Lektion 8

Def: Låt $I \subseteq R$ vara et ideal.

Vi definerar en relation $r \sim_I s :\Leftrightarrow s - r \in I$.

Notis: i) $\sim_I$ är en ekvivalensrelation.

ii) $R/\sim_I$ är en ring med

$$[r]_{\sim_I} + [s]_{\sim_I} := [r+s]_{\sim_I}$$

$$[r]_{\sim_I} \cdot [s]_{\sim_I} := [r \cdot s]_{\sim_I}$$

Beror inte på representanter!

$[r_1]_{\sim_I} = [r_2]_{\sim_I}$

$[r_1]_{\sim_I} + [s]_{\sim_I} \overset{?}{=} [r_2]_{\sim_I} + [s]_{\sim_I}$

$[r_1 + s]_{\sim_I} = [r_2 + s]_{\sim_I} \Leftrightarrow (r_2 + s) - (r_1 + s) \in I$

$\Leftrightarrow r_2 - r_1 \in I \Leftrightarrow [r_1]_{\sim_I} = [r_2]_{\sim_I}$

Korrespondens: "R/I är en ring

$\Leftrightarrow$ I är et ideal"

Notis: Låt $f: R \to S$ vara surj.

$I = f^{-1}(\{0_S\})$ är et ideal i R.

Vi har: $R/I \cong S$ $\leftarrow$ Noeth. isomorfisats

"Ideal $\hat{=}$ generaliserad noll"

[28] Låt K vara en kropp, $I \subseteq K$ ett äkta ideal.
Visa att $K/_I \simeq K$

$I \subseteq K$ äkta ideal
$\Leftrightarrow I \neq K$, I ideal.

Notis: $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ ideal.
$\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \simeq \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Idé: $K/_I$ är "mindre" än K. För att
$K/_I \simeq K$ måste I vara trivialt?

Visa att $I = \{0\}$.
Anta att $\{0\} \subsetneq I$. Ta $i \in I$ med $i \neq 0$.
K är en kropp $\Rightarrow$ i är inverterbar $\Rightarrow$ $\underbrace{i^{-1} \cdot i}_{=1} \in I$

$\Rightarrow I = K$.

Titta på $K/_{\{0\}} = \{ [k]_\sim \mid k \in K \}$.

$[k_1]_\sim = [k_2]_\sim \Leftrightarrow k_2 - k_1 \in \{0\} \Leftrightarrow k_2 = k_1$

Isomorfism: $K/_{\{0\}} \longrightarrow K$, $[k]_\sim \longmapsto k$

bijektivt. ✓
hom. fordi $+, \cdot$ i $K/_{\{0\}}$ kommer från $+, \cdot$ i K.

[32] Visa med ett exempel att om R har nolldelare så kan det finnas ett ideal $I \subseteq R$ s.a. $R/_I$ är ett int. omr.

Idé: Int. omr. på formen $R/_I$?

$\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ är en kropp ($\Rightarrow$ int. omr.)

Söker R mellan $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Har nolldelare:
$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$.

$\mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}}_{\text{nolld.}} \to \underbrace{\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}}_{\substack{n = p \\ \Rightarrow \text{ int. omr.}}}$
där $n \mid m$.

$\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \supseteq \bar{3} \cdot \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$. $\quad \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \big/ (\bar{3}\, \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$

[33] Visa med ett ex. att det finns ett int. omr. R med ett ideal $I \subseteq R$ s.a. $R/_I$ är en kropp.

Triviellt ex.: $R = K$ en kropp, $R = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}, \ldots$
$I = \{0\}$ $\quad R/_I \simeq R$

Icke-triviell: $R = \mathbb{Z}$, $I = 2 \cdot \mathbb{Z}$. $R/_I = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ int. omr.

134| Visa med ett ex. att det finnes int.omr. R och $I \subseteq R$ ideal s.a. $R/_I$ har nolldelare.

$R = \mathbb{Z}, \quad I = 6\cdot\mathbb{Z}. \qquad R/_I = \mathbb{Z}/_{6\cdot\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

har nolldelare: $\quad \bar{2}\cdot\bar{3} = \bar{6} = \bar{0}.$

137| Är $\mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2-5x+6\rangle}$ en kropp?

Vad har $\langle x^2-5x+6\rangle$ å göra med att $\mathbb{Q}[x]/_{\dots}$ är en kropp?

- $R/_I$ kropp $\iff$ I maximalt
- R HIR : $I = \langle i\rangle$ maximalt $\iff$ i irr.

Är x^2-5x+6 irreducibel?

Grad 2: Finnes det en rot i $\mathbb{Q}$?

$2, 3$? $\quad 4-10+6 = 0 \quad , \quad 9-15+6 = 0$

$\Rightarrow x^2-5x+6 = (x-2)(x-3).$ reducibelt

$\Rightarrow \mathbb{Q}[x]/_{\dots}$ är inte en kropp.

