TD Processus de Naissance et de Mort

<u>Exercice n°1 :</u> PREVISION DU NOMBRE DE SALLES DE TRAVAIL DANS UNE MATERNITE

Une importante maternité accueille des femmes enceintes qui sont arrivées à termes et viennent accoucher. En moyenne, quatre femmes arrivent par jour à la maternité pour donner naissance à leur bébé. L'occupation moyenne d'une salle de travail est de six heures pour un accouchement. On décrit le système par le nombre de salles occupées.

Un statisticien a déterminé que la loi d'arrivée des futures mamans peut être approximée, de façon satisfaisante, par un processus de Poisson de taux λ et la durée d'occupation d'une salle de travail par une loi exponentielle de taux μ.

Le but est de déterminer le nombre N de salles de travail (et par conséquent, le nombre minimal de sages-femmes devant se trouver dans la maternité),de telle sorte que la probabilité pour que toutes les salles soient occupées soit inférieure à un centième :Une femme qui arriverait dans ce cas serait dirigée d'urgence vers une autre maternité, ce que l'on désire éviter à l'extrême.

1. **Donner la valeur numérique de λ et μ.**

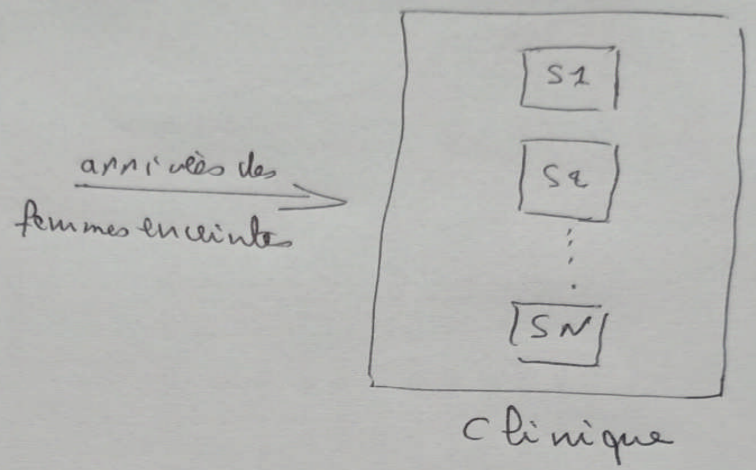
2. **Montrer que le système peut être décrit par un processus de naissance et de mort comportant N+1 états, numérotes de 0 à N. Préciser l'espace des états . Exprimer λ_k en fonction de λ et μ_k en fonction de μ Tracer le graphe associer et évaluer les arcs par les probabilités de transition.**

3. **Montrer que les conditions pour que s'établisse un régime permanent sont vérifiées et calculer les probabilités limites d'états p_n correspondantes.**

4. **Quel est l'état pour lequel toutes les salles sont occupées ? Quelle est sa probabilité ? En prenant successivement N=2, puis 3, puis 4, etc., trouver le nombre de salles de travail que devra comporter la clinique, de sorte que la probabilité pour qu'elles soient toutes occupées soit inférieure à 10^{-2}.**

Solution de l'ex n° 1 :

1)



Durée d'occupation moyenne d'une salle = 6^h.

taux d'arrivées $\lambda = 4$ arr / J

Les futurs maman arrivent selon un $PP(\lambda)$

D_i = durée d'occupation de la salle i ; $i = \overline{1, N}$

$D_1, D_2, \ldots, D_N$ iid $\sim Exp(\mu)$

$E(D_1) = E(D_2) = \ldots = E(D_N) = \frac{1}{\mu} = 6^h \Rightarrow \mu = 1 \text{ acc}/6^h = 4 \text{ acc}/J$

μ = taux de service

Le but est de trouver N le nbre de salles tq $P[N \text{ salles occupées}] < 0.01$

2)

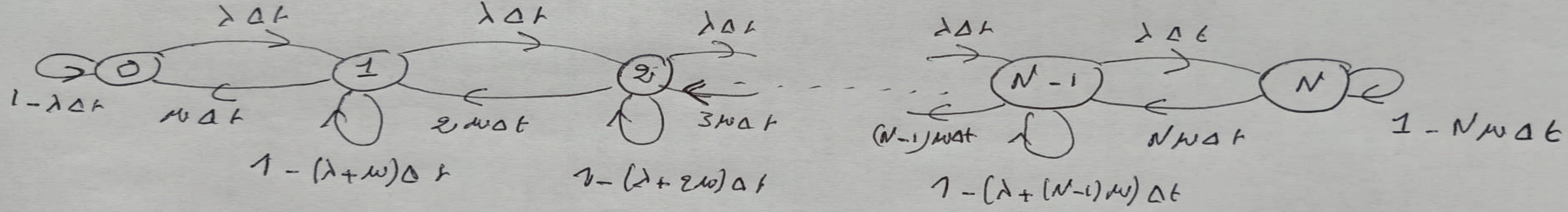
Le système (clinique) est décrit par :

