TD Processus de Naissances et de Morts

Exercice n°3 :(TD PNM)

Dans une auto-école chaque moniteur attend l'arrivée d'exactement trois élevés pour commencer son cours de conduite.

Si le moniteur est occupé avec trois élevés, les autres élevés qui arrivent attendent la fin du cours et l'arrivée d'un troisième élève pour commencer le cours. Si le moniteur est libre, le premier élève attend l'arrivée du deuxième puis du troisième avant de débuter sa leçon de conduite.

Les arrivées aléatoires des élèves suivent un processus de Poisson de taux λ. La durée aléatoire d'un cours de conduite pris par les trois élèves suit une loi exponentielle de taux μ.

L'état du système est déterminé par la connaissance du nombre d'élèves présent dans l'auto-école.

- **Tracer le graphe des probabilités de transition en évaluant les arcs, est-on en présence d'un processus de naissance et de mort? pourquoi?**

Solution : On decrit le système (autoecole) par la v a

$X(t)$ = nbre d'eleves presents dans l'autoecole à la date "t"

$\forall t \geq 0$; $X(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $\Rightarrow$ Espace des etats $E = \mathbb{N}$

- les elevès arrivent à l'auto-ecole selon un $PP(\lambda)$

grâce aux proprietés sur les processus de Poisson a :

$$P\{\text{aucune arrivée pendant } \Delta t\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{\text{une arrivée pendant } \Delta t\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{\text{2 arrivées au plus pendant } \Delta t\} = o(\Delta t)$$

- La durée d'un cours pris par 3 eleves $D \sim Exp(\mu)$

Grâce aux propriétés de la loi exponentielle (absence de memoire) nous avons:

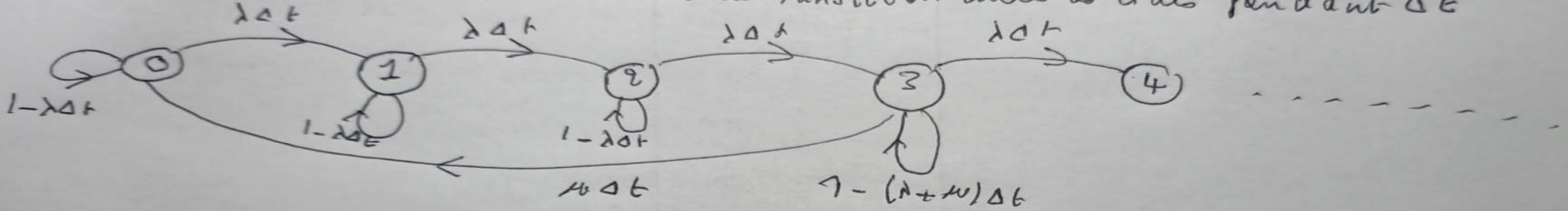
$$P\{\text{le cours se termine pendant } \Delta t\} = P\{D < t + \Delta t \,/\, D > t\} = P\{D < \Delta t\}$$

$$= 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

$P\{\text{le cours ne se termine pas pendant } \Delta t\} = P\{D > t + \Delta t / D > t\} = P\{D > \Delta t\}$

$= e^{-\mu \Delta t} = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$

Graphe associé aux probabilités de transition entre les états pendant Δt



- $P_{00}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=0 / X(t)=0\} = P\{0 \text{ arrivée pendant } \Delta t\} = 1 - \lambda \Delta t$
- $P_{01}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=1 / X(t)=0\} = P\{1 \text{ arrivée pendant } \Delta t\} = \lambda \Delta t$
- $P_{0i}(\Delta t) = o(\Delta t)$ pour $i \geq 2$ car $P\{2 \text{ arrivées ou plus pendant } \Delta t\} = o(\Delta t)$
- $P_{12}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=2 / X(t)=1\} = P\{1 \text{ arrivée pendant } \Delta t\} = \lambda \Delta t$
- $P_{11}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=1 / X(t)=1\} = P\{0 \text{ arrivée pendant } \Delta t\} = 1 - \lambda \Delta t$

- $P_{1j}(\Delta t) = o(\Delta t)$ pour $j \geq 3$ car $P\{2$ arrivées au plus pendant $\Delta t\} = o(\Delta t)$

- m̂ chose quand on est à l'état 2 on a :

$$P_{22}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$$
$$P_{23}(\Delta t) = \lambda \Delta t$$
$$P_{2k}(\Delta t) = o(\Delta t) \text{ pour } k \neq 2, 3$$

