Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS M
2013-04-05

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{x}-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x+\ldots)-(1-3x+\ldots)}{(1+x+\ldots)-(1-x+\ldots)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x+\ldots}{2x+\ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{6+\ldots}{2+\ldots} = 3.$$

Även en beräkning som stöder sig på en metod uppkallad efter en viss fransk markis godtas.

En mycket smart metod är att observera att täljaren går att faktorisera enligt regeln $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ vilket ger $e^{3x}-e^{-3x}=(e^x-e^{-x})(e^{2x}+1+e^{-2x})$ och därefter kan man förkorta bråket.

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $0 \le x < \infty$, $f(0)=0=\lim\limits_{x\to\infty}$ och det finns en punkt x där $f(x)>0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0)=0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt eller i intervallets ändpunkt $x_0=0$.
Några singulära punkter finns inte på intervallet.
$$f'(x) = 2xe^{-\frac{2x^3}{3}} + x^2(-2x^2)e^{-\frac{2x^3}{3}} = 2x(1-x^3)e^{-\frac{2x^3}{3}}.$$
De kritiska punkterna på intervallet är alltså $x_0=0$ samt $x_1=1$. Då $f(0)=0$ måste det största värdet erhållas i $x_1=1$ och är lika med $e^{-\frac{2}{3}}$.

3. Substitutionen $u=\dfrac{2x^3}{3}$ ger integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-u}\,du = \frac{1}{2}$.

4. Definitionsområdet är $x \neq 0$. Funktionen har udda symmetri och har dubbla nollställen, $x=-1$ och $x=1$.
Vertikal asymptot är $x=0$ där $\lim\limits_{x\to 0+} y = +\infty$ och $\lim\limits_{x\to 0-} y = -\infty$.
Vidare är $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y(x)-x) = 0\mp$ och det följer att $y=x$ är sned asymptot. Kurvan skär sin sneda asymptot i $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ samt har inflexionspunkter i $x=\pm\sqrt{3}$. Nollställena $x=\pm 1$ är samtidigt lokala extrempunkter, lokalt minimum i $x=1$ och lokalt maximum i $x=-1$.

5. **Partiell integration**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot x\, dx = \sin x \cdot x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} + \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

6. Den homogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 1 = 0$ med dubbelroten $r_1 = r_2 = 1$ så lösningarna till homogena ekvationen är

$$y_H = Ae^t + Bte^t.$$

För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 1$ ansättes $y_P = C$. Derivering och insättning ger $C = 1$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = Ae^t + Bte^t + 1.$$

Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ ger $A = 0$, $B = 1$ så lösningen är $y = te^t + 1$.

7. Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

Integration ger $-\frac{1}{y} = x + C$, dvs $y = -\frac{1}{x + C}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$ så lösningen blir

$$y = \frac{1}{1 - x}, 0 \le x < 1.$$

8. Serien är geometrisk med kvoten $r = \frac{x}{2}$ och är därför konvergent då $-2 < x < 2$ och har summan $\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$.

9. Då konvergensradien är lika med 2 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 2$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 2$. Då $x = 2$ har vi serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergerar (p-serie). För $x = -2$ har vi den alternerande serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ som konvergerar absolut.

10. Då $\lim_{x \to 0+} x \ln^2 x = 0 = f(0)$ är $f(x)$ kontinuerlig på det slutna intervallet $0 \le x \le 1$ och har därför ett absolut maximum på detta intervall. Då $f(0) = f(1) = 0$ och $f(x)$ är deriverbar finns detta maximum i en kritisk punkt. Vi finner

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$$

så derivatans nollställe $x = \frac{1}{e^2}$ i det inre av intervallet ger det största värdet lika med $\frac{4}{e^2}$.

PROBLEM

1. Tangenten genom $(2a, 0)$ tangerar ellipsen i $P = (x, y)$ och har lutningen

$$\frac{y}{x - 2a} = y'.$$

Implicit derivering av ellipsens ekvation ger

$$y' = -\frac{x}{a^2 y}$$

som gäller både för $y > 0$ och $y < 0$. Vi erhåller ekvationen

$$\frac{y}{x - 2a} = -\frac{x}{a^2 y}$$

som efter substitutionen $y^2 = a^2 - x^2$ från ellipsens ekvation ger lösningen $x = \dfrac{1}{2a}$. Linjen som tangerar övre respektive undre delen av ellipsen har alltså samma x-koordinat $= \dfrac{1}{2a}$.

2. a) Eftersom $|\sin \dfrac{1}{x}| \leq 1$ för alla $x \neq 0$ följer att

$$|x^2 \sin \frac{1}{x}| = x^2 |\sin \frac{1}{x}| \leq x^2 \to 0$$

då $x \to 0$. Därav följer att $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Av detta följer att $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, dvs $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$.

b) Med samma argument som i a) följer att

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

c)

$$f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}.$$

Första termen går mot 1, andra termen går mot 0 men $\cos \dfrac{1}{x}$ saknar gränsvärde då $x \to 0$ ty $\cos \dfrac{1}{x}$ pendlar mellan -1 och 1. Eftersom $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ inte existerar så är alltså $f'(x)$ inte kontinuerlig i $x = 0$.