$X(t)$ = nbre de salles occupées à la date t

$\forall t \geq 0$; $X(t) \in \{0, 1, 2, \dots, N\} = E$ espace des états

Questions : $\{X(t), t \geq 0\}$ est un PNM ?

Graphe associé entre les états pendant Δt



$P_{00}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 0 / X(t) = 0\} = P\{0 \text{ arrivée pendant } \Delta t\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$P_{01}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 1 / X(t) = 0\} = P\{1 \text{ arrivée pendant } \Delta t\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$P_{02}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 2 / X(t) = 0\} = P\{2 \text{ arrivées pendant } \Delta t\} = o(\Delta t)$

idem : $P_{0i}(\Delta t) = o(\Delta t)$ pour $i = 3, \dots, N$

$P_{10}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 0 / X(t) = 1\} = P\{$1 accouchement se termine et 0 arrivées à $t+\Delta t / X(t)=1\}$

$= P\{$1 accouchement se termine à $t+\Delta t / X(t)=1\} \times P\{$0 arrivées à $t+\Delta t / X(t)=1\}$

$= P\{D_1 < t+\Delta t / D_1 > t\} \times (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))$

$= P\{D_1 < \Delta t\} \times (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) = (\mu \Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))$

$= \mu \Delta t + o(\Delta t)$

$P_{12}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 2 / X(t) = 1\} = P\{$1 arrivée et aucun accouchement à $t+\Delta t / X(t)=1\}$

$= P\{$1 arrivée à $t+\Delta t / X(t)=1\} \times P\{$aucun accouchement à $t+\Delta t / X(t)=1\}$

$= (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) P\{D_1 > t+\Delta t / D_1 > t\} = (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) P\{D_1 > \Delta t\}$

$= (\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$$P_{11}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 1 / X(t) = 1\}$$

$= P\{$ aucune arrivée et aucun accouchement à $t+\Delta t / X(t) = 1\}$ +

$P\{$ 1 arrivée et 1 accouchement à $t+\Delta t / X(t) = 1\}$

$$= (1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + (\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$$

$$= 1 - (\lambda+\mu)\Delta t + o(\Delta t)$$

aussi on a

$P_{13}(\Delta t) = P_{14}(\Delta t) = \dots = o(\Delta t)$ car on ne peut pas avoir 2 arrivées ou plus pendant Δt

Maintenant supposons à la date t, 2 salles sont occupées c.a.d $X(t) = 2$ i.e 2 accouchements sont en cours, on appele D_1 et D_2 les durées d'accouchement dans ces 2 salles

$P_{20}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 0 / X(t) = 2\} = P\{$ les 2 accouchements se terminent à $t+\Delta t / X(t) = 2\} \times P\{0$ arrivée $\Delta t\}$

$= P\{D_1 < t+\Delta t / D_1 > t\} \times P\{D_2 < t+\Delta t / D_2 > t\} \times P\{0$ arrivées pendant $\Delta t\}$

$$= P\{D_1 < \Delta t\} \times P\{D_2 < \Delta t\} \times (1-\lambda\Delta t)$$

$$= (\mu\Delta t) \times (\mu\Delta t) \times (1-\lambda\Delta t) = o(\Delta t)$$

- $P_{21}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 1 \,/\, X(t) = 2\}$

$= P\{$ 1 accouchement et aucune arrivée à $t+\Delta t \,/\, X(t) = 2\}$

$= P\{$ 1 accouchement à $t+\Delta t \,/\, X(t) = 2\} \times P\{$ aucune arrivée à $t+\Delta t \,/\, X(t) = 2\}$

$= P\{\mathrm{Min}(D_1, D_2) < t+\Delta t \,/\, \mathrm{Min}(D_1, D_2) > t\} \times P\{$ 0 arrivée pendant $\Delta t\}$

$= P\{\mathrm{Min}(D_1, D_2) < \Delta t\} \times (1 - \lambda \Delta t)$

$= 2\mu \Delta t\,(1 - \lambda \Delta t) = 2\mu \Delta t + o(\Delta t)$

- $P_{23}(\Delta t) = P\{$ 1 arrivée et aucun accouchement à $t+\Delta t \,/\, X(t) = 2\}$

