Chapitre 1 :

GÉNÉRALITÉ SUR LES PROCESSUS ALÉATOIRES Exemple de processus : Le processus de Poisson

1.1 Définitions

Processus : Ensemble de phénomènes se produisant dans le temps.

Stochastique : Qui est le fruit du hasard ; Qui comporte la présence d'une variable aléatoire.

1.1.1 Définition

Un processus stochastique est donc un ensemble de phénomènes produit par le hasard dans le temps, et dont l'évolution peut être décrite à l'aide de variables aléatoires.

1.1.2 Définition

On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \geq 0\}$ où t est un paramètre parcourant l'ensemble des indices T.

$t \in T$: Ensemble des indices, exemples $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$

$X_t \in E$: Espaces des états, exemples $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ ...

Exemple 1 :

Considérons un joueur jouant à « Pile ou Face » un très grand nombre de parties. On s'intéresse au processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ où X_n est la v.a associé au résultat de la partie n

$X_n \in \{\text{Pile}, \text{Face}\}$

E = ensemble des deux états $\{\text{Pile}, \text{Face}\}$

T = $\mathbb{N}$ (discret).

Exemple 2 :

X_t désigne le nombre de bateaux se trouvant dans le port d'Alger à l'instant t $\{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ constitue un processus aléatoire.

Espace des états : $E = \mathbb{N}$

Ensemble des indices : $T = \mathbb{R}^+$

Exemple 3 :

Débit d'une rivière

X_t = niveau d'eau d'une rivière à l'instant t.

$\{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ constitue un processus aléatoire.

$E = \mathbb{R}^+, \qquad T = \mathbb{R}^+$

Exemple 4 :

Considérons une file d'attente. Nous pouvons nous intéresser à l'étude du processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ où X_n est la variable aléatoire représentant l'attente dans la file du nième client.

$E = \mathbb{R}^+, \qquad T = \mathbb{N}$

1.2 Classification des processus aléatoires

On peut classer les processus stochastiques selon la nature de l'espace des états E.

1) Cas où E est discret :
   a. Cas fini : E composé d'un nombre fini d'éléments ; $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (voir exemple 1).
   b. Cas infini : E est composé d'un nombre infini dénombrable d'éléments ; $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \dots\}$ ou bien $\mathrm{E} = \mathbb{N}$. Dans ce cas on dit qu'on a un processus aléatoire à valeurs entières (voir exemple 2).
2) Cas où E est continu : E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple :

$\mathrm{E} = \mathbb{R}$; $\mathrm{E} = [0, +\infty[$, etc…

Dans ce cas on dit qu'on a un processus aléatoire à espace d'états continu (voir exemple 3).

On classe aussi les processus aléatoires suivant la nature de l'ensemble des <u>indices</u> T.

L'ensemble T peut-être <u>discret</u>.

Exemple :

$\mathrm{T} = \mathbb{N}$

$\mathrm{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

Dans ce cas on dit qu'on a une <u>suite stochastique</u> (voir exemple 1, exemple 4)

L'ensemble T peut-être <u>continu.</u>

Exemple :

$\mathrm{T} = \mathbb{R}$; $\mathrm{T} = [0, +\infty[$

Dans ce cas, on dit qu'on a un processus stochastique permanent ou continu (voir exemple 2)

On distingue donc 4 types de processus :

E \ T	**Discret (fini ou dénombrable)**	**Continu**
Discret	Suite stochastique à espace d'états discret Exp.1	Processus stochastique permanent à espace d'états discret Exp.2
Continu	Suite (Processus) stochastique à espace d'états continu Exp.4	Processus stochastique permanent à espace d'états continu Exp.3

1.3 Notion de stationnarité

Cette notion est très importante dans l'étude des processus stochastiques. Il est en effet intéressant de savoir si un processus stochastique va stabiliser ou non sa distribution de probabilité, si cette distribution stable est atteinte au bout d'un temps fini ou non, si elle dépend ou non de l'état initial du processus.

1.3.1 Processus strictement stationnaire

$\{X_t, t \geq 0\}$ est dit strictement stationnaire si et seulement si :

$\forall t_0, t_1, t_2, \dots\dots\dots, t_n$; $\forall\ \tau \in \mathbb{R}$ la fonction de répartition du n-uplet $\left(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots\dots, X_{t_n}\right)$ soit $F\left(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots\dots, X_{t_n}\right)$ est conservée dans une translation dans le temps : $F\left(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots\dots, X_{t_n}\right) = F\left(X_{t_0+\tau}, X_{t_1+\tau}, \dots\dots, X_{t_n+\tau}\right)$

Il en résulte que : $\forall\ \tau \in \mathbb{R}$, $\forall i$: X_{t_i} et $X_{t_i+\tau}$ ont la même distribution.

