TD Chaines de Markov

Exercice n°2 :

Une de ces deux matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.4} & \mathbf{0} & \mathbf{0.6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0} & \mathbf{0.7} \end{pmatrix} \ \mathbf{et}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.4} & \mathbf{0.6} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0} & \mathbf{0.9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Représente une matrice des probabilités de transition d’une chaîne de Markov aux états 1, 2, 3, 4, 5.

1. Préciser cette matrice.
2. Donner le graphe associé et calculer les périodes.

Solution de l'Ex n° 2

1)

La matrice des probabilités de transition d'une CM satisfait tjrs les 2 conditions suivantes

C1) tous les elements P_{ij} de la matrice sont tq : $0 \leq P_{ij} \leq 1$

C2) $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$; $\forall i \in E$ cad la somme des elements de chaque ligne est egale à 1

Considerons la matrice $A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & & & & \\ 2 & & & & & \\ 3 & & & & & \\ 4 & & & & & \\ 5 & & & & & \end{array}$

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les lignes et les colonne sont indexées par les etats de la CM

Espace des etats :

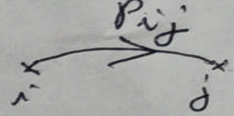
$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Dans la matrice A, C1 est verifiée mais C2 n'est pas verifiée, en effet la somme des elements de la 4ème ligne $\sum_{j=1}^{5} P_{4j} = 1.1 > 1$

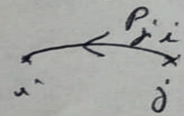
m̂ chose pour la 5ème ligne $\sum_{j=1}^{5} P_{5j} = 0.9 < 1 \Rightarrow$ A n'est pas une matrice d'une CM

Par contre la matrice B vérifie C1 et C2 $\Rightarrow$ B est une matrice d'un C.M.

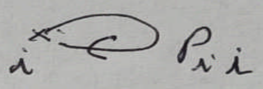
2) A la matrice B, on peut associer un graphe orienté $G = (E, U)$ tq l'ensemble des sommets est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ c'est l'ensemble des états et l'ensemble des arcs U est tq ; l'arc $(i, j) \in U \Leftrightarrow P_{ij} > 0$;



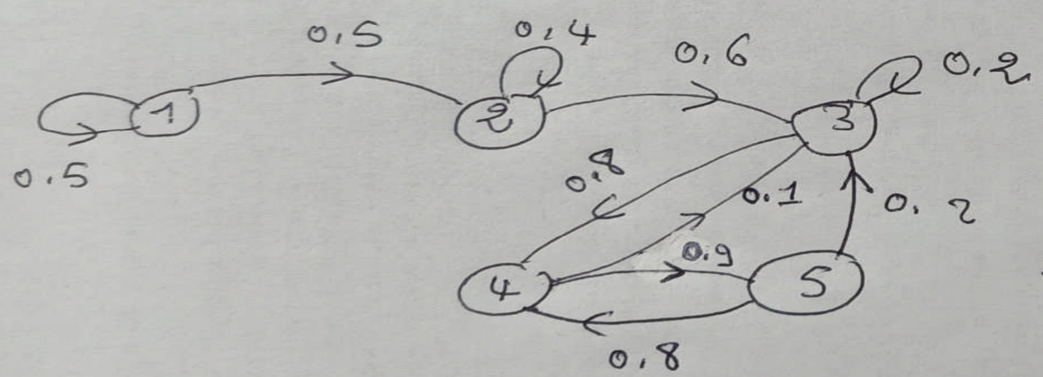
graphe orienté ; $(i, j) \neq (j, i)$ en effet $(j, i) \in U \Leftrightarrow P_{ji} > 0$;



l'arc $(i, i) \in U \Leftrightarrow P_{ii} > 0$;



D'où le graphe associé à la matrice B :



