TD PROCESSUS DE POISSON

Exercice n°3 :

Admettons que la durée de vie d'un type de dispositif technique est exponentielle de paramètre λ=1. Des qu'un dispositif tombe en panne, il est immédiatement remplace par un élément identique.

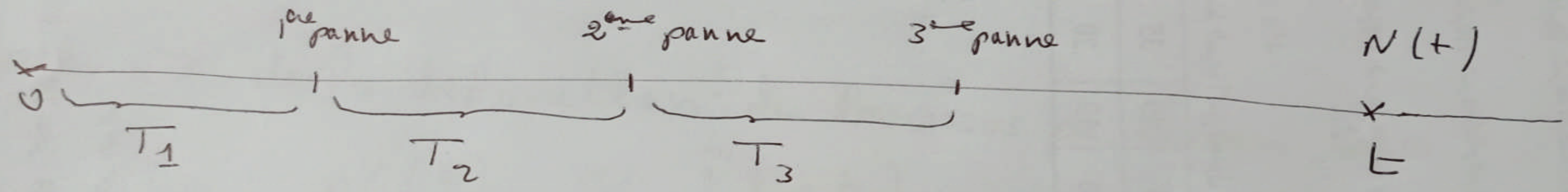
1) **Quelle est la distribution de la variable aléatoire, N(t) = nombre de pannes se produisant dans un intervalle de temps [0, t].**
2) **Quelle est la probabilité d'avoir au moins une panne dans un intervalle d'une durée de 2h ?**
3) **Quelle est la distribution de la première panne sachant que le deuxième dispositif fonctionne encore à l'instant t=3h ?**

EX 3 :

1)

$\boxed{\text{Dispositif technique}}$

D = durée de vie du dispositif ; $D \sim Exp(\lambda)$



T_1 = durée de vie du 1er dispositif $\sim Exp(\lambda)$

T_2 = durée de vie du 2ème dispositif $\sim Exp(\lambda)$

T_3 = durée de vie du 3ème dispositif $\sim Exp(\lambda)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$N(t)$ = nombres de pannes du dispositif dans $[0, t]$

Il est clair que $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Comptage

En vertu du Theoreme 1. 5. 2. 6 ; $\{N(t), t \geq 0\}$ est un $PP(\lambda)$ car les temps entre les pannes sont des v. a. i. i d $\sim Exp(\lambda)$

D'apres C3 de la definition du Processus de Poisson on a :

$$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$$

D'où $P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$

2) on prend d u. t = l'heure.

$$P[N(2) \geq 1] = 1 - P[N(2) = 0] = 1 - e^{2} =$$

3) La loi de $[T_1 / N(3) = 1]$

$P[T_1 \leq t / N(3) = 1] = ?$ pour $t \geq 0$

On applique le theoreme 1.5.2.7

On aura $[T_1 / N(3) = 1] \sim U_{[0, 3^h]}$

D'où $P[T_1 \leq t / N(3) = 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0^h \\ \frac{t}{3} & \text{si } 0^h \leq t \leq 3^h \\ 1 & \text{si } t > 3^h \end{cases}$

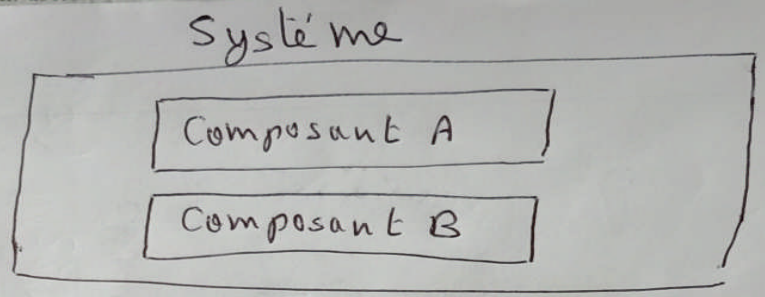
<u>Exercice n°4 :</u>

Un système est constitué de deux composants A et B. il y a trois types d'accidents possibles :

Le premier met hors d'usage le composant A, le second met hors d'usage le composant B et troisième met hors d'usage A et B à la fois. Les accidents de chaque type arrivent suivant un processus de Poisson de paramètres λ_1, λ_2, λ_3 respectivement.

