Kaj B Hansen och Taeda Jovicic

Grundläggande logik

Lösningsdel

Studentlitteratur

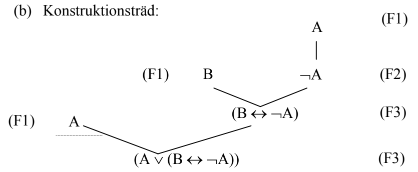
2-6.1

(a) $(A \vee (B \leftrightarrow \neg A))$ är en formel.

BEVIS:

(1) A och B är formler enligt (F1)
(2) A är en formel (*enligt (1)*) $\Rightarrow \neg A$ är en formel (F2)
(3) B och $\neg A$ är formler (*(1) och (2)*) $\Rightarrow (B \leftrightarrow \neg A)$ är en formel (F3)
(4) A och $(B \leftrightarrow \neg A)$ är formler (*(1) och (3)*) $\Rightarrow (A \vee (B \leftrightarrow \neg A))$ är en formel (F3)

(b) Konstruktionsträd:



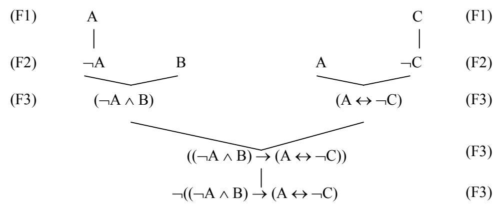
2-6.2

(a) $\neg((\neg A \wedge B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg C))$ är en formel.

BEVIS:

(1) A, B, C är formler (F1)
(2) (1) $\Rightarrow \neg A, \neg C$ är formler (F2)
(3) (1) + (2) $\Rightarrow (\neg A \wedge B)$ är en formel (F3)
(4) (1) + (2) $\Rightarrow (A \leftrightarrow \neg C)$ är en formel (F3)
(5) (3) + (4) $\Rightarrow ((\neg A \wedge B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg C))$ är en formel (F3)
(6) (5) $\Rightarrow \neg((\neg A \wedge B) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg C))$ är en formel (F2)

(b) Konstruktionsträd:



2-6.3

(a) (i) Identifiera de atomära satserna:
K: Det finns 2 karameller.
D: Det finns 3 som ska dela på dem.
F: Alla kan få en karamell.
(ii) Ersätt atomära satser med sats-parametrar:
(1) Om K och D, så inte F
(iii) Sats (1) är en villkorssats:
(2) K och D $\rightarrow$ inte F
(iv) Antecedenten i (2) är en konjunktion:
(3) $K \wedge D \rightarrow$ inte F
(v) Konsekventen är en negation:
(4) $K \wedge D \rightarrow \neg F$
$\therefore K \wedge D \rightarrow \neg F$

(b) (i) Identifiera de atomära satserna:
F: Det är fredag idag.
L: Det är lördag idag.
S: Det är söndag idag.
(ii) Ersätt atomära satser med sats-parametrar:
(1) F eller L men inte S
(* ”definitivt” är förstärkande och saknar logiskt betydelse*)
(iii) Använd ”top down” på (1): ”men” är huvudoperator och är ett konjunktions tecken:
(2) F eller L $\wedge$ inte S
”eller” anger disjunktion, ”inte” negation:
(3) $(F \vee L) \wedge \neg S$
$\therefore (F \vee L) \wedge \neg S$

(c) (i) Identifiera de atomära satserna:
M: Gumman är inne.
B: Gubben är inne.
(ii) Sätt in sats parametrar:
(1) När M så inte B. B endast om inte M.
Jag har antagit att en person är ute $\Leftrightarrow$ han inte är inne. Då kan ‘Gumman/gubben är ute’ uppfattas som negationen av ‘Gumman/gubben är inne’. Ett alternativ är att ha 4 olika atomära satser.
(iii) Använd ”top down”:
(1) är en konjunktion. Punkt anger här konjunktion.
(2) När M så inte B $\wedge$ B endast om inte M.
”När -- så -- ” är ett implikationskonnektiv:
(3) $(M \rightarrow$ inte B$) \wedge$ (B endast om inte M)
”-- endast om --” anger implikation (se minilexikonet, s. 26-27):
(4) $(M \rightarrow$ inte B$) \wedge (B \rightarrow$ inte M$)$
Vi ersätter ”inte” med $\neg$:
(5) $(M \rightarrow \neg B) \wedge (B \rightarrow \neg M)$
$\therefore (M \rightarrow \neg B) \wedge (B \rightarrow \neg M)$

(d) O: Det blir ordning på ekonomi.
S: Vi börjar spara.
Sätt in satsparametrarna:
(1) ska enligt §3.9 (5) formaliseras:
$\neg S \rightarrow \neg O$ eller $O \rightarrow S$
$\therefore \neg S \rightarrow \neg O$
eller
$\therefore O \rightarrow S$

2-6.4

(a) (i) Identifiera de atomära satserna:
F: Vi kan förverkliga affärsidén.
K: Vi har tillräckligt stort eget kapital.
L: Vi kan låna i banken.
(ii) Sätt in sats parametrarna:
(1) Inte F, om inte antingen K eller L
(1) är en implikation:
(2) Inte antingen K eller L $\rightarrow$ inte F
Efterledet är en negation, liksom förledet:
(3) $\neg$(antingen K eller L) $\rightarrow \neg F$
Slutligen ersätts ‘eller’ med ‘$\vee$’:
(4) $\neg(K \vee L) \rightarrow \neg F$
$\therefore \neg(K \vee L) \rightarrow \neg F$

(b) (i) De atomära satserna:
P: Du har pengar att betala med.
C: Du har check att betala med.
K: Du har kontokort att betala med.
S: Vi kan sälja varan till Dig.
(ii) Sätt in parametrarna:
(1) Om varken P eller C eller K, så inte S
(1) är en implikation:
(2) Varken P eller C eller K $\rightarrow$ inte S
Förledet kan formaliseras:
(3) $\neg(P \vee C \vee K) \rightarrow$ inte S
Eferledet är en negation:
(4) $\neg(P \vee C \vee K) \rightarrow \neg S$
$\therefore \neg(P \vee C \vee K) \rightarrow \neg S$
Alternativ:
$\therefore \neg P \wedge \neg C \wedge \neg K \rightarrow \neg S$

(c) (i) I stället för satsparametrar använder vi vanliga matematiska symboler:
$a \times b > 0$: *ab* är större än 0.
$a > 0$: a större än 0.
$b > 0$: b större än 0.
$a < 0$: *a* mindre än 0.
$b < 0$: *b* mindre än 0.
(ii) Skriv om satsen

(1) $a \times b > 0$ om och endast om $a > 0$ och $b > 0$, eller $a < 0$ och $b < 0$.
Sats (1) är en ekvivalens:
(2) $a \times b > 0 \leftrightarrow a > 0$ och $b > 0$, eller $a < 0$ och $b < 0$
Andra ekvivalensledet är en disjunktion:
(3) $a \times b > 0 \leftrightarrow (a > 0$ och $b > 0) \vee (a < 0$ och $b < 0)$
Ersätt 'och' med '$\wedge$':
(4) $a \times b > 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
LÖSNING: $a \times b > 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

(d) (i) De atomära satserna:
E: Man kan eliminera parentesparet kring en konjunktion.
N: Konjunktion är negerad.
D: Konjunktion ingår som led i en disjunktion.
(ii) Sätt in parametrarna:
(1) E så vida inte antingen N eller D
Sats (1) är en implikation:
(2) Inte antingen N eller D $\rightarrow$ E
Antecedenten är negation av en disjunktion:
(3) $\neg (N \vee D) \rightarrow E$
$\therefore$ $\neg (N \vee D) \rightarrow E$

(e) (i) Satsparametrar:
S: Första symbolen är en satsparameter.
N: Första symbolen är '$\neg$'.
V: Första symbolen är '('.
P: Sista symbolen är en satsparameter.
H: Sista symbolen är ')'.
(ii) Sätt in parametrarna:
(1) S eller N eller V, och P eller H
Sats (1) är en konjunktion:
(2) S eller N eller V $\wedge$ P eller H
Båda konjunktionsledena är disjunktioner:
(3) $(S \vee N \vee V) \wedge (P \vee H)$
LÖSNING: $(S \vee N \vee V) \wedge (P \vee H)$

(f) (i) Satsparametrar:
S: Banken stänger kl. 17.
F: Jag får ledigt från jobbet ½ timme.
V: Bankärendet blir uträttat.
A: Någon annan uträttar ärendet åt mig.
(ii) Sätt in satsparametrarna:
(1) Om S och inte F, så inte U förutsatt att inte A
(iii) Satsen är en implikation:
(2) S och inte F $\rightarrow$ inte U förutsatt att inte A
Antecedenten är en konjunktion:
(3) S $\wedge$ inte F $\rightarrow$ inte U förutsatt att inte A
Konsekventen är en implikation:
(4) S $\wedge$ inte F $\rightarrow$ (inte A $\rightarrow$ inte U)
Ersätt 'inte' med '$\neg$':

(5) $S \wedge \neg F \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg U)$
LÖSNING: $S \wedge \neg F \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg U)$
Alternativ: $\neg A \rightarrow (S \wedge \neg F \rightarrow \neg U)$
Det är också möjligt att uppfatta 'ingen annan gör det åt mig' som en atomär sats:
I: Ingen annan gör det åt mig.
Ersätt '$\neg$A' i de tre formaliseringarna med 'I', t. ex.
$S \wedge \neg F \rightarrow (I \rightarrow \neg U)$

2-6.5
(i) Identifiera de atomära satserna. Välj satsparametrar.
V: Vakten får använda våld.
I: Vakten ingriper.
R: Risk för skadegörelse föreligger.
A: Vakten är angripen.
M: Vakten har först givit muntlig varning.
(ii) Satsen kan nu skrivas:
Ett nödvändigt villkor för V är R om inte I, och förutsatt att inte A, så V endast om M; A är en tillräcklig förutsättning för V.
(iii) Satsen är en konjunktion med 3 led:
(1) Ett nödvändigt villkor för V är R om inte I.
(2) Förutsatt att inte A, så V endast om M.
(3) A är en tillräcklig förutsättning för V.
(iv) Analys av (1):
(1) är en implikation:
V $\rightarrow$ (R om inte I)
Efterledet är en implikation med negerat förled:
(1') $V \rightarrow (\neg I \rightarrow R)$
Ett alternativt sätt att tolka (1) är:
$\neg I \rightarrow$ (R är ett nödvändigt villkor för V), som formaliseras:
(1'') $\neg I \rightarrow (V \rightarrow R)$
(1') och (1'') kan m h a sanningstabeller visas vara satslogiskt ekvivalenta.
(v) Analys av (2):
(2) är en implikation med negerat förled:
$\neg A \rightarrow$ (V endast om M)
Efterledet är en implikation:
(2') $\neg A \rightarrow (V \rightarrow M)$
(vi) Analys av (3):
(3) är en implikation:
(3') $A \rightarrow V$
(vii) Konjugera (1'), (2'), (3') ger lösningen:
$(V \rightarrow (\neg I \rightarrow R)) \wedge (\neg A \rightarrow (V \rightarrow M)) \wedge (A \rightarrow V)$

2-6.6
(a) $((A \wedge \neg B)) \vee (\neg A \wedge B))$
LÖSNING:
Det yttre parantesparet kan elimineras enligt Regel 1:

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
Parantesen kring $A \wedge \neg B$ kan inte elimineras:
(1) $A \wedge \neg B \vee (\neg A \wedge B)$
eftersom (1) är tvetydig mellan
(1') $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
och
(1'') $A \wedge (\neg B \vee (\neg A \wedge B))$
Av samma anledning kan parantesen kring $\neg A \wedge B$ inte elimineras.
LÖSNING: $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

(b) $(((A \vee B) \vee C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge C))$
LÖSNING:
Yttre parantesparet tas bort enligt Regel 1:
(1) $(A \vee B) \vee C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge C)$
Parantesen kring förledet elimineras (Regel 3):
(2) $(A \vee B) \vee C \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge C)$
Parantesen kring efterledet slopas (Regel 3):
(3) $(A \vee B) \vee C \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge C)$
Parantesen i $(A \vee B)$ kan elimineras enligt Regel 2:
(4) $A \vee B \vee C \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge C$
Parantesen i $(A \rightarrow B$ kan inte elimineras till
(5) $A \vee B \vee C \rightarrow A \rightarrow B \wedge C$
eftersom det blir oklart om det är första eller andra förekomsten av '$\rightarrow$' som är huvudoperator.
LÖSNING: $A \vee B \vee C \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge C$

(c) $((((A \vee B) \wedge (B \rightarrow C)) \wedge C) \leftrightarrow \neg B)$
LÖSNING:
Yttre parantesparet tas bort (Regel 1)
(1) $(((A \vee B) \wedge (B \rightarrow C)) \wedge C) \leftrightarrow \neg B$
Paranteser kring förledet tas bort (Regel 3):
(2) $((A \vee B) \wedge (B \rightarrow C)) \wedge C \leftrightarrow \neg B$
I $((A \vee B) \wedge (B \rightarrow C))$ kan yttre parantesparet slopas (Regel 2):
(2) $(A \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge C \leftrightarrow \neg B$
Svar: $(A \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge C \leftrightarrow \neg B$

2-6.7
(a) $(A \rightarrow B) \rightarrow B$
LÖSNING:

A	B	$(A \rightarrow B)$	$\rightarrow B$
S	S	S	S
S	F	F	S
F	S	S	S
F	F	S	F

(b) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
LÖSNING:

A	B	$(A \wedge \neg B)$		$\vee$	$(\neg A \wedge B)$	
S	S	F	F	F	F	F
S	F	S	S	S	F	F
F	S	F	F	S	S	S
F	F	F	S	F	S	F

(c) $((B \rightarrow A) \rightarrow \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$
LÖSNING:

A	B	$((B \rightarrow A)$	$\rightarrow$	$\neg B)$	$\wedge$	$(A \rightarrow B)$
S	S	S	F	F	F	S
S	F	S	S	S	F	F
F	S	F	F	F	S	S
F	F	S	S	S	S	S

2-6.8
$(A \vee B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B$
$\neg (A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
$\neg A \Leftrightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$

BEVIS:
Vi sätter upp en gemensam sanningstabell för $A \vee B$, $\neg (A \leftrightarrow B)$ och $\neg A$

A	B	$A \vee B$	$\neg$	$(A \leftrightarrow B)$	$\neg A$
S	S	S	F	S	F
S	F	S	S	F	F
F	S	S	S	F	S
F	F	F	F	S	S

Vi ser att sanningstabellerna överensstämmer med tabellerna för förmlerna i 2-6.7 (a)-(c).

2-6.9
(a) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
BEVIS:

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\wedge C$	$A \wedge$	$(B \wedge C)$
S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	F
S	F	S	F	F	F	F
S	F	F	F	F	F	F
F	S	S	F	F	F	S
F	S	F	F	F	F	F
F	F	S	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Sanningstabellerna överensstämmer rad för rad.

(b) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
Även $(A \vee B) \vee C$ och $A \vee (B \vee C)$ har samma sanningstabell:

A	B	C	$(A \vee B) \vee C$		$A \vee (B \vee C)$	
S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	S	S	S
S	F	S	S	S	S	S
S	F	F	S	S	S	F
F	S	S	S	S	S	S
F	S	F	S	S	S	S
F	F	S	F	S	S	S
F	F	F	F	F	F	F

2-6.10

$A \text{ eller}_2 B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

BEVIS:

A	B	$A \text{ eller}_2 B$	$(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$			
S	S	F	S	F	F	S
S	F	S	S	S	S	F
F	S	S	S	S	S	F
F	F	F	F	F	S	F

2-6.11

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

BEVIS:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$		
S	S	S	S	S	S
S	F	F	F	F	S
F	S	F	S	F	F
F	F	S	S	S	S

Kapitel 3: Lösningar till övningarna på s 74-78

3-7.1

(a), (b), (c): Vi upprättar gemensam sanningstabell för (a), (b), (c):

A	$A \to A$	$A \vee A \leftrightarrow A$		$(A \to \neg A) \to \neg A$			
S	S	S	S	F	F	S	F
F	S	F	S	S	S	S	S

(d), (e), (g): Formlerna har enbart S i sanningstabellerna:

A	B	$\neg A \to (A \to B)$			$B \to (A \to B)$		$(A \to B \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg A$				
S	S	F	S	S	S	S	F	F	F	S	F
S	F	F	S	F	S	F	F	F	S	S	F
F	S	S	S	S	S	S	S	F	F	S	S
F	F	S	S	S	S	S	S	F	S	S	S

(f), (h): Formlerna (f) och (h) har enbart S i tabellerna:

A	B	C	$(A \to B) \vee (B \to C)$			$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A \wedge B \to C)$				
S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	S	F	F	F	S	S	F
S	F	S	F	S	S	S	S	S	F	S
S	F	F	F	S	S	S	S	S	F	S
F	S	S	S	S	S	S	S	S	F	S
F	S	F	S	S	F	S	F	S	F	S
F	F	S	S	S	S	S	S	S	F	S
F	F	F	S	S	S	S	S	S	F	S

3-7.2

(a), (b) Av tabellen framgår att (a) är kontingent; (b) är tautolog

A	B	C	$A \wedge B \to B \wedge C$			$A \wedge B \to B \vee C$		
S	S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	S	S	S
S	F	S	F	S	F	F	S	S
S	F	F	F	S	F	F	S	F
F	S	S	F	S	S	F	S	S
F	S	F	F	S	F	F	S	S
F	F	S	F	S	F	F	S	S
F	F	F	F	S	F	F	S	F

kontingent tautolog

(c) Av tabellen ser vi att (c) är en kontradiktion

A	B	$(A \wedge B \leftrightarrow A) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$				
S	S	S	S	F	F	F
S	F	F	F	F	S	S
F	S	F	S	F	F	F
F	F	F	S	F	F	S

kontradiktion

3-7.3

(a) Vi använder sanningstabell metoden:

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$
S	S	S	F	F
S	F	F	S	F
F	S	S	F	S
F	F	S	S	S *

Rad 4 är den enda där både $A \to B$ och $\neg B$ är sanna. Där får även $\neg A$ värdet S.

$\therefore A \to B, \neg B \vDash \neg A$

(b) $A \to B, B \to C \vDash A \to C$

BEVIS:

Vi använder snabbmetoden:

$A \to B,\ \ B \to C \ \vDash\ \ A \to C$
S S S   S S F   S F F
        F

(c) $A \leftrightarrow B \vDash A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C$

BEVIS:

Sanningstabell metoden:

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C$			
S	S	S	S	S	S	S	*
S	S	F	S	F	S	F	*
S	F	S	F	S	F	F	
S	F	F	F	F	S	F	
F	S	S	F	F	F	S	
F	S	F	F	F	S	F	
F	F	S	S	F	S	F	*
F	F	F	S	F	S	F	*

I de rader där $A \leftrightarrow B$ har S, dvs raderna 1, 2, 7, 8, får även $A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C$ värdet S.

(d) $(A \to B) \wedge (C \to D) \vDash A \vee C \to B \vee D$

BEVIS:

Snabbmetoden: $(A \to B) \wedge (C \to D) \vDash A \vee C \to B \vee D$
F S F S F S F   F S F F F F F
                  F

Det är omöjligt att ha premissen sann samtidigt med att konklusionen är falsk.

3-7.4

(a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

BEVIS:

Sanningstabell:

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$		$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$		
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	S	S	S	F
S	F	S	S	S	F	S	S
S	F	F	F	F	F	F	F
F	S	S	F	S	F	F	F
F	S	F	F	S	F	F	F
F	F	S	F	S	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Sanningstabellerna är rad för rad identiska.

(b) $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

BEVIS:

Sanningstabell metoden:

A	B	$\neg (A \wedge B)$		$\neg A \vee \neg B$		
S	S	F	S	F	F	F
S	F	S	F	F	S	S
F	S	S	F	S	S	F
F	F	S	F	S	S	S

(c) $\neg (A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

A	B	$\neg (A \to B)$		$A \wedge \neg B$	
S	S	F	S	F	F
S	F	S	F	S	S
F	S	F	S	F	F
F	F	F	S	F	S

(d) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

BEVIS:

Detta är ett fall där det är lättere att använda sanningstabeller än snabbmetoden.

A	B	C	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$		$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	
S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	F
S	F	S	F	F	F	F
S	F	F	F	S	S	S
F	S	S	F	F	F	S
F	S	F	F	S	S	F
F	F	S	S	S	S	F
F	F	F	S	F	F	S

Formlerna har samma sanningstabell. (* (d) visar att $\leftrightarrow$ är associativ. *)

(e) $A \vee B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

BEVIS:

Snabbmetoden:

$\Rightarrow$: $A \vee B \to C \vDash (A \to C) \wedge (B \to C)$

F S S S F   F S F F S F F
S S F S F   S F F F F S F
S S S S F   S F F F S F F

(* De tre raderna bestäms av de tre olika sätten att ge $(A \to C)$ och $(B \to C)$ sanningvärden givet att $(A \to C) \land (B \to C)$:s värde är F. *)

$\therefore\ A \lor B \to C \models (A \to C) \land (B \to C)$

$\Leftarrow$: $(A \to C) \land (B \to C) \models A \lor B \to C$
F S F S F S F   F S F F F
F

$\therefore\ (A \to C) \land (B \to C) \models A \lor B \to C$

3-7.5

(a) $\models (A \to B) \lor (A \leftrightarrow \neg B)$
LÖSNING:
Snabbmetoden:
$\models (A \to B) \lor (A \leftrightarrow \neg B)$
S F F F S F S F
S

$\therefore\ \models (A \to B) \lor (A \leftrightarrow \neg B)$

(b) $(A \to B) \to C \models (A \to C) \to C$
LÖSNING:
Sanningstabell:

A	B	C	$(A \to B) \to C$		$(A \to C) \to C$		
S	S	S	S	S	S	S	
S	S	F	S	F	F	S	*
S	F	S	F	S	S	S	
S	F	F	F	S	F	S	
F	S	S	S	S	S	S	
F	S	F	S	F	S	F	
F	F	S	S	S	S	S	
F	F	F	S	F	S	F	

Vi ser att
$\therefore$ (b) gäller.

(c) $(A \to C) \to C \models (A \to B) \to C$
LÖSNING:
Rad 2 i sanningstabellen under (b) visar att
$\therefore$ (c) gäller inte.
Motexempel:
$V_2(A) = V_2(B) = S,\ V_2(C) = F$

(d) $A \to (B \to C) \models (A \to B) \to (A \to C)$
LÖSNING:
Sannings tabel:

A	B	C	$A \to (B \to C)$		$(A \to B) \to (A \to C)$		
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	F	F	S	F	F
S	F	S	S	S	F	S	S
S	F	F	S	S	F	S	F
F	S	S	S	S	S	S	S
F	S	F	S	F	S	S	S
F	F	S	S	S	S	S	S
F	F	F	S	S	S	S	S

Premiss och konklusion är ekvivalenta.
$\therefore$ (d) gäller

(e) $(A \to B) \to (A \to C) \models A \to (B \to C)$
LÖSNING:
Tabellen för (d) visar att premiss och slutsats är ekvivalenta.
$\therefore$ (e) gäller

(f) $A \to \neg B,\ B \lor C,\ C \to A \models A \lor C$
LÖSNING:
Snabmetoden:
$A \to \neg B,\quad B \lor C,\quad C \to A \models A \lor C$
F S FS   S S F   F S F   F F F

Motexempel: V(a) = V(C) = F, V(B) = S
$\therefore$ (f) gäller inte

(g) $(\neg A \land B) \lor (\neg B \land C) \Leftrightarrow (A \to C) \land (\neg A \to B \lor C)$
LÖSNING:
Snabbmetoden:
$\Rightarrow$: $(\neg A \land B) \lor (\neg B \land C) \Rightarrow (A \to C) \land (\neg A \to B \lor C)$
SF F F S SF F F   F S F F SF F F F F
FS F S F F   S F F F FS S F
S   S F F F SF F F

I varje rad finns en delformel som får två olika sanningsvärden
$\therefore (\neg A \land B) \lor (\neg B \land C) \Rightarrow (A \to C) \land (\neg A \to B \lor C)$

$\Leftarrow$: $(A \to C) \land (\neg A \to B \lor C) \Rightarrow (\neg A \land B) \lor (\neg B \land C)$
F S F S S F S F F F   SF F F F SF F F
S S S S FS S S S S   FS F S F FS F S
S S F S FS S F F F   FS F F F SF F F

Raderna 1 och 3 är omöjliga värderingar; men rad 2 ger ett motexempel
$V_2(A) = V_2(B) = V_2(C) = S$

$\therefore\ (A \to C) \land (\neg A \to B \lor C) \not\Rightarrow (\neg A \land B) \lor (\neg B \land C)$
$\therefore$ (g) gäller inte
(* Märk att det räcker att ekvivalensen inte gäller i en av de två riktningarna för att ekvivalensen ska vara ogiltig. Märk att bland de sex rader vi har studerat är det bara en som ger motexempel. Det räcker med ett enda motexempel för att en konsekvensrelation inte ska gälla. *)

(h) $A \lor B \to C \Leftrightarrow (A \to B) \lor (A \to C)$
LÖSNING:
Vi tillämpar snabb metoden:
$\Rightarrow$: $A \lor B \to C \models (A \to B) \lor (A \to C)$
S S F S F   S F F F S F F
F

$\therefore\ A \lor B \to C \models (A \to B) \lor (A \to C)$

$\Leftarrow$: $(A \to B) \lor (A \to C) \models A \lor B \to C$
S S S S S F F   S S S F F
S F F S S F F   S S F F F
F S S S F S F   F S S F F

Rad 1 ger motexempel: $V_1(A) = V_1(B) = S,\ V_1(C) = F$
Även rad 3 ger motexempel: $V_3(A) = V_3(C) = F,\ V_3(B) = S$
$\therefore\ (A \to B) \lor (A \to C) \not\models A \lor B \to C$
$\therefore$ (h) gäller inte.

(i) $A \lor B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \lor (B \to C)$
LÖSNING:
Sanningstabell:

A	B	C	$A \land B \to C$		$(A \to C) \lor (B \to C)$		
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	F	F
S	F	S	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	F	S	S
F	S	S	F	S	S	S	S
F	S	F	F	S	S	S	F
F	F	S	F	S	S	S	S
F	F	F	F	S	S	S	S

Vi ser att
$A \lor B \to C \models (A \to C) \lor (B \to C)$
medan
$(A \to C) \lor (B \to C) \not\models A \lor B \to C$

Motexempel:
$V_4(A) = S,\ V_4(B) = V_4(C) = F$
$V_5(A) = V_5(C) = F,\ V_5(B) = S$
$\therefore$ 3-7.5 (i) gäller inte

(j) $A \land B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \lor (B \to C)$
LÖSNING:
Av sanningstabellen som följer framgår att
$\therefore$ 3-7.5 (j) gäller.
Sanningstabell:

A	B	C	$A \land B \to C$		$(A \to C) \lor (B \to C)$		
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	F	F
S	F	S	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	S	S	S
F	S	S	F	S	S	S	S
F	S	F	F	S	S	S	F
F	F	S	F	S	S	S	S
F	F	F	F	S	S	S	S

(k) $A \lor B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \land (B \to C)$
LÖSNING:
Sanningstabell:

A	B	C	$A \lor B \to C$		$(A \to C) \land (B \to C)$		
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	F	F	F	F
S	F	S	S	S	S	S	S
S	F	F	S	F	F	F	S
F	S	S	S	S	S	S	S
F	S	F	S	F	S	F	F
F	F	S	F	S	S	S	S
F	F	F	F	S	S	S	S

$\therefore$ 3-7.5 (k) gäller.

3-7.6

(a) Om $\neg$ inte förekommer i formeln A, så har A minst ett S i sin sanningstabell.
BEVIS:
Då A är uppbyggd enbart av atomära satser, paranteser och konnektiven $\land, \lor, \to, \leftrightarrow$. Låt V vara den värdering s. a. för alla atomära satser (satsparametrar) B, V(B) = S. Vi visar med induktion över A:s längd att V(A) = S.
A atomär: Då V(A) = S enligt definitionen av V.
A = $(B \land C)$, = $(B \lor C)$, = $(B \to C)$ eller = $(B \leftrightarrow C)$:
Enligt induktionshypotesen har vi V(B) = V(C) = S. Första raden i sanningstabellen för $\land, \lor, \to$, resp. $\leftrightarrow$ ger V(A) = S.

B	C	$B \land C$	$B \lor C$	$B \to C$	$B \leftrightarrow C$
S	S	S	S	S	S

(b) Har A alltid minst ett F i sin sanningstabell?
Svar:
Nej. Låt t.ex. $A = B \to B$

B	$B \to B$
S	S
F	S

3-7.7

(a) Formalisering:
$(P \to F) \wedge (I \to T) \to (P \to T) \vee (I \to F)$ (*)

(b) Vi använder snabbmetoden:

$$\begin{array}{l} (P \to F) \wedge (I \to T) \to (P \to T) \vee (I \to F) \\ \text{S F F } \underline{\text{S}} \text{ S F F} \quad \text{S F F F S F F} \\ \quad\quad \underline{\text{F}} \end{array}$$

Formeln (*) kan inte vara falsk.
$\therefore$ Formeln (*) är en tautologi

(c) Tolka $\to$ i (*) som om-så. Då är $(P \to F)$ ock $(I \to T)$ sanna, medan $(P \to T)$ och $(I \to F)$ är falska. Därför blir förledet i (*) sant medan efterledet är falskt. Alltså är (*) i denna tolkning – och därmed den ursprungliga utsagan – falsk.
Detta visar enligt vår åsikt:
(1) "$\to$" överensstämmer inte till 100% med vanligt om-så.
(2) Det finns ett fundamentalt fel i den formella logikens grundvalar.
Detta ska inte tolkas så att den formella logiken är värdelös av följande skäl:
(i) Man kan i den formella logiken aldrig gå från sanna premisser till en falsk konklusion. (Se § 5.4 i Kapitel 4, § 6.4 i Kapitel 10 och Appendix 1.)
(ii) "$\to$" får de flesta av om-så:s egenskaper och speciellt den grundläggande modus ponens-egenskapen $A \to B, A \vDash B$
(iii) Följande relation mellan $\to$ och om-så kan <u>bevisas</u>:
$A \to B$ är sann $\Leftrightarrow$ <u>om</u> A är sann, <u>så</u> är B sann.

Således finns det en mycket nära relation mellan $\to$ och om-så. Denna och motsvarande relationer för de övriga logiska operatorerna gör att den formella logiken blir en användbar modell för logiska slutledningar.
Formeln (*) är en version av den *materiella implikationens paradoxer*.
Problem relaterade till dessa "paradoxer"diskuteras på följande ställen i *Grundläggande logik*:
Kap. 2, § 4.8; Kap. 3, § 1.6, § 2.19, övning 3-7.7, övning 3-7.16; Kap. 4, § 7.6–7.8; Kap. 8, § 4.5 och § 4.9; Appendix 3, övning 1-88 och övning 2-18.

3-7.8

(a) $\neg (A \vee B \to B \wedge C)$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg (B \wedge C)$ (SE 19)
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C)$ De Morgan; (SE 10)

(b) $\neg ((A \to B) \leftrightarrow (C \wedge \neg D))$
$\Leftrightarrow \neg (A \to B) \leftrightarrow (C \wedge \neg D)$ (SE 24)

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \leftrightarrow (C \wedge \neg D)$ (SE 19)

Alternativ:
$\neg ((A \to B) \leftrightarrow (C \wedge \neg D))$
$\Leftrightarrow (A \to B) \leftrightarrow \neg (C \wedge \neg D)$ (SE 25)
$\Leftrightarrow (A \to B) \leftrightarrow (\neg C \vee \neg\neg D)$ De Morgan, (SE 10)
$\Leftrightarrow (A \to B) \leftrightarrow (\neg C \vee D)$ Dubbla negationen (SE 1)

3-7.9

(a) Skriv på DNF och på KNF $(A \to B) \vee (B \to A)$
LÖSNING:
(1) Sanningstabell:

A	B	$(A \to B)$	$\vee$	$(B \to A)$
S	S	S	S	S
S	F	F	S	S
F	S	S	S	F
F	F	S	S	S

Rad 1: $A \wedge B$; Rad 2: $A \wedge \neg B$; Rad 3: $\neg A \wedge B$; Rad 4: $\neg A \wedge \neg B$

(2) DNF: $\boxed{(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)}$

(3) KNF: Formeln är en tautologi. Då $(A \to B) \vee (B \to A) \Leftrightarrow A \vee \neg A$
Svar:
$\boxed{A \vee \neg A}$

(b) Skriv på DNF och på KNF $(A \wedge B \leftrightarrow A) \leftrightarrow A \wedge \neg B$
LÖSNING:
(1) Sanningstabell:

A	B	$(A \wedge B$	$\leftrightarrow A)$	$\leftrightarrow$	$A \wedge$	$\neg B$
S	S	S	S	F	F	F
S	F	F	F	F	S	S
F	S	F	S	F	F	F
F	F	F	S	F	F	S

(2) DNF: Formeln är en kontradiktion:
$(A \wedge B \leftrightarrow A) \leftrightarrow A \wedge \neg B \Leftrightarrow B \wedge \neg B$
Svar:
$\boxed{B \wedge \neg B}$

(3) KNF: Vi använder Metod 1 (§ 4. 15). Formeln har F i följande rader:
Rad 1: $\neg A \vee \neg B$; Rad 2: $\neg A \vee B$; Rad 3: $A \vee \neg B$; Rad 4: $A \vee B$
Svar:
$\boxed{(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)}$

3-7.10

(a) Skriv på DNF och på KNF: $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

LÖSNING:
(1) Sanningstabell:

A	B	C	$A \leftrightarrow$	$(B \leftrightarrow C)$	$\neg (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
S	S	S	S	S	F
S	S	F	F	F	S
S	F	S	F	F	S
S	F	F	S	S	F
F	S	S	F	S	S
F	S	F	S	F	F
F	F	S	S	F	F
F	F	F	F	S	S

(2) DNF:
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ har S i:
Rad 1: $A \wedge B \wedge C$; Rad 4: $A \wedge \neg B \wedge \neg C$;
Rad 6: $\neg A \wedge B \wedge \neg C$; Rad 7: $\neg A \wedge \neg B \wedge C$

$$\boxed{(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)}$$

(3) KNF (Metod 1):
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ har F i:
Rad 2: $\neg A \vee \neg B \vee C$; Rad 3: $\neg A \vee B \vee \neg C$;
Rad 5: $A \vee \neg B \vee \neg C$; Rad 8: $A \vee B \vee C$

$$\boxed{(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C)}$$

(4) KNF (Metod 2):
Skriv först $\neg (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$ på DNF:

$$\begin{aligned} \neg (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) \Leftrightarrow\ & (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \\ & \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

Då:

$$\begin{aligned} (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) &\Leftrightarrow \neg[(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \\ &\quad \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\ &\Leftrightarrow \neg (A \wedge B \wedge \neg C) \wedge \neg (A \wedge \neg B \wedge C) \\ &\quad \wedge \neg (\neg A \wedge B \wedge C) \wedge \neg (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\ &\quad \text{(* De Morgan, (SE 11) *)} \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee \neg\neg C) \wedge (\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg C) \\ &\quad \wedge (\neg\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg\neg C) \\ &\quad \text{(* De Morgan, (SE 10) *)} \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \\ &\quad \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \end{aligned}$$

$$\boxed{(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C)}$$

(b) Skriv på DNF och på KNF:
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B \vee C)$

LÖSNING:
(1) Sanningstabell:

A	B	C	$(A \to B)$	$\wedge$	$(\neg A$	$\to$	$B \vee C)$
S	S	S	S	S	F	S	S
S	S	F	S	S	F	S	S
S	F	S	F	F	F	S	S
S	F	F	F	F	F	S	F
F	S	S	S	S	S	S	S
F	S	F	S	S	S	S	S
F	F	S	S	S	S	S	S
F	F	F	S	F	S	F	F

(2) DNF:
Formeln har S i:
Rad 1: $A \wedge B \wedge C$; Rad 2: $A \wedge B \wedge \neg C$; Rad 5: $\neg A \wedge B \wedge C$;
Rad 6: $\neg A \wedge B \wedge \neg C$; Rad 7: $\neg A \wedge \neg B \wedge C$

$$\boxed{(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)}$$

(3) KNF (Metod 1):
Formeln har F i:
Rad 3: $\neg A \vee B \vee \neg C$; Rad 4: $\neg A \vee B \vee C$; Rad 8: $A \vee B \vee C$

$$\boxed{(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)}$$

3-7.11

5.8: $\{\neg, \vee\}$ är fullständig
BEVIS:
Enligt teorem 5.5, är $\{\neg, \wedge, \vee\}$ fullständig. Låt f vara en sanningsfunktion och A en formel som representerar f och utan andra konnektiv än $\neg, \wedge, \vee$. M h a ekvivalensen (SE 8): $A \wedge B \Leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$ (De Morgan), kan alla förekomster av '$\wedge$' i A ellimineras. Vi har hittat en representation av f enbart termer av $\neg$ och $\vee$.

5.9: $\{\neg, \to\}$ är fullständig
BEVIS:
Låt A vara en representation av f s a A bara innehåller konnektiven $\neg$ och $\vee$ (Se Korollarium 5.8).M h a ekvivalensen (SE 13): $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \to B$, kan alla förekomster av '$\vee$' ellimineras så att endast konnektiven $\neg$ och $\to$ förekommer.

3-7.12

Definiera $\neg, \wedge, \vee, \to$ i termer av Sheffers streckfunktion /.
LÖSNING:

A	B	A/B	$\neg A$	A/A	$A \wedge B$	(A/B)/(A/B)		
S	S	F	F	F	S	F	S	F
S	F	S	F	F	F	S	F	S

F S	S	S	S	F	S	F	S
F F	S	S	S	F	S	F	S

A B	$A \vee B$	(A/A)/(B/B)	$A \to B$	A/(B/B)	
S S	S	F S F	S	S	F
S F	S	F S S	F	F	S
F S	S	S S F	S	S	F
F F	F	S F S	S	S	S

Vi ser att
$\neg A \Leftrightarrow A/A$
$A \wedge B \Leftrightarrow (A/B)/(A/B)$
$A \vee B \Leftrightarrow (A/A)/(B/B)$
$A \to B \Leftrightarrow A/(B/B)$

Idéer:
$A/B \Leftrightarrow \neg (A \wedge B)$
$\neg A \Leftrightarrow \neg (A \wedge A) \Leftrightarrow A/A$
$A \wedge B \Leftrightarrow \neg (A/B) \Leftrightarrow (A/B)/(A/B)$
$A \vee B \Leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A/\neg B \Leftrightarrow (A/A)/(B/B)$
$A \to B \Leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A/\neg B \Leftrightarrow A/(B/B)$

3-7.13
Definiera / och $\downarrow$ i termer av varandra.
LÖSNING:
Vi jämför tabellerna för / och $\downarrow$:

A B	A/B	$A \downarrow B$
S S	F	F
S F	S	F
F S	S	F
F F	S	S

Vi ser att:
$A \downarrow B \Leftrightarrow \neg (\neg A/\neg B)$ (1)
$A/B \Leftrightarrow \neg (\neg A \downarrow \neg B)$ (2)
$A \downarrow B \Leftrightarrow \neg (A \vee B)$

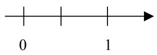
Därför:
$\neg A \Leftrightarrow \neg (A \vee A) \Leftrightarrow A \downarrow A$ (3)
Vi får nu:
$A \downarrow B \Leftrightarrow \neg (\neg A/\neg B)$ (från (1))
$\Leftrightarrow \neg ((A/A)/(B/B))$ (7.12)
$\Leftrightarrow [(A/A)/(B/B)]/[(A/A)/(B/B)]$ (7.12)

$A/B \Leftrightarrow \neg (\neg A \downarrow \neg B)$ (från (2))
$\Leftrightarrow \neg ((A\downarrow A)/(B\downarrow B))$ (från (3))
$\Leftrightarrow [(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)]\downarrow[(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)]$ (från (3)

3-7.14
(a) Objektspråket. Sann.
(b) Metaspråket. Falsk. (Längd mäts i antal bokstäver.)
(c) Metaspråket. Sann.
(d) Metaspråket. Falsk.
(e) Metaspråket. Sann.
(f) Objektspråket. Sann.
(g) Metaspråket. Falsk.
(h) Metaspråket. Falsk.
(i) Objektspråket. Sann.
(j) Metaspråket. Falsk.
(k) Öppen formel, inte sats. Varken sann eller falsk.
(l) Metaspråket. Sann.
(m) Metaspråket. Att bestämma sanningsvärdet är en knepig filosofisk fråga. (* Satsen kan i predikatlogiken formaliseras: $\forall x\ (Px \to Tx)$. Den kan uppfattas som en oändlig konjunktion av satser som fås genom att i $(Px \to Tx)$ sätta in namn på satser. *)

3-7.15
(1) Vi måste skilja på 3 nivåer:
Metaspråk: Namn på namn på rationella tal '1/4', '2/4', …

Objektspråk: Beteckningar på rationella tal (bråk) 1/4, 2/4, …

Objekt: De rationalla talen 

(2) Bråk är beteckningar på rationella tal och tillhör objektspråket. MGN('x', 'y') (* d v s minsta gemensamma nämnaren för x och y *) är alltså en funktion som avbildar ett par av beteckningar (objektspråksnivå) på ett positivt hel tal (objektnivå), dvs
MGN (<u>'p/q'</u>, <u>'r/s'</u>) = $\mu x\ (q \mid x \wedge s \mid x)$
Funktionsuttrycket μx (…x…) betecknar det minsta positiva heltal som satisfierar villkoret (…x…). '$q \mid x$' uttrycker att x är jämnt delbar med q.
(3) Omformulering av resonemanget:
(a) Definition: MGN ('p/q', 'r/s') = $\mu\, x\ (q \mid x \wedge s \mid x)$ = det minsta positiva heltal x som är delbart med både q och s.

(b) MGN ('1/2', '1/3') = 6

(c_1) 1/2 = 2/4 eller (c_2) '1/2' = '2/4'

(d) MGN ('2/4', '1/3') = MGN ('1/2, '1/4') = 6

(4) Kritik:
(i) Resonemanget (a) – (b) – (c_1) – (d) är fel därför att substitutionen är galen. Satsen
MGN ('1/2', '1/3') = 6
tillhör metaspråket. För att utföra substitutionen behöver vi ett metaspråkligt identitetspåstående '1/2' = '2/4'.
Det har vi inte. Substitutionen under ''- tecknet är fel.

(ii) I resonemanget (a) – (b) – (c_2) – (d) är substitutionen korrekt, men premissen (c_2) är falsk.

3-7.16 Se Kapitel 2 "Conditionals and the Foundations of Logic" i KB Hansen: *Applied Logic.* Acta Universitatis Upsaliensis: Almqvist & Wiksell, Stockholm 1996.

Kapitel 4. Lösningar till övningar på s. 112-116

4-8.1.
(a) $A \wedge B \vdash B \vee C$
BEVIS:
(1) $A \wedge B$ P
(2) B 1, ($\wedge$ E)
(3) $A \vee B$ 2, ($\vee$ I)

(b) $A \to B, B \to C, A \vdash C$
BEVIS:
(1) $A \to B$ P
(2) $B \to C$ P
(3) A P
(4) B 1, 3, ($\to$ E)
(5) C 2, 4, ($\to$ E)

(c) $A \vee B \to C, A \wedge D \vdash C$
BEVIS:
(1) $A \vee B \to C$ P
(2) $A \wedge D$ P
(3) A 2, ($\wedge$E)
(4) $A \vee B$ 3, ($\vee$I)
(5) C 1, 4, ($\to$E)

(d) $A \vee B, B \to C, \neg C \vdash A$
BEVIS:
(1) $A \vee B$ P
(2) $B \to C$ P
(3) $\neg C$ P
(4) $\neg B$ 2, 3, MTT
(5) A 1, 4, Disj. Syll.

(e) $\neg A \wedge (B \vee C), A \leftrightarrow B \vdash C$
BEVIS:
(1) $\neg A \wedge (B \vee C)$ P
(2) $A \leftrightarrow B$ P
(3) $\neg A$ 1, ($\wedge$E)
(4) $B \to A$ 2, ($\leftrightarrow$E)
(5) $\neg B$ 3, 4, MTT
(6) $B \vee C$ 1, ($\wedge$E)
(7) C 5, 6, Disj. Syll.

(f) $A \vee B, A \to C, B \to C \vdash C$
BEVIS:
(1) $A \vee B$ P
(2) $A \to C$ P

(3) $B \to C$	P
(4) C	1, 2, 3, ($\vee$E)

(g) $A \wedge B \leftrightarrow \neg C,\ B \wedge D \to \neg C,\ B \wedge D \vdash A \wedge D$

BEVIS:

(1) $A \wedge B \leftrightarrow \neg C$	P
(2) $B \wedge D \to \neg C$	P
(3) $B \wedge D$	P
(4) $\neg C$	2, 3, ($\to$E)
(5) $\neg C \to A \wedge B$	1, ($\leftrightarrow$E)
(6) $A \wedge B$	4, 5, ($\to$E)
(7) A	6, ($\wedge$E)
(8) D	3, ($\wedge$E)
(9) $A \wedge D$	7, 8, ($\wedge$I)

(h) $A \vee B,\ B \to C \wedge D,\ A \vee C \to E \vdash E$

BEVIS:

(1) $A \vee B$	P
(2) $B \to C \wedge D$	P
(3) $A \vee C \to E$	P
(4) A	HP
(5) $A \vee C$	4, ($\vee$I)
(6) E	3, 5 ($\to$E)
(7) $A \to E$	4-6, ($\to$I)
(8) B	HP
(9) $C \wedge D$	2, 8, ($\to$E)
(10) C	9, ($\wedge$E)
(11) $A \vee C$	10, ($\vee$I)
(12) E	3, 11 ($\to$E)
(13) $B \to E$	8-12 ($\to$E)
(14) E	1, 7, 13, ($\vee$E)

(i) $\neg A \wedge B \to C,\ A \to \neg D,\ D \wedge (A \vee B) \vdash C$

BEVIS:

(1) $\neg A \wedge B \to C$	P
(2) $A \to \neg D$	P
(3) $D \wedge (A \vee B)$	P
(4) D	3, ($\wedge$E)
(5) $A \vee B$	3, ($\wedge$E)
(*Vi härleder $\neg A$.*)	
(6) A	HP
(7) $\neg D$	2, 6, ($\to$E)
(8) $\bot$	4, 7, ($\bot$I)
(9) $\neg A$	6-8, ($\neg$I)
(10) B	5, 9, Disj. Syll.
(11) $\neg A \wedge B$	9, 10, ($\wedge$I)
(12) C	1, 11, ($\to$E)

4-8.2.

(a) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$

BEVIS:

(1) $A \to (B \to C)$	P
(2) B	HP
(3) A	HP
(4) $B \to C$	1, 3, ($\to$E)
(5) C	2, 4, ($\to$E)
(6) $A \to C$	3-5 ($\to$I)
(7) $B \to (A \to C)$	2-6, ($\to$I)

(b) $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$

BEVIS:

(1) $A \wedge B \to C$	P
(2) A	HP
(3) B	HP
(4) $A \wedge B$	2, 3, ($\wedge$I)
(5) C	1, 4, ($\to$E)
(6) $B \to C$	3-5, ($\to$I)
(7) $A \to (B \to C)$	2-6, ($\to$I)

(c) $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$

BEVIS:

(1) $A \to (B \to C)$	P
(2) $A \wedge B$	HP
(3) A	2, ($\wedge$E)
(4) B	2, ($\wedge$E)
(5) $B \to C$	1, 3, ($\to$E)
(6) C	4, 5, ($\to$E)
(7) $A \wedge B \to C$	2-6, ($\to$I)

(d) $A \vee B \to C \dashv\vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$

$A \vee B \to C \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$

BEVIS:

(1) $A \vee B \to C$	P
(2) A	HP
(3) $A \vee B$	2, ($\vee$I)
(4) C	1, 3, ($\to$E)
(5) $A \to C$	2-4, ($\to$I)
(6) B	HP
(7) $A \vee B$	6, ($\vee$I)
(8) C	1, 7, ($\to$E)
(9) $B \to C$	6-8, ($\to$I)
(10) $(A \to C) \wedge (B \to C)$	5, 9, ($\wedge$I)

$(A \to C) \wedge (B \to C) \vdash A \vee B \to C$

BEVIS:

(1) $(A \to C) \wedge (B \to C)$	P
(2) $A \vee B$	HP
(3) $A \to C$	1, ($\wedge$E)
(4) $B \to C$	1, ($\wedge$ E)
(5) C	2, 3, 4, ($\vee$E)
(6) $A \vee B \to C$	2-5, ($\to$I)

(e) $A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$

BEVIS:

(1) $A \leftrightarrow B$	P
(2) $B \leftrightarrow C$	P
(3) A	HP
(4) $A \to B$	1, ($\leftrightarrow$E)
(5) $B \to C$	2, ($\leftrightarrow$E)
(6) B	3, 4, ($\to$E)
(7) C	5, 6, ($\to$E)
(8) $A \to C$	3-7, ($\to$I)
(9) C	HP
(10) $C \to B$	2, ($\leftrightarrow$E)
(11) $B \to A$	1, ($\leftrightarrow$E)
(12) B	9, 10, ($\to$E)
(13) A	11, 12, ($\to$E)
(14) $C \to A$	9-13, ($\to$E)
(15) $A \leftrightarrow C$	8, 14, ($\leftrightarrow$I)

(f) $B \vdash A \to B$

BEVIS:

(1) B	P
(2) A	HP
(3) $A \wedge B$	1, 2, ($\wedge$I)
(4) B	3, ($\wedge$E)
(5) $A \to B$	2-4, ($\to$I)

(g) $\neg A \vee B \vdash A \to B$

BEVIS:

(1) $\neg A \vee B$	P
(2) A	HP
(3) $\neg\neg A$	2, Dubbl. Neg.
(4) B	1, 3, Disj. Syll.
(5) $A \to B$	2-4, ($\to$I)

4-8.3

(a) $A \to B,\ B \to C,\ \neg C \vdash \neg A$

BEVIS:

(1) $A \to B$	P
(2) $B \to C$	P
(3) $\neg C$	P

(4) A	HP
(5) B	1, 4, ($\to$E)
(6) C	2, 5, ($\to$E)
(7) $\bot$	3, 6, ($\bot$I)
(8) $\neg A$	4-7, ($\neg$I)

(b) $\neg(A \wedge B),\ A \vdash \neg B$

BEVIS:

(1) $\neg(A \wedge B)$	P
(2) A	P
(3) B	HP
(4) $A \wedge B$	2, 3, ($\wedge$I)
(5) $\bot$	1, 4, ($\bot$I)
(6) $\neg B$	3-5, ($\neg$I)

(c) $A \to \neg A \vdash \neg A$

BEVIS:

(1) $A \to \neg A$	P
(2) A	HP
(3) $\neg A$	1, 2, ($\to$E)
(4) $\bot$	2, 3, ($\bot$I)
(5) $\neg A$	2-4, ($\neg$I)

(d) $\neg A \to A \vdash A$

BEVIS:

(1) $\neg A \to A$	P
(2) $\neg A$	HP
(3) A	1, 2, ($\to$E)
(4) $\bot$	2, 3, ($\bot$I)
(5) A	2-4, ($\neg$E)

(e) $\neg A \vdash A \to B$

BEVIS:

(1) $\neg A$	P
(2) A	HP
(3) $\neg B$	HP
(4) $\bot$	1, 2, ($\bot$I)
(5) B	3-4, ($\neg$I)
(6) $A \to B$	2-5, ($\to$I)

(i) $A \to B \dashv\vdash \neg B \to \neg A$

$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

BEVIS:

(1) $A \to B$	P
(2) $\neg B$	HP
(3) A	HP
(4) B	1, 3, ($\to$E)
(5) $\bot$	2, 4, ($\bot$I)

(6) $\neg A$	3-5, $(\neg I)$
(7) $\neg B \to \neg A$	2-6, $(\to I)$

$\neg B \to \neg A \vdash A \to B$

BEVIS:

(1) $\neg B \to \neg A$	P
(2) A	HP
(3) $\neg B$	HP
(4) $\neg A$	$(\to E)$
(5) $\bot$	2, 4, $(\bot I)$
(6) B	3-5, $(\neg E)$
(7) $A \to B$	2-6, $(\to I)$

(g) $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg (A \vee B)$

BEVIS:

(1) $\neg A \wedge \neg B$	P
(2) $A \vee B$	HP
(3) $\neg A$	1, $(\wedge E)$
(4) B	2, 3, Disj. Dyll.
(5) $\neg B$	1, $(\wedge E)$
(6) $\bot$	4, 5, $(\bot I)$
(7) $\neg (A \vee B)$	2-6, $(\neg I)$

(h) $A \to B \vdash \neg A \vee B$

BEVIS:

(1) $A \to B$	P
(2) $\neg (\neg A \vee B)$	HP
(3) $\neg\neg A \wedge \neg B$	2, De Morgan
(4) $\neg\neg A$	3, $(\wedge E)$
(5) A	4, Dubbl. Neg.
(6) B	1, 5, $(\to E)$
(7) $\neg B$	3, $(\wedge E)$
(8) $\bot$	6, 7, $(\bot I)$
(9) $\neg A \vee B$	2-8, $(\neg E)$

(i) $\neg (A \to B) \dashv\vdash A \wedge \neg B$

$\neg (A \to B) \vdash A \wedge \neg B$

BEVIS:

(1) $\neg (A \to B)$	P

(*Vi ska härleda A. Vi antar $\neg A$ som extra premiss och härleder $\bot$.*)

(2) $\neg A$	HP
(3) $A \to B$	2, övn. 8.3 (e)
(4) $\bot$	1, 3, $(\bot I)$
(5) A	2-4, $(\neg E)$

(*Vi ska härleda $\neg B$. Vi antar B som extra premiss och härleder $\bot$.*)

(6) B	HP
(7) $A \to B$	6, övn. 8.2 (f)
(8) $\bot$	1, 7, $(\bot I)$

(9) $\neg B$	6-8, $(\neg I)$
(10) $A \wedge \neg B$	5, 9, $(\wedge I)$

$A \wedge \neg B \vdash \neg (A \to B)$

BEVIS:

(1) $A \wedge \neg B$	P
(2) $A \to B$	HP
(3) A	1, $(\wedge I)$
(4) B	2, 3, $(\to E)$
(5) $\neg B$	1, $(\wedge E)$
(6) $\bot$	4, 5, $(\bot I)$
(7) $\neg(A \to B)$	2-6, $(\neg I)$

(j) $\neg(A \leftrightarrow B) \dashv\vdash A \leftrightarrow \neg B$

$\neg(A \leftrightarrow B) \vdash A \leftrightarrow \neg B$

BEVIS:

(1) $\neg(A \leftrightarrow B)$	P

(*Vi härleder först $A \to \neg B$. Vi antar A och B som extra premisser och härleder $\bot$.*)

(2) A	HP
(3) B	HP
(4) $A \to B$	3, övn. 8.2 (f)
(5) $B \to A$	2, övn. 8.2 ((f)
(6) $A \leftrightarrow B$	4, 5, $(\leftrightarrow I)$
(7) $\bot$	1, 6, $(\bot I)$
(8) $\neg B$	3-7, $(\neg I)$
(9) $A \to \neg B$	2-8, $(\to I)$

(* Nu härleder vi $\neg B \to A$. Vi antar $\neg B$ och $\neg A$ som tillfälliga premisser och härleder $\bot$. *).

