UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Fourieranalys

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
December 12, 2022

Contents

1. TODO

- Review ODE notes
- Exercise 3
- Standardintegrals
- Trigonometriska substitutioner
- Texa publicerade föreläsningsanteckningar
- Se PDF 25
- Gör sista exemplet
- Se bevis för Sats 5.2 i föreläsningsanteckningar
- Uniform limits behave nicely with respecft to derivatives
- Magnitude & Norm

2. Bakgrund

Låt oss betrakta $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ så att $f(0) = f(\pi) = 0$
När kan vi skriva denna funktion $f(x)$ som en analytisk funktion (potensserie), det vill säga:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n \cdot x) \tag{1}$$

Där $a_n \in \mathbb{R}$ är konstanter.

Inte alla funktioner tillfredställer att intervallet $[0, \pi]$ ger en konvergerande potensserie för f, frågan man kan ställa sig är *när kan vi skriva f som en serie av trigonometriska funktioner?*

Vi kommer inse att *om* f går att skriva som en potensserie av trigonometriska funktioner, så behöver vi hitta våra koefficienter. I fallet med MacLaurin serier så kom de (a_n) från derivatan.
I detta fall kommer det från:

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

I någon mening kommer analys-delen av denna kurs från att vi studerar funktioner utifrån integraler, såsom den ovan.
Integralen ovan är integral-transform.

Vi kan även skriva:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

Något mer vi kommer undersöka, är om vår fourierserie konvergerar, och om den konvergerar mot vår funktion (detta är inte alltid uppenbart)

2.1. **Komplexa exponentialer.**

Det finns en viktig eulerformel. Vi alla känner till e^x, men vad händer om $x = a + bi$?

Definition/Sats 2.1: Eulers formel

Vi får då $e^{a+bi} = \underbrace{e^a}_{\in \mathbb{R}} e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$ för varje $a, b \in \mathbb{R}$

Kom ihåg att vi kan representera komplexa tal med polära koordinater.
Vi har då att varje komplext tal $a + bi$ kan representeras som $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi får då $a + bi = re^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta}$

Övning:
Använd Eulers formel för att visa att $\cos(2x) = \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$ och $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

Anmärkning:
Komplexa exponentialer är *inte* injektiva, alltså fungerar inte logaritmen.
Exempelvis kan vi betrakta $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$

Definition/Sats 2.2: Fourierpolynomial

Är på formen:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx}$$

Kallas för polynom för att vi har $e^{ikx} = (e^{ix})^k$ som är ett monom i e^{ix}

Vi kan uttrycka Fourierpolynom m.h.a sinus och cosinus enligt följande:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k}) \cos(kx) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kx)$$

Anmärkning:
Detta är samma fourierpolynom som var på *exponential form* i *trigonometrisk form*

2.2. **Lebesgue integralen.**

Den vanliga definitionen av integralen som vi alla är vana vid är Riemann-integralen.

3. Laplace Transform

Vi kommer inte se många komplexa exponentialer, detta stöter vi på senare när vi ska kika på fourierserier och fouriertransformationer.

Precis som alla integraltranformationer, så är tanken bakom att de ska hjälpa att lösa en ODE/PDE. Vi kan tänka på den som en maskin som man stoppar in en funktion, och så spottar den ut en annan funktion:

$$f(t) \sim \mathcal{L}[f](s) = (\widetilde{f}\ (s))$$

Den nya funktionen har lite andra egenskaper. Notera att vi byter variabler från t till s.

Laplace transformationen har lite nice egenskaper:

- $f'(t) \sim \mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)$

Det finns såklart en "inverse-maskin", som tar en laplace transformation som input och ger ursprungliga funktionen:

$$\mathcal{L}[f](s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} f(t)$$

Genom att använda den nice egenskapen på en hel differentialekvation får vi istället en ekvation som består av $s\cdot$ gånger någon funktion, vilket är betydligt lättare att lösa.

Definition/Sats 3.1: Laplace Transformationen

Laplace Transformationen av en funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ är

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Anmärkning:
Laplace transformationen bryr sig inte om vad som händer på den negativa delen av domänen, den vill bara att den är definierad över $\mathbb{R}_+$, alltså:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[H(t) \cdot f(t)](s)$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Vi tappar alltså vad som händer med funktionen i dens negativa domän.

Anmärkning:
Enbart om integralen är definierad. Inte alla funktioner har Laplacetransformationer

Vi kan tänka oss att vi "integrerar" bort t, kvar får vi en funktion som beror på s.

Ibland får man ett svar som är definierad på negativa värden av t och *ibland* löser den DE:n, men absolut inte alltid och detta måste verifieras för hand och kan inte hänvisas till teori.

Exempel:
Beräkna $\mathcal{L}[t^n](s)$:

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt \overset{\text{parts}}{=} \left[t^n \cdot \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty n t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{s} dt$$

$$\text{Om } s > 0 \Rightarrow 0 + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt \overset{\text{parts}}{=} \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt$$

$$= \cdots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{n!}{s^n} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Anmärkning:
Eftersom integralen för $s < 0$ divergerar, så säger vi att Laplacetransformationen inte är definierad för $s < 0$

Exempel:
Beräkna $\mathcal{L}[e^{at}](s)$:

$$\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt = \left[\frac{e^{t(a-s)}}{a-s}\right]_0^\infty$$

$$\text{Om } s > a \quad \Rightarrow \frac{1}{s-a}$$

Definition/Sats 3.2

Om $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ är:

- Styckvis kontinuerlig (om i varje begränsat intervall $[0, b]$, så är f begränsad och har ändligt många punkter av diskontinuitet)
- Av exponential ordning, dvs det finns konstanter $M > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ för alla $t \geq 0$

Då kommer integralen $\mathcal{L}[f](s)$ konvergera $\forall\ s > \alpha$

Anmärkning:
Med exponential ordning menas att:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{Me^{\alpha t}} = 0$$

Anmärkning:
Om Laplacetransformationen konvergerar för a, så kommer den konvergera $\forall\ s > a$

Exempel:
Varje polynom $p(t)$ är av exponentiell ordning med $\alpha = \varepsilon$. Detta för att oavsett hur litet α är, så kommer en exponentialfunktion växa mycket snabbare än ett polynom tillslut.

Anmärkning:
Laplacetransformationen är linjär (följer från att integralen är linjär)

Exempel:
Funktionen $f(t) = e^{t^2}$ är *inte* av exponentiell ordning. t^2 växer snabbare än vilket α som helst. Denna funktion har inga Laplacetransformationer oavsett värde på s

Ni kanske märker att den går att integrera, men inversen är inte längre unik. Samma sak gäller exempelvis även om $f(t) = e^{2st}$

Anmärkning:
Det finns funktioner som inte är styckvis kontinuerliga men som har konvergerande Laplacetransformation. Vi kommer i denna kurs bara bry oss om de som är styckvis kontinuerliga.

Även om man inte vet att lösningen till en DE uppfyller kriterierna kan man alltid testa!

Definition/Sats 3.3: Convolution

Convolution $*$ of $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) \cdot g(u)du$$

Anmärkning:
$f * g = g * f$

3.1. **Egenskaper hos Laplacetransformation.**

- Om Laplacetransformationen existerar vid s_0, då existerar Laplacetransformationen för samma funktion i s för alla $s > s_0$
- Laplacetransformationen är linjär
- $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \Leftrightarrow$ om $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ så $\mathcal{L}^{-1}[f(s-a)] = e^{as}F(t)$
- $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} \cdot \mathcal{L}[f](s) \quad a > 0$
  Vi vill döda vad som händer på negativa sidan när vi skiftar med a, för vi vet inte vad som händer där, varpå Heaviside funktionen $H(t-a)$ kommer in
- $\mathcal{L}[f(at)](s) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\dfrac{s}{a}\right) \quad a > 0$
- $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$ (måste hålla koll på initialvärdena på DE:n)
- $\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[f](s))$ (missbildad spegling av föregående punkt)
- $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$

Exempel:
Vad är $\mathcal{L}[\sin(at)]$ och $\mathcal{L}[\cos(at)]$?

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(t)] = \mathcal{L}[-\cos'(t)] = -\mathcal{L}[\cos'(t)] &= -s \cdot \mathcal{L}[\cos(t)] + \cos(0) \\
&= -s \cdot \mathcal{L}[\cos(t)] + 1 \\
\mathcal{L}[\cos(t)] = \mathcal{L}[\sin'(t)] &= s\mathcal{L}[\sin(t)] - \sin(0) \\
\Rightarrow \mathcal{L}[\sin(t)] &= -s^2\mathcal{L}[\sin(t)] + 1 \\
\mathcal{L}[\sin(t)](1+s^2) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}[\sin(t)](s) &= \frac{1}{s^2+1} \\
\Rightarrow \mathcal{L}[\cos(t)] &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Vi påminner om att Laplarretransformationen är bara definierad över de positiva reella talen, så vi delar upp i fall då $a < 0$ och $a > 0$:

Fall $a > 0$:

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}[\sin(t)]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}[\cos(t)]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{s/a}{(s/a)^2+1} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Fall $a < 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}[\sin(-(-a)t)](s) = \mathcal{L}[-\sin(-at)](s) &= -\mathcal{L}[\sin(-at)](s) \\
\Rightarrow -\frac{-a}{s^2+a^2} &= \frac{a}{s^2+a^2} \\
\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[\cos(-(-a)t)] = \mathcal{L}[\cos(-at)](s) &= \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Fall a=0:

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}[0](s) = 0$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$$

Vi visar att Laplarre av en deriverad funktion (en gång!) är s gånger Laplarren:

Bevis 3.1

Vi skriver vad vi vet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f'(t)e^{-st}dt \\
&\overset{\text{parts}}{=} \lim_{A\to\infty}[f(t)e^{-st}]_0^A + s\int_0^A f(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{A\to\infty} f(A)e^{-sA} - f(0)\cdot 1 + \int_0^A f(t)e^{-st}dt \\
&= 0 - f(0) + s\mathcal{L}[f(t)](s) \Leftrightarrow s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)
\end{aligned}$$

□

4. Tillämpningar på differentialekvationer

Innan vi börjar, ska vi notera unikheten av Laplacetransformationen:

Definition/Sats 4.1

Om Laplacetransformationen för 2 kontinuerliga funktioner sammanfaller, så måste funktionerna vara samma. Om de enbart är kontinuerliga i en punkt, så måste de sammanfalla i den punkten om Laplacetransformationen är densamma.

