# Lösningar till Tentamen i Beräkningsvetenskap II, 5.0 hp, 2011-03-15

Del A

1. Tillämpa Heuns metod på ekvationen

$$y'(t) - \cos y(t)(y(t)+1) = 0,\ y(0) = 0.$$

Ta ett steg med steglängd $h = 0.1$. Vi börjar med att ställa upp ekvationen på formen

$$y'(t) = \cos y(t)(y(t)+1),\ y(0) = 0.$$

Låt $f(t, y)$ beteckna ekvationens högerled. Heuns metod tillämpad på ekvationen ovan ges då av:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_{i+1}, y_i + hk_1) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

I vårt fall är $h = 0.1$, $y_0 = 0$. När dessa värden sätts in i ovanstående formler, med $i = 0$, får vi:

$$\begin{aligned} k_1 &= (y_0 + 1)\cos(y_0) = (0+1)\cos(0) = 1 \\ k_2 &= (y_0 + hk_1 + 1)\cos(y_0 + hk_1) = \\ &= (0 + 0.1 \cdot 1 + 1)\cos(0 + 0.1 \cdot 1) = 1.1\cos(0.1) \approx 1.0945 \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \approx 0 + \frac{0.1}{2}(1 + 1.0945) \approx 0.1047. \end{aligned}$$

2. Stabilitetsanalys för implicita Eulers metod. Stabilitet analyseras genom att metoden tillämpas på testekvationen, $y'(t) = \lambda y(t)$. Tillämpa implicita Eulers metod på testekvationen, ger

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = y_i/(1 - h\lambda).$$

Av detta följer att

$$y_i = y_0/(1 - h\lambda)^i$$

För stabilitet krävs alltså att $1/(1 - h\lambda)^i \to 0$ då $h \to 0$. Stabilitetsvillkoret blir därför

$$|1 - h\lambda| > 1.$$

Stabilitetskravet är uppfyllt för alla steglängder $h$ (notera att $h > 0$) och alla $\lambda$ med $\Re(\lambda) < 0$. Därmed har vi visat att implicita Eulers metod är ovillkorligt stabil.

3. (a) Låt $x$ beteckna månadsnummer och $y$ temperatur. Vi ska uppskatta temperaturen för $x = 5$ genom lineär interpolation genom de två närmast kringliggande punkterna, det vill säga $x = 4, y = 3.4$, respektive $x = 6, y = 14.2$. Vi använder Newtons ansats, vilken i detta fall blir att interpolationspolynomet genom de två givna punkterna ska ha formen: $p(x) = a_0 + a_1 (x - 4)$.

Interpolationsvillkoren ger nu:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3.4 \\ a_0 + (6-4)a_1 &= 14.2 \end{aligned}$$

Genom att lösa detta system med framåtsubstitution får vi att $a_0 = 3.4, a_1 = 5.4$. När vi slutligen sätter in dessa värden i ansatsen kan vi uppskatta temperaturen för maj månad med $p(5) = 3.4 + 5.4(5-4) = 8.8$.

(b) Det är i allmänhet olämpligt att interpolera genom samtliga givna punkter när man har mer än ett fåtal mätpunkter, eftersom det då finns risk att interpolationspolynomet oscillerar kraftigt (Runges fenomen).

4. (a) En Monte Carlo-metod kännetecknas av att det utförs upprepade stokastiska simuleringar varpå det görs någon statistisk beräkning på de samlade resultaten av dessa simuleringar, till exempel att man tar medelvärdet av de olika resultaten.

(b) Observera att frågan här specifikt gäller numerisk beräkning av integraler. Skäl för att Monte Carlo-metod i detta sammanhang kan vara att föredra framför en deterministisk metod:

- Noggrannhetsordningen i Monte Carlo-beräkningen är oberoende av antalet dimensioner, medan den hos deterministiska metoder avtar med ökande antal dimensioner.

- Då en deterministisk metod används utgörs diskretiseringspunkterna av skärningspunkterna i ett "nät", som måste ha åtminstone några punkters utsträckning i varje dimension. Detta innebär att antalet punkter växer exponentiellt med antalet dimensioner. En konsekvens av detta är att minnesåtgången för deterministiska metoder blir orimligt stor om det är stort antal dimensioner. En annan konsekvens är att beräkningstiden blir orimligt lång. En Monte Carlo-metod har inte dessa begränsningar, eftersom punkterna placeras slumpmässigt i beräkningsområdet och antalet punkter kan avpassas efter tillgängligt minnesutrymme och processorprestanda.

Sammanfattningsvis är alltså Monte Carlo-metod att föredra för beräkning av integraler över ett stort antal dimensioner.

