Övningar till lektion 7

Naturlig deduktion för första ordningens logik, samt mer om sanning och konsekvens

1. Bevisa följande sekventer med naturlig deduktion:

   (a) $\forall x\,\mathbf{P}(x) \wedge \forall x\,\mathbf{Q}(x) \vdash \forall x\,(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))$

   (b) $\{\forall x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)),\ \forall y(\mathbf{Q}(y) \to \mathbf{R}(y))\} \vdash \forall z(\mathbf{P}(z) \wedge \mathbf{R}(z))$

   (c) $\exists x\,(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)) \vdash \exists x\,\mathbf{P}(x) \wedge \exists x\,\mathbf{Q}(x)$

   (d) $\neg\exists x\mathbf{Q}(x) \vdash \forall x\neg\mathbf{Q}(x)$

   (e) $\exists x\neg\mathbf{P}(x) \vdash \neg\forall x\mathbf{P}(x)$

   (f) $\forall x\ \mathbf{P}(x) \vee \forall x\,\mathbf{Q}(x)\ \vdash\ \forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))$

   (g) $\{\forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x))\,,\ \exists x\,\neg\mathbf{P}(x)\} \vdash \exists x\,\mathbf{Q}(x)$

   (h) $\vdash \forall x\ (\mathbf{P}(x) \vee \neg\mathbf{P}(x))$

   (i) $\{\forall x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))\,,\ \exists x\,\neg\mathbf{P}(x)\} \vdash \exists x\,\neg\mathbf{Q}(x)$

   (j) $\vdash \exists x(\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \leftrightarrow (\exists x\mathbf{P}(x) \vee \exists x\mathbf{Q}(x))$

   (k) $\vdash \exists x\neg\mathbf{P}(x) \leftrightarrow \neg\forall x\mathbf{P}(x)$

   I uppgift 2 och 3 nedan visas hur man kan härleda bevisregler för $\exists$ om man har reglerna för $\forall$ och använder $\exists x\,\varphi(x)$ som en *förkortning* av formeln $\neg\forall x\,\neg\varphi(x)$. De härledda bevisen kan betraktas som förkortningar av de längre bevisen. I uppgift 2 och 3 ska du därför *inte* använda reglerna för $\exists$.

2. Konstruera ett formellt bevis för $\mathbf{P}(\mathbf{c})\ \vdash\ \neg\forall x\,\neg\mathbf{P}(x)$, där $\mathbf{c}$ är en sluten term.

3. Anta att $\mathcal{D}$ är ett formellt bevis (med naturlig deduktion) som vittnar om att $\mathbf{P}(\mathbf{c}) \vdash \mathbf{A}$, där $\mathbf{c}$ är en ny (godtycklig) konstantsymbol som inte förekommer i den slutna formeln $\mathbf{A}$. Konstruera ett formellt bevis (som har $\mathcal{D}$ som ett delbevis) som vittnar om att $\neg\forall x\,\neg\mathbf{P}(x) \vdash \mathbf{A}$.

4. (svårare) Bevisa följande sekvent med naturlig deduktion:

$$\exists x\exists y\forall z(x = z \vee y = z) \vdash \forall x\forall y\forall z(x = y \vee y = z \vee x = z)$$

5. Låt σ vara en signatur och $\varphi \in LR(\sigma)$ en sats. Låt också $\mathcal{A}$ vara en σ-struktur.

   (a) Då gäller ju $\mathcal{A} \models \varphi$ eller $\mathcal{A} \models \neg\varphi$. Varför?

   (b) Ge exempel på en sats $\psi \in LR(\sigma)$ så att $\not\models \psi$ och $\not\models \neg\psi$. (Det går att göra oavsett vad signaturen σ är.)

   (c) Låt $\psi \in LR(\sigma)$ vara en sats som inte är formellt bevisbar, dvs $\nvdash \psi$. Kan man vara säker på att $\vdash \neg\psi$? Förklara! (Vänta med denna del tills vi har gått igenom sundhetssatsen för första ordningens logik.)