(10) $\neg B$	HP
(11) $\neg A$	HP
(12) $A \to B$	11, övn. 8.3 (e)
(13) $B \to A$	10, övn. *.3 (e)
(14) $A \leftrightarrow B$	12, 13, $(\leftrightarrow$I0
(15) $\bot$	1, 14, $(\bot I)$
(16) A	11-15, $(\neg E)$
(17) $\neg B \to A$	10-16, $(\to I)$
(18) $A \leftrightarrow \neg B$	9, 17, $(\leftrightarrow I)$

$A \leftrightarrow \neg B \vdash \neg(A \leftrightarrow B)$

BEVIS:

(1) $A \leftrightarrow \neg B$	P
(2) $A \leftrightarrow B$	HP

(*Vi ska härleda $\bot$. Vi tar $\neg B$ som riktmärke. För att komma åt $\neg B$ och B|| måste vi eliminera $\leftrightarrow$ i (1) och (2).*)

(3) $A \to \neg B$	1, $(\leftrightarrow E)$
(4) $\neg B \to A$	1, $(\leftrightarrow E)$

(5) $A \to B$	2, $(\leftrightarrow E)$
(6) $B \to A$	2, $(\leftrightarrow E)$

(*För att nå $\neg B$ i (3) måste vi eliminera $\to$. För det behöver vi A. Vi antar A och ser vad som händer.*)

(7) A	HP
(8) $\neg B$	3, 7, $(\to E)$
(9) B	5, 7, $(\to E)$
(10) $\bot$	8, 9, $(\bot I)$
(11) $\neg A$	7-10, $(\neg I)$
(12) $\neg B$	6, 11, MTT
(13) $\neg\neg B$	4, 11, MTT
(14) $\bot$	12, 13, $(\bot I)$
(15) $\neg(A \leftrightarrow B)$	2-14, $(\neg I)$

(*Detta är ett exempel på en deduktion där det behövs en liten gnutta innovation utöver de heuristiska reglerna 4.12.1 - 4.12.6.*)

(k) $\neg(A \wedge B) \dashv\vdash \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

BEVIS:

(1) $\neg(A \wedge B)$	P
(2) $\neg(\neg A \vee \neg B)$	HP

(*Vi antar negationen av konklusionen som tillfällig premiss för indirekt härledning. Vi härleder $\bot$ och använder $(\neg E)$.*)

(3) $\neg\neg A \wedge \neg\neg B$	3, Ex 4.8
(4) $\neg\neg A$	3, $(\wedge E)$
(5) A	3, Ex. 3.9
(6) $\neg\neg B$	3, $(\wedge E)$
(7) B	Ex. 3.9
(8) $A \wedge B$	5, 7, $(\wedge I)$
(9) $\bot$	1, 8, $(\bot I)$
(10) $\neg A \vee \neg B$	2-9, $(\neg E)$

$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

BEVIS:

(1) $\neg A \vee \neg B$	P
(2) $A \wedge B$	HP

(*Vi antar $A \wedge B$ för indirekt härledning.*)

(3) A	2, $(\wedge E)$
(4) $\neg\neg A$	3, Ex. 3.7
(5) $\neg B$	1, 4, Disj. Syll.
(6) B	2, $(\wedge E)$
(7) $\bot$	5, 6, $(\bot I)$
(8) $\neg(A \wedge B)$	2-7, $(\neg I)$

4-8.4

(a) $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$

BEVIS:

(1) $A \wedge \neg A$	HP
(2) A	1, $(\wedge E)$
(3) $\neg A$	1, $(\wedge E)$
(4) $\bot$	2, 3, $(\bot I)$
(5) $\neg(A \wedge \neg A)$	1-4, $(\neg I)$

(b) $\vdash \neg(A \leftrightarrow \neg A)$

BEVIS:

(1) $(A \leftrightarrow \neg A)$	HP

(*Vi gräver oss in till $\neg A$ genom att eliminera först $\leftrightarrow$ och sedan $\to$.*)

(2) $A \to \neg A$	1, $(\leftrightarrow E)$
(3) $\neg A \to A$	1, $(\leftrightarrow E)$
(4) A	HP
(5) $\neg A$	2, 4, $(\to E)$
(6) $\bot$	4, 5, $(\bot I)$
(7) $\neg A$	4-6, $(\neg I)$
(8) A	3, 7, $(\to E)$
(9) $\bot$	7, 8, $(\bot I)$
(10) $\neg(A \leftrightarrow \neg A)$	1-9, $(\neg A)$

(c) $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$

BEVIS:

(1) $A \to \neg A$	HP
(2) A	HP
(3) $\neg A$	1, 2, $(\to E)$
(4) $\bot$	2, 3, $(\bot I)$
(5) $\neg A$	2-4, $(\neg I)$
(6) $(A \to \neg A) \to \neg A$	1-5, $(\to I)$

(d) $\vdash (A \to B) \vee (B \to C)$

BEVIS:

(1) $\neg ((A \to B) \vee (B \to C))$	HP
(2) $\neg(A \to B) \wedge \neg(B \to C)$	1, De Morgan
(3) $\neg(A \to B)$	2, $(\wedge E)$
(4) $\neg(B \to C)$	2, $(\wedge E)$
(5) $A \wedge \neg B$	3, övn. 8.3 (i)
(6) $B \wedge \neg C$	4, övn. 8.3 (i)
(7) $\neg B$	5, $(\wedge E)$
(8) B	6, $(\wedge E)$
(9) $\bot$	7, 8, $(\bot I)$
(10) $(A \to B) \vee (B \to C)$	1-9, $(\neg E)$

(e) $\vdash (A \leftrightarrow B) \vee (A \leftrightarrow \neg B)$

BEVIS:

(1) $\neg ((A \leftrightarrow B) \vee (A \leftrightarrow \neg B))$	HP
(2) $\neg(A \leftrightarrow B) \wedge \neg(A \leftrightarrow \neg B)$	1, De Morgan

(3) $\neg(A \leftrightarrow B)$	2, $(\wedge E)$
(4) $\neg(A \leftrightarrow \neg B)$	2, $(\wedge E)$
(5) $(A \leftrightarrow \neg B)$	3, övn. 8.3 (j)
(6) $\bot$	4, 5, $(\bot I)$
(7) $(A \leftrightarrow B) \vee (A \leftrightarrow \neg B)$	1-6, $(\neg E)$

(f) $\vdash ((A \vee \neg A) \rightarrow B) \rightarrow B$

BEVIS:

(1) $((A \vee \neg A) \rightarrow B)$	HP
(2) $A \vee \neg A$	Exempel 4-7.9
(3) B	1, 2, $(\rightarrow E)$
(4) $((A \vee \neg A) \rightarrow B) \rightarrow B$	1-3, $(\rightarrow I)$

(g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

BEVIS:

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow A)$	HP
(2) $\neg A$	HP
(3) $\neg (A \rightarrow B)$	1, 2, MTT
(4) $A \wedge \neg B$	3, övn. 8.3
(5) A	4, $(\wedge E)$
(6) $\bot$	2, 5, $(\bot I)$
(7) A	2-6, $(\neg E)$
(8) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	1-7, $(\rightarrow I)$

4-8.5

(a) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

BEVIS:

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	P
(2) A	HP
(3) B	HP
(4) $A \rightarrow B$	3, övn. 8.2 (f)
(5) $A \rightarrow C$	1, 4, $(\rightarrow E)$
(6) C	2, 5, $(\rightarrow E)$
(7) $B \rightarrow C$	3-6, $(\rightarrow I)$
(8) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	2-7, $(\rightarrow I)$

(b) $A \leftrightarrow B \vdash A \vee C \leftrightarrow B \vee C$

BEVIS:

(1) $A \leftrightarrow B$	P
(2) $A \vee C$	HP

(*Vi ska härleda $B \vee C$. Vi tillämpar den direkta metoden i § 4.12.4. Vi utför $(\vee E)$ på $A \vee C$.*)

(3) A	HP
(4) $A \rightarrow B$	1, $(\leftrightarrow E)$
(5) B	3, 4, $(\rightarrow E)$
(6) $B \vee C$	5, $(\vee I)$
(7) $A \rightarrow B \vee C$	3-6, $(\rightarrow I)$
(8) C	HP

(9) $B \vee C$	8, $(\vee I)$
(10) $C \rightarrow B \vee C$	8-9, $(\rightarrow I)$
(11) $B \vee C$	8, $(\vee I)$
(12) $A \vee C \rightarrow B \vee C$	2-11, $(\rightarrow I)$
(13) $B \vee C$	HP

(*Vi ska härleda $A \vee C$. Vi använder nu för variationens skull den indirekta metoden i § 4.12.4. *)

(14) $\neg(A \vee C)$	HP
(15) $\neg A \wedge \neg C$	14, De Morgan
(16) $\neg C$	15, $(\wedge E)$
(17) B	13, 16, Disj.Syll.
(18) $B \rightarrow A$	1, $(\leftrightarrow E)$
(19) A	17, 18, $(\rightarrow E)$
(20) $\neg A$	15, $(\wedge E)$
(21) $\bot$	19, 20, $(\bot I)$
(22) $A \vee C$	14-21, $(\neg E)$
(23) $B \vee C \rightarrow A \vee C$	13-22, $(\rightarrow I)$
(24) $A \vee C \leftrightarrow B \vee C$	12, 23, $(\leftrightarrow I)$

(c) $A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$A \leftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

BEVIS:

(1) $A \leftrightarrow B$	P

(*Vi använder den indirekta metoden i § 4.12.4.*)

(2) $\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	HP
(3) $\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)$	2, De Morgan
(4) $\neg(A \wedge B)$	3, $(\wedge E)$
(5) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$	3, $(\wedge E)$

(*Vi härleder $A \leftrightarrow \neg B$ och använder sedan 8.3 (j). Först härleder vi $A \rightarrow \neg B$ och sedan $\neg B \rightarrow A$.*)

(6) A	HP
(7) B	HP
(8) $A \wedge B$	6, 7, $(\wedge I)$
(9) $\bot$	4, 8, $(\bot I)$
(10) $\neg B$	7-9, $(\neg I)$
(11) $A \rightarrow \neg B$	6-10, $(\rightarrow I)$
(12) $\neg B$	HP
(13) $\neg A$	HP
(14) $\neg A \wedge \neg B$	12, 13, $(\wedge I)$
(15) $\bot$	5, 14, $(\bot I)$
(16) A	13-15, $(\neg E)$
(17) $\neg B \rightarrow A$	12-16, $(\rightarrow E)$
(18) $A \leftrightarrow \neg B$	11, 17, $(\leftrightarrow I)$
(19) $\neg (A \leftrightarrow B)$	18, övn. 8.3 (j)
(20) $\bot$	1, 19, $(\bot I)$
(21) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	2-20, $(\neg E)$

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vdash A \leftrightarrow B$

BEVIS:

(1) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	P

(* Vi härleder $A \rightarrow B$. Antag A som extra premiss.*)

(2) A	HP
(3) $\neg A \wedge \neg B$	HP
(4) $\neg A$	3, $(\wedge E)$
(5) $\bot$	2, 4, $(\bot$I0
(6) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$	3-5, $(\neg I)$
(7) $A \wedge B$	1, 6, Dysj. Syll.
(8) B	7, $(\wedge E)$
(9) $A \rightarrow B$	2-8, $(\rightarrow I)$

(* Vi härleder $B \rightarrow A$. *)

(10) B	HP
(11) $\neg A \wedge \neg B$	HP
(12) $\neg B$	11, $(\wedge E)$
(13) $\bot$	10, 12, $(\bot I)$
(14) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$	11-13, $(\neg I)$
(15) $A \wedge B$	1, 14, Disj. Syll.
(16) A	15, $(\wedge E)$
(17) $B \rightarrow A$	10-16, $(\rightarrow I)$
(18) $A \leftrightarrow B$	9, 17, $(\leftrightarrow I)$

(d) $A \wedge B \rightarrow C \dashv\vdash (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$

$A \wedge B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$

BEVIS:

(1) $A \wedge B \rightarrow C$	P
(2) $\neg((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$	HP
(3) $\neg(A \rightarrow C) \wedge \neg(B \rightarrow C)$	2, De Morgan
(4) $\neg(A \rightarrow C)$	3, $(\wedge E)$
(5) $A \wedge \neg C$	4, övn. 8.3 (i)
(6) $\neg(B \rightarrow C)$	3, $(\wedge E)$
(7) $B \wedge \neg C$	6, övn. 8.3 (i)
(8) A	5, $(\wedge E)$
(9) B	7, $(\wedge E)$
(10) $A \wedge B$	8, 9, $(\wedge I)$
(11) C	1, 10, $(\rightarrow E)$
(12) $\neg C$	5, $(\wedge E)$
(13) $\bot$	11, 12, $(\bot I)$
(14) $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$	2-13, $(\neg E)$

$(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) \vdash A \wedge B \rightarrow C$

BEVIS:

(1) $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$	P
(2) $A \wedge B$	HP

(*Vi använder direkt härledning och $(\vee E)$. Ett alternativ är indirekt härledning: Antag $\neg C$ och använd övning 8.3 (i).*)

(3) $A \rightarrow C$	HP
(4) A	2, $(\wedge E)$
(5) C	3, 4, $(\rightarrow E)$
(6) $(A \rightarrow C) \rightarrow C$	3-5, $(\rightarrow I)$
(7) $B \rightarrow C$	HP
(8) B	2, $(\wedge E)$
(9) C	7, 8, $(\rightarrow E)$
(10) $(B \rightarrow C) \rightarrow C$	7-9, $(\rightarrow I)$
(11) C	1, 6, 10 $(\vee E)$
(12) $A \wedge B \rightarrow C$	2-11, $(\rightarrow I)$

(e) $A \rightarrow B, \neg A \rightarrow C, B \vee C \rightarrow D \vdash D$

BEVIS:

(1) $A \rightarrow B$	P
(2) $\neg A \rightarrow C$	P
(3) $B \vee C \rightarrow D$	P
(4) $\neg D$	HP
(5) $\neg(B \vee C)$	3, 4, MTT
(6) $\neg B \wedge \neg C$	5, De Morgan
(7) $\neg B$	6, $(\wedge E)$
(8) $\neg C$	6, $(\wedge E)$
(9) $\neg A$	1, 7, MTT
(10) $\neg\neg A$	2, 8, MTT
(11) $\bot$	9, 10, $(\bot I)$
(12) D	4-11, $(\neg E)$

(f) $A \rightarrow ((B \wedge C) \vee E), B \wedge C \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg E \vdash A \rightarrow \neg D$

BEVIS:

(1) $A \rightarrow (B \wedge C) \vee E$	P
(2) $B \wedge C \rightarrow \neg A$	P
(3) $D \rightarrow \neg E$	P
(4) A	HP
(5) D	HP
(6) $(B \wedge C) \vee E$	1, 4, $(\rightarrow E)$
(7) $\neg E$	3, 5, $(\rightarrow E)$
(8) $B \wedge C$	6, 7, Disj. Syll.
(9) $\neg A$	2, 8, $(\rightarrow E)$
(10) $\bot$	4, 9, $(\bot I)$
(11) $\neg D$	5-10, $(\neg E)$
(12) $A \rightarrow \neg D$	4-11, $(\rightarrow I)$

(g) $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vee C, \neg B \rightarrow \neg A \vdash C$

BEVIS:

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	P
(2) $A \vee C$	P

(3) $\neg B \to \neg A$	P
(4) $\neg C$	HP
(5) A	2, 4, Disj. Syll.
(6) $B \to C$	1, 5, $(\to E)$
(7) $\neg B$	4, 6, MTT
(8) $\neg A$	3, 7, $(\to E)$
(9) $\bot$	5, 8, $(\bot I)$
(10) C	4-9, $(\neg E)$

4-8.6

(a) $(A \leftrightarrow B) \to A \dashv\vdash A \vee B$

LÖSNING:

Sanningstabell:

A	B	$(A \leftrightarrow B)$	$\to A$	$A \vee B$
S	S	S	S	S
S	F	F	S	S
F	S	F	S	S
F	F	S	F	F

Vi ser att $(A \leftrightarrow B) \to A \mathrel{=\!\!||\!\!=} A \vee B$. Av Fullständighetsteoremet 5.3 följer $(A \leftrightarrow B) \to A \dashv\vdash A \vee B$.

Deduktion:

$(A \leftrightarrow B) \to A \vdash A \vee B$

BEVIS:

(1) $(A \leftrightarrow B) \to A$	P
(2) $\neg(A \vee B)$	HP
(3) $\neg A \wedge \neg B$	2, De Morgan
(4) $\neg A$	3, $(\wedge E)$
(5) $\neg(A \leftrightarrow B)$	1, 4, MTT
(6) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	3, $(\vee I)$
(7) $A \leftrightarrow B$	6, övn. 8,5 (c)
(8) $\bot$	5, 7, $(\bot I)$
(9) $A \vee B$	2-8, $(\neg E)$

$A \vee B \vdash (A \leftrightarrow B) \to A$

BEVIS:

(1) $A \vee B$	P
(2) $A \leftrightarrow B$	HP
(3) $\neg A$	HP
(4) B	1, 3, Disj.Syll
(5) $B \to A$	2, $(\leftrightarrow E)$
(6) A	4, 5, $(\to E)$
(7) $\bot$	3, 6, $(\bot I)$
(8) A	3-7, $(\neg E)$
(9) $(A \leftrightarrow B) \to A$	2-8, $(\to I)$

(b) $A \to (\neg B \leftrightarrow C) \vdash \neg B \leftrightarrow A \wedge C$

LÖSNING:

Sanningstabbell:

Av sanningstabellen framgår att $A \to (\neg B \leftrightarrow C) \nvDash \neg B \leftrightarrow A \wedge C$

Av teorem 5.3 får vi då $A \to (\neg B \leftrightarrow C) \nvdash \neg B \leftrightarrow A \wedge C$.

A	B	C	$A \to$	$(\neg B \leftrightarrow C)$		$\neg B$	$\leftrightarrow$	$A \wedge C$	
S	S	S	F	F	F	F	F	S	
S	S	F	S	F	S	F	S	F	
S	F	S	S	S	S	S	S	S	
S	F	F	F	S	F	S	F	F	
F	S	S	S	F	F	F	S	F	
F	S	F	S	F	S	F	S	F	
F	F	S	S	S	S	S	F	F	*
F	F	F	S	S	F	S	F	F	*

Motexempel:

$V_7(A) = V_7(B) = F$, $V_7(C) = S$

$V_8(A) = V_8(B) = V_8(C) = F$

(c) $\neg B \leftrightarrow A \wedge C \vdash A \to (\neg B \leftrightarrow C)$

LÖSNING:

Sanningstabell:

Av sanningstabellen för övning 8.6 (b) framgår att $\neg B \leftrightarrow A \wedge C \vdash A \to (\neg B \leftrightarrow C)$.

Deduktion:

$\neg B \leftrightarrow A \wedge C \vdash A \to (\neg B \leftrightarrow C)$

BEVIS:

(1) $\neg B \leftrightarrow A \wedge C$	P
(2) A	HP
(3) $\neg B$	HP
(4) $\neg B \to A \wedge C$	1, 3, $(\leftrightarrow E)$
(5) $A \wedge C$	3, 4, $(\to E)$
(6) C	5, $(\wedge E)$
(7) $\neg B \to C$	3-6, $(\to I)$
(8) C	HP
(9) $A \wedge C \to \neg B$	1, $(\leftrightarrow E)$
(10) $A \wedge C$	2, 8, $(\wedge I)$
(11) $\neg B$	9, 10, $(\to E)$
(12) $C \to \neg B$	8-11, $(\to I)$
(13) $\neg B \leftrightarrow C$	7, 12, $(\leftrightarrow I)$
(14) $A \to (\neg B \leftrightarrow C)$	2-13, $(\to I)$

(d) $A \to (A \leftrightarrow B) \dashv\vdash A \to B$

LÖSNING: *Snabbmetoden för riktningen* $\vdash$:

$A \to (A \leftrightarrow B) \models A \to B$

S S S F F   S F F

F

$\therefore A \to (A \leftrightarrow B) \vdash A \to B$

Deduktion:

$A \to (A \leftrightarrow B) \vdash A \to B$

BEVIS:

(1) $A \to (A \leftrightarrow B)$	P
(2) A	HP
(3) $A \leftrightarrow B$	1, 2, $(\to E)$
(4) $A \to B$	3, $(\leftrightarrow E)$
(5) B	2, 4, $(\to E)$
(6) $A \to B$	2-5, $(\to I)$

Snabbmetoden för $\dashv$:

$A \to B \models A \to (A \leftrightarrow B)$

S S S   S F   S F S

S

$\therefore A \to B \vdash A \to (A \leftrightarrow B)$

Deduktion:

$A \to B \vdash A \to (A \leftrightarrow B)$

BEVIS:

(1) $A \to B$	P
(2) A	HP
(3) $B \to A$	2, övn. 8.2 (f)
(4) $A \leftrightarrow B$	1, 3, $(\leftrightarrow I)$
(5) $A \to (A \leftrightarrow B)$	2-4, $(\to I)$

(e) $(A \to \neg C) \to B \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (B \vee C)$

LÖSNING:

Sanningstabell:

A	B	C	$(A \to \neg C)$		$\to B$	$(A \vee B)$	$\wedge$	$(B \vee C)$
S	S	S	F	F	S	S	S	S
S	S	F	S	S	S	S	S	S
S	F	S	F	F	S	S	S	S
S	F	F	S	S	F	S	F	F
F	S	S	S	F	S	S	S	S
F	S	F	S	S	S	S	S	S
F	F	S	S	F	F	F	F	S
F	F	F	S	S	F	F	F	F

Av tabellen framgår att $(A \to \neg C) \to B \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (B \vee C)$.

Deduktion:

$(A \to \neg C) \to B \vdash (A \vee B) \wedge (B \vee C)$

BEVIS:

(1) $(A \to \neg C) \to B$ — P

(*Vi härleder $(A \vee B)$ för sig och $(B \vee C)$ för sig. I båda fallen använder vi den indirekta metoden i § 4.12.4.*)

(2) $\neg(A \vee B)$	HP
(3) $\neg A \wedge \neg B$	2, De Morgan

(4) $\neg A$	3, $(\wedge E)$
(5) $\neg B$	3, $(\wedge E)$
(6) $\neg(A \to \neg C)$	1, 5, MTT
(7) $A \wedge \neg\neg C$	6, övn. 8.3 (i)
(8) A	7, $(\wedge E)$
(9) $\bot$	4, 8, $(\bot I)$
(10) $A \vee B$	2-9, $(\neg E)$
(11) $\neg(B \vee C)$	HP
(12) $\neg B \wedge \neg C$	11, De Morgan
(13) $\neg B$	12, $(\wedge E)$
(14) $\neg(A \to \neg C)$	1, 13, MTT
(15) $A \wedge \neg\neg C$	14, övn. 8.3 (i)
(16) $\neg C$	12, $(\wedge E)$
(17) $\neg\neg C$	15, $(\wedge E)$
(18) $\bot$	16, 17, $(\bot I)$
(19) $B \vee C$	11-18, $(\neg E)$
(20) $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$	10, 19, $(\wedge I)$

$(A \vee B) \wedge (B \vee C) \vdash (A \to \neg C) \to B$

BEVIS:

(1) $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$	P
(2) $A \to \neg C$	HP
(3) $\neg B$	HP
(4) $A \vee B$	1, $(\wedge E)$
(5) $B \vee C$	1, $(\wedge E)$
(6) A	3, 4, Disj. Syll.
(7) C	3, 5, Disj. Syll.
(8) $\neg C$	2, 6, $(\to E)$
(9) $\bot$	7, 8, $(\bot I)$
(10) B	3-9, $(\neg E)$
(11) $(A \to \neg C) \to B$	2-10, $(\to I)$

(f) $A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to C$

LÖSNING:

Snabbmetoden:

Snabbmetoden ger två motexempel (jfr med Exempel 2.15 i Kap. 3):

$A \to (B \to C) \models (A \to B) \to C$

S S S S F   S S S F F

F S S F F   F S S F F

F S F S F   F S F F F

$V_2(A) = V_2(C) = F$, $V_2(B) = S$

$V_3(A) = V_3(B) = V_3(C) = F$

$\therefore A \to (B \to C) \nvdash (A \to B) \to C$

(g) $(A \to B) \to C \vdash A \to (B \to C)$

LÖSNING:

Snabbmetoden:

$(A \to B) \to C \models A \to (B \to C)$
S S S S F   S F S F F
F

$\therefore (A \to B) \to C \vdash A \to (B \to C)$

Deduktion:
$(A \to B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
BEVIS:

(1) $(A \to B) \to C$	P
(2) A	HP
(3) B	HP
(4) $A \to B$	3, övn. 8.2 (f)
(5) C	1, 4, $(\to E)$
(6) $B \to C$	3-5, $(\to I)$
(7) $A \to (B \to C)$	2-6, $(\to I)$

(h) $A \vee (A \wedge B) \dashv\vdash A$
LÖSNING:
En sanningstabell visar att (h) gäller.
Deduktion:
$A \vee (A \wedge B) \vdash A$
BEVIS:

(1) $A \vee (A \wedge B)$	P
(2) A	HP
(3) $A \to A$	2-2 $(\to I)$
(4) $A \wedge B$	HP
(5) A	4, $(\wedge E)$
(6) $A \wedge B \to A$	4-5, $(\to I)$

(*På raderna (1) – (6) har vi vad som behövs för $(\vee E)$ på (1). *)

(7) A	1, 3, 6, $(\vee E)$

$A \vdash A \vee (A \wedge B)$
BEVIS:

(1) A	P
(2) $A \vee (A \wedge B)$	1, $(\vee I)$

(i) $A \wedge (A \vee B) \dashv\vdash A$
LÖSNING:
En sanningstabell visar att (i) gäller.
Deduktion:
$A \wedge (A \vee B) \vdash A$
BEVIS:

(1) $A \wedge (A \vee B)$	P
(2) A	1, $(\wedge E)$

$A \vdash A \wedge (A \vee B)$
BEVIS:

(1) A	P

(2) $A \vee B$	1, $(\vee I)$
(3) $A \wedge (A \vee B)$	1, 2, $(\wedge I)$

$A \vee B \dashv\vdash (A \to B) \to B$
LÖSNING:
Sanningstabell:

A	B	$A \vee B$	$(A \to B)$	$\to B$
S	S	S	S	S
S	F	S	F	S
F	S	S	S	S
F	F	F	S	F

$\therefore$ (j) gäller.

Deduktion:
$A \vee B \vdash (A \to B) \to B$
BEVIS:

(1) $A \vee B$	P
(2) $A \to B$	HP
(3) $\neg B$	HP

(* Vi antar $\neg B$ för indirekt härledning. Direkt härledning med $(\vee E)$ på (1) är också möjlig. *)

(4) A	1, 3, Disj. Syll.
(5) B	2, 4, $(\to E)$
(6) $\bot$	3, 5, $(\bot I)$
(7) B	3-6, $(\neg E)$
(8) $(A \to B) \to B$	

$(A \to B) \to B \vdash A \vee B$
BEVIS:

(1) $(A \to B) \to B$	P
(2) $\neg(A \vee B)$	HP
(3) $\neg A \wedge \neg B$	2, Ex. 4.8
(4) $\neg A$	3, $(\wedge E)$
(5) $\neg B$	4, $(\wedge E)$
(6) $A \to B$	4, övn 8.3 (e)
(7) B	1, 6, $(\to E)$
(8) $\bot$	5, 7, $(\bot I)$
(9) $A \vee B$	2-8 $(\neg E)$

(k) $A \to B \dashv\vdash A \to (A \to B)$
LÖSNING:
Sanningstabell:

A	B	$A \to B$	$A \to$	$(A \to B)$
S	S	S	S	S
S	F	F	F	F
F	S	S	S	S
F	F	S	S	S

$\therefore$ (k) gäller.

Deduktion:
$A \to B \vdash A \to (A \to B)$
BEVIS:

(1) $A \to B$	P
(2) A	HP
(3) A	HP

(*Vi måste anta A som extra premiss två gånger.*)

(4) B	1, 2, $(\to E)$
(5) $A \to B$	3-4, $(\to I)$
(6) $A \to (A \to B)$	2-5, $(\to I)$

(*Obs: Ett alternativ är att använda övning 8.2 (f).*)

$A \to (A \to B) \vdash A \to B$
BEVIS:

(1) $A \to (A \to B)$	P
(2) A	HP
(3) $A \to B$	1, 2, $(\to E)$
(4) B	2, 3, $(\to E)$
(5) $A \to B$	2-4, $(\to I)$

4-8.7
(a) $\{\neg(A \to B), A \to C, B \vee \neg C\}$ är inkonsistent.
BEVIS:
Sanningtabellmetoden:

A	B	C	$\neg$	$(A \to B)$	$A \to C$	$B \vee$	$\neg C$
S	S	S	F	S	S	S	F
S	S	F	F	S	F	S	S
S	F	S	S	F	S	F	F
S	F	F	S	F	F	S	S
F	S	S	F	S	S	S	F
F	S	F	F	S	S	S	S
F	F	F	F	S	S	F	F
F	F	F	F	S	S	S	S

Det finns ingen rad där $\neg(A \to B)$, $A \to C$, $B \vee \neg C$ alla får S.
$\therefore$ Formelmängden är inkonsistent.

Snabbmetoden:
Vi undersöker om det är möjligt att samtidigt ge S till $\neg(A \to B)$, $A \to C$, $B \vee \neg C$.
$\neg(A \to B), A \to C, B \vee \neg C$
S S F F   S S S   F S F S
F
$\therefore$ Formelmängden är inkonsistent.

Deduktion:
$\neg(A \to B), A \to C, B \vee \neg C \vdash \bot$

BEVIS:

(1) $\neg(A \to B)$	P
(2) $A \to C$	P
(3) $B \vee \neg C$	P
(4) $A \wedge \neg B$	1, övn. 8.3 (i)
(5) A	4, $(\wedge E)$
(6) $\neg B$	4, $(\wedge E)$
(7) C	2, 5, $(\to E)$
(8) $\neg C$	3, 6, Disj.Syll.
(9) $\bot$	7, 8, $(\bot I)$

(b) $\{A \wedge B \wedge \neg C, A \vee B \to A \wedge B, A \wedge \neg B \to A \wedge \neg A\}$ är satslogiskt konsistent.
BEVIS:
Vi använder snabbmetoden:
$A \wedge B \wedge \neg C, A \vee B \to A \wedge B, A \wedge \neg B \to A \wedge \neg A$
S SSS SF S SS S S SS SF FS S S S FS

Värderingen V sådan att V(A) = V(B) = S, V(C) = F
gör alla tre formler sanna samtidigt.

4-8.8
(j) (i) *Formalisering*:
(1) $S \to G$
(2) $H \to S$
(3) $(B \wedge S) \vee H$
(4) G

(ii) *Snabbmetoden*:
$S \to G, H \to S, (B \wedge S) \vee H \models G$
F S F F S F   F F S F   F
F
$\therefore$Slutledningen är korrekt.

(iii) *Deduktion*:

(1) $S \to G$	P
(2) $H \to S$	P
(3) $(B \wedge S) \vee H$	P
(4) $\neg G$	HP
(5) $\neg S$	1, 4, MTT
(6) $\neg H$	2, 5, MTT
(7) $B \wedge S$	3, 6, Disj. Syll.
(8) S	7, $(\wedge E)$
(9) $\bot$	5, 8, $(\bot I)$
(10) G	4-9, $(\neg E)$

(k) (i) *Formalisering*:
(1) $P \to G$
(2) $G \to Ö$

(3) $\neg G \to K \wedge B$
(4) $\neg G \to \neg S$
(5) $\neg Ö \vee (\neg G \wedge S)$

(ii) *Snabbmetoden*:
$P \to G, G \to Ö, \neg G \to K \wedge B, \neg G \to \neg S \models \neg Ö \vee (\neg G \wedge S)$
S S S S S F S S F S S F S F F S F

(iii) *Motexempel*:
V(G) = V(Ö) = S, V(P), V(K), V(B) och V(S) är arbiträra.
∴ Argumentet är felaktigt.

(l) (i) *Formalisering*:
(1) $V \to N$
(2) $\neg V \to T$
(3) $N \to L$
(4) $N \leftrightarrow S$
(5) $L \vee (\neg V \wedge T)$

(ii) *Snabbmetoden*:
$V \to N, \neg V \to T, N \to L, N \leftrightarrow S \models L \vee (\neg V \wedge T)$
F S F SF S S F S F F S F F F SF F S
S

∴ Slutledningen är korrekt.

(iii) *Deduktion*:

(1) $V \to N$	P
(2) $\neg V \to T$	P
(3) $N \to L$	P
(4) $N \leftrightarrow S$	P
(5) $\neg (L \vee (\neg V \wedge T))$	HP
(6) $\neg L \wedge \neg(\neg V \wedge T)$	5, De Morgan
(7) $\neg L$	6, ($\wedge$E)
(8) $\neg N$	3, 7, MTT
(9) $\neg V$	1, 8, MTT
(10) T	2, 9, ($\to$E)
(11) $\neg V \wedge T$	9, 10, ($\wedge$I)
(12) $\neg(\neg V \wedge T)$	6, ($\wedge$I)
(13) $\bot$	11, 12, ($\bot$I)
(14) $L \vee (\neg V \wedge T)$	5-13, ($\neg$E)

4-8.9
(a) *Formalisering*:
(1) $D \wedge L \to B$
(2) $L \to D$
(3) $\neg B$
(4) $\neg L$

(b) *Deduktion*:

(1) $D \wedge L \to B$	P
(5) $L \to D$	P
(6) $\neg B$	P
(7) L	HP
(8) D	2, 4, ($\to$E)
(9) $D \wedge L$	4, 5, ($\wedge$I)
(10) B	1, 6, ($\to$E)
(11) $\bot$	3, 7, ($\bot$I)
(12) $\neg L$	4-8, ($\neg$I)

(*Observera att formalisering och deduktion är möjliga utan en fullständig förståelse av innebörden i satserna.*)

Kapitel 6. Lösningar

6-7.1
(a) $\forall x\,(P(x) \to R(x,c))$
LÖSNING:
'x' är en variabel och därför en term, enligt § 3.10(1).
'c' är en konstant och därför en term, enligt § 3.10(2).
'P(x) och 'R(x,c)' är atomära formler, eligt § 3.12(2).
'(P(x) → R (x,c))' är en formel enligt § 3.15(2)
'∀x (P(x) → R(x,c))' är en formel enligt §3.15(3).

(b) $\exists x \forall y\,(\neg P(y) \vee R(z, f(x)))$
LÖSNING:
'x', 'y', 'z', är variabler och därför termer, enligt § 3.10(1).
'f(x)' är en term enligt § 3.10(3).
'P(y)' och 'R(z, f(x))' är atomära formler, enligt § 3.12(2).
Enligt § 3.15(1) är 'P(y)'och 'R(z, f(x))' då formler.
'¬P(y)' är en formel enligt § 3.15(2).
'(¬P(y) ∨ R(z, F(x)))' är en formel enligt § 3.15(2).
'∀y (¬P(y) ∨ R(z, f(x)))' är en formel enligt § 3.15(3).
'∃x∀y (¬P(y) ∨ R(z, f(x)))' är en formel enligt § 3.15(3).

6-7.2

(a)	$\forall x\,(P(x) \to R\,(x,c))$	sats
(b)	$\forall x\,P(x) \to R(x,c)$	öpen
(c)	$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,c) \wedge P(f(y))))$	sats
(d)	$\forall x\,(P(x) \to \exists x\,R(x,y))$	öpen
(e)	$\forall x\,(P(x) \to \exists x\,R(x,y) \wedge R(x,y))$	öpen formel

6-7.3
(a) Alla logiker är skarpsinniga.
(b) Ingen logiker är skarpsinnig.
(c) Inte alla logiker är skarpsinniga (* eller: Alla är inte skarpsinniga logiker *).

(d) Ingen logiker är skarpsinnig.
(e) Några logiker är inte skarpsinniga.
(f) Några människor är inte skarpsinniga logiker.
(g) Några logiker är skarpsinniga.

6-7.4
(a) Alla problem kan lösas.
Satsen är av formen A (Alla P är Q):
$\forall x\,(P(x) \to L(x))$

(b) Inga problem kan lösas.
Satsen är av formen E (Ingen P är Q):
$\forall x\,(P(x) \to \neg L(x))$
eller:
$\neg \exists x\,(P(x) \wedge L(x))$.

(c) Några problem är lösbara, men inte alla.
Satsen är en konjunktion:
Några problem är lösbara ∧ Inte alla problem är lösbara.
Första konjunktionsledet:
Satsen är av formen I (Några P är Q):
$\exists x\,(P(x) \wedge L(x))$
Andra konjunktionsledet:
Satsen är en negation:
¬ Alla problem är lösbara.
Från (a) får vi formaliseringen:
$\neg \forall x\,(P(x) \to L(x))$
SVAR:
$\exists x\,(P(x) \wedge L(x)) \wedge \neg \forall x\,(P(x) \to L(x))$

(d) Det finns olösbara problem.
Satsen är av formen O (Några P är inte Q):
$\exists x\,(P(x) \wedge \neg L(x))$

6-7.5
(a) Alla har en mor.
LÖSNING:
(1) ∀x x har en mor
(2) 'x har en mor' analyseras:
$\exists y\,M(y,x)$
(3) SVAR:
$\forall x \exists y\,M(y,x)$

(b) Inte alla har barn.
LÖSNING:
(1) Satsen är en negation:
¬ alla har barn.
'alla har barn' är universiell:

$\neg \forall x$ x har barn
(2) x har barn $\Leftrightarrow \exists y\ (M(x,y) \vee F(x,y))$
(3) SVAR:
$\neg\forall x\exists y\ (M(x,y) \vee F(x,y))$

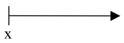
(c) Kalle och Ellinor är syskon.
LÖSNING:
(1) k och e är syskon.
(2) x och y är syskon $\Leftrightarrow x \neq y \wedge$ x och y har gemensamma föräldrar $\Leftrightarrow$
$x \neq y \wedge \exists z\exists w\ (F(z,x) \wedge F(z,y) \wedge M(w,x) \wedge M(w,y)$
(3) SVAR:
$k \neq e \wedge \exists z\exists w\ (F(z,k) \wedge F(z,e) \wedge M(w,k) \wedge M(w,e)$

(d) Kalle är bror till Ellinor
LÖSNING:
(1) k är bror till e
(2) x är bror till y $\Leftrightarrow$ x och y är syskon $\wedge$ x är en pojke $\Leftrightarrow$ (*se (c)*)
$\exists z\exists w\ (F(z,x) \wedge F(z,y) \wedge M(w,x) \wedge M(w,y)) \wedge P(x)$
(3) SVAR:
$\exists z\exists w\ (F(z,k) \wedge F\ (z,e) \wedge M\ (w,k) \wedge M(w,e)) \wedge P(k)$

(e) Fru Johansson är farmor till Ellinor.
LÖSNING:
(1) j är farmor till e
(2) x är farmor till y $\Leftrightarrow$ x är mor till y:s far $\Leftrightarrow \exists z\ (M(x,z) \wedge F(z,y))$
(3) SVAR:
$\exists z\ (M(j,z) \wedge F(z,e))$

(f) Alla fru Johanssons barnbarn är pojkar.
LÖSNING:
(1) Satsen är allkvantifierad:
$\forall x$ (x är barnbarn till fru J. $\rightarrow$ x är en pojke)
(2) x är barnbarn till y $\Leftrightarrow \exists z\ ((M(y,z) \vee F(y,z)) \wedge (M(z,x) \vee F(z,x)))$
(3) SVAR:
$\forall x\ (\exists z\ ((M(j,z) \vee F(j,z)) \wedge (M(z,x) \vee F(z,x))) \rightarrow P(x))$
Eftersom det är klart att fru Johansson är en kvinna och därför inte far till sina barn, är en enklare formalisering följande:
$\forall x\ (\exists z\ (M(j,z) \wedge (M(z,x) \vee F(z,x))) \rightarrow P(x))$

6-7.6
(a) $\forall x\forall y\ (x \neq y \rightarrow T\ (x,y) \vee T\ (y,x)$

(b) 

Det finns en första tidpunkt.
LÖSNING:
(1) $\exists x$ x är en första tidpunkt.

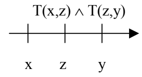
(2) x är en första tidpunkt $\Leftrightarrow$ x är tidigare än alla andra tidpunkter $\Leftrightarrow$
$\forall y\ (x \neq y \rightarrow T(x,y))$
(3) SVAR:
$\exists x\forall y\ (x \neq y \rightarrow T(x,y))$

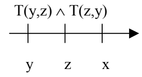
(c) Det finns ingen sista tidpunkt.
LÖSNING:
Formeln
$\forall y\ (x \neq y \rightarrow T(y,x))$
uttrycker att x är an sista tidpunkt.
$\exists x\forall y\ (x \neq y \rightarrow T(y,x))$
uttrycker att det finns en sista tidpunkt.
Negationen av detta utrycker att det inte finns någon sista tidpunkt.
SVAR:
$\neg\exists x\forall y\ (x \neq y \rightarrow T(y,x))$
ALTERNATIV:
$\forall x\exists y\ T(x,y)$
dvs oavsett vilken tidpunkt x vi väljer, så finns det alltid en tidpunkt som är ännu senare.

(d) Det finns inga par av tidpunkter så att båda är tidigare än den andra.
LÖSNING:
Satsen är en negation:
$\neg\exists x\exists y\ (T(x,y) \wedge T(y,x))$

(e) Det finns bara en enda tidpunkt.
LÖSNING:
$\exists x\forall y\ x = y$
dvs det finns exakt ett element i individområdet. (Jfr. Med Exempel 6.4.)

(f) Mellan två olika tidpunkter finns alltid en tredje (tidpunkt).
LÖSNING:
$\forall x\forall y\ (x \neq y \rightarrow \exists z\ ((T(x,z) \wedge (T(z,y)) \vee (T(y,z) \wedge T(z,x))))$
Om $x \neq y$, så $T(x,y)$ eller $T(y,x)$
ger ger
$T(x,z) \wedge T(z,y)$ $T(y,z) \wedge T(z,y)$





Alternativ:
$\forall x\forall y\ (T(x,y) \rightarrow \exists z\ (T(x,z) \wedge T(z,y))$
uttrycker det samma. För om två tidpunkter är olika, så är en av dem tidigare än den andra. Kalla den tidigare x och det senare y.

6-7.7
(a) $\forall x\ (x \neq 0 \rightarrow 0 < x)$
(b) $\neg\exists x\forall y\ (y \neq x \rightarrow y < x)$
(c) $\exists x\exists y\ x \cdot y = x + y$

(d) $\forall x\forall y\ (J(x \cdot y) \rightarrow J(x) \vee J(y))$
(e) $\forall x\ (P(x) \wedge 2 < x \rightarrow U(x))$
(f) $\forall x\ (J(x) \wedge 2 < x \rightarrow \exists y\exists z\ (P(y) \wedge P(z) \wedge x = y + z))$

6-7.8
$2 = 1 + 1$
$U(x) \Leftrightarrow \exists y\ x = 2 \cdot y + 1$
$\Leftrightarrow \exists y\ x = (1 + 1)y + 1$

$J(x) \Leftrightarrow \exists y\ x = 2 \cdot y$
$\Leftrightarrow \exists y\ x = (1 + 1) \cdot y$

$P(x) \Leftrightarrow x > 1 \wedge$ x kan inte skrivas som en produkt av två tal mellan 1 och x
$\Leftrightarrow x > 1 \wedge \neg\exists y\exists z\ (1 < y \wedge y < x \wedge 1 < z \wedge z < x \wedge x = y \cdot z)$

6-7.9
(a) $\forall x\ (M(x) \rightarrow \neg H(x))$
eller
$\neg\exists x\ (M(x) \wedge H(x))$

(b) Varje hund äges av en människa.
LÖSNING:
$\forall x$ ($H(x) \rightarrow$ x äges av en människa) $\Leftrightarrow \forall x\ (H(x) \rightarrow \exists y\ (M(y) \wedge Ä(y,x)))$
$\therefore \forall x\ (H(x) \rightarrow \exists y\ (M(y) \wedge Ä(y,x)))$

(c) Några människor äger en hund, men ingen hund äger en människa.
LÖSNING:
'men' är huvudoperator och symboliseras med '$\wedge$'
1. konjunktionsledet:
$\exists x\ (M(x) \wedge \exists y\ (H(y) \wedge Ä(x,y)))$
2. konjunktionsledet:
$\forall x$ ($H(x) \rightarrow \neg$ x äger en människa) $\Leftrightarrow \forall x\ (H(x) \rightarrow \neg\exists y\ (M(y) \wedge Ä(x,y)))$
eller $\neg\exists x\ (H(x) \wedge \exists y\ (M(y) \wedge Ä(x,y)))$
$\therefore \exists x\ (M(x) \wedge \exists y\ (H(y) \wedge Ä(x,y))) \wedge \forall x\ (H(x) \rightarrow \neg\exists y\ (M(y) \wedge Ä(x,y)))$

eller
$\exists x\ (M(x) \wedge\exists y\ (H(y) \wedge Ä\ (x,y))) \wedge \neg\exists x\ (H(x) \wedge \exists y\ (M(y) \wedge Ä(x,y)))$

(d) Varje hundägare är vän med en annan hundägare.
LÖSNING:
$\forall x$ (x är hundägare $\rightarrow$ x är vän med en annan hundägare)
$\Leftrightarrow \forall x\ (\exists y\ (H(y) \wedge Ä(x,y)) \rightarrow \exists y\ (\exists z\ (H(z) \wedge Ä(y,z)) \wedge y \neq x \wedge V(x,y) \wedge V(y,x)))$
(e) Några människor har bara en enda vän, en hund.
LÖSNING:
$\exists x$ ($M(x) \wedge$ x har en och bara en vän, och denna är en hund)
$\Leftrightarrow \exists x\ (M(x) \wedge \exists y\ (V(y,x) \wedge \forall z\ (V(z,x) \rightarrow z = y) \wedge H(y)))$

6-7.10
(a) Varje polis arresterar någon.
LÖSNING:
$\forall x$ ($P(x) \rightarrow$ x arresterar någon)
$\Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ A(x,y))$
(b) En anmälan mot någon är ett nödvändigt villkor för att denna ska bli straffad.
LÖSNING:
$\forall x\ (\neg\exists y\ M(y,x) \rightarrow \neg S(x))$
eller
$\forall x\ (S(x) \rightarrow \exists y\ M(y,x))$
(*Märk att 'någon'här *inte* är en existenskvantifikator! 'Någon' fungerar som en fri variabel vars andra förekomst är 'denna'. Variabeln måste sedan bindas av en *all*kvantifikator.*)

(c) Om någon anmäler en annan, så blir den senare arresterad av polisen.
LÖSNING:
$\forall x\ (\exists y\ (y \neq x \wedge M(y,x)) \rightarrow \exists z\ (P(z) \wedge A(z,x)))$
(*Här fungerar 'någon' som en existentiell kvantifikator eftersom det inte finns någon andra referens till denna någon.*)

(d) Den som anmäler sig själv, blir inte straffad. Även den, som inte blir anmäld, blir inte straffad.
LÖSNING:
$\forall x\ (M(x,x) \rightarrow \neg S(x)) \wedge \forall x\ (\neg\exists y\ M(y,x) \rightarrow \neg S(x))$

6-7.11
(a) Varje programmerare uppskattar någon filosof.
LÖSNING:
$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (F(y) \wedge U(x,y)))$

(b) Varje filosof uppskattar någon annan filosof.
LÖSNING:
$\forall x\ (F(x) \rightarrow \exists y\ (F(y) \wedge x \neq y \wedge U(x,y)))$

(c) Det finns programmerare som inte uppskattar några filosofer.
LÖSNING:
$\exists x\ (P(x) \wedge \neg\exists y\ (F(y) \wedge U(x,y)))$
eller
$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (F(y) \rightarrow \neg U(x,y)))$

(d) Det finns en programmerare som är uppskattad av alla filosofer.
LÖSNING:
$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (F(y) \rightarrow U(y,x)))$

(e) Endast filosofer uppskattar filosofer.
LÖSNING:
$\forall x$ (x uppskattar filosofer $\rightarrow F(x)$)
$\Leftrightarrow \forall x\ (\exists y\ (F(y) \wedge U(x,y)) \rightarrow F(x))$
Alternativ:

$\forall x \forall y\ (F(x) \wedge U(y,x) \rightarrow F(y))$
(*De två formaliseringarna kan visas vara logiskt ekvivalenta.*)

(f) Filosofer uppskattar endast filosofer.
LÖSNING:
$\forall x\ (F(x) \rightarrow$ x uppskattar endast filosofer)
$\Leftrightarrow \forall x\ (F(x) \rightarrow \forall y\ (U(x,y) \rightarrow F(y)))$
Alternativ:
$\forall x \forall y\ (F(x) \wedge U(x,y) \rightarrow F(y))$

(g) Varje filosof uppskattar alla sådana programmerare, som endast uppskattar filosofer.
LÖSNING:
$\forall x\ (F(x) \rightarrow$ x uppskattar alla programerare som endast uppskattar filosofer)
$\Leftrightarrow \forall x\ (F(x) \rightarrow \forall y\ (P(y) \wedge$ y uppskattar endast filosofer $\rightarrow U(x,y)))$
$\Leftrightarrow \forall x\ (F(x) \rightarrow \forall y\ (P(y) \wedge \forall z\ (U(y,z) \rightarrow F(z)) \rightarrow U(x,y)$
$\therefore\ \forall x\ [F(x) \rightarrow \forall y\ (P(y) \wedge \forall z\ (U(y,z) \rightarrow F(z)) \rightarrow U(x,y))]$

6-7.12
Predikat:
P(x): x är att päron
Vi följer mallarna i Exempel 6.4.
(a) $\neg\exists x\ P(x)$
(b) $\exists x\ P(x)$
(c) $\forall x \forall y\ (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
(d) $\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow x = y)$
(e) $\exists x \exists y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$
(f) $\forall x \forall y \forall z\ (P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$
(g) $\exists x \exists y\ (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\ (P(z) \rightarrow z = x \vee z = y))$

6-7.13
Vi följer mallarna i exempel 6.4 men ersätter ‘Ä(x)’ med ‘$K(x) \wedge D(x,a)$’
(a) $\neg\exists x\ (K(x) \wedge D(x,a))$
(b) $\exists x\ (K(x) \wedge D(x,a))$
(c) $\forall x \forall y\ (K(x) \wedge D(x,a) \wedge K(y) \wedge D(y,a) \rightarrow x = y))$
(d) $\exists x\ (K(x) \wedge D(x,a) \wedge \forall y\ (K(y) \wedge D(y,a) \rightarrow x = y))$
(e) $\exists x \exists y\ (K(x) \wedge D(x,a) \wedge K(y) \wedge D(y,a) \wedge x \neq y)$
(f) $\forall x \forall y \forall z\ (K(x) \wedge D(x,a) \wedge K(y) \wedge D(y,a) \wedge K(z) \wedge D(z,a) \rightarrow$
$x = y \vee x = z \vee y = z)$
(g) $\exists x \exists y\ (K(x) \wedge D(x,a) \wedge K(y) \wedge D(y,a) \wedge x \neq y \wedge \forall z\ (K(z) \wedge D(z,a) \rightarrow$
$z = x \vee z = y))$

6-7.14
(a) $\exists x \forall y\ x = y$
(b) $\exists x \exists y\ (x \neq y \wedge \forall z\ (z = x \vee z = y)$

6-7.15
(a) Den nuvarande kungen av Spanien är demokratiskt sinnad.
LÖSNING:
K(x); x är nuvarande kung av Spanien
D(x): x är demokratiskt sinnad
$\exists(x)\ (K(x) \wedge \forall y\ (K(y) \rightarrow y = x) \wedge D(x))$

(b) Riksdagsmannen är f d stats råd.
LÖSNING:
R(x): x är riksdagsman
S(x): x är f d stats råd
$\exists x(R(x) \wedge \forall y\ (R(y) \rightarrow y = x) \wedge S(x))$

(c) Den höjdhoppare, som klarar 2,50 m, existerar inte.
LÖSNING:
Det är naturligast att tolka (c) som en sats av formen E:
Det finns ingen höjdhoppare som klarar 2,50 m.
H(x): x är höjdhoppare
K(x): x klarar 2,50 m.
$\neg\exists x\ (H(x) \wedge K(x))$
Vi kan försöka uppfatta ‘den höjdhoppare som klarar 2,50’ som en bestämd beskrivning. Då får vi formaliseringen
$\neg\exists x\ (H(x) \wedge K(x) \wedge \forall y\ (H(y) \wedge K(y) \rightarrow y = x))$
d v s det finns inte en unik höjdhoppare som klarar 2,50. Men den senare formaliseringen är sann, om ingen höjdhoppare klarar 2,50 eller om minst två klarar 2,50 m. Det är knappast meningen med den ursprungliga satsen.

(d) Antalet supermakter är två.
LÖSNING:
En enkel tolkning är följande:
Det finns exakt två supermakter.
S(x): x är en supermakt
$\exists x \exists y\ (S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\ (S(z) \rightarrow z = x \vee z = y))$
Det är möjligt att ge en formalisering av satsen (d) där ‘antalet supermakter’ behandlas som en bestämd beskrivning. Men det kräver mängdteori utöver Kapitel 7 i *Grundläggande logik*.

(e) Den skäggiga damen på cirkus är en man.
LÖSNING:
S(x): x uppträder som skäggig dam på cirkus
M(x): x är en man
$\exists x\ (S(x) \wedge \forall y\ (S(y) \rightarrow y = x) \wedge M(x))$
Det vore kanske frestande att försöka med en alternativ analys av ‘den skäggiga damen på cirkus’:
Ä(x): x är skäggig
D(x): x är en dam
C(x): x uppträder på cirkus
$\exists x\ (Ä(x) \wedge D(x) \wedge C(x) \wedge \forall y\ (Ä(y) \wedge D(y) \wedge C(y) \rightarrow y = x) \wedge M(x))$

Men det leder till att man om artisten ifråga predicerar två oförenliga egenskaper D(x) och M(x). Den ursprungliga satsen är inte menad att ha sådana konsekvenser.

(f) ‘Den som anmäler sig själv’ är i satsen 7.10 (d) inte en bestämd beskrivning. ‘Den’ och ‘som’ kan här uppfattas som individvariabler. Satsen blir därför universell, snarare än en existentiell sats som uttrycker en bestämd beskrivning. (Jfr. med 6-7.13 (c)).

6-7.16
Symboler:
B(x): x is a boy
G(x): x is a girl
A(x): x is born into the world alive
L(x): x is a liberal
C(x): x is a conservative
T(x): x is little
$\forall x\ ((B(x) \vee G(x)) \wedge A(x) \rightarrow (T(x) \wedge L(x)) \vee (T(x) \wedge C(x)))$

6-7.17
(a) (1) Alla har en far
(2) Någon är far till alla.
LÖSNING:
(1) $\forall y \exists x\ F(x,y)$
(2) $\exists x \forall y\ F(x,y)$

(b) Meningen med satsen
I London blir en person överkörd varje halvtimme
är: $\forall x$ (halvtimme) $\exists y$ (person) (y blir överkörd vid x)
d v s c:a 48 personer blir överkörda i London varje dygn.
Lyssnaren uppfattar emellertid satsen som:
$\exists y$ (person) $\forall x$ (halvtimme) (y blir överkörd vid x)
d v s en och samma person blir överkörd c:a 48 gånger per dygn.
Lyssnaren har kastat om ordningen mellan kvantifikatorerna.

Kapitel 7: Lösningar till övningarna på s 168-212

ANMÄRKNING: Vi behandlar först de övningar som finns insprängda i texten i avsnitt 7-1, 7-3, 7-5 och 7-7.

7-3 Mängder

7-1.6
{1, 2, 2, 3} = {1, 2, 3} = {3, 1, 2}
d v s A = B = C
{{1, 2}, {2, 3}} = {{1, 2}, {3, 2}}
d v s E = F

7-1.12
$\varnothing \neq \{\varnothing\}$ därför att $\varnothing$ saknar element emedan $\{\varnothing\}$ har ett element, nämligen $\varnothing$. Av extensionalitetsprincipen följer $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

7-1.21
P ({1, 2, 3}) har följande element:
$\varnothing$; {1}; {2}; {3}; {1, 2}; {1, 3}; {2, 3}; {1, 2, 3}.

7-1.30
(1) Mängden av alla människor som dricker eller röker.
(2) Alla människor som dricker och röker.
(3) Alla som dricker men inte röker.
(4) Alla som röker men inte dricker.
(5) Alla som inte dricker.
(6) Alla som inte röker.
(7) {1, 2, 3, 5, 7, 9}
(8) {3, 5, 7}
(9) {2}
(10) {1, 9}
(11) {0, 2, 4, 6, 8}
(12) $\underline{N}$ = {0, 1, 2, …}
(13) $\varnothing$
(14) $\{x \in \underline{N} \mid x \text{ jämt}\}$
(15) $\{x \in \underline{N} \mid x \text{ udda}\}$
(16) {Olle, Pelle, Nisse, Kalle} = V
(17) {Olle, Nisse}
(18) {Pelle}
(19) {Kalle, Nisse}

7-1.32
(MA 1) Negationenen av en tautologi är en kontradiktion, t ex
$\neg\ (A \vee \neg A) \Leftrightarrow A \wedge \neg A$

(MA 1') Negationen av en kontradiktion är en tautologi, t ex
$\neg(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow A \vee \neg A$
(MA 2) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ (SE 1)
(MA 3) $A \vee A \Leftrightarrow A$
(MA 3') $A \wedge A \Leftrightarrow A$
(*Vi låter T representera en godtycklig tautologi och $\perp$ representera en godtycklig kontradiktion.*)
(MA 4) $A \vee T \Leftrightarrow T$
(MA 4') $A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$
(MA 5) $A \vee \perp \Leftrightarrow A$
(MA 5') $A \wedge T \Leftrightarrow A$
(MA 6) $A \vee \neg A \Leftrightarrow T$, d v s $\models A \vee \neg A$ (T 3)
(MA 6') $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$, d v s $\models \neg(A \wedge \neg A)$ (T 2)
(MA 7) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (SE 3)
(MA 8) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (SE 5)
(MA 8') $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (SE 4)
(MA 9) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (SE 7)
(MA 9') $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (SE 6)
(MA 10) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (SE 11)
(MA 10') $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (SE 10)
(MA 11) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
(MA 11') $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

7-1.33
Vi visar ett urval:
(MA 3): $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$ (*eftersom $A \vee A \Leftrightarrow A$*)

(MA 6): $x \in A \cup -A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in -A \Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in A \Leftrightarrow x \in V$
(*eftersom $x \in A \vee \neg x \in A$) är tautolog*)

(MA 7'): $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$ (eftersom $\wedge$ är kommutativ, d v s $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$) $\Leftrightarrow x \in B \cap A$
$\therefore A \cap B = B \cap A$ enligt extensionalitetsprincipen

(MA 8): $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$ (*$\vee$ är associativ*) $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

(MA 9'): $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$ (*distributiv lag för satslogiken (SE 6)*) $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(MA 10): $x \in -(A \cup B) \Leftrightarrow \neg\, x \in A \cup B \Leftrightarrow \neg\,(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow$ (*De Morgans lag (SE 11)*) $\neg\, x \in A \wedge \neg\, x \in B \Leftrightarrow x \in -A \wedge x \in -B \Leftrightarrow x \in -A \cap -B$

(MA 12): $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg\, x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in -B \Leftrightarrow x \in A \cap -B$

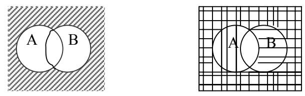
7-1.35
Som exempel visar vi (MA 5'), (MA 10) och (MA 12).

(MA 5'):

VL HL

VL: A är streckad vågrät. V är streckad lodrät. $A \cap V$ är streckad både vågrät och lodrät.
HL: A är streckad vågrät. Vi ser att $A \cap V = A$.

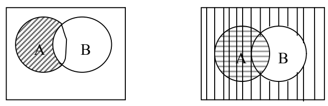
(MA 10):



VL HL

VL: $-(A \cup B)$ är streckad snett.
HL: $-A$ är streckad vågrät. $-B$ är streckad lodrät. $-A \cap -B$ är streckad vågrät och lodrät.
Vi ser att $-(A \cup B) = -A \cap -B$.