5. (a) En metod för numerisk lösning av ODE, med lokalt trunkeringsfel $\tau$ (se lärobokens beskrivning av detta begrepp) och steglängd $h$ sägs vara *konsistent* om $\tau/h \to 0$ då $h \to 0$. Detta kan tolkas som att den numeriska metoden går mot differentialekvationen då $h \to 0$.

(b) För att undersöka om metoden är konsistent behöver vi ta reda på det lokala trunkeringsfelet som funktion av $h$, för att därefter kunna undersöka gränsvärdet för $\tau/h$ då $h \to 0$. Vi genomför analys av det lokala trunkeringfelet.

$$\tau = y(t_i + h) - y(t_i) - h\left(y(t_i) + 1\right)\cos(y(t_i)).$$

Taylorutveckling av $y$ kring $t_i$ ger:

$$\begin{aligned}\tau &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(c) \\ &\quad -y(t_i) - h\left(y(t_i) + 1\right)\cos(y(t_i)) = \\ &= \frac{h^2}{2}y''(c)\end{aligned}$$

där $c \in [t_i, t_{i+1}]$. Det följer nu att $\tau/h \to 0$ då $h \to 0$. Slutsatsen blir att metoden är konsistent.

Del B

6. De givna data är mätvärden med ganska låg noggrannhet (två värdesiffror i de givna $c$-värdena), så det vore olämpligt att med interpolation "tvinga" polynomet att gå genom de givna punkterna. Dessutom har vi fem mätpunkter och om interpolation användes så skulle vi endast kunna utnyttja tre av dessa, vilket leder till ett urvalsproblem. Av båda dessa skäl är minstakvadratanpassning det lämpliga

angreppssättet i detta fall. Vi ansätter ett andragradspolynom: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Bivillkoret $p(0) = 0$ ger att $a_0 = 0$. Vi ska alltså genomföra minstakvadratanpassning med ansatsen $p(t) = a_1 t + a_2 t^2$. Gör detta på vanligt sätt, ger $a_1 = 0.382, a_2 = -0.116$.

Korrekt genomförd lösning enligt ovan och med redovisning av hur minstakvadratanpassningen genomfördes, gav betyg 5 för mål 2 (algoritmmålet) och mål 4 (argumentationsmålet). Korrekt genomförd minstakvadratanpassning med $a_0 \neq 0$ (det vill säga att bivillkoret inte beaktades) gav betyg 4 för mål 2. För mål 4 kunde ofullständiga men relevanta argument ge betyg 4 eller betyg 3.

7. Algoritmidén kan i mera utvecklad form skissas:

   - Upprepa $N$ gånger:

     Slumpa $x$-koordinat, ett likformigt fördelat slumptal i intervallet från 0 till $a$

     Slumpa $y$-koordinat, ett likformigt fördelat slumptal i intervallet från 0 till $b$

     Om $(x,\ y)$ är en punkt inom sjöns område, så ökas variablen `antalsjo` med 1

   - Nu har vi testat med $N$ stycken slumpvis valda punkter i R och antalet av dessa som hamnade inom sjöns område ges av variabeln `antalsjo`. Närmevärdet $\tilde{c}$ kan då beräknas som:

$\tilde{c} =$ `antalsjo`$/N$

- $s = ab\tilde{c}$

Det viktigaste valet vid utformningen av algoritmen är att välja lämplig slumptalsfördelning. I vårt fall ska det vara likformigt fördelade slumptal. Argumentet för detta är att om vi väljer en annan sannolikhetsfördelning, så kommer det att bli större sannolikhet för punkter i vissa delområden av R och så fall skulle vårt beräknade närmevärde $\tilde{c}$ bli missvisande. Andra val i sammanhanget gäller, exempelvis, datastruktur för att hålla reda på hur många punkter som hamnar inom sjöns område.

I Matlab kan algoritmen enligt ovanstående skiss till exempel implementeras så här:

```
function s = sjoyta(a,b,N)

antalsjo = 0
for i = 1:N
       x = rand*a;
       y = rand*b;
       if sjopunkt(x,y)
            antalsjo = antalsjo + 1;
       end
end
s = a*b*(antalsjo/N);
```

Precis som i uppgift 6 så kunde rimliga lösningar som inte innehöll allt som krävdes för betyg 5 ändå räcka för betyg 4 eller 3.

8. För betyg 5 avseende mål 3 (analys) krävdes en korrekt genomförd analys av antingen noggrannhetsordning eller stabilitet, för generellt $\theta$, och dessutom någon diskussion om vilka slutsatser man kunde dra av analysen. För betyg 5 avseende mål 1 (begrepp) krävdes en diskussion som visar medvetenhet om relevanta egenskaper och tillhörande begrepp samt som visar på någon relation mellan minst två av begreppen. Precis som i uppgift 6 och uppgift 7 så kunde rimliga lösningar som inte innehöll allt som krävdes för betyg 5 ändå räcka för betyg 4 eller 3.