138| Är $\mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2-6x+6\rangle}$ en kropp?

Är x^2-6x+6 irr.?

Grad 2: p-q-form. $\quad \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 6}$

$= 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$

x^2-6x+6 har ingen rot i $\mathbb{Q}$. $\Rightarrow x^2-6x+6$ irr.

$\Rightarrow \langle x^2-6x+6\rangle$ max. $\Rightarrow \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2-6x+6\rangle}$ är en kropp.

139| Låt $I \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vara idealet

$I = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x \text{ och } y \text{ jämna}\}.$

Hitta alla element i $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/_I$, och add. och mult. tabellen.

Först: $J = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ jämn}\} \subseteq \mathbb{Z}.$

$\mathbb{Z}/_J = ? \qquad J = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ jämn}\} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\} = 2\cdot\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/_J = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

Idé: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/_I \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$?

$I = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x, y \text{ jämna}\} = \{(2z_1, 2z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}.$

$[(a_1, b_1)]_I = [(a_2, b_2)]_I \iff (a_2, b_2) - (a_1, b_1) \in I$

$\iff (a_2 - a_1, b_2 - b_1) \in I \iff a_2 - a_1$ jämnt och $b_2 - b_1$ jämnt.

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/_I = \{\overline{(0,0)}, \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)}\}$ $\quad [(a,b)]_I = \overline{(a,b)}$

$+$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,1)}$
$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,1)}$
$\overline{(0,1)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(1,1)}$	$\overline{(1,0)}$
$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,1)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$
$\overline{(1,1)}$	$\overline{(1,1)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(0,0)}$

$\cdot$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,1)}$
$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,0)}$
$\overline{(0,1)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$
$\overline{(1,0)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,0)}$
$\overline{(1,1)}$	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(1,1)}$

141 Visa att $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2-2\rangle \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

$$\mathbb{Q}[X]/\langle X^2-2\rangle = \{[q] \mid q\in\mathbb{Q}\} \cup \{[f] \mid f\in\mathbb{Q}[X], \deg(f)=1\}$$

Alla $\underset{\neq 0}{p} \in \langle X^2-2\rangle$ har $\deg(p)\geq 2$.

Anta att $\deg(f)=2$: $f = aX^2+bX+c$

$$[f]_\sim = [dX+e]_\sim \qquad (f-dx+e)\in\langle X^2-2\rangle$$

Väljer: $d=b \quad c-e = a\cdot(-2) \iff e = c+2a$

$$f-dx+e = ax^2+0x+a\cdot(-2) = a(x^2-2)$$

Samma sak för $\deg(f)\geq 2$. För att beskriva $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2-2\rangle$ behöver vi bara polynom av grad ≤ 1: $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2-2\rangle = \{[f]_\sim \mid f\in\mathbb{Q}[X], \deg(f)\leq 1\}$.

Vad med $[X]_\sim$? $[X]_\sim\cdot[X]_\sim = [X^2]_\sim = [2]_\sim$

$[X]_\sim$ "är" en rot av 2.

Hitta isomorfism: $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2-2\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

$$[ax+b]_\sim \longmapsto a\sqrt{2}+b$$

Fungerar, fordi:

Om $[f]_\sim = [g]_\sim$, $\deg(f) = \deg(g)$ så är $f=g$.

Vi skrivar $\varphi: [ax+b]_\sim \longmapsto a\sqrt{2}+b$.

Är φ väldefinierad? Ja, fordi

Är φ bijektiv? Ja, fordi $a\cdot\sqrt{2}+b \longmapsto [ax+b]_\sim$ är inversen.

Är φ en hom? Ja, fordi: $f = a_f x + b_f$, $g = a_g X + b_g$

$$\varphi([f]+[g]) = \varphi([(a_f+a_g)x + (b_f+b_g)]) = (a_f+a_g)\sqrt{2}+b_f+b_g$$
$$= a_f\sqrt{2}+b_f + a_g\sqrt{2}+b_g = \varphi([f])+\varphi([g]).$$

$$\varphi([f]\cdot[g]) = \varphi([a_f\cdot a_g\cdot X^2 + (a_f b_g + a_g b_f)X + b_f b_g])$$
$$= \varphi([(a_f b_g + a_g b_f)X + b_f b_g + 2\cdot(a_f a_g)])$$
$$= (a_f b_g + a_g b_f)\sqrt{2} + b_f b_g + 2\cdot(a_f a_g) = (*)$$

$$\varphi([f])\cdot\varphi([g]) = (a_f\sqrt{2}+b_f)(a_g\sqrt{2}+b_g)$$
$$= a_f a_g\sqrt{2}\sqrt{2} + (a_f b_g + b_f a_g)\sqrt{2} + b_f b_g$$
$$= (a_f b_g + a_g b_f)\sqrt{2} + b_f b_g + 2\cdot(a_f a_g) = (*)$$

$$\varphi([1]) = 0\cdot\sqrt{2}+1 = 1.$$