1.3.2 Processus à accroissement stationnaire

Un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit à accroissement stationnaire (ou homogène dans le temps) si et seulement si :

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; $\forall h \geq 0$ $(X_{t_2+h} - X_{t_1+h})$ et $(X_{t_2} - X_{t_1})$ sont des variables aléatoires de même distribution de probabilité.

1.4 Processus aléatoires à accroissement indépendants

Si, pour toute famille d'indices $(t_1, t_2, \dots \dots \dots, t_n)$ telle que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$; $X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}$; ………. ; $X_{t_2} - X_{t_1}$ sont indépendantes, le processus est dit à accroissements indépendants.

Remarque :

Par la suite on notera X_t par $X(t)$.

1.5 Exemple de processus : le processus de Poisson

Le processus de Poisson est utilisé pour décrire la réalisation dans le temps d'événements aléatoires du type :

L'arrivée de clients vers un guichet.

L'apparition de pannes dans un parc de machines.

L'arrivée de taches dans l'unité centrale d'un ordinateur.

1.5.1 Processus de comptage

La description mathématique d'un flux d'événements aléatoires peut se faire de la manière suivante :

On considère le nombre d'événements $N(t)$ se produisant dans l'intervalle de temps $[0\ , t]$ et on cherche à déterminer la distribution de cette v.a discrète.

1.5.1.1 Définition

Le processus stochastique $\{N(t)\ ; t \geq 0\}$ est appelé processus de comptage si :

- $N(0) = 0$
- $N(t)$ prend des valeurs entières non négatives.
- $s < t$ implique $N(s) \leq N(t)$

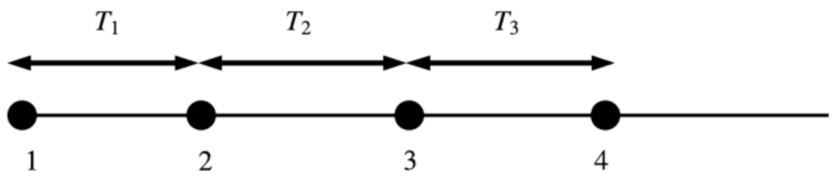
- $N(t+s) - N(s)$ indique le nombre (aléatoire) d'événements se produisant dans l'intervalle semi-ouvert : $]\, s, s + t]$

Exemples :

1) $N(t)$ désigne le nombre d'avions qui arrivent à l'aéroport entre 8h et l'instant t : $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de comptage.
2) $N(t)$ désigne le nombre de pannes enregistrées sur une machine entre l'instant de mise en fonctionnement et l'instant t : $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de comptage.

1.5.1.2 Relations fondamentales

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de comptage, on désigne par T_1 l'instant de réalisation du premier événement et pour $n \geq 2$, on dénote par T_n le temps écoulé entre le $(n-1)^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}}$ événement.



Posons $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$

S_n est le temps écoulé jusqu'à la réalisation du $n^{\text{ième}}$événement, alors on a les relations suivantes :

L'événement $\{N(t) \leq n\}$ est équivalent à $\{S_{n+1} > t\}$ et

L'événement $\{N(t) \geq n\}$ est équivalent à $\{S_n \leq t\}$

et on a alors pour $n = 1, 2, \dots \dots$

$$P[N(t) = n] = P[S_{n+1} > t\,, S_n \leq t] = P[S_n \leq t] - P[S_{n+1} \leq t]$$

1.5.2 Processus de Poisson

1.5.2.1 Définition

On dit qu'un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda\ (\lambda > 0)$, s'il satisfait aux conditions suivantes :

C1 : le processus $N(t)$ est homogène dans le temps c.à.d.

$$P[N(s+t)-N(s)=k]=P[N(t)=k] \text{ pour tout } s>0, t>0 \text{ et } k\geq 0$$

C2 : le processus $N(t)$ est à accroissement indépendant ce qui signifie que :

$$P[N(s+t)-N(s)=k, N(s)=j]=P[N(s+t)-N(s)=k].P[N(s)=j] \text{ pour tout } s>0, t>0 \text{ et } j,k\geq 0.$$

C3 : la probabilité pour que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle de temps est négligeable par rapport la probabilité qu'il ait un seul événement c.à.d.