Då kan vi dra slutsatsen att det finns en invers $\mathcal{L}^{-1}$ (på grund av unikhet)

Exempel:
Lös följande linjära förstaordningens IVP med konstanta koefficienter med Laplace:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Det första vi gör är att köra Laplacetransformation på allt:

$$\mathcal{L}[y'(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[3]$$
$$s \cdot \mathcal{L}[y(t)] - \underbrace{y(0)}_{2} + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[3]$$
$$\mathcal{L}[y(t)](s+1) - 2 = \mathcal{L}[3] = \frac{3}{s}$$
$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\left(\frac{3}{s} + 2\right)}{s+1} = \frac{3+2s}{s(s+1)}$$

Nu ska vi finna inversen till denna Laplacetransformation, då får vi $y(t)$. Vi kan kika i formelbladet för att hitta detta:

$$\frac{3+2s}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+1}$$
$$y(t) = 3 - e^{-t} \quad t \geq 0$$

Anmärkning:
Lösningen till en ODE är kontinuerlig

Anmärkning:
Integralens värde ändras inte om funktionen är diskontinuerlig i ändligt många punkter.

Laplacetransformationer är hjälpsamma för att inte bara lösa differentialekvationer, men *integralekvationer*

4.1. Tillämpningar till integralekvationer.

Exempel:
Hitta en funktion $f(t)$ sådant att den löser följande ekvation:

$$\underbrace{2\int_0^t \cos(t-x) f(x) dx}_{\text{Konvolution av } \cos * f} = f(t) + 3$$

Lösning:
Börja med Laplacetransformation och använd egenskapen att Laplacetransformationen av konvolutio blir produkt:

$$2\frac{s}{s^2+1}\cdot\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}[f]+\frac{3}{s}$$
$$\mathcal{L}[f]\left(1-\frac{2s}{s^2+1}\right)=-\frac{3}{s}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[f]\left(\frac{s^2-2s+1}{s^2+1}\right)=\mathcal{L}[f]\frac{(s-1)^2}{s^2+1}=-\frac{3}{s}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[f]=-\frac{3s^2+3}{s(s-1)^2}$$

Nu kan vi hitta inversen till Laplacetransformationen, vilket vi kan göra med partialbråksuppdelning, vi får då: (**CHECK**)

$$\mathcal{L}^{-1}=f(t)=-3-6te^t$$

5. Series of functions

5.1. Funktionsföljder.

Vi påminner oss om hur det såg ut för talföljder $a_1, a_2, \cdots$,
Vi sade att talföljden *konvergerar* till ett $a \in \mathbb{R}$ om:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \quad |a - a_n| < \varepsilon$$

Vi vill nu undersöka vad som händer om vi tittar på en "funktionsföljd" och vad det betyder att de sekvenserna konvergerar.

Antag att vi har en följd av funktioner (som alla har samma domän), konvergens i funktionsföljder:

Definition/Sats 5.1

Låt $S \subset \mathbb{R}$ och låt $f_n : S \to \mathbb{C}$ (**FÖR ALGEBRAISK SLUTENHET (nej, för fourierserier är komplexvärda)**) vara en funktionsföljd där $n \geq 0$

Vi säger att funktionsföljden f_n *konvergerar*:

- **Punktvis**: Till en funktion $f : S \to \mathbb{C}$ om $\forall x \in S$ får vi en talföljd $f_1(x), f_2(x), \cdots$ som konvergerar till $f(x)$.

  Mer matematiskt uttryckt: $\forall x \in S \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  Anmärkning:
  Eftersom vi kollar efter punktvis konvergens, så behöver inte f (funktionen som följden konvergerar till) vara kontinuerlig.

- **Likformig konvergens**: Vi säger att f_n konvergerar *likformigt* om vi kan fixera ett $\varepsilon > 0$ och att det för alla x gäller att konvergensen sker.

  Mer matematiskt uttryckt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; \forall x \in S \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  Notera här att vi fixerar både ε och n_0 och då måste detta n_0 funka *för alla* $x \in S$.
  Då ska alla funktioner med $n > n_0$ hamna inom $f \pm \varepsilon$ för alla $x \in S$ så att *hela* funktionen hamna inom $f \pm \varepsilon$

Anmärkning:
Likformig konvergens $\Rightarrow$ punktvis konvergens

Hela iden mellan varför man definierar 2 olika konvergenser är att punktvis konvergens är "det första man tänker på" när man tänker på konvergens. Men, man vill gärna att följden ska kunna säga något om funktionen och vice versa.

Definition/Sats 5.2

Om $f_n \to f$ likformigt och alla f_n är kontinuerliga, då måste f vara kontinuerlig

Exempel:
Antag att jag har följande:

$$f_n : [1,2] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

Om $x = 1$ så är $f_n(1) = \dfrac{1}{1^n} \to 1$
Om $x > 1$ så är $f_n(x)\dfrac{1}{x^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

Alltså, $f_n \to f$ punktvis konvergens där

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Från Sats 5.2 gäller då att f är diskontinuerlig.

Anmärkning:
Om f är likformigt kontinuerlig, så gäller **inte** att f_n är kontinuerliga.

Om vi modifierar föregående exempel så att $f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} & x > 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ får vi att f är likformigt kontinuerlig ($f = 0$) men f_n är diskontinuerlig.

Definition/Sats 5.3

Om $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ är en funktionsföljd av integrerbara funktioner och om $f_n \to f$ konvergerar likformigt, då är f också integrerbar och

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \overset{?}{=} \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Exempel:
Låt $f_n = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \text{ eller } x = 0 \end{cases}$

Här gäller att $f_n \overset{\text{punktvis}}{\to} f$ och $f(x) = 0$ för alla x
Det som är lite ointuitivt är att $\int_0^1 f(x)dx = 0$ men $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$

Från Sats 5.3 gäller att vi *inte* har likformig konvergens.

5.2. Funktionsserier.

Definition/Sats 5.4: Konvergens av funktionsserier

Låt $S \subseteq \mathbb{R}$ och $f_k : S \to \mathbb{C}$ vara en funktionsföljd där $k \geq 0$.

Låt:

$$s_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$$

vara följd av partiella summor där $N \geq 0$

Serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

konvergerar:

- **Punktvis**: Om $s_N \overset{\text{punktvis}}{\to} F$, det vill säga:

$$\forall x \in S \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \qquad \left| \sum_{k=0}^{N} f_k(x) - F(x) \right| < \varepsilon$$

- **Likformigt:** Om $s_N \overset{\text{likformigt}}{\to} F$, det vill säga:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; \forall x \in S \qquad \left| \sum_{k=0}^{N} f_k(x) - F(x) \right| < \varepsilon$$

- **Absolutkonvergens:** Om:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$$

  konvergerar punktvis

- **Absolutlikformigt**: För många adjektiv :p

Anmärkning:
Om $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till någon funktion $F(x)$, så konvergerar serien punktvis till samma $F(x)$

Anmärkning:
Om $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent, så är den punktvis konvergerande.

Anmärkning:
Om f_k är kontinuerliga och serien $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till $F(x)$, så är $F(x)$ kontinuerlig

Anmärkning:
Om f_k är integrerbara i ett intervall $[a, b]$ och serien $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till $F(x)$, så är:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Definition/Sats 5.5: Weirstrass M-test

Låt $f_k : [a, b] \to \mathbb{C}$ vara en funktionsföljd sådant att det finns tal $M_k \geq 0$ som uppfyller följande:

- $\forall x \in [a, b] \quad |f_k(x)| \leq M_k \quad$ (bounds the whole function f_k)
- Serien $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ konvergerar

Då gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent och likformigt och punktvis

6. Fourierserier

6.1. Notation & Terminologi.

Skillnaden mellan Fourierserier och Laplacetransformationen har mest att göra med funktionens domän. I Laplacetransformationen så begränar vi oss till $\mathbb{R}_+$, men med Fourierserier vill vi kunna nyttja hela $\mathbb{R}$

Definition/Sats 6.1: Periodisk funktion

Vi säger att en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2π-periodisk om:

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exempel:
$\sin(kx)$ och $\cos(kx)$ där $k \in \mathbb{Z}$ är 2π periodiska.

Iden är att försöka uttrycka en godtycklig 2π periodisk funktion som en oändlig linjärkombination av $\sin(x)$ och $\cos(x)$

Anmärkning:
En bra fördel med 2π periodiska funktioner är att trots att funktionen är definierad på hela $\mathbb{R}$ så räcker det med att studera $[0, 2\pi]$

Anmärkning:
Om man försöker omvandla en funktion till 2π periodisk, så kan det hända att vi introducerar diskontinuitet vid ändpunkten $k \cdot 2\pi$

Definition/Sats 6.2

Vi skriver följande:

- $C(\mathbb{T}) = \{\text{kontinuerliga funkioner} f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid 2\pi \text{ periodiska}\}$
- $C^k(\mathbb{T}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid 2\pi \text{ periodiska med } f^{(k)}(x) \text{ kontinuerlig}\right\}$

Anmärkning:
Bara för en funktion ligger i $C(\mathbb{T})$ betyder det **inte** att den ligger i $C^1(\mathbb{T})$

Anmärkning:
Anledningen till varför vi studerar just 2π periodiska funktioner är för att om vi har en annan funktion med period $p \neq 2\pi$, så kan vi med variabelbyte få den funktionen att bli 2π periodisk

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad p > 0 \text{ - periodisk}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad g(x) = f\left(\frac{p}{2\pi} \cdot x\right) \qquad 2\pi \text{ - periodisk}$$

Fråga:
Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en 2π periodisk funktion. Kan vi skriva $f(x)$ i termer av en fourierserie?

