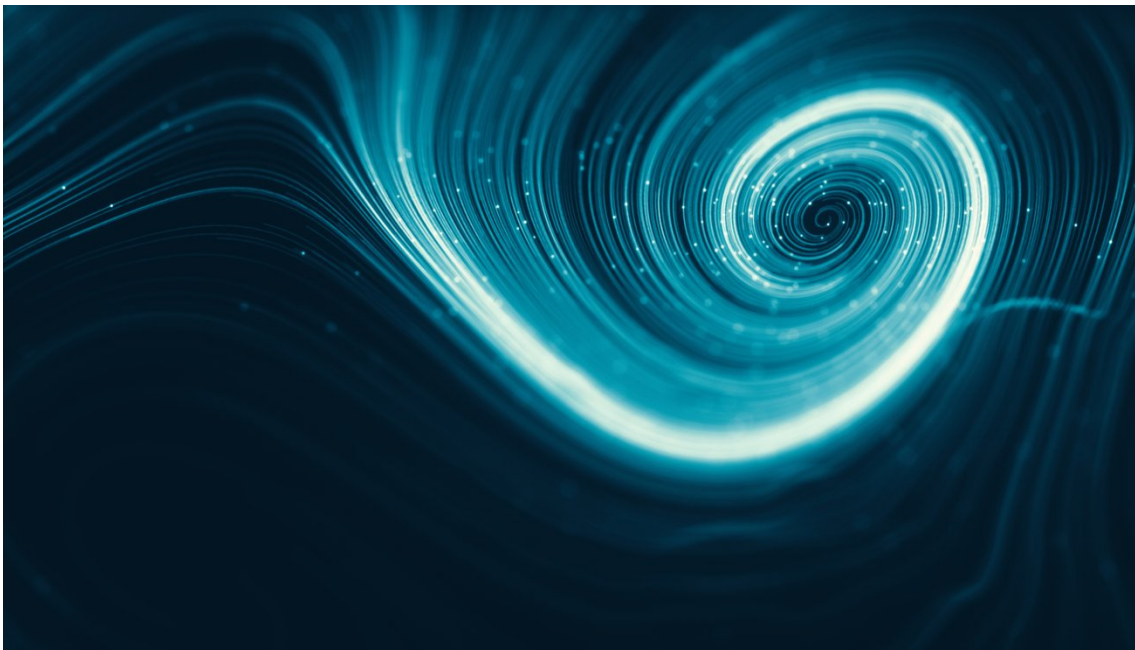


Résolution des équations de Navier-Stokes par l'informatique quantique

IQ01 - A23



Raphael Chauvier, Robin Dereux, Raphael Nguyen

Table des matières

1	Introduction	2
2	Les équations de Navier-Stokes	3
2.1	Histoire	3
2.2	Formes des équations	3
2.3	Applications actuelles et théoriques	5
3	Penser quantique, une bonne idée ?	7
3.1	L'informatique quantique	7
3.2	Comprendre une solution quantique	7
3.3	Pourquoi les équations de Navier Stokes sont elles si difficiles à résoudre ?	9
3.3.1	Limites des méthodes classiques : Exploration des limitations des ordinateurs classiques dans la résolution de ces équations	9
3.3.2	Vers la résolution quantique d'Équations Différentielles	10
3.3.3	Méthode des Éléments Finis (FEM) et Informatique Quantique	11
3.4	Limites	12
3.4.1	Des difficultés matérielles	12
3.4.2	Des difficultés algorithmiques	13
4	Vers une résolution quantique des équations de Navier-stokes	14
4.1	Simulations et méthodes actuelles	14
4.1.1	Méthode MAC - Méthode de Chorin	15
4.1.2	Maillage - Discrétisation	17
4.1.3	Simulation par éléments finis	19
4.2	Simulation par éléments finis avec la quantique	20
4.3	Quelques pensées suite à la lecture de ces papiers	21
5	Conclusion	22
6	Annexes	23
7	Bibliographie	25

1 Introduction

La science contemporaine se heurte à des défis de plus en plus complexes. Dans le domaine fascinant de la dynamique des fluides, les équations de Navier-Stokes se dressent comme un monument de complexité et d'élégance. En tant que pilier fondamental de la mécanique des fluides, ces équations nous aident à comprendre des phénomènes allant du simple écoulement de l'eau dans une rivière à la modélisation des courants atmosphériques. Pourtant, leur résolution reste un défi majeur, posant des questions aussi profondes qu'insaisissables.

Dans ce contexte, l'émergence de l'informatique quantique offre une lueur d'espoir. Avec sa capacité à traiter des informations d'une manière radicalement différente de l'informatique classique, elle suggère de nouvelles approches pour aborder des problèmes longtemps jugés insurmontables. Les équations de Navier-Stokes, avec leur complexité inhérente, constituent un terrain d'expérimentation idéal pour tester les promesses de cette technologie révolutionnaire.

Ce rapport tente de trouver dans la littérature des liens entre les équations de Navier Stokes et l'informatique quantique, en particulier sous l'angle de la résolution numérique. Nous allons d'abord explorer l'histoire et les différentes versions des équations de Navier-Stokes, en soulignant leur rôle et leur utilisation dans les contextes théoriques et actuels. Ensuite, nous caractériserons l'approche par l'informatique quantique, en mettant en évidence différentes caractéristiques clés pour comprendre comment elle pourrait être à l'origine de solutions nouvelles et plus efficaces pour résoudre les équations de Navier-Stokes, et situer ses limites. Nous analyserons finalement quelques méthodes classiques pour approcher numériquement les équations de Navier Stokes. Nous nous intéresserons particulièrement au principe d'intégration de composantes quantiques dans des algorithmes quantiques, thème apparu de manière récurrente dans nos recherches.

2 Les équations de Navier-Stokes

2.1 Histoire

Les équations de Navier-Stokes ont été découvertes par Claude-Louis Navier (1785-1836) et George Gabriel Stokes (1819-1903), deux physiciens et mathématiciens qui ont apporté des contributions significatives à la compréhension des phénomènes fluidiques au XIXe siècle. Navier, ingénieur français, a formulé en 1822 les premières équations mathématiques qui décrivaient le mouvement des fluides, jetant ainsi les bases de ce qui allait devenir les équations de Navier-Stokes. Ces équations ont été élaborées en considérant un élément infinitésimal d'un fluide, et en se questionnant sur l'interaction des forces de cisaillement et de pression qui l'affectaient. Les mathématiques de la physique représentent cette approche par un champ de vecteurs, qui permet d'identifier par des coordonnées ces éléments infinitésimaux. On recherche ainsi une fonction multidimensionnelle qui nous donne les caractéristiques du mouvement de points dans le fluide, en prenant en compte les différentes forces qui l'affectent. Il s'agit d'un problème de résolution d'équations différentielles.

En 1842, le physicien et mathématicien britannique Stokes a approfondi ces travaux en incorporant la viscosité dans les équations, établissant ainsi le cadre pour comprendre les forces internes dans les fluides. Les nouvelles équations incluent ainsi un terme visqueux pour modéliser la résistance du fluide aux déformations. Ces forces visqueuses sont dites internes et dépendent des autres constituants du fluide, ce qui ajoute une très grande complexité à ces équations, caractérisées comme équations différentielles non linéaires. Les scientifiques ne sont toujours pas parvenus à trouver une solution générale des équations de Navier Stokes à ce jour.

L'union des efforts de ces deux scientifiques a ainsi conduit à la formulation des équations de Navier-Stokes, une avancée majeure dans la modélisation mathématique des fluides. Ces équations restent au cœur de la mécanique des fluides contemporaine, et représentant un défi intellectuel pour les physiciens modernes : depuis les années 2000, l'institut de mathématiques Clay a annoncé offrir un prix du millénaire d'un montant de 1 million de dollars à quiconque démontrerait l'existence (et la continuité) des solutions de ces équations.