Si $\Delta t \longrightarrow 0$, on a :

$$P[N(\Delta t)=k]=\begin{cases} \lambda.\Delta t+o(\Delta t), & \text{si } k=1 \\ o(\Delta t) \quad , & \text{si } k\geq 2 \end{cases}$$

La condition **C3** implique :

$$P[N(\Delta t)=0]=1-\lambda.\Delta t+o(\Delta t)$$

En effet :

$$P[N(\Delta t)=0]=1-P[N(\Delta t)\geq 2]=1-\lambda.\Delta t-o(\Delta t)=1-\lambda.\Delta t-o(\Delta t)$$

1.5.2.2 Théorème

Soit $\{N(t); t\geq 0\}$ un processus de Poisson de taux λ alors :

$$P[N(t)=k]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad (t>0, \text{et } k=0,1,2,\dots\dots\dots$$

et par conséquent

$$E[N(t)]=\lambda.t \quad \text{et} \quad Var[N(t)]=\lambda.$$

Démonstration :

On définit : $p_n(t)=P[N(t)=n]$;

Pour $n = 0$, on a :

$$p_0(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t) = 0] = P[N(t) = 0, N(t+\Delta t) - N(t) = 0] = P[N(t) = 0].P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0] = p_0(t).P[N(\Delta t) = 0] = p_0(t).p_0(\Delta t) = p_{0(t).}[1 - \lambda.\Delta t + o(\Delta t)$$

Donc : $\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$

Lorsque : $\Delta t \longrightarrow 0$, on obtient :

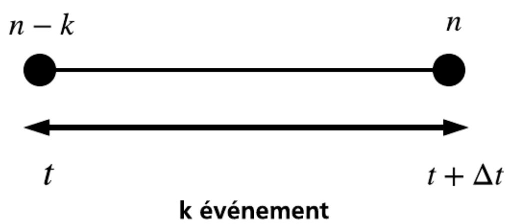
$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

Équation différentielle avec la condition initiale $p_0(0) = P[N(0) = 0] = 1$

La solution est : $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

Supposons maintenant $n \geq 1$, d'après le théorème des probabilités totales et en tenant compte des conditions **C2** et **C3** on a pour $n = 1, 2, \dots \dots \dots$

$$p_n(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t) = n] = \sum_{k=0}^{n} P[N(t+\Delta t) - N(t) = k, N(t) = n-k]$$



$$= \sum_{k=0}^{n} P[N(t+\Delta t) - N(t) = k].P[N(t) = n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_k(\Delta t).p_{n-k}(t)$$

$$= p_n(t)p_0(\Delta t) + p_{n-1}(t)p_1(\Delta t) + \sum_{k=2}^{n} p_k(\Delta t)p_{n-k}(t)$$

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t).[1 - \lambda.\Delta t] + p_{n-1}(t).\lambda.\Delta t + o(\Delta t)$$

et :

$$\frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$:

$$p_n'(t) = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)]$$

Ce système d'équations différentielles est connu sous le nom d'équations de Kolmogorov.

La condition initiale étant $p_0(0) = P[N(0) = 0] = 1$

Ce système peut être résolu par récurrence

et par conséquent : $p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

1.5.2.3 Théorème

Un processus de comptage qui satisfait aux conditions C1 et C2 et pour lequel la condition du théorème **(1.5.2.2)** est valide, est un processus de Poisson.

Démonstration : Exercice

1.5.2.4 Théorème

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ. Soit T_1 l'instant de réalisation du premier événement et T_n le temps écoulé entre le $(n-1)^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}}$ événement.

Les v.a T_n , $n \geq 1$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètreλ.

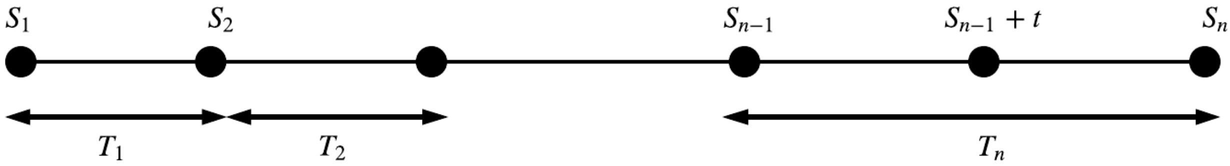
Démonstration :

Vérifions d'abord que les v.a $T_1, T_2, \dots\dots\dots, T_n \longrightarrow \text{Exp}(\lambda)$

Considérons T_1

$P[T_n > t] = P\big[\text{aucun événement dans } [0,t]\big] = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}$ C.Q.F.D.