1) **Quelle est la loi de la durée de vie du composant A (et du composant B) ?**
2) **Sachant que le système ne fonctionne que si les deux composants sont en service, quelle est la loi de durée de vie du système?**
3) **Sachant que le système fonctionne si l'un seulement des composants est en service, quelle est la loi de la durée de vie du système?**

Ex 4 :



1er type d'accidents : met hors d'usage A

$N_A(t)$ = nbre de pannes du composant A dans $[0, t]$

On a $\{N_A(t);\ t \geq 0\}$ est un PP (λ_1)

2ème type d'accidents : met hors d'usage B

$N_B(t)$ = nbre de pannes du composant B dans $[0, t]$

On a $\{N_B(t);\ t \geq 0\}$ est un PP (λ_2)

$3^{\text{ème}}$ type d'accidents : met hors d'usage A et B à la fois
(pas en même temps)

$N_{AB}(t)$ = nbre de pannes des composants A et B dans $[0, t]$

$\{N_{AB}(t) ; t \geq 0\}$ est un PP (λ_3)

1) Durée de vie du composant A = Temps entre 2 pannes consecutives dans le processus $\{N_A(t) ; t \geq 0\}$

Donc d'apres Th 1.5.2.4

Durée de vie du composant A $\sim Exp(\lambda_1)$

idem : on montre que

Durée de vie du composant B $\sim Exp(\lambda_2)$

2) Système fonctionne si A et B fonctionnent $\Longleftrightarrow$ système en panne si A ou B en pannes

$N_s(t)$ = nbre de pannes du système dans $[0, t]$

Il est clair que $N_s(t) = N_A(t) + N_B(t)$

D'après le théorème de superposition (th 1.5.2.8)

$\{N_s(t);\ t \geq 0\}$ est un PP $(\lambda_1 + \lambda_2)$

comme pour (1) on déduit Durée de vie du système $\sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$

3) Système fonctionne si A ou B fonctionne $\Longleftrightarrow$ Système en panne si A et B en pannes

Donc $N_s(t) = N_{AB}(t)$ ie $\{N_s(t);\ t \geq 0\}$ est un PP (λ_3)

D'où durée de vie du système $\sim Exp(\lambda_3)$

EXERCICE N° 7 :

2. Le long d'une route à voie unique, l'écoulement des véhicules peut être décrit par un processus de Poisson (N_t) de paramètre $\lambda = 2/\text{mn}$.

1) Sachant que 4 véhicules sont passés en 3 minutes, déterminer la probabilité que 3 soient passés dans les 2 premières minutes.

2) Pour cause de travaux, on doit interrompre le traffic pendant une durée t. On compte alors une longueur de 8m de route occupée par véhicule immobilisé et on cherche la valeur de t telle que la queue formée ne dépasse 250m qu'avec une probabilité de 0,2.

Exprimer la condition à l'aide de N_t, puis à l'aide des temps U_i inter-arrivées entre les véhicules. On donnera une estimation de t à l'aide du théorème central limite, en considérant 30 comme grand.

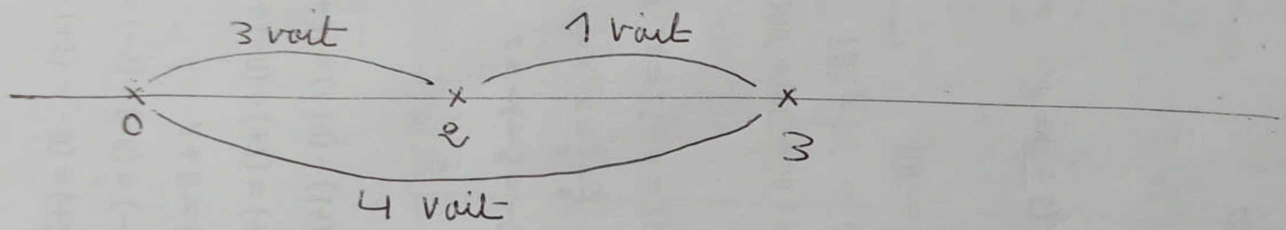
[*On peut lire sur les tables que* $P([X \leq -0,84]) = 0,2$ *pour une variable* X *de loi normale* $N(0,1)$ *et on rappelle que si* Y *suit la loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$, $\mathbb{E}(Y) = 1/\lambda$ *et* $\text{var}(Y) = 1/\lambda^2$].