(MA 12):



VL HL

VL: $A - B$ är streckad snett.
HL: A är streckad vågrät; $-B$ är streckad lodrät. $A \cap -B$ är streckad vågrät och lodrät.
Vi ser att $A - B = A \cap -B$.

7-3 Relationer

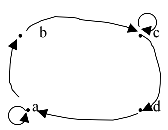
7-3.5
Visa
$(x,y,z) = (u,v,w) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v \wedge z = w$
LÖSNING:
$(x,y,z) = (u,v,w) \Leftrightarrow ((x,y),z) = ((u,v), w)$ (*Definition 3.4*)
$\Leftrightarrow (x,y) = (u,v) \wedge z = w$ (*enligt § 3.1*)
$\Leftrightarrow x = u \wedge y = v \wedge z = w$ (*enligt § 3.1*)

7-3.9
$K \times M$ har elementen
(Ann, Bo); (Ann, Ola); (Ann, Per);
(Eva, Bo); (Eva, Ola); (Eva, Per);
(Ida, Bo); (Ida, Ola); (Ida, Per).

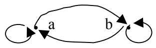
$K^2 = K \times K$ har elementen
(Ann, Ann); (Ann, Eva); (Ann, Ida);
(Eva, Ann); (Eva, Eva); (Eva, Ida);
(Ida, Ann); (Ida, Eva); (Ida, Ida).

7-3.18
Allrelationen = $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
Identitetsrelationen = $I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
Tomma relationen = $\varnothing$

7-3.21
(a)



(b)



(c)

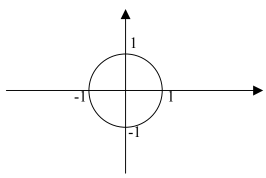
7-5 Funktioner

7-5.2
(a) R_1 är en funktion

(b) R_2 är inte en funktion. Vi har $(1,1) \in R_2$, $(1,2) \in R_2$, men $1 \neq 2$. Av Definition 5.1 följer att R_2 inte är en funktion.

(c) R_3 är en funktion. Antag $(x, y_1) \in R_3$ och $(x, y_2) \in R_3$. Då $y_1 = 2x + 1$ och $y_2 = 2x + 1$. Härav följer omedelbart $y_1 = y_2$.

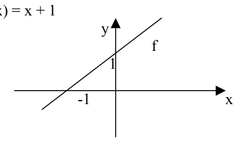
(d) R_4 är inte en funktion. R_4:s graf är



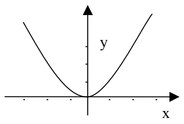
Vi ser att $(0,1) \in R_4$ och $(0, -1) \in R_4$ medan $1 \neq -1$. Av Definition 5.1 följer att R_4 inte är en funktion.

7-5.6
Enligt definitionen i § 5.4 har vi
$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$
Enligt Definition 3.23
$R_f = \{y \mid \exists x\, (x,y) \in f\}$
Då
$y \in R_f \Leftrightarrow \exists x\, (x,y) \in f$ (*Def. 3.23*)
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in A \wedge (x,y) \in f)$ (*Def. 5.1*)
$\Leftrightarrow \exists x\, (x \in A \wedge y = f(x))$ (*Def. 5.1*)
$\Leftrightarrow y \in f[A]$ (*Def. 5.4(3)*)

7-5.7
(a) $f(x) = x + 1$



(b) $f(x) = x^2$



7-5.11

(a) / är inte en operation i $\underline{Z}$ därför att
(1) Division med 0 inte är definierad t ex är 1/0 inte definierad.
(2) $\underline{Z}$ är inte sluten under / , t ex är 1, 2 $\in \underline{Z}$ men ½ $\notin \underline{Z}$.

(b) Division är en operation i $\underline{Q}_+$. Låt $p/q \in \underline{Q}_+$ och $r/s \in \underline{Q}_+$. Då är $(p/q)/(r/s) = (ps)/(qr)$ definierad och $(ps)/(qr) \in \underline{Q}_+$.

(c) Division är inte en operation i Q därför att
Division med 0, t ex 1/0, inte är definierad.

7-7 Speciella relationer och funktioner

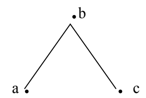
Viktigast i Avsnitt 7 är § 7.2, § 7.22-7.23, § 7.25, § 7.28.

7-7.9
R är en ekvivalensrelation
BEVIS:
Vi ska visa R reflexiv i A, symmetrisk och transitiv.
Reflexivitet: Låt $x \in A$. Enligt (3) finns i sådan att $x \in A_i$. Då $x \in A_i \wedge x \in A_i$. Härav följer $(x,x) \in R$.
Symmetri: Antag $(x,y) \in R$. Då
$x \in A_i \wedge y \in A_i$ för något i
$\Rightarrow$ $y \in A_i \wedge x \in A_i$
$\Rightarrow$ $(y,x) \in R$
Transitivitet: Antag $(x,y) \in R$ och $(y,z) \in R$. Då finns i och j sådana att
$x \in A_i \wedge y \in A_i$ (α)
$y \in A_j \wedge z \in A_j$ (β)
Då gäller alltså
$y \in A_i \wedge y \in A_j$
Av villkoret (3) följer $A_i = A_j$. Från (α) och (β) följer nu
$(x \in A_i \wedge z \in A_i)$
d v s $(x,z) \in R$

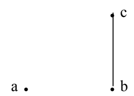
7-7.10
Enligt Anmärkning 7.10 får vi
$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2)$
$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$

7-7.19

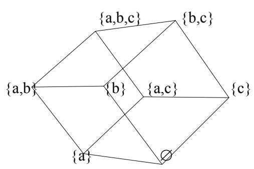
(a)



(b)



(c)



7-7.24

(a) R är reflexiv
R är symmetrisk
R är transitiv (* testa alla möjligheter *)
R är varken irreflexiv, antysymmetrisk, asymmetrisk, sammanhängande eller starkt sammanhängande.

(b) S är ej reflexiv
S är ej irreflexiv
S är ej symmetrisk
S är antisymmetrisk
S är ej asymmetrisk
S är ej transitiv (t ex $(a,b), (b,c) \in S$ men $(a,c) \notin S$)
S är sammanhängande
S är ej starkt sammanhängande.

7-7.29

(a) * är ej idempotent
* är kommutativ
* är inte associativ, t ex $(a * a) * b = c \neq b = a * (a * b)$

(b)

$\wedge$	S	F
S	S	F
F	F	F

$\wedge$: idempotent, kommutativ, associativ

$\vee$	S	F
S	S	S
F	F	F

$\vee$: idempotent, kommutativ, associativ

$\rightarrow$	S	F
S	S	F
F	S	S

$\rightarrow$: ej idempotent, ej kommutativ, ej associativ

$\leftrightarrow$	S	F
S	S	F
F	F	S

$\leftrightarrow$: ej idempotent, kommutativ, associativ
(*jfr. (SE 29)*)

7-2 Övningar

7-2.1

(a) $A \in B, B \in C \Rightarrow A \in C$
LÖSNING:
Gäller inte.
Motexempel: Låt
$A = \varnothing, B = \{\varnothing\}, C = \{\{\varnothing\}\}$
Då
$A \in B, B \in C, A \notin C$

(b) $A = B, B \in C \Rightarrow A \in C$
LÖSNING:
Gäller.
Antag $A = B$ och $B \in C$. Eftersom A och B betecknar samma mängd och B tillhör C, så gör även A det. D v s $A \in C$.

(c) $A \in B, B = C \Rightarrow A \in C$
LÖSNING:
Antag
(1) $A \in B$
(2) $B = C$
Enligt Extensionalitetsprincipen 7-1.2 gäller
(3) $B = C \Leftrightarrow \forall x\,(x \in B \leftrightarrow x \in C)$
Från (2) och (3) följer
(4) $\forall x\,(x \in B \leftrightarrow x \in C)$
Låt i (4) $x = A$:
(5) $A \in B \leftrightarrow A \in C$
(1) + (5) implicerar
(6) $A \in C$
D v s *(c) gäller*

(d) $A \subseteq B, B \in C \Rightarrow A \in C$
LÖSNING:
Gäller inte.
Motexempel: Låt
$A = \varnothing, B = \{\varnothing\}, C = \{\{\varnothing\}\}$
Eftersom $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$, så
(1) $A \subseteq B$
$\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ ger
(2) $B \in C$
Men eftersom $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$, så
(3) $A \notin C$

(e) $A \in B, B \subseteq C \Rightarrow A \in B$
LÖSNING:
Gäller.
Enligt Definition 7-1.14 är innebörden av $B \subseteq C$ att varje element i B också är element i C. Härav följer (e) omedelbart. Vi ger nu ett mer formellt bevis.

Antag
(1) $A \in B$
(2) $B \subseteq C$
Av Definition 7-1.14 får vi
(3) $B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in C)$
(2) + (3) ger
(4) $\forall x\,(x \in B \rightarrow x \in C)$
Låt i (4) $x = A$:
(5) $A \in B \rightarrow A \in C$
(1) + (5) implicerar
(6) $A \in C$

(f) $\exists A \exists B \exists C\,(A \in B \wedge B \in C \wedge A \in C)$
LÖSNING:
Gäller.
Låt
$A = \varnothing, B = \{\varnothing\}, C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

7-2.2

Ge exempel på mängder M_i sådana att

$\forall A\,(A \in M_i \rightarrow A \subseteq M_i)$

LÖSNING:
Låt

$M_1 = \varnothing$
$M_2 = \{\varnothing\}$

Då gäller

$\forall A\,(A \in M_1 \rightarrow A \subseteq M_1)$
$\forall A\,(A \in M_2 \rightarrow A \subseteq M_2)$

(*Använd Definition 7-1.14 eller använd Lemma 7-1.16 (1).*)
Vi definierar nu en oändlig mängd M_3 som satisfierar det givna villkoret. Definiera induktivt

$0 = \varnothing$
$n + 1 = n \cup \{n\}$

Då är

$0 = \varnothing$
$1 = \{\varnothing\} = \{0\}$
$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$
etc.

Låt

$M_3 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

vara den mängd som innehåller just de definierade mängderna 0, 1, 2, … . Vi visar nu med induktion över n att varje $n \subseteq M_3$.
Induktionsbas $n = 0$: Om $n = 0 = \varnothing$, så följer $n \subseteq M_3$ av lemma 7-1.16 (1).
Induktionssteg: Antag $n \subseteq M_3$. Vi ska visa $n + 1 \subseteq M_3$, d v s
(1) $\forall x\,(x \in n + 1 \rightarrow x \in M_3)$

Antag $x \in n + 1 = n \cup \{n\}$. Då
(i) $x \in n$ eller
(ii) $x = n$.
Om $x \in n$, så $x \in M_3$ eftersom $n \subseteq M_3$ enligt induktionshypotesen.
Om $x = n$, så $x \in M_3$ enligt definitionen av M_3. Således får vi i båda fallen (i) och (ii) att $x \in M_3$. Alltså är villkoret (1) uppfyllt, d v s $n + 1 \subseteq M_3$.
Vi kan därför induktivt konkludera $n \subseteq M_3$ för varje n.
Därför

$\forall A\,(A \in M_3 \rightarrow A \subseteq M_3)$

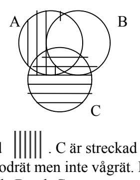
7-2.3

(a) $(A - B) - B = A - B$
BEVIS:
Vi visar att $(A - B) - B$ och $A - B$ har samma element och använder extensionalitetsprincipen 7-1.2.

$x \in (A - B) - B$	$\Leftrightarrow x \in A - B \wedge x \notin B$	(*Def. 7-1.26*)
	$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin B$	(*Def. 7-1.26*)
	$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$	(*satslogik*)
	$\Leftrightarrow x \in A - B$	

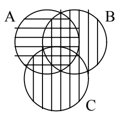
(b) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
BEVIS:
Ett tillvägagångsätt är att använda definitionerna av ”–”- och ”∪”-operationerna och gå fram som i beviset för (a). En annan möjlighet är att rita Venn-diagram. Det gör vi.

VL:



A – B är streckad . C är streckad . $(A - B) - C$ är den del av A som är streckad lodrät men inte vågrät. D v s $(A - B) - C$ är den del av A som ligger utanför både B och C.

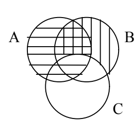
HL:



A är streckad . $B \cup C$ är streckad . $A - (B \cup C)$ är den del av A som är streckad vågrät men inte lodrät. D v s $A - (B \cup C)$ är den del av A som ligger utanför både B och C.

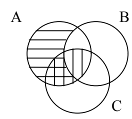
Vi ser att VL = HL.

(c) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
BEVIS:
VL:



A är streckad vågrät. $B - C$ är streckad lodrät. $A - (B - C)$ är den del av A som är streckad vågrät men inte lodrät.

HL:



$A - B$ är streckad vågrät. $A \cap C$ är streckad lodrät. $(A - B) \cup (A \cap C)$ är streckad vågrät eller lodrät.

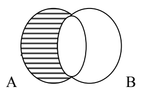
Vi ser att VL = HL.

(d) $A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$
BEVIS:
Genom att använda Definition 7-1.23 av $\cap$ får vi omedelbart
(1) $A \cap B \subseteq A$
(2) $A \cap B \subseteq B$
Genom Definition 7-1.22 av $\cup$ får vi
(3) $A \subseteq A \cup B$
(4) $B \subseteq A \cup B$
(1) – (4) ger tillsamman (d).

(e) $A \subseteq B \Leftrightarrow -B \subseteq -A$
BEVIS:

$A \subseteq B$	$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$	(*Def. 7-1.14*)
	$\Leftrightarrow \forall x\,(x \notin B \rightarrow x \notin A)$	(*Kontraposition, (SE 14)*)
	$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in -B \rightarrow x \in -A)$	(*Def. 7-1.24*)
	$\Leftrightarrow -B \subseteq -A$	(*Def. 7-1.14*)

(f) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap -B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = A$
BEVIS:



Markerad mängd är tom.

$A \subseteq B$ omm den del av A som ligger utanför B är tom, d v s $A - B = \varnothing$ omm
$A \cap -B = \varnothing$ enligt (MA 12). Alltså
(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap -B = \varnothing$
Vi bevisar
(2) $A \cap -B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = A$
Antag
(3) $A \cap -B = \varnothing$
Tag unionen av VL med $A \cap B$ och av HL med $A \cap B$:
(4) $(A \cap B) \cup (A \cap -B) = (A \cap B) \cup \varnothing$
Vi beräknar VL i (4):
(5) $(A \cap B) \cup (A \cap -B) = A \cap (B \cup -B)$ (*(MA 9')*)
$= A \cap V$ (*(MA 6)*)
$= A$ (*(MA 5')*)
För HL i (4) gäller
(6) $(A \cap B) \cup \varnothing = A \cap B$ (*(MA 5)*)
(4) + (5) + (6) $\Rightarrow$
(7) $A \cap B = A$
vilket bevisar (2). Nu bevisar vi
(8) $A \cap B = A \Rightarrow A \cap -B = \varnothing$
Antag
(9) $A \cap B = A$
Snitta på båda sidorna i (9) med $-B$:
(10) $(A \cap B) \cap -B = A \cap -B$
Vi beräknar VL i (10):
(11) $(A \cap B) \cap -B = A \cap (B \cap -B)$ (*(MA 8')*)
$= A \cap \varnothing$ (*(MA 6')*)
$= \varnothing$ (*(MA 4')*)
(10) och (11) ger
(12) $A \cap -B = \varnothing$
(2) och (8) implicerar
(13) $A \cap -B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = A$

(g) $A \subseteq B \Leftrightarrow -A \cup B = V \Leftrightarrow A \cup B = B$
BEVIS:
Kan bevisas analogt med (f). Alternativ kan man utnyttja resultatet i (f):
(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap -B = \varnothing$ (*Övning (f)*)
$\Leftrightarrow -(A \cap -B) = -\varnothing$ (*(MA 2)*)
$\Leftrightarrow -A \cup --B = V$ (*(MA 10'), (MA 1')*)
$\Leftrightarrow -A \cup B = V$ (*(MA 2)*)

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A = A \cap B$ (*Övning (f)*)
$\Leftrightarrow A \cup B = (A \cap B) \cup B$
$= B \cup (A \cap B)$ (*(MA 7)*)
$= B \cup (B \cap A)$ (*(MA 7')*)
$= B$ (*(MA 11)*)

(h) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq -B \Leftrightarrow B \subseteq -A$
BEVIS:
Använd (f) och (e).

(i) $A \cup B = V \Leftrightarrow -A \subseteq B \Leftrightarrow -B \subseteq A$
BEVIS:
Använd (g) och (e) eller använd (h).

(j) $A \cup B = V, A \cap B = \varnothing \Rightarrow B = -A$
BEVIS:
Antag
(1) $A \cup B = V, A \cap B = \varnothing$
Övningarna (h) och (i) ger
(2) $B \subseteq -A$
(3) $-A \subseteq B$
d v s
(4) $B = -A$

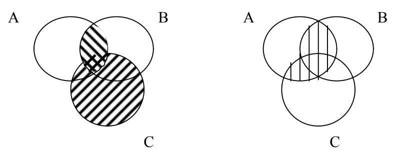
(k) $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$
BEVIS:
Använd definitionerna av $\subset$ och $\subseteq$.

(l) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
BEVIS:
Antag
(1) $A \subset B$
(2) $B \subset C$
Lemma 7-1.16 ger
(3) $A \subseteq B$
(4) $B \subseteq C$
Då enligt lemma 7-1.16 (4)
(5) $A \subseteq C$
Antag
(6) $A = C$
(3) + (4) + (6) implicerar
(7) $A = B = C$
som motsäger (1) och (2). Alltså
(8) $A \neq C$
som tillsamman med (5) ger
(9) $A \subset C$

(m) $A \subset B \Rightarrow \neg (B \subset A)$
BEVIS:

Vi antar att (m) är falsk och härleder en motsägelse. Antag
(1) $A \subset B$
(2) $B \subset A$
Använd Övning (l) på (1) och (2):
(3) $A \subset A$
som implicerar
(4) $A \neq A$
vilket är omöjligt.

(n) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$
BEVIS:
Vi använder Venn-diagram. Av figuren ser vi att
$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C - A = \varnothing$
$\Leftrightarrow C \subseteq A$



$(A \cap B) \cup C$ $A \cap (B \cup C)$

7-2.4
(a) Vi skriver
H = krona
T = klave

1: HHH	2: HHT
3: HTH	4: THH
5: HTT	6: THT
7: TTH	8: TTT

(b) Det blir 4 celler i partitionen:
3H: {HHH}
2H: {HHT, HTH, THH}
1H: {HTT, THT, TTH}
0H: {TTT}
Partitionen blir
{{HHH}, {HHT, HTH, THH}, {HTT, THT, TTH}, {TTT}}

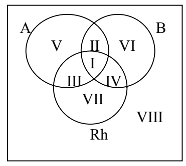
7-2.5
Låt A = {a, b, c}. Konstruera alla partitioner av A.
LÖSNING:
En partition måste innehålla en, två eller tre celler.

***P* *innehåller en cell*:**
$\boldsymbol{P}_1$ = {{a, b, c}}

P innehåller två celler:
$\boldsymbol{P}_2$ = {{a, b}, {c}}
$\boldsymbol{P}_3$ = {{a, c}, {b}}
$\boldsymbol{P}_4$ = {{a}, {b, c}}

P innehåller tre celler:
$\boldsymbol{P}_5$ = {{a}, {b}, {c}}

7-2.6



I: AB +	II: AB –
III: A +	IV: B +
V: A –	VI: B –
VII: 0 +	VIII: 0 –

7-2.7
(a) Abstraktionsprincipen implicerar att V är en mängd.
BEVIS:
Eftersom varje mängd är identisk med sig själv, satisfierar V
$V = \{x \mid x = x\}$
Enligt Abstraktionsprincipen är V en mängd.

(b) Antag att
$A = \{x \mid \forall y\, (x \notin y \vee y \notin x)\}$
är en mängd. Då följer en kontradiktion.
BEVIS:
Om A är en mängd kan vi fråga om $A \in A$ eller inte. Antag
(1) $A \in A$
Enligt Abstraktionsprincipen följer att A satisfierar det villkor som definierar A:
(2) $\forall y\, (A \notin y \vee y \notin A)$
Låt i (2) y = A:

(3) $A \notin A \vee A \notin A$
Vilket enligt satslogiken är ekvivalent med
(4) $A \notin A$
som motsäger (1). Altså måste gälla
(5) $A \notin A$
Men även $A \notin A$ implicerar en motsägelse: (5) och definitionen av A ger
(6) $\neg\forall y\,(A \notin y \vee y \notin A)$
vilket är logikst ekvivalent med
(7) $\exists y\,(A \in y \wedge y \in A)$
Välj ett sådant y som satisfierar $A \in y \wedge y \in A$ och kalla det B:
(8) $A \in B \wedge B \in A$
Då
(9) $A \in B$
(10) $B \in A$
Eftersom $B \in A$, satisfierar B det villkor som definierar A:
(11) $\forall y\,(B \notin y \vee y \notin B)$
Låt i (11) y = A:
(12) $B \notin A \vee A \notin B$
Från (9) och (12) får vi med satslogik
(13) $B \notin A$
som motsäger (10).

7-4 Övningar

7-4.1

(a) $(x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\}$
$= \{\{x\}, \{x\}\}$
$= \{\{x\}\}$

(b) $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$
BEVIS:
$\Rightarrow$: Antag
(1) $(x, y) = (u, v)$
Då
(2) $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$
Vi delar upp undersökningen i två fall:
(i) $x = y$, (ii) $x \neq y$.
Om $x = y$, så innehåller $\{x, y\}$ bara ett element. Eftersom $\{u, v\} = \{x\}$ eller $\{u, v\} = \{x, y\}$ så innehåller $\{u, v\}$ bara ett element. Då $u = v$. Då även $u = x$. Alltså
(3) $x = y = u = v$
Nu ser vi på fallet $x \neq y$. Då innehåller $\{x, y\}$ två element.
Av (2) får vi då
(4) $\{x\} = \{u\}, \{x, y\} = \{u, v\}$
Då
(5) $x = u, y = v$
$\Leftarrow$ Antag
(6) $x = u$
(7) $y = v$
Vi substituerar u för x och v för y:

(x, y)	$= \{\{x\}, \{x, y\}\}$	(*Def. 7-3.3*)
	$= \{\{u\}, \{x, y\}\}$	(*Extensionalitet*)
	$= \{\{u\}, \{u, v\}\}$	(* Do *)
	$= (u, v)$	(*Def. 7-3.3*)

7-4.2

(a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
BEVIS:

(x, y)	$\in (A \cap B) \times (C \cap D)$	
	$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D$	(*Def. av ×*)
	$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D)$	(*Def. av ∩*)
	$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D)$	(*satslogik*)
	$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times D$	(*Def. av ×*)
	$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$	(*Def. av ∩*)

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
BEVIS:
Vi använder
(MA 3') $C = C \cap C$
och får

$(A \cap B) \times C$	$= (A \cap B) \times (C \cap C)$	(*(MA 3')*)
	$= (A \times C) \cap (B \times C)$	(*Övning (a)*)

(c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
BEVIS:
Använd $A = A \cap A$ och gå fram som i beviset för (b).

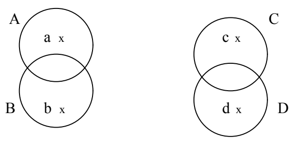
7-4.3

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
BEVIS:

$(x, y) \in (A \cup B) \times C$	$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C$	(*Def. av ×*)
	$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$	(*Def. av ∪*)
	$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$	(*Satslogik, distributiv lag (SE 16)*)
	$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C$	(*Def. av ×*)
	$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	(*Def. av ∪*)

(b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
BEVIS:
Analogt med (a).

(c) Det finns A, B, C, D sådana att
$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$
BEVIS:



Låt $a \neq b$ och $c \neq d$, och $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{d\}$
Då är
$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{a, b\} \times \{c, d\}$
$= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$
medan
$(A \times C) \cup (B \times D) = \{(a, c)\} \cup \{(b, d)\}$
$= \{(a, c), (b, d)\}$

7-4.4

(a) Vi anger domän D_R, räckvidd R_R och fält F_R:
$D_R = \{1, 2, 3\}$
$R_R = \{\text{Aristoteles, Frege, Gödel}\}$

$F_R = D_R \cup R_R = \{1, 2, 3, \text{Aristoteles, Frege, Gödel}\}$

(b) Vi anger $D_<$, $R_<$, $F_<$:
$D_<$: $\underline{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$R_<$: $\underline{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$F_<$: $D_< \cup R_< = \underline{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

7-4.5

(a) $P \circ P = P$ (b) $V \circ V = P$
(c) $P \circ V = V$ (d) $V \circ P = V$
(e) $P^{-1} = P$ (f) $V^{-1} = V$

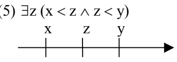
7-4.6

$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
BEVIS:

$(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$	$\Leftrightarrow (y, x) \in R \circ S$	(*Def. 7-3.28*)
	$\Leftrightarrow \exists z\,(yRz \wedge zSx)$	(*Def. 7-3.26*)
	$\Leftrightarrow \exists z\,(zR^{-1}y \wedge xS^{-1}z)$	(*Def. 7-3.28*)
	$\Leftrightarrow \exists z\,(xS^{-1}z \wedge zR^{-1}y)$	(*Satslogik*)
	$\Leftrightarrow (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$	

7-4.7

(a) $< \circ < \; = \; <$ i $\underline{R}$
BEVIS:
Vi har i $\underline{R}$
$x\,(< \circ <)\,y \Leftrightarrow \exists z\; x < z < y$ (*Def. av ∘*)
$\Leftrightarrow x < y$
Vi bevisar den andra ekvivalensen. Antag
(1) $\exists z\; x < z < y$
Eftersom < är transitiv, d v s
$x < z \wedge z < y \Rightarrow x < y$
följer
(2) $x < y$
Alltså
(3) $\exists z\; x < z < y \Rightarrow x < y$
Antag
(4) $x < y$
Eftersom de reella talen ligger tät på tallinjen, kan vi altid hitta ett tredje tal z mellan x och y.
(5) $\exists z\,(x < z \wedge z < y)$



Altså
(6) $x < y \Rightarrow \exists z\,(x < z < y)$

(b) $x\,(< \circ <)\,y \Leftrightarrow x + 2 \leq y$ i $\underline{N}$
BEVIS:
Antag
(1) $x\,(< \circ <)\,y$
Då finns $z \in \underline{N}$ sådant att
(2) $x < z \wedge z < y$
Då är z minst 1 större än x och y är minst 1 större än z så att y blir minst 2 större än x, d v s
(3) $x + 2 \leq y$
Altså
(4) $x\,(< \circ <)\,y \Rightarrow x + 2 \leq y$
Antag
(5) $x + 2 \leq y$
Då
(6) $x < x + 1 < y$
och därför
(7) $x\,(< \circ <)\,y$
Altså
(8) $x + 2 \leq y \Rightarrow x\,(< \circ <)\,y$

(c) $< \circ <^{-1} = \underline{R} \times \underline{R}$ i $\underline{R}$
BEVIS:
Först ser vi att $<^{-1} = >$:
$x <^{-1} y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow x > y$ (1)
Vi har också
$x\,(< \circ <^{-1})\,y \Leftrightarrow x\,(< \circ >)\,y$
$\Leftrightarrow \exists z\,(x < z \wedge z > y)$
$\Leftrightarrow \exists z\,(x, y < z)$ (2)
Eftersom $\underline{R} \times \underline{R}$ är allrelationen i $\underline{R}$, gäller trivialt
$< \circ <^{-1} \subseteq \underline{R} \times \underline{R}$ (3)
Antag
$(x, y) \in \underline{R} \times \underline{R}$ (4)
Då är x och y godtyckliga element i $\underline{R}$. Vi kan alltid hitta ett $z \in \underline{R}$ som är större än båda x och y. Alltså
$\exists z\,(x, y < z)$ (5)
(2) och (5) implicerar
$x\,(<\circ<^{-1})\,y$ (6)
Alltså
$\underline{R} \times \underline{R} \subseteq < \circ <^{-1}$ (7)
(3) och (7) implicerar
$< \circ <^{-1} = \underline{R} \times \underline{R}$

7-4.8
(a) $x\,H^{-1}\,y \Leftrightarrow$ x är äkteman till y

BEVIS:
$x\,H^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,H\,x$
$\Leftrightarrow$ y är hustru till x
$\Leftrightarrow$ x är äkteman till y

(b) $x\,(F \cup M)\,y \Leftrightarrow$ x är förälder till y
BEVIS:
$x\,(F \cup M)\,y \Leftrightarrow x\,F\,y \vee x\,M\,y$
$\Leftrightarrow$ x är far eller mor till y
$\Leftrightarrow$ x är förälder till y

(c) $x\,(F \cup M)^{-1}\,y \Leftrightarrow$ x är barn till y
BEVIS:
$x\,(F \cup M)^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,(F \cup M)\,x$
$\Leftrightarrow$ y är förälder till x
$\Leftrightarrow$ x är barn till y

(d) $x\,(H \cup H^{-1})^{-1}\,y \Leftrightarrow$ x är gift med y
BEVIS:
$x\,(H \cup H^{-1})^{-1}\,y \Leftrightarrow y\,(H \cup H^{-1})\,x$
$\Leftrightarrow y\,H\,x \vee y\,H^{-1}\,x$
$\Leftrightarrow$ y är hustru eller man till x
$\Leftrightarrow$ y är gift med x
$\Leftrightarrow$ x är gift med y

(e) $x\,(F \circ M)\,y \Leftrightarrow$ x är morfar till y
BEVIS:
$x\,(F \circ M)\,y \Leftrightarrow \exists z\,(x\,F\,z \wedge z\,M\,y)$
$\Leftrightarrow$ för något z, x är far till z och z är mor till y
$\Leftrightarrow$ x är morfar till y

(f) $x\,[(M^{-1} \cup F^{-1}) \circ (B \cup S)]\,y \Leftrightarrow$ x är syskonbarn till y
BEVIS:
$x\,[(M^{-1} \cup F^{-1}) \circ (B \cup S)]\,y \Leftrightarrow \exists z\,(x\,(M^{-1} \cup F^{-1})\,z \wedge z\,(B \cup S)\,y)$ (1)
Vi analyserar innebörden av
$M^{-1} \cup F^{-1}$ och $B \cup S$:
$x\,(M{-}1 \cup F{-}1)\,z \Leftrightarrow x\,M^{-1}\,z \vee x\,F^{-1}\,z$
$\Leftrightarrow z\,M\,x \vee z\,F\,x$
$\Leftrightarrow$ z är förälder till x
$\Leftrightarrow$ x är barn till z (2)
$z\,(B \cup S)\,y \Leftrightarrow z\,B\,y \vee z\,S\,y$
$\Leftrightarrow$ z är bror eller syster till y
$\Leftrightarrow$ z är syskon till y (3)
Genom att kombinera (1), (2) och (3) får vi
$x\,[(M^{-1} \cup F^{-1}) \circ (B \cup S)]\,y \Leftrightarrow \exists z$ (x är barn till z $\wedge$ z är syskon till y)
$\Leftrightarrow$ x är syskonbarn till y

7-4.9
(a) $M \circ (H \cup H^{-1})$
BEVIS:
x är svärmor till y $\Leftrightarrow \exists z$ (x är mor till z $\wedge$ z är gift med y)
$\Leftrightarrow \exists z\,(x\,M\,z \wedge z\,(H \cup H^{-1})\,y)$ (Övning 7-4.8 (d))
$\Leftrightarrow x\,[M \circ (H \cup H^{-1})]\,y$

(b) $[(F^{-1} \circ F) - (M^{-1} \circ M)] \cup [(M^{-1} \circ M) - (F^{-1} \circ F)]$
BEVIS:
x är halvsyskon till y $\Leftrightarrow$ x och y har gemensam far men inte gemensam mor
$\vee$ x och y har gemensam mor men inte gemensam far
$\Leftrightarrow [\exists z\,(z\,F\,x \wedge z\,F\,y) \wedge \neg\exists w\,(w\,M\,x \wedge w\,M\,y)]$
$\vee [\exists z\,(z\,M\,x \wedge z\,M\,y) \wedge \neg\exists w\,(w\,F\,x \wedge w\,F\,y)]$
$\Leftrightarrow [\exists z\,(x\,F^{-1}\,z \wedge z\,F\,y) \wedge \neg\exists w\,(x\,M^{-1}\,w \wedge w\,M\,y)]$
$\vee [\exists z\,(x\,M^{-1}\,z \wedge z\,M\,y) \wedge \neg\exists w\,(x\,F^{-1}\,w \wedge w\,F\,y)]$
$\Leftrightarrow [x\,(F^{-1} \circ F)\,y \wedge \neg x\,(M^{-1} \circ M)\,y]$
$\vee [x\,(M^{-1} \circ M)\,y \wedge \neg x\,(F^{-1} \circ F)\,y]$
$\Leftrightarrow [x\,(F^{-1} \circ F)\,y \wedge x - (M^{-1} \circ M)\,y]$
$\vee [x\,(M^{-1} \circ M)\,y \wedge x - (F^{-1} \circ F)\,y]$
$\Leftrightarrow x\,[((F^{-1} \circ F) - (M^{-1} \circ M))$
$\cup ((M^{-1} \circ M) - (F^{-1} \circ F))]\,y$

7-6 Övningar

7-6.1
$f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \wedge (\forall x \in D_f)\,f(x) = g(x)$
BEVIS:
$\Rightarrow$: Antag
(1) $f = g$
f och g är mängder av ordnade par. Vi antar alltså att f och g innehåller exakt samma ordnade par. Eftersom $f = g$, följer av Definition 7-3.23 att $D_f = D_g$. Låt $x \in D_f$. Vi visar $f(x) = g(x)$. Eftersom $D_f = D_g$, så $x \in Dg$. Då finns $y \in R_f$, $z \in R_g$ sådana att $(x, y) \in f$ och $(x, z) \in g$. Då $y = f(x)$ och $z = g(x)$. Eftersom $(x, z) \in g$ och $f = g$, så $(x, z) \in f$. Vi har nu $(x, y) \in f$ och $(x, z) \in f$. Av Definition 7-5.1 följer $y = z$. Alltså
(2) $f(x) = y = z = g(x)$
$\Leftarrow$: Antag:
(3) $Df = Dg$
(4) $(\forall x \in D_f)\,f(x) = g(x)$
Låt $(x, y) \in f$. Av (3) får vi $x \in D_f = D_g$. Av (4) följer $y = f(x) = g(x)$.
Eftersom $(x, g(x)) \in g$, så $(x, y) \in g$. Därför
(5) $f \subseteq g$
På samma sätt visar vi
(6) $g \subseteq f$
(5) + (6) implicerar
(7) $f = g$

7-6.2
(1) I själva verket *är* bildmängden R_f entydigt bestämd av funktionen f och definitionsmängden $D_f = A$. Vi har nämligen
$R_f = f\,[A]$
Informationen om R_f är därför *implicit* i symbolen $f: A \rightarrow B$.

(2) I många fall är det svårt eller omöjligt att explicit definiera $R_f = f\,[A]$ medan det är lätt att ange en mängd B sådan att $R_f = f\,[A] \subseteq B$. Låt t ex
$f: \underline{Z} \rightarrow \underline{Z}$
$f(x) = x^2 - 5x + 1$
Då är det lätt att se att
$f\,[\underline{Z}] \subseteq [\underline{Z}]$ men svårare att exakt specifiera $f\,[\underline{Z}]$.

(3) I de flesta fall har vi ingen användning för informationen om vad R_f är. I de fall där vi behöver den, finns den i $f: A \rightarrow B$ eftersom $R_f = f\,[A]$.

(4) I några sammanhang är skrivsättet $f: A \rightarrow B$, där vi bara kräver $R_f \subseteq B$, en fördel. Ett exempel är Definition 7-5.20 av funktionssammansättning. Låt
(5) $f: A \rightarrow B_1$, $g: B_2 \rightarrow C$
$f \circ g: A \rightarrow C$
$(f \circ g)(x) = g(f(x))$

Antag först att vi kräver f [A] = B_1, $B_1 = B_2$, och g [B_2] = C. Då blir symbolen f ° g: A → C adekvat eftersom (f ° g) [A] = C. Men då uteslutar vi alla sådana funktionssammansättningar där $B_1 \subset B_2$. Fallet $B_1 \subset B_2$ ger dock lika bra funktionssammansättningar som fallet där $B_1 = B_2$. Antag nu att vi bara kräver f [A] = B_1, $B_1 \subseteq B_2$, g [B_2] = C. Nu får vi med alla funktionssammansättningar som är förenliga med Definition 7-5.20; men nu är symbolen

f ° g: A → C

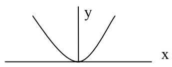
inte längre adekvat. Det finns f och g med B1 ⊂ B2 sådana att (f ° g) [A] ⊂ C. till exempel

f: $\underline{Z}_+ \to \underline{Z}_+$
f (x) = x
g: $\underline{Z} \to \underline{Z}$
g (x) = x

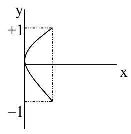
SAMMANFATTNING. Notationen f: A → B där $R_f \subseteq B$ är den smidigaste och adekvat i alla sammanhang. När man behöver veta explicit vad R_f är, kan man få fram informationen från f och A genom R_f = f [A].

7-6.3

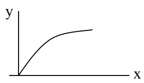
(a) R_1 är en funktion
R_1: $\underline{R} \to \underline{R}$
$R_1 (x) = x^2$



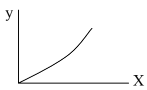
$R_1^{-1} = \{(x, y) \in \underline{R}^2 \mid x = y^2\}$
är inte en funktion eftersom
$(1, 1) \in R_1^{-1}$ och $(1, -1) \in R_1^{-1}$.



(b) R_2 är funktionen
R_2: $\underline{R}_+ \to \underline{R}_+$
$R_2 (x) = \sqrt{x}$

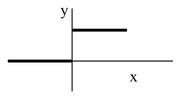


R_2^{-1} är funktionen
R_2^{-1} $\underline{R}_+ \to \underline{R}_+$
$R_2^{-1} (x) = x^2$

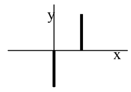


(c) Eftersom $R_3 = R_1^{-1}$, är R_3 inte en funktion. $R_3^{-1} = R_1$ är en funktion.

(d) R_4 är funktionen
R_4: $\underline{R} \to \underline{R}$
$R_4 (x) = 0$ om x < 0
$R_4 (x) = 1$ om x ≥ 0



$R_4^{-1} = \{(x, y) \in \underline{R}^2 \mid x = 0 \wedge y < 0\}$
$\cup \{(x, y) \in \underline{R}^2 \mid x = 1 \wedge y \geq 0\}$
är inte en funktion eftersom
t ex $(1, 0) \in R_4^{-1}$ och $(1, 1) \in R_4^{-1}$ fast 0 ≠ 1.



7-6.4

(a) R ° S är en funktion.
BEVIS:
Se Anmärkning 7-5.19.

(b) R − S är en funktion.
BEVIS:
Vi ska visa
(1) (x, y) ∈ R − S ∧ (x, z) ∈ R − S ⇒ y = z
Antag
(2) (x, y) ∈ R − S, (x, z) ∈ R − S
Då (x, y), (x, z) ∈ R. Eftersom R är en funktion följer
(3) y = z

(c) R ∪ S behöver inte vara en funktion.
BEVIS:
Låt t ex
R: $\underline{N} \to \underline{N}$
R (x) = 0
S: $\underline{N} \to \underline{N}$
S (x) = 1
Då (0, 0) ∈ R ∪ S och (0, 1) ∈ R ∪ S men 0 ≠ 1.

(d) R ∩ S är en funktion.
BEVIS:
Antag (x, y), (x, z) ∈ R ∩ S. Då (x, y), (x, z) ∈ R. Eftersom R är en funktion, y = z. Av Definition 7-5.1 följer att R ∩ S är en funktion.

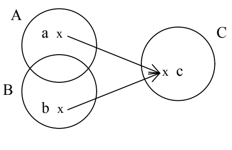
7-6.5

(a) f [A ∪ B] = f [A] ∪ f [B]
BEVIS:
⊆ : Antag y ∈ f [A ∪ B]. Då finns x ∈ A ∪ B sådan att y = f (x).
Om x ∈ A, så y = f (x) ∈ f [A] ⊆ f [A] ∪ f [B].
Om x ∈ B, så y = f (x) ∈ f [B] ⊆ f [A] ∪ f [B].

Alltså f [A ∪ B] ⊆ f [A] ∪ f [B].
⊇ : Trivialt gäller
(1) f [A] ⊆ f [A ∪ B]
(2) f [B] ⊆ f [A ∪ B]
Då
(3) f [A] ∪ f [B] ⊆ f [A ∪ B]

(b) f [A ∩ B] ⊆ f [A] ∩ f [B]
BEVIS:
Antag y ∈ f [A ∩ B]. Då finns x ∈ A ∩ B sådan att y = f (x). Då x ∈ A och x ∈ B. Men x ∈ A implicerar y = f (x) ∈ f [A], och x ∈ B implicerar y = f (x) ∈ f [B]. Därför y ∈ f [A] ∩ f [B].

(c) Det finns f, A och B sådana att f [A ∩ B] ≠ f [A] ∩ f [B].
BEVIS:
Låt A = {a} och B = {b} där a ≠ b. Definiera
f: A ∪ B → {c}
f (a) = c
f (b) = c
Då är A ∩ B = ∅
f [A ∩ B] = f [∅] = ∅
f [A] ∩ f [B] = {c} ∩ {c} = {c}



(d) f är injektiv ⇒ f [A ∩ B] = f [A] ∩f [B]
BEVIS:
Vi visar f [A] ∩ f [B] ⊆ f [A ∩ B].
Antag y ∈ f [A] ∩ f [B]. Då y ∈ f [A] och y ∈ f [B]. Därför finns a ∈ A och b ∈ B sådana att y = f (a) och y = f (b). Då f (a) = f (b). Eftersom f är injektiv, är a = b. Då a = b ∈ A ∩ B så att y = f (a) = f (b) ∈ f [A ∩ B].
Alltså f [A] ∩ f [B] ⊆ f [A ∩ B] som i kombination med 7-6.5 (b) ger
f [A ∩ B] = f [A] ∩ f [B].

7-6.6

f^{-1} är en funktion ⇔ f är injektiv
BEVIS:
f^{-1} satisfierar
(1) $(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$
f^{-1} är en funktion omm
(2) $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$
f är injektiv omm
(3) $f (x_1) = f (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Villkoret (3) är ekvivalent med
(3’) $(x_1, y), (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$
(1) applicerad på (3’) ger

(3’’) $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$
Vi har alltså
(3) ⇔ (3’) ⇔ (3’’) = (2)
Följaktligen gäller ekvivalensen in 7-6.6.

7-6.7

Låt f: A → B vara bijektiv. Då
$f \circ f^{-1} = I_A$
$f^{-1} \circ f = I_B$
BEVIS:
Eftersom f är bijektiv, är f^{-1} en funktion och
f: A → B, f^{-1}: B → A
Då
$f \circ f^{-1}$: A → A
$f^{-1} \circ f$: B → B
Låt x ∈ A. Då
$(f \circ f^{-1}) (x) = f^{-1} (f (x)) = x = I_A (x)$
Låt x ∈ B. Då
$(f^{-1} \circ f) (x) = f (f^{-1} (x)) = x = I_B (x)$

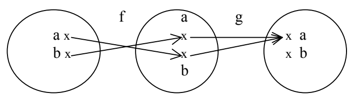
7-6.8

Låt J vara mängden av jämna naturliga tal. Då finns en bijektion f: $\underline{N}$ → J.
BEVIS:
Definiera
f: $\underline{N}$ → J
f (x) = 2x
Det är klart att f är en funktion och varje f (x) är ett jämnt tal, d v s f [$\underline{N}$] ⊆ J. Vi visar att f är injektiv. Antag f (m) = f (n). Då 2m = 2n och därför m = n. Vi visar att f är surjektiv. Antag n ∈ J. Då är n jämnt delbart med 2. Låt n = 2m. Då n = 2 m = f (m) ∈ f [$\underline{N}$]. Alltså J ⊆ f [$\underline{N}$] som tillsammans med f [$\underline{N}$] ⊆ J implicerar J = f [$\underline{N}$]. Alltså är f surjektiv och därför en bijektion.

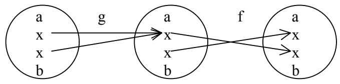
7-6.9

(a) ° är inte kommutativ.
EXEMPEL:
Vi väljer A = B = C = {a, b}
Definiera
f (a) = b, f (b) = a
g (a) = g (b) = a

f ° g :



g °f :



Vi ser att $f \circ g \neq g \circ f$. T ex
$(f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$
$(g \circ f)(a) = f(g(a)) = f(a) = b$
$(f \circ g)(b) = g(f(b)) = g(a) = a$
$(g \circ f)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$

(b) $\circ$ är associativ.
BEVIS:
För $(g \circ h)$ gäller
$g \circ h: B \to D$
Därför
$f \circ (g \circ h): A \to D$ (1)
$(f \circ g)$ satisfierar
$f \circ g: A \to C$
Därför
$(f \circ g) \circ h: A \to D$ (2)
Låt $x \in A$. Då
$(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x))$
$= h(g(f(x)))$ (3)
och
$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x))$
$= h(g(f(x)))$ (4)
(1) + (2) + (3) + (4) implicerar
$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

7-6.10

(a) $f \circ g$ är injektiv.
BEVIS:
Låt $x, y \in A$. Antag
(1) $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$
Då
(2) $g(f(x)) = g(f(y))$
Eftersom g är injektiv,
(3) $f(x) = f(y)$
Då även f är injektiv, följer
(4) $x = y$
Alltså är $f \circ g$ injektiv.

(b) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
BEVIS:

Använd Övning 7-4.6

7-6.11

(a) $f \circ h: \underline{R} \to \underline{R}_+$
$(f \circ h)(x) = h(f(x)) = \sqrt{e^x}$

(b) $h \circ f: \underline{R}_+ \to \underline{R}_+$
$(h \circ f)(x) = f(h(x0) = e^{\sqrt{x}}$

(c) $h \circ g: \underline{R}_+ \to \underline{R}_+$
$(h \circ g)(x) = g(h(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

(d) $f \circ g \circ h: \underline{R}_+ \to \underline{R}_+$
$(f \circ g \circ h)(x) = h(g(f(x))) = \sqrt{e^{2x} + 1}$

(e) $h \circ g \circ f: \underline{R}_+ \to \underline{R}_+$
$(h \circ g \circ f)(x) = f(g(h(x)))$
$= f(x + 1)$ (*Övning 7-6.11 (c)*)
$= e^{x + 1}$
$= e\, e^x$

(f) $(f \circ h)^{-1} : \underline{R}_+ \to \underline{R}$
$(f \circ h)^{-1}(x) = \ln(x^2)$
BEVIS:
$(f \circ h)^{-1}: \underline{R}_+ \to \underline{R}$
fås omedelbart från 7-6.11 (a)
Enligt övning 7-6.10 (b) är
$(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$
Från definitionerna av f och h får vi
$f^{-1}(x) = \ln x$
$h^{-1}(x) = x^2$
$(f \circ h)^{-1}(x) = (h^{-1} \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(h^{-1}(x)) = f^{-1}(x^2) = \ln(x^2)$

7-8 Övningar

7-8.1

(a) R symmetrisk $\wedge$ R transitiv $\Rightarrow$ R reflexiv i D_R
BEVIS:
Antag att R är symmetrisk.
(1) $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$
och transitiv
(2) $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$
Vi ska visa R reflexiv i D_R, d v s
(3) $\forall x (x \in D_R \to R(x,x))$
Antag $x \in D_R$. Enligt Definition 7-3.23 av domänen D_R finns det y sådant att $R(x,y)$.
Av R:s symmetri följer $R(y,x)$ så att vi har $R(x,y) \wedge R(y,x)$. Om vi i (2) instantierar z med x, får vi
(4) $R(x,y) \wedge R(y,x) \to R(x,x)$
Alltså $R(x,x)$.

(b) R intransitiv $\Rightarrow$ R irreflexiv
BEVIS:
Antag att R är intransitiv
(1) $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to \neg R(x,z))$
men inte irreflexiv, d v s
(2) $R(a, a)$ för något $a \in A$
I (1) instantierar vi $x = y = z = a$:
(3) $R(a,a) \wedge R(a,a) \to \neg R(a,a)$
(2) + (3) implicerar
(4) $\neg R(a, a)$
som motsäger (2).

(c) R starkt sammanhängande i A $\Rightarrow$ R reflexiv i A
BEVIS:
Antag R starkt sammanhängande i A
(1) $\forall x \forall y (x, y \in A \to R(x, y) \vee R(y, x))$
Vi ska visa R reflexiv i A och antar $x \in A$. Från (1) får vi då
(2) $R(x,x) \vee R(x,x)$
som med satslogik ger
(3) $R(x,x)$

(d) R asymmetrisk $\Rightarrow$ R antisymmetrisk
BEVIS:
Antag R asymmetrisk
(1) $\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$
Vi ska bevisa att R är antisymmetrisk, d v s
(2) $\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$
Vi antar därför
(3) $R(x,y) \wedge R(y,x)$

Och härleder $x = y$. Från (1) och (3) följer $\neg R(y,x)$ som motsäger $R(y,x)$ i (3). M a o: (1) och (3) implicerar en motsägelse och från en motsägelse följer vad som helst, som vi vet från satslogiken, t ex $x = y$.
ANMÄRKNING: Ett mindre exakt men kanske mer tillfredsställande bevis för (d) kan ges med kriterierna i § 7-7.23. Antag att R är asymmetrisk. Då är huvuddiagonalen i ett schema för R tom och inget krysspar utanför huvuddiagonalen ligger symmetriskt kring denna. Det senare är kriteriet på att R är antisymmetrisk.

(e) R asymmetrisk $\Rightarrow$ R irreflexiv
BEVIS:
Antag R asymmetrisk
(1) $\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$ men inte irreflexiv. Då
(2) $R(a,a)$ för något $a \in A$
Av (1) får vi genom att låta $x = y = a$:
(3) $R(a,a) \to \neg R(a,a)$
(2) + (3) implicerar $\neg R(a,a)$ som motsäger (2).

(f) R irreflexiv $\wedge$ R antisymmetrisk $\Rightarrow$ R asymmetrisk
BEVIS:
Antag R irreflexiv och antisymmetrisk
(1) $\forall x \neg R(x,x)$
(2) $\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$
men inte asymmetrisk, d v s
(3) $R(a,b) \wedge R(b,a)$ för ngr. $a, b \in A$
Från (2) och (3) följer
(3) $a = b$
som tillsammans med (3) ger
(4) $R(a,a)$
Men från (1) följer
(5) $\neg R(a,a)$
som motsäger (5).

7-8.2

(a) R är symmetrisk och antisymmetrisk $\Leftrightarrow R \subseteq I_A$
BEVIS:
$\Rightarrow$: Antag R symmetrisk och antisymmetrisk.
(1) $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$
(2) $\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$
Vi ska visa $R \subseteq I_A$, d v s varje par i R är av formen (x,x).
Antag $(x,y) \in R$. Av (1) får vi $R(y,x)$ så att $R(x,y) \wedge R(y,x)$.
(3) ger nu $x = y$, d v s (x,y) har formen $(x,x) \in I_A$.
$\Leftarrow$: Om $R \subseteq I_A$, är varje par i R av formen (x,x). Det är då trivialt att visa att R satisfierar villkoren för symmetri och asymmetri.

(b) $R = \varnothing$ är den enda relationen i A som är både symmetrisk och asymmetrisk.
BEVIS:

Villkoren för att R ska vara symmetrisk och asymmetrisk är
(1) $\forall x \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x))$
(2) $\forall x \forall y\, (R(x,y) \to \neg R(y,x))$
Det är klart att $R = \varnothing$ satisfierar både (1) och (2); ty om $R = \varnothing$, blir förledena i (1) och (2) falska för alla x, y. Då blir implikationerna i (1) och (2) sanna för alla x, y. För att visa att $\varnothing$ är den enda relation som satisfierar både (1) och (2) antar vi att det finns $R \neq \varnothing$ som satisfierar (1) och (2). Låt $(x,y) \in R$. Av (1) får vi då $R(y,x)$ och av (2) $\neg R(y,x)$ vilket är en motsägelse.

7-8.3

(a) R och S är ekvivalensrelationer $\Rightarrow R \cap S$ är en ekvivalensrelation.
BEVIS:
Vi ska visa att $R \cap S$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
Reflexivitet: Låt $x \in A$. Då $R(x,x)$ och $S(x,x)$ och därför $(x,x) \in R \cap S$.
Symmetri: Antag $(x,y) \in R \cap S$. Då $(x,y) \in R$ och $(x,y) \in S$. Eftersom R och S är symmetriska, $(y,x) \in R$ och $(y,x) \in S$. Då $(y,x) \in R \cap S$.
Transitiv: Antag $(x,y) \in R \cap S$ och $(y,z) \in R \cap S$. Då $(x,y), (y,z) \in R$ och $(x,y), (y,z) \in S$. R:s och S:s transitivitet ger $(x,z) \in R$, S. Då $(x,z) \in R \cap S$.

(b) R är en ekvivalensrelation $\Rightarrow R^{-1}$ är en ekvivalensrelation.
BEVIS:
R^{-1} är reflexiv: Antag $x \in A$. Då $(x,x) \in R$ och därför $(x,x) \in R^{-1}$.
R^{-1} symmetrisk: Antag $(x,y) \in R^{-1}$. Då $(y,x) \in R$. R:s symmetri ger $(x,y) \in R$. Då $(y,x) \in R^{-1}$.
R^{-1} transitiv: Antag $(x,y), (y,z) \in R^{-1}$. Då $(z,y), (y,z) \in R$. R:s transitivitet implicerar $(z,x) \in R$. Då $(x,z) \in R^{-1}$.

(c) R är en partiell ordning $\wedge$ S är reflexiv och transitiv $\Rightarrow R \cap S$ är en partiell ordning.
BEVIS:
Vi ska bevisa att $R \cap S$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.
Reflexivitet: Eftersom både R och S är reflexiva, följer det att $R \cap S$ är reflexiv som i beviset för (a).
Antisymmetri: Vi ska visa
(1) $\forall x \forall y\, ((x,y) \in R \cap S \wedge (y,x) \in R \cap S \to x = y)$
Antag $(x,y) \in R \cap S$ och $(y,x) \in R \cap S$.
Då $(x,y) \in R$ och $(y,x) \in R$. Eftersom R är antisymmetrisk, följer $x = y$.
Transitivitet: Eftersom både R och S är transitiva, följer $R \cap S$:s transitivitet som i beviset för (a).

(d) R är en partiell ordning $\Rightarrow R^{-1}$ är en partiell ordning.
BEVIS:
R^{-1}:s reflexivitet och transitivitet följer ut R:s reflexivitet och transitivitet som i beviset för (b).
Antisymmetri: Vi ska visa
(1) $\forall x \forall y\, (R^{-1}(x,y) \wedge R^{-1}(y,x) \to x = y)$
Men (1) är ekvivalent med

(2) $\forall x \forall y\, (R(y,x) \wedge R(x,y) \to x = y)$
som följer från att R är antisymmetrisk.

7-8.4

Låt $f: A \to B$ vara en funktion. Då är $f \circ f^{-1}$ en ekvivalensrelation i A.
BEVIS:
Enligt definitionerna 7-3.26 och 7-3.28 av sammansättning och omvändning av relationer gäller
(1) $(x,y) \in f \circ f^{-1} \Leftrightarrow \exists z\, ((x,z) \in f \wedge (z,y) \in f^{-1})$
$\Leftrightarrow \exists z\, ((x,z) \in f \wedge (y,z) \in f)$
$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$
Med hjälp av (1) är det lätt att visa att $f \circ f^{-1}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

7-8.5

Om R är en ekvivalensrelation med ändligt många ekvivalensklasser, finns det mängder $A_1, \ldots, A_n$ sådana att
$R = A_1 \times A_1 \cup A_n \times A_n$
BEVIS:
Låt $[x_1], [x_2], \ldots, [x_n]$ vara en uppräkning av alla R:s ekvivalensklasser. Vi visar
(1) $R = [x_1] \times [x_1] \cup \ldots \cup [x_n] \times [x_n]$
$\subseteq$: Antag $(x,y) \in R$. Då $[x] = [x_i]$ för ngt $i = 1, \ldots, n$. Då $x \in [x_i]$, och därför $R(x_i, x)$. Eftersom också $R(x,y)$ enligt antagandet, får vi $R(x_i, y)$ av R:s transitivitet. Alltså $y \in [x_i]$. Eftersom $x, y \in [x_i]$ får vi $(x,y) \in [x_i] \times [x_i] \subseteq [x_1] \times [x_1] \cup \ldots \cup [x_n] \times [x_n]$
$\supseteq$: Antag $(x,y) \in [x_1] \times [x_1] \cup \ldots \cup [x_n] \times [x_n]$
Då är $(x,y) \in [x_i] \times [x_i]$ för ngt i, d v s $x, y \in [x_i]$. Följaktligen gäller $x_i R x$ och $x_i R y$. Symmetri och transitivitet hos R ger xRy, d v s $(x,y) \in R$.
(1) visar att vi kan definiera $A_1 = [x_1], A_2 = [x_2], \ldots, A_n = [x_n]$.

