_1, T_2,\ldots, T_n$ sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à la même loi exponentielle de paramètre $\lambda$. La somme $S_n= T_1+T_2+\ldots+T_n$ est distribuée suivant une loi gamma de paramètres $\lambda$ et n, cette distribution est également connue sous le nom loi d'Erlang d'ordre n. la densité de probabilité correspondante s'écrit :

$$f_{\lambda,n}(t) = \lambda \cdot (\lambda \cdot t)^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \quad (t \geq 0)$$

**9) Fonctions génératrices :**
Soit X une variable aléatoire à valeurs entières non négatives. La fonction génératrice de X est définie par :

$$\mathbf{G(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k} \quad \text{ou } p_k=P[X=k] \ (k\geq 0)$$

et ou z est une variable complexe. La fonction G(z) est définie au moins pour $|z| \leq 1$ et on a :
$G(0)=p_0$ et $G(1)=1$

**9.1) Propriétés des fonctions génératrices :**
1. la loi de probabilité $p_n$ ($n\geq 0$) est caractérisée de façon unique par la fonction génératrice associée G(z) et l'on a :

$$p_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{ou } G^{(k)}(0) = \left[\frac{d^k G(z)}{dz^k}\right]_{z=0} \quad (k \geq 0)$$

2. $E(X)= G'(1)$ et $E(X^2)=G''(1)+ G'(1)$

3. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières non négatives. La fonction génératrice de X+Y est le produit des fonctions génératrices de X et de Y :
   $G_{X+Y}(z)=G_X(z)\times G_Y(z)$
4. X et Y ont la même loi $\Leftrightarrow G_X(.) = G_Y(.)$

**10) Transformée de Laplace :**

lorsque la variable aléatoire positive X est continue, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité f(x)

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{L[f(x)](s)} = \mathbf{E[e^{-sX}]} = \int_0^\infty \mathbf{f(x)e^{-sx}dx}$$

ou s est une variable complexe.

**10.1) Propriétés :**

1) Si X et Y sont indépendantes, la transformée de X+Y est le produit des transformées de X et de Y.
2) $L[f'(x)](s) = L[f(x)](s) - f(0)$.
3) $L[f''(x)](s) = s^2L[f(x)](s) - sf(0)\text{-}f'(0)$
4) $$\mathbf{L}\left[\int_0^x \mathbf{f(u)du}\right]\mathbf{(s)} = \frac{\bar{\mathbf{f}}\mathbf{(s)}}{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{L[f(x)](s)}}{\mathbf{s}}$$

**11) La fonction o(h) :**

o(h) est une fonction de h, définie dans un intervalle autour de l'origine et telle que $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

ce qui signifie que pour $h\to 0$, la fonction o(h) sera négligeable par rapport à h.

Exemples :

$h^3 - h = o(h)$

$1 - \cos h = o(h)$

mais $\sin h \neq o(h)$ car $\frac{\sin h}{h} \to 1$ quand $h\to 0$.