EX7 :

$N(t)$ = nbre de voitures qui passent dans $[0,t]$

$\{N(t) ; t \geq 0\}$ est un $PP(\lambda)$ avec $\lambda = 2 \text{ min}^{-1}$

1) $$P\{N(2)=3 / N(3)=4\} = \frac{P\{N(2)=3 ; N(3)=4\}}{P\{N(3)=4\}}$$



$$\{N(2)=3 ; N(3)=4\} = \{N(2)=3 ; N(3)-N(2)=1\}$$

$$P\{N(2)=3 / N(3)=4\} = \frac{P\{N(2)=3 ; N(3)-N(2)=1\}}{P\{N(3)=4\}}$$

Comme le processus est à accroissements independants

$$P[N(2)=3/N(3)=4] = \frac{P\{N(2)=3\} \times P\{N(3)-N(2)=1\}}{P\{N(3)=4\}}$$

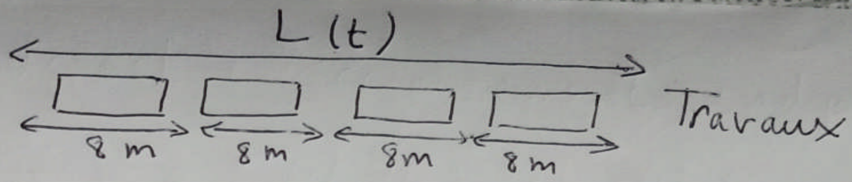
le processus étant à accroissements stationnaires

$$P\{N(2)=3/N(3)=4\} = \frac{P\{N(2)=3\} \times P\{N(1)=1\}}{P\{N(3)=4\}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-2\lambda}}\frac{(2\cancel{\lambda})^3}{3!}\,\cancel{e^{-\lambda}}\,\cancel{\lambda}}{\cancel{e^{-3\lambda}}\frac{(3\cancel{\lambda})^4}{4!}} = \frac{2^3}{3!} \times \frac{4!}{3^4} = \frac{2^5}{3^4}$$

$$= \frac{32}{81} = 0.395$$

2)



Travaux ; comment fixer la durée t tq $L(t)$ la longueur de la file d'attente ne dépasse 250 m qu'avec une probabilité égale à 0.2

But : t ? tq $P[L(t) > 250m] = 0.2$ $(*)$

Nombre de voitures qui occupent la route durant $t = \frac{L(t)}{8} = N(t)$ càd le nbre de voitures qui arrivent ds $[0, t]$

Donc :

$$P[L(t) > 250m] = P\left[N(t) > \frac{250}{8}\right] = P[N(t) > 31{,}25]$$

$$= P[N(t) \geq 32]$$

Donc la relation $(*)$ est équivalent à : On cherche la durée t tq :

$$P[N(t) \geq 32] = 0.2$$

Dans le processus de Comptage, on a vu la propriété

$$[N(t) \geqslant k] = [S_k \leqslant t]$$

avec $S_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ date de realisation du k ième evenement et $T_1, T_2, \dots, T_k$ v.a.i.i.d $\sim Exp(\lambda)$

On applique la propriété pour $k = 32$

Donc, on cherche t tq $P[S_{32} \leqslant t] = 0.2$

avec $S_{32} = T_1 + T_2 + \dots + T_{32}$ et $T_1, \dots, T_{32}$ v.a.i.i.d $\sim Exp(\lambda = 2)$

Theoreme central limite : $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d tq $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = m$ et $V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_n) = \sigma^2$; posons $S_n = X_1 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

on a $E(S_n) = n.m$ et $V(S_n) = n.\sigma^2$

Pour de grandes valeurs de n $(n \geqslant 30)$ on a $S_n \sim N(n.m, n.\sigma^2)$

ie $\dfrac{S_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

On applique le théorème central limite pour S_{32} avec $E(S_{32}) = \frac{32}{\lambda} = 16$

et $V(S_{32}) = \frac{32}{\lambda^2} = 8$

Donc, on peut formuler le problème comme suit :

On cherche t tq $P\left[\frac{S_{32} - 16}{2\sqrt{2}} \leq \frac{t - 16}{2\sqrt{2}} \right] = 0{,}2$

On utilise l'indication de l'exercice qui dit que cette relation est vérifiée

pour $\frac{t - 16}{2\sqrt{2}} = -0{,}84 \Rightarrow t = 16 - 0{,}84 \times 2\sqrt{2} = 13{,}6 \text{ min}$

d'où la durée des travaux sera 13,6 min