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{e^{ikx}}_{\cos(kx) + i\sin(kx)} \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Anmärkning:
Om jag har en serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ så kan jag skriva den som:

$$\underbrace{\sum_{k=\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Exponentialform}} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}_{\text{Trigon. form}}$$

där:

$$a_0 = 2c_0$$
$$a_k = c_k + c_{-k}$$
$$b_k = i(c_k - c_{-k})$$

Anledningen till varför vi delar på 2 är för att det blir en finare formel senare när man väl ska använda den

Anmärkning:
Konstanterna c_k kommer från $f(x)$, vi kan därmed uttrycka c_k som en funktion av f

Lemma 6.1

Givet $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} \frac{e^{inx}}{in}\Big|_0^{2\pi} \overset{2\pi-\text{per.}}{=} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi & n = 0 \end{cases}$$

Givet $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}$$

Antag att

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

där serien är likformigt konvergent. Då måste f vara kontinuerlig.
Hur kan vi få ut c_k ur funktionen $f(x)$? Låt oss testa lite grejs:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} e^{-ikx} dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(m-k)x} dx \overset{\text{likf. kont.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_m e^{i(m-k)x} dx$$
$$\overset{\text{Lem6.1}}{=} 2\pi \cdot c_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Detta gäller för nice funktioner, funktioner som kommer från likformigt konvergenta fourierserier.

Då kan man få för sig att bara studera dessa typer av funktioner, men det finns en till tolkning.

Formeln för c_k funkar för alla funktioner som är integrerbara. Vi kan konstruera en fourierserie av en given funktion, men kommer serien konvergera? Kommer serien konvergera till funktionen vi började med?
Det är vad som studien av fourierserier försöker besvara.

Definition/Sats 6.3: Fourierserien av en funktion

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara 2π periodisk och integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$

Funktionens fourierserie anges av:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

där:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Vi skall nu försöka besvara föregående frågor:

- Konvergerar serien:
  - Punktvis
  - Likformigt
  - Absolut
  - På något sätt?
- Om serien konvergerar, konvergerar den till $f(x)$?

Anmärkning:
Vi antar här att vår funktion är 2π periodisk (men det spelar egentligen ingen roll vilken period eftersom vi kan med variabelbyte få den att bli 2π, viktigt att den är periodisk dock!)

Anmärkning:
Eftersom vi kan gå från exponentialform till trigonometrisk form, så gäller följande för fourierserier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Anmärkning:
Tidigare sa vi att b_k var en multipel av i, men detta gällde för att c_k var komplex, så $b_k = ic_k \in \mathbb{R}$. Det är därför vi inte behöver bry oss så mycket om i när vi definierar den som vi gjorde här.

Exempel:
Vi ska köra ett exempel och speciellt se om vi kan svara på frågorna ovan.

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ så att $f(x) = x$ i intervallet $[-\pi, \pi)$ (f är 2π periodisk)

Lägg märke till att $f(x)$ är en udda funktion. En linjärkombination av jämna funktioner kommer vara jämn, alltså kommer vi ha en linjärkombination av udda funktioner.
Eftersom $\cos(x)$ är jämn, så kommer alla a_k koefficienter vara 0 (inga jämna funktioner). Vi behöver då bara räkna fram b_k:
$k \geq 1$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \overset{\text{parts}}{=} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

Nu kan vi besvara frågorna.

Exempel:
Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en 2π periodisk funktion där $f(x) = x^2$ då $x \in [-\pi, \pi]$

Denna funktion har nollställen i jämna multiplar av π (inkl. 0)

Bestäm funktionens fourierserie. Notera att vår funktion är jämn, så vi kommer *inte* ha några sin eftersom sinus är udda. Detta gör det lättare att representera funktionen i trigonometrisk form:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$$

Vi kan använda att funktionen är symmetrisk och därmed räkna halva koefficienterna
Där a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$\overset{\text{parts}}{=} \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

7. Analys av Fourierserier

Vi vill undersöka

- Konvergerar serien:
  - Punktvis
  - Likformigt
  - Absolut
  - På något sätt?
- Om serien konvergerar, konvergerar den till $f(x)$?

Om vi analyserar följande:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

Konvergerar serien?
Vi kan använda Weirstrass M-test eftersom:

$$\left| \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx) \right| = M_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{4} \frac{4}{n^2} \Leftarrow \text{ konvergerar}$$

Av Weirstrass M test konvergerar serien absolut, likformigt, och punktvis

Anmärkning:
Om vi sätter absolutbelopp på vår fourierserie så försvinner de trigonometriska formerna och vår kandidat för M_n blir då våra koefficienter

Konvergerar serien till $f(x)$?
NÄSTA FÖRELÄSNING SER VI ATT SVARET ÄR JA

Evaluering av Fourierserien
Låt oss anta för tillfället att serien konvergerar till funktionen
Vi vet att $f(\pi) = \pi^2$
Fourierserien i π:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3 \cdot 4} = \frac{\pi^2}{6}$$

7.1. **Konvergerande Fourierserier.**

I en talföljd vet vi att serien konvergerar om exempelvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Vi kan översätta detta till fourierserier genom att undersöka om koefficienterna går till 0

För att göra detta behöver vi införa lite nya verktyg:

Definition/Sats 7.1: Absolutintegrerbar

Om vi tar ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ av de reella talen och vi har en $f : I \to \mathbb{C}$, säger vi att f är absolutintegrerbar om:
$\int_I |f(x)|dx$ konvergerar (integrerbar)

Anmärkning:

- Om $I = [a, b]$ är ett ändligt intervall och $f : I \to \mathbb{C}$ integrerbar, så är f absolutintegrerbar
- Detta gäller *inte* om intervallet I är oändligt:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty$$

$$\int_0^\infty |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$$

Lemma 7.1: Riemann-Lebesgue

Om vi har ett intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ och en funktion $f : I \to \mathbb{C}$ som är integrerbar *och* absolutintegrerbar, då gäller:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x) \cdot \cos(\lambda x)dx = 0$$

Samma gäller för följande (och för $-\infty$):

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)dx = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)e^{i\lambda x}dx = 0$$

Anmärkning:
En funktion kan vara absolutintegrerbar men *inte* integrerbar, exempelvis:

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Här gäller att $|f(x)| = 1$ som är integrerbar, men funktionen går knappt att rita (ej Riemann integrerbar men Lebesgue integrerbar)

Varför gillar vi Riemann-Lebesgues sats? Tänk på koefficienterna! De är integrerbara på den formen (ett intervall $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, integrerbar, absolutintegrerbar?)

Corollarium:
Om vi har en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är 2π periodisk och integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$ så:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 = \lim_{n\to-\infty} c_n$$

Bevis 7.1

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Då följer det från Riemann-Lebesgues sats att:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

$$I = [0, 2\pi] \qquad \lambda = -n$$

Vi kan göra detta för $-\infty$ $\square$

Anmärkning:
Notera att kraven vi ställde för c_n är samma för de för Fourierserier.

För vanliga gränsvärden kan vi säga något om deras hastigheter. $\frac{1}{n}$ går mot 0 segare än vad $\frac{1}{n^2}$ gör.

Vi kan göra något liknande med funktioner. Det finns en ”slogan” som säger följande:
Ju mer integrerbar en funktion är, desto snabbare går deras fourierkoefficienter mot 0
Vi skriver detta som en sats:

Definition/Sats 7.2

Om $f \in C^k(\mathbb{T})$, så är $f^{(k)}$ kontinuerlig och därmed integrerbar med fourierkoefficienter, med följande:

$$c_n \text{ av } f^{(k)}(n) = (in)^k c_n$$

Detta påminner om Laplacetransformationens egenskap med avseende på derivatan. Om vi struntar i IVP så har vi ju något liknande
Detta följer från att Laplacetransformationen och Fourier är *integral transformationer*

Definition/Sats 7.3

Om $f \in C^k(\mathbb{T})$, så finns det en konstant $c > 0$ så att:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |c_n| \leq \frac{c}{|n|^k}$$

Anmärkning:
Det är nästan som att koefficienterna vet något om funktionen :o

Corollarium
Om $f \in C^2(\mathbb{T})$, så är funktionens fourierserie likformigt, absolut, och punktvis konvergent

Bevis 7.2

Det låter väldigt lämpligt att använda Weirstrass M-test:

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\left|c_n e^{inx}\right| = |c_n| \leq \frac{c}{|n|^2} = M_n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ konvergerar}$$

□

8. Dirichlets convergence theorem

Vårat mål är att studera punktvis konvergens av fourierserier, då behöver vi några hjälpdefinitioner eftersom vi ska ha definiera en sats som är lite teknisk

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara 2π-periodisk

Definition/Sats 8.1: Horizontella/Lateral gränsvärden

Vi säger att f har *lateral* gränsvärden i punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ om:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

existerar

Anmärkning:
Detta är likt definitionen av kontinuitet, men skillnaden är att kontinuitet gäller om $x_0^- = x_0^+$

Definition/Sats 8.2: Horizontella/Lateral gränsvärden för derivator

Om f har *lateral* gränsvärde i x_0 så har den *lateral* derivata i x_0 om:

$$f'_L = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$$
$$f'_R = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$$

Anmärkning:
Om $f'_L = f'_R$ så är funktionen deriverbar i x_0

8.1. **Dirichlets konvergenskriterier (DIY sats).**

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är 2π periodisk och integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$ (dvs en funktion som har en fourierserie) *och* om f har laterala gränsvärden *och* laterala derivator i någon punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, så kommer funktionens fourierserie konvergera i x_0:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx_0} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Det vill säga, fourierserien konvergerar i punkten x_0 och är medianen av de laterala gränsvärden

Följder från kriterierna

- Om funktionen f från kriterierna är kontinuerlig i x_0, så gäller att fourierserien i x_0 konvergerar till $f(x_0)$
$$f(x_0^+) = f(x_0^-) \Rightarrow \frac{2f(x_0)}{2} = f(x)$$
- Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2π periodisk och differentierbar i varje $x \in \mathbb{R}$, så är funktionens fourierserie punktvis konvergent till f
- Nu kan vi säga att om $f \in C^2(\mathbb{T})$ så är funktionens fourierserie absolut (**CHECK**), likformigt, och punktvis konvergent till f

För att bevisa Dirichlets kriterier så krävs rätt mycket tekniska saker, så vi kommer bara ge en generell bild över hur beviset går till

Definition/Sats 8.3: Convolution/Faltning

Om f, g är 2π periodiska och integrerbara på $[0, 2\pi]$, så är deras *faltning* (Convolution):

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Skillnaden mellan gamla och nya definitionen är att vi här har $\frac{1}{2\pi}$ framför integralen och lite annorlunda gränser till integralen

Lemma 8.1

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

Beviset för Lemma 8.1 är att använda variabelbytet $u = x - t$

Anmärkning:
Faltningen är 2π periodisk och integrerbar

Lemma 8.2

$$c(f * g)_n = c_n(f)c_n(g)$$

Anmärkning:
Här menas $c()$ som fourierkoefficienterna för f resp. g
Notera att det påminner lite om Laplarren.