Deux états i et j communiquent s'il existe un chemin pour aller de i à j et un autre chemin pour revenir de j à i

exp : les états 3, 4 et 5 communiquent les autres états ne communiquent pas

Periode d'un etat i : $d(i) = pgcd\{n \geq 1 / P_{ii}^{(n)} > 0\}$

La periode de l'etat i est egale au pgcd sur les longueurs des chemins pour quitter et revenir à l'etat i.

si $d(i) = 1$; on dit que l'etat i est aperiodique

si 2 etats i et j communiquent alors $d(i) = d(j)$

Rmq : Le retour à l'etat i se fait tjrs apres un nombre de transition multiple de $d(i)$

Application : $d(1) = pgcd\{1, 2, 3, \dots\} = 1 = d(2) = d(3)$ sont aperiodiques

si l'etat i possede un boucle $\Rightarrow d(i) = 1$

Reciproque est fausse ; en effet l'etat 4 ne possede pas de boucle

$d(4) = pgcd\{2, 3, \dots\} = 1 = d(3) = d(5)$ car les etats communiquent

lors que la periode de l'etat i n'existe pas on pose $d(i) = 0$

Exercice n°1 :

Deux joueurs A et B jouent avec une pièce de monnaie truquée de telle sorte qu'il y ait deux fois plus de chance d'obtenir pile que face. Le joueur A dispose de 4 DA et le joueur B de 3 DA. Le joueur A jette la pièce, s'il obtient pile il reçoit 1 DA de B sinon il donne 1 DA à B. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné.

1. Donner un modèle de Markov pour représenter ce jeu.
2. Donner la matrice des probabilités de transition.

Solution de l'ex n° 1 : X_n = avoir de A après la partie "n"

$\{X_n, n \in IN\}$ est un processus aléatoire à valeurs dans l'espace des états :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

le processus $\{X_n, n \in IN\}$ décrit l'évolution de l'avoir de A au cours du jeu

Question : $\{X_n, n \in IN\}$ est une CM

Supposons qu'à la partie n, l'avoir de A est i_n DA ($i_n \neq 0$ et $i_n \neq 7$)

considérons son avoir à la partie n+1 cad X_{n+1}

$$X_{n+1} = \begin{cases} i_n + 1 & \text{si A gagne à la partie } n+1 \text{ (il obtient pile)} \\ i_n - 1 & \text{si A perd à la partie } n+1 \text{ (il obtient face)} \end{cases}$$

$$\text{Donc } X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si A obtient pile à la partie "} n+1 \text{"} \\ X_n - 1 & \text{si A obtient face à la partie "} n+1 \text{"} \end{cases}$$

Donc $P[X_{n+1} = j / X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1] = P[X_{n+1} = j / X_n = i_n]$

$\forall n$ et $\forall i_1, \dots, i_n, j \in E$

Donc $\{X_n, n \in IN\}$ vérifie la propriété d'absence de mémoire $\Rightarrow \{X_n, n \in IN\}$ est une CM

Rmq : si $X_n = 0$ alors A est ruiné, donc le jeu s'arrête $\Rightarrow X_{n+1} = 0$, on reste à l'état 0

idem si $X_n = 7$ alors B est ruiné, donc le jeu s'arrête $\Rightarrow X_{n+1} = 7$, on reste à l'état 7

Prob{A gagne à la partie n} = Prob{A obtient pile à la partie n} = p

Prob{A perd à la partie n} = Prob{A obtient face à la partie n} = q

Comme A a 2 fois plus de chance d'obtenir pile que face $\Rightarrow p = 2q$

comme $p + q = 1 = 3q \Rightarrow q = \frac{1}{3}$ et $p = \frac{2}{3}$

On calcule les probabilités de transition :

$$P_{ij} = P[X_{n+1} = j / X_n = i] = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ q & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

à partir d'un état i, les seules transitions possibles sont :

$$i-1 \xleftarrow{\text{A perd}} i \xrightarrow{\text{A gagne}} i+1$$

On remarque aussi que les probabilités de transition sont indépendantes de "n"

