TD PNM

Exercice n°4 :

Un atelier comprend m=5 machines automatiques qui sont entretenues par 2 répara teurs. Pour chaque machine, les pannes arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ. Les réparateurs ne peuvent réparer qu'une machine à la fois, le temps de réparation suit une distribution exponentielle de paramètre μ. Le système est décrit par :

$X(t)$ = Nombre de machines en pannes à la date t.

1. **Montrer que $\{X(t) ; t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort? préciser l'espace des états et tracer le graphe associé ?**
2. **Calculer les probabilités stationnaires ?**
3. **calculer pour $\lambda=\mu$:**
   a) **La probabilité que les réparateurs ne soient pas occupés ?**

   b) **Le nombre moyen de machines qui fonctionnent?**

Solution : L'atelier comprend $m = 5$ machines qui fonctionnent de façon independante

Pour chaque machine i, $i = \overline{1,5}$, les pannes arrivent selon un $PP(\lambda)$

Dans l'atelier travaille 2 réparateurs qui travaillent de façon independante

Durée de reparation de chaque machine $R \sim Exp(\mu)$

Le système (L'atelier) est decrit par :

$X(t)$ = Nbre de machines en pannes à la date t.

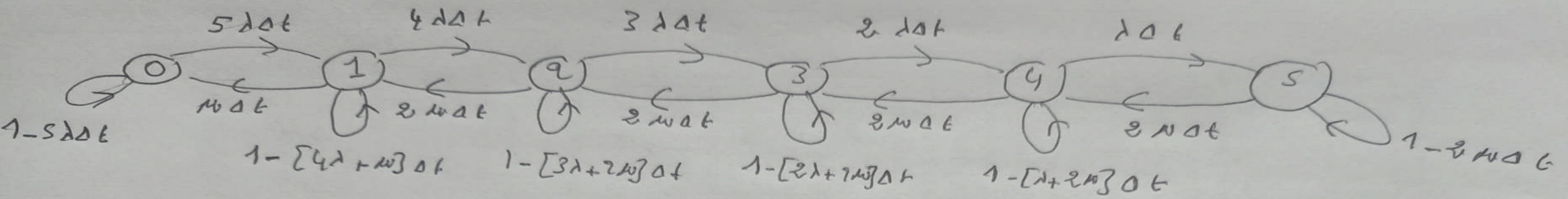
$\forall t \geq 0$; $X(t) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = E$

$\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus aleatoire à valeurs dans l'espace des etats :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

1) $\{X(t), t \geq 0\}$ est un PNM ?

Graphe associé aux probabilités de transition entre t et $t + \Delta t$



• $P_{00}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=0 / X(t)=0\} = P\{$ aucune machine en panne pendant Δt / 5 machines fonctionnent $\}$

$= (1-\lambda\Delta t)^5 = 1-5\lambda\Delta t$ (voir exemple du cours)

$P_{01}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=1 / X(t)=0\} = P\{$ exactement une panne pendant Δt / 5 machines fonctionnent $\}$

$= 5(\lambda\Delta t)(1-\lambda\Delta t)^4 = 5\lambda\Delta t$

$P_{02}(\Delta t) = P_{03}(\Delta t) = P_{04}(\Delta t) = P_{05}(\Delta t) = o(\Delta t) = 0$

car Prob$\{$ d'avoir 2 pannes au plus pendant Δt / 5 machines fonctionnent $\} = o(\Delta t) = 0$

• $P_{10}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=0 / X(t)=1\} = P\{$ 1 reparation et aucune panne pendant Δt / 1 machine en panne $\}$

$= P\{$ 1 reparation pendant Δt / 1 machine en panne $\} \times P\{$ 0 panne pendant Δt / 4 fonctionnent $\}$

$= P\{R < t+\Delta t / R > t\} \times (1-\lambda\Delta t)^4 = P\{R < \Delta t\}(1-4\lambda\Delta t)$

$= \mu\Delta t(1-4\lambda\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$

$P_{12}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 2 / X(t) = 1\}$ = $P\{$aucune reparation et 1 panne pendant Δt / 1 machine en panne$\}$

$= P\{R > \Delta t\}\, 4\lambda\Delta t = (1 - \mu\Delta t)\, 4\lambda\Delta t = 4\lambda\Delta t$

$P_{13}(\Delta t) = P_{14}(\Delta t) = P_{15}(\Delta t) = o(\Delta t)$

$P_{11}(\Delta t) = P\{$aucune panne et aucune reparation pendant Δt/1 machine en panne$\}$ + $\underbrace{P\{\text{1 panne et 1 rep pendant } \Delta t/\text{1 mach en panne}\}}_{o(\Delta t)}$

$= (1 - \mu\Delta t)(1 - 4\lambda\Delta t) = 1 - [4\lambda + \mu]\,\Delta t$

- Supposons qu'à la date t, on a 2 machines en pannes cad $X(t) = 2$; comme dans l'atelier travaille 2 reparateurs, donc les 2 machines sont en cours de reparation