7-8.6

(a) Låt $R \subseteq A \times A$ vara en partiell ordning. Definiera
$S = \{(x,y) \in A \times A \mid R(x,y) \wedge x \neq y\}$
Då är S en strikt partiell ordning av A.
BEVIS:
Vi ska visa att S är asymmetrisk
(1) $\forall x \forall y\, (S(x,y) \to \neg S(y,x))$
och transitiv
(2) $\forall x \forall y \forall z\, (S(x,y) \wedge S(y,z) \to S(x,z))$
Antag att S inte är asymmetrisk. Då finns $x,y \in A$ sådana att $S(x,y)$ och $S(y,x)$. Av definitionen av S följer då $R(x,y) \wedge x \neq y$ och $R(y,x) \wedge y \neq x$. Eftersom således $R(x,y) \wedge R(y,x)$ och R är antisymmetrisk följer $x = y$ vilket motsäger $x \neq y$.
Vi visar nu att S är transitiv, d v s vi visar (2). Antag $S(x,y) \wedge S(y,z)$. Vi ska visa $(x,z) \in S$, d v s

(3) $R(x,z) \wedge x \neq z$
Eftersom $S(x,y)$ och $S(y,z)$, så $R(x,y) \wedge x \neq y$ och $R(y,z) \wedge y \neq z$.
Men $R(x,y) \wedge R(y,z)$ ger $R(x,z)$ på grund av R:s transitivitet. Vi visar nu $x \neq z$ i (3) genom att antaga $x = z$. Då kan vi i antagandet $S(x,y) \wedge S(y,z)$ substituera x för z vilket ger $S(x,y) \wedge S(y,x)$; men detta är oförenligt med (1), S:s asymmetri. Vi har nu visat (3), d v s $S(x,z)$, och därmed S:s transitivitet.

(b) Låt $S \subseteq A$ vara en strikt partiell ordning av A. Definiera
$R = \{(x,y) \in A \times A \mid S(x,y) \vee x = y\}$
Då är R en partiell ordning av A.
BEVIS:
S satisfierar (1) och (2) i (a). Vi måste visa att R är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv:
(4) $\forall x\, (x \in A \to R(x,x))$
(5) $\forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$
(6) $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$
Låt $x \in A$. Eftersom $S(x,x) \vee x = x$ gäller trivialt för alla $x \in A$, så $R(x,x)$, d v s R är reflexiv.
Vi visar (5). Antag $R(x,y) \wedge R(y,x)$
Av definitionen av R följer då
(7) $(S(x,y) \vee x = y) \wedge (S(y,x) \vee y = x)$
Genom att använda satslogikens distributiva lag (SE 6) på (7) får vi
(8) $(S(x,y) \wedge S(y,x)) \vee (S(x,y) \wedge y = x) \vee (S(y,x) \wedge x = y) \vee (x = y \wedge y = x)$
Men första disjunktionsledet i (8) är oförenligt med att S är asymmetrisk.
Andra disjunktionsledet implicerar $S(x,x)$ som är oförenligt med att S är irreflexiv (se Övning 7-8.1 (e)). På samma sätt inser vi att tredje disjunktionsledet är falskt. Därför måste 4:e disjunktionsledet, $x = y \wedge y = x$ gälla. Därför $x = y$. Vi har visat (5), d v s R:s antisymmetri.
Slutligen visar vi (6), R är transitiv. Antag att (6) är falsk. Då finns $x, y, z \in A$ sådana att
(9) $R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge \neg R(x,z)$
Av $\neg R(x,z)$ och definitionen av R följer
(10) $\neg S(x,z) \wedge x \neq z$
Från $R(x,y) \wedge R(y,z)$ i (9) och definitionen av R får vi
(11) $(S(x,y) \vee x = y) \wedge (S(y,z) \vee y = z)$
Vi använder nu den distributiva lagen (SE 6) på (11):
(12) $(S(x,y) \wedge S(y,z)) \vee (S(x,y) \wedge y = z) \vee (S(y,z) \wedge x = y) \vee (x = y \wedge y = z)$
Men varje disjunktionsled i (12) motsäger (10):
$S(x,y) \wedge S(y,z) \Rightarrow S(x,z)$
eftersom S är transitiv
$S(x,y) \wedge y = z \Rightarrow S(x,z)$
$S(y,z) \wedge x = y \Rightarrow S(x,z)$
$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$
Alltså kan (6) inte vara falsk, d v s R är transitiv.

7-8.7

R är en linjär ordning av A omm R är reflexiv, antisymmetrisk, transitiv och sammanhängande i A d v s

(1) $\forall x\, (x \in A \to R(x,x))$
(2) $\forall x \forall y\, (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$
(3) $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$
(4) $\forall x \forall y\, (x,y \in A \to R(x,y) \vee R(y,x) \vee x = y)$
S är en strikt linjär ordning av A omm S är asymmetrisk, transitiv och sammanhängande i A, d v s
(5) $\forall x \forall y\, (S(x,y) \to \neg S(y,x))$
(6) $\forall x \forall y \forall z\, (S(x,y) \wedge S(y,z) \to S(x,z))$
(7) $\forall x \forall y\, (x, y \in A \to S(x,y) \vee S(y,z) \vee x = y)$

(a) Låt R vara en linjär ordning av A
Definiera
$S = \{(x,y) \in A \times A \mid R(x,y) \wedge x \neq y\}$
Då är S en strikt linjär ordning av A
BEVIS:
Vi ska visa att S satisfierar (5), (6), (7).
Antag att S inte satisfierar (5). Då finns $x, y \in A$ så att
(8) $S(x,y) \wedge S(y,x)$
Vilket tillsammans med definitionen av S ger
(9) $R(x,y) \wedge R(y,x) \wedge x \neq y$
(9) är oförenlig med (2), att R är antisymmetrisk.
Antag förledet i (6)
(10) $S(x,y) \wedge S(y,z)$
Då
(11) $R(x,y) \wedge x \neq y \wedge R(y,z) \wedge y \neq z$
Av (11) och R:s transitivitet (3) följer
(12) $R(x,z)$
Antag $x = z$. Substitution i (10) ger $S(x,y) \wedge S(y,x)$ som är oförenligt med den redan bevisade asymmetrin (5) hos S. Alltså $x \neq z$ som tillsammans med (12) ger
(13) $R(x,z) \wedge x \neq z$
d v s $S(x,z)$. Vi har visat (6), att S är transitiv.
Vi behandlar (7). Låt $x, y \in A$. För att visa $S(x,y) \vee S(y,x) \vee x = y$ visar vi den satslogiskt ekvivalenta
(14) $x \neq y \to S(x,y) \vee S(y,x)$
Antag därför förledet i (14):
(15) $x \neq y$
(4) + (15) implicerar
(16) $R(x,y) \vee R(y,x)$
Men definitionen av S ger
(17) $R(x,y) \wedge x \neq y \Rightarrow S(x,y)$
(18) $R(y,x) \wedge x \neq y \Rightarrow S(y,x)$
(15) – (18) och satslogik ger
(19) $S(x,y) \vee S(y,x)$
Resonemanget från (15) till (19) bevisar (14). Alltså gäller (7), att S är sammanhängande.

(b) Låt S vara en strikt linjär ordning av A. Definiera
$R = \{(x,y) \in A \times A \mid S(x,y) \vee x = y\}$

Då är R en linjär ordning av A.
BEVIS:
Enligt antagande satisfierar S villkoren (5), (6), (7). Vi ska visa att R satisfierar (1), (2), (3), (4).
R reflexiv: För varje $x \in A$ gäller trivialt $S(x, x) \vee x = x$. Därför $(x, x) \in R$.
R antisymmetrisk: Antag att R inte satisfierar (2), d v s det finns x, y så att
(20) $R(x,y) \wedge R(y,x) \wedge x \neq y$
R(x,y) och R(y,x) och definitionen av R implicerar
(21) $S(x,y) \vee x = y$
(22) $S(y,x) \vee x = y$
som tillsammans med $x \neq y$ ger S(x,y) och S(y,x) vilka är oförenliga med S:s asymmetri (5).
R transitiv: För att visa R transitiv (3) går vi fram på samma sätt som vid beviset för (6) i Övning 7-8.6 (b).
R sammanhängande i A: Antag att (4) är falsk. Då finns $x, y \in A$ sådana att
(23) $\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge x \neq y$
som tillsammans med definitionen av R implicerar
(24) $\neg S(x,y) \wedge \neg S(y,x)$
Av (7) följer
(25) $S(x,y) \vee S(y,x) \vee x = y$
som tillsammans med (24) ger
(26) $x = y$
vilket motsäger (23).

7-8.8
(a) Låt R vara en svag ordning i A. Definiera
$x \sim y \Leftrightarrow R(x,y) \wedge R(y,x)$
Då är ~ en ekvivalensrelation i A.
BEVIS:
R är transitiv och starkt sammanhängande i A, d v s
(1) $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
(2) $(\forall x,y \in A)\, (R(x,y) \vee R(y,x))$
Vi ska visa att ~ är reflexiv, symmetrisk och transitiv, d v s
(3) $\forall x\, (x \in A \rightarrow x \sim x)$
(4) $\forall x \forall y\, (x \sim y \rightarrow y \sim x)$
(5) $\forall x \forall y \forall z\, (x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)$
~ reflexiv: Låt $x \in A$. Av (2) följer $R(x,x) \vee R(x,x)$ som är satslogiskt ekvivalent med $R(x,x) \wedge R(x,x)$. Definitionen av ~ ger nu $x \sim x$.
~ symmetrisk: Vi har
$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow R(x,y) \wedge R(y,x) \\ &\Leftrightarrow R(y,x) \wedge R(x,y) \\ &\Leftrightarrow y \sim x \end{aligned}$$
så att ~satisfierar (4).
~ transitiv: Antag $x \sim y \wedge y \sim z$. Då
$R(x,y) \wedge R(y,x) \wedge R(y,z) \wedge R(z,y)$
som är satslogiskt ekvivalent med
$[R(x,y) \wedge R(y,z)] \wedge [R(z,y) \wedge R(y,x)]$
Eftersom R är transitiv (1)

följer
$R(x,z) \wedge R(z,x)$
Definitionen av ~ ger nu $x \sim z$.

(b) Definiera
$\boldsymbol{A} = \{[x] \mid x \in A\}$
$[x] \leq [y] \Leftrightarrow R(x,y)$
Då
$[x] = [u] \wedge [y] = [v] \Rightarrow (R(x,y) \leftrightarrow R(u,v))$
BEVIS:
Antag
(1) $[x] = [u] \wedge [y] = [v]$
Då
(2) $x \sim u \wedge y \sim v$
(2) + definitionen av ~ ger
(3) $[R(x,u) \wedge R(u,x)] \wedge [R(y,v) \wedge R(v,y)]$
Vi visar $R(x,y) \rightarrow R(u,v)$. Antag
(4) R(x,y)
Från (3) och (4) får vi
(5) $R(u,x) \wedge R(x,y) \wedge R(y,v)$
Två tillämpningar av R:s transitivitet (1) på (5) ger
(6) R(u,v)
På samma sätt bevisar man
$R(u,v) \rightarrow R(x,y)$.

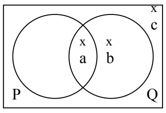
(c) Relationen ≤ är en linjär ordning av $\boldsymbol{A}$.
BEVIS:
Vi ska visa att ≤ är reflexiv i $\boldsymbol{A}$, antisymmetrisk, transitiv och sammanhängande i $\boldsymbol{A}$, d v s
(6) $[x] \in \boldsymbol{A} \Rightarrow [x] \leq [x]$
(7) $[x] \leq [y] \wedge [y] \leq [x] \Rightarrow [x] = [x]$
(8) $[x] \leq [y] \wedge [y] \leq [z] \Rightarrow [x] \leq [z]$
(10) $[x], [y] \in \boldsymbol{A} \Rightarrow [x] \leq [y] \vee [y] \leq [x] \vee [x] = [y]$
≤ reflexiv: Eftersom R är starkt smmanhängande i A, är R reflexiv i A (Övning 7-8.1 (c)), d v s R(x, x) för $x \in A$. Då $[x] \leq [x]$ enligt definitionen av ≤.
≤ antisymmetrisk: Antag
(11) $[x] \leq [y] \wedge [y] \leq [x]$
Definitionen av ≤ ger
(12) $R(x,y) \wedge R(y,x)$
Från (12) och definitionen av ~ följer $x \sim y$, d v s x och y tillhör samma ~ -ekvivalensklass. Då
(13) $[x] = [y]$
≤ transitiv: Antag
(14) $[x] \leq [y] \wedge [y] \leq [z]$
Då $R(x,y) \wedge R(y,z)$. Eftersom R är transitiv, följer R(x,z) och
(15) $[x] \leq [z]$
enligt definitionen av ≤. Det bevisar (9).
*≤ sammanhängande i **A***: Vi visar (10).

Låt $[x], [y] \in \boldsymbol{A}$. Eftersom $x, y \in A$ och R är starkt sammanhängande, får vi från (2)
(16) $R(x,y) \vee R(y,x)$
(16) + definitionen av ≤ implicerar
(17) $[x] \leq [y] \vee [y] \leq [x]$
Satslogik ger konsekvensen i (10):
(18) $[x] \leq [y] \vee [y] \leq [x] \vee [x] = [y]$

Kapitel 8. Lösningar

8-5.1

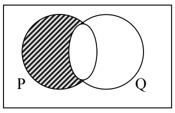
Venn-diagram för m = (M, **P**, **Q**) = ({a, b, c}, {a}, {a, b})



(a) $\exists x\, P(x)$
LÖSNING:
$\exists x\, P(x)$ är sann i m.
$\exists x\, P(x)$ uttrycker att $\mathbf{P} \neq \emptyset$, vilket är sant eftersom $a \in \mathbf{P}$.
$a \in \mathbf{P} \Rightarrow m \models P(a)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \models \exists x\, P(x)$ (*1.21.5*)

(b) $\forall x\, Q(x)$
LÖSNING:
$\forall x\, Q(x)$ är falsk.
$\forall x\, Q(x)$ uttrycker att **Q** = M, vilket är falskt eftersom $c \notin \mathbf{Q}$.
$c \notin \mathbf{Q} \Rightarrow m \not\models Q(c)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \not\models \forall x\, Q(x)$ (*1.21.5*)

(c) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$
LÖSNING:
$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ är sann.
$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ uttrycker att alla P är Q (se § 5.9, s.146), vilket är sant eftersom det enda elementet a i **P** också är $\in$ **Q**: $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$.
$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ är sann omm $\mathbf{P} \cap -\mathbf{Q} = \emptyset$.
Detta villkor är uppfyllt.



$a \in \mathbf{Q} \Rightarrow m \models Q(a)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \models P(a) \rightarrow Q(a)$ (1) (*1.21.3*)

$b \in \mathbf{Q} \Rightarrow m \models Q(b)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \models P(b) \rightarrow Q(b)$ (2) (*1.21.3*)
$c \notin P \Rightarrow m \not\models P(c)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \models P(c) \rightarrow Q(c)$ (3) (*1.21.3*)
(1), (2) och (3) visar att alla element a, b, c i M satisfierar ‘$P(x) \rightarrow Q(x)$’.
(1) + (2) + (3) $\Rightarrow m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ (*1.21.4*)

(d) $\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$
LÖSNING:
$\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$ är falsk.
Eftersom $\mathbf{Q} \cap -\mathbf{P} = \{b\} \neq \emptyset$ blir
$\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$ falsk.
$b \in \mathbf{Q} \Rightarrow m \models Q(b)$ (1) (*1.21.2*)
$b \notin \mathbf{P} \Rightarrow m \not\models P(b)$ (2) (*1.21.2*)
(1) + (2) $\Rightarrow m \not\models Q(b) \rightarrow P(b)$ (*1.21.3*)
$\Rightarrow m \not\models \forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$
(*Eftersom b inte satisfierar $Q(x) \rightarrow P(x)$ är det inte alla element i M som satisfierar $Q(x) \rightarrow P(x)$. Därför är $\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$ falsk i m.*)

(e) $\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$
LÖSNING:
Satsen uttrycker att $\mathbf{P} \cap -\mathbf{Q} \neq \emptyset$ villket är falskt.
$\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$ är falsk.
$a \in \mathbf{Q} \Rightarrow m \models Q(a)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \not\models \neg Q(a)$ (*1.21.3*)
$\Rightarrow m \not\models P(a) \wedge \neg Q(a)$ (1) (*1.21.3*)
$b \in \mathbf{Q} \Rightarrow m \models Q(b)$
$\Rightarrow m \not\models \neg Q\, (b)$
$\Rightarrow m \not\models P(b) \wedge Q(b)$ (2)
$c \notin P \Rightarrow m \not\models P(c)$ (*1.21.2*)
$\Rightarrow m \not\models P(c) \wedge \neg\, Q\, (c)$ (3) (*1.21.3*)
(1) + (2) + (3) $\Rightarrow m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$ (*1.21.5*)
(*(1), (2) och (3) visar att det inte finns något element i M som satisfierar $P(x) \wedge \neg Q(x)$.*)

(f) $\forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
LÖSNING:
Satsen uttrycker att **P** innehåller högst ett element vilket är sant.
$\forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$ är sann.
Vi ska testa om $(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$ satisfieras av alla par $(x,y) \in M \times M$.
Antag $m \not\models \forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
$\not\Rightarrow m \models P\, (\alpha) \wedge P(\beta) \rightarrow \alpha = \beta$ för något $\alpha, \beta \in M$.

$\Rightarrow m \models P(\alpha)$ (1)
$m \models P(\beta)$ (2)
$m \not\models \alpha = \beta$ (3)
Av (1), (2) och **P** = {a} får vi $\alpha = \beta = a$.
(3) ger då
$m \not\models a = a$
$\Rightarrow a \neq a$ (*1.21.1*)
vilket är omöjligt. Därför
$m \models \forall x \forall y\, (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

(g) $\forall x \forall y\, (Q(x) \wedge Q(y) \rightarrow x = y)$
LÖSNING:
Satsen uttrycker att **Q** innehåller högst ett element vilket är falskt eftersom $a, b \in Q$.
$\forall x \forall y\, (Q(x) \wedge Q(y) \rightarrow x = y)$ är falsk i m.

(h) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y))$
LÖSNING:
$a \in \mathbf{Q} \Rightarrow m \models Q(a)$
$\Rightarrow m \models \exists y\, Q(y)$ (1)
(1) $\Rightarrow m \models P(a) \rightarrow \exists y\, Q(y)$ (2)
(1) $\Rightarrow m \models P(b) \rightarrow \exists y\, Q\, (y)$ (3)
(1) $\Rightarrow m \models P(c) \rightarrow \exists y\, Q\, (y)$ (4)
(2) + (3) + (4) $\Rightarrow m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, Q\, (y))$
dvs $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists x\, Q(y))$ “r sann i m.

8-5.2

Det förutsätts att planet är Euklidiskt.

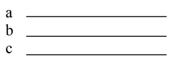
(a) $\forall x\, P(x,x)$ är sann
$\forall x\, P(x,x)$ uttrycker att varje linje är parallell med sig själv vilket betraktas som sant i geometrin.

(b) $\forall y\, R(y,y)$ är falsk.
$\forall y\, R(y,y)$ uttrycker att varje linje är vinkelrät på sig själv vilket är falskt.

(c) $\forall x \forall y\, (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ är sann.
Satsen uttrycker att P-relationen är symmetrisk vilket är sant.

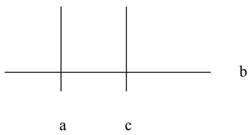
(d) $\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$ är sann.
Satsen uttrycket att R-relationen är symmetrisk.

(e) $\forall x \forall y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$är sann.
Satsen uttrycker att P-relationen är transitiv.



$P(a,b) \wedge P(b,c) \rightarrow P(a,c)$

(f) $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$ är falsk.
Satsen uttrycker att R-relationen är transitiv, vilket är falskt.



$R(a,b) \wedge R(b,c)$,
men $\neg R(a,c)$

(g) $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow P(x,z))$ är sann.
Satsen uttrycker att om två linjer är vinkelrätta på samma tredje linje, då är de två linjerna parallella.
I figuren i (f) gäller $R(a,b) \wedge R(b,c)$ och därav följer $P(a,c)$.

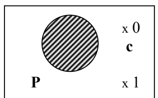
(h) $\forall x \exists y\, R(x,y)$ är sann
$\forall x \exists y\, R(x,y)$ uttrycker att varje linje är vinkelrätt på någon (annan) linje.

(i) $\exists x \forall y\, R(x,y)$ är falsk.
$\exists x \forall y\, R(x,y)$ uttrycker att det finns en linje som är vinkelrät på alla linjer (inkl. sig själv).

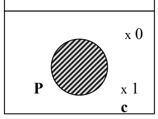
8-5.3

M = {0, 1} har 4 olika delmängder. Vi får följande möjligheter för **P**:
1. $\mathbf{P} = \emptyset$ 2. **P** = {0}
3. **P** = {1} 4. **P** = {0, 1}
För varje val av **P** har vi 2 möjliga val av **c**:
1. **c** = 0 2. **c** = 1
Totalt finns det därför 4×2 olika modeller m = (M, **P**, **c**):

1.1 $m = (\{0, 1\}, \emptyset, 0)$
$m \not\models \forall x\, P(x)$
$m \not\models \exists x\, P(x)$
$m \models \neg P(c)$



1.2 $m = (\{0, 1\}, \emptyset, 1)$
$m \not\models \forall x\, P(x)$
$m \not\models \exists x\, P(x)$
$m \models \neg P(c)$



2.1 $m = (\{0, 1\}, \{0\}, 0)$

$m \not\models \forall x\, P(x)$
$m \models \exists x\, P(x)$
$m \not\models \neg P(c)$

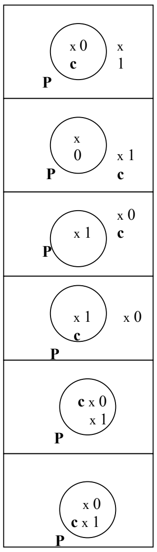
2.2 $m = (\{0, 1\}\{0\}, 1)$
$m \not\models \forall x\, P(x)$
$m \models \exists x\, P(x)$
$m \models \neg P(c)$

1.1 $m = (\{0, 1\}, \{1\}, 0)$
$m \not\models \forall x\, P(x)$
$m \models \exists x\, P(x)$
$m \models \neg P(c)$

1.2 $m = (\{0, 1\}, \{1\}, 1)$
$m \not\models \forall x\, P(x)$
$m \models \exists x\, P(x)$
$m \not\models \neg P(c)$

4.1 $m = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, 0)$
$m \models \forall x\, P(x)$
$m \models \exists x\, P(x)$
$m \not\models \neg P(c)$

4.2 $m = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, 1)$
$m \models \forall x\, P(x)$
$m \models \exists x\, P(x)$
$m \not\models \neg P(c)$



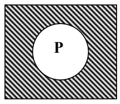
8-5.4

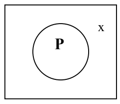
(a) $\models \forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$
BEVIS:
Vi använder den indirekta metoden.
Antag $\not\models \forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$
Då finns m sådant att
$m \not\models \forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$
$\Rightarrow$ $m \not\models P(a) \vee \neg P(a)$ för ett $a \in M$ (*enligt vilkoret för $\forall$*)
Men det är oförenligt med att $P(a) \vee \neg P(a)$ är en tautologi (*T3, s.46*)
Därför
$\models \forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$

(b) $P(x) \vee \neg P(x)$
BEVIS:
Av (a) får vi

$\models \forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$
Då $\models P(x) \vee \neg P(x)$ (*enligt Def. 2.6 (2)*)

(c) $\models \forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$
BEVIS:
Satsen uttrycker att
Antingen $-\mathbf{P} = \emptyset$ eller $-\mathbf{P} \neq \emptyset$
vilken är sant.

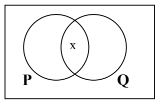


eller


OBS: Bruket av Venn-diagram är inte väsentligt, när man ska visa $\models$ A; men de bidrar till att förstå innebörden av satsen A som ska visas logiskt sann, och de bidrar till förståelsen av mekanismerna bakom logisk sanning.

Antag att det finns m sådan att
$m \not\models \forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$
Då $m \not\models \forall x\, P(x)$ (1) (*enligt villkoret för $\vee$*)
$m \not\models \exists x\, \neg P(x)$ (2) (*enligt villkoret för $\vee$*)
(1) $\Rightarrow$ $m \not\models P(a_0)$, för ett $a_0 \in M$ (*villkoret för $\forall$. Se också § 4.1*)
$\Rightarrow$ $m \models \neg P(a_0)$
$\Rightarrow$ $m \models \exists x\, \neg P(x)$
som strider mot (2)
$\therefore$ $\models \forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$

(d) $\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x\, P(x)$
BEVIS:

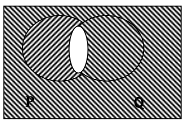


Om $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$, så $\mathbf{P} \neq \emptyset$

Antag att det finns m sådant att
$m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x\, P(x)$
Villkoret för $\rightarrow$ ger
$m \models \exists x\, P(x) \wedge Q(x)$ (1)
$m \not\models \exists x\, P(x)$ (2)
(1) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0) \wedge Q(a_0)$ för ett a0 $\in$ M
$\Rightarrow m \models P(a_0)$ (*villkoret för $\wedge$*)

$\Rightarrow m \models \exists x\, P(x)$
som är oförenligt med (2)

(e) $\models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$
BEVIS:



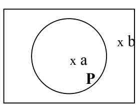
$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q\, (x))$ sann ( )
$\forall x\, P(x)$ sann ( )
De två tillsammans tvingar fram att $\forall x\, Q(x)$ blir sann (allt utanför Q är streckat).

Antag att det finns m sådan att
$m \not\models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x))$
$\Rightarrow$ $m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ (1)
$m \not\models \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ (2)
(2) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (3)
$m \not\models \forall x\, Q(x)$ (4)
(4) och villkoret 1.21.4 för $\forall$ ger
$m \not\models Q(a_0)$ för något $a_0 \in M$ (5)
(1) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0) \rightarrow Q\, (a_0)$ (6)
(3) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0)$ (7)
(6) + (7) och satslogik (modus ponens) ger
$m \models Q(a_0)$
som motsäger (5).

8-5.5

För varje sats räcker det att hitta en modell m sådant att satsen är falsk i m. Vid konstruktionen av m är Venn-diagram och grafer (pil-system) ofta till stor hjälp.

(a) $\not\models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$
BEVIS:
Vi måste se till att få förledet sant och efterledet falskt.
$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$
S F



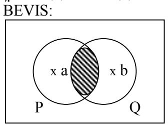
$\exists x\, P(x)$ är sann (x a)
$\forall x\, P(x)$ är falsk (x b)

Med ledning av Venn-diagramet definierar vi

$m = (M, \mathbf{P})$
$= (\{a, b\}, \{a\})$
Då
$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow m \models P\, (a)$
$\Rightarrow m \models \exists x\, P(x)$ (1)
$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow m \not\models P\, (b)$
$\Rightarrow m \not\models \forall x\, P(x)$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow m \not\models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$
dvs m är ett motexempel mot
$\models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$

(b) $\not\models \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$
BEVIS:
Vi måste se till att det finns ett värde på x sådant att P(x) är sann samtidigt med att $\forall x\, P(x)$ är falsk, dvs $\mathbf{P} \neq$ M. Vi använder samma modell som i 8-5.5 (a).
$m = (M, \mathbf{P}) = (\{a, b\}, \{a\})$
$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow m \not\models P(b)$
$\Rightarrow m \not\models \forall x\, P(x)$ (1)
$a \in P$ $\Rightarrow m \models P(a)$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow m \not\models P(a) \rightarrow \forall x\, P(x)$
$\Rightarrow m \not\models \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

(c) $\not\models \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
BEVIS:



$\exists x\, P(x)$ sann (x a)
$\exists x\, Q(x)$ sann (x b)
$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ falsk ( )

Med ledning av Venn-diagrammet definierar vi
$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a, b\}, \{a\}, \{b\})$
$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \models P(a)$
$\Rightarrow$ $m \models \exists x\, P(x)$ (1)
$b \in \mathbf{Q}$ $\Rightarrow$ $m \models Q(b)$
$\Rightarrow$ $m \models \exists x\, Q(x)$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow$ $m \models \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ (3)
$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \not\models P(b)$
$\Rightarrow$ $m \not\models P(b) \wedge Q(b)$ (4)
$a \notin Q$ $\Rightarrow$ $m \not\models Q(a)$

$\Rightarrow \quad m \not\models P(a) \wedge Q(a) \qquad (5)$

(4) + (5) och villkoret för $\exists$ ger

$m \models \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \qquad (6)$

$(3) + (6) \Rightarrow \quad m \models \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$

Alternativ:

M = $\underline{N}$ = {0, 1, 2, …}

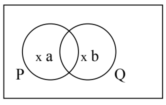
P = {x ∈ M | x är jämnt}

Q = {x ∈ M | x är udda}

Med denna tolkning säger förledet att det finns jämna tal och det finns udda tal, vilket är sant. Efterledet säger att det finns ett tal som är både jämnt och udda, vilket är falskt.

(d) $\not\models (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

BEVIS:



$(P(x) \rightarrow Q(x))$ falsk (x a)

$\forall x\, P(x)$ falsk (x b)

Då

$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ sann

F S

Vi måste se till att $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ är falsk, dvs $\mathbf{P} \cap -\mathbf{Q} \neq \emptyset$. Vi måste se till att $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ är sann, dvs $\forall x\, P(x)$ är falsk eller $\forall x\, Q(x)$ är sann. (x a) gör $\forall x\, Q(x)$ falsk. Därför måste vi se till att $\forall x\, P(x)$ är falsk. Det kan vi göra genom att ha $\mathbf{Q} \cap -\mathbf{P} \neq \emptyset$ eller $-\mathbf{Q} \cap -\mathbf{P} \neq \emptyset$. (I diagrammet har vi valt $\mathbf{Q} \cap -\mathbf{P} \neq \emptyset$ (x b).)

m = (M, **P**, **Q**) = ({a, b}, {a}, {b})

b ∉ P	$\Rightarrow m \not\models P(b)$	
	$\Rightarrow m \not\models \forall x\, P(x)$	
	$\Rightarrow m \models \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$	(1)
a ∈ **P**	$\Rightarrow m \models P(a)$	(2)
a ∉ Q	$\Rightarrow m \not\models Q(a)$	(3)
(2) + (3)	$\Rightarrow m \not\models P(a) \rightarrow Q(a)$	
	$\Rightarrow m \not\models \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	(4)
(1) + (4)	$\Rightarrow m \not\models (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	

8-5.6

(a) $\models \forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall x\, R(x,x)$

BEVIS:

2-ställiga relationer kan representeras av grafer, dvs system av punkter förbundna med pillar (se Avsnitt 3 i Kapitel 7).

Exempel:

Satsen säger att om alla skickar en pil till alla, så skickar alla en pil till sig själv.

Antag att det finns m = (M, **R**), **R** ⊆ M × M, sådant att

$m \not\models \forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall x\, R(x,x)$

$\Rightarrow \quad m \models \forall x \forall y\, R(x,y) \qquad (1)$

$m \not\models \forall x\, R(x,x) \qquad (2)$

$(2) \quad \Rightarrow \quad m \not\models R(a_0,a_0)$ för ett $a_0 \in M$

Av (1) får vi för x = y = a_0

$m \models R(a_0,a_0)$

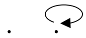
motsägelse.

$\therefore\ \models \forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall x\, R(x,x)$

(b) $\models \exists x\, R(x,x) \rightarrow \exists x \exists y\, R(x,y)$

BEVIS:

Exempel:



Om någon skickar en pil till sig själv, så skickar åtminstone en en pil någonstans.

Antag att det finns m = (M, **R**) sådant att

$m \not\models \exists x\, R(x,x) \rightarrow \exists x \exists y\, R(x,y)$

$\Rightarrow \quad m \models \exists x\, R(x,x) \qquad (1)$

$m \not\models \exists x \exists y\ R(x,y) \qquad (2)$

$(1) \Rightarrow \quad m \models R(a_0,a_0)$ för ett $a_0 \in M$

$\Rightarrow \quad m \models \exists y\, R(a_0,y)$

eftersom R (a_0,y) satisfieras av y = a_0.

$\Rightarrow \quad m \models \exists x \exists y\, R(x,y)$

som motsäger (2).

(c) $\models \exists x \forall y\, \neg R(x,y) \rightarrow \neg \forall x \exists y\, R(x,y)$

BEVIS:

Förledet säger att det finns någon som inte skickar en pil. Efterledet säger att inte alla skickar en pil. Vi ser att efterledet följer ur förledet. Antag att det finns m sådan att

$m \not\models \exists x \forall y\, \neg R(x,y) \rightarrow \neg \forall x \exists y\, R(x,y)$

$\Rightarrow \quad m \models \exists x \forall y\, \neg R(x,y) \qquad (1)$

$m \not\models \neg \forall x \exists y\, R(x,y) \qquad (2)$

$(2) \Rightarrow \quad m \models \forall x \exists y\, R(x,y) \qquad (3)$

$(1) \Rightarrow \quad m \models \forall y\, \neg R(a_0,y) \qquad (4)$

$(3) \Rightarrow \quad m \models \exists y\, R(a_0,y) \qquad (5)$

(*Vi låter (1) välja värde för x. Det finns kanske bara det ena a_0 som substituerar $\exists y\,(R(a_0,y)$. Därefter kanvi enligt villkoret för $\forall$ i (3) välja vilket värde vi vill för x. Speciellt kan vi välja x = a_0.*)

$(5) \quad \Rightarrow \quad m \models R(a_0,b_0)$ för ett $b_0 \in M$ (6)

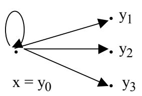
$(4) \quad \Rightarrow \quad m \models \neg R(a_0,b_0)$

$\Rightarrow \quad m \not\models R(a_0,b_0)$

som motsäger (6). (Här låter vi (5) välja värde på y*)

(d) $\models \exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$

BEVIS:



Förledet säger att det finns någon som skickar en pil till alla (inklusive sig själv). Efterledet säger att alla mottager en pil, vilket är sant.

Antag att det finns m sådan att

$m \not\models \exists x \forall y\, R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\, R(x,y)$

$\Rightarrow \quad m \models \exists x \forall y\, R(x,y) \qquad (1)$

$m \not\models \forall y \exists x\, R(x,y) \qquad (2)$

$(1) \quad \Rightarrow \quad m \models \forall y\, R(a0,y)$ för ett $a_0 \in M$ (3)

$(2) \quad \Rightarrow \quad m \not\models \exists x\, R(x,b_0)$ för ett $b_0 \in M$ (4)

(*(1) väljer värde på x; (2) väljer värde på y. Sedan är det fritt för oss att i (3) välja y = b_0 och i (4) välja x = a_0.*)

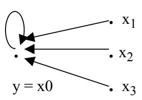
$(3) \quad \Rightarrow \quad m \models R(a_0, b_0)$

$(4) \quad \Rightarrow \quad m \not\models R(a_0, b_0)$

som motsäger varandra.

(e) $\models \exists y \forall x\, R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\, R(x,y)$

BEVIS:



Förledet uttrycker att någon får en pil från alla (inklusive från sig själv). Efterledet uttrycker att alla skickar åtminstone en pil.

Antag att det finns m sådan att

$m \not\models \exists y \forall x\, R(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\, R(x,y)$

$\Rightarrow \quad m \models \exists y \forall x\, R(x,y) \qquad (1)$

$m \not\models \forall x \exists y\, R(x,y) \qquad (2)$

$(1) \quad \Rightarrow \quad m \models \forall x\, R(x,b_0)$ för ett $b_0 \in M$ (3)

$(2) \quad \Rightarrow \quad m \models \exists y\, R(a_0,y)$ för ett $a_0 \in M$ (4)

$(3) \quad \Rightarrow \quad m \models R(a_0,b_0)$

$(4) \quad \Rightarrow \quad m \not\models R(a_0,b_0)$

som motsäger varandra.

8-5.7

Vi ska hitta modeller i vilka de fyra satserna är falska. Härvid kan man ha nytta av grafer (se §§ 3.20-21 i Kapitel 7) och scheman (se §§ 7.22-23 i Kapitel 7).

(a) $\not\models \forall x\, R(x,x) \rightarrow \forall x \forall y\, R(x,y)$

BEVIS:

Om alla skickar en pil till sig själv, så skickar alla en pil till alla. Det följer inte.

Definiera

m = (M, **R**) = ({a,b}, {(a,a), (b,b)})

(a,a) ∈ **R**	$\Rightarrow$	$m \models R(a,a)$	(1)
(b,b) ∈ **R**	$\Rightarrow$	$m \models R(b,b)$	(2)
(1) + (2)	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\, R(x,x)$	(3)
(a,b) ∉ R	$\Rightarrow$	$m \not\models R(a,b)$	
	$\Rightarrow$	$m \not\models \forall x \forall y\, R(x,y)$	(4)
(3) + (4)	$\Rightarrow$	$m \not\models \forall x\, R(x,x) \rightarrow \forall x \forall y\, R(x,y)$	

Alternativ:

Definiera m = (M, **R**) genom att låta

M= {0, 1, 2, …}

R vara identitetsrelationen =.

Eftersom varje tal a är identiskt med sig själv, så

$m \models R(a,a)$ för godtyckligt a ∈ M

$\Rightarrow \quad m \models \forall x\, R(x,x)$

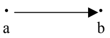
$0 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad m \not\models R(0,1)$

$\Rightarrow \quad m \not\models \forall x \forall y\, R(x,y)$

(b) $\not\models \exists x \exists y\, R(x,y) \rightarrow \exists x\, R(x,x)$

LÖSNING:

Om någon skickar en pil någonstans, skickar någon en pil till sig själv.



Förledet sant.
Efterledet falskt.

Sätt $m = (M, \mathbf{R}) = (\{a,b\}, \{(a,b)\})$

$(a,b) \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow m \models R(a,b)$
$\Rightarrow m \models \exists y\, R(a,y)$
$\Rightarrow m \models \exists x \exists y\, R(x,y)$ (1)
$(a,a) \notin \mathbf{R} \quad \Rightarrow m \not\models R(a,a)$ (2)
$(b,b) \notin \mathbf{R} \quad \Rightarrow m \not\models R(b,b)$ (3)
(2) + (3) $\Rightarrow m \not\models \exists x\, R(x,x)$ (4)
(1) + (4) $\Rightarrow m \not\models \exists x \exists y\, R(x,y) \to \exists x\, R(x,x)$

Alternativ ("naturlig" modell):
Låt till exempel $m = (M, \mathbf{R}) = (M, \neq)$, där M har minst 2 element. Med den tolkningen säger nämligen förledet att det finns minst två element, sant. Efterledet $\exists x\, R(x,x)$ säger att det finns ett element som inte är identiskt med sig självt, falskt.

(c) $\not\models \forall y \exists x\, R(x,y) \to \exists x \forall y\, R(x,y)$
BEVIS:
Förledet säger att alla mottager minst en pil. Efterledet säger att någon skickar en pil till alla.

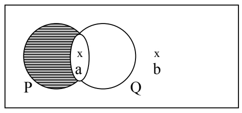
Förledet är sant. Efterledet är falskt.

Låt $m = (M, \mathbf{R}) = (\{a,b\}, \{(a,b), (b,a)\})$
$(a,b) \in R \quad \Rightarrow \quad m \models R(a,b)$
$\Rightarrow \quad m \models \exists x\, R(x,b)$ (1)
$(b,a) \in R \quad \Rightarrow \quad m \models R(b,a)$
$\Rightarrow \quad m \models \exists x\, R(x,a)$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow \quad m \models \forall y \exists x\, R(x,y)$ (3)
$(a,a) \notin \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad m \not\models R(a,a)$
$\Rightarrow \quad m \not\models \forall y\, R(a,y)$ (4)
$(b,b) \notin \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad m \not\models R(b,b)$
$\Rightarrow \quad m \not\models \forall y\, R(b,y)$ (5)
(4) + (5) $\Rightarrow \quad m \not\models \exists x \forall y\, R(x,y)$ (6)
(3) + (6) $\Rightarrow \quad m \not\models \forall y \exists x\, R(x,y) \to \exists x \forall y\, R(x,y)$

(d) $\models \forall x \exists y\, R(x,y) \to \exists y \forall x\, R(x,y)$
BEVIS:
Förledet uttrycker att alla skickar minst en pil. Efterledet uttrycker att någon får en pil från alla.
Vi kan använda samma modell som i (c), dvs.
$m = (\{a,b\}, \{(a,b), (b,a)\}) = (M, \mathbf{R})$
Vi avstår från att utarbeta detaljerna här. Beviset för att modellen är adekvat liknar det i (c).

8-5.8
(a) $(\exists x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \to Q(x))$
BEVIS:
Antag att det finns $m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$ sådan att
$m \not\models (\exists x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \to Q(x))$
$\Rightarrow \quad m \models \exists x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$ (1)
$m \not\models \forall x\, (P(x) \to Q(x))$ (2)
(2) $\Rightarrow \quad m \not\models P(a_0) \to Q(a_0)$ för ett $a_0 \in M$ (3)
(3) $\Rightarrow \quad m \models P(a_0)$ (4)
$m \not\models Q(a_0)$ (5)
(4) $\Rightarrow \quad m \models \exists x\, P(x)$ (6)
(1) + (6) $\Rightarrow \quad m \models \forall x\, Q(x)$
$\Rightarrow \quad m \models Q(a_0)$
som motsäger (5).

(b) $\not\models \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$
LÖSNING:



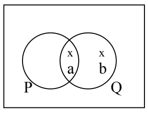
$\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ sann ( )
$\exists x\, P(x)$ sann (x a)
$\forall x\, Q(x)$ falsk (x b)

Definiera
$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a,b\}, \{a\}, \{a\})$
$a \in \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad m \models Q(a)$
$\Rightarrow \quad m \models P(a) \to Q(a)$ (1)
$b \notin \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad m \not\models P(b)$
$\Rightarrow \quad m \models P(b) \to Q(b)$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow \quad m \models \forall x\, (P(x) \to Q(x)$ (3)
$a \in \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad m \models P(a)$

$\Rightarrow \quad m \models \exists x\, P(x)$ (4)
$b \notin \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad m \not\models Q(b)$
$\Rightarrow \quad m \not\models \forall x\, Q(x)$ (5)
(4) + (5) $\Rightarrow \quad m \not\models \exists x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$ (6)
(3) + (6) $\Rightarrow \quad m \not\models \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \to \forall x\, Q(x))$

(c) $\models \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \to \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
BEVIS:
Antag att det finns m sådan att
$m \not\models \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \to \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
$\Rightarrow \quad m \models \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$ (1)
$m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (2)
(1) $\Rightarrow \quad m \models \forall x\, P(x)$ (3)
$m \models \exists y\, Q(y)$ (4)
(4) $\Rightarrow \quad m \models Q(a_0)$ för ett $a_0 \in M$ (5)
(3) $\Rightarrow \quad m \models P(a_0)$ (6)
(5) + (6) $\Rightarrow \quad m \models P(a_0) \wedge Q(a_0)$
$\Rightarrow \quad m \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$
som är oförenlig med (2).

(d) $\not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$
LÖSNING:



I Venn-diagrammet har vi
$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ sann (x a)
$\forall x\, P(x)$ falsk (x b)

$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a,b\}, \{a\}, \{a,b\})$
$a \in \mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad m \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (1)
$b \notin \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad m \not\models P(b)$
$\Rightarrow \quad m \not\models \forall x\, P(x)$
$\Rightarrow \quad m \not\models \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$ (2)
(1) + (2) $\Rightarrow \quad m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$

8-5.9

(a) $\models \forall x \forall y\, (x = y \to y = x)$
BEVIS:
Satsen uttrycker att = -relationen är symmetrisk.
Antag att det finns m sådan att
$m \not\models \forall x \forall y\, (x = y \to y = x)$
Då finns a, b ∈ M sådana att
$m \not\models a = b \to b = a$
$\Rightarrow \quad m \models a = b$
$m \not\models b = a$
Då a = b och b ≠ a enligt § 1.21.1, vilket är omöjligt.

(b) $\models \forall x \forall y \forall z\, (x = y \wedge y = z \to x = z)$
BEVIS:
Satsen uttrycker att =- relationen är transitiv.
Antag att det finns m sådan att
$m \not\models \forall x \forall y \forall z\, (x = y \wedge y = z \to x = z)$
Då finns a, b, c ∈ M sådana att
$m \not\models a = b \wedge b = c \to a = c$
$\Rightarrow \quad m \models a = b \wedge b = c$ (1)
$m \not\models a = c$ (2)
(1) $\Rightarrow \quad m \models a = b$ (3)
$m \models b = c$ (4)
(3) + (4) $\Rightarrow$ a = b och b = c enligt § 1.21.1
Då a = c. §1.21.1 ger
$m \models a = c$
Som strider mot (2).

(c) $\models \forall x \forall y\, (x = y \to f(x) = f(y))$
BEVIS:
Satsen uttrycker en grundläggande egenskap hos alla funktioner (se Def. 5.1 i Kapitel 7). Den bör därför vara logiskt sann.
Antag att det finns $m = (M, \mathbf{f})$ sådan att
$m \not\models \forall x \forall y\, (x = y \to f(x) = f(y))$
Då finns a, b ∈ M sådana att
$m \not\models a = b \to f(a) = f(b)$
$\Rightarrow \quad m \models a = b$
$m \not\models f(a) = f(b)$
Då a = b och f(a) ≠ f(b), vilket är omöjligt enligt definitionen av funktions-begreppet (se § 5.1 i Kapitel 7).

(d) $\not\models \forall x \forall y\, (f(x) = f(y) \to x = y)$
BEVIS:

Satsen uttrycker att **f** är en injektiv funktion (se §§ 5.14 – 5.15 i Kapitel 7).
Eftersom det finns icke-injektiva funktioner, kan satsen inte vara logiskt sann.

Definiera $\mathcal{M}$ = (M, **f**) genom

M = {0, 1}

x	f(x)
0	0
1	0

Eftersom **f**(0) = **f**(1) = 0, så

$\mathcal{M} \models f(0) = f(1)$ (1)

$0 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \not\models 0 = 1$ (2)

$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \not\models f(0) = f(1) \to 0 = 1$

$\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \to x = y)$

(e) $\models \exists x\ x = a$

BEVIS:

Vi använder den direkta metoden.

Låt $\mathcal{M}$ = (M, **a**) vara en godtycklig modell.

a = **a** $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models a = a$ (1)

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists x\ x = a$ (2)

(*Vi visar att 'x = a' är satisfierad i $\mathcal{M}$. Därför följer (2).*)

Eftersom $\exists x\ x = a$ är sann i en godtycklig modell, gäller $\models \exists x\ x = a$.

8-5.10

(a) Låt

$\mathcal{M}_1 = (M_1, *, \mathbf{e}) = (\{\mathbf{e}\}, *, \mathbf{e})$

där **e** * **e** = **e**

e * **e** = **e** $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1 \models$ **e** * **e** = **e**

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1 \models$ **e** * **e** = e

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1 \models \exists y$ **e** * y = e

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1 \models \forall x \exists y\ x * y = e$ (A2)

e * **e** = **e** * **e** $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1 \models$ **e** * **e** = **e** * **e**

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_1 \models \forall y$ **e** * y = y * **e**

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall x \forall y\ x * y = y * x$ (A1)

(b) $\mathcal{M}_2 = (M_2, *, \mathbf{e}) = (\{a, b\}, *, a)$

där * definieras genom tabellen

*	a	b
a	b	a
b	a	b

(A1) uttrycker att * är kommutativ. Enligt § 7.28 i Kapitel 7 ska tabellen vara symmetrisk kring huvuddiagonalen.

(A2) är sann $\Leftrightarrow$ varje rad innehåller minst ett a.

Vi har

a * a = b = a * a
a * b = a = b * a
b * a = a = a * b
b * b = b = b * b

Därför (1):

$\mathcal{M} \models a * a = a * a$

$\mathcal{M} \models a * b = b * a$

$\mathcal{M} \models b * a = a * b$

$\mathcal{M} \models b * b = b * b$

(1) $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall x \forall y\ x * y = y * x$ (A1)

a * b = a $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models a * b = a$

e = a $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models a * b = e$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists y\ a * y = e$ (2)

b * a = a $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models b * a = a$

e = a $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models b * a = e$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists y\ b * y = e$ (3)

(2) + (3) $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall x \exists y\ x * y = e$ (A2)

(c) När man ska definiera en oändlig modell $\mathcal{M}$, låter man M vara en talmängd till exempel $\underline{N}$, $\underline{Z}_+$, $\underline{Z}$, $\underline{Q}$, $\underline{Q}_+$, eller $\underline{R}$.

Låt $\mathcal{M}$ = (M, *, e) = ($\underline{Z}$, +, 0) där

$\underline{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

+ är vanlig addition.

Eftersom + är kommutativ,

$\mathcal{M} \models \forall x \forall y\ x * y = y * x$

$\therefore$ $\mathcal{M} \models$ A1

För godtyckligt $a \in M$ gäller

a + (–a) = 0

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models a * (-a) = e$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists y\ a * y = e$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall x \exists y\ x * y = e$

$\therefore$ $\mathcal{M} \models$ A2

Alternativ:

$\mathcal{M}$ = (M, *, e) = ($\underline{Q}_+$, ·, 1) där

$\underline{Q}_+$ är mängden av positiva rationella tal

· är vanlig multiplikation

Kapitel 9. Lösningar

9-7.1

(a) $\forall x\ P(x) \models \forall y\ P(y)$

BEVIS:

$\mathcal{M} \models \forall x\ P(x)$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a)$ för godtyckligt $a \in M$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall y\ P(y)$

Vi har visat att $\forall x\ P(x)$ och $\forall y\ P(y)$ har samma sanningsvärde i samma modeller. Därför.

$\forall x\ P(x) \dashv\models \forall y\ P(y)$

(b) $\exists x\ P(x) \models \exists y\ P(y)$

BEVIS:

$\mathcal{M} \models \exists x\ P(x)$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a_0)$ för ett $a_0 \in M$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists y\ P(y)$

$\therefore$ $\exists x\ P(x) \dashv\models \exists y\ P(y)$

(c) $\forall x\ P(x) \models \exists x\ P(x)$

BEVIS:

Antag att det finns m sådan att

$\mathcal{M} \models \forall x\ P(x)$ (1)

$\mathcal{M} \not\models \exists x\ P(x)$ (2)

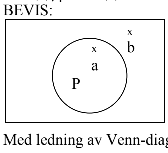
(1) $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a)$ för godtyckligt $a \in M$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists x\ P(x)$ (*jfr. § 4.1, s. 239*)

som motsäger (2).

(d) $\exists x\ P(x) \not\models \forall x\ P(x)$

BEVIS:



$\exists x\ P(x)$ sann (x a)

$\forall x\ P(x)$ falsk (x b)

Med ledning av Venn-diagrammet definierar vi ett motexempel

$\mathcal{M}$ = (M, **P**) = ({a, b}, {a})

$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a)$ (1)

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists x\ P(x)$

$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models P(b)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models \forall x\ P(x)$ (2)

(e) $P(x) \not\Leftrightarrow P(y)$

BEVIS:

Enligt Definition 2.3 gäller

$P(x) \Leftrightarrow P(y)$ omm $\models \forall x \forall y\ (P(x) \leftrightarrow P(y))$

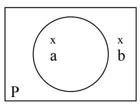
Jag visar

$\not\models \forall x \forall y\ (P(x) \leftrightarrow P(y))$

Vi ska definiera en modell sådan att

$\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y\ (P(x) \leftrightarrow P(y))$

$\forall x \forall y\ (P(x) \leftrightarrow P(y))$ är sann omm alla element finns i **P** eller alla element finns utanför **P**. Vi får $\forall x \forall y\ (P(x) \leftrightarrow P(y))$ falsk genom att se till att det finns ett element utanför **P** och det finns ett element i **P**.



$\mathcal{M}$ = (M, **P**) = ({a, b}, {a})

$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a)$ (1)

$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models P(b)$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models P(a) \leftrightarrow P(b)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y\ (P(x) \leftrightarrow P(y))$

(f) $P(c) \models \exists x\ P(x)$

BEVIS:

Antag att det finns $\mathcal{M}$ = (M, **P**, **c**) = (M, **P**, a) sådan att

$\mathcal{M} \models P(c)$ (1)

$\mathcal{M} \not\models \exists x\ P(x)$ (2)

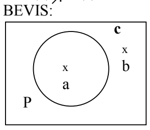
(1) $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a)$ (*eftersom **c** = a*)

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists x\ P(x)$

som motsäger (2).

(g) $\exists x\ P(x) \not\models P(c)$

BEVIS:



$\exists x\ P(x)$ sann (x a)

P(**c**) falsk (x b)

Motexempel: $\mathcal{M}$ = (M, **P**, **c**) = ({a,b}, {a}, b)

$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models P(a)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \exists x\ P(x)$ (1)

$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \not\models P(b)$

$\Rightarrow$ $m \not\models P(c)$ (*eftersom **c** = b*) (2)

(h) $\exists x\exists y\,(P(x)\wedge\neg P(y)) \dashv\models \exists x\,P(x)\wedge\exists x\,\neg P(x)$

(I) $\exists x\exists y\,(P(x)\wedge\neg P(y)) \models \exists x\,P(x)\wedge\exists x\,\neg P(x)$

BEVIS:

Antag att det finns m sådan att

$m \models \exists x\exists y\,(P(x)\wedge\neg P(y))$ (1)

$m \not\models \exists x\,P(x)\wedge\exists x\,\neg P(x)$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $m \models \exists y\,(P(a_0)\wedge\neg P(y))$ för ett $a_0\in M$ (3)

(3) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0)\wedge\neg P(b_0)$ för ett $b_0\in M$ (4)

(4) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0)$ (5)

$m \models \neg P(b_0)$ (6)

(5) $\Rightarrow$ $m \models \exists x\,P(x)$ (7)

(6) $\Rightarrow$ $m \models \exists x\,\neg P(x)$ (8)

(7) + (8) $\Rightarrow$ $m \models \exists x\,P(x)\wedge\exists x\,\neg P(x)$

som motsäger (2).

(II) $\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,\neg P(x) \models \exists x\exists y\,(P(x)\wedge\neg P(y))$

BEVIS:

Antag att det finns m sådan att

$m \models \exists x\,P(x)\wedge\exists x\,\neg P(x)$ (1)

$m \not\models \exists x\exists y\,(P(x)\wedge\neg P(y))$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $m \models \exists x\,P(x)$ (3)

$m \models \exists x\,\neg P(x)$ (4)

(3) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0)$ för ett $a_0\in M$ (5)

(4) $\Rightarrow$ $m \models \neg P(b_0)$ för ett $b_0\in M$ (6)

(5) + (6) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0)\wedge\neg P(b_0)$

$\Rightarrow$ $m \models \exists y\,(P(a_0)\wedge\neg P(y))$

$\Rightarrow$ $m \models \exists x\exists y\,(P(x)\wedge\neg P(y))$

som är oförenlig med (2).

9-7.2

(a) $\forall x\forall y\,P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\forall x\,P(x,y)$

BEVIS:

$m \models \forall x\forall y\,P(x,y)$

$\Leftrightarrow$ $m \models \forall y\,P(a,y)$ för godtyckligt $a\in M$

$\Leftrightarrow$ $m \models P(a,b)$ för godtyckligt $a\in M$ och godtyckligt $b\in M$

$\Leftrightarrow$ $m \models \forall x\,P(x,b)$ för godtyckligt $b\in M$

$\Leftrightarrow$ $m \models \forall y\forall x\,P(x,y)$

Vi ser att $\forall x\forall y\,P(x,y)$ och $\forall y\forall x\,P(x,y)$ är sanna i exact samma modeller. Alltså är de logiskt ekvivalenta.

(b) $\exists x\exists y\,P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\exists x\,P(x,y)$

BEVIS:

$m \models \exists x\exists y\,P(x,y)$

$\Leftrightarrow$ $m \models P(a_0, b_0)$ för något par $a_0, b_0\in M$

$\Leftrightarrow$ $m \models \exists y\exists x\,P(x,y)$

(c) $\forall x\forall y\,P(x,y) \models \forall x\,P(x,x)$

BEVIS:

Tolkning i termer av grafer:

Premissen: Alla skickar en pil till alla , inklusive sig själv.

Konklusionen: Alla skickar en pil till sig själv.

Tolkning i termer av scheman:

Premissen: Varje ruta i schemat har ett kryss.

Konklusionen: Varje ruta i huvuddiagonalen har ett krys.

	a	b
a	x	x
b	x	x

Antag att det finns m sådan att

$m \models \forall x\forall y\,P(x,y)$ (1)

$m \not\models \forall x\,P(x,x)$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $m \models \forall y\,P(a,y)$ för godtyckligt $a\in M$

$\Rightarrow$ $m \models P(a,a)$

$\Rightarrow$ $m \models \forall x\,P(x,x)$

som motsäger (2).

(d) $\forall x\,P(x,x) \models \forall x\forall y\,P(x,y)$

BEVIS:

Av tolkningarna i (c) framgår att en modell motsvarande grafen och schemat ska duga som motexempel:

a b

	a	b
a	x	
b		x

$m = (M, \mathbf{P}) = (\{a,b\},\{(a,a), (b,b)\})$

$(a,a)\in\mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \models P(a,a)$ (1)

$(b,b)\in\mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \models P(b,b)$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\,P(x,x)$ (3)

$(a,b)\notin P$ $\Rightarrow$ $m \not\models P(a,b)$

$\Rightarrow$ $m \not\models \forall x\forall y\,P(x,y)$ (4)

Alternativ:

M = <u>N</u> = {0, 1, 2, …}

$\mathbf{P}(x,y) \Leftrightarrow x = y$

Då säger premissen att $\forall x\; x = x$, sant. Konklusionen säger att $\forall x\forall y\; x = y$, dvs. Det finns högst ett tal, vilket är falskt.

(e) $\exists x\,P(x,x) \models \exists x\exists y\,P(x,y)$

BEVIS:

Antag att det finns m sådan att

$m \models \exists x\,P(x,x)$ (1)

$m \not\models \exists x\exists y\,P(x,y)$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0, a_0)$ för ett $a_0\in M$

$\Rightarrow$ $m \models \exists y\,P(a_0, y)$

$\Rightarrow$ $m \models \exists x\exists y\,P(x,y)$

som motsäger (2).

(f) $\exists x\exists y\,P(x,y) \not\models \exists x\,P(x,x)$

BEVIS:

Tolkning (grafer):

Premissen: Någon skickar en pil någonstans.

