Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Sebastian Pöder

Tentamen
ENVARIABELANALYS M
2014-12-08

LÖSNINGAR EXTRA PROBLEM

Sebastian Pöder

1. Att f har ett lokalt maximum vid $x = c$ innebär att $f(x) \leq f(c)$ för alla x i någon omgivning av c. Att f är deriverbar i $x = c$ betyder att gränsvärdet $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existerar, dvs att gränsvärdet från höger och från vänster existerar och att de är samma. När $x > c$ har vi $f(x) - f(c) \leq 0$ och $x - c > 0$, så att
$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$
För $x < c$ får vi $f(x) - f(c) \leq 0$ och $x - c < 0$, så
$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0;$$
men båda dessa skall vara lika med $f'(c)$, så $f'(c) = 0$.

2. Eftersom $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ får vi $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, dvs serien $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + |a_n|$ är en serie med ickenegativa termer. Dessutom domineras den av en konvergent serie, $\sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n|$, så serien s konvergerar. Nu kan vi skriva
$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{N} |a_n|$$
och högerledet har ett gränsvärde då $N \to \infty$.

3. Det finns många g man kan välja, men den enklaste är kanske $g = f$. Enligt antagandet får vi $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ - med en ickenegativ integrand! Om det finns en punkt $c \in [a, b]$ med $f(c) \neq 0$, kommer även $f(c)^2 > 0$. f är kontinuerlig och därmed också f^2; eftersom $f(c)^2 > 0$ och f^2 är kontinuerlig finns det ett $\delta > 0$ så att $f(x)^2 > \frac{f(c)^2}{2}$ för alla $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Nu kan vi beräkna
$$0 = \int_a^b f(x)^2 dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)^2 dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)^2}{2} dx = 2\delta \frac{f(c)^2}{2} = f(c)^2 > 0,$$
en motsägelse. Alltså är $f(c) = 0$.