Même si elles ne sont pas résolues dans le cas général, les équations de Navier Stokes font l'objet de nombreuses simplifications et de résolution spécifique à certains domaines. Elles trouvent donc déjà de nombreuses applications. Le physicien britannique Osborne Reynolds a notamment introduit le nombre de Reynolds en 1883, permettant de caractériser le comportement des écoulements à partir d'un rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses. Lorsque ce nombre est faible, l'écoulement du fluide présente peu de turbulences, c'est l'écoulement dit laminaire qui domine, plus prédictibles. Les Navier-Stokes peuvent dans ce cas être simplifiées dans le cas des écoulements à faible nombre de Reynolds. Les équations d'Euler sont notamment une version des équations de Navier Stokes pour lesquelles les forces visqueuses sont totalement négligées. Ces équations sont quasilineaires et bien plus simples à résoudre.

2.2 Formes des équations

Les équations de Navier-Stokes, fondamentales en mécanique des fluides, sont dérivées du principe fondamental de la dynamique, exprimé par la seconde loi de Newton $F = ma$. Le processus de

modélisation se décompose en :

1. Établissement de l'état initial de l'objet d'étude ;
2. Identification des forces agissant sur l'objet, telles que la pression et la viscosité ;
3. Résolution des équations pour décrire le comportement du fluide.

Ces équations se présentent sous différentes formes selon les conditions et hypothèses :

- **Fluide incompressible** : Pour des fluides à masse volumique constante, les équations de Navier-Stokes s'expriment comme :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

où ρ est la densité constante, \mathbf{u} le champ de vitesse, p la pression, μ la viscosité dynamique, et \mathbf{f} représente les forces extérieures.

L'introduction de la viscosité a permis de modéliser un phénomène particulier : la turbulence. Lorsque l'écoulement d'un fluide est lent, qu'il y a peu de mouvements, son écoulement est dit laminaire. Lorsque cet écoulement est plus dynamique, des perturbations appelées turbulences tendent à apparaître. De nature chaotique, ces turbulences apparaissent à de très nombreuses échelles et impactent fortement l'évolution des composants du fluide. Elles doivent être prise en compte. Cependant, leur présence à différentes échelles et en quantités variables font qu'il est très difficile de discrétiser l'espace sans risquer de manquer une partie essentielle du phénomène de mouvement du fluide. C'est une des difficultés qui rend l'approximation des équations de Navier Stokes difficile, en particulier pour les écoulements turbulents.

- **Fluide compressible** : Pour les fluides dont la masse volumique varie, comme les gaz, l'équation s'adapte en incluant les variations de densité :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \mathbf{f} \quad (2)$$

où τ représente le tenseur des contraintes visqueuses.

- **Régimes laminaires et turbulents** : Pour les écoulements laminaires, les équations standard de Navier-Stokes s'appliquent. Dans les écoulements turbulents, des termes additionnels ou des modèles de turbulence sont intégrés. Un exemple est l'approche $k - \varepsilon$ pour modéliser la turbulence :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

où k est l'énergie cinétique turbulente, ε le taux de dissipation, μ_t la viscosité turbulente, P_k la production de l'énergie cinétique turbulente, et $\sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$ sont des constantes du modèle.

La complexité des équations de Navier-Stokes provient de leur non-linéarité et des termes de convection, rendant leur résolution analytique difficile dans la plupart des cas pratiques. Des méthodes numériques sont donc souvent employées pour obtenir des solutions approximatives.

Enfin, ces équations sont adaptées pour des contextes variés, y compris en physique quantique, où elles sont modifiées pour tenir compte des propriétés uniques des fluides dans ces environnements. Ainsi, elles fournissent un cadre essentiel pour comprendre et prédire le comportement des fluides dans une multitude de contextes, allant de l'ingénierie classique à la recherche avancée en physique.

2.3 Applications actuelles et théoriques

Les équations de Navier Stokes, et en particulier leurs nombreuses simplifications et approximations numériques servent aujourd'hui de très nombreuses applications.

En météorologie, par exemple, elles sont au cœur des modèles climatiques et des systèmes de prévision météorologique, permettant de simuler avec précision la circulation générale de l'air, les perturbations météorologiques, ou encore les phénomènes de turbulences atmosphériques.

En océanographie, les équations de Navier-Stokes sont indispensables pour étudier des phénomènes tels que les courants marins, les vagues, les marées, ou les tsunamis. Cette compréhension approfondie des mouvements océaniques est cruciale, non seulement pour la navigation et l'exploitation marine, mais aussi pour anticiper et atténuer les impacts des catastrophes naturelles comme les tsunamis.

Dans le domaine de l'aérodynamique, ces équations jouent un rôle clé dans la conception et l'optimisation des véhicules. Elles permettent de calculer les forces et les moments exercés par l'air sur des objets en mouvement tels que des avions, des fusées ou des voitures, contribuant ainsi à améliorer leur performance et leur sécurité. De même, elles peuvent servir à prédire le comportement de flots à l'intérieur de tuyauteries, ou d'éléments plus complexes telles que des turbines, et ainsi de concevoir des structures parcourues par des fluides de manière à maîtriser le comportement de ces fluides en leur sein.

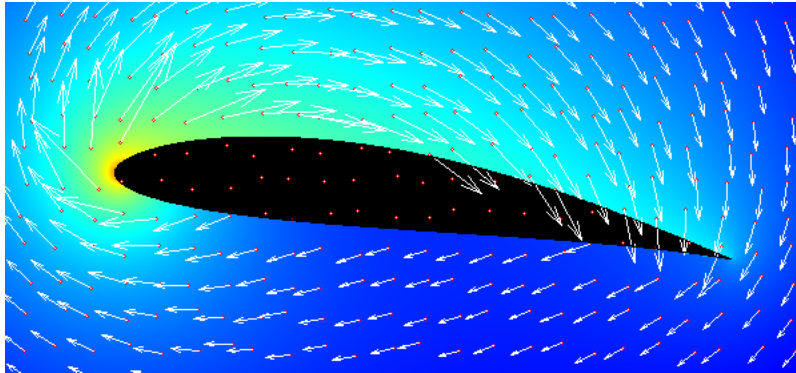


Figure 1: Visualisation des lignes de courant autour d'un profil aérodynamique selon les équations de Navier-Stokes

D'autres applications peuvent être plus inattendues : certains éditeurs de jeux vidéos ont travaillé directement sur ces équations pour simuler réalistiquement des fluides dans l'environnement virtuel.

Ces simplifications suivent des contraintes uniques : elles doivent privilégier l'esthétisme et le réalisme visuel, ainsi que pouvoir tourner en temps réel sur des machines aux caractéristiques très différentes, parfois très médiocres, tout au contraire des machines professionnelles utilisées par les scientifiques. Cela en fait un angle d'approche de Navier Stokes particulier et différent. En hydraulique, les applications des équations de Navier-Stokes sont tout aussi vastes. Elles permettent de déterminer le comportement des fluides dans des systèmes tels que les conduits, les canalisations, ou encore les turbines, optimisant ainsi les processus industriels et les infrastructures de gestion de l'eau.

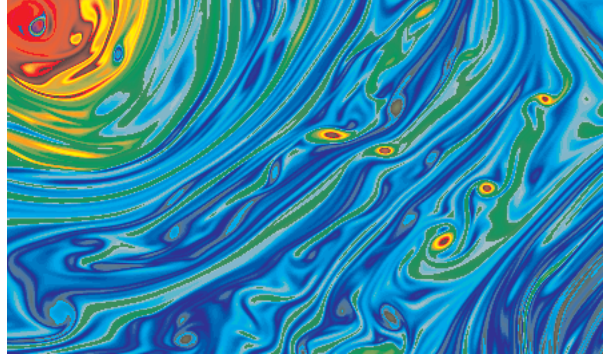


Figure 2: Ecoulement turbulent

Sur le plan théorique, la maîtrise de ces équations ouvre la porte à une compréhension plus profonde des phénomènes de fluides complexes, notamment la turbulence, qui reste l'un des grands mystères de la physique. En somme, la capacité à résoudre efficacement les équations de Navier-Stokes débloquent des perspectives inédites dans de nombreux secteurs, offrant des solutions innovantes aux défis actuels et futurs.

3 Penser quantique, une bonne idée ?

3.1 L'informatique quantique

L'informatique quantique s'est beaucoup développée au cours des dernières années : une théorie de l'information quantique s'est développée, des algorithmes pionniers sont apparus, puis des calculateurs et des frameworks pour améliorer l'accès à la technologie et l'expérimentation. Elle offre des voies expérimentales pour résoudre certains problèmes connus, mais est-ce applicable à la résolution des équations de Navier Stokes ? Et quelles pourraient être la formes de ces solutions quantiques ?