$\Rightarrow$ la CM est homogène

Cas particuliers : $P\{X_{n+1} = 0 / X_n = 0\} = 1$

$P\{X_{n+1} = 7 / X_n = 7\} = 1$

D'où la matrice des probabilités de transition en 1 pas (après une partie) est donnée par :

$$
P = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

avec $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$

Si on veut connaître la matrice qui donne les ≠ transitions après 2 parties $\Rightarrow P^2$

idem ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ 3 parties $\Rightarrow P^3$

En général la matrice en n pas (pour $n \geq 1$) est donnée par P^n

Distribution initiale : $P_i^0 = P\{X_0 = i\}$ pour $i \in E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

X_0 = avoir de A au début du jeu

On sait qu'au début du jeu, l'avoir de A est de 4 DA $\Rightarrow P[X_0 = 4] = 1$

et on deduit que $P[X_0 = i] = 0$; si $i \neq 4$

D'où $P_4^0 = 1$; $P_i^0 = 0$ pour $i \neq 4$

La loi de X_0 ; sera notée $\Phi(0) = (P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_4^0, P_5^0, P_6^0, P_7^0)$

$$= (P[X_0=0], P[X_0=1], P[X_0=2], P[X_0=3], P[X_0=4], P[X_0=5], P[X_0=6], P[X_0=7])$$

$$= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

Soit X_1 = avoir de A après 1 partie → on appelle $\Phi(1)$ la loi de X_1

D'après le cours on a $\Phi(1) = \Phi(0) . P$

idem si on appelle $\Phi(2)$ la loi de X_2 ; on a $\Phi(2) = \Phi(1) . P = \Phi(0) . P^2$

et de manière generale : si $\Phi(n)$ est la loi de X_n ; pour $n \geq 0$,

on a tjrs les relations :

$$\Phi(n) = \Phi(n-1) . P$$
$$= \Phi(0) . P^n$$

et $\Phi(n) = (P[X_n=0], P[X_n=1], P[X_n=2], P[X_n=3], P[X_n=4], P[X_n=5], P[X_n=6], P[X_n=7])$

Exercice n°3 :

Dans un certain village, les fumeurs adoptent un type de cigarettes pour une durée déterminée (1 mois), renouvelable. Un sondage, effectué sur un échantillon représentatif de cette population a donné les chiffres suivants ; parmi les fumeurs de brunes, 65% sont fidèles à leur choix, tandis que 35% préfèrent essayer les blondes. De même parmi les fumeurs de blondes, 70% restent fidèles et 30% changent pour des brunes.

Initialement, il y avait 50% de fumeurs de brunes et 50% de fumeurs de blondes.

1. Peut-on représenter ce problème par une chaine de Markov, si oui préciser l'espace des états et la matrice des probabilités de transition.
2. En supposant que les résultats du sondage restent les mêmes dans le futur ; Quelle est l'état du marché après 2 mois ?
3. Peut-on prédire quelle sera la tendance au bout de plusieurs mois ? Y aurait-il plus de fumeurs de blondes, ou plus de fumeurs de brunes ?

Solution de l'ex n° 3 : 1) Voir est-ce qu'on peut associer une matrice de Markov au problème posé.

En effet : X_n = type de cigarette adopté par le fumeur au mois "n"

$\{X_n, n \geq 1\}$ est un processus aleatoire à valeurs dans l'ensemble des états $E = \{\text{brunes}, \text{blondes}\}$

Representer les probabilités de passage entre les états après 1 mois dans une matrice

$$\xrightarrow{1 \text{ mois}} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{brunes} & \text{blondes} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{brunes} \\ \text{blondes} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$$

tous les elements de la matrice sont ≥ 0
la somme sur chaque Ligne = $\underline{1}$
$\Rightarrow$ c'est une matrice de Markov

Donc, on peut representer ce problème par une CM.

