Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Beräkningsvetenskap

Lösningar till tentamen i *Beräkningsvetenskap I* 5.0 hp, 2019-05-29

Uppgifter som testar måluppfyllelse för betyg 3

1. Formulera ekvationen på den form som förutsätts i Newton-Raphsons metod:

$$0.5e^x - 0.5x^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Låt $f(x) = 0.5e^x - 0.5x^2 - 1$. Vi behöver också $f'(x) = 0.5e^x - x$. Newton-Raphsons metod för ekvation (1) blir:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{0.5e^{x_k} - 0.5x_k^2 - 1}{0.5e^{x_k} - x_k}.$$

Startgissning $x_0 = 1.3$ ger: $x_1 = 1.319362$, $x_2 = 1.319074$.

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^4 c(t)\mathrm{dt} &\approx T(1) = \frac{1}{2}\left[c(0) + 2\left(c(1) + c(2) + c(3)\right) + c(4)\right] = \\
&= 0.5\left[1.0 + 2\left(1.3 + 1.6 + 2.1\right) + 2.7\right] \\
&= 6.85
\end{aligned}$$

3. (a) Newton-Raphsons metod konvergerar kvadratiskt, vilket innebär att felet i iteration $k+1$ är proportionellt mot kvadraten på felet i iteration k. Som uppskattning av felet efter de genomförda två iterationerna använder vi $|x_2 - x_1| = 0.0111 \approx 10^{-2}$. Efter tre iterationer har vi då ett fel i storleksordningen $\left(10^{-2}\right)^2 = 10^{-4}$. Efter fyra iterationer är felet i storleksordningen $\left(10^{-4}\right)^2 = 10^{-8}$, som är mindre än toleransen 10^{-6}. I detta fall krävs det alltså efter de första två iterationerna ytterligare två iterationer om toleransen är 10^{-6}.

(b) Funktionsfelets absolutbelopp är högst $(b-a)\varepsilon$, där $[a,b]$ är integrationsintervallet och ε är en övre gräns för felet i de använda funktionsvärdena. I vårt fall är $a=0$, $b=4$ och funktionsvärdena är mätvärden med en korrekt decimal, så $\varepsilon = 0.5\cdot 10^{-1}$. Därmed är absolutbeloppet av funktionsfelet högst $4\cdot 0.5\cdot 10^{-1} = 0.2$

Diskretiseringsfelet i $T(1)$ uppskattar vi med tredjedelsregeln. Då behöver vi även $T(2)$:

$$\begin{aligned} T(2) &= \frac{2}{2}\left[c(0)+2c(2)+c(4)\right] = \\ &= 1.0+2\cdot 1.6+2.7 = 6.9. \end{aligned}$$

Nu ger tredjedelsregeln att absolutbeloppet av diskretiseringsfelet är ungefär:

$$\left|\frac{T(1)-T(2)}{3}\right| = \left|\frac{6.85-6.9}{3}\right| \approx 0.02.$$

Slutsats: funktionsfelet är i detta fall ungefär tio gånger större än diskretiseringsfelet, så det är viktigast att mäta noggrannare om man vill öka noggrannheten i det beräknade närmevärdet till integralen.

4. (a)
   i. Kancellation
   ii. Adaptiv numerisk kvadratur
   iii. Lokala variabler
   iv. Normalekvationerna

   (b)
   i. Kvadratisk konvergens
   ii. Kubiska splines
   iii. Normaliserad
   iv. Diskretiseringsfelet

5. (a) Det enklaste alternativet är att i kommandofönstret skriva:

```
fzero(@(x) 0.5*exp(x) - 0.5*x^2 - 1, 1.3)
```

Ett annat alternativ är att definiera funktionen i en egen m-fil:

```
function y = f(x)
    y = 0.5*exp(x) - 0.5*x^2 - 1;
end
```

och sedan anropa `fzero` med antingen

```
fzero(@f, 1.3)
```

eller

```
fzero(@(x) f(x), 1.3)
```

(b)

a	-	2
b	-	3
c	-	4
d	-	1

Uppgift som testar måluppfyllelse för högre betyg

6. De metoder vi har att välja på för att beräkna F är trapetsformeln och Simpsons formel. För beräkna F till önskad noggrannhet med så lite arbete som möjligt väljer vi Simpsons formel eftersom den har högre noggrannhetsordning än trapetsformeln.