Konklusionen: Någon skickar en pil till sig själv. (Följer inte.)

Tolkning (scheman):

Premissen: Schemat innehåller minst ett x.

Konklusionen: Huvuddiagonalen innehåller minst ett x. (Följer inte.)

Motexempel ges av grafen och schemat:

a b

	a	b
a		x
b		

$m = (M, \mathbf{P}) = (\{a, b\}, \{(a, b\})$

$(a,b)\in\mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \models P(a,b)$

$\Rightarrow$ $m \models \exists y\,P(a,y)$

$\Rightarrow$ $\underline{m \models \exists x\exists y\,P(x,y)}$ (1)

$(a,a)\notin\mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \not\models P(a,a)$ (2)

$(b,b)\notin\mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \not\models P(b,b)$ (3)

(2) + (3) $\Rightarrow$ $\underline{m \not\models \exists x\,P(x,x)}$ (4)

9-7.3

(a) $\forall x\,A(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\,\neg A(x)$

(I) $\forall x\,A(x) \Rightarrow \neg\exists x\,\neg A(x)$

BEVIS:

Antag att det finns m sådan att

$m \models \forall x\,A(x)$ (1)

$m \not\models \neg\exists x\,\neg A(x)$ (2)

(2) $\Rightarrow$ $m \models \exists x\,\neg A(x)$

$\Rightarrow$ $m \models \neg A(a_0)$ för något $a_0\in M$

$\Rightarrow$ $m \not\models A(a_0)$ (3)

(1) $\Rightarrow$ $m \models A(a_0)$

som motsäger (3).

(II) $\neg\exists x\,\neg A(x) \Rightarrow \forall x\,A(x)$

BEVIS:

Antag att det finns m sådan att

$m \models \neg\exists x\,\neg A(x)$ (1)

$m \not\models \forall x\,A(x)$ (2)

(2) $\Rightarrow$ $m \not\models A(a_0)$ för ett $a_0\in M$ (3)

(1) $\Rightarrow$ $m \not\models \exists x\,\neg A(x)$

$\Rightarrow$ $m \not\models \neg A(a_0)$

$\Rightarrow$ $m \models A(a_0)$

som motsäger (3).

(b) $\exists x\,A(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\,\neg A(x)$

BEVIS:

$\neg\forall x\,\neg A(x)$ $\Leftrightarrow \neg\neg\exists x\,\neg\neg A(x)$ (*7.3 (a)*)

$\Leftrightarrow \exists x\,\neg\neg\,A(x)$ (*Dubbl. Neg., (SE1)*)

$\Leftrightarrow \exists x\,A(x)$ (*Dubbl. Neg., (SE1)*)

(c) $\neg\forall x\,A(x) \Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)$

BEVIS:

$\neg\forall x\,A(x) \Leftrightarrow \neg\neg\exists x\,\neg A(x)$ (*7.3 (a)*)

$\Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)$ (*Dubbl. Neg., (SE1)*)

(d) $\neg\exists x\,A(x) \Leftrightarrow \forall x\,\neg A(x)$

BEVIS:

$\forall x\,\neg A(x)$ $\Leftrightarrow \neg\exists x\,\neg\neg A(x)$ (*7.3 (a)*)

$\Leftrightarrow \neg\exists x\,A(x)$ (*Dubbl. Neg., (SE1)*)

9-7.4

(a) $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)$

(I) $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \models \forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)$

BEVIS:
För omväxlingens skull försöker vi använda den direkta bevismetoden.
Låt m vara en godtycklig modell sådan att

$m \models \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$
$\Rightarrow$ $m \models P(a) \wedge Q(a)$ för godtyckligt $a \in M$
$\Rightarrow$ $m \models P(a)$ (1)
$\Rightarrow$ $m \models Q(a)$ (2)
(1) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (3)
(*eftersom a är godtycklig*)
(2) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, Q(x)$ (4)
(3) + (4) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

(II) $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \models \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$
BEVIS:
Vi använder den indirekta metoden.
Antag att det finns m sådan att

$m \models \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ (1)
$m \not\models \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ (2)
(1) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (3)
$m \models \forall x\, Q(x)$ (4)
(3) $\Rightarrow$ $m \models P(a)$ för godtyckligt $a \in M$
(4) $\Rightarrow$ $m \models Q(a)$ (6)
(5) + (6) $\Rightarrow$ $m \models P(a) \wedge Q(a)$
$\Rightarrow$ $m \models \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ (7)
(*eftersom a är godtycklig*)
(1) och (7) är oförenliga.

(b) $\forall x\, P(x) \vee \forall Q(x)) \models \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$
BEVIS:
Antag att det finns $m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$ sådant att

$m \models \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ (1)
$m \not\models \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ (2)
(2) $\Rightarrow$ $m \not\models P(a_0) \vee Q(a_0)$ för ett $a_0 \in M$
$\Rightarrow$ $m \not\models P(a_0)$ (3)
$m \not\models Q(a_0)$ (4)
(3) $\Rightarrow$ $m \not\models \forall x\, P(x)$ (5)
(1) + (5) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, Q(x)$
$\Rightarrow$ $m \models Q(a_0)$
som motsäger (4).

(c) $\forall x\, P(x) \wedge Q(c) \Leftrightarrow \forall x\,(P(x) \wedge Q(c))$

(*jfr. med (PK 24), (PK 24'))

(I) $\forall x\, P(x) \wedge Q(c) \models \forall x\,(P(x) \wedge Q(c))$
BEVIS:
Antag att det finns m sådant att

$m \models \forall x\, P(x) \wedge Q(c)$ (1)
$m \not\models \forall x\,(P(x) \wedge Q(c))$ (2)
(1) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (3)
$m \models Q(c)$ (4)
(3) $\Rightarrow$ $m \models P(\alpha)$ för godtyckligt $\alpha \in M$ (5)
(4) + (5) $\Rightarrow$ $m \models P(\alpha) \wedge Q(c)$
$\Rightarrow$ $m \models \forall x\,(P(x) \wedge Q(c))$
som motsäger (2).

(II) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(c)) \models \forall x\, P(x) \wedge Q(c)$
BEVIS:
Antag att det finns m sådan att

$m \models \forall x\,(P(x) \wedge Q(c))$ (1)
$m \not\models \forall x\, P(x) \wedge Q(c)$ (2)
(1) $\Rightarrow$ $m \models P(\alpha) \wedge Q(c)$ för godtyckligt $\alpha \in M$
$\Rightarrow$ $m \models P(\alpha)$ (3)
$\Rightarrow$ $m \models Q(c)$ (4)
(3) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (5)
(4) + (5) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x) \wedge Q(c)$
som motsäger (2).

(d) $\forall x\, P(x) \to Q(c) \Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \to Q(c))$
(*jfr. med (PK 27)*)

(I) $\forall x\, P(x) \to Q(c) \models \exists x\,(P(x) \to Q(c))$
BEVIS:
Antag att det finns m sådan att

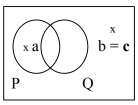
$m \models \forall x\, P(x) \to Q(c)$ (1)
$m \not\models \exists x\,(P(x) \to Q(c))$ (2)
(2) $\Rightarrow$ $m \not\models P(\alpha) \to Q(c)$ för godtyckligt $\alpha \in M$
$\Rightarrow$ $m \models P(\alpha)$ (3)
$m \models Q(c)$ (4)
(3) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (*eftersom α är godtycklig*) (5)
(4) + (5) och sanningstabellen för $\to$ ger
$m \not\models \forall x\, P(x) \to Q(c)$
som motsäger (1).

(II) $\exists x\,(P(x) \to Q(c)) \models \forall x\, P(x) \to Q(c)$
BEVIS:
Antag att det finns m sådan att

$m \models \exists x\,(P(x) \to Q(c))$ (1)
$m \not\models \forall x\, P(x) \to Q(c)$ (2)
(1) $\Rightarrow$ $m \models P(a_0) \to Q(c)$ för något $a_0 \in M$ (3)
(2) $\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$ (4)
$m \not\models Q(c)$ (5)
(4) $\Rightarrow$ $m \models P(a0)$ (6)
(3) + (6) $\Rightarrow$ $m \models Q(c)$
som motsäger (5).

(e) $\forall x\, P(x) \to Q(c) \not\models \forall x\,(P(x) \to Q(c))$
(*jfr. med (PK 27)*)

BEVIS:
Följande situation gör hypotesen sann och konklusionen falsk.



$\forall x\,(P(x) \to Q(c)) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \to Q(c)$
F S F F

$\exists x\, P(x)$ sann (x a)
$Q(c)$ falsk (x b)
$\forall x\, P(x)$ falsk (x b)
Då $\forall x\, P(x) \to Q(c)$ sann
F S F

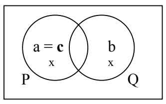
$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{c}) = (\{a, b\}, \{a\}, \varnothing, b)$
$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \not\models P(b)$
$\not\Rightarrow$ $m \models \forall x\, P(x)$
$\Rightarrow$ $m \models \underline{\forall x\, P(x) \to Q(c)}$ (1)
$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \models P(a)$ (2)
$b = \mathbf{c}$ och $b \notin \mathbf{Q}$
$\Rightarrow$ $m \not\models Q(c)$ (3)
(2) + (3) $\Rightarrow$ $m \not\models P(a) \to Q(c)$
$\Rightarrow$ $m \not\models \underline{\forall x\,(P(x) \to Q(c))}$ (4)

Alternativ:
$M = \{x \mid x$ är en människa$\}$
$\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \{x \in M \mid x$ är vegaterian$\}$
c = herr slaktare Blodkorv
Premissen får innebörden:
Om alla är vegetarianer, så är herr slaktare Blodkorv vegetarian, villket är sant.

Konklusionen får innebörden:
Om någon är vegetarian, så är herr slaktare Blodkorv vegetarian, vilket är falskt.

(f) $\exists x\,(P(x) \to Q(c)) \not\models \exists x\, P(x) \to Q(c)$
(*jfr. med (PK 31)*)

BEVIS:
I diagrammet blir premissen sann och slutsatsen falsk.



$\exists x\, P(x) \to Q(c)$
S F F

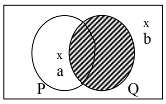
$\exists x\, P(x)$ sann (x a)
$Q(c)$ falsk (x a = **c**)
$\exists x\,(P(x) \to Q(c)) \Leftrightarrow \forall x\, P(x) \to Q(c)$
S F S F

$\forall x\, P(x)$ falsk (x b)

$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{c}) = (\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, a)$
$b \notin \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \not\models P(b)$
$\Rightarrow$ $m \models P(b) \to Q(c)$
$\Rightarrow$ $m \models \underline{\exists x\,(P(x) \to Q(c))}$ (1)
$a \in \mathbf{P}$ $\Rightarrow$ $m \models P(a)$
$\Rightarrow$ $m \models \exists x\, P(x)$ (2)
$\mathbf{c} = a \notin Q$ $\Rightarrow$ $m \not\models Q(c)$ (3)
(2) + (3) $\Rightarrow$ $m \not\models \underline{\exists x\, P(x) \to Q(c)}$ (4)

Alternativ:
$M = \{x \mid x$ är ett däggdjur$\}$
$\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \{x \in M \mid x$ är en hund$\}$
c = katten Gustav
Premissen får innebörden:
Om alla däggdjur är hundar, så är katten Gustav en hund, som är sann.
Slutsatsen får innebörden:
Om det finns minst en hund, så är kattten Gustav en hund, vilket är falskt.

(g) $\forall x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \not\Leftarrow \forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x)$
BEVIS:
$\forall x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ uttrycker att $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.
$\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x)$ uttrycker att antingen $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = M$ eller $\mathbf{P} \neq M$ och $\mathbf{Q} \neq M$.
Därför
$\forall x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \models \forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x)$
$\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x) \not\models \forall x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x))$

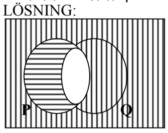


$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a, b\}, \{a\}, \emptyset)} \\
b \notin \mathbf{P} & \Rightarrow & m \not\models \forall x\, P(x) \quad (1) \\
b \notin \mathbf{Q} & \Rightarrow & m \not\models \forall x\, Q(x) \quad (2) \\
(1) + (2) & \Rightarrow & m \models \forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x) \quad (3) \\
a \in \mathbf{P} & \Rightarrow & m \models P(a) \quad (4) \\
a \notin \mathbf{Q} & \Rightarrow & m \not\models Q(a) \quad (5) \\
(4) + (5) & \Rightarrow & m \not\models P(a) \leftrightarrow Q(a) \\
 & \Rightarrow & m \not\models \forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \quad (6)
\end{array}$$

9-7.5

(a) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$

LÖSNING:



$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ sann ( )
$\forall x\, P(x)$ sann ( )
Det tvingar fram att
$\forall x\, Q(x)$ blir sann (–**Q** är streckad)

∴ *(a) gäller.*

Antag att det finns m sådan att

$$\begin{array}{lll}
 & & m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (1) \\
 & & m \not\models \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x) \quad (2) \\
(2) & \Rightarrow & m \models \forall x\, P(x) \quad (3) \\
 & & m \not\models \forall x\, Q(x) \quad (4) \\
(4) & \Rightarrow & m \not\models Q(a_0) \text{ för ett } a_0 \in M \quad (5) \\
(1) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \rightarrow Q(a_0) \quad (6) \\
(3) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \quad (7) \\
(6) + (7) & \Rightarrow & m \models Q(a_0)
\end{array}$$

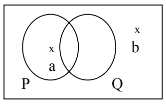
som motsäger (5).

(b) $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

LÖSNING:

$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ uttrycker $\mathbf{P} = M \rightarrow \mathbf{Q} = M$

$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ uttrycker $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$



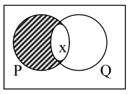
$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ sann (x b)
$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ falsk (x a)

∴ *(b) gäller inte.*

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a, b\}, \{a\}, \emptyset)} \\
b \notin \mathbf{P} & \Rightarrow & m \not\models P(b) \\
 & \Rightarrow & m \not\models \forall x\, P(x) \\
 & \Rightarrow & m \models \underline{\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)} \quad (1) \\
a \in \mathbf{P} & \Rightarrow & m \models P(a) \quad (2) \\
a \notin \mathbf{Q} & \Rightarrow & m \not\models Q(a) \quad (3) \\
(2) + (3) & \Rightarrow & m \not\models P(a) \rightarrow Q(a) \\
 & \Rightarrow & m \not\models \underline{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))} \quad (4)
\end{array}$$

(c) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \models \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$

LÖSNING:



$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ sann ( )
$\exists x\, P(x)$ sann (x)
Då
$\exists x\, Q(x)$ sann (x)

∴ *(c) gäller.*

Antag att det finns m sådan att

$$\begin{array}{lll}
 & & m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (1) \\
 & & m \not\models \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x) \\
 & \Rightarrow & m \models \exists x\, P(x) \quad (2) \\
 & & m \not\models \exists x\, Q(x) \quad (3) \\
(2) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \text{ för ett } a_0 \in M \quad (4) \\
(1) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \rightarrow Q(a_0) \quad (5) \\
(4) + (5) & \Rightarrow & m \models Q(a_0) \\
 & \Rightarrow & m \models \exists x\, Q(x)
\end{array}$$

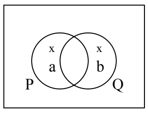
som motsäger (3).

(d) $\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

LÖSNING:

$\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$ uttrycker att $\mathbf{P} \neq \emptyset \rightarrow \mathbf{Q} \neq \emptyset$

$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ uttrycker att $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$



$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ falsk (x a)
$\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$ sann (x b)
S S S

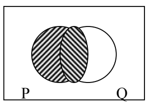
$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a, b\}, \{a\}, \{b\})} \\
m \in \mathbf{Q} & \Rightarrow & m \models Q(b) \\
 & \Rightarrow & m \models \exists x\, Q(x) \\
 & \Rightarrow & m \models \underline{\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)} \quad (1) \\
a \in \mathbf{P} & \Rightarrow & m \models P(a) \quad (2) \\
a \notin \mathbf{Q} & \Rightarrow & m \not\models Q(a) \quad (3) \\
(2) + (3) & \Rightarrow & m \not\models P(a) \rightarrow Q(a) \\
 & \Rightarrow & m \not\models \underline{\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))} \quad (4)
\end{array}$$

∴ *(d) gäller inte.*

(e) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

LÖSNING:

Premissen uttrycker: Alla P är Q
Konklusionen uttrycker: Några P är Q
Först kunde man tro att konklusionen följer från premissen; men det är felaktigt.



$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ sann ( )

$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ f ( )

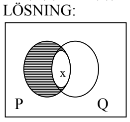
∴ *(e) gäller inte.*

$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a\}, \emptyset, \emptyset)$
(*OBS: M måste ha minst ett element.*)

$$\begin{array}{lll}
a \notin \mathbf{P} & \Rightarrow & m \not\models P(a) \quad (1) \\
 & \Rightarrow & m \models P(a) \rightarrow Q(a) \\
 & \Rightarrow & m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (2) \\
(1) & \Rightarrow & m \not\models P(a) \wedge Q(a) \\
 & \Rightarrow & m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \quad (3)
\end{array}$$

(f) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

LÖSNING:



$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ sann ( )
$\exists x\, P(x)$ sann (x)
Då
$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ sann (x)

∴ *(f) gäller.*

Anmärkning: Det enda sättet i (e) att visa $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ var att ha $\mathbf{P} = \emptyset$. Genom den extra premissen $\exists x\, P(x)$, dvs $\mathbf{P} \neq \emptyset$, utesluter vi motexemplet i (e).

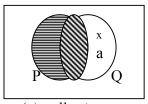
Antag att det finns m sådan att

$$\begin{array}{lll}
 & & m \models \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (1) \\
 & & m \models \exists x\, P(x) \quad (2) \\
 & & m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \quad (3) \\
(2) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \text{ för ett } a_0 \in M \quad (4) \\
(1) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \rightarrow Q(a_0) \quad (5) \\
(4) + (5) & \Rightarrow & m \models Q(a_0) \quad (6) \\
(4) + (6) & \Rightarrow & m \models P(a_0) \wedge Q(a_0) \\
 & \Rightarrow & m \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))
\end{array}$$

som motsäger (3).

(g) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, Q(x) \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

LÖSNING:



$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ sann ( )
$\exists x\, Q(x)$ sann (x a)
$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ falsk ( )

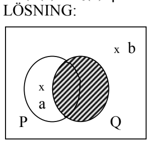
∴ *(g) gäller inte.*

Motexempel:

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a\}, \emptyset, \{a\})} \\
a \in P & \Rightarrow & m \not\models P(a) \\
 & \Rightarrow & m \models P(a) \rightarrow Q(a) \\
 & \Rightarrow & \underline{m \models \forall x\, P(x) \rightarrow Q(x))} \quad (1) \\
a \in Q & \Rightarrow & m \models Q(a) \\
 & \Rightarrow & \underline{m \models \exists x\, Q(x)} \quad (2) \\
\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \emptyset & \Rightarrow & \underline{m \not\models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))} \quad (3)
\end{array}$$

(h) $\exists x\, (P(x) \vee Q(x) \models \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

LÖSNING:



$\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
S S S F

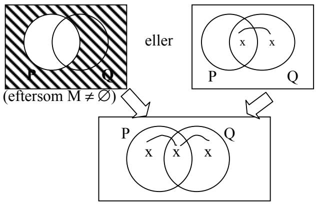
$\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
F F F

$\exists x\, P(x)$ sann (x a)
$\exists x\, Q(x)$ falsk ( )
$\forall x\, P(x)$ falsk (x b)
$\therefore$ *(h) gäller inte.*

$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\{a, b\}, \{a\}, \varnothing)$

$a \in \mathbf{P}$	$\Rightarrow$	$m \models P(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \models P(a) \vee Q(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \models \exists x\,(P(x) \vee Q(x))$	(1)
$b \notin \mathbf{P}$	$\Rightarrow$	$m \not\models P(b)$	
	$\Rightarrow$	$m \not\models \forall x\, P(x)$	(2)
$a \notin \mathbf{Q}$	$\Rightarrow$	$m \not\models Q(a)$	(3)
$b \notin \mathbf{Q}$	$\Rightarrow$	$m \not\models Q(b)$	(4)
(3) + (4)	$\Rightarrow$	$m \not\models \exists x\, Q(x)$	(5)
(2) + (5)	$\Rightarrow$	$m \not\models \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$	(6)

(i) $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \models \exists x\,(P(x) \vee Q(x))$
LÖSNING:



$\therefore$ *(i) gäller.*

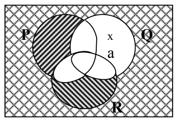
Antag att det finns m sådan att

		$m \models \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$	(1)
		$m \not\models \exists x\,(P(x) \vee Q(x))$	(2)
(2)	$\Rightarrow$	$m \not\models P(a) \vee Q(a)$ för godtyckligt $a \in M$	(3)
	$\Rightarrow$	$m \not\models P(a)$	(4)
		$m \not\models Q(a)$	(5)
(5)	$\Rightarrow$	$m \not\models \exists x\, Q(x)$	(6)
(1) + (6)	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\, P(x)$	
	$\Rightarrow$	$m \models P(a)$	

som motsäger (4).

(j) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)),\ \forall x\,(Q(x) \vee R(x)) \models \forall x\,(P(x) \vee R(x))$
LÖSNING:

$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ uttrycker att $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q} = M$
$\forall x\,(Q(x) \vee R(x))$ uttrycker att $\mathbf{Q} \cup \mathbf{R} = M$
$\forall x\,(P(x) \vee R(x)$ uttrycker att $\mathbf{P} \cup \mathbf{R} = M$



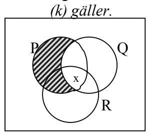
$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ sann ( )
$\forall x\,(Q(x) \vee R(x))$ sann ( )
$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ falsk (x a)

$\therefore$ *(j) gäller inte.*

Motexempel:
$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) = (\{a\}, \varnothing, \{a\}, \varnothing)$

$a \in \mathbf{Q}$	$\Rightarrow$	$m \models Q(a)$	(1)
	$\Rightarrow$	$m \models P(a) \vee Q(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \models \forall x\,(P(x) \vee Q(x))}$	(2)
(1)	$\Rightarrow$	$m \models Q(a) \vee R(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \models \forall x\,(Q(x) \vee R(x))}$	(3)
$a \notin P$	$\Rightarrow$	$m \not\models P(a)$	(4)
$a \notin R$	$\Rightarrow$	$m \not\models R(a)$	(5)
(4) + (5)	$\Rightarrow$	$m \not\models P(a) \vee R(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \not\models \forall x\,(P(x) \vee R(x))}$	(6)

(k) $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\,(P(x) \wedge R(x)) \models \exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$
LÖSNING:
Venn-diagrammet visar att
(k) gäller.



$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ sann ( )
$\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$ sann (x)
$\exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$ sann (x)

Antag att det finns m sådan att

		$m \models \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	(1)
		$m \models \exists x\,(P(x) \wedge R(x))$	(2)
		$m \not\models \exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$	(3)
(2)	$\Rightarrow$	$m \models P(a_0) \wedge R(a_0)$ för ett $a_0 \in M$	(4)
(1)	$\Rightarrow$	$m \models P(a_0) \rightarrow Q(a_0)$	(5)
(4)	$\Rightarrow$	$m \models P(a_0)$	(6)

(5) + (6)	$\Rightarrow$	$m \models Q(a_0)$	(7)
(4)	$\Rightarrow$	$m \models R(a_0)$	(8)
(7) + (8)	$\Rightarrow$	$m \models Q(a_0) \wedge R(a_0)$	
	$\Rightarrow$	$m \models \exists x\,(Q(x) \wedge R(x))$	

som motsäger (3).

(l) $\forall x \exists y\, \neg R(x,y) \Leftrightarrow \neg \exists x \forall y\, R(x,y)$
LÖSNING:
Tolkning (grafer):
VL: Alla har någon som de inte skickar någon pil till.
HL: Ingen skickar en pil till alla.
HL och VL är ekvivalenta
Tolkning (scheman):
VL: I varje rad finns en tom ruta.
HL: Ingen rad har kryss i alla rutor.
HL och VL är ekvivalenta.
$\therefore$ *(l) gäller.*

(I) $\forall x \exists y\, \neg R(x,y) \models \neg \exists x \forall y\, R(x,y)$
BEVIS:
Antag att det finns m sådan att

		$m \models \forall x \exists y\, \neg R(x,y)$	(1)
		$m \models \neg \exists x \forall y\, R(x,y)$	(2)
(2)	$\Rightarrow$	$m \models \exists x \forall y\, R(x,y)$	(3)
(3)	$\Rightarrow$	$m \models \forall y\, R(a_0,y)$	(4)

(*Vi låter (3) välja a_0.*)

(1)	$\Rightarrow$	$m \models \exists y\, \neg R(a_0,y)$	(5)
(5)	$\Rightarrow$	$m \models \neg R(a_0, b_0)$	(6)
(4)	$\Rightarrow$	$m \models R(a_0, b_0)$	(7)

(*Vi låter (5) välja värde på y, y = b_0. I (4) har vi total frihet att väljavärde på y, inklusive att välja y = b_0. *)
(6) och (7) är oförenliga.

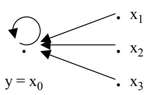
(II) $\neg \exists x \forall y\, R(x,y) \models \forall x \exists y\, \neg R(x,y)$
BEVIS:
Antag att det finns m sådan att

		$m \models \neg \exists x \forall y\, R(x,y)$	(1)
		$m \not\models \forall x \exists y\, \neg R(x,y)$	(2)
(1)	$\Rightarrow$	$m \not\models \exists x \forall y\, R(x,y)$	(3)
(2)	$\Rightarrow$	$m \not\models \exists y\, \neg R(a_0,y)$ för ett $a_0 \in M$	(4)
(3)	$\Rightarrow$	$m \models \forall y\, R(\cancel{a_0}, y)$	(5)
(5)	$\Rightarrow$	$m \models R(a_0, \cancel{b_0})$ för något $b_0 \in M$	(6)

(4)	$\Rightarrow$	$m \models \neg R(\cancel{a_0}, b_0)$
	$\Rightarrow$	$m \models R(a_0, b_0)$

som motsäger (6).

(m) $\exists y \forall x\, R(x,y) \models \forall x \exists y\, R(x,y)$
LÖSNING:
Tolkning (grafer):
Premissen: Någon mottager en pil från alla.



Konklusionen: Alla skickar minst en pil.
Det följer eftersom alla åtminstone skickar pilen till y = x_0.

Tolkning (scheman):
Premissen: Det finns en kolumn där varje ruta är kryssaed.

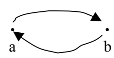
	a	b	c
a		x	
b		x	
c		x	

Konklusionen: Varje rad innehåller minst ett kryss.
Konklusionen följer eftersom varje rad åtminstone innehåller krysset i kolumnen som omnämns i premissen.
$\therefore$ *(m) gäller.*
Antag att det finns m sådan att

		$m \models \exists y \forall x\, R(x,y)$	(1)
		$m \not\models \forall x \exists y\, R(x,y)$	(2)
(1)	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\, R(x, b_0)$ för ett $b_0 \in M$	(3)
(2)	$\Rightarrow$	$m \not\models \exists y\, R(a_0, y)$ för ett $a_0 \in M$	(4)
(3)	$\Rightarrow$	$m \models R(a_0, b_0)$	
	$\Rightarrow$	$m \models \exists y\, R(a_0, y)$	

som motsäger (4).

(n) $\forall x \exists y\, R(x,y) \models \exists y \forall x\, R(x,y)$
LÖSNING:
För tolkningar se (m)
$\therefore$ *(n) gäller inte.*



	a	b
a		x
b	x	

I grafen (schemat) är premissen sann och slutsatsen falsk.

$\mathcal{M} = (M, \mathbf{R}) = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\})$

$(a,b) \in \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models R(a,b)$	
	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models \exists y\, R(a,y)$	(1)
$(b,a) \in \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models R(b,a)$	
	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models \exists y\, R(b,y)$	(2)
(1) + (2)	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \models \forall x \exists y\, R(x,y)}$	(3)
$(a,a) \notin \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models R(a,a)$	
	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models \forall x\, R(x,a)$	(4)
På samma sätt			
$(b,b) \notin \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models \forall x\, R(x,b)$	(5)
(4) + (5)	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \not\models \exists y \forall x\, R(x,y)}$	(6)

(o) $\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \models \exists y \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$

LÖSNING:

Vi använder substitutions principen för ekvivalenta formler

	$\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y))$	
$\Leftrightarrow$	$\forall x\, (P(x) \wedge \exists y\, Q(y))$	(PK 28)
$\Leftrightarrow$	$(\forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y))$	(PK 24)
$\Leftrightarrow$	$\exists y\, (\forall x\, P(x) \wedge Q(y))$	(PK 28)
$\Leftrightarrow$	$\exists y \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$	(PK 24)

Premiss och konklusion är i själva verket ekvivalenta.

$\therefore$ *(o) gäller*. (*Jfr. med (n).*)

9-7.6

$\forall x\, (P(x) \rightarrow P(x)) \not\models P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$

BEVIS:

Vi visar först

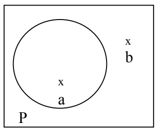
	$\models \forall x\, (P(x) \rightarrow P(x))$	(*)
och	$\not\models \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$	(**)

Låt $\mathcal{M}$ vara en godtyckligt modell och a $\in$ M. Då (*satslogik*)

$\mathcal{M} \models P(a) \rightarrow P(a)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \forall x\, (P(x) \rightarrow P(x)$

vilket visar (*).



$\mathcal{M} = (M, \mathbf{P}) = (\{a, b\}, \{a\})$

Då $\mathcal{M} \models \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

(se Övning 5.5 (b) i Kapitel 8)

vilket visar (**)

Antag nu

$\forall x\, (P(x) \rightarrow P(x)) \models P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$

Då följer enligt Definition 1.11 i Kapitel 9

$\models \forall x\, (\forall x\, (P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

Med hjälp av (PK 26) får vi (*flytta in första förekomsten av $\forall$x framför efterledet $(P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$*)

$\models \forall x\, (P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

som tillsammans med (*) ger

$\models \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

vilket motsäger (**).

9-7. 7

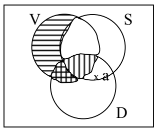
(a) *Formalisering:*

$(1)\ \forall x\, (V(x) \rightarrow S(x))$

$\underline{(2)\ \exists x\, (S(x) \wedge D(x))}$

$(3)\ \exists x\, (V(x) \wedge D(x))$

(b) *Motexempel:*



$\forall x\, (V(x) \rightarrow S(x))$ sann ( )

$\exists x\, (V(x) \wedge D(x))$ falsk ( )

$\exists x\, (S(x) \wedge D(x))$ sann (x a)

$\mathcal{M} = (M, \mathbf{D}, \mathbf{S}, \mathbf{V}) = (\{a\}, \{a\}, \{a\}, \varnothing)$

$a \notin \mathbf{V}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models V(a)$	
	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models V(a) \rightarrow S(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \models \forall x\, (V(x) \rightarrow S(x))}$	(1)
$a \in \mathbf{S}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models S(a)$	(2)
$a \in \mathbf{D}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models D(a)$	(3)
(2) + (3)	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models S(a) \wedge D(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \models \exists x\, (S(x) \wedge D(x))}$	(4)
$a \notin \mathbf{V}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models V(a)$	(5)

(3) + (5)	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models V(a) \wedge D(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \not\models \exists x\, (V(x) \wedge D(x))}$	(6)

9-7.8

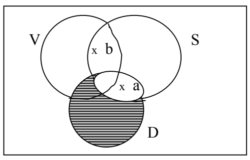
(a) *Formalisering:*

(1) $\forall x\, (D(x) \rightarrow S(x))$

(2) $\exists x\, (S(x) \wedge V(x))$

(3) $\forall x\, (D(x) \rightarrow V(x))$

(b) *Motexempel:*



$\forall x\, (D(x) \rightarrow S(x))$ sann ( )

$\forall x\, (D(x) \rightarrow V(x))$ falsk (x a)

$\exists x\, (S(x) \wedge V(x))$ sann (x b)

$\mathcal{M} = (M, \mathbf{D}, \mathbf{S}, \mathbf{V}) = (\{a, b\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b\})$

$a \in \mathbf{S}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models S(a)$	(1)
	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models D(a) \rightarrow S(a)$	(2)
$b \in \mathbf{S}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models S(b)$	(3)
	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models D(b) \rightarrow S(b)$	(4)
(2) + (4)	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \models \forall x\, (D(x) \rightarrow S(x))}$	(5)
$b \in \mathbf{V}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models V(b)$	(6)
(3) + (6)	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models S(b) \wedge V(b)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \models \exists x\, (S(x) \wedge V(x))}$	(7)
$a \in \mathbf{D}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \models D(a)$	(8)
$a \notin \mathbf{V}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models V(a)$	(9)
(8) + (9)	$\Rightarrow$	$\mathcal{M} \not\models D(a) \rightarrow V(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{M} \not\models \forall x\, (D(x) \rightarrow V(x))}$	(10)

9-7.9

(a) *Formalisering:*

(1) $\exists x\, (S(x) \wedge \neg D(x))$

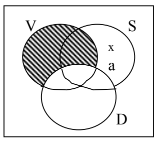
(2) $\exists x\, (S(x) \wedge \neg V(x))$

(3) $\exists x\, (V(x) \wedge \neg D(x))$

(b) Motexempel:

Venn-diagramet ger ett motexempel.

$\mathcal{M} = (M, \mathbf{D}, \mathbf{S}, \mathbf{V}) = (\{a\}, \varnothing, \{a\}, \varnothing)$



$\exists x\, (V(x) \wedge \neg D(x))$ falsk ( )

$\exists x\, (S(x) \wedge \neg D(x))$ sann (x a)

$\exists x\, (S(x) \wedge \neg V(x))$ sann (x a)

$a \in \mathbf{S}$	$\Rightarrow \mathcal{M} \models S(a)$	(1)
$a \notin \mathbf{V}$	$\Rightarrow \mathcal{M} \not\models V(a)$	(2)
$a \notin \mathbf{D}$	$\Rightarrow \mathcal{M} \not\models D(a)$	(3)
(3)	$\Rightarrow \mathcal{M} \models \neg D(a)$	
(1) + (4)	$\Rightarrow \mathcal{M} \models S(a) \wedge \neg D(a)$	
	$\Rightarrow \mathcal{M} \models \exists x\, (S(x) \wedge \neg D(x))$	(5)
(1) + (6)	$\Rightarrow \mathcal{M} \models S(a) \wedge \neg V(a)$	
	$\Rightarrow \mathcal{M} \models \exists x\, (S(x) \wedge \neg V(x))$	(7)
(2) + (4)	$\Rightarrow \mathcal{M} \not\models V(a) \wedge \neg D(a)$	
	$\Rightarrow \mathcal{M} \not\models \exists x\, (V(x) \wedge \neg D(x))$	(8)

9-7.10

(a) Skriv på PNF

$\forall x\, P(x,y) \rightarrow (\neg \forall y \exists x\, P(x,y) \rightarrow Q(x))$

LÖSNING:

(*Sätt tillbaka eliminerade paranteser*)

	$(\forall x\, P(x,y) \rightarrow (\neg \forall y \exists x\, P(x,y) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Byt bundna variabler, (PK4) och (PK5)*)
	$\forall z\, P(z,y) \rightarrow (\neg \forall v \exists w\, P(w,v) \rightarrow Q(x))$
$\Leftrightarrow$	(*Ersätt $\neg\forall$v med $\exists$v$\neg$, (PK15)*)
	$(\forall z\, P(z,y) \rightarrow (\exists v \neg \exists w\, P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Ersätt $\neg\exists$w med $\forall$w$\neg$, (PK16)*)
	$(\forall z\, P(z,y) \rightarrow (\exists v \forall w\, \neg P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Flytta ut $\forall$z, (PK27)*)
	$\exists z\, (P(z,y) \rightarrow (\exists v \forall w\, \neg P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Flytta ut $\exists$v (PK31)*)
	$\exists z\, (P(z,y) \rightarrow \forall v\, (\forall w\, \neg P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Flytta ut $\forall$w, (PK27)*)
	$\exists z\, (P(z,y) \rightarrow \forall v \exists w\, (\neg P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Flytta ut $\forall$v, (PK26)*)
	$\exists z \forall v\, (P(z,y) \rightarrow \exists w\, (\neg P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
$\Leftrightarrow$	(*Flytta ut $\exists$w, (PK30)*)
	$\exists z \forall v \exists w\, (P(z,y) \rightarrow (\neg P(w,v) \rightarrow Q(x)))$
	som är på PNF.

$\boxed{\exists z \forall v \exists w\, (P(z,y) \to (\neg P(w,v) \to Q(x)))}$

Alternativ:
(1) Andra val vid bytet av bundna variabler ar möjliga.
(2) Följande ordningar mellan kvantifikatorerna är möjliga:
$\underline{\exists z \forall v \exists w}$ $\quad$ $\underline{\forall v \exists z \exists w}$ $\quad$ $\underline{\forall v \exists w \exists z}$

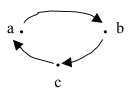
(b) Skriv på PNF
$\exists x\, P(x) \leftrightarrow Q(x)$
LÖSNING:
$(\exists x\, P(x) \leftrightarrow Q(x))$
$\Leftrightarrow$ (*Eliminera $\leftrightarrow$, (SE 20)*)
$((\exists x\, P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to \exists x\, P(x)))$
$\Leftrightarrow$ (*byte av bundna variabler, (PK5)*)
$((\exists y\, P(y) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to \exists z\, P(z)))$
$\Leftrightarrow$ (*Flytta ut $\exists y$, (PK31)*)
$(\forall y\, (P(y) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to \exists z\, P(z)))$
$\Leftrightarrow$ Flytta ut $\exists z$, (PK30))
$(\forall y\, (P(y) \to Q(x)) \wedge \exists z\, (Q(x) \to P(z)))$
$\Leftrightarrow$ (*Flytta ut $\forall y$, (PK 24')*)
$\forall y\, ((P(y) \to Q(x)) \wedge \exists z\, (Q(x) \to P(z)))$
$\Leftrightarrow$ (*Flytta ut $\exists z$, (PK28)*)
$\forall y \exists z\, ((P(y) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to P(z)))$

$\boxed{\forall y \exists z\, ((P(y) \to Q(x)) \wedge (Q(x)) \to P(z)))}$

Alternativ:
(1) Andra val vid bytet av bundna variabler är möjliga.
(2) Följande ordningar mellan kvantifikatorerna är möjliga:
$\underline{\forall y \exists z}$ $\quad$ $\underline{\exists z \forall y}$

9-7.11
A1: $\forall x \exists y\, R(x,y)$
A2: $\forall x \forall y\, (R(x,y) \to \neg R(y,x))$

(a) {A1, A2} är konsistent.
BEVIS:
Vi ska hitta en modell m sådan att
M $\models$ A1, A2
Vi definierar R med hjälp av ett schema:



	a	b	c
a		x	
b			x
c	x		

Enligt A1 måste varje rad innehålla minst ett x. Det är uppfyllt. A2 uttrycker att R är asymmetrisk (se Definition 7.2, s.166). Enligt § 7.23, s. 172, ska huvuddiagonalen vara tom och intet kryspar får ligga symmetriskt kring huvuddiagonalen. Även detta villkor är upfyllt.
Genom att experimentera ser vi att M måste ha minst 3 element. Motsvarande graf är uppritad.

m = (M, **R**) = ({a, b, c}, {(a, b), (b, c), (c, a)}

(a,b) $\in$ **R** $\Rightarrow$ $m \models$ (a,b)
$\Rightarrow$ $m \models \exists y\, R(a,y)$ (1)
(b,c) $\in$ **R** $\Rightarrow$ $m \models R(b,c)$
$\Rightarrow$ $m \models \exists y\, R(b,y)$ (2)
(c,a) $\in$ **R** $\Rightarrow$ $m \models R(c,a)$
$\Rightarrow$ $m \models \exists y\, R(c,y)$ (3)
(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $m \models \forall x \exists y\, R(x,y)$
$\therefore$ $\underline{m \models \text{A1}}$
Antag $m \not\models \forall x \forall y\, (R(x,y) \to \neg R(y,x))$
Då finns $\alpha, \beta \in$ M sådana att
$m \not\models R(\alpha,\beta) \to \neg R(\beta,\alpha)$
$\Rightarrow$ $m \models R(\alpha,\beta)$ (4)
$m \not\models \neg R(\beta,\alpha)$ (5)
(5) $\Rightarrow$ $m \models R(\beta,\alpha)$ (6)
(4) + (6) $\Rightarrow$ $(\alpha,\beta) \in$ **R** och $(\beta,\alpha) \in$ **R**
vilket är oförenligt med definitionen av **R**.
$\therefore$ $m \models$ A2

(b) {A1, A2} är oberoende.
BEVIS:

A1 $\not\models$ A2:

	a
a	x

$m_2 = (M_2, \mathbf{R}_2)$ = ({a}, {(a,a)})
$m_2 \models$ A1 eftersom varje rad har ett kryss.
$m_2 \not\models$ A2 eftersom huvuddiagonalen innehåller ett kryss.

A2 $\not\models$ A1

	a
a	

$m_1 = (M_1, R_1)$ = ({a}, { }) = ({a}, $\varnothing$)
$m_1 \not\models$ A1 eftersom det finns en tom rad.
$m_1 \models$ A2 eftersom huvuddiagonalen är tom (§ 7.23 i Kapitel 7).

9-7.12
A1: $\forall x\ \ x * x = x$
A2: $\forall x \forall y\ \ x * y = y * x$
A3: $\forall x \forall y \forall z\ \ (x * y) * z = x * (y * z)$

(a) {A1, A2, A3} är konsistent.
BEVIS:
Vi ska hitta en modell m sådan att
$m \models$ A1, A2, A3
Definiera * genom tabellen

*	a
a	a

m = (M, *) = ({a}, *)
där a * a = a
Av kriterierna i § 7.28, s. 173, får vi
$m \models$ A1
Eftersom a * a = a
$m \models$ A2
Eftersom tabellen är symmetrisk kring huvuddiagonalen.
$m \models$ A3
Eftersom M bara innehåller ett element.

(b) {A1, A2, A3} är oberoende.
BEVIS:
<u>A1, A2 $\not\models$ A3:</u> Av kriterierna i § 7.28 i Kapitel 7 framgår att vi måste ha minst 3 element i M_3.

*	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Av värdena i huvuddiagonalen ses att
$m_3 \models$ A2
Tabellen är symmetrisk kring huvuddiagonalen. Därför

$m_3 \models$ A2
(a * b) * c = c * c = c
a * (b * c) = a * a = a
Eftersom a $\neq$ c, gäller
$\underline{m_3 \not\models \text{A3}}$

A1, A3 $\not\models$ A2: För att undvika att tabellen blir symmetrisk kring huvuddiagonalen måste vi ha minst 2 element i M_2.

*	a	b
a	a	b
b	a	b

Värdena i huvuddiagonalen ger
$\underline{m_2 \models \text{A1}}$

Eftersom * är idempotent och M_2 bara innehåller 2 ellement, så
$m_2 \models$ A3
a * b = b $\neq$ a = b * a ger
$\underline{m_2 \not\models \text{A2}}$

<u>A2, A3 $\not\models$ A1</u>: För att undvika idempotens måste vi ha minst två element i M_1.

*	S	F
S	S	F
F	F	S

Eftersom F * F = S $\neq$ F, gäller
$m_1 \not\models$ A1.

Eftersom tabellen är symmetrisk kring huvuddiagonalen, så
$m_1 \models$ A2
Vi ser att tabellen för * överensstämmer med sanningstabellen för $\leftrightarrow$.
Eftersom $\leftrightarrow$ är associativ, så
$m_1 \models$ A3
(Se (SE29) på s. 50).

Kapitel 10. Lösningar

10-9.1

(a) $\vdash \forall x\, P(x) \to P(c)$

BEVIS:

(1) $\forall x\, P(x)$	HP
(2) $P(c)$	1, ($\forall$E)
(3) $\forall x\, P(x) \to P(c)$	1-2, ($\to$I)

(b) $\forall x \forall y\ P(x,y) \vdash \forall x\, P(x,x)$

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\, P(x,y)$	P
(2) $\forall y\, P(x,y)$	1, ($\forall$E)
(3) $P(x,x)$	2, ($\forall$E)
(4) $\forall x\, P(x,x)$	3, ($\forall$I)

(c) $\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)) \vdash \forall x\, (P(x) \to R(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	P
(2) $\forall x\, (Q(x) \to R(x))$	P
(3) $P(x)$	HP
(4) $P(x) \to Q(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $Q(x) \to R(x)$	2, ($\forall$E)
(6) $Q(x)$	4, ($\to$E)
(7) $R(x)$	5, 6, ($\to$E)
(8) $P(x) \to R(x)$	3-7, ($\to$I)
(9) $\forall x\, (P(x) \to R(x))$	8, ($\forall$I)

(d) $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \dashv\vdash \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\, (A(x) \wedge B(x))$	P
(2) $A(x) \wedge B(x)$	1, ($\forall$E)
(3) $A(x)$	2, ($\wedge$E)
(4) $\forall x\, A(x)$	3, ($\forall$I)
(5) $B(x)$	2, ($\wedge$E)
(6) $\forall x\, B(x)$	5, ($\forall$I)
(7) $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$	4, 6, ($\wedge$I)

$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \vdash \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$	P
(2) $\forall x\, A(x)$	1, ($\wedge$E)
(3) $\forall x\, B(x)$	1, ($\wedge$E)
(4) $A(x)$	2, ($\forall$E)
(5) $B(x)$	3, ($\forall$E)

(6) $A(x) \wedge B(x)$	4, 5, ($\wedge$I)
(7) $\forall x\, (A(x) \wedge B(x))$	6, ($\forall$I)

(e) $\forall x\, (A(x) \leftrightarrow B(x)) \vdash \forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\, (A(x) \leftrightarrow B(x))$	P
(2) $A(x) \leftrightarrow B(x)$	1, ($\forall$E)
(3) $\forall x\, A(x)$	HP
(4) $A(x)$	3, ($\forall$E)
(5) $A(x) \to B(x)$	2, ($\leftrightarrow$E)
(6) $B(x)$	4, 5, ($\to$E)
(7) $\forall x\, B(x)$	6, ($\forall$I)
(8) $\forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$	3-7, ($\to$I)
(9) $\forall x\, B(x)$	HP
(10) $B(x)$	9, ($\forall$E)
(11) $B(x) \to A(x)$	2, ($\leftrightarrow$E)
(12) $A(x)$	10, 11, ($\to$E)
(13) $\forall x\, A(x)$	12, ($\forall$I)
(14) $\forall x\, B(x) \to \forall x\, A(x)$	9-13, ($\to$I)
(15) $\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x)$	8, 14, ($\leftrightarrow$I)

(f) $\forall x\, (A \vee B(x)) \dashv\vdash A \vee \forall x\, B(x)$ (x ej fri i A)

$\forall x\, (A \vee B(x)) \vdash A \vee \forall x\, B(x)$ (x ej fri i A)

BEVIS:

(1) $\forall x\, (A \vee B(x))$	P
(2) $\neg\, (A \vee \forall x\, B(x))$	HP
(3) $\neg A \wedge \neg\forall x\, B(x)$	2, De Morgan (SD 12)
(4) $A \vee B(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $\neg A$	3, ($\wedge$E)
(6) $B(x)$	4, 5, Disj. Syll. (SD 9)
(7) $\forall x\, B(x)$	6, ($\forall$I)
(8) $\neg\forall x\, B(x)$	3, ($\wedge$E)
(9) $\perp$	7, 8, ($\perp$I)
(10) $A \vee \forall x\, B(x)$	2-9, ($\neg$E)

$A \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\, (A \vee B(x))$ (x ej fri i A)

BEVIS:

(1) $A \vee \forall x\, B(x)$ P

(*Vi använder ($\vee$E). Först härleder vi $A \to A \vee B(x)$ och sedan $\forall x\, B(x) \to A \vee B(x)$*)

(2) A	HP
(3) $A \vee B(x)$	2, ($\vee$I)
(4) $A \to A \vee B(x)$	2-3, ($\to$I)
(5) $\forall x\, B(x)$	HP
(6) $B(x)$	5, ($\forall$E)
(7) $A \vee B(x)$	6, ($\vee$I)
(8) $\forall x\, B(x) \to A \vee B(x)$	5-7, ($\to$I)

(9) $A \vee B(x)$	1, 4, 8, ($\vee$I)
(10) $\forall x\, (A \vee B(x))$	9, ($\forall$I)

(*x är inte fri i (1) eftersom x inte är fri i A. Därför är restriktionen på ($\forall$I) uppfylld.*)

10-9.2

(a) $\neg\exists x \neg A(x) \vdash \forall x\, A(x)$

BEVIS:

(1) $\neg\exists x \neg A(x)$	P
(2) $\neg A(x)$	HP
(3) $\exists x\, \neg A(x)$	2, ($\exists$I)
(4) $\perp$	1, 3, ($\perp$I)
(5) $A(x)$	2-4, ($\neg$E)
(6) $\forall x\, A(x)$	5, ($\forall$I)

(b) $\neg\forall x\, \neg A(x) \vdash \exists x\, A(x)$

BEVIS:

(1) $\neg\forall x\, \neg A(x)$	P
(2) $\neg\exists x\, A(x)$	HP
(3) $\forall x\, \neg A(x)$	2, (PD9), s. 293
(4) $\perp$	1, 3, ($\perp$I)
(5) $\exists x\, A(x)$	2-4, ($\neg$E)

(c) $\forall x\, A(x) \vdash \neg\exists x\, \neg A(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\, A(x)$	P
(2) $\exists x\, \neg A(x)$	HP
(3) $\neg A(x)$	2, $\exists$E-P^x
(4) $A(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $\perp$	3, 4, ($\perp$I)
(6) $\perp$	2, 3-5, ($\exists$E)
(7) $\neg\exists x\, \neg A(x)$	2-6, ($\neg$I)

(d) $\exists x\, A(x) \vdash \neg\forall x\, \neg A(x)$

BEVIS:

(1) $\exists x\, A(x)$	P
(2) $\forall x\, \neg A(x)$	HP
(3) $A(x)$	1, $\exists$E-P^x
(4) $\neg A(x)$	2, ($\forall$I)
(5) $\perp$	3, 4, ($\perp$I)
(6) $\perp$	1, 3-5, ($\exists$E)
(7) $\neg\forall x\, \neg A(x)$	2-6, ($\neg$I)

(e) $\exists x\, \neg A(x) \vdash \neg\forall x\, A(x)$

BEVIS:

(1) $\exists x\, \neg A(x)$	P
(2) $\forall x\, A(x)$	HP

(3) $\neg\exists x\, \neg A(x)$	2, övn. 9.2 (c)
(4) $\perp$	1, 3, ($\perp$I)
(5) $\neg\forall x\, A(x)$	2-4, ($\neg$I)

10-9.3

(a) $\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \vdash \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	P
(2) $\exists x\, P(x)$	HP
(3) $P(x)$	2, $\exists$E-P
(4) $P(x) \to Q(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $Q(x)$	3, 4, ($\to$E)
(6) $\exists x\, Q(x)$	5, ($\exists$I)
(7) $\exists x\, Q(x)$	2, 3-6, ($\exists$E)
(8) $\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$	2-7, ($\to$I)

(b) $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

BEVIS:

(1) $\exists x\, (A(x) \wedge B(x))$	P
(2) $A(x) \wedge B(x)$	1, $\exists$E-P
(3) $A(x)$	2, ($\wedge$E)
(4) $\exists x\, A(x)$	3, ($\exists$I)
(5) $B(x)$	2, ($\wedge$E)
(6) $\exists x\, B(x)$	5, ($\exists$I)
(7) $\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$	4, 6, ($\wedge$I)
(8) $\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$	1, 2-7, ($\exists$E)

(c) $\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ \exists x\, (P(x) \wedge R(x)) \vdash \exists x\, (Q(x) \wedge R(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	P
(2) $\exists x\, (P(x) \wedge R(x))$	P
(3) $P(x) \wedge R(x)$	2, $\exists$E-P
(4) $P(x) \to Q(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $P(x)$	3, ($\wedge$E)
(6) $Q(x)$	4, 5, ($\to$E)
(7) $R(x)$	3, ($\wedge$E)
(8) $Q(x) \wedge R(x)$	6, 7, ($\wedge$I)
(9) $\exists x\, (Q(x) \wedge R(x))$	8, ($\exists$I)
(10) $\exists x\, (Q(x) \wedge R(x))$	2, 3-9, ($\exists$E)

(d) $\forall x\, (P(x) \to Q(x) \vee R(x)),\ \neg\exists x\, (P(x) \wedge R(x) \vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\, (P(x) \to Q(x) \vee R(x))$	P
(2) $\neg\exists x\, (P(x) \wedge R(x))$	P
(3) $P(x)$	HP
(4) $\neg Q(x)$	HP
(5) $P(x) \to Q(x) \vee R(x)$	1, ($\forall$E)

(6) Q(x) ∨ R(x)	3, 5, (→E)
(7) R(x)	4, 6, Disj. Syll. (SD 9)
(8) P(x) ∧ R(x)	3, 7, (∧I)
(9) ∃x (P(x) ∧ R(x))	8, (∃I)
(10) ⊥	2, 9, (⊥I)
(11) Q(x)	4-10, (¬E)
(12) P(x) → Q(x)	3-11, (→I)
(13) ∀x (P(x) → Q(x))	12, (∀I)

(e) ∃x P(x,x) ⊢ ∃x∃y P(x,y)

BEVIS:

(1) ∃x P(x,x)	P
(2) P(x,x)	1, ∃E-P
(3) ∃y P(x,y)	2, (∃I)
(4) ∃x∃y P(x,y)	3, (∃I)
(5) ∃x∃y P(x,y)	1, 2-4, (∃E)

(f) ∃x (A(x) ∨ B(x)) ⊣⊢ ∃x A(x) ∨ ∃x B(x)

∃x (A(x) ∨ B(x) ⊢ ∃x A(x) ∨ ∃x B(x)

BEVIS:

(1) ∃x (A(x) ∨ B(x))	P
(2) ¬(∃x A(x) ∨ ∃x B(x)	HP
(3) ¬∃x A(x) ∧ ¬∃x B(x)	2, De Morgan (SD 12)
(4) ¬∃x A(x)	3, (∧E)
(5) ¬∃x B(x)	3, (∧E)
(6) A(x) ∨ B(x)	1, ∃E-P^x
(7) ∀x ¬A(x)	4, (PD9), s.293
(8) ¬A(x)	7, (∀E)
(9) B(x)	6, 8, Disj. Syll. (SD 9)
(10) ∃x B(x)	9, (∃I)
(11) ∃x B(x)	1, 6-10, (∃E)
(12) ⊥	5, 11, (⊥I)
(13) ∃x A(x) ∨ ∃x B(x)	2-12 (¬E)

(*Direkt härledning med (∨E) är också möjlig.*)

∃x A(x) ∨ ∃x B(x) ⊢ ∃x (A(x) ∨ B(x))

BEVIS:

(1) ∃x A(x) ∨ ∃x B(x) — P

(*Vi använder (∨E). Vi visar först ∃x A(x) → ∃x (A(x) ∨ B(x)) och sedan ∃x B(x) → ∃x (A(x) ∨ B(x)).*)

(2) ∃x A(x)	HP
(3) A(x)	2, ∃E-P
(4) A(x) ∨ B(x)	3, (∨I)
(5) ∃x (A(x) ∨ B(x))	4, (∃I)
(6) ∃x (A(x) ∨ B(x))	2, 3-5, (∃E)
(7) ∃x A(x) → ∃x (A(x) ∨ B(x))	2-6, (→I)

(8) ∃x B(x)	HP
(9) B(x)	8, ∃E-P
(10) A(x) ∨ B(x)	9, (∨I)
(11) ∃x (A(x) ∨ B(x))	10, (∃I)
(12) ∃x (A(x) ∨ B(x))	8, 9-11, (∃E)
(13) ∃x B(x) → ∃x (A(x) ∨ B(x))	8-12, (→I)
(14) ∃x (A(x) ∨ B(x))	1, 7, 13 (∨E)

(*Indirekt härledning kan också tillämpas.*)

(g) ∃x (P(x) → Q(x) ⊣⊢ ∀x P(x) → ∃x Q(x)

∃x (P(x) → Q(x)) ⊢ ∀x P(x) → ∃x Q(x)

BEVIS:

(1) ∃x (P(x) → Q(x))	P
(2) ∀x P(x)	HP
(3) P(x) → Q(x)	1, ∃E-P
(4) P(x)	2, (∀E)
(5) Q(x)	3, 4, (→E)
(6) ∃x Q(x)	5, (∃I)
(7) ∃x Q(x)	1, 3-6, (∃E)
(8) ∀x P(x) → ∃x Q(x)	2-7, (→I)

∀x P(x) → ∃x Q(x) ⊢ ∃x (P(x) → Q(x))

BEVIS:

(1) ∀x P(x) → ∃x Q(x) — P

(2) ¬∃x (P(x) → Q(x)) — HP

(*Vi använder indirekt härledning. Försök med direkt härledning, ger inget.*)

(3) ∀x ¬(P(x) → Q(x))	2, (PD9), s.293
(4) ¬ (P(x) → Q(x))	3, (∀E)
(5) P(x) ∧ ¬Q(x)	4, (SD22)
(6) P(x)	5, (∧I)
(7) ∀x P(x)	6, (∀I)
(8) ∃x Q(x)	1, 7, (→E)
(9) Q(x)	8, ∃E-P
(10) ¬Q(x)	5, (∧E)
(11) ⊥	9, 10, (⊥I)
(12) ⊥	8, 9-11, (∃E)
(13) ∃x (P(x) → Q(x))	2-12, (¬E)

(h) ∀x (A(x) → B) ⊣⊢ ∃x A(x) → B   (x ej fri i B)

BEVIS:

(1) ∀x (A(x) → B	P
(2) ∃x A(x)	HP
(3) A(x)	2, ∃E-P^x
(4) A(x) → B	1, (∀E)
(5) B	3, 4, (→E)
(6) B	2, 3-5, (∃E)

(7) ∃x A(x) → B	2-6, (→I)

∃x A(x) → B ⊢ ∀x (A(x) → B)   (x ej fri i B)

BEVIS:

(1) ∃x A(x) → B	P
(2) A(x)	HP
(3) ∃x A(x)	2, (∃I)
(4) B	1, 3, (→E)
(5) A(x) → B	2-4, (→I)
(6) ∀x (A(x) → B)	5, (∀I)

(i) ∀x (A(x) → ¬B(x)) ⊣⊢ ¬∃x (A(x) ∧ B(x))

∀x (A(x) → ¬B(x)) ⊢ ¬∃x (A(x) ∧ B(x))

BEVIS:

(1) ∀x (A(x) → ¬B(x))	P
(2) ∃x (A(x) ∧ B(x))	HP
(3) A(x) ∧ B(x)	2, ∃E-P
(4) A(x) → ¬B(x)	1, (∀E)
(5) A(x)	3, (∧E)
(6) B(x)	3, (∧E)
(7) ¬B(x)	4, 5, (→E)
(8) ⊥	6, 7, (⊥I)
(9) ⊥	2, 3-8, (∃E)
(10) ¬∃x (A(x) ∧ B(x))	2-9, (¬I)

¬∃x (A(x) ∧ B(x)) ⊢ ∀x (A(x) → ¬B(x))

BEVIS:

(1) ¬∃x (A(x) ∧ B(x))	P
(2) A(x)	HP
(3) B(x)	HP
(4) A(x) ∧ B(x)	2, 3, (∧I)
(5) ∃x (A(x) ∧ B(x))	4, (∃I)
(6) ⊥	1, 5, (⊥I)
(7) ¬B(x)	3-6, (¬I)
(8) A(x) → ¬B(x)	2-7, (→I)
(9) ∀x (A(x) → ¬B(x))	8, (∀I)

10-9.4

(a) ⊢ ∀x x = x

BEVIS:

(1) x = x	(Refl.)
(2) ∀x x = x	1, (∀I)

(b) ⊢ ∃x x = x

BEVIS:

(1) x = x	(Refl.)