Bevis 8.1

$$\begin{aligned}
c(f * g)_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f * g)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt\; e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dxdt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} g(t)\int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-inx}dxdt \\
&\overset{u=x-t}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} g(t)\int_{-t}^{2\pi-t} f(u)\underbrace{e^{-in(u+t)}}_{e^{-inu}e^{-int}}dudt \\
&\overset{2\pi\text{-per.}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}du \\
&\Leftrightarrow c(f)_n c(g)_n
\end{aligned}$$

□

Anmärkning:
Vår Laplacetransformation ”har blivit” våra fourierkoefficienter

Notation
Givet en funktion f som har en fourierserie (alltså f är integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$ och 2π periodisk) Låt $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_n e^{ikx}$ vara följden av partiella summor av fourierserien av f

Att analysera konvergensen av fourierserierna till f är samma som att analysera konvergensen till följden av dessa partiella summor.

Definition/Sats 8.4: Dirichlets kärna

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \qquad c_n = 1\,\forall n$$

Anmärkning:
$c(D_N)_m = 1$ annars 0 om $|m| > N$ (ty vi är utanför vår fourierserie och därmed har inga termer, vilket är ekvivalent med en summa från och till oändligheten men med koefficienter 0 utanför det önskade intervallet)

Definition/Sats 8.5

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$$

Två polynom är samma om de har samma koefficienter. I vårat fall kommer S_N ha koefficienterna $c(f)_k$, men D_N har koefficienterna 1 i intervallet och 0 utanför medan f har koefficienterna $c(f)_k$. Då följer det från faltningens egenskaper att de är samma

För att visa Dirichlets kriterier, studera D_N och dra slutsatsen att dess egenskaper implicerar att $S_N(f)(x_0)$ konvergerar till $\dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

9. Lösa PDE:er med Fourierserier

9.1. **Viktiga PDE:er som löses med separation of variabler.**

9.1.1. *Vågekvationben.*

$$u(x,t)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9.1.2. *Värmeekvationen.*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

Det var värmeekvationen som Fourier började med

9.1.3. *Schrödingers ekvation.*

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9.2. **Separation av variabler.**

Vi inleder med ett exempel:

Exempel:
Lös följande IVP (initalvärdesproblem) för $u(x,t)$:

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(x) \quad t > 0,\ 0 < x < \pi \\ x = 0 \Rightarrow u(0,t) = 0 \\ x = \pi \Rightarrow u(\pi,t) = 1 \quad \forall t > 0 \\ t = 0 \Rightarrow u(x,0) = \dfrac{3}{\pi}x + \cos(x) \quad \forall 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problemet är inte så lätt som den kan vara. Iden är som en vanlig DE, lös det generella problemet (som ger parametrar), stoppa in randvärderna och få lösningen.

Vanligtvis kan vi ta linjärkombinationer av lösningarn för att få fler lösningar.

Eftersom vi har $\cos(x)$ i PDE:n och $= 1$ i randvärderna, så har vi ett *icke-homogent* problem. Vi måste förenkla ner problemet till ett homogent problem:

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

Här slänger vi all icke-homogenitet till $\varphi(x)$ som är en funktion av *en* variabel (och ger oss en ODE), och $v(x,t)$ är då en homogen PDE som blir lättare att lösa

Nu ger vi lite info om v och φ:

$$(**)\begin{cases} v_t = v_{xx} \quad t > 0,\ 0 < x < \pi \\ v(0,t) = 0\ \&\ \underbrace{v(\pi,t) = 0}_{\Rightarrow \text{ homogen}} \quad \forall t > 0 \\ v(x,0) = ?\ = 1 \end{cases} \qquad (***)\begin{cases} \varphi'' = -\cos(x) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = v_t \\ u_{xx} = v_{xx} + \varphi'' \\ \Rightarrow v_t = v_{xx} + \varphi'' + \cos(x) \end{cases}$$

Nu behöver vi lösa ODE:n $(***)$ för att bestämma initialvärdena till $v(x, 0)$ i $(***)$

$$\varphi'' = -\cos(x)$$
$$\varphi' = \int -\cos(x)dx = -\sin(x) + C$$
$$\varphi = \int\int -\cos(x)dx = \int -\sin(x) + C = \cos(x) + Ax + B$$
$$\Rightarrow \varphi(0) = 1 + B = 0 \Leftrightarrow B = -1$$
$$\Rightarrow \varphi(\pi) = -1 + A\pi - 1 = 1 \Leftrightarrow A = \frac{3}{\pi}$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$

Vi vet att $u(x, 0) = \frac{3}{\pi}x + \cos(x)$
Däremot, per konstruktion har vi att $u(x, 0) = v(x, 0) + \varphi(x)$:

$$v(x, 0) + \varphi(x) = v(x, 0) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$
$$u(x, 0) = v(x, t) + \varphi(x) = v(x, t) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$
$$u(x, 0) = \frac{3}{\pi}x + \cos(x) = v(x, 0) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$
$$\Rightarrow v(x, 0) = 1$$

Nu löser vi $(**)$ genom separation av variabler metoden

Iden med separation av variabler metoden är att försöka hitta speciella lösningar på formen $v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ där X är en funktion som bara beror på x och T är en funktion som bara beror på t

Vi kikar närmare på $(**)$:

$$v_t = v_{xx} \Leftrightarrow X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(x)$$
$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Nu har vi fått ner problemet till en ODE:

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ T'(t) = -\lambda T(t) \end{cases}$$

Detta är ett system ODE:er som beror på en parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Det är inte tydligt att denna lösning existerar eller är på denna form, men vi ska visa att det faktiskt finns.

λ är en konstant, occh det finns olika val av λ, men de som faktiskt löser kommer vara de negativa λ, så vi kollar vad som händer om:

Fall $\lambda < 0$.

$$X''(x) = -\lambda X(x)$$

Här får vi en karaktäristisk ekvation: $\alpha^2 = -\lambda \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$
Generella lösningen till ODE:n med X blir då:

$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

Vi kan använda initialvärdena för att lösa ut c_1, c_2:

$$v(0, t) = 0 \Leftrightarrow X(0) \cdot T(t) = 0$$
$$v(\pi, t) = 0 \Leftrightarrow X(\pi) \cdot T(t) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Hur vet vi att inte $T(t) = 0 \quad \forall t$? Ett av initialvärdena är $v(x, 0) = 1$.

$$\Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$
$$c_1 \left(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}\right) \Rightarrow c_1 = 0$$
$$\Rightarrow X(x) = 0$$

Med $\lambda < 0$ får vi alltså en ganska tråkig lösning, vi undersöker vad som händer om vi har andra värden

Fall $\lambda = 0$

$$X''(x) = 0 \Rightarrow \iint X''(x)dx = Ax + B$$
$$X(0) = B = 0$$
$$X(\pi) = A\pi = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$\Rightarrow A, B = 0$$

Tråkigt igen, vi kikar på positiva lambdor

Fall $\lambda > 0$:

När vi stoppar in i vårat karaktäristiska polynom så kommer vi få icke-reella lösningar. Vi kan då skriva lösningen i termer av e, eller så använder vi trigonometrisk form:

$$X''(x) = -\lambda X(x)$$
$$\Rightarrow X(x) = c_1 \cos((\sqrt{\lambda}x)) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$
$$X(0) = c_1 = 0$$
$$X(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = k^2 \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow X(x) = c_2 \sin(kx) \qquad k \in \mathbb{N}^+, c_2 \in \mathbb{R}$$

Vi påminner oss om att vi hittar lösningar på formen:

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$
$$T'(t) = -\lambda T(t) \Rightarrow T'(t) = -k^2 T(t)$$
$$T(t) = c_3 e^{-k^2 t}$$

Syftet med att kolla på $T(t)$ är för att kunna fixera k:et i $X(x)$, det gör det lättare att lösa

$$\Rightarrow v(x, t) = c_2 c_3 \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

Superposition principle
Vi får nya lösningar till vår homogena system
VI försöker hitta alla ekvationer innan vi stoppar in initalvärderna. Vi tar alla linjärkombinationer:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) e^{-k^2 t} \qquad b_k \in \mathbb{R}$$

Frågan är nu vad b_k är, och för att hitta det så kan vi använda oss av vårat initalvärde $v(x, 0) = 1$:

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = 1$$

Detta är en fourierserie! b_k är koefficienter till funktionen 1, men notera att vi har en fourierserie med bara sinus (som är en udda funktion), medan funktionen $= 1$ är en jämn funktion.
Men! Vi behöver bara ha $v = 1$ i intervallet $0 < x < \pi$. Fourierserien är 2π periodisk och udda, men det är inte högerledet 1, så vi gör om högerledet så att det blir det.

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara

- 2π-periodisk
- $f(x) = 1$ om $0 < x < \pi$
- udda

Detta är funktionen som har värdet 1 mellan 0 till π och -1 mellan $-\pi$ till 0, och inversen överallt. Denna är udda och uppfyller resten av kraven

Nu vill vi hitta en fourierserie för den funktionen:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(kx)}_{\text{udda}\cdot\text{udda} = \text{jämn}} \; dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{-\cos(x)}{k} = \frac{2}{k\pi}\underbrace{\left((-1)^{k+1}+1\right)}_{k=2m+1 \Rightarrow 2}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin\left((2m+1)x\right) e^{-(2m+1)^2 t}$$

Vi har hittat allt vi behöver nu! Vi påminner oss om att $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$:

$$u(x,t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \sin((2m+1)x)e^{-(2m+1)^2 t}\right) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$

Anmärkning
Funktionen $f(x)$ som vi definierade uppfyller Dirichlets konvergens kriterium. Vi ”iggar” konvergens för positiva t

Anmärkning
Föreläsaren uppmuntrar att igga konvergens

10. Mean-Square konvergens av Fourierserier

Tanken här är att undersöka konvergens av funktioner i vektorrum (med funktionen som bas). Vi börjar med att bevisa följande:

Definition/Sats 10.1

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2π-periodisk och integrerbar i intervallet $[0, 2\pi]$, så:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 \, dx \to 0$$

"Om genomsnittet av skillnaden konvergerar"

Anmärkning:
Kallas för L^2 konvergens.