   Eftersom vi inte vet hur många delintervall som kommer att behövas använder vi ett adaptivt angreppssätt. Vi börjar med så få delintervall som möjligt, alltså två stycken, vilket ger steglängd $h = 12/2 = 6$. För att kunna göra feluppskattning med femtondelsregeln gör vi sedan ytterligare en beräkning av F, med halva steglängden, $h = 3$ (fyra delintervall). Om feluppskattningen visar att toleransen är uppfylld, så är vi klara. Om inte, så halverar vi steglängden igen (fördubblar antalet delintervall), beräknar F med den nya steglängden, gör feluppskattning med femtondelsregeln, etc., tills noggrannheten är tillräcklig.

   Vi genomför nu beräkningarna enligt ovan beskrivna idé. Steglängd $h = 6$ ger:

$$S(6) = \frac{6}{3}\left[f(0) + 4f(6) + f(12)\right] = 359.2707.$$

   Steglängd $h = 3$ ger:

$$S(3) = \frac{3}{3}\left[f(0) + 4\left(f(3) + f(9)\right) + 2f(6) + f(12)\right] = 396.0826.$$

   Feluppskattning med femtondelsregeln ger:

$$|F - S(3)| \approx \left|\frac{396.0826 - 359.3707}{15}\right| \approx 2.5$$

Toleransen i denna uppgift är 0.01 och gäller *relativa* felet. Det felet kan vi nu uppskatta genom:

$$\left|\frac{F - S(3)}{F}\right| \approx \left|\frac{F - S(3)}{S(3)}\right| \approx \frac{2.5}{396.0826} \approx 0.006$$

Eftersom $0.006 < 0.01$ är $S(3)$ en tillräckligt noggrann lösning. Relativt fel högst 0.01 innebär ca 2 signifikanta siffror, så vi svarar med $F = 400$. [*Kommentar:* Om F beräknas med Matlab-kommandot `integral` blir resultatet $F = 401.5921$.]

7. I kursblocket om kurvanpassning gavs exempel på fall där man kan transformera en icke-lineär ansats (och motsvarande data) så att problemet övergår till ett där man kan göra minstakvadratanpassning med rät linje (se Chapra, kap. 14.4). Formeln för $\mathrm{err}(N)$ i den här uppgiften är ett sådant fall.

   Logaritmering ger:

$$\ln(\mathrm{err}(N)) = \ln\left(a\left(\frac{1}{N}\right)^b\right) = \ln(a) + b\ln\left(\frac{1}{N}\right).$$

   Detta visar att vi kan finna b genom minstakvadratanpassning av en rät linje till logaritmerade data. Inför beteckningarna $x = \ln(1/N)$, $y = \ln(\mathrm{err}(N))$ och $c = \ln(a)$. Problemet att bestämma b kan då lösas genom att anpassa den räta linjen $p(x) = c + bx$ till givna data x och y:

$x = \ln\left(\frac{1}{N}\right)$	-9.2103	-9.9035	-10.5966	-11.2898
$y = \ln(\mathrm{err}(N))$	-6.0748	-6.3771	-6.7254	-7.0703

   Idealt skulle vi vilja att:

$$\begin{aligned} p(-9.2103) &= -6.0748 &\quad (2)\\ p(-9.9035) &= -6.3771 &\quad (3)\\ p(-10.5966) &= -6.7254 &\quad (4)\\ p(-11.2898) &= -7.0703 &\quad (5)\end{aligned}$$

   Givet formeln för $p(x)$ kan ekvation (2)–(5) skrivas på matris-/vektorform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -9.2103 \\ 1 & -9.9035 \\ 1 & -10.5966 \\ 1 & -11.2898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.0748 \\ -6.3771 \\ -6.7254 \\ -7.0703 \end{bmatrix}$$

Beteckna koefficientmatrisen med A och högerledet med $\mathbf{y}$. Bilda normalekvationerna genom att multiplicera både högerled och vänsterled från vänster med A^T. Normalekvationerna blir:

$$\begin{aligned} 4c - 41.0002b &= -26.2477 \qquad (6) \\ -41.0002c + 422.6573b &= 270.1960. \qquad (7) \end{aligned}$$

Multiplicera ekvation (7) med 4/41.0002 och addera till ekvation (6), så elimineras första termen i ekvation (6) och kvar blir:

$$0.2345b = 0.1128,$$

vilket ger att b $=$ 0.1128/0.2345 $=$ 0.4810. Vi kan alltså svara att baserat på givna data är b ungefär 0.5.

[*Kommentar:* Man kan teoretiskt visa att noggrannhetsordningen för integrering med Monte Carlo-angreppssättet är 1/2, så att err(N) är proportionell mot $1/\sqrt{N}$.]