Pour répondre à cette question, intéressons nous à ce qui constitue un ordinateur quantique. Il s'agit un système qui transforme des qubits, unités abstraites représentées physiquement par des éléments nanoscopiques, par exemple des ions, et dont le comportement est typiquement modélisé par la physique quantique. Ces éléments nanoscopiques sont affectés par une série de composants, des portes, de sorte à provoquer diverses interactions et obtenir un résultat qui peut être interprété. L'ensemble de ces portes constitue un circuit quantique.

Grâce à ce système, l'informatique quantique bénéficie de sa propre arithmétique, bien distincte de celle de l'informatique classique. Il a par ailleurs été démontré que certains problèmes peuvent être résolus avec un nombre exponentiellement moins important d'opérations d'un système quantiques. On trouve ainsi dans la littérature différents travaux qui tentent d'appliquer l'informatique quantique à tout ou partie du problème de la résolution des équations de Navier Stokes.

3.2 Comprendre une solution quantique

L'arithmétique de l'informatique quantique bénéficie de multiples propriétés distinctives. Tout l'enjeu de l'informatique quantique dans le cadre des équations de Navier Stokes est de l'utiliser pour approcher numériquement les solutions de l'équation. En s'intéressant à ces propriétés et aux structures algorithmiques qu'a élaboré la recherche en informatique quantique, on pourra mieux comprendre d'où vient le gain de l'informatique quantique dans les solutions d'approximation décrites par la suite.

L'un des avantages les plus remarquables de l'informatique quantique est le **parralélisme**. Ce phénomène provient des propriétés d'intrication et de superposition quantique : le modèle quantique permet en effet aux qubits d'adopter des états dont la mesure donnera aléatoirement $|0\rangle$ et $|1\rangle$, en respectant une certaine proportion déterministe, qui peut être calculée à partir de la configuration du circuit quantique. Ces états sont exploités dans de nombreux algorithmes de la littérature pour "évaluer" simultanément plusieurs valeurs, par exemple le 0 et le 1 binaire pour un système à 1 qubit. Cela est l'une des principales raisons de la réduction de complexité constatée de certains algorithmes classiques sur leur équivalent quantique.

L'intrication quantique, quant à elle, introduit au niveau algorithmique des dépendances entre les qubits, lorsqu'ils sont affectés par certaines portes. Ces dépendances nous imposent de considérer l'ensemble de l'état du système plutôt que chaque qubit individuellement.

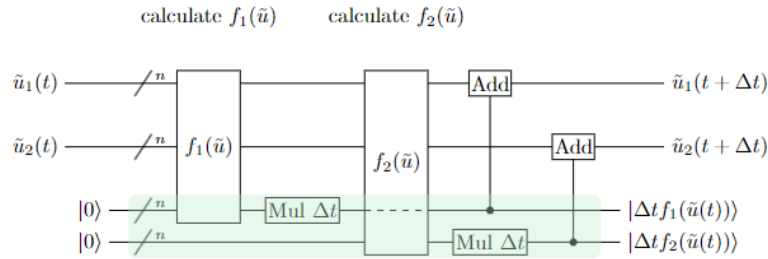


Figure 3: Circuit du schéma d'Euler explicite pour une équation présentée dans le papier.

L'utilisation du parallélisme devient d'autant plus flagrant en prêtant attention à l'utilisation par du concept d'oracle dans de nombreux travaux. Il s'agit d'un circuit quantique qui génère un état quantique du système qui correspond à la superposition des différents états que peut prendre le problème représenté. Les autres composants du circuit pourront exploiter cet état du système pour produire des résultats. Cette approche et ses enjeux est notamment expliquée en détails dans les travaux de David Deutsch and Richard Jozsa.

Nous avons notamment rencontré au cours de nos recherches une proposition d'implémentation de différents schémas itératifs de résolution d'équations différentielles simples, présentées dans un article de Zanger et. al. [Bibliographie 2.3]. L'élaboration de leurs circuits montrent une utilisation des oracles, représentés dans les circuits. Dans ce cas particulier, les oracles représentent l'expression de la dérivée de la solution.

Il a été montré que la complexité de certains problèmes peut être drastiquement réduite en tirant bénéfice de ces propriétés. On pourrait alors résoudre en temps polynomial certains problèmes dont la solution classique a une complexité exponentielle. Il faut néanmoins garder à l'esprit que les circuits quantiques élaborés ne réduisent pas systématiquement les temps de calcul : c'est le cas du circuit présenté ci-dessus. Cependant l'existence de ce type de recherche montre qu'il y a un intérêt à rechercher des méthodes de résolution quantique à des problèmes similaires à celui des équations de Navier Stokes, les équations différentielles.

Existe-t-il des algorithmes quantiques efficaces pour le problème spécifique de la résolution de Navier Stokes ? Les travaux de A. Childs et al. nous montrent les performances supérieures d'un facteur polynomial de l'algorithme QLE (Quantum Linear Equation) par rapport à ses équivalents classiques. QLE résout des systèmes linéaires de type $Ax = b$, qui constituent un sous problème de certaines méthodes d'approximation de Navier Stokes par éléments finis, ce qui suggère une possible accélération en intégrant QLE. Nous aborderons cela un peu plus en détail dans la partie 4.

Maintenant que nous avons vu pourquoi l'informatique quantique pourrait se révéler pertinente pour la résolution des équations de Navier Stokes, revenons brièvement à cette équation.

3.3 Pourquoi les équations de Navier Stokes sont elles si difficiles à résoudre ?

3.3.1 Limites des méthodes classiques : Exploration des limitations des ordinateurs classiques dans la résolution de ces équations

Les équations de Navier-Stokes ont aujourd'hui de nombreuses façons de discrétisations possibles. Les méthodes classiques pour les résoudre, telles que la méthode des éléments finis (FEM), rencontrent plusieurs défis dont nous parlerons en les comptant au quantique. Parmi les méthodes possibles pour résoudre numériquement ces équations, les plus connues sont:

La méthode des différences finies : Elle consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. La méthode discrétise le fluide en un grand nombre de petites cellules et simulent son comportement de manière itérative.

La méthode des éléments finis : Elle représente une approche avancée de discrétisation, essentielle pour transformer des équations différentielles complexes en un système d'équations algébriques plus maniables. Cette technique est particulièrement efficace pour aborder les problèmes liés aux équations de Navier-Stokes.

Dans cette dernière méthode, le domaine d'étude est subdivisé en un réseau de sous-domaines plus petits, appelés éléments finis. Ces éléments peuvent être visualisés comme de petites parcelles ou volumes qui, ensemble, forment la totalité de la région étudiée. Cette subdivision permet d'appliquer les équations différentielles de manière plus gérable à chaque élément individuel, plutôt que d'essayer de résoudre le problème sur l'ensemble du domaine en une seule fois.

Pour les équations de Navier-Stokes en particulier, une approche mixte est souvent adoptée. Cette méthode requiert la satisfaction d'une condition spécifique, connue sous le nom de condition 'inf-sup'. Cette condition est essentielle pour assurer la stabilité et la précision des solutions obtenues par la méthode des éléments finis.

Une fois les équations résolues pour chaque élément, les solutions sont interpolées sur chaque élément à l'aide de fonctions de forme. Ces fonctions jouent un rôle crucial en permettant une transition en douceur des solutions d'un élément à l'autre, assurant ainsi une représentation cohérente et précise sur l'ensemble du domaine.

Cette technique est extrêmement utile dans le cadre de la modélisation des flux fluidiques complexes, offrant une analyse détaillée et précise du comportement des fluides sous diverses conditions. Elle est fréquemment utilisée dans les simulations de dynamique des fluides computationnelles (CFD), où elle permet d'obtenir des prédictions raffinées et fiables sur le comportement des fluides, que ce soit en termes de mouvement, de pression, ou d'autres variables pertinentes.