För att visa detta kommer vi kräva en del linjär algebra.

Låt V vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$. Vi påminner oss om vad inre-produkt är:

Definition/Sats 10.2: Semi Inre-produkt

En semi inre-produkt (semi för att vi inte har Lebesgue integraler) på vektorrummet V, är en avbildning $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{C}$ som uppfyller:

- $< u, v >= \overline{< v, u >}$ (skew-kommutativ, "taket" över är komplexa konjugatet)
- $< a_1u_1 + a_2u_2, v >= a_1 < u_1, v > +a_2 < u_2, v >$ (linjäritet i första input)
- $< u, u >\geq 0 \in \mathbb{R}$

Anmärkning:
Sista punkten, det följer att det är ett reellt tal efterom reella tal är de enda som uppfyller första punkten.

Definition/Sats 10.3: Inre-produkt

Om vi lägger till endast ett till krav på definitionen till semi inre-produkt, så får vi inre-produkt, nämligen att

- $< u, u >= 0 \Rightarrow u = \overline{0}$

Definition/Sats 10.4: Semi norm

Definieras på följande:

$$||u|| = \sqrt{< u, u >}$$

Exempel (*):
Låt $V = \mathbb{C}^n$ och:

$$< \underbrace{(u_1, \cdots, u_n)}_{\in\, \mathbb{C}^n}, \underbrace{(w_1, \cdots, w_n)}_{\in\, \mathbb{C}^n} >$$
$$u_1\overline{w_1} + u_2\overline{w} + \cdots + u_n\overline{w_n}$$

Detta är en inre-produkt

Exempel:
Låt $V = C(a, b) = \{$kontinuerliga funktioner $f : [a, b] \to \mathbb{C}\}$
Här kan vi även definiera en inre-produkt $< f, g >$ på följande vis:

$$< f, g >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

Anmärkning:
Detta är en giltig inre-produkt eftersom om:

$$f \in C(a,b) \qquad \int_a^b |f(x)|^2 \, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \; \forall x$$

Anmärkning:
Det komplexa konjugatet för en funktion tar komplexa konjugatet av evalueringen i en punkt.

Anmärkning:
Generellt sagt, genom att fixera en kontinuerlig funktion $w : [a,b] \to (0,\infty)$, så kan vi definiera inre produkten $< f, g >$ till:

$$< f, g >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\overline{g(x)} w(x) dx$$

Detta uppfyller fortfarande kraven för en inre-produkt på $C(a,b)$
Vi kan se w som en slags ”vikt” funktion som är praktisk att ha om vi undersöker funktioner som beter sig intressant i ett intervall.

Exempel:
Låt $V = I(a,b) = \{\text{integrerbara funktioner } f : [a,b] \to \mathbb{C}\}$, vi definierar $< f, g >$ på fölajnde:

$$< f, g >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

Detta är en *semi-inre-produkt.*
Anledningen till varför det är en *semi* och inte en vanligt inre-produkt är följande

Ponera att vi har $f \in I(2,3) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & x \neq 2 \end{cases}$

Denna funktion är inte 0-funktionen, men kör vi $< f, f >$ så får vi 0

Exempel:
Låt $V = l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \text{funktioner } f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \; (k \mapsto a_k) \text{ så att } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$

Detta påminner ju om fourierserier och fourierkoefficienterna! Givet en funktion, så kan vi associera ett element i rummet V.
Vår inre-produkt $< \{a_k\} . \{b_k\} >$ är:

$$< \{a_k\}, \{b_k\} >= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

Detta är en inre-produkt och en generalisering av exempel (*)

Anmärkning:
Från och med nu ska vi låta $(V, < \cdot, \cdot >)$ vara ett semi-inre-produkt-rum (V vektorrum, och $< \cdot, \cdot >$ semi-inre-produkt)

Definition/Sats 10.5: Egenskaper hos semi-inre-produkt

- $|< v, w >| \leq ||v|| \cdot ||w||$ (Cauchy-Schwartz)
- $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Ye' Olde Triangelolikheten)

Definition/Sats 10.6: Ortogonala vektorer

Vektorerna $v, w \in V$ är *ortogonala* om $< v, w >= 0$
Betecknas $v_\perp w$

Definition/Sats 10.7: Ortonormala vektorer

Vektoerna $v, w \in V$ är *ortonormala* om de är ortogonala *och* $||v|| = 1 = ||w||$

Definition/Sats 10.8: Pythagoras sats

Om $v_\perp w$, så:

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||$$

Bevis 10.1: Pythagoras sats

$$||v+w||^2 \overset{def}{=} <v+w, v+w>= \underbrace{<v, v+w>}_{\overline{<v+w,v>} = \overline{<v,w>} + \underbrace{\overline{<w,v>}}_{=0}} + \overbrace{<w, v+w>}^{\overbrace{\overline{<w,v>}}^{=0} + \overline{<w,w>}}$$

$$\Rightarrow <v,v> + <w,w> = ||v||^2 + ||w||^2$$

□

Exempel:
Funktioner på formen e^{inx} där $n \in \mathbb{Z}$ bildar en *ortonormal mängd* av $V = I(0, 2\pi)$
Vad menas en ortonormal mängd? En mängd med parvis ortonormala vektorer. Vi kan visa att detta gäller i vårat fall:

$$<e^{imx}, e^{inx}> \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imx}\, \underbrace{\overline{e^{inx}}}_{e^{-inx}}\, dx$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Fortsätter vi, tag vilken funktion som helst i detta semi-inre-produkt $f \in I(0, 2\pi)$, vad är då $<f, e^{inx}>$?

$$<f, e^{inx}> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \underbrace{e^{-inx}}_{\overline{e^{inx}}}\, dx = c_n$$

Det visar sig vara de n:te fourierkoefficienterna!

Något som vi kanske minns från linjär algebra var att vi kunde ta ett delrum från ett ortonormalt inre-produkt-rum och så kunde vi projicera. Vi undersöker vad som händer om vi gör detta med semi-inre-produkt-rum:

Definition/Sats 10.9: Ortogonal projection

Låt $v_1, \cdots, v_N \in V$ vara en ortonormal mängd (parvis ortonormal)
Låt $W = \text{span}(v_1, \cdots, v_n) \subset V$

Vi definierar den *ortogonala projectionen* $P : V \to W$ är:

$$P(v) = \sum_{k=1}^{N} <v, v_k> \cdot v_k \in W$$

Vi kallar $v - P(v)$ *residualen* (**SVENSKA**). Residulaen är ortogonal till hela W

Exempel:
Vi återgår lite till föregående exempel. Låt $V = I(0, 2\pi)$. Fixera $N > 0$ och tag
$W = \text{span}\underbrace{(e^{-iNx}, e^{i(-N+1)x}, \cdots, 1, e^{ix}, \cdots, e^{iNx})}_{2N+1}$

Givet $f \in I(0, 2\pi)$:

$$P(f) = \sum_{k=-N}^{N} < f, e^{ikx} > e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = S_N(f)(x)$$

När vi säger att fourierserien konvergerar så konvergerar givetvis även partiella summorna, som är funktionsföljder. Nu har vi översätt funktionsföljderna i termer av projektion vilket kommer låta oss genomföra bevis.

Anmärkning:
Residulaen är ortogonal mot W (delrummet), dvs $(v - P(v)) \perp W$

Definition/Sats 10.10: Minsta-kvadrat approximering

Givet en vektor $v \in V$ (V är semi-inre-produkt-rum).
Elementet $w \in W$ (där W är uppspänd av spannet av en ändlig ortonormal mängd) som är närmast v, det vill säga $||v - w||$ är minimal

Detta är den ortogonala projektionen $P(v)$

Bevis 10.2

Tag ett $v \in W$, givet något $w \in W$, då är normen:

$$||v - w||^2 = \underbrace{\left|\left| \underbrace{v - P(v)}_{\text{residualen}} + \underbrace{P(v) - w}_{\in W} \right|\right|^2}_{\text{Ortogonala}}$$

$$(v - P(v)) \perp (P(v) - w) \overset{Pyth.}{\Rightarrow} ||v - P(v)||^2 + \underbrace{||P(v) - w||^2}_{\geq 0}$$

Som *minst*, gäller när uttrycket $||P(v) - w||^2 = 0$ $\square$

Definition/Sats 10.11: Fullständig / Komplett ortonormal mängd

En ortonormal mängd $\{v_k\}$ där $k = 1, \cdots$ (kan fortsätta åt oändligheten) är *fullständig/komplett* om för varje $v \in V$ och för varje $\varepsilon > 0$ gäller att:

$$\left|\left| v - \sum_{k=1}^{N} a_k v_k \right|\right| < \varepsilon \qquad N < \infty$$

Detta gäller för någon *ändlig* mängd av koefficienter $a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{C}$

Definition/Sats 10.12: Mean-square konvergens av fourierserier

Mängden vektorer $\{e^{ikx}\}$ där $k \in \mathbb{Z}$ (oändligt och ortonormal mängd) är fullständig i $I(\mathbb{T})$

Mer konkret, för vilken vektor som helst i mitt vektorrum V (eller $f \in I(\mathbb{T})$) gäller:

$$\lim_{N\to\infty} \left|\left| f - \underbrace{S_N(f)}_{= P(f) \text{ om } W = \text{span}(e^{-iNx}, \cdots, 1, e^{iNx})} \right|\right| = 0$$

Detta ska påminna lite om hur Taylorserier ser ut/fungerar. En funktion f har bättre Taylorapproximation $S_N(f)$ ju fler termer man har med.