(2) ∃x x = x	1, (∃I)

(c) ⊢ ∃x∃y x = y

BEVIS:

(1) x = x	(Refl.)
(2) ∃y x = y	1, (∃I)
(3) ∃x∃y x = y	2, (∃I)

(d) ⊢ ∀x∃y x = y

BEVIS:

(1) x = x	(Refl.)
(2) ∃y x = y	1, (∃I)
(3) ∀x∃y x = y	2, (∃I)

(e) $t_1 = t_2$, $t_2 = t_3$ ⊢ $t_1 = t_3$

BEVIS:

(1) $t_1 = t_2$	P
(2) $t_2 = t_3$	P
(3) $t_1 = t_3$	1, 2, (Subst.)

(f) ⊢ ∀x∀y (x = y → f(x) = f(y))

BEVIS:

(1) x = y	HP
(2) f(x) = f(x)	(Refl.)
(3) f(x) = f(y)	1, 2, (Subst.)
(4) x = y → f(x) = f(y)	1-3, (→I)
(5) ∀x∀y (x = y → f(x) = f(y))	4, 2 × (∀I)

(g) P(c) ⊣⊢ ∀x (c = x → P(x))

P(c) ⊢ ∀x (c = x → P(x))

BEVIS:

(1) P(c)	P
(2) c = x	HP
(3) P(x)	1, 2, (Subst.)
(4) c = x → P(x)	2-3, (→I)
(5) ∀x (c = x → P(x))	4, (∀I)

∀x (c = x → P(x)) ⊢ P(c)

BEVIS:

(1) ∀x (c = x → P(x))	P
(2) c = c → P(c)	1, (∀E)
(3) c = c	(Refl.)
(4) P(c)	2, 3, (→E)

(h) P(c) ⊣⊢ ∃x (c = x ∧ P(x))

P(c) ⊢ ∃x (c = x ∧ P(x))

BEVIS:

(1) $P(c)$	P
(2) $c = c$	(Refl.)
(3) $c = c \wedge P(c)$	1, 2, (∧I)
(4) $\exists x\,(c = x \wedge P(x))$	3, (∃I)

$\exists x\,(c = x \wedge P(x)) \vdash P(c)$

BEVIS:

(1) $\exists x\,(c = x \wedge P(x))$	P
(2) $c = x \wedge P(x)$	1, ∃E-P
(3) $c = x$	2, (∧E)
(4) $P(x)$	2, (∧E)
(5) $x = c$	3, = symmetrisk
(6) $P(c)$	4, 5, (Subst.)
(7) $P(c)$	1, 2-6, (∃E)

(i) $\vdash \forall x \forall y\,(P(x) \wedge x = y \leftrightarrow P(y) \wedge x = y)$

BEVIS:

(1) $P(x) \wedge x = y$	HP
(2) $P(x)$	1, (∧E)
(3) $x = y$	1, (∧E)
(4) $P(y)$	2, 3, (Subst.)
(5) $P(y) \wedge x = y$	3, 4, (∧I)
(6) $P(x) \wedge x = y \rightarrow P(y) \wedge x = y$	1-5, (→I)
(7) $P(y) \wedge x = y$	HP
(8) $P(y)$	7, (∧E)
(9) $x = y$	7, (∧E)
(10) $y = x$	9, = symmetrisk., s.295
(11) $P(x)$	8, 10, (Subst.)
(12) $P(x) \wedge x = y$	9, 11, (∧I)
(13) $P(y) \wedge x = y \rightarrow P(x) \wedge x = y$	7-12, (→I)
(14) $P(x) \wedge x = y \leftrightarrow P(y) \wedge x = y$	6, 13, (↔I)
(15) $\forall x \forall y\,(P(x) \wedge x = y \leftrightarrow P(y) \wedge x = y)$	14, 2 × (∀I)

(j) $P(a), \neg P(b) \vdash \exists x \exists y\; x \neq y$

BEVIS:

(1) $P(a)$	P
(2) $\neg P(b)$	P
(3) $a = b$	HP
(4) $P(b)$	1, 3, (Subst.)
(5) $\bot$	2, 4, (⊥I)
(6) $a \neq b$	3-5, (¬I)
(7) $\exists y\; a \neq y$	6, (∃I)
(8) $\exists x \exists y\; x \neq y$	7, (∃I)

10-9.5

(a) $\exists y \forall x\, R(x,y) \vdash \forall x\, \exists y\, R(x,y)$

BEVIS:

(1) $\exists y \forall x\, R(x,y)$	P
(2) $\forall x\, R(x,y)$	1, ∃E-P^y
(3) $R(x,y)$	2, (∀E)
(4) $\exists y\, R(x,y)$	3, (∃I)
(5) $\exists y\, R(x,y)$	1, 2-4, (∃E)
(6) $\forall x \exists y\, R(x,y)$	5, (∀I)

(b) $\forall x \forall y\, R(x,y) \vdash \forall y \forall x\, R(y,x)$

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\, R(x,y)$	P
(2) $\forall y\, R(z,y)$	1, (∀E)
(*Vi introducerar tillfälligt en helt ny variabel z som i Exempel 8.11.*)	
(3) $R(z,x)$	2, (∀E)
(4) $\forall x\, R(z,x)$	3, (∀I)
(5) $\forall z \forall x\, R(z,x)$	4, (∀I)
(6) $\forall x\, R(y,x)$	5, (∀E)
(7) $\forall y\, \forall x\, R(y,x)$	6, (∀I)

(c) $\forall y \exists x\, R(x,y) \vdash \forall x \exists y\, R(y,x)$

BEVIS:

(1) $\forall y \exists x\, R(x,y)$	P
(2) $\exists x\, R(x,z)$	1, (∀E)
(3) $R(x,z)$	2, ∃E-P^x
(4) $\exists y\, R(y,z)$	3, (∃I)
(5) $\exists y\, R(y,z)$	2, 3-4, (∃E)
(6) $\forall z \exists y\, R(y,z)$	5, (∀I)
(7) $\exists y\, R(y,x)$	6, (∀E)
(8) $\forall x \exists y\, R(y,x)$	7, (∀I)

(d) $\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)) \vdash \forall x\, \neg P(x,x)$

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$	P
(2) $P(x,x)$	HP
(3) $\forall y\,(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$	1, (∀E)
(4) $P(x,x) \rightarrow \neg P(x,x)$	3, (∀E)
(5) $\neg P(x,x)$	2, 4 (→E)
(6) $\bot$	2, 5, (⊥I)
(7) $\neg P(x,x)$	2-6, (¬I)
(8) $\forall x\, \neg P(x,x)$	7, (∀I)

10-9.6

(a) $\vdash \exists x\,(\exists x\, P(x) \rightarrow P(x))$

BEVIS:

(1) $\neg \exists x\,(\exists x\, P(x) \rightarrow P(x))$	HP
(2) $\forall x\, \neg(\exists x\; P(x) \rightarrow P(x))$	1, (PD9), s.293
(3) $\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow P(x))$	2, (∀E)

(4) $\exists x\, P(x) \wedge \neg P(x)$	3, (SD22)
(5) $\exists x\, P(x)$	4, (∧E)
(6) $\neg P(x)$	4, (∧E)
(7) $P(x)$	5, ∃E-P
(8) $\bot$	6, 7, (⊥I)
(9) $\bot$	5, 7-8, (∃E)
(10) $\exists x\,(\exists x\, P(x) \rightarrow P(x))$	1-9, (¬E)

(b) $\vdash \forall x\, A(x) \vee \exists x\, \neg A(x)$

BEVIS:

(1) $\neg(\forall x\, A(x) \vee \exists x\, \neg A(x))$	HP
(2) $\neg \forall x\, A(x) \wedge \neg \exists\; \neg A(x)$	1, De Morgan
(3) $\neg \forall x\, A(x)$	2, (∧E)
(4) $\neg \exists x\, \neg A(x)$	2, (∧E)
(5) $\exists x\, \neg A(x)$	3, (PD7), s.294
(6) $\bot$	4, (⊥I)
(7) $\forall x\, A(x) \vee \exists x\, \neg A(x)$	1, (¬E)

(c) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \vdash \forall x\,(A(x) \vee B(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$	P
(*Vi använder direkt härledning och (∨E).*)	
(2) $\forall x\, A(x)$	HP
(3) $A(x)$	1, (∀E)
(4) $A(x) \vee B(x)$	3, (∨I)
(5) $\forall x\,(A(x) \vee B(x))$	4, (∀I)
(6) $\forall x\, A(x) \rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$	2-5, (→I)
(7) $\forall x\, B(x)$	HP
(8) $B(x)$	7, (∀E)
(9) $A(x) \vee B(x)$	8, (∨I)
(10) $\forall x\,(A(x) \vee B(x))$	9, (∀I)
(11) $\forall x\, B(x) \rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$	7-10, (→I)
(12) $\forall x\,(A(x) \vee B(x))$	1, 6, 11, (∨E)

(d) $\forall x\,(A(x) \vee B(x)) \vdash \exists x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\,(A(x) \vee B(x))$	P
(2) $\neg(\exists x\, A(x) \vee \forall x\, B(x))$	HP
(3) $\neg \exists x\, A(x) \wedge \neg \forall x\, B(x)$	2, De Morgan
(4) $\neg \exists x\, A(x)$	3, (∧E)
(5) $\forall x\, \neg A(x)$	4, (PD9), s.293
(6) $\neg A(x)$	5, (∀E)
(7) $A(x) \vee B(x)$	1, (∀E)
(8) $B(x)$	6, 7, Disj. Syll. (SD 9)
(9) $\forall x\, B(x)$	8, (∀I)
(10) $\neg \forall x\, B(x)$	3, (∧E)
(11) $\bot$	9, 10, (⊥I)

(12) $\exists x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$	2-11, (¬E)

(e) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)), \exists y\, \neg Q(y), \forall z\,(R(z) \rightarrow \neg P(z)) \vdash \exists x\, \neg R(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	P
(2) $\exists y\, \neg Q(y)$	P
(3) $\forall z\,(R(z) \rightarrow \neg P(z))$	P
(*Vi byter först variabel i(2).*)	
(4) $\exists x\, \neg Q(x)$	2, (PD11), s.291
(5) $\neg Q(x)$	4, ∃E-P
(6) $P(x) \vee Q(x)$	1, (∀E)
(7) $P(x)$	5, 6, Disj. Syll. (SD 10)
(8) $R(x) \rightarrow \neg P(x)$	3, (∀E)
(9) $\neg\neg P(x)$	7, Dubbl. Neg. (SD 2)
(10) $\neg R(x)$	8, 9, (MTT) (SD 17)
(11) $\exists x\, \neg R(x)$	10, (∃I)
(12) $\exists x\, \neg R(x)$	4, 5-11, (∃E)
(*Deduktionen kan genomföras utan variabelbytet på rad (4).*)	

(f) $\exists x \forall y\; x = y \vdash \forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x)$

BEVIS:

(1) $\exists x\; \forall y\; x = y$	P
(2) $\neg(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x))$	HP
(*Indirekt härledning enligt heuristisk regel 7.2.4.*)	
(3) $\neg \forall x\, P(x) \wedge \neg \forall x\, \neg P(x)$	2, De Morgan (SD 12)
(4) $\neg \forall x\, P(x)$	3, (∧E)
(5) $\neg \forall x\, \neg P(x)$	3, (∧E)
(6) $\exists x\, \neg P(x)$	4, Ex.3.23
(7) $\exists x\, P(x)$	5, Övn.9.2 (b)
(*Vi byter variabel i (6) och (7) med (PD11), Exempel 3.18.*)	
(8) $\exists z\, \neg P(z)$	6, (PD11)
(9) $\exists w\, P(w)$	7, (PD11)
(10) $\forall y\; x = y$	1, ∃E-P^x
(11) $\neg P(z)$	8, ∃E-P^z
(12) $P(w)$	9, ∃E-P^w
(13) $x = z$	10, (∀E)
(14) $x = w$	10, (∀E)
(15) $w = z$	13, 14, (Subst.)
(16) $P(z)$	12, 15, (Subst.)
(17) $\bot$	11, 16, (⊥I)
(18) $\bot$	9, 12-17, (∃E)
(19) $\bot$	8, 11-18, (∃E)
(20) $\bot$	1, 10-19, (∃E)
(21) $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x)$	2-20, (¬E)

(g) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)), \exists x \forall y\; x = y \vdash \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

BEVIS:

(1) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$	P
(2) $\exists x \forall y\ x = y$	P

(*Vi använder indirekt härledning enligt Regel 7.2.4 (indirekt).*)

(3) $\neg(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))$	HP
(4) $\neg\forall x\ P(x) \wedge \neg\forall x\ Q(x)$	3, De Morgan (SD 12)
(5) $\neg\forall x\ P(x)$	4, ($\wedge$E)
(6) $\neg\forall x\ Q(x)$	4, ($\wedge$E)

(*Vi använder (PD7) på (5) och (6) som i Regel 7.2.7 (indirekt)*)

(7) $\exists x\ \neg P(x)$	5, (PD7)
(8) $\exists x\ \neg Q(x)$	6, (PD7)

(*För att kunna utföra ($\exists$E) på (2), (7), (8), måste vi byta variabel i minst två av dem. Vi byter i (7) och (8).*)

(9) $\exists y\ \neg P(y)$	7, (PD11)
(10) $\exists z\ \neg Q(z)$	8, (PD11)
(11) $\forall y\ x = y$	2, $\exists$E-P^x
(12) $\neg P(y)$	9, $\exists$E-P^y
(13) $\neg Q(z)$	10, $\exists$E-P^z
(14) $P(y) \vee Q(y)$	1, ($\forall$E)
(15) $Q(y)$	12, 14, Disj. Syll. (SD 9)
(16) $x = y$	11, ($\forall$E)
(17) $x = z$	11, ($\forall$E)
(18) $y = z$	16, 17, (Subst.)
(19) $Q(z)$	15, 18, (Subst.)
(20) $\bot$	13, 19, ($\bot$I)
(21) $\bot$	10, 13-20, ($\exists$E)
(22) $\bot$	9, 12-21, ($\exists$E)
(23) $\bot$	2, 11-22, ($\exists$E)
(24) $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$	3-23, ($\neg$E)

10-9.7

(a) A5, A6 $\vdash \forall x\ \ x \cup x = x$

BEVIS:

(1) $\forall x\ \forall y\ \ x \cap (x \cup y) = x$	P (A5)
(2) $\forall x\ \forall y\ \ x \cup (x \cap y) = x$	P (A6)
(3) $\forall y\ \ x \cup (x \cap y) = x$	2, ($\forall$E)
(4) $x \cup (x \cap (x \cup y)) = x$	3, ($\forall$E)

(*Vid ($\forall$E) sätter vi in termen '$x \cup y$' för y.*)

(5) $x \cap (x \cup y) = x$	1, 2 × ($\forall$E)
(6) $x \cup x = x$	4, 5, (Subst.)
(7) $\forall x\ x \cup x = x$	6, ($\forall$I)

Ett informellt bevis ser ut på följande sätt:

$x = x \cup (x \cap (x \cup y))$	A6
$\quad = x \cup x$	A5

(b) A4, A5, A6, A10 $\vdash \forall x\ \ x \cup 1 = 1$

INFORMELLT BEVIS:

$x \cup 1 = x \cup (x \cup -x)$	A10
$\quad = (x \cup x) \cup -x$	A4
$\quad = x \cup -x$	A5, A6 (9.7 (a)
$\quad = 1$	A10

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y \forall z\ \ x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$	P (A4)
(2) $\forall x \forall y\ \ x \cap (x \cup y) = x$	P (A5)
(3) $\forall x \forall y\ \ x \cup (x \cap y) = x$	P (A6)
(4) $\forall x\ \ x \cup -x = 1$	P (A10)
(5) $x \cup -x = 1$	4, ($\forall$E)
(6) $\forall x\ \ x \cup x = x$	2, 3, (9.7(a))
(7) $x \cup x = x$	6, ($\forall$E)
(8) $x = x \cup x$	7, = symm. (PD2)
(9) $(x \cup x) \cup -x = 1$	5, 8, (Subst.)
(10) $x \cup (x \cup -x) = (x \cup x) \cup -x$	1, 3 × ($\forall$E)
(11) $x \cup (x \cup -x) = 1$	9, 10, = transitiv (PD3)
(12) $x \cup 1 = 1$	5, 11, (Subst.)
(13) $\forall x\ \ x \cup 1 = 1$	12, ($\forall$I)

(c) A6, A9 $\vdash \forall x\ x \cup 0 = x$

INFORMELLT BEVIS:

$x \cup 0 = x \cup (x \cap -x)$	A9
$\quad = x$	A6

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\ \ x \cup (x \cap y) = x$	P (A6)
(2) $\forall x\ \ x \cap -x = 0$	P (A9)
(3) $x \cup (x \cap -x) = x$	1, 2 × ($\forall$E)
(4) $x \cap -x = 0$	2, ($\forall$E)
(5) $x \cup 0 = x$	3, 4 (Subst.)
(6) $\forall x\ \ x \cup 0 = x$	5, ($\forall$I)

(d) A5, A10 $\vdash \forall x\ \ x \cap 1 = x$

INFORMELLT BEVIS:

$x \cap 1 = x \cap (x \cup -x)$	A10
$\quad = x$	A5

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\ \ x \cap (x \cup y) = x$	P (A5)
(2) $\forall x\ \ x \cup -x = 1$	P (A10)
(3) $x \cap (x \cup -x) = x$	1, 2 × ($\forall$I)
(4) $x \cup -x = 1$	2, ($\forall$E)
(5) $x \cap 1 = x$	3, 4, (Subst.)
(6) $\forall x\ x \cap 1 = x$	5, ($\forall$I)

(e) A5 $\vdash \forall x \forall y\ \ (x \cup y = y \to x \cap y = x)$

INFORMELLT BEVIS:

Antag $x \cup y = y$. Då

$x \cap y = x \cap (x \cup y)$	Antagandet
$\quad = x$	A5

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\ \ x \cap (x \cup y) = x$	P
(2) $x \cup y = y$	HP
(3) $x \cap (x \cup y) = x$	1, 2 × ($\forall$E)
(4) $x \cap y = x$	2, 3, (Subst.)
(5) $x \cup y = y \to x \cap y = x$	2-4, ($\to$I)
(6) $\forall x \forall y\ (x \cup y = y \to x \cap y = x)$	5, 2 × ($\forall$I)

(f) A2, A6, A9, A10 $\vdash -0 = 1$

INFORMELLT BEVIS:

$-0 = -0 \cup 0$	A6, A9 (9.7 (c))
$\quad = 0 \cup -0$	A2
$\quad = 1$	A10

BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\ \ x \cup y = y \cup x$	P (A2)
(2) $\forall x \forall y\ \ x \cup (x \cap y) = x$	P (A6)
(3) $\forall x\ x \cap -x = 0$	P (A9)
(4) $\forall x\ x \cup -x = 1$	P (A10)
(5) $0 \cup -0 = 1$	4, ($\forall$E)
(6) $0 \cup -0 = -0 \cup 0$	1, 2 × ($\forall$E)
(7) $-0 \cup 0 = 1$	5, 6, (Subst.)
(8) $\forall x\ \ x \cup 0 = x$	2, 3, (övn. 9.7 (c))
(9) $-0 \cup 0 = -0$	8, ($\forall$E)
(10) $-0 = 1$	7, 9, (Subst.)

ANMÄRKNING:
Vi ser att det informella beviset utgör kärnan i det formella beviset. Resten av det formella beviset är hantering av logiska konstanter, i 9.7 (a) – (f) i huvudsak allkvantifikatorer och identitetsrelationen.

10-9.8

(a) *Formalisering*:

(1) $\forall x\ (M(x) \to F(x))$
(2) $\forall x\ (K(x) \to M(x))$
(3) $\forall x\ (K(x) \to F(x))$

(b) *Deduktion*:

$\forall x\ (M(x) \to F(x)), \forall x\ (K(x) \to M(x)) \vdash \forall x\ (K(x) \to F(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\ (M(x) \to F(x))$	P
(2) $\forall x\ (K(x) \to M(x))$	P
(3) $K(x)$	HP
(4) $M(x) \to F(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $K(x) \to M(x)$	2, ($\forall$E)
(6) $M(x)$	3, 5, ($\to$E)
(7) $F(x)$	4, 6, ($\to$E)
(8) $K(x) \to F(x)$	3-7, ($\to$E)
(9) $\forall x\ (K(x) \to F(x))$	8, ($\forall$I)

10-9.9

(a) *Formalisering*:

Symboler:
M(x): x är en människa
F(x): x har en fri vilja
D(x): x är ett djur

(1) $\forall x\ (M(x) \to F(x))$
(2) $\exists x\ (D(x) \wedge M(x))$
(3) $\exists x\ (D(x) \wedge F(x))$

(b) Deduktion:

$\forall x\ (M(x) \to F(x)), \exists x\ (D(x) \wedge M(x)) \vdash \exists x\ (D(x) \wedge F(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\ (M(x) \to F(x))$	P
(2) $\exists x\ (D(x) \wedge M(x))$	P
(3) $D(x) \wedge M(x)$	$\exists$E-P
(4) $M(x) \to F(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $M(x)$	3, ($\wedge$E)
(6) $F(x)$	4, 5, ($\to$E)
(7) $D(x)$	3, ($\wedge$E)
(8) $D(x) \wedge F(x)$	6, 7, ($\wedge$I)
(9) $\exists x\ (D(x) \wedge F(x))$	8, ($\exists$I)
(10) $\exists x\ (D(x) \wedge F(x))$	2, 3-9, ($\exists$E)

10-9.10

(a) *Formalisering*:

(1) $\forall x\ (P(x) \to D(x))$
(2) $\forall x\ (\exists y\ (P(y) \wedge H(x,y)) \to \exists y\ (D(y) \wedge H(x,y)))$

(b) *Deduktion*:

$\forall x\ (P(x) \to D(x)) \vdash \forall x\ (\exists y\ (P(y) \wedge H(x,y)) \to \exists y\ (D(y) \wedge H(x,y)))$

BEVIS:

(1) $\forall x\ (P(x) \to D(x))$	P
(2) $\exists y\ (P(y) \wedge H(x,y))$	HP

(3) $P(y) \wedge H(x,y))$	2, $\exists$E-P^y
(4) $P(y) \rightarrow D(y)$	1, ($\forall$E)
(5) $P(y)$	3, ($\wedge$E)
(6) $D(y)$	4, 5, ($\rightarrow$E)
(7) $H(x,y)$	3, ($\wedge$E)
(8) $D(y) \wedge H(x,y)$	6, 7, ($\wedge$I)
(9) $\exists y\ (D(y) \wedge H(x,y))$	8, ($\exists$I)
(10) $\exists y\ (D(y) \wedge H(x,y))$	2, 3-9, ($\exists$E)
(11) $\exists y\ (P(y) \wedge H(x,y)) \rightarrow \exists y\ (D(y) \wedge H(x,y))$	2-10, ($\rightarrow$I)
(12) $\forall x\ (\exists y\ (P(y) \wedge H(x,y)) \rightarrow \exists y\ (D(y) \wedge H(x,y)))$	11, ($\forall$I)

10-9.11

(a) *Formalisering*:

(1) $\forall x\ (F(x) \rightarrow K(x))$ eller $\neg\exists x\ (F(x) \wedge \neg K(x))$
(2) $\forall x\ (\neg P(x) \rightarrow \neg T(x))$ eller $\neg\exists x\ (Tx \wedge \neg P(x))$
(3) $\forall x\ (O(x) \rightarrow \neg S(x))$
(4) $\forall x\ (K(x) \rightarrow T(x))$
(5) $\forall x\ (V(x) \rightarrow F(x))$ eller $\forall x\ (\neg F(x) \rightarrow \neg V(x))$
(6) $\forall x\ (\neg S(x) \rightarrow \neg P(x))$

(b) *Konklusion & deduktion*:

För överblickens skull förenklar vi (1) – (6) genom att utelämna allkvantifikatorerna och individvariablerna:

(1) $F \rightarrow K$
(2) $\neg P \rightarrow \neg T$
(3) $O \rightarrow \neg S$
(4) $K \rightarrow T$
(5) $V \rightarrow F$
(6) $\neg S \rightarrow \neg P$

Vi ser att predikaten 'O' och 'V' förekommer en gång var emedan övriga predikat förekommer två gånger. Vi får följande kedja:

$$O \xrightarrow{(3)} \neg S \xrightarrow{(6)} \neg P \xrightarrow{(2)} \neg T \xrightarrow{(4)} \neg K \xrightarrow{(1)} \neg F \xrightarrow{(5)} \neg V$$

Vi får konklusionen

(7) $\underline{\forall x\ (O(x) \rightarrow \neg V(x))}$ eller $\underline{\forall x\ (V(x) \rightarrow \neg O(x))}$

dvs.

Ingen opiumsättare har vita glacéhandskar på sig,

eller

Den som har vita glacéhandskar på sig, är inte opiumsättare.

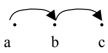
BEVIS:

(1) $\forall x\ (F(x) \rightarrow K(x)$	P
(2) $\forall x\ (\neg P(x) \rightarrow \neg T(x))$	P
(3) $\forall x\ (O(x) \rightarrow \neg S(x))$	P
(4) $\forall x\ (K(x) \rightarrow T(x))$	P
(5) $\forall x\ (V(x) \rightarrow F(x))$	P

(6) $\forall x\ (\neg S(x) \rightarrow \neg P(x))$	P
(7) $O(x)$	HP
(8) $F(x) \rightarrow K(x)$	1, ($\forall$E)
(9) $\neg P(x) \rightarrow \neg T(x)$	2, ($\forall$E)
(10) $O(x) \rightarrow \neg S(x)$	3, ($\forall$E)
(11) $K(x) \rightarrow T(x)$	4, ($\forall$E)
(12) $V(x) \rightarrow F(x)$	5, ($\forall$E)
(13) $\neg S(x) \rightarrow \neg P(x)$	6, ($\forall$E)
(14) $\neg S(x)$	7, 10, ($\rightarrow$E)
(15) $\neg P(x)$	13, 14, ($\rightarrow$E)
(16) $\neg T(x)$	9, 15, ($\rightarrow$E)
(17) $\neg K\ (x)$	11, 16, (MTT)
(18) $\neg F(x)$	8, 17, (MTT)
(19) $\neg V(x)$	12, 18, (MTT)
(20) $O(x) \rightarrow \neg V(x)$	7-19, ($\rightarrow$I)
(21) $\forall x\ (O(x) \rightarrow \neg V(x))$	20, ($\forall$I)

10-9.12

(a) *Motexempel:*



$m = (M, \mathbf{N}) = (\{a, b, c\}, \{(a,b), (b, c)\})$

$(a,b) \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \underline{m \models N(a,b)}$
$(b,c) \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \underline{m \models N(b,c)}$
$(a,c) \notin \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \underline{m \not\models N(a,c)}$

(b) *Satsen A:*

Låt A vara satsen

A: $\forall x \forall y \forall z\ (N(x,y) \wedge N(y,z) \rightarrow N(x,z))$

A uttrycker att N-relationen är transitiv. A är därför analytiskt sann.

Deduktion:

$N(a,b), N(b,c), A \vdash N(a,c)$

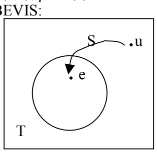
BEVIS:

(1) $N(a,b)$	P
(2) $N(b,c)$	P
(3) $\forall x \forall y \forall z\ (N(x,y) \wedge N(y,z) \rightarrow N(x,z))$	P
(4) $N(a,b) \wedge N(b,c) \rightarrow N(a,c)$	3, 3$\times$ ($\forall$E)
(5) $N(a,b) \wedge N(b,c)$	1, 2 ($\wedge$I)
(6) $N(a,c)$	4, 5, ($\rightarrow$E)

10-9.13

(a) $S(u,e) \not\models \neg T(e)$

BEVIS:



$m = (M, \mathbf{T}, \mathbf{S}, u, e)$
$= (\{u,e\}, \{e\}, \{(u,e)\}, u, e)$

$(u,e) \in \mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad m \models S(u,e)$
$e \in \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad m \models T(e)$
$\quad \Rightarrow \quad m \not\models \neg T(e)$

(b) *Deduktion*:

A1: $\forall x\ (T(x) \leftrightarrow \forall y\ (x \neq y \rightarrow S(x,y)))$
A2: $\forall x \forall y\ (S(x,y) \rightarrow \neg S(y,x))$

$S(u,e), A1, A2 \vdash \neg T(e)$

BEVIS:

(1) $S(u,e)$	P
(2) $\forall x\ (T(x) \leftrightarrow \forall y\ (x \neq y \rightarrow S(x,y)))$	P
(3) $\forall x \forall y\ (S(x,y) \rightarrow \neg S(y,x))$	P
(4) $T(e)$	HP
(5) $T(e) \leftrightarrow \forall y\ (e \neq y \rightarrow S(e,y))$	2, ($\forall$E)
(6) $T(e) \rightarrow \forall y\ (e \neq y \rightarrow S(e,y))$	5, ($\leftrightarrow$E)
(7) $\forall y\ (e \neq y \rightarrow S(e,y))$	4, 6, ($\rightarrow$E)
(8) $S(u,e) \rightarrow \neg S(e,u)$	3, 2 $\times$ ($\forall$E)
(9) $\neg S(e,u)$	1, 8, ($\rightarrow$E)
(10) $e \neq u \rightarrow S(e,u)$	7, ($\forall$E)
(11) $\neg e \neq u$	9, 10, MTT (SD 17)
(12) $e = u$	11, Dubl. Neg. (SD 2)
(13) $u = e$	12, = symm. (PD 2)
(14) $S(e,e)$	1, 13, (Subst.)
(15) $S(e,u)$	12, 14, (Subst.)
(16) $\perp$	9, 15, ($\perp$I)
(17) $\neg T(e)$	4-16, ($\neg$I)

10-9.14

(a) *Formalisering*:

(1) $\forall x\ (Ä(x) \rightarrow R(x))$
(2) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg R(x))$
(3) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg Ä(x))$

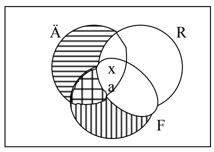
(b) *Deduktion*:

(1) $\forall x\ (Ä(x) \rightarrow R(x))$	P
(2) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg R(x))$	P
(3) $F(x) \wedge \neg R(x)$	$\exists$E-P
(4) $Ä(x) \rightarrow R(x)$	1, ($\forall$E)
(5) $F(x)$	3, ($\wedge$E)
(6) $\neg R(x)$	3, ($\wedge$E)
(7) $\neg Ä(x)$	4, 6, MTT
(8) $F(x) \wedge \neg Ä(x)$	5, 7, ($\wedge$E)
(9) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg Ä(x))$	8, ($\exists$I)
(10) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg A(x))$	2, 3-9, ($\exists$E)

(c) *Formalisering*:

(1) $\forall x\ (Ä(x) \rightarrow R(x))$
(2) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg Ä(x))$
(3) $\exists x\ (F(x) \wedge \neg R(x))$

Venn-diagram:



$\forall x\ (Ä(x) \rightarrow R(x))$ sann ( )
$\exists x\ (F(x) \wedge \neg R(x))$ falsk ( )
$\exists x\ (F(x) \wedge \neg Ä(x))$ sann (x a)

Modell:

$m = (M, \mathbf{Ä}, \mathbf{R}, \mathbf{F}) = (\{a\}, \varnothing, \{a\}, \{a\})$

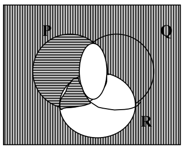
$a \notin \mathbf{A}$	$\Rightarrow$	$m \not\models A(a)$	(1)
	$\Rightarrow$	$m \models A(a) \rightarrow R(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \models \forall x\ (A(x) \rightarrow R(x))}$	
(1)	$\Rightarrow$	$m \models \neg A(a)$	(2)
$a \in \mathbf{F}$	$\Rightarrow$	$m \models F(a)$	(3)
(2) + (3)	$\Rightarrow$	$m \models F(a) \wedge \neg A(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \models \exists x\ (F(x) \wedge \neg A(x))}$	
$a \in \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$m \models R(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \models \neg R(a)$	(4)
(3) + (4)	$\Rightarrow$	$m \not\models F(a) \wedge \neg R(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \not\models \exists x\ (F(x) \wedge \neg R(x))}$	

Kapitel 12: Lösningar

12-6.1

(a) $\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \forall x\,(P(x) \lor R(x)) \vdash \forall x\,(Q(x) \lor R(x))$

LÖSNING:



$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ sann ( )

$\forall x\,(P(x) \lor R(x)$ sann ( )

Då blir även
$\forall x\,(Q(x) \lor R(x)$ sann
eftersom hela $-(\mathbf{Q} \lor \mathbf{R})$ är streckad.

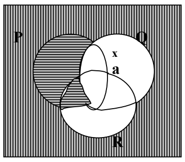
∴ *(a) gäller.*

DEDUKTION:

(1) $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	P
(2) $\forall x\,(P(x) \lor R(x))$	P
(3) $\neg\,(Q(x) \lor R(x))$	HP
(4) $\neg Q(x) \land \neg R(x)$	3, De Morgan (SD 12)
(5) $P(x) \to Q(x)$	1, ($\forall$E)
(6) $P(x) \lor R(x)$	2, ($\forall$E)
(7) $\neg R(x)$	4, ($\land$E)
(8) $P(x)$	6, 7, Disj. Syll. (SD 10)
(9) $Q(x)$	5, 8, ($\to$E)
(10) $\neg Q(x)$	4, ($\land$E)
(11) $\bot$	9, 10, ($\bot$I)
(12) $Q(x) \lor R(x)$	3-11, ($\neg$E)
(13) $\forall x\,(Q(x) \lor R(x))$	12, ($\forall$I)

(b) $\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \forall x\,(Q(x) \lor R(x)) \vdash \forall x\,(P(x) \lor R(x))$

LÖSNING:



$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ sann ( )

$\forall x\,(Q(x) \lor R(x))$ sann ( )

$\forall x\,(P(x) \lor R(x))$ falsk (x a)

∴ *(b) gäller inte.*

MOTEXEMPEL:
$m = (M, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) = (\{a\}, \varnothing, \{a\}, \varnothing)$

$a \notin \mathbf{P}$	$\Rightarrow$	$m \not\models P(a)$	(1)
	$\Rightarrow$	$m \models P(a) \to Q(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\,(P(x) \to Q(x))$	
$a \in \mathbf{Q}$	$\Rightarrow$	$m \models Q(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \models Q(a) \lor R(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\,(Q(x) \lor R(x))$	
$a \notin \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$m \not\models R(a)$	(2)
(1) + (2)	$\Rightarrow$	$m \not\models P(a) \lor R(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \not\models \forall x\,(P(x) \lor R(x))$	

(c) $\forall x\,(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x\,(Q(x) \lor R(x)) \vdash \exists x\,\neg(P(x) \lor R(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	P
(2) $\neg\forall x\,(Q(x) \lor R(x))$	P
(3) $\neg\exists x\,\neg(P(x) \lor R(x))$	HP
(4) $\forall x\,(P(x) \lor R(x))$	3, (PD6)
(5) $\forall x\,(Q(x) \lor R(x))$	1, 4, övn. 4.1 (a)
(6) $\bot$	2, 5, ($\bot$I)
(7) $\exists x\,\neg(P(x) \lor R(x))$	3-6, ($\neg$E)

(d) $\forall x\,R(xx,) \vdash \forall x\exists y\,R(x,y) \land \forall y\exists x\,R(x,y)$

Grafer:
Premissen uttrycker att alla skickar en pil till sig själv. Konklusionen uttrycker att alla skickar i väg minst en pil och alla mottar minst en pil, vilket följer från premissen.
∴ *(d) gäller.*
Scheman:
Premissen uttrycker att varje ruta i huvuddiagonalen är kryssad. Konklusionen uttrycker att varje rad innehåller minst ett kryss och varje kolumn innehåller minst ett kryss. Det följer från premissen, t ex.

	a	b	c
a	x		
b		x	
c			x

Deduktion:

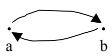
(1) $\forall x\,R(x,x)$	P
(2) $R(x,x)$	1, ($\forall$E)
(3) $\exists y\,R(x,y)$	2, ($\exists$I)
(4) $\forall x\exists y\,R(x,y)$	3, ($\forall$I)
(5) $\forall y\,R(y,y)$	1, (PD10)
(6) $R(y,y)$	5, ($\forall$E)
(7) $\exists x\,R(x,y)$	6, ($\exists$I)

(8) $\forall y\exists x\,R(x,y)$	7, ($\forall$I)
(9) $\forall x\exists y\,R(x,y) \land \forall y\exists x\,R(x,y)$	4, 8, ($\land$I)

(e) $\forall x\exists y\,R(x,y) \land \forall y\exists x\,R(x,y) \vdash \forall x\,R(x,x)$

LÖSNING:
Grafer och scheman:
Tolkningarna framgår av (d). Konklusionen följer inte ur premissen. T ex.

	a	b
a		x
b	x	



∴ *(e) gäller inte.*

Modell:
$m = (M, \mathbf{R}) = (\{a, b\}, \{(a,b), (b,a)\})$

$(a,b) \in \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$m \models R(a,b)$	(1)
$(b,a) \in \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$m \models R(b,a)$	(2)
$(a,a) \notin \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$m \not\models R(a,a)$	(3)
$(b,b) \notin \mathbf{R}$	$\Rightarrow$	$m \not\models R(b,b)$	(4)
(1)	$\Rightarrow$	$m \models \exists y\,R(a,y)$	(5)
(2)	$\Rightarrow$	$m \models \exists y\,R(b,y)$	(6)
(5) + (6)	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\exists y\,R(x,y)$	(7)
(2)	$\Rightarrow$	$m \models \exists x\,R(x,a)$	(8)
(1)	$\Rightarrow$	$m \models \exists x\,R(x,b)$	(9)
(8) + (9)	$\Rightarrow$	$m \models \forall y\exists x\,R(x,y)$	(10)
(7) + (10)	$\Rightarrow$	$m \models \forall x\exists y\,R(x,y) \land \forall y\exists x\,R(x,y)$	
(3)	$\Rightarrow$	$m \not\models \forall x\,R(x,x)$	

12-6.2

(a) $P(a) \land \neg Q(a), \forall x\,(P(x) \land R(b,x) \to Q(x)) \vdash \neg R(b,a)$

BEVIS:

(1) $P(a) \land \neg Q(a)$	P
(2) $\forall x\,(P(x) \land R(b,x) \to Q(x))$	P
(3) $R(b,a)$	HP
(4) $P(a) \land R(b,a) \to Q(a)$	2, ($\forall$E)
(5) $P(a)$	1, ($\land$E)
(6) $P(a) \land R(b,a)$	3, 5, ($\land$I)
(7) $Q(a)$	4, 6, ($\to$E)
(8) $\neg Q(a)$	1, ($\land$E)

(9) $\bot$	7, 8, ($\bot$I)
(10) $\neg R(b,a)$	3-9, ($\neg$I)

(b) $\forall x\,(P(x) \to Q(x) \lor R(x)), \forall x\,(Q(x) \land P(x) \to S(x)),$
$\forall x\,(R(x) \land P(x) \to T(x)) \vdash \forall x\,(P(x) \land \neg T(x) \to S(x))$

BEVIS:

(1) $\forall x\,(P(x) \to Q(x) \lor R(x))$	P
(2) $\forall x\,(Q(x) \land P(x) \to S(x))$	P
(3) $\forall x\,(R(x) \land P(x) \to T(x))$	P
(4) $P(x) \land \neg T(x)$	HP
(5) $\neg S(x)$	HP
(6) $P(x) \to Q(x) \lor R(x)$	1, ($\forall$E)
(7) $Q(x) \land P(x) \to S(x)$	2, ($\forall$E)
(8) $R(x) \land P(x) \to T(x)$	3, ($\forall$E)

(*Vi har eliminerat $\forall x$ från (1), (2) och (3). Nu gäller det att härleda $\bot$ från (4) – (8) med satslogisk deduktion.*)

(9) $P(x)$	4, ($\land$E)
(10) $Q(x) \lor R(x)$	6, 9, ($\to$E)
(11) $\neg(Q(x) \land P(x))$	5, 7, (MTT)
(12) $\neg Q(x) \lor \neg P(x)$	11, De Morgan (SD 6)
(13) $\neg\neg P(x)$	9, (SD2)
(14) $\neg Q(x)$	12, 13, Disj. Syll. (SD 10)
(15) $R(x)$	10, 14, Disj. Syll. (SD 9)
(16) $R(x) \land P(x)$	9, 15, ($\land$I)
(17) $T(x)$	8, 16 ($\to$E)
(18) $\neg T(x)$	4, ($\land$I)
(19) $\bot$	17, 18, ($\bot$I)
(20) $S(x)$	5-19, ($\neg$E)
(21) $P(x) \land \neg T(x) \to S(x)$	4-20, ($\to$I)
(22) $\forall x\,(P(x) \land \neg T(x) \to S(x))$	21, ($\forall$I)

(c) $\forall x\,(P(x) \to Q(x) \lor R(x)), \neg Q(a) \land \neg R(a) \vdash \neg P(a)$

BEVIS:

(1) $\forall x\,(P(x) \to Q(x) \lor R(x))$	P
(2) $\neg Q(a) \land \neg R(a)$	P
(3) $P(a)$	HP
(4) $P(a) \to Q(a) \lor R(a)$	1, ($\forall$E)
(5) $Q(a) \lor R(a)$	3, 4, ($\to$E)
(6) $\neg Q(a)$	2, ($\land$E)
(7) $R(a)$	5, 6, Disj. Syll. (SD 9)
(8) $\neg R(a)$	2, ($\land$E)
(9) $\bot$	7, 8, ($\bot$I)
(10) $\neg P(a)$	3-9, ($\neg$I)

(d) $P(a) \land \forall x(P(x) \to R(a,x) \vdash R(a,a)$

BEVIS:

(1) $P(a) \land \forall x\,(P(x) \to R(a,x)$	P

(2) $P(a)$	1, ($\wedge$E)
(3) $\forall x\,(P(x) \rightarrow R(a,x))$	1, ($\wedge$E)
(4) $P(a) \rightarrow R(a,a)$	3, ($\forall$E)
(5) $R(a,a)$	2, 4, ($\rightarrow$E)

12-6.3

(a) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)) \vdash \exists x\,(R(x) \wedge \neg Q(x))$

BEVIS:

(1) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))$	P
(2) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$	1, ($\wedge$E)
(3) $\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))$	1, ($\wedge$E)
(4) $P(x) \wedge \neg Q(x)$	2, $\exists$E-P^x
(5) $P(x) \rightarrow R(x)$	3, ($\forall$E)
(6) $P(x)$	4, ($\wedge$E)
(7) $R(x)$	5, 6, ($\rightarrow$E)
(8) $\neg Q(x)$	4, ($\wedge$E)
(9) $R(x) \wedge \neg Q(x)$	7, 8, ($\wedge$I)
(10) $\exists x\,(R(x) \wedge \neg Q(x))$	9, ($\exists$I)
(11) $\exists x\,(R(x) \wedge \neg Q(x))$	2, 4-10, ($\exists$E)

(b) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\,(R(x,y) \rightarrow S(x,y)))$,
$\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg\exists y\,(S(x,y) \wedge \neg Q(y)))$
$\vdash \forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\,(R(x,y) \rightarrow Q(y)))$

BEVIS:

(1) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\,(R(x,y) \rightarrow S(x,y)))$	P
(2) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg\exists y\,(S(x,y) \wedge \neg Q(y)))$	P
(3) $P(x)$	HP
(4) $R(x,y)$	HP
(5) $\neg Q(y)$	HP

(*Vi använder indirekt härledning. Direkt härledning av Q(y) från premisserna (1)- (4) är också möjlig.*)

(6) $P(x) \rightarrow \forall y\,(R(x,y) \rightarrow S(x,y))$	1, ($\forall$E)
(7) $P(x) \rightarrow \neg\exists y\,(S(x,y) \wedge \neg Q(y))$	2, ($\forall$E)
(8) $\forall y\,(R(x,y) \rightarrow S(x,y))$	3, 6, ($\rightarrow$E)
(9) $R(x,y) \rightarrow S(x,y)$	8, ($\forall$E)
(10) $S(x,y)$	4, 9, ($\rightarrow$E)
(11) $S(x,y) \wedge \neg Q(y)$	5, 10, ($\wedge$I)
(12) $\exists y\,(S(x,y) \wedge \neg Q(y))$	11, ($\exists$I)
(13) $\neg\exists y\,(S(x,y) \wedge \neg Q(y))$	3, 7, ($\rightarrow$E)
(14) $\perp$	12, 13, ($\perp$I)
(15) $Q(y)$	5-14, ($\neg$E)
(16) $R(x,y) \rightarrow Q(y)$	4-15, ($\rightarrow$I)
(17) $\forall y\,(R(x,y) \rightarrow Q(y))$	16, ($\forall$I)
(18) $P(x) \rightarrow \forall y\,(R(x,y) \rightarrow Q(y))$	3-17, ($\rightarrow$I)
(19) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\,(R(x,y) \rightarrow Q(y)))$	18, ($\forall$I)

(c) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)), \exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$
$\vdash \exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y)))$

BEVIS:

(1) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	P
(2) $\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$	P
(3) $\exists y\,(P(y) \wedge Q(y))$	1, (PD11)
(4) $P(y) \wedge Q(y)$	3, $\exists$E-P^y
(5) $P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$	2, $\exists$E-P^x
(6) $P(x)$	5, ($\wedge$E)
(7) $\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y))$	HP
(8) $P(y) \rightarrow R(x,y)$	7, ($\forall$E)
(9) $\forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y))$	5, ($\wedge$E)
(10) $Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)$	9, ($\forall$E)
(11) $P(y)$	4, ($\wedge$E)
(12) $Q(y)$	4, ($\wedge$E)
(13) $R(x,y)$	8, 11, ($\rightarrow$E)
(14) $\neg R(x,y)$	10, 12, ($\rightarrow$E)
(15) $\perp$	13, 14, ($\perp$I)
(16) $\neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y))$	7-15, ($\neg$I)
(17) $P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y))$	6, 16, ($\wedge$I)
(18) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y)))$	17, ($\exists$I)
(19) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y)))$	2, 5-18, ($\exists$E)
(20) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(x,y)))$	3, 4-19 ($\exists$E)

(d) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)), \exists x(P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$
$\vdash \exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x)))$

BEVIS:

(1) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	P
(2) $\exists x(P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$	P
(3) $\exists z\,(P(z) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(z,y)))$	2, (PD11)
(4) $P(z) \wedge \forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(z,y))$	3, $\exists$E-P^z
(5) $\forall y\,(Q(y) \rightarrow \neg R(z,y))$	4, ($\wedge$E)
(6) $\forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(z,x))$	5, (PD10)
(7) $P(z)$	4, ($\wedge$E)
(8) $P(z) \wedge \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(z,x))$	6, 7, ($\wedge$I)
(9) $\exists y\,(P(y) \wedge \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(y,x)))$	8, ($\exists$I)
(10) $\exists y\,(P(y) \wedge \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(y,x)))$	3, 4-9, ($\exists$E)

Variabel-
permutation

(11) $P(y) \wedge \forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(y,x))$	10, $\exists$E-P^y
(12) $P(x) \wedge Q(x)$	1, $\exists$E-P^x
(13) $P(x)$	12, ($\wedge$E)

(*Vi har härlett P(x). Nu härleder vi $\neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x))$ genom indirekt härledning.*)

(14) $\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x))$	HP
(15) $P(y) \rightarrow R(y,x)$	14, ($\forall$E)
(16) $P(y)$	11, ($\wedge$E)
(17) $R(y,x)$	15, 16, ($\rightarrow$E)
(18) $\forall x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(y,x))$	11, ($\wedge$E)

(19) $Q(x) \rightarrow \neg R(y,x)$	18, ($\forall$E)
(20) $Q(x)$	12, ($\wedge$E)
(21) $\neg R(y,x)$	19, 20, ($\rightarrow$E)
(22) $\perp$	17, 21, ($\perp$I)
(23) $\neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x))$	14-22, ($\neg$I)
(24) $P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x))$	13, 23, ($\wedge$I)
(25) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x)))$	24, ($\exists$I)
(26) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x)))$	1, 12-25, ($\exists$E)
(27) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,x)))$	10, 11-26, ($\exists$E)

(e) $A \rightarrow \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)), \forall x\,(R(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$
$\vdash A \rightarrow \exists x\,(R(x) \wedge \neg S(x))$

BEVIS:

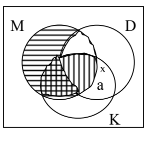
(1) $A \rightarrow \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	P
(2) $\forall x\,(R(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	P
(3) A	HP
(4) $\exists x\,P(x) \wedge Q(x))$	1, 3, ($\rightarrow$E)
(5) $\neg\neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	4, Dubbl. Neg. (SD 2)
(6) $\neg\forall x\,(R(x) \rightarrow S(x))$	2, 5, (MTT) (SD 17)
(7) $\exists x\,\neg(R(x) \rightarrow S(x))$	6, (PD7)
(8) $\neg\,(R(x) \rightarrow S(x))$	7, $\exists$E-P
(9) $R(x) \wedge \neg S(x)$	8, (SD22)
(10) $\exists x\,(R(x) \wedge \neg S(x))$	9, ($\exists$I)
(11) $\exists x\,(R(x) \wedge \neg S(x))$	7, 8-10, ($\exists$E)
(12) $A \rightarrow \exists x\,(R(x) \wedge \neg S(x))$	3-11, ($\rightarrow$I)

12-6.4

(i) *Formalisering*:

(1) $\forall x\,(M(x) \rightarrow D(x))$
(2) $\exists x\,(D(x) \wedge K(x))$
(3) $\exists x\,(M(x) \wedge K(x))$

(ii) *Motexempel*:



$\forall x\,(M(x) \rightarrow D(x))$	sann	($\equiv$)
$\exists x\,(D(x) \wedge K(x))$	sann	(x a)
$\exists x\,(M(x) \wedge K(x)$	falsk	(||||||||)

$m = (M, \mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}) = (\{a\}, \varnothing, \{a\}, \{a\})$

$a \in \mathbf{D}$	$\Rightarrow$	$m \models D(a)$	(1)
	$\Rightarrow$	$m \models M(a) \rightarrow D(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \models \forall x\,(M(x) \rightarrow D(x))}$	

$a \in \mathbf{K}$	$\Rightarrow$	$m \models K(a)$	(2)
(1) + (2)	$\Rightarrow$	$m \models D(a) \wedge K(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \models \exists x\,(D(x) \wedge K(x))}$	
$a \notin \mathbf{M}$	$\Rightarrow$	$m \not\models M(a)$	
	$\Rightarrow$	$m \not\models M(a) \wedge K(a)$	
	$\Rightarrow$	$\underline{m \not\models \exists x\,(M(x) \wedge K(x))}$	

12-6.5

(a) *Formalisering*:

(1) $\forall x\,(T(x) \wedge \neg M(x) \rightarrow \neg V(x))$
eller ekvivalent
(1') $\neg\exists x\,(T(x) \wedge \neg M(x) \wedge V(x))$
dvs det är ovisst om alla, några eller ingen av marinmålningarna är värdefulla.
En annan möjlig tolkning är
(1'') $\forall x\,(T(x) \rightarrow (V(x) \leftrightarrow M(x)))$
Dvs bland tavlorna är marinmålningarna, och bara de, värdefulla.

Vi har

	$\forall x\,(T(x) \wedge \neg M(x) \rightarrow \neg V(x))$	
$\Leftrightarrow$	$\forall x\,(T(x) \rightarrow (\neg M(x) \rightarrow \neg V(x))$	(*Exportation*)
$\Leftrightarrow$	$\forall x\,(T(x) \rightarrow (V(x) \rightarrow M(x)))$	(*Kontraposition*)

Därför gäller (1'') $\Rightarrow$ (1) men (1) $\not\Rightarrow$ (1'').
Vi använder därför tolkning (1) i (b) nedan. Om (1) är tillräcklig, är även (1'') tillräcklig.
(2) $\exists x\,(T(x) \wedge \neg O(x) \wedge V(x))$
(3) $\neg\forall x\,(M(x) \rightarrow O(x))$
Alltså får vi formaliseringen:
(1) $\forall x\,(T(x) \wedge \neg M(x) \rightarrow \neg V(x))$
(2) $\exists x\,(T(x) \wedge \neg O(x) \wedge V(x))$
(3) $\neg\forall x\,(M(x) \rightarrow O(x))$

(b) *Deduktion*:

(1) $\forall x\,(T(x) \wedge \neg M(x) \rightarrow \neg V(x))$	P
(2) $\exists x\,(T(x) \wedge \neg O(x) \wedge V(x))$	P
(3) $\forall x\,(M(x) \rightarrow O(x))$	HP
(4) $T(x) \wedge \neg O(x) \wedge V(x)$	2, $\exists$E-P^x
(5) $T(x) \wedge \neg M(x) \rightarrow \neg V(x)$	1, ($\forall$E)
(6) $M(x) \rightarrow O(x)$	3, ($\forall$E)
(7) $T(x)$	4, ($\wedge$E)
(8) $\neg O(x) \wedge V(x)$	4, ($\wedge$E)
(9) $\neg O(x)$	8, ($\wedge$E)
(10) $V(x)$	8, ($\wedge$E)
(11) $\neg M(x)$	6, 9, (MTT) (SD 17)
(12) $T(x) \wedge \neg M(x)$	7, 11, ($\wedge$I)
(13) $\neg V(x)$	5, 12, ($\rightarrow$E)
(14) $\perp$	10, 13, ($\perp$I)

(15) $\perp$	2, 4-14, ($\exists$E)
(16) $\neg\forall x\,(M(x) \to O(x))$	3-15, ($\neg$I)

12-6.6
A1 uttrycker att alla mottar minst en pil. Alternativt uttrycker A1 att varje kolumn innehåller minst ett ‘x’.
A2 uttrycker att **P** är asymmetrisk.
A3 uttrycker att **P** är transitiv.