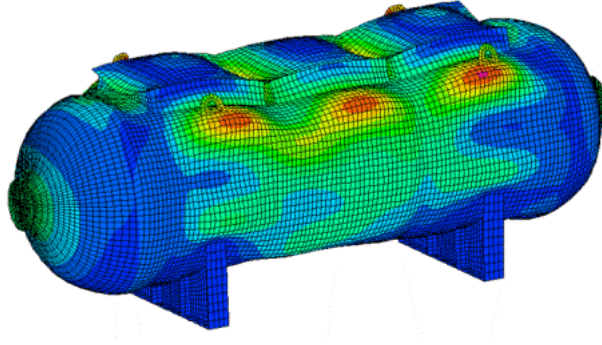


Figure 4: Simulation de dynamique des fluides utilisant la méthode des éléments finis (MEF)

3.3.2 Vers la résolution quantique d'Équations Différentielles

1

A. Méthodes quantiques pour approcher des équations différentielles linéaires

L'avènement de l'informatique quantique a introduit de nouvelles méthodes pour aborder la résolution des équations différentielles, un domaine crucial en mathématiques et en physique. Parmi ces approches, **la méthode de la transformée de Fourier quantique** se distingue. Elle utilise une transformation du domaine temporel au domaine fréquentiel pour simplifier et résoudre des équations différentielles non linéaires. Cette approche tire parti des propriétés spectrales et des symétries du système pour réduire la complexité globale du problème.

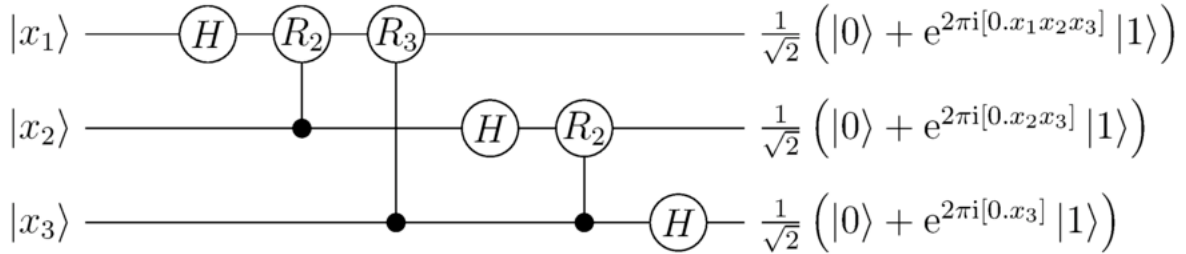


Figure 5: Circuit quantique de la transformée de fourier quantique pour n=3

Par ailleurs, des recherches récentes ont exploré l'application d'algorithmes quantiques à la méthode des éléments finis, visant à résoudre efficacement des problèmes de valeurs limites pour les équations différentielles. Des comparaisons ont été faites entre les performances théoriques des algorithmes quantiques et celles des algorithmes classiques, comme la méthode du gradient conjugué. Bien que des avancées aient été réalisées, les analyses montrent que l'amélioration de la vitesse de

¹Cf. Bibliographie pour avoir plus de détails sur les algorithmes décrits

calcul due aux algorithmes quantiques est plutôt de nature polynomiale, dépendant de la dimension de l'équation différentielle partielle traitée.

D'autres méthodes font appel à des algorithmes quantiques pour simuler des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Ces algorithmes, bien que non déterministes, promettent des besoins en ressources polylogarithmiques en fonction du nombre de variables. Ils se basent sur des sous-routines avancées pour la transformation non linéaire des amplitudes de probabilité et pour l'intégration numérique via des méthodes telles que celle d'Euler. Ces approches pourraient offrir une amélioration exponentielle par rapport aux méthodes classiques.

Cependant, ces méthodes en sont encore à un stade expérimental et rencontrent des défis pratiques significatifs tels que le bruit, la décohérence et les erreurs inhérentes aux systèmes quantiques. Malgré ces obstacles, elles présentent un potentiel considérable pour des avancées futures dans la résolution d'équations complexes telles que les équations de Navier-Stokes.

B. Comparaison avec les méthodes classiques

Tandis que les méthodes classiques sont déjà fonctionnelles, et approuvées, elles sont malheureusement limitées et les calculs complexes sont difficiles à effectuer. L'avènement du quantique pourrait permettre aux méthodes existantes d'être adaptées, mais aussi à de futures méthodes de voir le jour, pouvant potentiellement permettre une précision plus élevée et un plus large éventail de situations prise en charge.

Le choix entre plusieurs méthodes dépendra surtout du contexte du problème et des connaissances du chercheur.

3.3.3 Méthode des Éléments Finis (FEM) et Informatique Quantique

La Méthode des Éléments Finis (FEM) est un outil puissant en ingénierie et en physique pour résoudre des équations différentielles complexes, notamment les équations de Navier-Stokes. Cependant, sa mise en œuvre sur des ordinateurs classiques présente des limites significatives, en particulier dans la gestion des systèmes fluidiques complexes comme les écoulements turbulents.

A. Complexité des Équations et Limites de la FEM sur Ordinateurs Classiques

- **Nature Non-linéaire des Équations:** Les équations de Navier-Stokes sont connues pour leur non-linéarité et leur potentiel à produire des comportements chaotiques. Ces caractéristiques rendent leur modélisation et leur résolution particulièrement difficile, surtout pour les écoulements turbulents où la précision est cruciale ;
- **Limites Computationnelles :** Bien que la FEM soit efficace, sa mise en œuvre sur des ordinateurs classiques peut être entravée par des limitations computationnelles. La résolution de systèmes complexes nécessite une puissance de calcul élevée et une grande capacité de mémoire, particulièrement pour des simulations détaillées et précises ;
- **Complexité du Maillage:** La qualité de la résolution par la FEM dépend fortement de la finesse et de la précision du maillage. Pour les écoulements complexes, un maillage fin est requis,

augmentant significativement les besoins en calcul et en mémoire. Complexité du Maillage: La qualité de la résolution par la FEM dépend fortement de la finesse et de la précision du maillage. Pour les écoulements complexes, un maillage fin est requis, augmentant significativement les besoins en calcul et en mémoire.

B. Potentiel de l'Informatique Quantique pour la FEM

L'informatique quantique, bien qu'elle en soit à ses débuts et confrontée à ses propres défis, offre un potentiel prometteur pour surmonter certaines de ces limitations. La capacité des ordinateurs quantiques à effectuer des calculs parallèles et à manipuler de grandes quantités de données pourrait théoriquement améliorer l'efficacité de la FEM, notamment dans le traitement des systèmes fluidiques complexes.

Cependant, l'application pratique de la FEM dans un contexte quantique est encore à l'étude. La gestion des erreurs, la décohérence quantique, et le développement d'algorithmes spécifiques sont parmi les nombreux défis à relever. De plus, la formation et les compétences en informatique quantique sont actuellement limitées, ce qui représente un obstacle supplémentaire à l'intégration de la FEM dans les environnements quantiques.

En conclusion, l'informatique quantique suggère des possibilités d'amélioration. Nous allons désormais parler de façon plus détaillée de ce qui peut limiter ces améliorations.

3.4 Limites

3.4.1 Des difficultés matérielles

L'informatique quantique présente cependant de nombreux challenges aujourd'hui, qui rendent singulièrement compliquée la recherche de nouveaux algorithmes quantiques, et encore plus la conception d'algorithmes adaptés aux contraintes des différents systèmes physiques qui les supporte.

Pour mieux comprendre ces contraintes, prenons un exemple : l'algorithme de Shor est un algorithme quantique qui permet la factorisation d'un entier naturel en temps polynomial, ce qu'aucun algorithme classique ne parvient à achever.

On peut constater que cet algorithme, bien que fonctionnel, ne constitue aucune menace pour les systèmes de sécurité actuels. En effet, le frein à l'applicabilité de cet algorithme provient d'une différence majeure entre les capacités des circuits quantiques et celle des circuits classiques, qui est tel que le gain de complexité n'est pas suffisant.