$= P\{$ 1 arrivée à $t+\Delta t \,/\, X(t) = 2\} \times P\{$ aucun accouchement à $t+\Delta t \,/\, X(t) = 2\}$

$= P\{$ 1 arrivée pendant $\Delta t\} \times P\{\mathrm{Min}(D_1, D_2) > t+\Delta t \,/\, \mathrm{Min}(D_1, D_1) > t\}$

$= (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \times P\{\mathrm{Min}(D_1, D_2) > \Delta t\}$

$= (\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - 2\mu \Delta t + o(\Delta t)) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

- $P_{24}(\Delta t) = P_{25}(\Delta t) = \dots = o(\Delta t)$ car la probabilité d'avoir 2 arrivées ou plus $= o(\Delta t)$

- $P_{22}(\Delta t) = P\{$ aucune arrivée et aucun accouchement à $t+\Delta t / X(t)=2 \} +$

$P\{$ 1 arrivée et 1 accouchement à $t+\Delta t / X(t)=2\}$

$$= (1-\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1-2\mu\Delta t + o(\Delta t)) + (\lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t))$$

$$= 1 - [\lambda + 2\mu]\Delta t + o(\Delta t)$$

On continue de la même façon pour les états $3, 4, \dots, N-1$

- Supposons à l'instant t, on est à l'état N cad $X(t) = N$ (toutes les salles sont occupées donc pas d'autres arrivées)

$P_{NN}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = N / X(t) = N\} = P\{$ aucun accouchement à $t+\Delta t / X(t) = N\}$

$$= P\{\mathrm{Min}(D_1, D_2, \dots, D_N) > t+\Delta t / \mathrm{Min}(D_1, \dots, D_N) > t\}$$

$$= P\{\mathrm{Min}(D_1, \dots, D_N) > \Delta t\} = 1 - N.\mu.\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_{N\,N-1}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = N-1 / X(t) = N\} = P\{1 \text{ accouchement à } t+\Delta t / X(t) = N\}$$

$$= P\{\text{Min}(D_1, \ldots, D_N) < t+\Delta t / \text{Min}(D_1, \ldots, D_N) > t\}$$

$$= P\{\text{Min}(D_1, \ldots, D_N) < \Delta t\} = N\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

idem

$P_{N\,N-2}(\Delta t) = P_{N\,N-3}(\Delta t) = \ldots = o(\Delta t)$ car la prob d'avoir 2 accouchements au plus pendant $\Delta t = o(\Delta t)$

En conclusion; $\{X(t), t \geq 0\}$ est un PNM avec l'espace des états $E = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$

- taux de Naissance; $\lambda_0 = \lambda$; $\lambda_1 = \lambda$; $\ldots$, $\lambda_{N-1} = \lambda$

$$\Rightarrow \lambda_i = \lambda \text{ pour } 0 \leq i \leq N-1$$

- taux de mort; $\mu_1 = \mu$; $\mu_2 = 2\mu$; $\mu_3 = 3\mu$; $\ldots$; $\mu_N = N\mu$

$$\Rightarrow \mu_i = i\mu \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

3). **Regime stationnaire** : Comme le nbre des états est fini en effet card $E = N+1 < +\infty$

Donc le regime stationnaire existe toujours

$$P_k = P[X=k] = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N.$$

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \times \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(i+1)} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \times \frac{1}{k!} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N$$

il reste à calculer P_0

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \times \frac{1}{k!}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \times \frac{1}{k!}\right]^{-1}$$

Application : par hypothèse on a $\lambda = \mu$, on deduit :

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\right]^{-1} \quad \text{et} \quad P_k = P_0 \times \frac{1}{k!} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N$$

4) N ? tq P[toutes les salles occupées] $= P[X = N] = P_N < 0.01$

N ? tq $P_N = P_0 \times \frac{1}{N!} < 0.01$ avec $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} \right]^{-1}$

AN : Programme avec python pour trouver N avec Jupyter Notebook

```
> from math import *
> def PN(N):
      som = 0
      for i in range(N+1):
          som = som + (1/factorial(i))
      return 1/(factorial(N)*som)
```

PN(1) = P_0 = 0.5

PN(2) = 0.2

PN(3) = 0.0625

PN(4) = 0.0153

PN(5) = 0.003 < 0.01

Donc le nbre de salles recherchées est $N = 5$ salles