Distribution initiale du processus $\Leftrightarrow$ La loi de X_0 ; on va la noter $\varphi(0)$

$$\varphi(0) = \Big(P[X_0 = \text{brunes}] , P[X_0 = \text{blondes}] \Big) = (0.5 , 0.5)$$

2) On suppose que les resultats du sondage restent les mêmes dans le futur

$\Leftrightarrow$ La matrice des probabilités de transition reste la même dans le futur

$\Leftrightarrow$ La CM est homogène dans le temps (u.t = mois)

On veut connaitre l'état du marché après 2 mois ie connaitre la loi de X_2 cad $\varphi(2)$

On utilise le resultat suivant : La loi de X_n cad $\varphi(n)$ est donnée par :

$$\varphi(n) = \varphi(n-1) \cdot P = \varphi(0) \cdot P^n$$

Calcul de $\varphi(2)$:

1ère methode : $\varphi(2) = \varphi(0) \cdot P^2 = (0.5, 0.5) \begin{pmatrix} 0.5275 & 0.4725 \\ 0.405 & 0.595 \end{pmatrix} = (0.46625, 0.53375)$

part du marché des blondes est 53,375 %

2ème methode : $\varphi(1) = \varphi(0) \cdot P = (0.475, 0.525)$

$\varphi(2) = \varphi(1) \cdot P$ on retrouve le même resultat

3) La tendance au bout de plusieurs mois

Etat du marché après 10 mois : $\Phi(10) = (0.4615, 0.5385)$

" " " " 11 " : $\Phi(11) = (0.4615, 0.5385)$

" " " " 12 " : $\Phi(12) = \Phi(11) = \Phi(10)$

Etat du marché après plusieurs mois $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi(n) = \Phi(10) = \Phi^* = (q_1^*, q_2^*)$

q_1^* part du marché des brunes $= 46,15\%$.

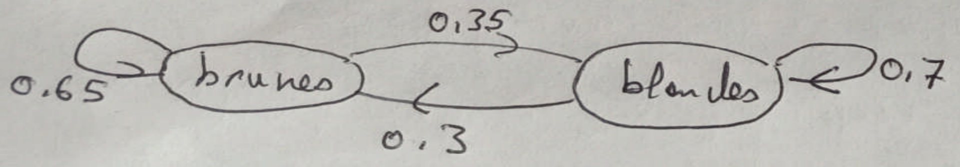
q_2^* " " " des blondes $= 53,85\%$.

Φ^* distribution limite ; elle definit le regime stationnaire de la CM.

Φ^* est independante de n et de l'etat initiale du marché.

Autre methode pour calculer la distribution limite $\Phi^* = \lim\limits_{n \to +\infty} \Phi(n)$ etat du marché apres plusieurs mois.

Graphe associé à la CM



Tous les etats communiquent $\Rightarrow$ CM irreductible

les etats sont aperiodiques

Dans une CM irreductible et aperiodique et ayant un nombre fini d'etat la limite $\Phi^* = \lim_{n \to +\infty} \Phi(n)$ existe tjrs et est solution du système

$$\begin{cases} \Phi^* = \Phi^* P \\ \sum_{i \in E} q_i^* = 1 \end{cases}$$

On dit que Φ^* definit le regime stationnaire (ou Permanent) de la CM. Φ^* est independante de n et de l'etat initial de la CM.

$$(q_1^*, q_2^*) \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.65 q_1^* + 0.3 q_2^* , 0.35 q_1^* + 0.7 q_2^*)$$

$$\begin{cases} 0.65 q_1^* + 0.3 q_2^* = q_1^* \\ 0.35 q_1^* + 0.7 q_2^* = q_2^* \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.35 q_1^* + 0.3 q_2^* = 0 \\ 0.35 q_1^* - 0.3 q_2^* = 0 \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.35 q_1^* - 0.3 q_2^* = 0 \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

$q_2^* = 1 - q_1^*$ on remplace dans la 1ère equation $0.35 q_1^* - 0.3(1 - q_1^*) = 0$

$\Rightarrow 0.65 q_1^* = 0.3 \Rightarrow q_1^* = \frac{0.3}{0.65} = 0.4615$ On retrouve les mêmes resultats