6. Skriv följande formler på *prenex normalform*, där vi antar att a är en konstantsymbol, P och Q är 1-ställiga relationssymboler och R är en 2-ställig relationssymbol:

   (a) $\neg(\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y))$

(b) $\exists z \neg \forall x (R(x,z) \to \exists y R(y,z))$

(c) $\forall x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x)) \to R(a,a)$

7. Låt $\sigma = \langle ;\ ; P \rangle$ med ställighet $\langle ;\ ; 2 \rangle$. Betrakta följande tre σ-strukturer:

   $\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N};\ ;\ ; P^{\mathcal{A}_1}, \rangle$, där $P^{\mathcal{A}_1}$ tolkas som $<$ på $\mathbb{N}$.

   $\mathcal{A}_2 = \langle \mathbb{Z};\ ;\ ; P^{\mathcal{A}_1} \rangle$, där $P^{\mathcal{A}_2}$ tolkas som $\leq$ på $\mathbb{Z}$ (= mängden av alla heltal).

   $\mathcal{A}_3 = \langle \mathbb{Q};\ ;\ ; P^{\mathcal{A}_1} \rangle$, där $P^{\mathcal{A}_3}$ tolkas som $\leq$ på $\mathbb{Q}$ (= mängden av alla rationella tal).

   (a) Ange en sats $\varphi \in LR(\sigma)$ så att $\mathcal{A}_1 \models \varphi$ och $\mathcal{A}_2 \models \neg\varphi$.

   (b) Ange en sats $\tau \in LR(\sigma)$ så att $\mathcal{A}_2 \models \tau$ och $\mathcal{A}_3 \models \neg\tau$.

   (c) Ange en sats $\xi \in LR(\sigma)$ så att $\mathcal{A}_3 \models \xi$ och $\mathcal{A}_1 \models \neg\xi$

8. (svårare) Låt $\sigma_0 = \langle\ ;\ ;\ \rangle$, så σ_0 har varken konstantsymboler, funktionssymboler eller relationssymboler. Likväl finns det gott om formler (såväl slutna som öppna) i $LR(\sigma_0)$, faktiskt oändligt många. Exempelvis är detta en sats i $LR(\sigma_0)$: $\forall x (x = x)$.

   (a) Skriv satser i detta språk som tolkas som:

      (i) Det finns exakt 3 element.

      (ii) Det finns minst 2 element x har egenskapen $\varphi(x)$ (där $\varphi(x)$ är en godtycklig formel i språket med den fria variabeln x).

      (iii) Det finns exakt ett element som har egenskapen $\varphi(x)$.

   (b) Ange en teori Γ i detta språk sådan att

   $$\mathcal{A} \models \Gamma \text{ om och endast om } \mathcal{A} \text{ är oändlig}$$

   gäller för varje struktur $\mathcal{A}$.
   Anmärkning 1: En struktur kallas oändlig om dess universum är en oändlig mängd.
   Anmärkning 2: Mängden Γ får vara oändlig.

9. (svårare) Låt σ vara signaturen från Uppgift 7. För att underlätta läsningen skriver vi i denna uppgift $x \leq y$ i stället för $P(x,y)$. Låt T vara teorin nedan. En modell för T kallas för en *partiell ordning.*

   $$T = \{\forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \longrightarrow x \leq z),\ \ \forall x \forall y\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \longrightarrow x = y)\}$$

   (a) Låt $\varphi = \exists x\, \forall y\ (x \leq y \vee y \leq x)$.
   Ange partiella ordningar $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \varphi$ och $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

   (b) Låt $\psi = \forall x \forall y \exists z \big((x \leq z \wedge y \leq z) \vee (z \leq x \wedge z \leq y)\big)$, och ange partiella ordningar $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \psi$ och $\mathcal{B} \models \neg\psi$.

   (c) Visa att ingen av $\psi, \varphi, \neg\psi$ eller $\neg\varphi$ är logiska sanningar.