TD3 PNM

<u>Exercice n°5 :</u>

Dans un salon de coiffure pour hommes, il y a 2 coiffeurs et 2 fauteuils d'attente. Les arrivées des clients suivent un processus de Poisson d'intensité λ= 2ar/h et le service est exponentiel de taux μ=2ser/h. Sachant que : 20% des clients renoncent à entrer si les 2 coiffeurs sont occupés et 60% renoncent s'il y a déjà un client en attente enfin si les deux fauteuils sont occupés aucun client ne rentre.

1. Montrer que le système évolue selon un processus de naissance et de mort, préciser l'espace des états et les probabilités de transition.

2. Déterminer la loi du nombre de clients en régime stationnaire, le nombre moyen de clients dans le salon et la proportion de clients perdus.

<u>Solution</u> : Arrivées des clients $PP(\lambda)$ avec $\lambda = 2$ ar/h

Dans le salon, il y a 2 coiffeurs

Pour chaque coiffeur, la durée de service $D \sim Exp(\mu)$ avec $\mu = 2$ ser/h.

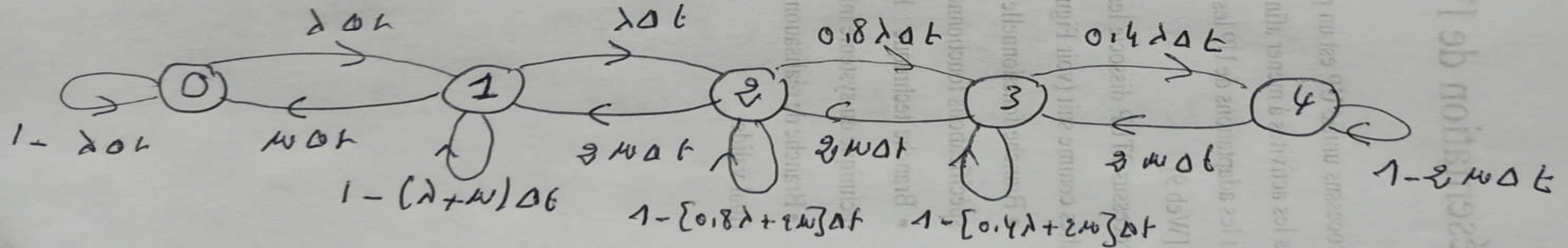
Le salon possède 2 fauteuils d'attente, si les 2 fauteuils sont occupés aucun client ne rentre.

Le système (salon de coiffure) est décrit par :

$X(t)$ = nbre de clients dans le salon à la date t ;

$\forall\, t \geq 0$; $X(t) \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = E$ espace des états.

1) Graphe associé aux probabilités de transition entre t et $t+\Delta t$



$P_{23}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 3 / X(t) = 2\} = P\{$ 1 arrivée et qui rentre et 0 departs pendant $\Delta t / X(t) = 2\}$

$= P\{$ 1 arrivée et qui rentre $/ X(t) = 2\}$ $P\{$ 0 departs pendant $\Delta t / X(t) = 2\}$

$= (\lambda \Delta t)(0{,}8)(1 - 2\mu \Delta t) = 0{,}8 \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$P_{34}(\Delta t) = P\{$ 1 arrivée et qui rentre $/ X(t) = 3\}$ $P\{$ 0 departs pendant $\Delta t / X(t) = 3\}$

$= (\lambda \Delta t)(0{,}4)(1 - 2\mu \Delta t) = 0{,}4 \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

Donc $\{X(t), t \geq 0\}$ est un PNM

taux de naissance : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$; $\lambda_2 = 0{,}8\lambda$; $\lambda_3 = 0{,}4\lambda$

taux de mort : $\mu_1 = \mu$; $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2\mu$

2) Le regime stationnaire existe car le nombre d'etats est fini

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0 = \frac{\lambda \lambda}{\mu (2\mu)} P_0 = \frac{P_0}{2} = 0{,}5 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} P_0 = \frac{\lambda . \lambda . (0.8\lambda)}{\mu (2\mu)(2\mu)} P_0 = 0.2 P_0$$

$$P_4 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} P_0 = \frac{\lambda . \lambda . (0.8)(0.4\lambda)}{\mu (2\mu)(2\mu)(2\mu)} P_0 = 0.04 P_0$$

On calcule P_0 :

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

$$P_0 + P_0 + 0.5 P_0 + 0.2 P_0 + 0.04 P_0 = 2{,}74 P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{2{,}74}$$

$$P_0 = \frac{100}{274} = \frac{50}{137} \; ; \; P_1 = P_0 = \frac{50}{137} \; ; \; P_2 = \frac{25}{137} \; ; \; P_3 = \frac{10}{137} \; ; \; P_4 = \frac{2}{137}$$

- Nombre moyen de client dans le salon en regime stationnaire

$$E(X) = \sum_{n=0}^{4} n P_n = 0 \times P_0 + 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + 3 \times P_3 + 4 \times P_4 = \frac{50 + 50 + 30 + 8}{137} = \frac{138}{137} \approx 1$$

- Proportion de clients perdus : $P[\text{Perte} / X = 4] = 1$; $P[\text{Perte} / X = 3] = 0{,}6$; $P[\text{Perte} / X = 2] = 0.2$

$$P[\text{Perte} / X = 1] = P[\text{Perte} / X = 0] = 0$$

En utilisant la formule des probabilités totale

$$P[\text{Perte}] = \sum_{i=0}^{4} P[\text{Perte} / X = i] \, P\{X = i\} = 0.2 P_2 + 0.6 P_3 + P_4 = \frac{5 + 6 + 2}{137} = \frac{13}{137} \approx 0.095$$

Donc 9.5% de clients perdus

<u>Exercice n°2 :</u>

un centre de sécurité sociale dispose de G guichets de réception($2<G<7$). Les arrivées des clients à ce centre suivent un processus de Poiso n de taux λ. La durée moyenne de traitement du dossier d'un client suit une loi exponentielle de taux μ. On s'intéresse au nombre de personnes présentes dans la salle d'attente du centre. On suppose que cette salle peut contenir un maximum de s personnes ($s>4$).

1. **Identifier le processus et tracer le graphe correspondant en évaluant les arcs.**
2. **On suppose que le centre dispose de $G=4$ guichets et que $\lambda=\mu$, déterminer :**
   a) **La condition d'existence du régime stationnaire ?**
   b) **L'expression de p_n ?**
   c) **La capacité de la salle d'attente pour qu'un client qui arrive ait 90 % de chance de trouver une place ?**