(a) {A1, A2, A3} är konsistent.
BEVIS:
Vi ska hitta en modell m sådan att
$m \vDash$ A1, A2, A3
Genom att experimentera med modeller med 1, 2, 3, … element ser vi att M måste innehålla oändligt många element. I sådana fall låter vi M vara en mängd av tal, t ex $\underline{N}$, $\underline{Z}$, $\underline{Z}_+$, $\underline{Q}$, $\underline{Q}_+$, $\underline{R}$, $\underline{R}_+$.
Låt m = (M, **P**) = ({0, 1, 2, …}, >).
För varje $a \in M$ gäller $a + 1 > a$.
$\Rightarrow\quad m \vDash P(a + 1, a)$
$\Rightarrow\quad m \vDash \exists y\, P(y, a)$
$\Rightarrow\quad m \vDash \forall x \exists y\, P(y, x)$
$\therefore\quad \underline{m \vDash \text{A1}}$
Eftersom > är asymmetrisk och transitiv, gäller
$\underline{m \vDash \text{A2}}$
$\underline{m \vDash \text{A3}}$

(b) {A1, A2, A3} är oberoende.
BEVIS:
$\underline{\text{A1, A2} \nvDash \text{A3}}$:
Låt m = (M, **P**) = ({a, b, c}, **P**) där **P** definieras av schemat

	a	b	c
a		x	
b			x
c	x		

Varje kolumn innehåller ett kryss
$\Rightarrow\quad \underline{m \vDash \text{A1}}$
Huvuddiagonalen är tom och inget krysspar ligger symmetriskt kring huvuddiagonalen
$\Rightarrow\quad \underline{m \vDash \text{A2}}$
$(a, b) \in$ **P** $\quad\Rightarrow\quad m \vDash P(a,b)$
$(b,c) \in$ **P** $\quad\Rightarrow\quad m \vDash P(b,c)$

$\Rightarrow\quad m \vDash P(a,b) \wedge P(b,c) \qquad (1)$
$(a,c) \notin$ **P** $\quad\Rightarrow\quad m \nvDash P(a,c) \qquad (2)$
$(1) + (2) \quad\Rightarrow\quad m \nvDash P(a,b) \wedge P(b,c) \to P(a,c)$
$\Rightarrow\quad \underline{m \nvDash \text{A3}}$

Alternativ:
M = $\underline{N}$ = {0, 1, 2, …}
$P(x,y) \Leftrightarrow x = y + 1$

$\underline{\text{A1, A3} \nvDash \text{A2}}$:
M = (M, **P**) = ({a}, **P**)
där **P** definieras genom

	a
a	x

Eftersom kolumnen innehåller ett ‘x’,
$\underline{m \vDash \text{A1}}$
Huvuddiagonalen innehåller ett ‘x’ implicerar (se § 7.23, s. 172)
$\underline{m \nvDash \text{A2}}$
Eftersom M bara innehåller ett element (se § 7.23, s.172),
$\underline{m \vDash \text{A3}}$

Alternativ:
M = $\underline{N}$ = {0, 1, 2, …}
$P(x,y) \Leftrightarrow x \geq y$

$\underline{\text{A2, A3} \nvDash \text{A1}}$:
M = (M, **P**) = ({a}, $\varnothing$)

	a
a	

Kolumnen saknar x
$\Rightarrow\quad \underline{m \nvDash \text{A1}}$
Eftersom **P** = $\varnothing$, blir förledena i A2 och A3 alltid falska. Därför blir A2 och A3 sanna för alla val av x, y, z:
$m \vDash$ A2
$m \vDash$ A3

Alternativ:
M = $\underline{N}$ = {0, 1, 2, …}
$P(x,y) \Leftrightarrow x < y$

12-6.7
Vi använder deduktion och visar
B1, B2 $\vdash \perp$
BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\,(R(x,y) \to \neg R(y,x))$	P
(2) $\forall x\, R(x,x)$	P
(3) $R(x,x)$	2, ($\forall$E)
(4) $\forall y\,(R(x,y) \to \neg R(y,x)))$	1, ($\forall$E)
(5) $R(x,x) \to \neg R(x,x)$	4, ($\forall$E)
(6) $\neg R(x,x)$	3, 5, ($\to$E)
(7) $\perp$	3, 6, ($\perp$I)

12-6.8
Vi visar {C1, C2, C3} beroende genom att med deduktion visa
C2, C3 $\vdash \forall x \forall y\,(P(x,y) \to P(x,x))$
BEVIS:

(1) $\forall x \forall y\,(P(x,y) \to P(y,x))$	P
(2) $\forall x \forall y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$	P
(3) $P(x,y)$	HP
(4) $P(x,y) \to P(y,x)$	1, 2 $\times$ ($\forall$E)
(5) $\forall z\,(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$	2, 2 $\times$ ($\forall$E)
(6) $P(x,y) \wedge P(y,x) \to P(x,x)$	5, ($\forall$E)
(7) $P(y,x)$	3, 4, ($\to$E)
(8) $P(x,y) \wedge P(y,x)$	3, 7, ($\wedge$I)
(9) $P(x,x)$	6, 8, ($\to$E)
(10) $P(x,y) \to P(x,x)$	3-9, ($\to$I)
(11) $\forall x \forall y\, P((x,y) \to P(x,x))$	10, 2 $\times$ ($\forall$I)

12-6.9
Vi ger först ett informellt bevis för
$x \circ z = y \circ z \to x = y$
Antag $x \circ z = y \circ z$. Då

	$(x \circ z) \circ z^{-1} = (y \circ z) \circ z^{-1}$	(1)	
$\Rightarrow$	$x \circ (z \circ z^{-1}) = y \circ (z \circ z^{-1})$	(2)	(A1)
$\Rightarrow$	$x \circ e = y \circ e$	(3)	(A3)
$\Rightarrow$	$x = y$	(4)	(A2)

A1, A2, A3 $\vdash \forall x \forall y \forall z\,(x \circ y = y \circ z \to x = y)$
BEVIS:

(1) $\forall x \forall y \forall z\; x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	P
(2) $\forall x\; x \circ e = x$	P
(3) $\forall x\; x \circ x^{-1} = e$	P
(4) $x \circ z = y \circ z$	HP
(5) $(x \circ z) \circ z^{-1} = (x \circ z) \circ z^{-1}$	(Refl.)
(6) $(x \circ z) \circ z^{-1} = (y \circ z) \circ z^{-1}$	4, 5, (Subst.)

(*Detta är rad (1) i det informella beviset ovan. Vi ska nu m h a associativa lagen A1 försöka få fram rad (2) i det informella beviset.*)

(7) $\forall y \forall z\; x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	1, ($\forall$E)
(8) $\forall z \forall y\; x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	7, (PD13)

(*Syftet med att ändra ordningen mellan kvantifikatorerna är att undvika konflikt med restriktionen på ($\forall$E). Vi vill ha z på y:s plats i $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Men använder vi ($\forall$E) på (7) och sätter in z för y, får vi $\forall z\; x \circ (z \circ z) = (x \circ z) \circ z$. Dvs z är inte fri för y i $\forall z\; x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.*)

(9) $\forall y\; x \circ (y \circ z^{-1}) = (x \circ y) \circ z^{-1}$	8, ($\forall$E)
(10) $x \circ (z \circ z^{-1}) = (x \circ z) \circ z^{-1}$	9, ($\forall$E)
(11) $x \circ (z \circ z^{-1}) = (y \circ z) \circ z^{-1}$	6, 10, (Subst.)

(*Nu overensstämmer VL i (11) med VL i (2) i det informella beviset. Nu gäller det att på motsvarande sätt transformera HL i (11).*)

(12) $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$	1, 3 $\times$ ($\forall$E)
(13) $\forall u \forall v \forall w\; u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$	12, 3 $\times$ ($\forall$I)

(*Syftet med variabelbytena mellan raderna (1) och (13) är att undvika konflikt med restriktionen på ($\forall$E).*)

(14) $\forall w\; y \circ (z \circ w) = (y \circ z) \circ w$	13, 2 $\times$ ($\forall$E)
(15) $y \circ (z \circ z^{-1}) = (y \circ z) \circ z^{-1}$	14, ($\forall$E)
(16) $(y \circ z) \circ z^{-1} = y \circ (z \circ z^{-1})$	15, (PD2)
(17) $x \circ (z \circ z^{-1}) = y \circ (z \circ z^{-1})$	11, 16, (PD3)
(18) $z \circ z^{-1} = e$	3, ($\forall$E)
(19) $x \circ e = y \circ e$	17, 18, 2 $\times$ (Subst.)
(20) $x \circ e = x$	2, ($\forall$E)
(21) $y \circ e = y$	2, ($\forall$E)
(22) $x = y \circ e$	19, 20, (Subst.)
(23) $x = y$	21, 22, (Subst.)
(24) $x \circ z = y \circ z \to x = y$	4-23, ($\to$I)
(25) $\forall x \forall y \forall z\,(x \circ z = y \circ z \to x = y)$	24, 3 $\times$ ($\forall$I)

12-6.10
(a) $\exists x$ (x är kvinna $\wedge$ x deltar i MG-loppet) $\Leftrightarrow$ $\underline{\exists x\,(K(x) \wedge D(x))}$
(b) $\forall x$ (x deltar i MG-loppet $\to$ x är kvinna) $\Leftrightarrow$ $\underline{\forall x\,(D(x) \to K(x))}$
Alternativ:
$\underline{\forall x\,(\neg K(x) \to \neg D(x))}$

(c) $\forall x$ (D(x) $\to$ x mottar ett pris) $\Leftrightarrow$ $\underline{\forall x\,(D(x) \to \exists y\,(P(y) \wedge M(x,y))}$

(d) $\underline{\exists x \exists y\,(D(x) \wedge D(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\,(D(z) \to z = x \vee z = y))}$

(e) $\forall x$ (D(x) $\wedge$ x är snabbare än alla andra deltagare $\to$ x mottar ett pris som är finare än alla andra pris)
$\Leftrightarrow$ $\forall x\,(D(x) \wedge \forall y\,(D(y) \wedge y \neq x \to S(x,y)) \to \exists y\,(P(y) \wedge$ y är finare än alla andra pris $\wedge$ M (x,y)))

$\Leftrightarrow \quad \underline{\forall x\,(D(x) \wedge \forall y\,(D(y) \wedge y \neq x \rightarrow S(x,y)) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge \forall z\,(P(z) \wedge z \neq y \rightarrow F(y,z)) \wedge M(x,y)))}$

12-6.11

A1: $S(p)$

A2: $G(p,m) \wedge G(m,p)$

Vi deducerar

$A1, A2 \vdash \exists x\,(S(x) \wedge G(x,m))$

BEVIS:

(1) $S(p)$	P
(2) $G(p,m) \wedge G(m,p)$	P
(3) $G(p,m)$	2, ($\wedge$E)
(4) $S(p) \wedge G(p,m)$	1, 3, ($\wedge$I)
(5) $\exists x\,(S(x) \wedge G(x,m))$	4, ($\exists$I)

12-6.12

Vi härleder en motsägelse från axiomet.

$\exists x\ x \neq x \vdash \perp$

BEVIS:

(1) $\exists x\ x \neq x$	P
(2) $x \neq x$	1, $\exists$E-P
(3) $x = x$	(Refl)
(4) $\perp$	2, 3, ($\perp$I)
(5) $\perp$	1, 2-4, ($\exists$E)

12-6.13

Vi härleder en motsägelse från axiomen $C_2, E_1, E_2, \ldots$. Man ser lätt att C_2 och E_3 är tillräckliga för att härleda $\perp$. C_2 uttrycker att det finns exakt två element (i individområdet). E_3 uttrycker att det finns minst tre element. De är oförenliga.

$C2, E3 \vdash \perp$

BEVIS:

(1) $\exists x \exists y\,(x \neq y \wedge \forall z\,(z = x \vee z = y))$	P
(2) $\exists x \exists y \exists z\,(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$	P
(3) $\exists y\,(x \neq y \wedge \forall z\,(z = x \vee z = y))$	1, $\exists$E-P^x
(4) $x \neq y \wedge \forall z\,(z = x \vee z = y)$	3, $\exists$E-P^y
(5) $x \neq y$	4, ($\wedge$E)
(6) $\forall z\,(z = x \vee z = y)$	4, ($\wedge$E)
(7) $\exists u \exists y \exists z\,(u \neq y \wedge u \neq z \wedge y \neq z)$	2, (PD11)
(8) $\exists y \exists z\,(u \neq y \wedge u \neq z \wedge y \neq z)$	7, $\exists$E-P^u
(9) $\exists v \exists z\,(u \neq v \wedge u \neq z \wedge v \neq z)$	8, (PD11)
(10) $\exists z\,(u \neq v \wedge u \neq z \wedge v \neq z)$	9, $\exists$E-P^v

(11) $u \neq v \wedge u \neq z \wedge v \neq z$	10, $\exists$E-P^z
(12) $u \neq v$	11, ($\wedge$E)
(13) $u \neq z \wedge v \neq z$	11, ($\wedge$E)
(14) $u \neq z$	13, ($\wedge$E)
(15) $v \neq z$	13, ($\wedge$E)
(16) $z = x \vee z = y$	6, ($\forall$E)
(17) $z = x$	HP
(18) $u \neq x$	14, 17, (Subst.)
(19) $v \neq x$	15, 17, (Subst.)
(20) $u = x \vee u = y$	6, ($\forall$E)
(21) $v = x \vee v = y$	6, ($\forall$E)
(22) $u = y$	18, 20, Disj. Syll.
(23) $v = y$	19, 21, Disj. Syll.
(24) $u = v$	22, 23, (Subst.)
(25) $\perp$	14, 24, ($\perp$I)
(26) $z \neq x$	17-25, ($\neg$I)
(27) $z = y$	16, 26, Disj. Syll.
(28) $u \neq y$	14, 27, (Subst.)
(29) $v \neq y$	15, 27, (Subst.)
(30) $u = v \vee u = y$	6, ($\forall$E)
(31) $v = x \vee v = y$	6, ($\forall$E)
(32) $u = x$	28, 30, Disj. Syll.
(33) $v = x$	29, 31, Disj. Syll.
(34) $u = v$	32, 33, (Subst.)
(35) $\perp$	12, 34, ($\perp$I)
(36) $\perp$	10, 11-35, ($\exists$E)
(37) $\perp$	9, 10-36, ($\exists$E)
(38) $\perp$	7, 8-37, ($\exists$E)
(39) $\perp$	3, 4-38 ($\exists$E)
(40) $\perp$	1, 3-39, ($\exists$E)

12-6.14

Enligt Korollarium 12-4.19 räcker det att hitta en modell av var och en av T_0, T_1, T_2.

(a) T är konsistent.

BEVIS:

T_0 är helt enkelt predikatlogiken för $L(T_0) = \emptyset$. Därför är varje modell för $L(T_0)$ en modell av T_0. Låt

$m_0 = M_0$

där $M_0 \neq \emptyset$ är en godtycklig icke-tom mängd. Då

$m_0 \models T_0$

(b) T_1 är konsistent.

BEVIS:

Innebörden av E_n är att det finns minst n element (i individområdet). För att alla E_n ska vara sanna måste individområdet innehålla oändligt många element. Låt

$m_1 = M_1$

där M_1 är en godtycklig oändlig mängd, t ex $M_1 = \underline{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(c) T_2 är konsistent.

BEVIS:

Låt

$m_2 = (M_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots) = (\{1, 2, 3, \ldots\}, 1, 2, \ldots)$

dvs. a_n tolkas som beteckning på heltalet n. Då

$m_2 \models T_2$

12-6.15

T är ändligt axiomatiserbar $\Rightarrow$ T är axiomatiserbar med ett enda axiom.

BEVIS:

Antag att T är axiomatiserbar med axiomen $A_1, \ldots, A_n$. Då får vi en alternativ axiomatisering med

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$

Som enda axiom. Ty från axiomen $A_1, \ldots, A_n$ kan vi med $(n - 1)$ tillämpningar av ($\wedge$I) härleda $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, och från $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ kan vi genom upprepade tillämpningar av ($\wedge$E) härleda $A_1, A_2, \ldots$ och A_n. M a o ger de två axiommängderna $\{A_1, \ldots, A_n\}$ och $\{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\}$ upphov till samma mängd av teorem, nämligen T.

12-6.16

(a) Varje teorem i T_0 är teorem i T_1.

BEVIS:

Det räcker att visa

(i) $L(T_0) \subseteq L(T_1)$;

(ii) Varje axiom i T_0 är teorem i T_1. Då kan nämligen varje teorem i T_0 bevisas i T_1.

Men $L(T_0) = L(T_1) = \emptyset$ så att (i) är satisfierad. Eftersom $Ax_0 = \emptyset = Ax_1$, är också (ii) uppfylld.

(b) Varje teorem i T_1 är teorem i T_2.

BEVIS:

Det räcker att visa

(i) $L(T_1) \subseteq L(T_2)$;

(ii) varje axiom i T_1 är teorem i T_2.

Villkoret (i) är uppfyllt, eftersom

$L(T_1) = \emptyset \subseteq L(T_2)$.

E_n är axiom i T_1. Betrakta delmängden $\{a_i \neq a_j \mid i \neq j \wedge i, j \leq n\}$ av T_2:s

axiommängd. För att alla dessa axiom ska vara sanna i en modell m för $L(T_2)$ måste konstanterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tolkas som beteckningar på n parvis olika element i M

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$

Alltså innehåller varje modell m av T_2 minst n olika element. Innebörden av E_n är att det finns minst n olika element (i individområdet). Alltså är E_n sann i varje modell m av T_2. Enligt fullständighetsteoremet 12-4.17 gäller då $T_2 \vdash E_n$, dvs. varje axiom i T_1 är teorem i T_2, precis som villkoret (ii) kräver. (*Lägg märke till hur fullständighetsteoremet underlättade beviset av påståendet (b). P g a fullständighetsteoremet behövde vi aldrig utföra den invecklade deduktion som annars skulle behövas för att visa $T_2 \vdash E_n$.*)

12-6.17

T_1 är inte ändligt axiomatiserbar.

BEVIS:

Vi ger ett indirekt bevis. Antag att T_1 är ändligt axiomatiserbar. Vi härleder en motsägelse (i metaspråket). Enligt övning 12-6.15 är T_1 axiomatiserbar med ett enda axiom A. Då

$E_1, E_2, \ldots \vdash A$

Eftersom bara ändligt många axiom kan användas i deduktionen, finns ett n så att

$E_1, E_2, \ldots, E_n \vdash A$

Av innebörden av satserna $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ser vi att

$E_n \vdash E_1, E_n \vdash E_2, \ldots, E_n \vdash E_{n-1}$

Därför

$E_n \vdash A \qquad (1)$

Eftersom A är en axiomatisering av T_1, kan varje E_k härledas från A, t ex

$A \vdash E_{n+1} \qquad (2)$

Från (1) och (2) följer

$E_n \vdash E_{n+1}$

Då enligt Teorem 12-4.17

$E_n \models E_{n+1} \qquad (3)$

Låt $m = M$ vara en modell med exakt n element. Då

$m \models E_n, \qquad m \not\models E_{n+1}$

så att

$E_n \not\models E_{n+1}$

Som motsäger (3).

12-6.18

T_2 är inte ändligt axiomatiserbar.

BEVIS:

Antag att axiomet A axiomatiserar T_2 (se övning 12-6.15). Då

$T_2 \vdash A$

Eftersom bara ändligt många av axiomen $a_i \neq a_j$ kan förekomma i deduktionen, så finns ett n så att

$$\{a_i \neq a_j \mid i \neq j \wedge i, j \leq n\} \vdash A$$

Då

$$\{a_i \neq a_j \mid i \neq j \wedge i, j \leq n\} \models A \qquad (1)$$

Men $\{a_i \neq a_j \mid i \neq j \wedge i, j \leq n\}$ har en modell med exakt n element, t ex.

$$m = (M, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots) = (\{1, 2, \ldots, n\}, 1, 2, \ldots, n, 1, 1, \ldots)$$

medan A bara har oändliga modeller. Därför kan (1) inte gälla.

12-6.19

Låt $L(T_2) = \{a_1, a_2, \ldots\}$ där varje a_i är en konstant. Låt T_2 ha axiommängden $Ax_2 = \{a_i \neq a_j \mid\mid i \neq j\}$. Då är T_2 negationsfullständig.

BEVIS:

Låt

$$m = (M, a_1, a_2, \ldots) = (\underline{Z}_+, 1, 2, \ldots)$$

Då $m \models T_2$ så att m är en modell av T_2 och T_2 är konsistent. Vi visar

(1) $\quad m \models A \Leftrightarrow T_2 \vdash A$

Riktningen

(2) $\quad T_2 \vdash A \Rightarrow m \models A$

Uttrycker att m är en modell av T så (2) är sann. Det återstår att bevisa för varje sats A

(3) $\quad m \models A \Rightarrow T_2 \vdash A$

Vi kan anta att A är på prenex normalform. Låt först A vara kvantifikatorfri. För det fallet visar vi

(4) $\quad m \models A \Rightarrow T_2 \vdash A$

(5) $\quad m \models \neg A \Rightarrow T_2 \vdash \neg A$

Beviset för (4) and (5) förs med induktion över antalet konnektiv i A. Om A är atomär, så har A formen $a_i = a_i$ eller formen $a_i = a_j$ där $i \neq j$.

$m \models a_i = a_i$ och med hjälp av (Refl) får vi också $T_2 \vdash a_i = a_i$ så att (4) är verifierad. Eftersom $m \not\models \neg a_i = a_i$ gäller också (5). Antag nu att A är $a_i = a_j$ med $i \neq j$. Eftersom $m \not\models i = j$ så gäller också $m \not\models a_i = a_j$ och (4) är satisfierad. Förledet i (5) blir $m \models \neg a_i = a_j$ som är sann. Men $\neg a_i = a_j$ är att axiom i T_2 så att $T_2 \vdash \neg a_i = a_j$. Därför är även (5) korrekt, när A är $a_i = a_j$.

Vi ser nu på fallen där A är $\neg B$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \rightarrow C)$ eller $(B \leftrightarrow C)$. Som induktionshypotes har vi

(6) $\quad m \models B \Rightarrow T_2 \vdash B$

(7) $\quad m \models \neg B \Rightarrow T_2 \vdash \neg B$

(8) $\quad m \models C \Rightarrow T_2 \vdash C$

(9) $\quad m \models \neg C \Rightarrow T_2 \vdash \neg C$

Låt $A = \neg B$. Då får vi

(10) $\quad m \models \neg B \Rightarrow T_2 \vdash \neg B$

direkt från (7). Antag $m \models \neg\neg B$.

Då $m \not\models \neg B$ och därför $m \models B$. Av (6) följer $T_2 \vdash B$. Dubbla negationen ger $T_2 \vdash \neg\neg B$. Följaktligen

(11) $\quad m \models \neg\neg B \Rightarrow T_2 \vdash \neg\neg B$

(10) och (11) verifierar (4) och (5), när $A = \neg B$.

Låt nu $A = (B \vee C)$. Antag $m \models B \vee C$.

Då $m \models B$ eller $m \models C$. I första fallet ger (6) att $T_2 \vdash B$. ($\vee$I) ger $T_2 \vdash B \vee C$. På samma sätt får vi $T_2 \vdash B \vee C$ från $m \models C$. Alltså

(12) $\quad m \models B \vee C \Rightarrow T_2 \vdash B \vee C$

Antag $m \models \neg(B \vee C)$. Då $m \not\models B \vee C$ så att $m \not\models B$ och $m \not\models C$. Följaktligen $m \models \neg B$ och $m \models \neg C$. Genom (7) och (9) följer $T_2 \vdash \neg B$ och $T_2 \vdash \neg C$. ($\wedge$I) ger $T_2 \vdash \neg B \wedge \neg C$, och De Morgans lag (SD 12) implicerar $T_2 \vdash \neg(B \vee C)$.

Alltså har vi visat

(13) $\quad m \models \neg(B \vee C) \Rightarrow T_2 \vdash \neg(B \vee C)$

som tillsammans med (12) visar (4) och (5), när $A = (B \vee C)$.

De övriga fallen $A = (B \wedge C)$, $A = (B \rightarrow C)$ och $A = (B \leftrightarrow C)$ är analoga.

Vi har nu bevisat (4), och därmed (3) när A är kvantifikatorfri. Vi bevisar den allmänna formen av (3) med induktion över antalet kvantifikatorer i A.

Låt $A = \exists x\, B(x)$. Av induktionshypotesen följer för n = 1, 2, …;

(14) $\quad m \models B(a_n) \Rightarrow T_2 \vdash B(a_n)$

Antag $m \models \exists x\, B(x)$. Då $m \models B(n)$ för något n. Eftersom $\mathbf{a}_n = n$ i m, så $m \models B(a_n)$. Av (14) följer $T_2 \vdash B(a_n)$ och sedan $T_2 \vdash \exists x\, B(x)$ med ($\exists$I). Alltså har vi visat

$$m \models \exists x\, B(x) \Rightarrow T_2 \vdash \exists x\, B(x)$$

Låt $A = \forall x\, B(x)$. Av induktionshypotesen följer för $n \in \underline{Z}+$:

(15) $\quad m \models B(a_n) \Rightarrow T_2 \vdash B(a_n)$

Antag $m \models \forall x\, B(x)$. Då

$$m \models B(a_n) \qquad \text{för } n = 1, 2, \ldots$$

Av (15) följer för n = 1, 2, …:

(16) $\quad T_2 \vdash B(a_n)$

Välj bland följdrelationerna i (16) ett p så att a_p inte förekommer i B(x). Då

(17) $\quad T_2 \vdash B(a_p)$

Betrakta en fix deduktion av (17).

Låt

$$a_p \neq a_{k_1}, \ldots, a_p \neq a_{k_m}.$$

Vara samtliga axiom från T_2, som förekommer i deduktionen och i vilka a_p förekommer. Låt S vara mängden av samtliga övriga axiom från T_2 som används som oavslutade premisser i deduktionen. Då

(18) $\quad S, a_p \neq a_{k_1}, \ldots, a_p \neq a_{k_m} \vdash B(a_p)$

Ersätt alla förekomster a_p i deduktionen med en ny variabel z som inte förekommer i deduktionen. En inspektion av PD:s deduktionsregler visar att

$$S, z \neq a_{k_1}, \ldots, z \neq a_{k_m} \vdash B(z)$$

Genom att varje förekomst av a_p i deduktionen ersätts med z. Av deduktionsteoremet 10-6.2 följer

$$S \vdash z \neq a_{k_1} \wedge \ldots \wedge z \neq a_{k_m} \rightarrow B(z)$$

Använd ($\forall$I):

$$S \vdash \forall z\,(z \neq a_{k_1} \wedge \ldots \wedge z \neq a_{k_m} \rightarrow B(z))$$

Eftersom $S \subseteq T_2$,

(19) $\quad T_2 \vdash \forall z\,(z \neq a_{k_1} \wedge \ldots \wedge z \neq a_{k_m} \rightarrow B(z))$

Konklusionen i (19) uttrycker att alla individer utom möjligen $a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}$ satisfierar B(z). Men från (16) får vi också

(20) $\quad T_2 \vdash B(a_{k_1}), \ldots\ T_2 \vdash B(a_{k_m})$

dvs. $a_{k_1}, \ldots\ a_{k_m}$ satisfierar också B(z). Då följer i T_2 att alla individer satisfierar B(z), dvs.

(21) $\quad T_2 \vdash \forall z\, B(z)$

Det lämnas som övning att visa hur man i PD kommer från (19) och (20) till (21). Byt bunden variabel i (21) med (PD 10):

$$T_2 \vdash \forall x\, B(x)$$

Därmed har vi visat

$$m \models \forall x\, B(x) \Rightarrow T_2 \vdash \forall x\, B(x)$$

och vi kan konkludera

(1) $\quad m \models A \Leftrightarrow T_2 \vdash A$

för varje sats A i $L(T_2)$. Eftersom för varje sats A gäller att exakt en av A och $\neg A$ är sann i m, följer av (1) att T_2 är negationsfullständig.

ANMÄRKNING: Satsen i Övning 12-6.19 kan ges ett mycket kortare och enklare bevis; men det beviset förutsätter kunskaper i mängdteori utöver vad som finns i *Grundläggande logik*. T ex måste man känna till kardinaltal och till det uppåtgående Löwnheim-Skolem-teoremet.

T_2 är negationsfullständig.

BEVIS:

Övning 12-6.14 (c) visar att T_2 är konsistent. Antag att det finns en sats A så att

$$T_2 \nvdash A, \qquad T_2 \nvdash \neg A \qquad (1)$$

Låt c vara ett överuppräkneligt kardinaltal. Då finns två modeller

$m_1 = (M_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots)$ och $\quad m_2 = (M_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots)$

av kardinalitet c så att

$$m_1 \not\models A, \qquad m_2 \not\models \neg A \qquad (2)$$

Låt $M^*_1 = M_1 - \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\}$, $M^*_2 = M_2 - \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots\}$.

Då är M^*_1 och M^*_2 båda av kardinalitet c. Låt $g: M^*_1 \rightarrow M^*_2$ vara en bijektion.

Definiera en bijektion

$$f: M_1 \rightarrow M_2$$

$$f(\mathbf{a}_n) = \mathbf{b}_n \qquad \text{för } n = 1, 2, \ldots$$
$$f(x) = g(x) \qquad \text{för } x \in M^*_1$$

Då visar f att m_1 och m_2 är isomorfa, dvs m_1 och m_2 har samma form, samma struktur. Sanningsdefinitionerna i Kapitel 8 visar att bara strukturen hos en modell spelar någon roll vid uträkningen av en sats' sanningsvärde i modellen.

Därför

$$m_1 \models A \qquad \Leftrightarrow \qquad m_2 \models A$$

Vilket är oförenligt med (2).

Alltså gäller för varje sats A

$$T_2 \vdash A \qquad \text{eller} \qquad T_2 \vdash \neg A$$

Dvs T_2 är negationsfullständig.

12-6.20

T_1 är en fullständig teori.

BEVIS:

Låt A vara en sats i $L(T_1)$:s språk, och låt $m = M$ vara en modell av T_1. Då är A en sats i $L(T_2)$. Enligt Övning 6.19 gäller $T_2 \vdash A$ eller $T_2 \vdash \neg A$.

Definiera

$$A^* = A \qquad \text{om} \qquad T_2 \vdash A$$
$$A^* = \neg A \qquad \text{om} \qquad T_2 \vdash \neg A$$

Då $T_2 \vdash A^*$. Utvidga m till en modell $m^* = (M, d_1, d_2, \ldots)$ på följande sätt.

Eftersom $E_1, E_2, \ldots$ alla är sanna i m, är M oändlig. Välj en delmängd $\{d_i \mid i \in \underline{Z}_+\} \subseteq M$ där d_i:na är parvis olika. Då är $m^* = (M, d_1, d_2, \ldots)$ en modell av T_2 så att $m^* \models A^*$.

Eftersom $a_1, a_2, \ldots$ inte förekommer i A (och därmed inte i A*), gäller då också $m \models A^*$. Men m var en godtycklig modell av T_1. Alltså har vi $m \models A^*$ för varje modell m av T_1. Av fullständighetsteoremet 12-4.17 följer $T_1 \vdash A^*$. Vi har med andra ord visat

$$T_1 \vdash A \qquad \text{om} \qquad T_2 \vdash A$$
$$T_1 \vdash \neg A \qquad \text{om} \qquad T_2 \vdash \neg A$$

Eftersom T_2 är negationsfullständig, är också T_1 negationsfullständig.

12-6.21

(a) T har en modell.

BEVIS:

Låt

$$A_n = Th(n) \cup \{0 < c, 1 < c, \ldots, n < c\}$$

Då har A_n en modell

$$n_n = (\underline{N}, \mathbf{0}, \mathbf{S}, +, \boldsymbol{.}, \boldsymbol{<}, \mathbf{c}) = (\underline{N}, 0, S, +, ., <, n+1)$$

dvs n_n är standardmodellen n för PA expanderad med tolkningen **c** = n + 1 av 'c'. Det är lätt att verifiera att alla satser i A_n är sanna i n_n. Följaktligen har varje ändlig delmängd av A_{X_T} en modell. Enligt kompakthetsteoremet 12-4.20 har T en modell

$$\mathit{m} = (M, \mathbf{0}, \mathbf{S}, \mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot}, \mathbf{<}, \mathbf{c})$$

Låt **0**, **1**, **2**, … vara representanterna i m för taltecknen 0, 1, 2, … . Eftersom 0 < c, 1 < c, 2 < c, … alla är sanna i m, är **c** större än samtliga **0**, **1**, **2**, … .

(b) Th(n) har en modell med ett element som inte representerar ett naturligt tal.
BEVIS:
Låt

$$\mathit{m}^* = (M, \mathbf{0}, \mathbf{S}, +, \boldsymbol{\cdot}, \mathbf{<})$$

Dvs vi får m^* från m genom att ta bort tolkningen **c** av c.
Eftersom c inte förekommer i Th(n), så

$$\mathit{m}^* \models \mathrm{Th}(\mathit{n})$$

Men elementet **c** är kvar i M och större än **0**, **1**, **2**, … . m^* är alltså en icke-standardmodell av Th(n). Eftersom Th(n) innehåller samtliga aritmetiska sannigar i L(PA), ser vi att inte ens samtliga aritmetiska sanningar är tillräckliga för att entydigt bestämma de naturliga talens struktur.

12-6.22

(a)	x är förälder till y	$\Leftrightarrow$	$F(x,y) \vee M(x,y)$
(b)	x är förälder	$\Leftrightarrow$	$\exists y$ (x är förälder till y)
		$\Leftrightarrow$	$\exists y\,(F(x,y) \vee M(x,y))$
(c)	x är farfar till y	$\Leftrightarrow$	$\exists z\,(F(x,z) \wedge F(z,y))$
(d)	x är farmor till y	$\Leftrightarrow$	$\exists z\,(M(x,z) \wedge F(z,y))$

12-6.23

(a)	x är ett jämnt tal	$\Leftrightarrow$	$\exists y\ \ x = y + y$
(b)	x är ett primtal	$\Leftrightarrow$	$S(0) < x \wedge \forall y\,(\exists z\ y \cdot z = x \rightarrow y = S(0) \vee y = x)$

12-6.24
(a) Definition (1) leder till att PA* är inkonsistent.
BEVIS:
Låt i

$$\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \leftrightarrow x < y \wedge y < z) \qquad (1)$$

x = 0, y = 1, z = 2:

$$PA^* \vdash R(0,1) \leftrightarrow 0 < 1 \wedge 1 < 2 \qquad (2)$$

Eftersom

$$PA \vdash 0 < 1 \wedge 1 < 2 \qquad (3)$$

får vi av (2) och (3)

$$PA^* \vdash R(0,1) \qquad (4)$$

Låt i (1) x = 0, y = 1, z = 0:

$$PA^* \vdash R(0,1) \leftrightarrow 0 < 1 \wedge 1 < 0 \qquad (5)$$

Eftersom

$$PA \vdash \neg\,(0 < 1 \wedge 1 < 0) \qquad (6)$$

får vi från (5) och (6)

$$PA^* \vdash \neg R(0,1) \qquad (7)$$

Raderna (4) och (7) visar att PA* är inkonsistent.

(b) Definiens '$x < y \wedge y < z$' innehåller en fri variabel 'z' som inte förekommer i definiendum 'R(x,y)'. Vi har brutit mot villkoret (III) i Regel 12-5.4 för definition av predikat.

12-6.25

$$\forall x \forall y \forall z\,(x * y = z \leftrightarrow x < z \wedge y < z) \qquad (1)$$

(a) Definition (1) leder till en inkonsistent teori PA*.
BEVIS:
Låt i (1) x = 0, y = 0, z = 1:

$$PA^* \vdash 0 * 0 = 1 \leftrightarrow 0 < 1 \wedge 0 < 1 \qquad (2)$$

Eftersom

$$PA \vdash 0 < 1 \wedge 0 < 1 \qquad (3)$$

får vi av (2) och (3)

$$PA^* \vdash 0 * 0 = 1 \qquad (4)$$

Låt i (1) x = y = 0, z = 2:

$$PA^* \vdash 0 * 0 = 2 \leftrightarrow 0 < 2 \wedge 0 < 2 \qquad (5)$$

Då

$$PA \vdash 0 < 2 \wedge 0 < 2 \qquad (6)$$

får vi från (5) och (6)

$$PA \vdash 0 * 0 = 2 \qquad (7)$$

(4) och (7) implicerar

$$PA^* \vdash 1 = 2$$

Som motsäger

$$PA \vdash 1 \neq 2$$

(b) Villkoret i (V) i Regel 12-5.11 för definition av funktionssymboler kräver att för varje val av x och y i exemplet ska det finnas exakt ett (värde på) z som satisfierar definiens '$x < z \wedge y < z$'.
Beviset i (a) visar att för x = y = 0 finns det flera val av z som satisfierar definiens '$x < z \wedge y < z$'. I "definitionen" (1) har vi alltså brutit mot villkoret (V).

12-6.26
(a) $\forall y\,(c = y \leftrightarrow y = S(0) + S(0))$

LÖSNING:
Definitionen är korrekt. Den definierar c = 2.

(b) $\forall y\,(c = y \leftrightarrow y = y)$
LÖSNING:
Definitionen är felaktig. Definiens 'y = y' satisfieras av varje tal i N. Vi har brutit mot en tydighetsvillkoret (V:2) i Regel 12-5.8 för definition av konstanter.

(c) $\forall y\,(c = y \leftrightarrow y \neq y)$
LÖSNING:
Definitionen är felaktig. Definiens '$y \neq y$' satisfieras inte av något tal. Vi har brutit mot existensvillkoret (V:1) i Regel 12-5.8.

12-6.27
(a) $\forall x \forall y \forall z\,(x * y = z \leftrightarrow x + y = x + z)$
LÖSNING:
Definitionen är korrekt. För varje x och y finns exakt ett z, nämligen z = y, som satisfierar 'x + y = x + z'.

(b) $\forall x \forall y \forall z\,(x * y = z \leftrightarrow x \cdot z = y)$
LÖSNING:
Definitionen är felaktig.
För några val av x och y finns inget z så att $x \cdot z = y$. T ex om x = 2 och y = 1, finns inget z i N så att $2 \cdot z = 1$. Här har vi förbrutit oss med existensvillkoret 12-5.11 (V:1).
För andra val av x och y finns flera z så att $x \cdot z = y$. T ex om x = y = 0, får vi $0 \cdot z = 0$ för alla z = 0, 1, 2, … . Här är inte entydighetsvillkoret 12-5.11 (V:2) uppfyllt.

12-6.28
(1) $PA \vdash \forall x \exists y\ y = S(S(x))$
BEVIS:

$$S(S(x)) = S(S(x)) \qquad \text{(Refl.)}$$

($\exists$I) ger

$$\exists y\ y = S(S(x))$$

Använd ($\forall$I):

$$\forall x \exists y\ y = S(S(x))$$

(2) $PA \vdash \forall x \forall y \forall z\,(y = S(S(x)) \wedge z = S(S(x)) \rightarrow y = z)$
BEVIS:
Antag som premiss
(3) $y = S(S(x)) \wedge z = S(S(x))$
Använd ($\wedge$E):
(4) $y = S(S(x))$
(5) $z = S(S(x))$

Använd (Subst) på (4) och (5):
(6) y = z
Använd ($\rightarrow$I) på (3) – (6) och sedan $3 \times (\forall I)$ och vi har (2).

12-6.29
Bevisa påståendena (2), (3), (4) och (6) i Exempel 12-5.15.
LÖSNING:
(2) $T \vdash \forall x \forall y\,(x \circ y = e \rightarrow y \circ x = e)$
BEVIS:
Antag

$$x \circ y = e \qquad (i)$$

Då

$$y \circ (x \circ y) = y \circ e \qquad (\text{*genom (i)*})$$
$$= y \qquad (\text{*B2*})$$

Tillämpa associativitet (B1) på VL:

$$(y \circ x) \circ y = y \qquad (ii)$$

Enligt (B3) finns z så att

$$y \circ z = e \qquad (iii)$$

Multiplicera (ii) med z:

$$((y \circ x) \circ y) \circ z = y \circ z$$

Använd (B1) på VL:

$$(y \circ x) \circ (y \circ z) = y \circ z$$

Substituera $y \circ z = e$ enligt (iii):

$$(y \circ x) \circ e = e$$

(B2) applicerat på VL ger

$$y \circ x = e$$

villket skulle bevisas.

(3) $T \vdash \forall x\ x \circ e = e \circ x$
BEVIS:
Låt x vara given. Enligt (B3) finns y så att

$$x \circ y = e \qquad (i)$$

Av (2) följer då

$$y \circ x = e \qquad (ii)$$

Då

$$x \circ e = x \circ (y \circ x) \qquad (\text{*enligt (ii)*})$$
$$= (x \circ y) \circ x \qquad (\text{*enligt (B1)*})$$
$$= e \circ x \qquad (\text{*enligt (i)*})$$

(4) $T \vdash \forall x \forall y \forall z\,(x \circ y = e \wedge x \circ z = e \rightarrow y = z)$
BEVIS:
Antag

$$x \circ y = e \qquad (i)$$
$$x \circ z = e \qquad (ii)$$

Då

$$y = y \circ e \qquad (\text{*enligt (B2)*})$$
$$= y \circ (x \circ z) \qquad (\text{*enligt (ii)*})$$
$$= (y \circ x) \circ z \qquad (\text{*enligt (B1)*})$$
$$= e \circ z \qquad (\text{*enligt (i) och (2)*})$$

$= z \circ e$ (*enligt (3)*)
$= z$ (*enligt (B2)*)

(6) $T^* \vdash \forall x\ x \circ x^{-1} = e$
BEVIS:
Låt x vara given. Enligt (B3) finns y så att
$x \circ y = e$ (i)
Det definierande axiomet för x^{-1} är
(5) $\forall x \forall y\ (x^{-1} = y \leftrightarrow x \circ y = e)$
Av (5) och (i) följer
$x^{-1} = y$
som substituerad i (i) ger
$x \circ x^{-1} = e$

12-6.30
Bevisa påståendena (5) och (7) i Exempel 12-5.18.
LÖSNING:
(5) $\vdash P(f(x),y) \leftrightarrow \exists z\ (P(z,y) \wedge f(x) = z)$
BEVIS:

(1) $P(f(x), y)$	HP
(2) $f(x) = f(x)$	(Refl.)
(3) $P(f(x),y) \wedge f(x) = f(x)$	1, 2, ($\wedge$I)
(4) $\exists z\ (P(z,y) \wedge f(x) = z)$	3, ($\exists$I)
(5) $P(f(x),y) \rightarrow \exists z\ (P(z,y) \wedge f(x) = z)$	1-4, ($\rightarrow$I)
(6) $\exists z\ (P(z,y) \wedge f(x) = z)$	HP
(7) $P(z,y) \wedge f(x) = z$	6, $\exists$E-P^z
(8) $P(z,y)$	7, ($\wedge$E)
(9) $f(x) = z$	7, ($\wedge$E)
(10) $P(f(x),y)$	8, 9, (Subst.)
(11) $P(f(x),y)$	6, 7-10, ($\exists$E)
(12) $\exists z\ (P(z,y) \wedge f(x) = z) \rightarrow P(f(x),y)$	6-11, ($\rightarrow$I)
(13) $P(f(x),y) \leftrightarrow \exists z\ (P(z,y) \wedge f(x) = z)$	5, 12, ($\leftrightarrow$I)

(7) $T^* \vdash P(f(x),y) \leftrightarrow \exists z\ (P(z,y) \wedge A(x,z))$
BEVIS:
Använd (5) och
(6) $T^* \vdash f(x) = z \leftrightarrow A(x,z)$
och substitutionsprincipen för ekvivalenta fomler.

12-6.31
Med referens till Exempel 12-5.15, låt
A*: $\forall x\ x \circ x^{-1} = e$

(a) Omforma A* till en sats A i L(T) sådan att
$T^* \vdash A^* \leftrightarrow A$
LÖSNING:

T har axiomen
B1: $\forall x \forall y \forall z\ \ x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
B2: $\forall x\ \ x \circ e = x$
B3: $\forall x \exists y\ \ x \circ y = e$
T* har det definierande axiomet
B4: $\forall x \forall y\ (x^{-1} = y \leftrightarrow x \circ y = e)$
Med predikatlogik får vi som i Övning 6.30
$\vdash x \circ x^{-1} = e \leftrightarrow \exists z\ (x \circ z = e \wedge x^{-1} = z)$ (1)
Av (B4) genom 2 × ($\forall$E):
$T^* \vdash x^{-1} = z \leftrightarrow x \circ z = e$ (2)
Substituera (2) i (1):
$T^* \vdash x \circ x^{-1} = e \leftrightarrow \exists z\ (x \circ z = e)$ (3)
Låt
A: $\forall x \exists z\ \ x \circ z = e$
Då gäller enligt (3) (Jfr (PD25)):
$T^* \vdash \forall x\ \ x \circ x^{-1} = e \leftrightarrow \forall x \exists z\ \ x \circ z = e$
dvs
$T^* \vdash A^* \leftrightarrow A$

(b) $T \vdash \forall x \exists z\ \ x \circ z = e$
BEVIS:
Detta följer omedelbart från (B3) genom att substituera z för den bundna variabeln y.

Kapitel 13: Lösningar
Avsnitt 13-2

13.2.7
(a) $\forall x \forall y \forall z\ (P(x,y) \wedge y = z \rightarrow P(x,z))$
(b) $\forall x \forall y\ (R(y) \rightarrow P(x,y) \vee Q(a))$
(c) $0 = 1 \wedge 1 = 2 \wedge 2 = 3 \rightarrow 0 = 2 \vee 0 = 3$
(d) $\forall x \forall y\ \neg(P(x,y) \wedge P(y,x))$
(e) $\forall y\ 0 \neq y$
(f) $\forall x\ (P(f(x)) \vee Q(x))$
(g) $\forall x \forall y\ R(x,f(x),y)$

(a), (d), (e), (g) är Hornklausuler.

13-2.8
(a) $x < z \leftarrow x < y,\ y < z$

(b) $y = x \leftarrow x = y$

(c) $J(x), U(x) \leftarrow T(x)$

(d) $x = 1, x = 2, x = 3 \leftarrow$

(e) $0 \leq 1 \leftarrow$

(f) $0 \leq x \leftarrow$

(g) $\leftarrow R(a,b)$

(h) $\leftarrow R(x,y)$

(i) $\leftarrow P(x), Q(x,a)$

(j) $\forall x \forall y\ (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x)) \Leftrightarrow \forall x \forall y\ \neg(P(x,y) \wedge P(y,x))$ (*De Morgan*)
$\therefore \leftarrow P(x,y), P(y,x)$

(k) $P(x,f(x)) \leftarrow$
$P(f(x),x) \leftarrow$

(l) $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x))$
$\Leftrightarrow \forall x\ ((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (P(x) \rightarrow R(x))$ (SE31)
$\Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))$ (PK17)
$\therefore$ $Q(x) \leftarrow P(x)$
$R(x) \leftarrow P(x)$

(m) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$
$\Leftrightarrow \forall x\ ((P(x) \rightarrow R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x))$ (SE32)

$\Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)) \wedge \forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$ (PK17)
$\therefore$ $R(x) \leftarrow P(x)$
$R(x) \leftarrow Q(x)$

(n) $\forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x)))$
$\Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$ (SE30)
$\therefore$ $R(x) \leftarrow P(x), Q(x)$

(o) $\forall x\ (P(x) \wedge \exists y\ Q(y,x) \rightarrow R(x))$
$\Leftrightarrow \forall x\ (\exists y\ (P(x) \wedge Q(y,x) \rightarrow R(x))$ (PK28)
$\Leftrightarrow \forall x \forall y\ (P(x) \wedge Q(y,x) \rightarrow R(x))$ (PK31)
$\therefore$ $R(x) \leftarrow P(x), Q(y,x)$

Avsnit 13-3

13-3.1

(a) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)$
LÖSNING:
$\therefore$ $P(a) \wedge Q(a)$

(b) $\exists x\,P(x) \wedge \exists y\,Q(y)$
LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\exists x\,(P(x) \wedge \exists y\,Q(y))$ (PK28')
$\Leftrightarrow$ $\exists x \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$ (PK28)

(ii) *Skolemform*:
$\exists y\,(P(a) \wedge Q(y))$
$P(a) \wedge Q(b)$
$\therefore$ $P(a) \wedge Q(b)$

(c) $\exists x\,(P(x) \wedge \neg\exists y\,Q(x,y))$
LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,\neg Q(x,y))$ (PK16)
$\Leftrightarrow$ $\exists x \forall y\,(P(x) \wedge \neg Q(x,y))$ (PK25)

(ii) *Skolemform*:
$\forall y\,(P(a) \wedge \neg Q(a,y))$
$\therefore \forall y\,(P(a) \wedge \neg Q(a,y))$

(d) $\exists x \exists y\,(P(x,y) \wedge \forall z\,(P(x,z) \rightarrow P(y,z)))$
LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge (P(x,z) \rightarrow P(y,z)))$ (PK24)

(ii) *Skolemform*:
$\exists y \forall z\,(P(a,y) \wedge P(a,z) \rightarrow P(y,z)))$
$\forall z\,(P(a,b) \wedge (P(a,z) \rightarrow P(b,z)))$
$\therefore \forall z\,(P(a,b) \wedge P(a,z) \rightarrow P(b,z)))$

(e) $\forall x\,(J(x) \rightarrow \exists y\;\; x = 2y)$
LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\forall x \exists y\,(J(x) \rightarrow\;\; x = 2y)$

(ii) *Skolemform*:
$\forall x\,(J(x) \rightarrow x = 2\,f(x))$
$\therefore \forall x\,(J(x) \rightarrow x = 2\,f(x))$

(f) $\forall x\,(\exists y\,P(x,y) \rightarrow \exists y\,Q(x,y))$

LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\forall x\,(\exists y\,P(x,y) \rightarrow \exists z\,Q(x,z))$ (PK5)
$\Leftrightarrow$ $\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow \exists z\,Q(x,z))$ (PK31)
$\Leftrightarrow$ $\forall x \forall y \exists z\,(P(x,y) \rightarrow Q(x,z))$ (PK30)

(ii) *Skolemform*:
$\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow Q(x,f(x,y)))$
$\therefore$ $\forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow Q(x,f(x,y)))$

(g) $\forall x\,(\exists y\,P(x,y) \vee \exists y\,Q(x,y))$
LÖSNING:
(i) PNF:
$\Leftrightarrow$ $\forall x\,(\exists y\,P(x,y) \vee \exists z\,Q(x,z))$ (PK5)
$\Leftrightarrow$ $\forall x \exists y\,(P(x,y) \vee \exists z\,Q(x,z))$ (PK29')
$\Leftrightarrow$ $\forall x \exists y \exists z\,(P(x,y) \vee Q(x,z))$ (PK29)

(ii) *Skolemform*:
$\forall x \exists z\,(P(x,f(x)) \vee Q(x,z))$
$\forall x\,(P(x,f(x)) \vee Q(x,g(x)))$
$\therefore \forall x\,(P(x,f(x)) \vee Q(x,g(x)))$

(h) $\forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
LÖSNING:
Satsen är på Skolemform.
$\therefore \forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$

13-3.2

Exempel:
(1) $\exists x\;\; x = x \Leftrightarrow a\; = a$
(*Båda satserna är logiskt sanna.*)
(2) $\exists x\;\; x \neq x \Leftrightarrow b \neq b$
(3) (*Båda satserna är logiskt falska.*)

13-3.3

(a) $\forall x \forall y\,(P(x) \leftrightarrow \neg Q(y))$
LÖSNING:
Satsen är på Skolemform.
KNF:

P(x)	Q(y)	P(x) ↔ ¬Q(y)			
S	S		F	F	KNF
S	F		S	S	
F	S		S	F	
F	F		F	S	KNF

$(P(x) \leftrightarrow \neg Q(y)) \Leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg Q(y)) \wedge (P(x) \vee Q(y))$
$\Leftrightarrow \neg\,(P(x) \wedge Q(y)) \wedge (P(x) \vee Q(y))$ (De Morgan)

Klausulform:
$\leftarrow P(x), Q(y)$
$P(x), Q(y) \leftarrow$

(b) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg\forall y\,R(x,y))$
LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\forall x\,(P(x) \vee Q(x) \rightarrow \exists y\,\neg R(x,y))$ (PK15)
$\Leftrightarrow$ $\forall x \exists y\,(P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg R(x,y))$ (PK30)

(ii) *Skolemform*:
$\forall x\,(P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg R(x,f(x)))$

(iii) *KNF*:

P(x)	Q(x)	R(x,f(x)	P(x) ∨ Q(x) → ¬R(x,f(x))		
S	S	S	S	F	F
S	S	F	S	S	S
S	F	S	S	F	F
S	F	F	S	S	S
F	S	S	S	F	F
F	S	F	S	S	S
F	F	S	F	S	F
F	F	F	F	S	S

$P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg R(x,f(x))) \Leftrightarrow$
$(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x,f(x))) \wedge$
$(\neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg R(x,f(x)))) \wedge$
$(P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x,f(x)))$

(iv) *Klausulform*:
$\leftarrow P(x), Q(x), R(x,f(x))$
$Q(x) \leftarrow P(x), R(x,f(x))$
$P(x) \leftarrow Q(x), R(x,f(x))$

13-3.4

(K14) $A \wedge \neg B \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B \vee C$
BEVIS:
$A \wedge \neg B \rightarrow C \;\Leftrightarrow\; A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$ (SE30)
$\Leftrightarrow\; A \rightarrow B \vee C$ (SE13)

(K15) $A \rightarrow \neg B \vee C \;\Leftrightarrow\; A \wedge B \rightarrow C$
BEVIS:
$A \rightarrow \neg B \vee C \;\Leftrightarrow\; A \wedge \neg\neg B \rightarrow C$ (K14)
$\Leftrightarrow\; A \wedge B \rightarrow C$ (SE1)

(K17) $(A \rightarrow B) \rightarrow C \Leftrightarrow\; (A \vee C) \wedge (B \rightarrow C)$
BEVIS:

$(A \rightarrow B) \rightarrow C \Leftrightarrow\; \neg(A \rightarrow B) \vee C$ (SE18)
$\Leftrightarrow\; (A \wedge \neg B) \vee C$ (SE19)
$\Leftrightarrow\; (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ (Distr. lag)
$\Leftrightarrow\; (A \vee C) \wedge (B \rightarrow C)$ (SE18)

(K18) $(A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow D \;\Leftrightarrow\; (A \rightarrow B \vee D) \wedge (A \wedge C \rightarrow D)$
BEVIS:
$(A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow D \;\Leftrightarrow\; A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow D)$ (SE30)
$\Leftrightarrow\; A \rightarrow (B \vee D) \wedge (C \rightarrow D)$ (K17)
$\Leftrightarrow\; (A \rightarrow B \vee D) \wedge (A \rightarrow (C \rightarrow D))$ (SE31)
$\Leftrightarrow\; (A \rightarrow B \vee D) \wedge (A \wedge C \rightarrow D)$ (SE30)

(K19) $A \wedge (B \vee C) \rightarrow D \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B \rightarrow D) \wedge (A \wedge C \rightarrow D)$
BEVIS:
$A \wedge (B \vee C) \rightarrow D \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B \rightarrow C) \rightarrow D$ (SE13)
$\Leftrightarrow\; (A \rightarrow \neg B \vee D) \wedge (A \wedge C) \rightarrow D)$ (K18)
$\Leftrightarrow\; (A \rightarrow (B \rightarrow D)) \wedge (A \wedge C \rightarrow D)$ (SE18)
$\Leftrightarrow\; (A \wedge B \rightarrow D) \wedge (A \wedge C \rightarrow D)$ (SE30)

13-3.5

(a) $P \rightarrow Q$
LÖSNING:
$Q \leftarrow P$

(b) $P \leftrightarrow Q$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ (K2)

$Q \leftarrow P$
$P \leftarrow Q$

(c) $\neg P \vee Q$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow P \rightarrow Q$ (K1)

$Q \leftarrow P$

(d) $\neg(P \wedge Q)$
LÖSNING:
Vi känner igen Form 2 i § 2.25.
$\leftarrow P, Q$

(e) $\neg P \wedge \neg\neg Q$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$ (K3)

$\leftarrow P$
$Q \leftarrow$

(f) $\neg P \vee \neg Q$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$ (De Morgan)

$\leftarrow P, Q$

(g) $\neg(P \vee Q)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ (De Morgan)

$\leftarrow P$
$\leftarrow Q$

(h) $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(Q \rightarrow P)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge Q \wedge \neg P$ (K6)

$Q \leftarrow P$
$Q \leftarrow$
$\leftarrow P$

(i) $P \leftrightarrow \neg Q$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)$ (K2)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)$ (K6)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \wedge (Q \vee P)$ (K10)

$\leftarrow P, Q$
$Q, P \leftarrow$

(j) $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)$ (K9)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$ (K10)

$\leftarrow P, Q$
$P, Q \leftarrow$

(k) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
LÖSNIG:
$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$ (K7)

$P \leftarrow$
$Q, R \leftarrow$

(l) $P \vee (Q \wedge R)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (K8)

$P, Q \leftarrow$

$P, R \leftarrow$

(m) $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee R) \wedge ((P \wedge Q) \vee S)$ (Distr. lag)
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee S) \wedge (Q \vee S)$ (Distr. lag)

$P, R \leftarrow$
$Q, R \leftarrow$
$P, S \leftarrow$
$Q, S \leftarrow$

(n) $P \rightarrow Q \wedge R$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ (K12)

$Q \leftarrow P$
$R \leftarrow P$

(o) $P \vee Q \rightarrow R$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$

$R \leftarrow P$
$R \leftarrow Q$

(p) $P \vee Q \rightarrow \neg R \wedge S$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow \neg R \wedge S) \wedge (Q \rightarrow \neg R \wedge S)$ (K13)
$\Leftrightarrow (P \rightarrow \neg R) \wedge (P \rightarrow S) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (Q \rightarrow S)$ (K12)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge R) \wedge (P \rightarrow S) \wedge \neg(Q \wedge R) \wedge (Q \rightarrow S)$ (K9)

$\leftarrow P, R$
$S \leftarrow P$
$\leftarrow Q, R$
$S \leftarrow Q$

(q) $P \wedge \neg Q \rightarrow R$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow P \rightarrow Q \vee R$ (K14)

$Q, R \leftarrow P$

(r) $P \vee \neg Q \vee R$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \neg Q \vee P \vee R$ (SE3)
$\Leftrightarrow Q \rightarrow P \vee R$ (K1)

$P, R \leftarrow Q$

(s) $P \rightarrow (\neg Q \vee R)$

LÖSNING:
$\Leftrightarrow P \wedge Q \rightarrow R$ (K15)

$R \leftarrow P, Q$

(t) $P \rightarrow (\neg Q \vee \neg R)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow P \rightarrow \neg (Q \wedge R)$ (De Morgan)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q \wedge R)$ (K9)

$\leftarrow P, Q, R$

(u) $P \rightarrow (Q \vee (R \wedge S))$
LÖSNIG:
$\Leftrightarrow P \rightarrow (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$ (Distr. lag)
$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q \vee R) \wedge (P \rightarrow Q \vee S)$ (K12)

$Q, R \leftarrow P$
$Q, S \leftarrow P$

(v) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow P \wedge Q \rightarrow R$ (K16)

$R \leftarrow P, Q$

(w) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \rightarrow R)$ (K17)

$P, R \leftarrow$
$R \leftarrow Q$

(x) $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q \vee S) \wedge (P \wedge R \rightarrow S)$ (K18)

$Q, S \leftarrow P$
$S \leftarrow P, R$

(y) $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow S$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow (P \wedge Q \rightarrow S) \wedge (P \wedge R \rightarrow S)$ (K19)