Anmärkning:
Glum inte att:

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

och:

$$||f - S_N(f)|| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, dx}$$

Definition/Sats 10.13: Parsevals formel

Om vi har en funktion $f \in I(\mathbb{T})$, så kan vi skriva en numerisk serie med hjälp av dess fourierkoefficienter:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(f)_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

Varför är det hjälpsamt? Jo, Dirichlets konvergens kriterier gav oss verktyg för att lösa konvergenser samt evaluering av serier. Parsevals formel ger (gratis) ett annat sätt att explicit räkna ut summor av oändliga serie

Bevis 10.3

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = ||f(x)||^2$$

$$= \underbrace{\underbrace{||\, f - \underbrace{S_N(f)}_{P(f)}}_{\text{residual}} + S_N(f)\,||^2}_{\text{Ortogonala}}$$

$$(f - S_N(f)) \perp S_N(f) \overset{Pyth}{\Rightarrow} \underbrace{||f - S_N(f)||^2}_{\overset{N\to\infty}{\to} 0} + ||S_N(f)||^2 = \lim_{N\to\infty} ||S_N(f)||^2$$

$$= \left|\left| \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \right|\right|^2 \overset{Pyth}{=} \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \underbrace{||e^{ikx}||}_{=1}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

$\square$

Exempel:
Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2π-periodisk och $f(x) = x$ för $-\pi \leq x < \pi$, så gäller:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Vi ska visa här att Parsevals formel kommer ge oss summan för $\frac{1}{n^2}$. För att göra det ska vi omvandla Parsevals formel i trigonometrisk form:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right)$$

Nu kan vi använda Parsevals trigonometriska formel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| x^2 \right| dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

Anmärkning:
Eftersom vår funktion är udda så har vi att $a_k = 0$, och eftersom vi inte har konstanter så är $a_0 = 0$. Därför har vi bara b_k kvar:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} |_{\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3 \cdot 2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Vi har sett att Parsevals formel var en konsekvens av Mean-square konvergens. Vi ska nu kika på en följd av Parsevals formel

Corollarium: (Unikhet av fourierkoefficienter)
Om $f, g \in C(\mathbb{T})$ (kontinuerliga och 2π-periodiska) och $c(f)_k = c(g)_k$ för alla $k \in \mathbb{Z}$, så måste $f = g$

Anmärkning:
Om f, g är styckvis kontinuerliga på intervallet $[0, 2\pi]$ och de har samma fourierkoefficienter, så kan vi fortfarande säga att $f = g$ för alla $x \in [0, 2\pi]$ *förutom* i de (ändliga) punkter där f eller g är diskontinuerliga.

Bevis 10.4: Skiss

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \overset{Parse.}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} | \underbrace{c(f-g)_k}_{c(f)_k - c(g)_k = 0} |^2 = 0$$

$\square$

Bevis 10.5: (Skiss) Mean.-square konvergens av fourierserier

För att satsen ska gälla vill vi alltså säga att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett N_0 så att om $N > N_0$ så gäller $||f - S_N(f)|| < \varepsilon$

Det första vi gör är att fixera ett f och ett $\varepsilon > 0$. Vi vill hitta:

- g som är styckvis konstant så att $||f - g|| < \frac{\varepsilon}{3}$
- $h \in C^2(\mathbb{T})$ så att $||g - h|| < \frac{\varepsilon}{3}$
- $S_N(h) \to h$ konvergerar likformigt, så det finns N_0 så att för alla $N > N_0$ gäller $||h - S_N(h)|| < \frac{\varepsilon}{3}$

Nu vill vi visa att $||f - S_N(f)|| < \varepsilon$, men vad var $S_N(f)$? Jo, den ortogonala projectionen på något ändligt delrum (vi har betecknat det W), och från minsta-kvadrat approximationen sade den att fourierpolynomet (ortogonala projektionen) var den bästa approximationen vi kunde hitta i det delrummet, då gäller:

$$||f - S_N(f)|| \leq \underbrace{||f - S_N(h)||}_{\text{Min. kvad. approx.}} = ||f - g + g - h + h - S_N(h)||$$

Nu kör vi ye' olde triangelolikheten:

$$||f - g + g - h + h - S_N(f)|| \leq ||f - g|| + ||g - h|| + ||h - S_N(h)||$$

Från konstruktionen av g, h och hur vi valde N, gäller då:

$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow ||f - g|| + ||g - h|| + ||h - S_N(h)|| < \varepsilon$$

$\square$

Anmärkning:
Likformig konvergens är så pass starkt att det implicerar (vanlig) konvergens.

10.1. **Gram-Schmidt Processen.**

Säg att vi har ett ändligt antal vektorer $v_1, \cdots, v_N$. Om dessa utgör en bas för ett semi-inre-produkt-vektorrummet V, så kan vi hitta en ortonormal bas $w_1, \cdots, w_N$ genom följande:

- $w_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} \qquad ||v_1|| \neq 0$
- $w_2 = \dfrac{\overbrace{v_2 - < v_2, w_1 > w_1}^{\text{Residualen}}}{\underbrace{||v_2 - < v_2, w_1 > w_1||}_{\text{orthog. proj. av } v_2 \text{ på span}(w_1)}}$
- $w_3 = \dfrac{v_3 - < v_3, w_1 > w_1 - < v_3, w_2 > w_2}{||v_3 - < v_3, w_1 > w_1 - < v_3, w_2 > w_2||}$

Anmärkning:
Eftersom vi är i ett *semi*-produktrum så kan en vektor v_1 inte vara nollvektorn trots att den har längd 0, därför måste vi specifiera att $||v_1|| \neq 0$
Därmed antas att nämnarna $\neq 0$

Exempel:
Låt våratt vektorrum $V = C(-1, 1) = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{C}\ f \text{ kontinuerlig}\}$
Och låt $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$

Hitta en ortonormal bas för delrummet $W = span(1, x, x^2) = span(v_1, v_2, v_3)$

Låt oss kalla w_1, w_2, w_3 basen för delrummen.

- w_1

$$||v_1|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1dx} \Rightarrow w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- w_2:

$$< v_2, w_1 >= \int_{-1}^{1} x\frac{\sqrt{2}}{2}dx = 0$$
$$v_2 - < v_2, w_1 > w_1 = v_2$$
$$||v_2|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

En övning är att hitta w_3

11. Fouriertransformation

Iden bakom detta är att försöka anpassa (läs: finna en version) fourierserier till funktioner som inte enbart är 2π periodiska, utan till *alla* funktioner med inte bara integraler från $[0, \infty)$ utan *överallt* :o

Vi påminner oss om $f \in I(\mathbb{T})$, så gällde:

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx & k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (2) \end{cases}$$

Vi söker alltså dessa saker för funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som *inte* är periodisk.

Definition/Sats 11.1: Fouriertransformation

Låt:

$$\begin{cases} c_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx & \omega \in \mathbb{R} \quad (1') \\ f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} c_\omega e^{i\omega x} d\omega & (2') \end{cases}$$

Anmärkning:
Vi flyttar $\frac{1}{2\pi}$ från koefficienterna till framför serien

Definition/Sats 11.2

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är *integrerbar* **och** *absolutintegrerbar*, så får vi en ny funktion som vi kallar för *Fouriertransformationen*:

$$c_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \Leftarrow c_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Anmärkning:
Likt notationen för Laplace så är notationen för en fouriertransformerad funktion $\mathcal{F}[f](\omega)$

Anmärkning:
Se till att ha koll på Lemma 7.1: Riemann-Lebesgue framöver!

Anmärkning:

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Eftersom den är integrerbar (och absolutintegrerbar), så kan vi få information om funktionen vid "tid" $= 0$

Exempel:
Låt $f(x) = e^{-|x|}$, hitta Fouriertransformationen.

$$\begin{aligned} c_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|x| + i\omega x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-\omega x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} \end{aligned}$$

$$\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 \underbrace{e^x e^{-\omega x}}_{e^{(1-i\omega)x}} dx = \lim_{A \to -\infty} \left[\frac{e^{(1-i\omega)x}}{(1-i\omega)} \right]_A^0 = \lim_{A \to -\infty} \frac{1}{1-i\omega} - \frac{\overbrace{e^{(1-i\omega)A}}^{\to 0}}{1-i\omega} = \frac{1}{1-i\omega}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \cdots = \frac{1}{1+i\omega}$$

$$c_\omega = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Anmärkning:
Får funktion var en reell-värd funktion, och vi gör grejs med komplexa tal (för att räkna ut Fouriertransformationen) men får ändå ut en reell-värd funktion

Anmärkning:
Det finns mycket bus som kan hända när vi tar bort 2π-periodiciteten, och när vi kräver integrerbarhet av funktionen så tappar vi väldigt många funktioner (exempelvis har inte polynom fouriertransformationer)

11.1. **Egenskaper hos fouriertransformationen.**

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en integrerbar och absolutintegrerbar funktion. Då gäller följande för fouriertransformationen av f:

- $|\mathcal{F}[f](\omega)| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{behövs ej}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ (begränsad, oavsett val på ω)
- $\lim_{|w|\to\infty} \mathcal{F}[f](\omega) = 0$
- $\mathcal{F}[f](\omega)$ är likformigt kontinuerlig (och därmed kontinuerlig)
- $\mathcal{F}[(f * g)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$ där faltningen definieras enligt Definition 11.3
- $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha\mathcal{F}[f](\omega) + \beta\mathcal{F}[g](\omega)$ där $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{F}[f'](\omega) = (i\omega)\mathcal{F}[f](\omega)$ om f' är integrerbar och absolutintegrerbar
- $\mathcal{F}[x \cdot f(x)](\omega) = i\dfrac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega)$ om $x \cdot f(x)$ är integrerbar och absolutintegrerbar
- $\mathcal{F}[f(x) \cdot e^{iax}](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - a)$ där $a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[f(x-a)](\omega) = e^{-ia\omega}\mathcal{F}[f](\omega)$ där $a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}[ax](\omega) = \dfrac{1}{|a|}\mathcal{F}[f]\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ där $a \neq 0 \in \mathbb{R}$

Definition/Sats 11.3: Konvolution (Faltning)

Om både f, g är funktioner från $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (och integrerbara och absolutintegrerbara), så definieras deras *faltning* som:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt$$

