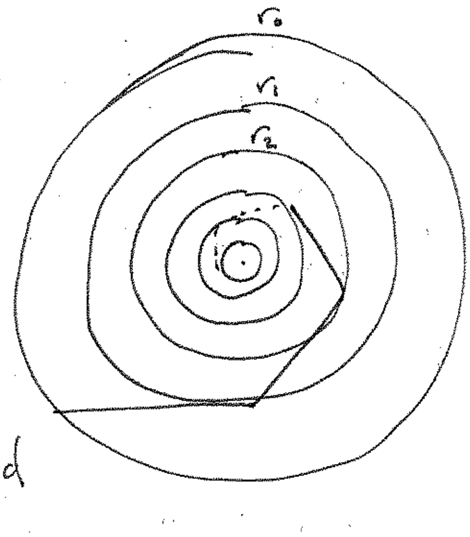
Envariabelsanalys del II, MP, ht 2016. Räkneövning 6.2

2.34 (e) För vilka tal x är serien $\sum_{j=0}^{\infty} x^{-j}$ konvergent? Vad är summan?

Lösn.: $\sum_{j=0}^{\infty} x^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} (x^{-1})^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^j = \{\text{om } |\frac{1}{x}|<1\}$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}, \quad |\tfrac{1}{x}|<1 \Leftrightarrow |x|>1$$

$\therefore$ Konvergent då $|x|>1$, Summa $\frac{x}{x-1}$



2.48 Man har en oändlig följd av koncentriska cirklar (dvs cirklar med samma centrum) där radierna

$r_0, r_1, r_2, \dots$

bildar en geometrisk talföljd med kvoten k, $0<k<1$. Från en punkt på den yttersta cirkeln dras en tangent till cirkeln dras en tangent till cirkeln närmast innanför, från tangeringspunkt en tangent till nästa cirkel, osv. Beteckna tangenternas längder med $l_0, l_1, l_2, \dots$ Bestäm kvoten k så att summan av serien

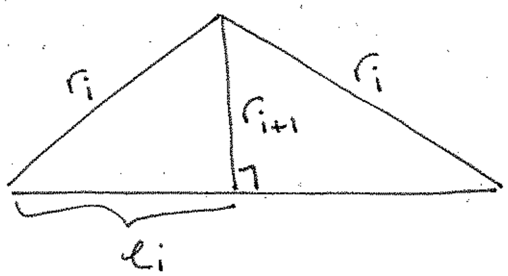
$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i$$

blir lika med den yttersta cirkelns omkrets.

Lösn.: Vi har att: $r_1 = r_0 k$, $r_2 = r_0 k^2$, $r_3 = r_0 k^3$, ...

dvs den geometriska talföljden $(r_0 k^i)_{i=0}^{\infty}$.

Vill uttrycka l_i i termer av r_i



Pythagoras sats: $l_i = \sqrt{r_i^2 - r_{i+1}^2} = \sqrt{r_i^2\left(1 - \left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)^2\right)} =$

$$= r_i\sqrt{1-k^2} = r_0 k^i \sqrt{1-k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} l_i = r_0\sqrt{1-k^2}\sum_{i=0}^{\infty} k^i = \{0 < k < 1\} =$$

$$= r_0\sqrt{1-k^2}\cdot\frac{1}{1-k}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_i = 2\pi r_0 \Leftrightarrow \cancel{r_0}\sqrt{1-k^2}\cdot\frac{1}{1-k} = 2\pi\cancel{r_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-k^2} = 2\pi(1-k) \Rightarrow 1-k^2 = 4\pi^2(1-k)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(1-k)}(1+k) = 4\pi^2(1-k)^{\cancel{2}} \Leftrightarrow 1+k = 4\pi^2 - 4\pi^2 k$$

$$\Leftrightarrow k(4\pi^2+1) = 4\pi^2 - 1$$

$$\therefore k = \frac{4\pi^2-1}{4\pi^2+1}$$

7.71 Visa att: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{k^2} \leq 3\ln(2) - 1$

Lösn.: $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ kont. & positiv då $x \geq 1$

$$f'(x) = -2\frac{1}{x^3}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^3}\left(2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}\right) \leq 0 \text{ då } x \geq 1$$

så f är avtagande då $x \geq 1$.

Alltså gäller att:

$$\int_1^n f(x)\,dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx + f(1)$$

Speciellt har vi att:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \ln(2)$$

$$\int_1^n x^{-2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = -\left[x^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^n - \int_1^n -x^{-1}\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} + \ln(2) - \int_1^n \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \iff 1 = (Ax+B)(x+1) + Cx^2$$

$\underline{x=-1}$: $1 = C \implies 1 - x^2 = Ax^2 + (A+B)x + B$

$$\implies A = -1,\ B = 1$$

$$\int_1^n \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int_1^n \left(\frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int_1^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x}\right]_1^n =$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} - \left(\ln(2) - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \ln(2).$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \ln(2) - \left(1 - \ln(2)\right) = 2\ln(2) - 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{k^2} \leqslant 3\ln(2) - 1 \qquad \blacksquare$$

7.74 Visa att: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}$

Bevis: $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ kont. & positiv då $x \geqslant 1$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(2x-1)^2} \leqslant 0$ så f avtagande då $x \geqslant 1$

Alltså gäller att:

$$\int_1^n f(x)\,dx + f(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx + f(1) \quad (*)$$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\Big[\ln(2x-1)\Big]_1^n = \frac{1}{2}\ln(2n-1)$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(2n-1) + \frac{1}{2n-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{1}{2}\ln(2n-1) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2n-1)}{2\ln(n)} + \frac{1}{(2n-1)\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{\ln(2n-1)}{2\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\frac{\ln(2n-1)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{\ln(2)}{\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{\ln(n-1/2)}{\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \qquad \blacksquare$$