

Skrivtid: 8.00-13.00. För betygen 3, 4, resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna ska vara väl motiverade. Skriv endast på ena sidan, börja ny uppgift på ny sida och använd ej rödpenna. Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad!

Tillåtna hjälpmedel: Räknedosa. Formelsamling för inferensteori 1.

1. En kontinuerlig slumpvariabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-1)^2}{2x}\right\}, \quad x > 0.$$

Man har ett slumpmässigt stickprov 0.5, 0.2, 1.4, 3.1, 0.8 från X . Beräkna maximum likelihood-skattningen av λ .

2. Man har var sin observation av slumpvariablerna X_1 , X_2 och X_3 . Det gäller att $E(X_1) = m_1 + m_2$, $E(X_2) = m_1 - m_2$ och $E(X_3) = m_1$. Vidare har X_1 , X_2 och X_3 alla varians 1. Beteckna observationerna med x_1 , x_2 och x_3 .

Som skattningar av m_1 föreslås m_1^* och \tilde{m}_1 , där

$$m_1^* = \frac{x_1 + x_2}{4} + \frac{x_3}{2}, \quad \tilde{m}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

- (a) Visa att m_1^* och \tilde{m}_1 är väntevärdesriktiga.
(b) Vilken av skattningarna är effektivast? Motivera ditt svar.
(c) Föreslå en väntevärdesriktig skattning av m_2 .
3. Johannes har tio glas med läsk framför sig, antingen av märket Goda-Soda Light eller av märket Goda-Soda Zero. Med förbundna ögon smakar Johannes på vart och ett av glasen och berättar vilken sort han tror att det är. Johannes vet inte hur många av varje sort som finns på bordet. Han svarar rätt i sju av fallen.
- (a) Avgör, genom att utföra ett lämpligt hypotestest, om Johannes kan känna skillnad i smaken på de två märkena.
(b) Vilken styrka har testet i (a) givet att Johannes har sannolikhet 0.8 att gissa rätt?
4. Hillary och Donald ställer upp i ett presidentval. I två olika delstater, A och B, görs varsin opinionsmätning inför valet. I var och en av dem tillfrågas 2000 personer om sina sympatier. Av de tillfrågade sympatiserar 53.8% med Hillary i delstat A, och 49.2% i delstat B. Tyder detta på att Hillary har lika stort väljarstöd i de båda delstaterna? Avgör frågan genom att utföra ett lämpligt hypotestest.

5. En astronom mäter ett avstånd mellan två stjärnor. Hen utför 50 mätningar. Medelvärde av dessa mätningar är 20.2 ljusår. Till saken hör att varje mätning är avrundad till hela ljusår. Försök att, genom att införa lämpliga antaganden, beräkna ett 99%-igt konfidsintervall för avståndet mellan stjärnorna.
6. För att studera alkoholkonsumtionens inverkan på fetthalten i levern har man valt ut 12 försökspersoner, vilka kan betraktas som ett slumpmässigt urval av friska personer i 25-årsåldern. Försökspersonerna har under en längre tid avstått från all alkoholkonsumtion och prover på deras lever har tagits. Därefter har de fått dricka 4 burkar öl per dag och efter en månad har nya leverprover tagits. I tabellen nedan anges de leverfetthalter som erhöles.

Avgör med ett lämpligt test om alkoholkonsumtion ökar fetthalten i levern. Var noga med att ange vilka förutsättningar du gör.

Person nr	1	2	3	4	5	6
Före	0.25	0.19	0.13	0.23	0.15	0.14
Efter	0.50	0.28	0.18	0.18	0.34	0.41

Person nr	7	8	9	10	11	12
Före	0.24	0.23	0.17	0.15	0.10	0.17
Efter	0.33	0.26	0.35	0.42	0.22	0.29

7. En grupp arkeologer gör utgrävningar av gamla bosättningar i väster och öster i samma dalgång. De hittar en rad lämningar som dateras med erkända metoder. I väst gjordes 15 mätningar, med medelålder 1499 år och standardavvikelse 177. Antalet mätningar för öst var 12, och här var medelåldern 1536 år och standardavvikelsen 160.
 - (a) Beräkna, under lämpliga förutsättningar som du måste ange, ett konfidsintervall för skillnaden mellan bosättningarnas ålder i de olika dalgångarna med konfidsgrad 95%.
 - (b) Är det riktigt att säga att bosättningarnas ålder är lika i väst och öst?

8. Man observerade motorstyrkan x (hk) och bensinförbrukningen y (liter per mil) hos fem slumpmässigt utvalda bilar. Resultaten ges i nedanstående tabell.

Motorstyrka	75	145	55	88	122
Bensinförbrukning	0.48	1.09	0.53	0.97	0.78

Räknehjälp: $\bar{x} = 97$, $\bar{y} = 0.77$, $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 5258$,
 $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 0.2842$, $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 30.27$.

- (a) Skatta parametrarna α och β i en linjär regressionsmodell

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

där $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, alla ε_i oberoende.

- (b) Beräkna förklaringsgraden.
 (c) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för den förväntade bensinförbrukningen för en bil med motorstyrka 100 hk.

LYCKA TILL!