Anmärkning:
$(f * g)(x) = (g * f)(x)$

Exempel:
Låt $g(x) = \chi_{[a,b]}$ (där $\chi_{[a,b]}$ = karaktäristisk funktion på intervallet $[a, b]$), dvs:

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Vi har:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_a^b f(x-t)dt$$

Vi ser vad som händer om $u = x - t \Rightarrow du = -dt$:

$$-\int_{x-a}^{x-b} f(u)du = --\int_{x-b}^{x-a} f(x)dx = \int_{x-b}^{x-a} f(x)dx$$
$$\Rightarrow (f * (\frac{1}{2b}\chi_{[-b,b]}))(x) = \frac{1}{2b}\int_{x-b}^{x+b} f(u)du$$

Detta är "genomsnittet" av funktionen i intervallet $[-b, b]$ centrerad kring x

Bevis 11.1: Punkt 1,2

- **Punkt 1**:

$$|\mathcal{F}[f](\omega)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right| \overset{\text{triang.}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|f(x)e^{-i\omega x}\right|}_{|f(x)|\cdot\underbrace{\left|e^{-i\omega x}\right|}_{=1}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \text{ eftersom } f \text{ per antagande är absolutintegrerbar}$$

- **Punkt 2**:

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} = 0 \text{ p.g.a Riemann-Lebesgue}$$

□

Anmärkning:
Notera att för fouriertransformationer så bryr vi oss inte om exponentiell ordning, detta eftersom vi kräver att funktionen ska vara integrerbar *och* absolutintegrerbar, så kraven att $f(x)$ inte ska "växa för mycket" uppfylls därmed

Exempel:
Vi ska hitta fouriertransformationen till den så kallade *Gausiska* funktionen:

$$f(x) = e^{-x^2/2} \qquad f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -x \cdot f(x)$$

Detta kan vi betrakta som en ODE ($f'(x) = -x \cdot f(x)$) och använda några av egenskaperna ovan:

$$\Rightarrow (i\omega)\mathcal{F}[f](\omega) = -i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega)$$
$$\overset{\times i}{\Rightarrow} \frac{d}{d\omega}(\mathcal{F}[f](\omega)) = -\omega\mathcal{F}[f](\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) = Ce^{-\omega^2/2}$$

Det är ju samma ODE som vi löste för! Eftersom lösningen till en ODE är unik, så får vi att de skiljer sig med en konstant C. Vi behöver något initalvärde (som vi inte har) men som vi kan hitta genom att stoppa in några värden!

$$\mathcal{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$$
$$\Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$$

Anmärkning:
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$ är en standardintegral

Vad händer om vi betraktar *alla* Gausiska funktioner på formen e^{-ax^2} där $a > 0$?

$$\underbrace{\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\omega)}_{e^{(-(\sqrt{2a}x)^2/2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathcal{F}[e^{-x^2/2}]\left(\frac{\omega}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{2\pi}e^{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2a}}\right)^2/2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

11.2. **Inversen till fouriertransformationen.**

Det kanske inte är superuppenbart först, men förhoppningsvis blir det tydligare ju mer vi går igenom det. Sättet vi ska se det på är via Dirichlets konvergenser till fourierserier

Här rekommenderas det att påminna sig om Horizontella/laterala gränsvärden samt derivator och var fourierserien konvergerar (*hint:* genomsnittet)

Definition/Sats 11.4: Inverssatsen till fouriertransformationen

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en integrerbar och absolutintegrerbar funktion (så vi kan ta fouriertransformationen)

Antag att f har **både** Horizontella/laterala gränsvärden *och* **både** Horizontella/lateral derivator i någon punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Då gäller:

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x_0}d\omega = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Notera att f må vara integrerbar osv, men vi vet inte om det som står innanför integraltecknet är integrerbar och absolutintegrerbar. Varpå vi har gränsvärdet

Notera att om f är integrerbar och absolutintegrerbar & differentierbar, så gäller:

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x_0}d\omega = f(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Anmärkning:
Förutsatt att det som står i satsen ovan finns, så har vi alltså en ekvation för inversa fouriertransformationen.

Om vi vet att $\mathcal{F}[f](\omega)$ är absolutintegrerbar, så kan vi dra slutsatsen att:

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x_0}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x_0}d\omega$$

Corollarium:
Om f är integrerbar och absolutintegrerbar & differentierbar och $\mathcal{F}[f](\omega)$ är absolutintegrerbar, så gäller:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x_0}d\omega = f(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Anmärkning:
Om dessa krav (integrerbar, absolutintegrerbar, differentierbar, fouriertransformationen är absolutintegrerbar) hålls, så är fouriertransformationen unik. Det går även att visa unikhet med mindre krav (Horizontella/lateral differentierbar istället för differentierbar), detta görs längre ner.

Exempel:
Vi har sett att $\mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$
Här är $e^{-|x|}$ integrerbar och absolutintegrerbar, och samtidigt är dess fouriertransformation absolutintegrerbar. Då har vi alltså följande:

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega$$

Corollarium:
Om f, g är integrerbara, absolutintegrerbara, kontinuerliga, Horizontella/laterala differentierbara.
Om $\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega)$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$ så kan vi dra slutsatsen att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$

Definition/Sats 11.5: Inversa fouriertransformationen

Om vi har en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är integrerbar och absolutintegrerbar, så gäller:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

Denna kallar vi för *inversa fouriertransformationen.*

Bevis 11.2: Unikhet av fouriertransformationen

Låt f, g vara kontinuerliga, integrerbara, och absolutintegrerbara. Tag, $f - g$ (som också uppfyller kraven). Då uppfylls inversa fouriertransformationen för varje $x \in \mathbb{R}$, alltså:

$$\lim_{A\to\infty} \underbrace{\int_{-A}^{A} \mathcal{F}[f-g](\omega)}_{\mathcal{F}[f](\omega) - \mathcal{F}[g](\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}} \qquad e^{i\omega x} d\omega = f(x) - g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 = f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Detta eftersom per antagande så är $\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega)$ $\square$

Anmärkning:
Inversa funktionen borde ta in en funktion av ω och spotta ut en funktion av x, men den verkar göra motsatsen. Det ska vi kika mer på nästa gång!

Anmärkning:
Om vi byter ut ω mot $-\omega$ i inversa fouriertransformationen, så får vi ju fouriertransformationen!

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f](-\omega)$$

Vi kan göra följande omskrivning:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](-x) \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](-x)$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = 2\pi f(-x)$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]]]](x) = (2\pi)^2 f(x) = \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}(x)$$

Här ser vi att inversen ser *nästan* ut som fouriertransformationen.

Exempel:
Vi ska kika på ett konkret exempel på dessa busiga formler. Vi har sett att

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{1+x^2}\right](\omega) = e^{-|\omega|}$$

Om vi använder omskrivningen över:

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+x^2}\right](\omega) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{1+(-x)^2}\right](\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$$

Anmärkning:
Nu kan vara en bra ide att påminna sig själv om Parsevals formel

Definition/Sats 11.6: Plancherels formel

Detta är en slags DIY Parsevals formel för fouriertransformationer genom att modifiera sista kravet för fouriertransformationbarhet
Vi kräver alltså:

- f är integrerbar
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2$ konvergerar

Då gäller följande:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 \, d\omega$$

Exempel:
Vi tittar på:

$$\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Använder vi Plancherels formel får vi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-|x|}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+\omega^2)^2} d\omega$$

Notera att integralen i VL är betydligt lättare att räkna än HL. Nice gratis verktyg från fouriertransformationer!

12. Tillämpningar på PDE:er

Vi kikar på följande IVP (InitialVärdesProblem; värmeekvationen):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t > 0 \; x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vad vi ska göra här är att ta fouriertransformationen av u för enbart funktionen av x, medan vi låter t vara konstant. Vi kan döpa denna till $\hat{u}(\omega, t)$:

$$\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t = (i\omega)^2 \hat{u} = -\omega^2 \hat{u} \\ \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

Anmärkning:
Vi har nu en ODE i bara tidsvariabeln. Då kan vi betrakta ω som en konstant istället.

Anmärkning:
Allt som har en hatt över sig, är fouriertransformerad

Lösningen till en ODE vars derivata är en konstant gånger den funktionen är ju en exponentialfunktion:

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = C(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

Detta är den *allmänna/generella* lösningen till ODE:n där ω är konstant (det är också därför $C(\omega)$ beror på enbart ω)

Om vi stoppar in initialvärdet får vi:

$$\hat{u}(\omega, 0) = C(\omega) e^{-\omega^2 \cdot 0} = C(\omega) = \hat{f}(\omega)$$
$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 t}$$

Men här ser vi att vi har en fouriertransformerad sak som är en produkt, faltnings-dax! (Konvolution)

Vi söker alltså en funktion $E(x,t)$ vars fouriertransformation är $e^{-\omega^2 t}$ (ser ut som Gaussianen i ω), ty då har vi:

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{E}(\omega,t) \Rightarrow u(x,t) = f(x) * E(x,t)$$

Inversen till Gaussianen är:

$$E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\dfrac{x^2}{4t}}$$

Här har vi använt:

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\dfrac{\omega^2}{4a}} \qquad a > 0$$

där $t = \dfrac{1}{4a}$

Slutsats:

$$u(x,t) = f(x) * E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

Där f var initalvärdet (initialfunktionen för den pedantiske)

13. (Tempered) Distributioner

Än så länge har vi enbart kikat på Fouriertransformationer som har ganska nice egenskaper, bland annat att funktionen över hela $\mathbb{R}$ är integrerbar och detsamma för absolutintegralen.
Men detta gäller generellt sett inte för polynom, eller andra funktioner. Det är en ganska "liten" del av funktionerna som uppfyller kraven.

Det är detta som distributioner ska försöka åtgärda.
Detta gör vi genom att hitta en väldigt liten mängd funktioner (mindre än integrerbar och absolutintegrerbar) så att fouriertransformationen är en bijektiv automorfi med mängden.