Si on souhaitait exécuter l'algorithme de Shor sur des valeurs du même ordre que celles utilisées par les banques, il nous faudrait utiliser un très grand nombre de qubits, bien supérieur à ce qui est disponible sur les ordinateurs quantiques les plus puissants. Le prochain projet d'ordinateur quantique d'IBM, Condor, a été annoncé d'une capacité de 1121 qubits, alors qu'il faudrait système quantique de plus de 4000 qubits et 100 millions de portes logiques pour espérer décrypter une clé RSA de 2048 bits telles que celles utilisées dans la plupart des systèmes de communication sécurisées. A cela s'ajoutent les problèmes liés à la décohérence, qui augmente les erreurs de mesure des qubits. Ceux-ci perdent peu à peu leurs propriétés quantiques lorsqu'ils interagissent avec

d'autres composants du système. Cet effet est encore plus prononcé lorsque le nombre de qubits et de portes logiques du système augmente. IBM a par ailleurs averti que l'exploitabilité de ses derniers projets est compromise par leur instabilité, qui augmente d'autant plus que le projet est massif. Une forte instabilité est attendue de la part du système condor.

Ainsi, on comprend que même si une solution quantique aux équations de Navier-Stokes était développée, on peinerait probablement à l'appliquer à des problèmes réels.

3.4.2 Des difficultés algorithmiques

D'autres contraintes viennent ralentir le développement d'algorithmes à l'échelle quantique : le domaine est encore jeune et les chercheurs doivent travailler au plus près des circuits quantiques. Cela entrave le développement d'algorithmes particulièrement complexes, comme serait le cas d'une solution quantique au problème de Navier-Stokes.

De plus, de nombreux sous problèmes comme la résolution d'équations différentielles se sont vu proposer plusieurs solutions quantiques, mais aucune à ce jour n'est suffisamment générale pour être appliquée au problème de Navier-Stokes. Cette absence d'algorithmes sur lesquels fonder une solution fait diminuer l'attrait de la recherche dans la résolution spécifique de Navier-Stokes. On préférerait rechercher des algorithmes qui résolvent des problèmes plus fondamentaux avant de s'attaquer à celui-ci, ne serait-ce que pour avoir la possibilité d'utiliser le travail passé pour construire une nouvelle solution.

Finalement, de nombreux travaux actuels semblent se reposer sur une modélisation classique du problème de Navier-Stokes, pour ensuite élaborer un circuit quantique qui correspondrait à cette modélisation classique.

Cela est particulièrement manifeste pour la résolution d'équations différentielles. La démarche décrite dans ce récent papier de Zanger et al. qui date de 2021 illustre bien cette tendance : *Quantum Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations via Classical Integration Methods*⁷

L'un des procédés principaux décrit dans ce papier consiste en effet à reproduire différents schémas de résolution d'équations différentielles, mais en utilisant un circuit quantique.

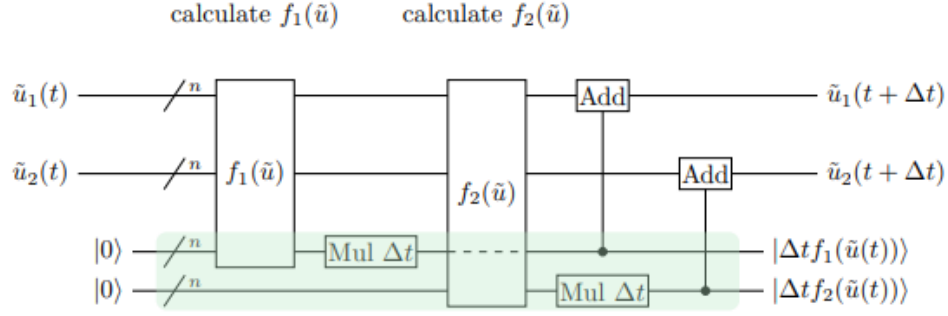


Figure 6: Circuit d'implémentation du schéma de Euler

Les chercheurs indiquent cependant que leur implémentation n'apporte pas de gain d'efficacité par rapport aux méthodes classiques. Les opérations de l'informatique classique sont directement reproduites. Dans leur conclusion, ils remarquent que leur travaux ne constituent pas directement un progrès algorithmique pour la résolution quantique du problème des équations différentielles, ils suggèrent plutôt que leurs travaux pourraient servir à élaborer des oracles pour des systèmes qui résolvent d'autres types de problèmes.

La description du problème comme résolution d'une équation différentielle n'est peut être pas adaptée à la modélisation de ce problème avec les contraintes du quantique. ... Nous pensons que trop s'inspirer du travail classique effectué sur ces problèmes pourrait compromettre l'originalité des solutions proposées, et leurs performances. Une nouvelle approche doit être adoptée, ... [comment caractériser cette nouvelle approche ?] iii===

4 Vers une résolution quantique des équations de Navier-Stokes

Dans cette partie, nous présentons plus en détail les procédés de résolution et de simulation actuellement employé pour la simulation de fluides par les équations de Navier-Stokes. En effet, n'ayant pas trouvé de papier traitant directement de la résolution des équations de Navier-Stokes par un algorithme quantique, nous avons décidé de travailler sur les méthodes actuelles afin de voir les pistes d'amélioration par la quantique.

4.1 Simulations et méthodes actuelles

Face à la complexité de représentation de notre monde avec les outils mathématiques actuels, deux choix s'offrent aux scientifiques pour simuler le comportement d'un fluide grâce aux équations de Navier-Stokes :

- Simplifier le modèle en négliger des paramètres ou des phénomènes par exemple ;
- Discrétiser le modèle en temps ou en espace.

La première solution, bien qu'utilisée dans de nombreux cas physiques, ne permet pas d'obtenir une représentation satisfaisante de notre monde dans le cas d'équations initialement aussi complexes. Cette vision a néanmoins permis de résoudre ces équations en deux dimensions d'espaces (travaux d'Olga Ladyjenskaïa en 1959). C'est donc la deuxième solution, associée avec des hypothèses bien choisies (incompressibilité du fluide par exemple), qui a principalement été développée pour produire les outils et méthodes de simulation actuelles, en voici quelques exemples.

4.1.1 Méthode MAC - Méthode de Chorin

La méthode MAC - *Markers and Cells* - est la plus ancienne méthode que nous présenterons ici, elle date de 1965 et a été développée par Harlow et Welch. L'idée principale de cette méthode est de représenter un fluide de deux façons :

- Euclidienne : pour le calcul des champs de vitesse et de pression ;
- Lagrangienne : pour représenter le déplacement du fluide dans l'espace. Le fluide est alors considéré comme un nuage sans masse dépendant en fonction d'un champ de vitesse.

Cette méthode repose donc sur la discrétisation temporellement et spatialement du système étudié comme visible sur la figure 7. Pour ce faire, un pas de temps est défini et une grille parallélépipédique est appliquée à notre espace. De ce fait, un échantillon du champs de vitesses et de pressions peut alors faire l'objet d'une résolution comme décrite plus en fin de partie. Cependant, il ne s'agit que de la vision euclidienne permettant de décrire l'évolution temporelle des champs de vitesse et de pression. S'ajoute donc à ces calculs, la partie Lagrangienne permettant un suivi du fluide dans l'espace au cours du temps. Le nuage de point permettant de représenter la position du fluide dans son environnement est alors décrit par un ensemble dense de marqueurs. Ces marqueurs sans masse n'ont donc pour objet que de situer le fluide et n'interviennent pas directement dans le calcul de l'évolution du comportement du fluide. C'est cette spécificité (la séparation stricte de vitesse, pression et position) qui caractérise la méthode MAC. Cependant, bien que séparées, ces caractéristiques interagissent. Le lien entre la position du fluide et les calculs permettant de faire évoluer la simulation se fait par une analyse de ces marqueurs qui se traduit ensuite par une variation des conditions au limites des équations.