  Appelons R_1 durée de rep de la 1ère machine (1er rep) et R_2 durée de rep de la 2ème mach (2ème rep)

  R_1 et R_2 sont indtes $\sim Exp(\mu)$

$P_{20}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = 0 / X(t) = 2\}$ = $P\{$2 rep pendant Δt et aucune arrivée pendant Δt / $X(t) = 2\}$

$= P\{R_1 < \Delta t$ et $R_2 < \Delta t\}(1 - 3\lambda\Delta t) = (\mu\Delta t)(\mu\Delta t)(1 - 3\lambda\Delta t) = o(\Delta t)$

- <u>Rmq</u> : $Min(R_1, R_2)$ date de la 1ère reparation $\sim Exp(2\mu)$

$P_{21}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=1 / X(t)=2\} = P\{$ 1 reparation et aucune panne pendant Δt / 2 machines en pannes $\}$

$= P\{\text{Min}(R_1, R_2) < \Delta t\} \times (1 - 3\lambda\Delta t) = 2\mu\Delta t(1-3\lambda\Delta t) = 2\mu\Delta t$

$P_{23}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=3 / X(t)=2\} = P\{$ aucune reparation et 1 panne pendant Δt / 2 machines en pannes $\}$

$= P\{\text{Min}(R_1, R_2) > \Delta t\} \times 3\lambda\Delta t = (1-2\mu\Delta t)3\lambda\Delta t = 3\lambda\Delta t$

$P_{24}(\Delta t) = P_{25}(\Delta t) = o(\Delta t)$

$P_{22}(\Delta t) = P\{$ aucune panne et aucune reparation pendant Δt / 2 machines en pannes $\}$

$= (1-2\mu\Delta t)(1-3\lambda\Delta t) = 1 - (3\lambda + 2\mu)\Delta t$

on remplit de la m̂ manière le reste du graphe

cas particulier

$P_{55}(\Delta t) = P\{$ aucune reparation pendant $\Delta t\} = 1 - 2\mu\Delta t$

$P_{54}(\Delta t) = P\{$ 1 reparation pendant $\Delta t\} = 2\mu\Delta t$

Donc $\{X(t), t \geq 0\}$ est un PNM avec l'espace des états $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

taux de naissance : $\lambda_i = (5 - i)\lambda$: $0 \leq i \leq 4$

taux de mort : $\mu_1 = \mu$; $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu$

2) le nbre des états est fini $\Rightarrow$ le régime stationnaire existe

$$P_1 = P[X = 1] = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{5\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = P[X = 2] = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0 = \frac{(5\lambda)(4\lambda)}{\mu (2\mu)} P_0 = 10\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = P[X = 3] = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} P_0 = \frac{(5\lambda)(4\lambda)(3\lambda)}{\mu (2\mu)(2\mu)} P_0 = 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$P_4 = P[X = 4] = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} P_0 = \frac{(5\lambda)(4\lambda)(3\lambda)(2\lambda)}{\mu (2\mu)(2\mu)(2\mu)} P_0 = 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$$

$$P_5 = P[X = 5] = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} P_0 = \frac{(5\lambda)(4\lambda)(3\lambda)(2\lambda)(\lambda)}{\mu (2\mu)(2\mu)(2\mu)(2\mu)} P_0 = \frac{15}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0$$

On calcule P_0 :

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

$$P_0 + 5\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)P_0 + 10\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \frac{15}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0 = 1$$

$$P_0\left[1 + 5\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 10\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \frac{15}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5\right] = 1$$

on deduit :

$$P_0 = \left[1 + 5\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 10\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \frac{15}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5\right]^{-1}$$

3) <u>Application</u> : dans la suite $\lambda = \mu$

a) $P\{2 \text{ reparateurs inoccupés}\} = P[X=0] = P_0 = \left[1+5+10+15+15+\frac{15}{2}\right]^{-1}$

$$= \frac{2}{107} = 0.0186$$

b) F = nbre de machines qui fonctionnent $\in \{0,1,2,3,4,5\}$

$P[F=0] = P[X=5] = P_5 = \frac{15}{2} P_0 = \frac{15}{107}$

$P[F=1] = P[X=4] = P_4 = 15 P_0 = \frac{30}{107}$

$P[F=2] = P[X=3] = P_3 = 15P_0 = \frac{30}{107}$

$P[F=3] = P[X=2] = P_2 = 10P_0 = \frac{20}{107}$

$P[F=4] = P[X=1] = P_1 = \frac{10}{107}$

$P[F=5] = P[X=0] = P_0 = \frac{2}{107}$

nbre moyen de machines qui fonctionnent : $E(F) = \sum_{n=0}^{5} n\,P[F=n]$

$E(F) = 0 \times P[F=0] + 1 \times P[F=1] + 2 \times P[F=2] + 3 \times P[F=3] + 4 \times P[F=4] + 5 \times P[F=5]$

$= \frac{1}{107}[30 + 60 + 60 + 40 + 10] = \frac{200}{107} = 1,87$ machines