Dans le cas général $P[T_n > t] = ?$, $n = 1, 2, \dots\dots\dots$



On considère l'événement :

$[T_n > t] = [S_n - S_{n-1} > t] = [S_n > S_{n-1} + t]$

$[T_n > t]$ est équivalent à $[N(S_{n-1} + t) - N(S_{n-1}) = 0]$

donc : $P[T_n > t] = P[N(S_{n-1} + t) - N(S_{n-1}) = 0] = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow T_n \longrightarrow \text{Expo}(\lambda)$

$\{N(t); t \geq 0\}$ étant un processus à accroissements indépendants donc les événements arrivant avant S_n sont indépendants de ceux qui arrivent après S_n , $n = 1, 2, \dots\dots\dots$ ceci prouve que $T_1, T_2, \dots\dots\dots$ sont indépendantes.

1.5.2.5 Théorème

La durée séparant $(n + 1)$ événements consécutifs c.à.d. le temps écoulé entre le $k^{\text{ième}}$ et le $(k + n)^{\text{ième}}$ événement, suit une loi gamma de paramètres λ et n (lois d'Erlang).

Démonstration : Exercice.

1.5.2.6 Théorème

Un processus de comptage $\{N(t); t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ si les intervalles de temps entre deux événements consécutifs sont des v.a indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ .

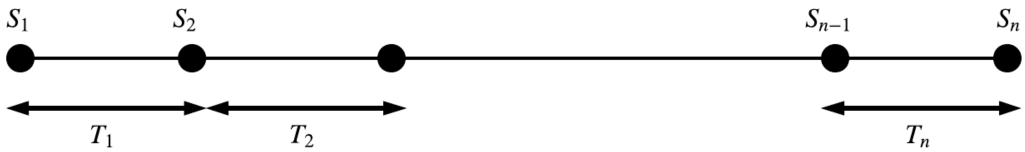
Démonstration :

Montrons d'abord qu'on a :

$$P[N(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

$k = 0$:

$P[N(t) = 0] = P[T_n > t] = e^{-\lambda t}$



$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ date de la $n^{\text{ième}}$ réalisation.

$n = 1, 2, \dots \dots \dots$; $S_n \longrightarrow$ Gamma de paramètres λ, n, sa densité est :

$$f_n(t) = \lambda^n t^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$

$P[N(t) = k] = P[S_k \leq t < S_{k+1}]$

Comme $[S_{k+1} \leq t] \subset [S_k \leq t]$

$$P[N(t) = k] = P[S_k \leq t] - P[S_{k+1} \leq t] = \int_0^t [f_k(s) - f_{k+1}(s)]\, ds$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^t e^{-\lambda s}[n.\, s^{n-1} - \lambda.\, s^n] ds = \frac{\lambda^n}{n!} \left[e^{-\lambda s} s^n\right]_{s=0}^{s=t}$$

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

La condition **C1** de la définition **(1.5.2.1)** elle résulte de l'indépendance des T_k , $n \geq 1$.

Quant à la condition **C2** elle résulte de la propriété de la loi exponentielle d'être sans mémoire.

Exemple :

Admettons que la durée de vie d'un type de dispositif technique est exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ client/h. dès qu'un dispositif tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un élément identique.

a) Quelle est la probabilité d'avoir plus de trois pannes dans un intervalle d'une durée de 2 heures ?

b) Quelle est la distribution de l'instant d'occurrence de la première panne T_1 sachant que le dispositif fonctionne encore à l'instant $t = 3h$?

Solution :

D'après le théorème **(1.5.2.6)** le nombre de pannes $N(t)$ se produisant dans un intervalle de temps $[0, t]$, suit une loi de Poisson de paramètre λt.

a) $P[N(2) > 3] = 1 - P[N(2) \leq 3] = 0.1429$

b) $P[T_1 \leq t/N(3) = 1] = \frac{P[T_1 \leq t,\ N(3)=1]}{P[N(3)=1]} = \frac{P[N(t)=1,\ N(3)-N(t)=0]}{P[N(3)=1]} = \frac{P[N(t)=1].P[N(3-t)=0]}{P[N(3)=1]} = \frac{t.e^{-t}.e^{-(3-t)}}{3e^{-3}} = \frac{t}{3}$

Donc T_1 uniformément distribuée dans $[0, t]$.