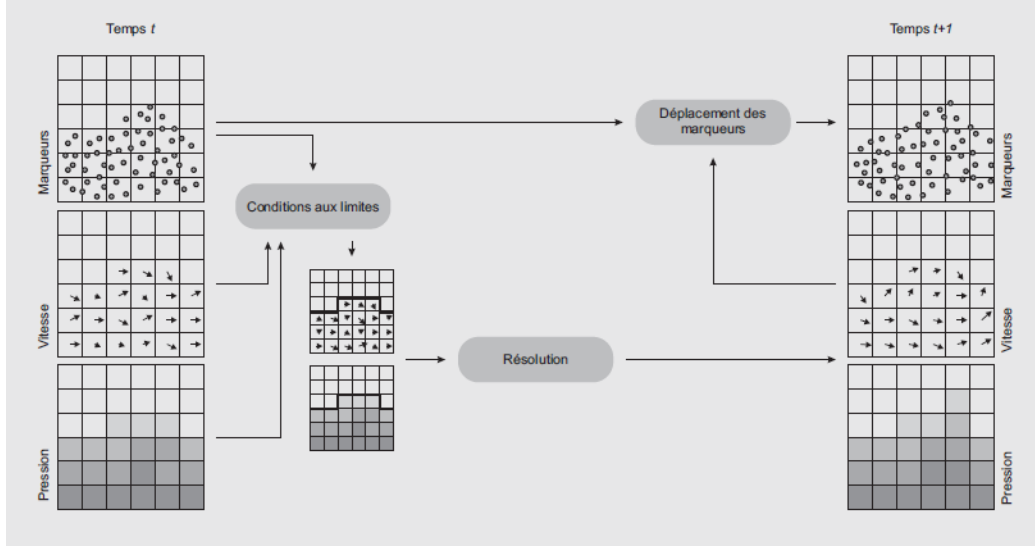


Figure 7: Schéma représentant le principe de la méthode MAC

La résolution des équations de Navier-Stokes dans la méthode précédente permet de faire évoluer les champs de vitesse et de pression. Pour ce faire, on peut utiliser la méthode de projection de Chorin. Cette méthode se scinde en deux étapes permettant d'avancer la simulation d'un pas de temps donnée tel que $u^t \rightarrow u^{t+1}$:

$$\nabla \cdot u^t = 0 \xrightarrow{\text{accélération}} \nabla \cdot u^* \neq 0 \xrightarrow{\text{projection}} \nabla \cdot u^{t+1} = 0$$

Le paramètre intermédiaire introduit u^* simule l'évolution du champ de vitesse u^t grâce à la conservation de la quantité de mouvement² sans prise en compte de la pression et en levant la contrainte d'incompressibilité ($\nabla \cdot u^* \neq 0$). L'état final s'obtient ensuite en projetant le résultat intermédiaire dans un espace réintroduisant la contrainte d'incompressibilité³. Cette résolution proposée par Jos Stam permet donc de réduire la complexité des équations en les scindant pour n'étudier à chaque étape qu'une partie du phénomène. Cette même approche est d'ailleurs utilisée pour résoudre les calculs liés à l'accélération $u^t \rightarrow u^*$. En effet, dans sa méthode, l'équation de conservation de quantité de mouvement est décomposée pour résoudre chaque terme indépendamment de manière séquentielle⁴. L'entièreté de l'algorithme est visible en annexe, figure 10.

La méthode MAC telle que décrite dans la thèse du Docteur Génevaux permet de rendre compte du comportement qualitatif d'un fluide dans son environnement. D'une part, la simulation introduite dans la thèse repose sur une définition arbitraire des forces en jeu dans les itération. Cette méthode permet de simplifier le modèle, mais ne permet pas de garantir une robustesse du modèle.

²cf la section 2.2

³l'espace des fonctions solénoïdales

⁴cf la section 3.1.5 de la thèse 7

Par exemple, il n'est pas possible de définir un objet comme rigoureusement imperméable. En effet, les objets sont vus par la simulation comme des perturbations extérieure et non comme une restriction stricte du milieu. D'autre part, la résolution des équations de Navier-Stokes se fait sous des hypothèses fortes qui ne permettent pas de rendre fidèlement compte de la réalité. La discrétisation puis la résolution des équations par séparation des composantes de vitesse et de pression sont en effet des processus "destructeurs" par la projection notamment.

La simulation de fluide par l'informatique quantique ne peut donc être réfléchi par cette piste. La puissance de calcul permise par cette technologie ne serait alors pas du tout exploitée au regard de la formulation présentée. Cependant, bien que la manière de résoudre les équations ne puisse être employé, l'idée de discréditer l'espace et le temps semble compatible avec la parallélisation permise par l'intrication quantique.

4.1.2 Maillage - Discrétisation

La discrétisation repose en partie sur la puissance de calcul de nos outils informatiques. Cette seconde solution traite plus en profondeur les choix qui s'offre à nous lorsqu'on évoque le maillage du domaine d'étude. Elle nécessite donc de faire des choix de discrétisation qui vont impacter notre résultat. S'agissant de la discrétisation temporelle, le choix est simple : il faut choisir un pas de temps (dépendant de la puissance de calcul dont nous disposons). Cependant, concernant la discrétisation spatiale, le travail s'avère plus poussé. En effet, une multitude de formes sont possibles : des triangles, des rectangles, des pavés ou encore des tétraèdres. S'ajoute à cela, la question de la génération et de l'ordonnancement des cellules. Le maillage peut en effet être :

- Structuré : les mailles sont répétées régulièrement. Cette méthode est simple à mettre en place et peu couteuse en ressources mais modulable ;
- Non-structuré : les cellules sont placées par l'ordinateur suivant les contours des objets. Cette méthode permet de représenter des géométries complexes et est adaptée au raffinement. Cependant, elle est plus gourmande en ressource (stockage et génération).

Ces méthodes de maillage font donc l'objet de réflexions poussées, car la balance entre précision et coût (temporel ou matériel) est essentielle. En effet, il faut garder à l'esprit qu'il y a une relation au moins linéaire entre le nombre de cellules et le nombre d'équations à résoudre. Dans cette optique d'optimisation, nous pouvons également évoquer les techniques de raffinement qui permettent de générer de maillage adaptatif modulant le nombre de cellules en fonction de la précision souhaitée sur des espaces données. Ce maillage adaptatif, visible sur la figure 9, s'ajoute parfaitement avec la technique de maillage non-structurée précédemment évoquée car la non-régularité des mailles permet d'en supprimer et d'en ajouter simplement.

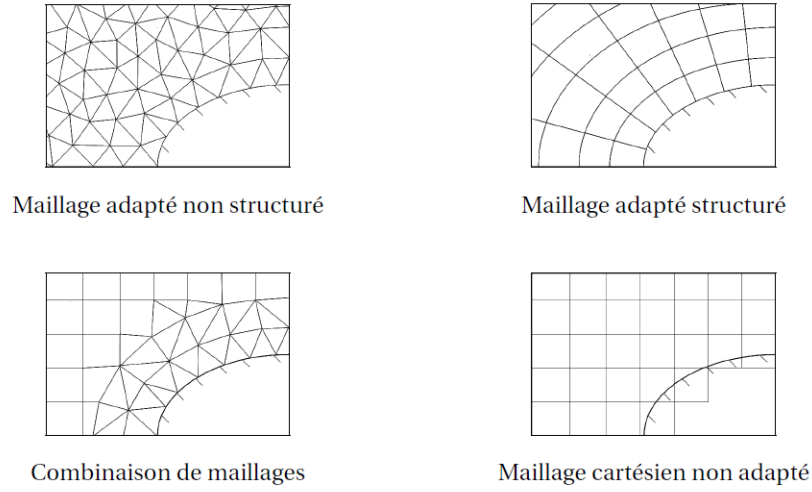


Figure 8: Exemple de différents types de maillage

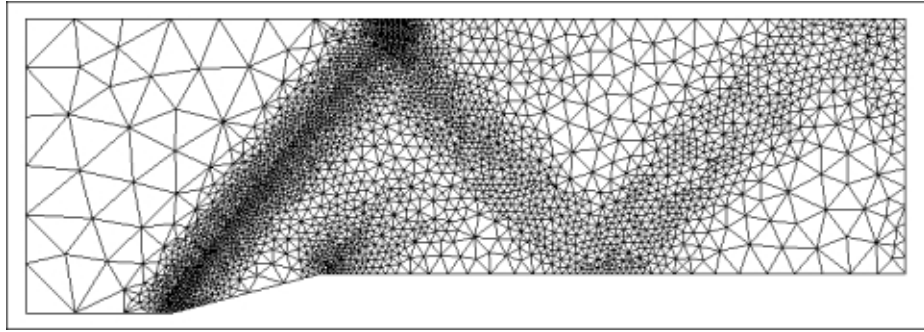


Figure 9: Exemple de maillage adaptatif

L'augmentation de la puissance de calculs que nous connaissons depuis le début des années 2000 nous pousse donc vers des solutions de maillage non-structuré adaptatif qui permet de représenter des phénomènes complexes, le tout sur des figures aux formes variées.