Vi påminner oss om följande egenskap hos fouriertransformationen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](\omega) &= (i\omega)\mathcal{F}[f](\omega) \\ \Rightarrow |\mathcal{F}[f'](\omega)| &= |\omega|\,\mathcal{F}[f](\omega) \\ \Rightarrow |\mathcal{F}[f](\omega)| &\leq \frac{|\mathcal{F}[f'](\omega)|}{\omega} \leq \frac{C}{|\omega|} \end{aligned}$$

Där C är någon konstant (eftersom fouriertransformationen är begränsad).

Generellt säger vi följande:
Om $f^{(k)}(x)$ är integrerbar och absolutintegrerbar gäller:

$$|\mathcal{F}[f](\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|^k}$$

Detta påminner lite om fourierkoefficienter, där ju mer differentierbar vi hade en funktion desto snabbare gick funktionens fourierkoefficienter till 0
Samma här, ju mer differentierbar f är, desto snabbare går $|\mathcal{F}[f](\omega)|$ mot 0 då $\omega \to \pm\infty$

Detta är i någon mening något vi vill att vår mängd av funktioner ska uppfylla:

Definition/Sats 13.1: Funktioner som dör snabbt

Vi säger att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är en *snabbt döende funktion* om följande gäller:

- f är glatt (oändligt gånger differentierbar)
- För alla n och varje $k \in \mathbb{N}$ vill vi att $x^n f^{(k)}(x)$ är begränsad, alltså finns det någon konstant $C_{n,k} \geq 0$ så att $\left|x^n f^{(k)}(x)\right| \leq C_{n,k}$

Denna mängd av funktioner som dör snabbt kallas för Schwartzrummet och betecknas $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Det är ett vektorrum.

Exempel:
Gaussianen $f(x) = e^{-ax^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \quad \forall a > 0$ finns i Schwartzrummet

Anmärkning
Det är oftare lättare att *inte* räkna ut vad denna konstant C är, det funkar lika bra att veta *att* vi har en konstant.

Övning:
Varför är inte $e^{-x} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

Exempel:
$g(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

Definition/Sats 13.2

Om $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, så är dess fouriertransformation $\mathcal{F}[f](\omega) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

Om vi ser på fouriertransformationen som $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$, så är den en linjär bijektion till vektorrummet $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Den skickar även inre-produkten till inre-produkten.

Vi ska försöka göra lite analys i Schwartzrummet!

Definition/Sats 13.3

En följd $\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ konvergerar till något $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ om:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{j\to\infty} |x^n| \left|\varphi_j^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right|$$

Detta är samma som att säga:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{j\to\infty} \sup |x^n| \left|\varphi_j^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right|$$

Nu kommer det roliga!

Definition/Sats 13.4: Distribution

En (tempered) *distribution* är en avbildning $f : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sådant att:

- f är linjär, det vill säga $f(a\varphi_1 + b\varphi_2) = af(\varphi_1) + bf(\varphi_2)$ där $a, b \in \mathbb{C}$ och $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$
- f är kontinuerlig, det vill säga f bevarar konvergens för följder, det vill säga om $\varphi_j \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R})}{\to} \varphi$ så $f(\varphi_j) \overset{\mathbb{C}}{\to} f(\varphi)$

Rummet av dessa distributioner betecknas $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

Exempel:
Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara:

- lokalt integrerbar (det vill säga, f är integrerbar på varje slutet intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$)
- Moderat (**?**) tillväxt, det vill säga den växer lite segare än ett polynom, men inte som en exponential
  Det finns $M > 0$ och $n \geq 0$ så att för alla $x \in \mathbb{R}$ har vi $|f(x)| \leq M(|x|^n + 1)$ (polynomiell ordning)

För sådana f kan vi definiera en distribution $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ genom:
För varje $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ så är:

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \in \mathbb{C}$$

Anmärkning
Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är kontinuerlig, så bestäms den helt av distributionen $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$

Exempel:
Polynom och de trigonometriska funktionera definierar distributioner.

Icke-Exempel:
$f(x) = e^{x^2}$ ger *inte* en distribution. Detta eftersom om $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ får vi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\infty}^{\infty} 1dx = \infty + \infty \not< \infty$$

Den växer för snabbt helt enkelt och är inte begränsad av polynom.

Exempel:
Detta är ett exempel på en distribution som *inte* kommer från en funktion.

Definition/Sats 13.5: Dirac-delta

Dirac delta $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ definieras enligt:

- För varje $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ så är $\delta(\varphi) = \varphi(0)$

Notera här att $f(\varphi) \neq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ eftersom vi då behöver en funktion som är noll överallt men inte i origo, men detta är inte en funktion.

14. Fouriertransformationen av en Distribution

Eftersom distributioner inte egentligen är funktioner, så måste vi definiera vad alla operationerna betyder på distributioner (derivator, multiplikation, translation, etc). Detta måste vi göra för att kunna dra slutsatser om egenskaper hos fouriertransformationen.

14.1. **Operationer på distributioner.**

Vi kan få en distribution från ett polynom, men vi kan också derivera polynomet och få en distribution från derivatan. Då vill vi på något vis sammalänka derivatan av polynomet till derivatan av distributionen. Vi gör liknande för exempelvis translation.

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är differentierbar (därmed kontinuerlig och därmed lokalt integrerbar) och av polynomiell ordning, så definierar f en distribution.
Men f är differentierbar, vi vill länka distributionens derivata till f'
Vi gör detta genom att definiera derivatan till distributionen som distributionen av derivatan av polynomet.

Givet en test-funktion $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, så:

$$f'(\varphi) = \int_{\infty}^{\infty} f'(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$$\lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx$$

$$\overset{parts}{\Longrightarrow} \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} \underbrace{f(x)\varphi(x)|_a^b}_{\underbrace{f(b)\varphi(b)}_{=0} - f(a)\varphi(a)} - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

$$\Rightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = f(-\varphi')$$

Anmärkning:
$f(b)\varphi(b) = 0$ eftersom $\varphi(b) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, så den dödar f

Slutsatsen vi har fått kan vi använda som en definition:

Definition/Sats 14.1: Derivatan av en distribution

Givet en distribution $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, så är dess *derivata* följande distribution ($f' \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$):

$$f'(\varphi) = f(-\varphi') = -f(\varphi') \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

Exempel:
Låt $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Givet en test-funktion $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, vad är då $H'(\varphi)$?

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \lim_{a\to\infty} -\int_0^a \varphi'(x)dx = \lim_{a\to\infty} -[\varphi(x)]_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} -\underbrace{\varphi(a)}_{\to 0} + \varphi(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Anmärkning:
Anledningen till att $\varphi(a) \to 0$ är givetvis för att den är av polynomiell ordning.

Därmed är $H' = \delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Låter detta rimligt? H är diskontinuerlig i origo, men utanför det så är det ok. Om vi ritar ut H så verkar det som att H har oändlig derivata i origo, men dirac-delta liknar detta eftersom dirac-delta har en oändligt stor spike i bara origo.

På samma sätt som vi fick fram vad som händer med distributionen vid derivering, ska vi göra det med andra egenskaper.

Definition/Sats 14.2: Produkt av distribution

Om $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är glatt av polynomiell ordning, så är deras produkt:

$$f \cdot g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}) = f \underbrace{(g \cdot \varphi)}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R})} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

Definition/Sats 14.3: Translation av distribution

Om $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ är en distribution, och $a \in \mathbb{R}$, så är translationen $f_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ en distribution som är definerad enligt:

$$f_a(\varphi(x)) = f(\varphi(x+a)) = f(\varphi_{-a}(x))$$

Iden kommer från:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\text{höger translation av } f \text{ med } a) \cdot g dx = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot (\text{vänster tranlsation av } g \text{ med } -a)\, dx$$

Exempel:
δ_a "ser ut som" att man flyttat den oändliga peaken till a, vi får då $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Vi undersöker:

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) = \delta(\varphi(x+a)) \overset{x=0}{=} \delta(\varphi(a)) = \delta(\varphi_{-a})$$

Definition/Sats 14.4: Kovnolution/Faltning för distributioner

Givet $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *och* $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Deras faltning $f * g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ sådant att

$$(f * g)(\varphi) = f \underbrace{(g * \varphi)}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R})} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

Definition/Sats 14.5: Fouriertransformation för distributioner

Givet $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ definerar vi dess fouriertransformation som:

$$\mathcal{F}[f(\varphi)] = f(\mathcal{F}[\varphi]) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

Exempel:
Vad är $\mathcal{F}[\delta(\varphi)]$?

$$\mathcal{F}[\delta(\varphi)] = \delta(\mathcal{F}[\varphi]) = \mathcal{F}[\varphi(0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i0x} dx = 1(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

Därmed är $\mathcal{F}[\delta] = 1$. Nu kanske man kan undra vad fouriertransformationen av distributionen 1 är:

$$\mathcal{F}[1] = 1(\mathcal{F}[\varphi]) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi(x)]\, dx = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi(0)]] = 2\pi\varphi(-0) = 2\pi\varphi(0) = 2\pi\delta(\varphi)$$

Nu kan vi ta fouriertransformationen till polynom såsom x och x^2, men även trigonometriska funktioner

14.2. **Egenskaper hos fouriertransformationen på rummet av distributioner.**

Låt $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ och $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, då gäller följande:

- $\mathcal{F}$ är linjär: $\mathcal{F}\left[a \cdot f + b \cdot g\right] = a\mathcal{F}\left[f\right] + b\mathcal{F}\left[g\right]$ där $a, b \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{F}\left[f'\right](\omega) = (i\omega)\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$
- $\mathcal{F}\left[x \cdot f\right](\omega) = i\dfrac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$
- $\mathcal{F}\left[e^{iax} \cdot f(x)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f\right]_a$ där $a \in \mathbb{R}$ (translation till höger med a) $= \mathcal{F}\left[f\right](\omega - a)$
- $\mathcal{F}\left[f_a\right](\omega) = e^{-ia\omega}\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$ där $a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}\left[f * g\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f\right](\omega) \cdot \mathcal{F}\left[g\right](\omega)$ OM antingen f eller g är $\in \mathscr{S}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[f\right]\right] = 2\pi f(-x)$ där $(f(-x))(\varphi(x)) = f(\varphi(-x))$

Fouriertransformationen för distributioner fungerar precis som den gör för funktioner som var integerbara och absolutintegrerbara!