1.5.2.7 Théorème

Soit $\{N(t); t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ et considérons un événement poissonien qui a eu lieu dans un intervalle donné $[0, t]$. Soit Y la v.a qui donne le temps d'occurrence de cet événement, alors Y est une v.a uniformément distribuée dans $[0, t]$.

Démonstration :

Soit $0 < x < t$:

$$P[Y \leq x] = P[T_1 \leq x/N(t) = 1] = \frac{P[N(x) = 1,\ N(t) - N(x) = 0]}{P[N(t) = 1]}$$
$$= \frac{P[N(x) = 1].P[N(t - x) = 0]}{P[N(t) = 1]} = \frac{e^{-\lambda t}\lambda x e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t}$$

C.Q.F.D.

1.5.2.8 Théorème (Superposition)

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des nombres réels strictement positifs et soit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$. Supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, le processus $\{N_j(t) ; t \geq 0\}$ soit un processus de Poisson de paramètre λ_j tels que ces m processus soient indépendants les uns des autres, alors pour chaque $t \geq 0$ on a : $N(t) = N_1(t) + \cdots + N_m(t)$ est un processus de Poisson avec intensité λ.

Démonstration :

Pour faire il suffit de vérifier que les durées de vie entre les évènements consécutifs du processus de comptage $\{N(t)\,;t\geq 0\}$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées, avec distribution exponentielle de paramètre λ.

Posons

- T_k : le temps entre le $(k-1)^{\text{ième}}$ et le $k^{\text{ième}}$ événement du processus$\{N(t)\,;t\geq 0\}$.
- $T_k^{(j)}$: le temps entre le $(k-1)^{\text{ième}}$ et le $k^{\text{ième}}$ événement du processus $\{N_j(t)\,;t\geq 0\}$.

On a alors $T_k = \min\left\{T_k^{(1)},\dots,T_k^{(m)}\right\}$ $T_k^{(j)}\sim \text{Exp}(\lambda_j)$.

De plus comme les processus $\{N_j(t)\,;t\geq 0\}$ sont indépendant les variables aléatoires $T_k^{(j)}$ le sont aussi. D'après la proposition 9.2 du chapitre0 on déduit que $T_k\sim \text{Exp}(\lambda)$

1.5.2.9 Théorème (Décomposition)

Soit m un entier positif et soit $(p_1,\ p_2,\dots,p_m)$ un vecteur satisfaisant pour tout $j\in\{1,\dots,m\}0\leq p_j\leq 1$ tels que $p_1+\cdots+p_m=1$.

Fixons $\lambda>0$ et considérons $\{N(t)\,;t\geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre λ.

Supposons que :

1. Il y a m types d'évènements dans le processus $\{N(t)\,;t\geq 0\}$.
2. A chaque fois que survient un évènement, on a une probabilité p_1 que ce soit un évènement de type 1, une probabilité p_2 que ce soit un évènement de type 2 …etc.
3. Les attributions de types sont indépendantes les unes des autres.

Pour chaque $j\in\{1,\dots,\}$, dénotons par $\{N_j(t)\,;t\geq 0\}$ le processus de comptage des évènements de type j. Alors :

$\left\{N_j(t);t\geq 0\right\}$ est un processus de Poisson avec intensité λp_j.

Les processus $\left\{N_j(t);t\geq 0\right\}$ sont indépendants.

Démonstration :

On démontrera ce théorème pour $m = 2$, en effet on vérifie facilement que $N_1(t)$ suit une distribution de Poisson de paramètre λpt.

D'après le théorème des probabilités totales :

$$P(N_1(t) = n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(N_1(t) = n/N(t) = k).P(N(t) = k)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n\, p^n (1-p)^{k-n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= \frac{(\lambda tp)^n}{n\,!} e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^{k-n}\, (\lambda t)^{k-n}/(k-n)!$$

$$= (\lambda tp)^n e^{-\lambda t}/n!$$

pour $n = 0, 1, \dots \dots$

L'étudiant trouvera la démonstration complète dans []

1.6 Exercices

1.6.1 Soit un processus de Poisson de taux λ.

- **a)** Quelle est la probabilité pour que n événements se produisent entre 0 et t ? entre t et $2t$? Donner votre commentaire?
- **b)** Quelle est la probabilité pour qu'un événement se produise entre t et $t + \Delta t$? Aucun événement? Au moins deux événements?
- **c)** Calculer le nombre moyen d'événements se produisant entre 0 et t, ainsi que sa variance.
- **d)** Trouver la probabilité pour que l'intervalle entre deux événements consécutifs dépasse θ. En déduire la durée moyenne de l'intervalle entre deux événements consécutifs.