En fois notre système maillé, il faut résoudre en chaque maille les équations permettant de faire évoluer notre système en un pas de temps donné. Pour résoudre les équations de Navier-Stokes, D. Durrenberger s'est appuyé sur la méthode SMAC introduite par Amsden et Harlow. Pour cette méthode, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\rho u_i)}{\partial x_j^2} \end{cases}$$

Avec la vitesse u et la pression p comme inconnues.

La discrétisation ainsi que l'hypothèse d'incompressibilité nous conduisent donc à une résolution discrète tel que : connaissant l'état en un temps n , nous pouvons le déterminer en un temps $n + 1$ pas après pas. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{div}(u^{n+1}) = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + \text{div}(u^{n+1} \otimes u^n) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p^{n+1} + \nu \text{div}(\text{grad } u^{n+1}) \end{cases}$$

où grad est la notation utilisée soit pour le gradient d'un champs scalaire, soit pour le gradient d'un champs vectoriel, auquel cas le résultat est un tenseur d'ordre 2. La notation div correspond à la divergence d'un vecteur, aboutissant à un scalaire, tandis que div correspond à l'opérateur divergence d'un tenseur d'ordre 2, aboutissant à un vecteur.

Ce nouveau système est enfin résolu en introduisant une estimation de la pression telle que : $p^{n+1} = p^*$. Une fois cette inconnue temporairement levée, on peut en déduire la valeur de la vitesse en $n + 1$: u^{n+1} ⁵. Puis, on peut finalement déterminer notre véritable valeur de pression p^{n+1} . L'algorithme complet est visible en annexe figure 11.

Cette seconde méthode de simulation, au-delà d'avoir présenté de bons résultats dans les tests faits dans le cadre de la thèse, permet de concevoir une approximation par l'informatique quantique. En effet, la définition d'un maillage non-structuré adaptatif est une étape couteuse en ressource car une infinité de possibilité existent selon les paramètre définis initialement. Une approche quantique pourrait peut-être présenter un intérêt en tester un plus grand nombre de paramètres de maillage. De plus, lors de l'introduction de la variable p^* , nous pourrions envisager un algorithme quantique permettant d'explorer les diverses valeurs possibles de la pression pour choisir celle donnant le plus de résultat. Cette supposition ne permettrait sans doute pas de modifier drastiquement les performances du modèle, mais pourrait sans doute permettre d'affiner les résultats obtenus en explorant des pistes qui sont aujourd'hui trop couteuses en temps de calcul.

4.1.3 Simulation par éléments finis

Développée pour simuler le comportement d'objets solides complexes, la méthode des éléments finis (ou MEF) est technique de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Tout comme les deux principes de résolution précédents présentés, la MEF repose sur un algorithme discret qui va résoudre les équations différentielles grâce à leur condition aux limites. Très utilisé dans la simulation numérique des solides déformables, cette méthode a, vraisemblablement, été utilisé pour la première fois dans la simulation de liquide dans la thèse qui nous a servi de principales sources. La méthode décrite et les résultats présentés n'ont donc pas été revus par la communauté scientifique. La méthode des éléments finis repose sur une discrétisation du modèle puis la détermination d'une inconnue u qui résout partiellement l'équation différentielle. Nous ne reviendrons pas sur le maillage qui a déjà été évoqué, notons simplement que comme décrit dans la partie précédente, ce maillage peut prendre diverse forme. Concernant la résolution des équations différentielle, la MEF est de loin de la méthode la plus complexe présentée. Cependant, on peut résumer son approche en

⁵Nous avons simplifié cette partie, car il est normalement nécessaire de passer par l'introduction d'un variable intermédiaire u^*

disant que cette méthode ne cherche pas à les résoudre en tant que tel mais plutôt à déterminer une approximation qui puisse "quasiment" satisfaire l'équation. Cette approche consiste en effet à tester différentes approximations de l'équations jusqu'à trouver une forme satisfaite en terme d'erreur.

Au regard de cette recherche récursive d'approximation, nous pouvons supposer, comme formulé précédemment, que plus la solution calculée nécessite d'approximation et donc de pistes à tester, plus une approche quantique aurait d'intérêt. Donc, en plus de la question de l'optimisation du maillage qui est toujours d'actualité pour cette méthode. Nous pourrions supposer que la résolution de ses équations complexe par la détermination récursivement d'une approximation suffisamment performante aurait un gain intéressant en utilisant le parallélisme que permet le quantique. C'est ce que nous avons vu dans la partie suivante.

4.2 Simulation par éléments finis avec la quantique

Le papier de Ashley Montanaro et Sam Pallister développe une procédure d'approximation numérique des équations de Navier Stokes via la méthode des éléments finis (FEM). Les performances de cette méthode y sont comparées à celle d'un algorithme classique. Pour élaborer leur algorithme quantique, les chercheurs choisissent de reprendre une méthode classique de résolution par éléments finis mais en utilisant un algorithme quantique pour la résolution de systèmes linéaires, (Quantum Linear Equations, QLE). Les chercheurs réfléchissent à l'intégration de cet algorithme dans la FEM et calculent une complexité dans chacun des deux cas, puis la comparent. Les chercheurs concluent que l'intégration de la QLE permet **une amélioration polynomiale de la complexité de l'algorithme**, par rapport à une résolution d'équations linéaires classique, d'autant plus important que le problème est posé dans un grand nombre de dimensions. Les chercheurs arguent également **qu'il ne serait pas possible d'obtenir mieux qu'un gain polynomial en utilisant cette méthode**.

Cette comparaison est cependant à nuancer : les deux méthodes recherchent la solution d'un BVP (Boundary Value Problem), un problème dont la solution est approchée par la FEM. Cette solution possède plusieurs propriétés, et seule certaines sont accessibles en appliquant leur méthode de résolution quantique. Les chercheurs ont donc défini une propriété particulière, le calcul d'une "linear functional" de u , qui sera utilisée pour comparer les deux méthodes. L'interprétation de cette propriété dans le cadre de Navier Stokes dépasse nos compétences en mathématiques. Nous remarquons tout de même que cela indique que la comparaison effectuée par les deux chercheurs n'est valide que dans ce cas particulier, et que la généralisation de ces résultats doit être faite avec précaution, et une meilleure compréhension des principes de la méthode des éléments finis.

Finalement, ces travaux ne développent pas d'algorithmes quantiques singuliers dédiés au problème de Navier-Stokes. Il s'agit davantage d'une recherche de stratégies d'optimisation d'une méthode numérique classique déjà développée auparavant qui pourrait s'appliquer à la résolution des équations différentielles de Navier-Stokes. Par ailleurs, les chercheurs indiquent que les algorithmes pour la FEM sont divers et que la recherche travaille toujours à les améliorer.

4.3 Quelques pensées suite à la lecture de ces papiers

La plupart des ressources que nous avons trouvée autour des équations de Navier-Stokes et des applications de l'informatique quantique suivent une tendance similaire au papier de Montanaro : ils cherchent à régler des sous problèmes de solutions classiques (par exemple la résolution de systèmes linéaires) par des équivalents quantiques.

Symétriquement, nous n'avons rencontré aucune recherche qui visait à développer une méthode entièrement quantique pour décrire les mouvements des fluides. Cela n'est pas étonnant : une telle entreprise nécessiterait de repenser l'ensemble des techniques classiques qui ont abouti aux solutions numériques actuelles. Il est bien plus simple de les réutiliser et de chercher à en changer certains composants. Cependant, nous soupçonnons également de telles approches de ne pas tirer pleinement avantage des avantages de l'informatique quantique, en particulier en prenant du recul et en se plaçant à l'échelle d'un problème complexe tel que celui des équations de Navier Stokes. En effet, lorsqu'un circuit quantique est utilisé comme composante d'un circuit classique, plutôt que comme composante d'un circuit quantique plus complexe, il est nécessaire de briser les propriétés quantiques du résultat par la mesure, afin d'en faire usage par le circuit classique. Un circuit pleinement quantique préservera les propriétés quantiques tout au long du processus, et pourra peut être en faire usage à différentes étapes.