- Si on est à l'état 3 alors il y a cours de conduite

$P_{30}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 0 / X(t) = 3\} = P\{$le cours se termine pendant $\Delta t\}$ $P\{$aucune arrivée pendant $\Delta t\}$

$= (\mu \Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$

$P_{34}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 4 / X(t) = 3\} = P\{$le cours ne se termine pas pendant $\Delta t\} \times$ $P\{1$ arrivée pendant $\Delta t\}$

$= (1 - \mu \Delta t + o(\Delta t))(\lambda \Delta t + o(\Delta t))$

$= \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$P_{33}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=3 \,/\, X(t)=3\} = P\{$ le cours se termine et 3 arrivées pendant $\Delta t\}$

$+ \; P\{$ le cours ne se termine pas et 0 arrivées pendant $\Delta t\}$

$$= \overbrace{(\mu \Delta t)(\lambda \Delta t)^3}^{o(\Delta t)} + (1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t) = 1-(\lambda+\mu)\Delta t + o(\Delta t)$$

On a pas le graphe d'un PNM car on a pas les passages de $i \Rightarrow i-1$ et en plus ds ce graphe on peut aller de $i \longrightarrow i-3$ quand $i \geq 3$

ce passage est impossible dans un PNM

Donc $\{X(t), t \geq 0\}$ n'est pas un PNM

<u>Exercice :</u>

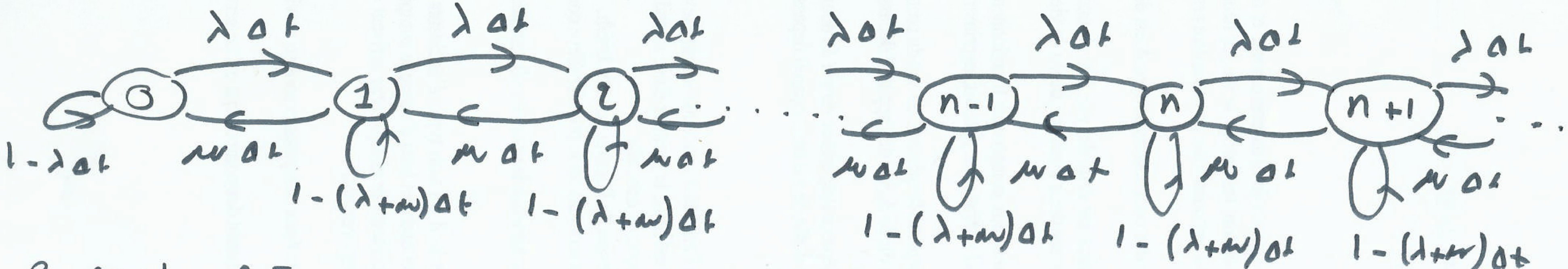
Dans une auto-école chaque moniteur attend l'arrivée d'exactement un élève pour commencer son cours de conduite.

Si le moniteur est occupé avec un élève, les autres élevés qui arrivent attendent la fin du cours pour commencer le cours, selon leur ordre d'arrivées.

Les arrivées aléatoires des élèves suivent un processus de Poisson de taux λ. La durée aléatoire d'un cours de conduite pris par un élève suit une loi exponentielle de taux μ.

L'état du système est déterminé par la connaissance du nombre d'élèves présent dans l'auto-école.

- **Tracer le graphe des probabilités de transition en évaluant les arcs, est-on en présence d'un processus de naissance et de mort? pourquoi?**



$P_{00}(\Delta t) = P[\text{0 arrivées pendant } \Delta t] = 1 - \lambda \Delta t$

$P_{11}(\Delta t) = P[\text{aucune arrivée et aucun départ pendant } \Delta t] +$
$P[\text{1 arrivée et 1 départ pendant } \Delta t]$

$$= (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t) + \underbrace{(\lambda \Delta t)(\mu \Delta t)}_{o(\Delta t)}$$

$$= 1 - (\lambda + \mu)\Delta t$$

$$D = \text{durée d'un service} \begin{cases} \text{auprès d'un guichet qlq} \\ \text{réparation} \\ \text{vie d'un dispositif} \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$D \sim Exp(\mu)$$

$$P\left[D > t + \Delta t \,/\, D > t\right] = P\left[D > \Delta t\right] = e^{-\mu \Delta t} \simeq 1 - \mu \Delta t$$

$$P\left[D < t + \Delta t \,/\, D > t\right] = P\left[D < \Delta t\right] = 1 - e^{-\mu \Delta t} \simeq \mu \Delta t$$

On a un PNM

taux de naissance : $\lambda_i = \lambda$; $i \geq 0$

taux de mort : $\mu_i = \mu$; $i \geq 1$