1.6.2 Des voitures arrivent vers une station-service sous la forme d'un processus poissonien de paramètre λ. Sachant que deux voitures arrivent pendant la première heure, quelle est la probabilité :

- **a)** Que les deux arrivent pendant la première demi-heure ?
- **b)** Qu'exactement une voiture arrive pendant la première demi-heure ?

1.6.3 Admettons que la durée de vie d'un type de dispositif technique est exponentielle de paramètre $\lambda=1$. Dès qu'un dispositif tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un élément identique.

- **a)** Quelle est la distribution de la variable aléatoire, $N(t) =$ nombre de pannes se produisant dans un intervalle de temps $[0, t]$.
- **b)** Quelle est la probabilité d'avoir au moins une panne dans un intervalle d'une durée de $2h$?
- **c)** Quelle est la distribution de la première panne sachant que le deuxième dispositif fonctionne encore à l'instant $t = 3h$?

1.6.4 Un système est constitué de deux composants A et B. il y a trois types d'accidents possibles :

Le premier met hors d'usage le composant A, le second met hors d'usage le composant B et troisième met hors d'usage A et B à la fois. Les accidents de chaque type arrivent suivant un processus de Poisson de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ respectivement.

- **a)** Quelle est la loi de la durée de vie du composant A (et du composant B) ?
- **b)** Sachant que le système ne fonctionne que si les deux composants sont en service, quelle est la loi de durée de vie du système?
- **c)** Sachant que le système fonctionne si l'un seulement des composants est en service, quelle est la loi de la durée de vie du système?

1.6.5 Les arrivées d'autobus à une station forment un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 4/\mathrm{h}$. chaque autobus s'arrête un temps fixe $\mathrm{s} = 1\mathrm{mn}$ à la station. Un passager qui arrive à un instant θ monte dans le bus si celui-ci est là, attend pendant un temps $\mathrm{t} = 5\mathrm{mn}$, puis, si l'autobus n'est pas arrivé pendant le temps t, quitte la station et s'en va à pied.

- **a)** Déterminer la probabilité que le passager ne prenne pas l'autobus.

- **b)** Votre objectif est de prendre le dernier bus qui passe avant $\mathrm{t}_0 = 23\mathrm{h}$. Votre stratégie consiste à choisir un instant $\mathrm{s} < \mathrm{t}_0$ et à prendre le premier bus qui se présente à partir de s. Montrer que la probabilité de succès est $\mathrm{p}(\mathrm{s}) = \lambda(\mathrm{t}_0 - \mathrm{s})\mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{t}_0 - \mathrm{s})}$.

1.6.6 Considérons un titre boursier générant des dividendes (bénéfices) à des instants que l'on ne saurait prédire. Dans certains cas, il est possible de modéliser cette situation à l'aide d'un processus de Poisson. En effet, si nous définissons un événement comme étant le versement de dividendes et, pour tout nombre réel positif t,

$\mathrm{N}(\mathrm{t}) =$ le nombre de versements de dividendes durant l'intervalle de temps $[0, \mathrm{t}]$;

alors $\{\mathrm{N}(\mathrm{t}) \,; \mathrm{t} \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.

Pour ce problème, nous définissons l'unité de temps comme étant la journée.

En supposant que nous recevons un montant de $\mathrm{M}_\mathrm{i} > 0$ lors du $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ versement,

- **a)** Calculez le montant moyen des dividendes au cours d'une période allant de 0 à t.

- **b)** En supposant que les versements sont tous du même montant, $\mathrm{M} > 0$, déduire le montant moyen au cours de la première année.

1.6.7 Le long d'une route à voie unique, l'écoulement des véhicules peut être décrit par un processus de Poisson $\{N(t)\,;t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda = 2/\mathrm{mn}$.

- **a)** Sachant que 4 véhicules sont passés en 3 minutes, déterminer la probabilité que 3 soient passés dans les 2 premières minutes.
- **b)** Pour cause de travaux, on doit interrompre le trafic pendant une durée t. On compte alors une longueur de 8m de route occupée par véhicule immobilisé et on cherche la valeur de t telle que la queue formée ne dépasse 250m qu'avec une probabilité de 0.2.