Nous comprenons cependant que l'élaboration de méthodes purement quantique est bien plus difficile, mais nous savons également qu'il est possible de faire usage d'algorithmes quantiques au sein d'autres algorithmes quantiques. Il serait alors peut être possible, au cours du temps, de développer davantage d'"algorithmes pionniers" qui serviront de base au développement d'algorithmes plus complexes, tout comme cela a été le cas pour les algorithmes pionniers classiques. Sous cette perspectives, nous pensons également que la création de ces algorithmes quantiques pionniers ne devrait pas consister en la simple reproduction d'algorithmes classiques avec un circuit quantique, ni d'ailleurs en l'intégration d'algorithmes quantiques qui semblent servir la même fonction que des algorithmes classiques.

La créativité dans le domaine de l'informatique quantique reposera peut être sur la capacité de certains individus (tels que les chercheurs qui ont construit la littérature de notre bibliographie qui ont tout notre respect !) à se détacher de la théorie classique et à rechercher des liens directs entre les propriétés particulières de l'arithmétique quantique et les phénomènes physiques qu'ils essaient de modéliser.

5 Conclusion

Au travers de ce rapport nous avons donc découvert en quoi les équations de Navier-Stokes étaient importantes pour la connaissance de l'humanité. Leur grande complexité associée à leurs nombreux champs d'applications poussent depuis des décennies les scientifiques à s'intéresser à ce travail que ce soit par la simulation de fluide grâce aux équations ou bien à la démonstration posée par l'institut Clay.

Nous avons vu que la complexité de résolution des équations différentielles à pousser la communauté scientifique à s'intéresser à la résolution de ces équations par des algorithmes quantiques. Cette piste est prometteuse pour des équations **très complexe** que l'informatique classique peine aujourd'hui à résoudre. Cette conclusion sur le besoin d'implémenter des réponses quantiques à nos problématiques les plus complexes s'applique également aux méthodes de simulations que nous avons pu présenter au fil de ce document. En effet, la discrétisation et la simplification des équations permettant de traiter les problèmes via des algorithmes classiques n'est malheureusement que peut pertinent avec les possibilités permises par l'informatique quantiques. Les simplifications sont, en somme, trop pénalisantes car l'informatique quantique demeure une piste intéressante, si et seulement si, le parallélisme qui y est associé est suffisamment utilisé. Nous avons vu que plus les modèles étaient complexe, plus la quantique pouvaient avoir un intérêt. Cependant, la dernière partie de notre rapport révèle que malgré cela, **l'informatique ne permet que d'améliorer nos modèles classiques sans pour autant apporté des gains décisifs**.

Nous restons tout de même optimiste. En effet, comme Monsieur Jean-Michel Torres nous l'a rappelé pendant sa conférence, l'approche quantique nécessite de revoir nos acquis et de *Think Different*. Ainsi, bien que nous ne pouvons pas garantir l'efficacité d'une approche quantique avec nos modèles actuelles, nous espérons donc qu'au regard de la complexité des simulations, de leur coût de calculs et de leur importance que la communauté scientifique se penchera prochainement sur la question en mettant **l'informatique à la base de leur réflexion**.

Nous finirons en disant que sommes satisfait d'avoir réussi à faire ce travail de recherche, de compilation et de connexions sur un sujet aussi complexe sur le plan physique et mathématiques.

6 Annexes

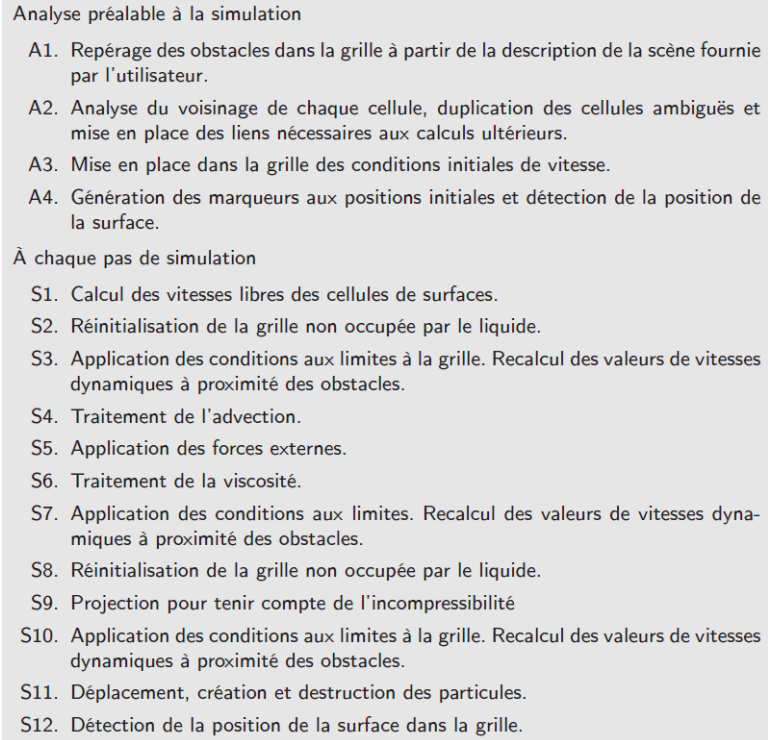


Figure 10: Algorithme de simulation MAC (7)

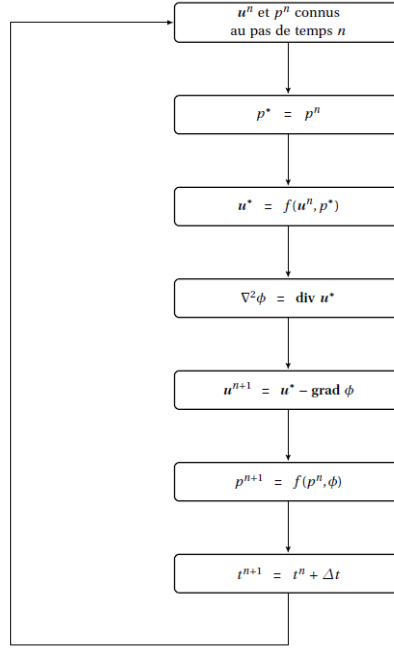


FIGURE 2.1 – Algorithme de résolution

Figure 11: Algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode SMAC(7)

7 Bibliographie

Section 2.3

https://pedagogotech.inp-toulouse.fr/121018/res/00chapter_6.pdf

Section 3.2

Rapid solution of problems by quantum computation

David Deutsch and Richard Jozsa

<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1992.0167>

Section 3.3

https://scheid.perso.math.cnrs.fr/Enseignement/polyNS2017_18.pdf

De nouveaux algorithmes quantiques pour résoudre des équations non linéaires - rtflash.fr — tre-gouet.org

S. Leyton and T. Osborne. A quantum algorithm to solve nonlinear differential equations, 2008. arXiv:0812.4423

Quantum algorithm for systems of linear equations with exponentially improved dependence on precision

Andrew M. Childs, Robin Kothari, Rolando D. Somma

<https://arxiv.org/abs/1511.02306>

Quantum Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations via Classical Integration Methods

Benjamin Zanger, Christian B. Mendl, Martin Schulz, and Martin Schreiber,

Quantum 5, 502 (2021).

<https://quantum-journal.org/papers/q-2021-07-13-502/pdf>

Section 4.1

Simulation de liquides à l'aide des équations de Navier-Stokes, et visualisation, à destination de l'infographie,

M. Olivier Génévaux, 27 novembre 2006.

NSIBM : un solveur parallèle de Navier-Stokes avec raffinement automatique basé sur la méthode des frontières immergées,

M. Daniel Durrenberger, 23 août 2016.

<https://www.utc.fr/mecagom4/MECAWEB/EXEMPLE/FICHES/MNSAF1.htm>

Section 4.2

Quantum algorithms and the finite element method

Ashley Montanaro and Sam Pallister

School of Mathematics, University of Bristol, Bristol, BS8 1TW, UK.

(Dated: February 26, 2016)

<https://arxiv.org/pdf/1512.05903.pdf>

Figure 1 : Billet de blog sur les équations de Navier-Stokes

Figure 2 : Cliché B.Legras LMD/ENS/CNRS

Figure 6 : Quantum Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations via Classical Integration Methods

Figure 8 : Billet de blog sur les différentes techniques de maillage

Figure 9 : Billet de blog UTC sur le maillage adapté

Figure 8 : Billet de blog sur les différentes techniques de maillage

Figure 9 : Billet de blog UTC sur le maillage adapté