$S \leftarrow P, Q$
$S \leftarrow P, R$

(z) $P \wedge (Q \rightarrow \neg R) \rightarrow R \wedge \neg S$
LÖSNING:
$\Leftrightarrow P \wedge \neg(Q \wedge R) \rightarrow R \wedge \neg S$ (K9)
$\Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R) \vee (R \wedge \neg S)$ (K14)

$\Leftrightarrow P \rightarrow (R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg S)$ (SE2)
$\Leftrightarrow P \rightarrow R \wedge (Q \vee \neg S)$ (Distr. lag)
$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q \vee \neg S)$ (K12)
$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow \neg S \vee Q)$ (SE3)
$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow (S \rightarrow Q))$ (K1)
$\Leftrightarrow (P \rightarrow R) \wedge (P \wedge S \rightarrow Q)$ (K16)

$R \leftarrow P$
$Q \leftarrow P, S$

13-3.6

(a) $\forall x\ \forall y\ (P(x) \leftrightarrow \neg Q(y))$
LÖSNING:
$(P(x) \leftrightarrow \neg Q(y))$ $\Leftrightarrow (P(x) \rightarrow \neg Q(y)) \wedge (\neg Q(y) \rightarrow P(x))$ (K2)
$\Leftrightarrow \neg(P(x) \wedge Q(y)) \wedge (\neg Q(y) \rightarrow P(x))$ (K9)
$\Leftrightarrow \neg\, (P(x) \wedge Q(y)) \wedge (Q(y) \vee P(x))$ (K10)
$\leftarrow P(x), Q(y)$
$Q(y), P(x) \leftarrow$
(*som, bortsett från ordningen mellan Q(y) och P(x), är identisk med lösningen i 3.3 (a).*)

(b) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg\forall y\ R(x,y))$
LÖSNING:
(i) *PNF*:
$\Leftrightarrow$ $\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow \exists y\ \neg R(x,y))$ (PK15)
$\Leftrightarrow$ $\forall x \exists y\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg R(x,y))$ (PK30)

(ii) *Skolemform*:
$\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg R(x,f(x)))$

(iii) *Klausulform*:
$(P(x) \vee Q(x) \rightarrow \neg R(x,f(x)))$
$\Leftrightarrow$ $(P(x) \rightarrow \neg R(x,f(x))) \wedge (Q(x) \rightarrow \neg R(x,f(x)))$ (K13)
$\Leftrightarrow$ $\neg(P(x) \wedge R(x,f(x)) \wedge \neg(Q(x) \wedge R(x,f(x)))$ (K9)

$\leftarrow P(x), R(x,f(x))$
$\leftarrow Q(x), R(x,f(x))$
(*som är enklare än lösningen i 3.3 (b). De två lösningarna kan visas vara logiskt ekvivalenta.*)

13-3.7

(a) Alla pojkar i byn spelar ishockey eller bandy.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\forall x\ (P(x) \rightarrow I(x) \vee B(x))$

(ii) *Klausulform*:

$I(x), B(x) \leftarrow P(x)$

(b) Alla kvinnor jag känner är vackra och begåvade.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\forall x\,(K(x) \to V(x) \wedge B(x))$

(ii) *Klausulform*:
$(K(x) \to V(x)) \wedge (K(x) \to B(x))$ (K12)

$V(x) \leftarrow K(x)$
$B(x) \leftarrow K(x)$

(c) Den som har pengar eller kontakter klarar sig alltid.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\forall x\,(P(x) \vee K(x) \to L(x))$

(ii) *Klausulform*:
$(P(x) \vee K(x) \to L(x))$
$\Leftrightarrow \quad (P(x) \to L(x)) \wedge (K(x) \to L(x))$ (K13)

$L(x) \leftarrow P(x)$
$L(x) \leftarrow K(x)$

(d) Endast den, som har pengar eller kontakter, klarar sig.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\forall x\,(L(x) \to P(x) \vee K(x))$

(ii) *Klausulform*:
$P(x), K(x) \leftarrow L(x)$

(e) Varje man äger en åsna.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\Leftrightarrow \quad \forall x\,(M(x) \to$ x äger en åsna$)$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\,(M(x) \to \exists y\,(\text{Å}(y) \wedge \text{Ä}(x,y)))$

(ii) *PNF och Skolemform*:
$\Leftrightarrow \quad \forall x \exists y\,(M(x) \to \text{Å}(y) \wedge \text{Ä}(x,y)))$
$\forall x\,(M(x) \to \text{Å}(f(x)) \wedge \text{Ä}(x,f(x)))$

(iii) *Klausulform*:
$(M(x) \to \text{Å}(f(x)) \wedge \text{Ä}(x,f(x)))$
$\Leftrightarrow \quad (M(x) \to \text{Å}(f(x))) \wedge (M(x) \to \text{Ä}(x,f(x)))$ (K12)

$\text{Å}(f(x)) \leftarrow M(x)$
$\text{Ä}(x,f(x)) \leftarrow M(x)$

(f) Inte varje man som äger en åsna slår den.
LÖSNING:
$\neg\forall x \forall y\,(M(x) \wedge \text{Å}(y) \wedge \text{Ä}(x,y) \to S(x,y))$

(ii) *PNF och Skolemform*:
$\Leftrightarrow \quad \exists x \exists y\,(M(x) \wedge \text{Å}(y) \wedge \text{Ä}(x,y) \wedge \neg S(x,y))$
$M(a) \wedge \text{Å}(b) \wedge \text{Ä}(a,b) \wedge \neg S(a,b)$

(iii) *Klausulform*:
$M(a) \leftarrow$
$\text{Å}(b) \leftarrow$
$\text{Ä}(a,b) \leftarrow$
$\leftarrow S(a,b)$

(g) Ingen kan blåsa och ha mjöl i munnen samtidigt.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\neg\exists x\,(B(x) \wedge M(x))$

(ii) *PNF och Skolemform*:
$\Leftrightarrow \forall x\,\neg(B(x) \wedge M(x))$

(iii) *Klausulform*:
$\leftarrow B(x), M(x)$

(h) Kaj är nöjd, om alla hans elever kan logik.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\Leftrightarrow$ Alla Kajs elever kan logik $\to N(k)$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\,(E(x,k) \to K(x)) \to N(k)$

(ii) *PNF och Skolemform*:
$\Leftrightarrow \quad \exists x\,((E(x,k) \to K(x)) \to N(k))$ (PK27)
$(E(e,k) \to K(e)) \to N(k)$

(iii) *Klausulform*:
$\Leftrightarrow \quad (E(e,k) \vee N(k)) \wedge (K(e) \to N(k))$ (K17)

$E(e,k), N(k) \leftarrow$
$N(k) \leftarrow K(e)$

(i) En logiklärare är nöjd, om alla hans elever kan logik.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$\Leftrightarrow \quad \forall x\,(L(x) \wedge$ alla x:s elever kan logik $\to N(x))$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\,(L(x) \wedge \forall y\,(E(y,x) \to K(y)) \to N(x))$

(ii) *PNF och Skolemform*:
$\Leftrightarrow \quad \forall x\,(\forall y\,(L(x) \wedge (E(y,x) \to K(y)) \to N(x))$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \exists y\,(L(x) \wedge (E(y,x) \to K(y)) \to N(x))$
$\forall x\,(L(x) \wedge (E(g(x),x) \to K(g(x))) \to N(x))$

(iii) *Klausulform*:
$L(x) \wedge (E(g(x),x) \to K(g(x))) \to N(x)$
$\Leftrightarrow \quad (L(x) \to E(g(x),x) \vee N(x)) \wedge (L(x) \wedge K(g(x)) \to N(x))$ (K18)
$E(g(x),x), N(x) \leftarrow L(x)$
$N(x) \leftarrow L(x), K(g(x))$

(j) Antingen vinner landslaget och kvalificerar sig till VM eller också får förbundskaptenen avgå.
LÖSNING:
(i) *Formalisering*:
$(V(l) \wedge K(l)) \vee A(k)$

(ii) *Klausulform*:
$(V(l) \vee A(k)) \wedge (K(l) \vee A(k))$ (Distr. lag)

$V(l), A(k) \leftarrow$
$K(l), A(k) \leftarrow$

13-3.8

(a) Skriv
$\forall x \forall y\,(T(x,y) \leftrightarrow \exists z\,(S(x,z) \wedge F(z,y)))$
på klausulform.
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y\,((T(x,y) \to \exists z\,(S(x,z) \wedge F(z,y))) \wedge (\exists z\,(S(x,z) \wedge F(z,y)) \to T(x,y)))$ (K2)
$\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y\,(T(x,y) \to \exists z\,(S(x,z) \wedge F(z,y))) \wedge \forall x \forall y\,(\exists z\,(S(x,z) \wedge F(z,y)) \to T(x,y))$ (K22)

Vi behandlar varje konjuktionsled för sig.
1:a konjunktionsledet:
PNF:
$\forall x \forall y \exists z\,(T(x,y) \to S(x,z) \wedge F(z,y))$ (PK30)

Skolemform:
$\forall x \forall y\,(T(x,y) \to S(x,f(x,y)) \wedge F(f(x,y),y))$

Klausulform:
$(T(x,y) \to S(x,f(x,y)) \wedge F(f(x,y),y))$
$\Leftrightarrow \quad (T(x,y) \to S(x,f(x,y))) \wedge (T(x,y) \to F(f(x,y),y))$ (K12)

$S(x,f(x,y)) \leftarrow T(x,y)$
$F(f(x,y),y) \leftarrow T(x,y)$

2:a konjunktionsledet:
PNF:
$\forall x \forall y \forall z\,(S(x,z) \wedge F(z,y) \to T(x,y))$ (PK31)

Klausulform:
$T(x,y) \leftarrow S(x,z), F(z,y)$

Således ger definitionen upphov till följande klausuler:
$S(x,f(x,y)) \leftarrow T(x,y)$
$F(f(x,y),y) \leftarrow T(x,y)$
$T(x,y) \leftarrow S(x,z), F(z,y)$
(*Alla tre klausuler är Hornklausuler. Bara den tredje klausulen skulle tas med i ett PROLOG-program.*)

(b) Skriv
$\forall x\,(J(x) \leftrightarrow \exists y\; x = 2y)$
på klausulform
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \forall x\,((J(x) \to \exists y\; x = 2y) \wedge (\exists y\; x = 2y \to J(x))$ (K2)
$\Leftrightarrow \forall x\,(J(x) \to \exists y\; x = 2y) \wedge \forall x\,(\exists y\; x = 2y \to J(x))$ (K22)

1:a konjunktionsledet:
PNF:
$\forall x \exists y\,(J(x) \to x = 2y)$ (PK30)

Skolemform:
$\forall x\,(J(x) \to x = 2g(x))$

Klausulform:
$x = 2g(x) \leftarrow J(x)$

2:a konjunktionsledet:
PNF:
$\forall x \forall y\,(x = 2y \to J(x))$ (PK31)

Klausulform:
$J(x) \leftarrow x = 2y$

Totalt ger definitionen upphov till klausulerna:
$x = 2g(x) \leftarrow J(x)$
$J(x) \leftarrow x = 2y$

(c) Skriv
$\forall x\,(P(x) \leftrightarrow \forall y \forall z\,(y \cdot z = x \to y = x \vee z = x))$
på klausulform.
LÖSNING:
$\Leftrightarrow \forall x\,((P(x) \to \forall y \forall z\,(y \cdot z = x \to y = x \vee z = x))$
$\wedge\,(\forall y \forall z\,(y \cdot z = x \to y = x \vee z = x) \to P(x)))$ (K2)
$\Leftrightarrow \forall x\,(P(x) \to \forall y \forall z\,(y \cdot z = x \to y = x \vee z = x))$
$\wedge\,\forall x\,(\forall y \forall z\,(y \cdot z = x \to y = x \vee z = x) \to P(x))$ (K22)

1:a konjunktionsledet:
PNF:
$\forall x \forall y\ \forall y\ (P(x) \to (y \cdot z = x \to y = x \lor z = x))$

Klausulform:
$(P(x) \to (y \cdot z = x \to y = x \lor z = x))$
$\Leftrightarrow (P(x) \land y \cdot z = x \to y = x \lor z = x)$ (K16)

$y = x, z = x \leftarrow P(x), y \cdot z = x$

2:a konjunktionsledet:
PNF:
$\forall x \exists y \exists z\ ((y \cdot z = x \to y = x \lor z = x) \to P(x))$

Skolemform:
$\forall x \exists z\ ((f(x) \cdot z = x \to f(x) = x \lor z = x) \to P(x))$
$\forall x\ ((f(x) \cdot g(x) = x \to f(x) = x \lor g(x) = x) \to P(x))$

Klausulform:
$(f(x) \cdot g(x) = x \to f(x) = x \lor g(x) = x) \to P(x))$
$\Leftrightarrow (f(x) \cdot g(x) = x \lor P(x)) \land (f(x) = x \lor g(x) = x \to P(x))$ (K17)
$\Leftrightarrow (f(x) \cdot g(x) = x \lor P(x)) \land (f(x) = x \to P(x)) \land (g(x) = x \to P(x))$ (K13)

$f(x) \cdot g(x) = x, P(x) \leftarrow$
$P(x) \leftarrow f(x) = x$
$P(x) \leftarrow g(x) = x$

Totalt ger definitionen upphov till klausulerna
$y = x, z = x \leftarrow P(x), y \cdot z = x$
$f(x) \cdot g(x) = x, P(x) \leftarrow$
$P(x) \leftarrow f(x) = x$
$P(x) \leftarrow g(x) = x$

13-3.9
(a) Formalisera på standardform:
Varje vuxen människa är antingen en man eller en kvinna.
LÖSNING:
$\forall x\ (V(x) \land \ddot{A}(x) \to M(x) \lor K(x))$

(c) På klausulform
LÖSNING:
$M(x), K(x) \leftarrow V(x), \ddot{A}(x)$

(d) Omforma till Hornklausulform med negativa predikat.
LÖSNING:
$(V(x) \land \ddot{A}(x) \to M(x) \lor K(x))$

$\Leftrightarrow (V(x) \land \ddot{A}(x) \land \neg M(x) \to K(x))$ (1) (K14)
Introducera det negativa predikatet
$I(x)$: x är inte en man
Då kan (1) uttryckas som
$V(x) \land \ddot{A}(x) \land I(x) \to K(x)$
Med Hornklausulen
$K(x) \leftarrow V(x), \ddot{A}(x), I(x)$

13-3.10
Uttryck på klausulform
A1: $\forall x \forall y\ (R(x,y) \to \neg R(y,x))$
A2: $\forall x \exists y\ R(x,y)$
A3: $\forall y \exists x\ R(x,y)$
LÖSNING:
Skolemform:
A1: $\forall x \forall y\ (R(x,y) \to \neg R(y,x))$
A2: $\forall x\ R(x,f(x))$
A3: $\forall y\ R(g(y),y)$

Klausulform:
A1: $(R(x,y) \to \neg R(y,x)) \Leftrightarrow \neg(R(x,y) \land R(y,x))$ (K9)
A2: $R(x,f(x))$
A3: $R(g(y),y)$

$\leftarrow R(x,y), R(y,x)$
$R(x,f(x)) \leftarrow$
$R(g(y),y) \leftarrow$

13-3.11
(1) $\exists x\ (P(x) \land Q(x))$
(2) $\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (Q\ (y) \to \neg R(x,y)))$
(3) $\exists x\ (P(x) \land \neg\forall y\ (P(y) \to R(x,y)))$
Skriv $\{(1), (2), \neg(3)\}$ på klausulform.
LÖSNING:
PNF:
(1): $\exists x\ (P(x) \land Q(x))$
(2): $\exists x \forall y\ (P(x) \land (Q(y) \to \neg R(x,y)))$
¬(3): $\neg\exists x\ (P(x) \land \neg\forall y\ (P(y) \to R(x,y)))$
$\Leftrightarrow \forall x\ \neg(P(x) \land \neg\forall y\ (P(y) \to R(x,y)))$ (PK16)
$\Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \to \forall y\ (P(y) \to R(x,y)))$ (SE17)
$\Leftrightarrow \forall x \forall y\ (P(x) \to (P(y) \to R(x,y)))$ (PK26)

Skolemform:
(1): $P(a) \land Q(a)$
(2): $\forall y\ (P(b) \land (Q(y) \to \neg R(b,y)))$
¬(3): $\forall x \forall y\ (P(x) \to (P(y) \to R(x,y)))$

Ekvivalenstransformationer:

(1): $P(a) \land Q(a)$
(2): $P(b) \land (Q(y) \to \neg R(b,y))$
$\Leftrightarrow P(b) \land \neg(Q(y) \land R(b,y))$ (K9)
¬(3): $(P(x) \to (P(y) \to R(x,y)))$
$\Leftrightarrow (P(x) \land P(y) \to R(x,y))$ (K16)

Klausulform:
$P(a) \leftarrow$
$Q(a) \leftarrow$
$P(b) \leftarrow$
$\leftarrow Q(y), R(b,y)$
$R(x,y) \leftarrow P(x), P(y)$

13-3.12
Skriv på klausulform
$\forall x\ (\exists y\ x = 2y \to \exists z \exists v\ (P(z) \land P(v) \land x = z + v))$
LÖSNING:
PNF:
$\forall x \forall y \exists z \exists v\ (x = 2y \to P(z) \land P(v) \land x = z + v)$ (PK31, PK30)

Skolemform:
$\forall x \forall y \exists v\ (x = 2y \to P(f(x,y)) \land P(v) \land x = f(x,y) + v)$
$\forall x \forall y\ (x = 2y \to P(f(x,y)) \land P(g(x,y)) \land x = f(x,y) + g(x,y))$

Ekvivalenstransformationer:
$(x = 2y \to P(f(x,y)) \land P(g(x,y)) \land x = f(x,y) + g(x,y))$
$\Leftrightarrow (x = 2y \to P(f(x,y)) \land (x = 2y \to P(g(x,y)) \land (x = 2y \to x = f(x,y) + g(x,y))$ (K12)

Klausulform:
$P(f(x,y)) \leftarrow x = 2y$
$P(g(x,y)) \leftarrow x = 2y$
$x = f(x,y) + g(x,y) \leftarrow x = 2y$

Avsnitt 13-5

13-5.1
(a) $P \vdash P \lor Q$ ($\lor$I)
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
P ger klausulen
(1) $P \leftarrow$
$\neg(P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q$ (De Morgan)
ger klausulerna
(2) $\leftarrow P$
(3) $\leftarrow Q$

(II) *Deduktion*:

(1) $P \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow P$	P
(3) $\leftarrow Q$	P
(4) $\leftarrow$	1, 2, Resolution

(b) $P \lor Q, P \to R, Q \to R \vdash R$ ($\lor$E)
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
Premisserna ger klausulerna
(1) $P, Q \leftarrow$
(2) $R \leftarrow P$
(3) $R \leftarrow Q$
$\neg R$ ger
(4) $\leftarrow R$

(II) *Deduktion*:

(1) $P, Q \leftarrow$	P
(2) $R \leftarrow P$	P
(3) $R \leftarrow Q$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow P$	2, 4, Resol.
(6) $Q \leftarrow$	1, 5, Resol.
(7) $R \leftarrow$	3, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	4, 7, Resol.

13-5.2
(a) $P, P \to Q \vdash Q$
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
(1) $P \leftarrow$
(2) $Q \leftarrow P$
$\neg Q$ ger
(3) $\leftarrow Q$

(II) *Deduktion*:

(1) $P \leftarrow$	P
(2) $Q \leftarrow P$	P
(3) $\leftarrow Q$	P
(4) $\leftarrow P$	2, 3, Resol.
(5) $\leftarrow$	1, 4, Resol.

(b) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $Q \leftarrow P$

(2) $R \leftarrow Q$

$\neg (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge \neg R$

ger

(3) $P \leftarrow$

(4) $\leftarrow R$

(II) *Deduktion*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $R \leftarrow Q$	P
(3) $P \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow Q$	2, 4, Resol.
(6) $\leftarrow P$	1, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	3, 6, Resol.

(c) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge Q \rightarrow R$ (K16)

(1) $R \leftarrow P, Q$

$\neg(Q \rightarrow (P \rightarrow R)) \Leftrightarrow Q \wedge \neg(P \rightarrow R)$ (K6)

$\Leftrightarrow Q \wedge P \wedge \neg R$ (K6)

(2) $Q \leftarrow$

(3) $P \leftarrow$

(4) $\leftarrow R$

(II) *Deduktion*:

(1) $R \leftarrow P, Q$	P
(2) $Q \leftarrow$	P
(3) $P \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow P, Q$	1, 4, Resol.
(6) $\leftarrow P$	2, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	3, 6, Resol.

(d) $P \wedge Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $R \leftarrow P, Q$

$\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow P \wedge \neg(Q \rightarrow R)$ (K6)

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$ (K6)

(2) $P \leftarrow$

(3) $Q \leftarrow$

(4) $\leftarrow R$

(II) *Deduktion*:

(1) $R \leftarrow P, Q$	P
(2) $P \leftarrow$	P
(3) $Q \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow P, Q$	1, 4, Resol.
(6) $\leftarrow Q$	2, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	3, 6, Resol.

(e) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R \vdash \neg P$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $Q \leftarrow P$

(2) $R \leftarrow Q$

(3) $\leftarrow R$

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(4) $P \leftarrow$

(II) *Deduktion*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $R \leftarrow Q$	P
(3) $\leftarrow R$	P
(4) $P \leftarrow$	P
(5) $\leftarrow Q$	2, 3, Resol.
(6) $\leftarrow P$	1, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	4, 6, Resol.

(f) $P \leftrightarrow Q \wedge R, S \rightarrow Q, R \wedge S \vdash P$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

$P \leftrightarrow Q \wedge R \Leftrightarrow (P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (Q \wedge R \rightarrow P)$ (K2)

$\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \wedge R \rightarrow P)$ (K12)

(1) $Q \leftarrow P$

(2) $R \leftarrow P$

(3) $P \leftarrow Q, R$

Dessutom

(4) $Q \leftarrow S$

(5) $R \leftarrow$

(6) $S \leftarrow$

$\neg P$ ger

(7) $\leftarrow P$

(II) *Deduktion*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $R \leftarrow P$	P
(3) $P \leftarrow Q, R$	P
(4) $Q \leftarrow S$	P
(5) $R \leftarrow$	P
(6) $S \leftarrow$	P
(7) $\leftarrow P$	P
(8) $\leftarrow Q, R$	3, 7, Resol.
(9) $\leftarrow S, R$	4, 8, Resol.
(10) $\leftarrow R$	6, 9, Resol.
(11) $\leftarrow$	5, 10, Resol.

13-5.3

(a) $P \vee Q, \neg P \vdash Q$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $P, Q \leftarrow$

(2) $\leftarrow P$

$\neg Q$ ger

(3) $\leftarrow Q$

(II) *Deduktion*:

(1) $P, Q \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow P$	P
(3) $\leftarrow Q$	P
(4) $P \leftarrow$	1, 3, Resol.
(5) $\leftarrow$	2, 4, Resol.

(b) $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg (P \vee Q)$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $\leftarrow P$

(2) $\leftarrow Q$

(3) $P, Q \leftarrow$

(II) *Deduktion*:

(1) $\leftarrow P$	P
(2) $\leftarrow Q$	P
(3) $P, Q \leftarrow$	P
(4) $P \leftarrow$	2, 3, Resol.
(5) $\leftarrow$	1, 4, Resol.

(*Premisserna och deduktionerna i (a) och (b) är identiska. Från klausullogikens perspektiv är det ingen skillnad mellan Disjunktiva Syllogismen i (a) och De Morgan-förmeln i (b).*)

(c) $P \rightarrow Q, R \rightarrow S \vdash P \vee R \rightarrow Q \vee S$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $Q \leftarrow P$

(2) $S \leftarrow R$

$\neg(P \vee R \rightarrow Q \vee S) \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge \neg(Q \vee S)$ (K6)

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge \neg Q \wedge \neg S$ (K5)

(3) $P, R \leftarrow$

(4) $\leftarrow Q$

(5) $\leftarrow S$

(II) *Deduktion*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $S \leftarrow R$	P
(3) $P, R \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow Q$	P
(5) $\leftarrow S$	P
(6) $\leftarrow R$	2, 5, Resol.
(7) $P \leftarrow$	3, 6, Resol.
(8) $Q \leftarrow$	1, 7, Resol.
(9) $\leftarrow$	4, 8, Resol.

(d) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow S \vdash P \vee Q \rightarrow Q \wedge S$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $Q \leftarrow P$

(2) $S \leftarrow Q$

$\neg(P \vee Q \rightarrow Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(Q \wedge S)$ (K6)

(3) $P, Q \leftarrow$

(4) $\leftarrow Q, S$

(II) *Deduktion*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $S \leftarrow Q$	P
(3) $P, Q \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow Q, S$	P
(5) $Q, Q \leftarrow$	1, 3, Resol.
(6) $Q \leftarrow$	5, Kontraktion
(7) $S \leftarrow$	2, 6, Resol.
(8) $\leftarrow S$	4, 6, Resol
(9) $\leftarrow$	7, 8, Resol.

(e) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

BEVIS:

(I) Klausulform:
$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$ (K16)
(1) $R \leftarrow P, Q$
$\neg((P \to Q) \to (P \to R)) \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge \neg(P \to R)$ (K6)
$\Leftrightarrow (P \to Q) \wedge P \wedge \neg R$ (K6)
(2) $Q \leftarrow P$
(3) $P \leftarrow$
(4) $\leftarrow R$

(II) Deduktion:

(1) $R \leftarrow P, Q$	P
(2) $Q \leftarrow P$	P
(3) $P \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow P, Q$	1, 4, Resol.
(6) $\leftarrow P, P$	2, 5, Resol.
(7) $\leftarrow P$	3, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	3, 7, Resol.

(f) $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
$(P \leftrightarrow \neg P) \Leftrightarrow (P \to \neg P) \wedge (\neg P \to P)$ (K2)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \wedge (\neg P \to P)$ (K9)
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \wedge (P \vee P)$ (K10)
(1) $\leftarrow P, P$
(2) $P, P \leftarrow$

(II) *Deduktion*:

(1) $\leftarrow P, P$	P
(2) $P, P \leftarrow$	P
(3) $P \leftarrow$	2, Kontrakt.
(4) $\leftarrow P$	1, 3, Resol.
(5) $\leftarrow$	3, 4, Resol.

(g) $(P \to Q) \to R \vdash Q \to R$
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
$(P \to Q) \to R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \to R)$ (K17)
(1) $P, R \leftarrow$
(2) $R \leftarrow Q$
$\neg (Q \to R) \Leftrightarrow Q \wedge \neg R$ (K6)
(3) $Q \leftarrow$
(4) $\leftarrow R$

(II) *Deduktion*:

(1) $P, R \leftarrow$	P
(2) $R \leftarrow Q$	P
(3) $Q \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow Q$	2, 4, Resol.
(6) $\leftarrow$	3, 5, Resol.

(h) $(P \to Q) \to R \vdash \neg P \to R$
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
$(P \to Q) \to R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \to R)$ (K17)
(1) $P, R \leftarrow$
(2) $R \leftarrow Q$
$\neg(\neg P \to R) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg R$ (K6)
(3) $\leftarrow P$
(4) $\leftarrow R$

(II) *Deduktion*:

(1) $P, R \leftarrow$	P
(2) $R \leftarrow Q$	P
(3) $\leftarrow P$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $P \leftarrow$	1, 4, Resol.
(6) $\leftarrow$	3, 5, Resol.

(i) $P \wedge Q \to R, Q \to P, \neg R \vdash \neg Q$
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
(1) $R \leftarrow P, Q$
(2) $P \leftarrow Q$
(3) $\leftarrow R$
(4) $Q \leftarrow$

(II) *Deduktion*:

(1) $R \leftarrow P, Q$	P
(2) $P \leftarrow Q$	P
(3) $\leftarrow R$	P
(4) $Q \leftarrow$	P
(5) $\leftarrow P, Q$	1, 3, Resol.
(6) $\leftarrow Q, Q$	2, 5, Resol.
(7) $\leftarrow Q$	4, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	4, 7, Resol.

(j) $P \to Q, R \to P, (P \wedge S) \vee R \vdash Q$
BEVIS:
(i) *Klausulform*:
(1) $Q \leftarrow P$
(2) $P \leftarrow R$
$(P \wedge S) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (S \vee R)$ (Distributiv lag)
(3) $P, R \leftarrow$

(4) $S, R \leftarrow$
$\neg Q$ ger
(5) $\leftarrow Q$

(II) Deduktion:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $P \leftarrow R$	P
(3) $P, R \leftarrow$	P
(4) $S, R \leftarrow$	P
(5) $\leftarrow Q$	P
(6) $\leftarrow P$	1, 5, Resol.
(7) $\leftarrow R$	2, 6, Resol.
(8) $R \leftarrow$	3, 6, Resol.
(9) $\leftarrow$	7, 8, Resol.

ANMÄRKNING: Kontraktionsregeln förklaras i §§ 13-6.28 – 13-6.29.
(d) och (f) kan lösas utan användning av kontraktion.

(d) $P \to Q, Q \to S \vdash P \vee Q \to Q \wedge S$
BEVIS:
$P \vee Q \to Q \wedge S \Leftrightarrow (P \vee Q \to Q) \wedge (P \vee Q \to S)$ (K12)
Vi kan därför bevisa (d) genom att visa
(d 1) $P \to Q, Q \to S \vdash P \vee Q \to Q$
(d 2) $P \to Q, Q \to S \vdash P \vee Q \to S$

(I) *Klausulform (d 1)*:
(1) $Q \leftarrow P$
(2) $S \leftarrow Q$
$\neg(P \vee Q \to S) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg Q$ (K6)
(3) $P, Q \leftarrow$
(4) $\leftarrow Q$

(II) *Deduktion (d 1)*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $S \leftarrow Q$	P
(3) $P, Q \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow Q$	P
(5) $\leftarrow P$	1, 4, Resol.
(6) $Q \leftarrow$	3, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	4, 6, Resol.

(I) *Klausulform (d 2)*:
(1) $Q \leftarrow P$
(2) $S \leftarrow Q$
$\neg(P \vee Q \to S) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg S$ (K6)
(3) $P, Q \leftarrow$
(4) $\leftarrow S$

(II) *Deduktion (d 2)*:

(1) $Q \leftarrow P$	P
(2) $S \leftarrow Q$	P
(3) $P, Q \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow S$	P
(5) $\leftarrow Q$	2, 4, Resol.
(6) $\leftarrow P$	1, 5, Resol.
(7) $Q \leftarrow$	3, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	5, 7, Resol.

(f) $\vdash \neg (P \leftrightarrow \neg P)$
BEVIS:
$P \leftrightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow P)$ (SE 27)
$\Leftrightarrow (P \vee P) \wedge \neg (P \wedge P)$ (SE 23)
$\Leftrightarrow P \wedge \neg P$

(I) *Klausulform*:
(1) $P \leftarrow$
(2) $\leftarrow P$

(II) Deduktion:

(1) $P \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow P$	P
(3) $\leftarrow$	1, 2, Resol.

13-5.4
(a) $P \wedge (Q \to R) \to S \vdash P \wedge R \to S$
BEVIS:
(I) *Klausulform*:
$P \wedge (Q \to R) \to S \Leftrightarrow (P \to Q \vee S) \wedge (P \wedge R \to S)$ (K18)
(1) $Q, S \leftarrow P$
(2) $S \leftarrow P, R$
$\neg(P \wedge R \to S) \Leftrightarrow P \wedge R \wedge \neg S$ (K6)
(3) $P \leftarrow$
(4) $R \leftarrow$
(5) $\leftarrow S$

(II) *Deduktion*:

(1) $Q, S \leftarrow P$	P
(2) $S \leftarrow P, R$	P
(3) $P \leftarrow$	P
(4) $R \leftarrow$	P
(5) $\leftarrow S$	P
(6) $\leftarrow P, R$	2, 5, Resol.
(7) $\leftarrow R$	3, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	4, 7, Resol.

(b) $P \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow S \vdash P \wedge \neg Q \rightarrow S$

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $Q, S \leftarrow P$	
(2) $S \leftarrow P, R$	(se Övn. 5.4(a))
$\neg(P \wedge \neg Q \rightarrow S) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg S$	(K6)
(3) $P \leftarrow$	
(4) $\leftarrow Q$	
(5) $\leftarrow S$	

(II) *Deduktion*:

(1) $Q, S \leftarrow P$	P
(2) $S \leftarrow P, R$	P
(3) $P \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow Q$	P
(5) $\leftarrow S$	P
(6) $S \leftarrow P$	1, 4, Resol.
(7) $\leftarrow P$	5, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	3, 7, Resol.

13-5.5

A1: $P \vee Q$

A2: $R \rightarrow \neg P$

A3: $S \rightarrow \neg Q$

(a) Skriv {A1, A2, A3} på klausulform.

LÖSNING:

A1: $P, Q \leftarrow$	
A2: $R \rightarrow \neg P \Leftrightarrow \neg(R \wedge P)$	(K9)
$\leftarrow R, P$	
A3: $S \rightarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(S \wedge Q)$	(K9)
$\leftarrow S, Q$	

(b) A1, A2, A3 $\vdash R \rightarrow Q$

BEVIS:

$\neg(R \rightarrow Q) \Leftrightarrow R \wedge \neg Q$ (K6)

ger klausurerna

(4) $R \leftarrow$

(5) $\leftarrow Q$

Deduktion:

(1) $P, Q \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow R, P$	P
(3) $\leftarrow S, Q$	P
(4) $R \leftarrow$	P
(5) $\leftarrow Q$	P
(6) $\leftarrow P$	2, 4, Resol.

(7) $Q \leftarrow$	1, 6, Resol.
(8) $\leftarrow$	5, 7, Resol.

A1, A2, A3 $\vdash S \rightarrow P$

BEVIS:

$\neg(S \rightarrow P) \Leftrightarrow S \wedge \neg P$ (K6)

(4) $S \leftarrow$

(5) $\leftarrow P$

Deduktion:

(1) $P, Q \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow R, P$	P
(3) $\leftarrow S, Q$	P
(4) $S \leftarrow$	P
(5) $\leftarrow P$	P
(6) $\leftarrow Q$	3, 4, Resol.
(7) $Q \leftarrow$	1, 5, Resol.
(8) $\leftarrow$	6, 7, Resol.

A1, A2, A3 $\vdash \neg(R \wedge S)$

BEVIS:

$R \wedge S$ ger klausulerna

(4) $R \leftarrow$

(5) $S \leftarrow$

Deduktion:

(1) $P, Q \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow R, P$	P
(3) $\leftarrow S, Q$	P
(4) $R \leftarrow$	P
(5) $S \leftarrow$	P
(6) $\leftarrow Q$	3, 5, Resol.
(7) $\leftarrow P$	2, 4, Resol.
(8) $Q \leftarrow$	1, 7, Resol.
(9) $\leftarrow$	6, 8, Resol.

13-5.6

(a) $\{\neg(P \rightarrow Q), P \rightarrow R, Q \vee \neg R\}$

är inkonsistent.

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	(K6)
(1) $P \leftarrow$	
(2) $\leftarrow Q$	
$P \rightarrow R$ ger	
(3) $R \leftarrow P$	
$Q \vee \neg R \Leftrightarrow R \rightarrow Q$	(K1)

(4) $Q \leftarrow R$

(II) *Deduktion:*

(1) $P \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow Q$	P
(3) $R \leftarrow P$	P
(4) $Q \leftarrow R$	P
(5) $\leftarrow R$	2, 4, Resol.
(6) $\leftarrow P$	3, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	1, 6, Resol.

(b) $\{P, P \rightarrow \neg Q, Q \vee R, R \rightarrow \neg R\}$

är inkonsistent.

BEVIS:

(I) *Klausulform*:

(1) $P \leftarrow$	
$P \rightarrow \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$	(K9)
(2) $\leftarrow P, Q$	
$Q \vee R$ ger	
(3) $Q, R \leftarrow$	
$R \rightarrow \neg R \Leftrightarrow \neg(R \wedge R)$	(K9)
$\Leftrightarrow \neg R$	
(4) $\leftarrow R$	

(II) *Deduktion*:

(1) $P \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow P, Q$	P
(3) $Q, R \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R$	P
(5) $Q \leftarrow$	3, 4, Resol.
(6) $\leftarrow P$	2, 5, Resol.
(7) $\leftarrow$	1, 6, Resol.

Avsnitt 13-6

13-6.13

$U = P(x,f(y),z)$

$\sigma = \{x = f(y),\ y = z\}$

$\theta = \{x = a,\ y = b,\ z = y\}$

Beräkna $U\sigma\theta$ och $U\theta\sigma$.

LÖSNING:

$U\sigma\theta = P(f(y), f(z), z)\theta = P(f(b), f(y), y)$

$U\theta\sigma = P(a, f(b), y)\sigma = P(a, f(b), z)$

Eftersom $U\sigma\theta \neq U\theta\sigma$, så $\sigma\theta \neq \theta\sigma$ och substitutionssammansättning är inte kommutativ.

Avsnitt 13-7 (i urval)

13-7.1

(a) $U\sigma$, $U\theta$, $(U\sigma)\theta$, $(U\theta)\sigma$

LÖSNING:

$U = P(x, f(x,y), z)$

$\sigma = \{x = a,\ y = z\}$

$\theta = \{y = f(a,z),\ z = b\}$

$U\sigma$	$= P(x, f(x,y), z)\ \sigma$
	$= \underline{P(a, f(a,z), z)}$
$U\theta$	$= P(x, f(x,y), z)\ \theta$
	$= \underline{P(x, f(x, f(a,z)), b)}$
$(U\sigma)\theta$	$= P(a, f(a,z), z)\ \theta$
	$= \underline{P(a, f(a,b), b)}$
$(U\theta)\sigma$	$= P(x, f(x, f(a,z)), b)\ \sigma$
	$= \underline{P(a, f(a, f(a,z)), b)}$

(b) Beräkna $\sigma\theta$ och $\theta\sigma$. Beräkna $U(\sigma\theta)$ och $U(\theta\sigma)$.

LÖSNING:

$\sigma\theta$	$= \{x = a\theta,\ y = z\theta,\ y = f(a,z),\ z = b\}$
	$- \{y = f(a,z)\}$
	$= \{x = a\theta,\ y = z\theta,\ z = b\}$
	$= \{x = a,\ y = b,\ z = b\}$
$\theta\sigma$	$= \{y = f(a,z)\sigma,\ z = b\sigma,\ z = a,\ y = z\}$
	$- \{y = z\}$
	$= \{y = f(a,z)\sigma,\ z = b\sigma,\ x = a\}$
	$= \{y = f(a,z),\ z = b,\ x = a\}$
$U(\sigma\theta)$	$= P(x, f(x,y), z)\ (\sigma\theta)$
	$= P(a, f(a,b), b)$
	$= (U\sigma)\ \theta$
$U(\theta\sigma)$	$= P(x, f(x,y), z)\ (\theta\sigma)$
	$= P\ (a, f(a, f(a,z)), b)$
	$= (U\theta)\ \sigma$

13-7.4

(a) $P(x);\ P(a)$

LÖSNING:

$P(x)$		$P(a)$
$\vert$	$\{x = a\}$	$\vert$
$P(a)$		$P(a)$

MGU $\sigma = \{x = a\}$

(b) Q(a,b); Q(x,y)
LÖSNING:

Q(a,b)   Q(x,y)
{x = a}
Q(a,b)   Q(a,y)
{y = b}
Q(a,b)   Q(a,b)

MGU σ = {x = a, y = b}

(c) P(x,y); Q(x,z)
LÖSNING:

P(x,y)   Q(x,z)
False

Kan ej unifieras eftersom ‘P’ ≠ ‘Q’.

(d) Q(a,b); Q(x,x)
LÖSNING:

Q(a,b)   Q(x,x)
{x = a}
Q(a,b)   Q(a,a)
False

Unifiering är omöjlig, eftersom ’a’ och ‘b’ är olika konstanter.

(e) Q(h(a),b); Q(h(y),x)
LÖSNING:

Q(h(a),b)   Q(h(y),x)
{y = a}
Q(h(a),b)   Q(h(a),x)
{x = b}
Q(h(a),b)   Q(h(a),b)

MGU σ = {y = a} {x = b}
{y = a, x = b}

(f) Q(z); Q(g(a,z))
LÖSNING:

Q(z)   Q(g(a,z))
False

Occur checken blockerar unifieringen av ‘z’och ‘g(a,z)’ eftersom z förekommer i g(a,z).

(g) P(f(x), b); P(y,z)
LÖSNING:

P(f(x),b)   P(y,z)
{y = f(x)}
P(f(x), b)   P(f(x), z)
{z = b}
P(f(x), b)   P(f(x), b)

MGU σ = {y = f(x)} {z = b}
= {y = f(x), z = b}

(h) Q(f(y), x); Q(x, f(b))
LÖSNING:

Q(f(y), x)   Q(x, f(b))
{x = f(y)}
Q(f(y), f(y))   Q(f(y), f(b))
{y = b}
Q(f(b), f(b))   Q(f(b), f(b))

MGU σ = {x = f(y)} {y = b}
= {x = f(y) {y = b}, y = b}
= {x = f(b), y = b}

(i) R(f(x), x, y); R(y, f(a), f(z))
LÖSNING:

R(f(x), x, y)   R(y, f(a), f(z))
{y = f(x)}
R(f(x), x, f(x))   R(f(x), f(a), f(z))
{x = f(a)}
R(f(f(a)), f(a), f(f(a)))   R(f(f(a)), f(a), f(z))

{z = f(a)}
R(f(f(a)), f(a), f(f(a)))   R(f(f(a)), f(a), f(f(a)))

MGU σ = {y = f(x)}{x = f(a)} {z = f(a)}
= {y = f(x) {x = f(a)}, x = f(a)} {z = f(a)}
= {y = f(f(a)), x = f(a), z = f(a)}

(j) P(x,y); P(y,x)
LÖSNING:

P(x,y)   P(y,x)
{x = y}
P(y,y)   P(y,y)

MGU σ = {x = y}

(k) x = f(y); f(y) = f(a)
LÖSNING:

x = f(y)   f(y) = f(a)
{x = f(y)}
f(y) = f(y)   f(y) = f(a)
{y = a}
f(a) = f(a)   f(a) = f(a)

MGU σ = {x = f(y)} {y = a}
= {x = f(y) {y = a}, y = a}
= {x = f(a), y = a}

(l) S(x) + y < z; y + x < S(0)
LÖSNING:

S(x) + y < z   y + x < S(0)
{y = S(x)}
S(x) + S(x) < z   S(x) + x < S(0)

False

Förekomstkontrollen gör att x och S(x) inte kan unifieras då ‘x’förekommer i ‘S(x)’.

(m) x + S(x)* y < z; y * z < S(0)

LÖSNING:

x + S(x) * y < z   y * y < S(0)
False

‘x + (S(x) * y)’ och ‘y * y’ kan inte unifieras då funktionssymbolerna ‘+’och ‘*’ är olika.

13-7.5

(a) P(x,y); P(f(x), y)
kan inte unifieras.
BEVIS:

P(x,y)   P(f(x), y)
False

x och f(x) kan inte unifieras eftersom x förekommer i f(x) (occur check).

(b) Det är möjligt att matcha P(x,y) och P(f(x), y) i klausulerna
(1) P(f(x), y) ←
(2) Q(y, f(x)) ← P(x,y)
BEVIS:
Först byter vi (bundna) variabler i (1) så att (1) och (2) inte har några gemensamma variabler:
(1) P(f(z), v) ←
(2) Q(y, f(x)) ← P(x,y)
(3) Q(v, f(f(z))) ← P(f(z), v)   från (2), unifiering med (1), {x = f(z), y = v}
(4) Q(v, f(f(z))) ←   2, 3, Resol.
Genom att byta (bundna) variabler i (1) och (2) så att de saknar gemensamma variabler blockerar inte längre förekomstkontrollen unifieringen av ‘x’ och ‘f(z)’.

13-7.6

Låt *L* innehålla
en 2-ställigt funktionssymbol f;
ett 1-ställigt predikat P;
ett 2-ställigt predikat Q;
identitetssymbolen = .
Formulera identitetsaxiomen (I 1) – (I 4) för *L*.
LÖSNING:
(I 1) x = x ←
(I 2, f) f(x,y) = f(z,w) ← x = z, y = w
(I 3, P) P(x) ← P(y), x = y
(I 3, Q) Q(x,y) ← Q(z,w), x = z, y = w

(I 4) $x = y \leftarrow z = w, x = z, y = w$

13-7.7

(c) $\forall x \forall y\, R(x,y) \vdash \forall x\, R(x,x)$

BEVIS:

(i) *Klausulform*:

(1) $R(x,y) \leftarrow$

$\neg\forall x\, R(x,x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg R(x,x)$ (PK15)

Skolemform: $\neg R(a,a)$

(2) $\leftarrow R(a,a)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $R(x,y) \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow R(a,a)$	P
(3) $R(a,a) \leftarrow$	1, Unif. med (2)
(4) $\leftarrow$	2, 3, Resol.

(e) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x\, (P(x) \rightarrow R(x))$

BEVIS:

(i) *Klausulform*:

(1) $Q(x) \leftarrow P(x)$

(2) $R(x) \leftarrow Q(x)$

$\neg\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x)) \Leftrightarrow \exists x\, \neg(P(x) \rightarrow R(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \neg R(x))$ (K6)

Skolemform: $P(a) \wedge \neg R(a)$

(3) $P(a) \leftarrow$

(4) $\leftarrow R(a)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $Q(x) \leftarrow P(x)$	P
(2) $R(x) \leftarrow Q(x)$	P
(3) $P(a) \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R(a)$	P
(5) $\leftarrow Q(a)$	2, 4, Unif. + Resol.
(6) $\leftarrow P(a)$	1, 5, Unif. + Resol.
(7) $\leftarrow$	3, 6, Resol.

(g) $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$

BEVIS:

(i) *Klausulform*:

(1) $Q(x) \leftarrow P(x)$

$\neg(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \wedge \neg\exists x\, Q(x)$ (K6)

$\Leftrightarrow \exists x\, P(x) \wedge \forall x\, \neg Q(x)$ (PK16)

(2) $P(a) \leftarrow$

(3) $\leftarrow Q(x)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $Q(x) \leftarrow P(x)$	P
(2) $P(a) \leftarrow$	P
(3) $\leftarrow Q(x)$	P
(4) $\leftarrow P(x)$	1, 3, Resol.
(5) $\leftarrow$	2, 4, Unif. + Resol.

(i) $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall y \exists x\, P(x,y)$

BEVIS:

$\exists x \forall y\, P(x,y)$ på Skolemform $\forall y\, P(a,y)$

(1) $P(a,y) \leftarrow$

$\neg\forall y \exists x\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\, \neg\exists x\, P(xy)$ (PK15)

$\Leftrightarrow \exists y \forall x\, \neg P(x,y)$ (PK16)

Skolemform: $\forall x\, \neg P(x,b)$

(2) $\leftarrow P(x,b)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $P(a,y) \leftarrow$	P
(2) $\leftarrow P(x,b)$	P
(3) $P(a,b) \leftarrow$	1, Unif $\{x = a, y = b\}$
(4) $\leftarrow P(a,b)$	2, Unif $\{x = a, y = b\}$
(5) $\leftarrow$	3, 4, Resol.

13-7.8

(1) Ingen prenumererar på *The Times* med mindre än att han är välutbildad.

(2) Ingen igelkott kan läsa.

(3) Den som inte kan läsa är inte välutbildad.

(4) Ingen igelkott prenumererar på *The Times*.

LÖSNING:

(i) *Formalisering*:

(1) $\forall x\, (\neg V(x) \rightarrow \neg T(x))$

(2) $\forall x\, (I(x) \rightarrow \neg L(x))$

(3) $\forall x\, (\neg L(x) \rightarrow \neg V(x))$

(4) $\forall x\, (I(x) \rightarrow \neg T(x))$

(ii) *Klausulform*:

$\neg V(x) \rightarrow \neg T(x) \Leftrightarrow T(x) \rightarrow V(x)$ (K11)

(1) $V(x) \leftarrow T(x)$

$I(x) \rightarrow \neg L(x) \Leftrightarrow \neg(I(x) \wedge L(x))$ (K9)

(2) $\leftarrow I(x), L(x)$

$\neg L(x) \rightarrow \neg V(x) \Leftrightarrow V(x) \rightarrow L(x)$ (K11)

(3) $L(x) \leftarrow V(x)$

$\neg\forall x\, (I(x) \rightarrow \neg T(x)) \Leftrightarrow \exists x\, \neg(I(x) \rightarrow \neg T(x))$ (K15)

$\Leftrightarrow \exists x\, (I(x) \wedge \neg\neg T(x))$ (K6)

$\Leftrightarrow \exists x\, (I(x) \wedge T(x))$ (K3)

(4) $I(a) \leftarrow$

(5) $T(a) \leftarrow$

(iii) *Deduktion*:

(1) $V(x) \leftarrow T(x)$	P
(2) $\leftarrow I(x), L(x)$	P
(3) $L(x) \leftarrow V(x)$	P
(4) $I(a) \leftarrow$	P
(5) $T(a) \leftarrow$	P
(6) $\leftarrow L(a)$	2, 4, Unif + Resol
(7) $\leftarrow V(a)$	3, 6, Unif + Resol
(8) $\leftarrow T(a)$	1, 7, Unif + Resol
(9) $\leftarrow$	5, 8, Resol.

13-7.10

$M(b) \wedge N(b)$

$\forall x\, (M(x) \wedge N(x) \rightarrow (R(b,x) \leftrightarrow \neg R(x,x)))$

LÖSNING:

$M(b) \wedge N(b)$

(1) $M(b) \leftarrow$

(2) $N(b) \leftarrow$

$M(x) \wedge N(x) \rightarrow (R(b,x) \leftrightarrow \neg R(x,x)) \Leftrightarrow$

$(M(x) \wedge N(x) \rightarrow (R(b,x) \rightarrow \neg R(x,x))) \wedge (M(x) \wedge N(x) \rightarrow (\neg R(x,x) \rightarrow R(b,x)))$ (K2)

$\Leftrightarrow (M(x) \wedge N(x) \rightarrow \neg\, (R(b,x) \wedge R(x,x))) \wedge (M(x) \wedge N(x) \rightarrow R(x,x) \vee R(b,x))$

(K9, K10)

$\Leftrightarrow \neg(M(x) \wedge N(x) \wedge R(b,x) \wedge R(x,x)) \wedge (M(x) \wedge N(x) \rightarrow R(x,x) \vee R(b,x))$ (K9)

(3) $\leftarrow M(x), N(x), R(b,x), R(x,x)$

(4) $R(x,x), R(b,x) \leftarrow M(x), N(x)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $M(b) \leftarrow$	P
(2) $N(b) \leftarrow$	P
(3) $\leftarrow M(x), N(x), R(b,x), R(x,x)$	P
(4) $R(x,x), R(b,x) \leftarrow M(x), N(x)$	P
(5) $\leftarrow M(b), N(b), R(b,b), R(b,b)$	3, Unif m. (1)
(6) $\leftarrow N(b), R(b,b), R(b,b)$	1, 5, Resol
(7) $\leftarrow R(b,b), R(b,b)$	2, 6, Resol
(8) $R(b,b), R(b,b) \leftarrow M(b), N(b)$	4, Unif m. (1)
(9) $R(b,b), R(b,b) \leftarrow N(b)$	1, 8, Resol
(10) $R(b,b), R(b,b) \leftarrow$	2, 9, Resol
(11) $R(b,b) \leftarrow$	10, Kontrakt
(12) $\leftarrow R(b,b)$	7, 11, Resol
(13) $\leftarrow$	11, 12, Resol.

13-7.13

(a) $x = y \leftarrow y = x$

BEVIS:

(1) $x = x \leftarrow$ P (I 1)

(2) $x = y \leftarrow z = w, x = z, y = w$	P (I 4)
(3) $x = y \leftarrow x = x, x = x, y = x$	Unif m. (1) $\{z = x, w = x\}$
(4) $x = y \leftarrow x = x, y = x$	1, 3, Resol
(5) $x = y \leftarrow y = x$	1, 4, Resol

13-7.14

(c) $\vdash \forall x \forall y\, (x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$

BEVIS:

(i) *Klausulform*:

$\neg\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))) \Leftrightarrow \exists x \exists y\, \neg(x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$ (PK15)

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, (x = y \wedge P(x) \wedge \neg P(y))$ (K6)

Skolemform: $a = b \wedge P(a) \wedge \neg P(b)$

(1) $a = b \leftarrow$

(2) $P(a) \leftarrow$

(3) $\leftarrow P(b)$

Identitetsaxiom:

(4) $x = x \leftarrow$

(5) $P(x) \leftarrow P(y), x = y$

(6) $x = y \leftarrow z = w, x = z, y = w$

(ii) *Deduktion*:

(1) $a = b \leftarrow$	P
(2) $P(a) \leftarrow$	P
(3) $\leftarrow P(b)$	P
(4) $x = x \leftarrow$	P
(5) $P(x) \leftarrow P(y), x = y$	P
(6) $x = y \leftarrow z = w, x = z, y = w$	P
(7) $\leftarrow P(y), b = y$	3, 5, Unif + Resol
(8) $x = y \leftarrow y = x$	4, 6, Övn. 7.13 (a)
(9) $b = a \leftarrow a = b$	8, Unif m. (1)
(10) $b = a \leftarrow$	1, 9, Resol.
(11) $\leftarrow P(a)$	7, 10, Uinf + Resol
(12) $\leftarrow$	2, 11, Resol

(d) $\forall x\, (P(x) \rightarrow x = a \vee x = b), \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vdash Q(a) \vee Q(b)$

BEVIS:

(i) *Klausulform*:

(1) $x = a, x = b \leftarrow P(x)$

$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ på Skolemform.

Vi använder α som Skolemkonstant:

(2) $P(\alpha) \leftarrow$

(3) $Q(\alpha) \leftarrow$

$\neg\, (Q(a) \vee Q(b)) \Leftrightarrow \neg Q(a) \wedge \neg Q(b)$

(4) $\leftarrow Q(a)$

(5) $\leftarrow Q(b)$

Identitetsaxiom:
(6) $x = x \leftarrow$
(7) $x = y \leftarrow z = w, x = z, y = w$
(8) $P(x) \leftarrow P(y), x = y$
(9) $Q(x) \leftarrow Q(y), x = y$

(ii) *Deduktion*:

(1) $x = a, x = b \leftarrow P(x)$	P
(2) $P(\alpha) \leftarrow$	P
(3) $Q(\alpha) \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow Q(a)$	P
(5) $\leftarrow Q(b)$	P
(6) $x = x \leftarrow$	(I 1)
(7) $x = y \leftarrow z = w, x = z, y = w$	(I 4)
(8) $P(x) \leftarrow P(y), x = y$	(I 3)
(9) $Q(x) \leftarrow Q(y), x = y$	(I 3)
(10) $Q(a) \leftarrow Q(y), a = y$	9, Unif. med (4)
(11) $\leftarrow Q(y), a = y$	4, 10, Resol.
(12) $Q(b) \leftarrow Q(y), b = y$	9, Unif m. (5)
(13) $\leftarrow Q(y), b = y$	5, 12, Resol.
(14) $\leftarrow Q(\alpha), b = \alpha$	13, Unif m. (3)
(15) $\leftarrow b = \alpha$	3, 14, Resol.
(16) $\alpha = a, \alpha = b \leftarrow P(\alpha)$	1, Unif. m. (2)
(17) $\alpha = a, \alpha = b \leftarrow$	2, 16, Resol.
(18) $x = y \leftarrow y = x$	6, 7, Övn. 7.13(a)
(19) $b = \alpha \leftarrow \alpha = b$	18, Unif. m. (15)
(20) $\leftarrow \alpha = b$	15, 19, Resol.
(21) $\alpha = a \leftarrow$	17, 20, Resol.
(22) $a = \alpha \leftarrow \alpha = a$	18, Unif. m. (21)
(23) $a = \alpha \leftarrow$	21, 22, Resol.
(24) $Q(a) \leftarrow Q(\alpha), a = \alpha$	9, Unif. m. (23)
(25) $Q(a) \leftarrow Q(\alpha)$	23, 24, Resol.
(26) $Q(a) \leftarrow$	3, 25, Resol.
(27) $\leftarrow$	4, 26, Resol.

(*ANMÄRKNING. Övning 7.14 visar att deduktion i klausullogik blir åtskilligt svårare, när identitet ingår. Den ger också en känsla för varför logikprogrammering med identitet i praktiken är omöjlig: Det blir för många varianter att testa. Sökrymden växer explosionsartad, när identitet finns med.*)

13-7.15
(b) $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)), \neg\exists x\,(P(x) \wedge R(x)) \vdash \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \neg R(x))$
BEVIS:
(i) *Klausulform*:

(1) $Q(x), R(x) \leftarrow P(x)$
$\neg\exists x\,(P(x) \wedge R(x)) \Leftrightarrow \forall x\,\neg(P(x) \wedge R(x))$ (PK16)
(2) $\leftarrow P(x), R(x)$
$\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \neg R(x)) \Leftrightarrow \exists x\,\neg(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \neg R(x))$ (PK15)
Skolemform:
$\neg(P(a) \rightarrow Q(a) \wedge \neg R(a))$
$\Leftrightarrow P(a) \wedge \neg(Q(a) \wedge \neg R(a))$ (K6)
$\Leftrightarrow P(a) \wedge (Q(a) \rightarrow R(a))$ (K6, K3)
(3) $P(a) \leftarrow$
(4) $R(a) \leftarrow Q(a)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $Q(x), R(x) \leftarrow P(x)$	P
(2) $\leftarrow P(x), R(x)$	P
(3) $P(a) \leftarrow$	P
(4) $R(a) \leftarrow Q(a)$	P
(5) $\leftarrow R(a)$	2, 3, Unif + Resol
(6) $\leftarrow Q(a)$	4, 5, Resol
(7) $R(a) \leftarrow P(a)$	1, 6, Unif + Resol
(8) $\leftarrow P(a)$	5, 7, Resol
(9) $\leftarrow$	3, 8, Resol

(c) $\forall x\,(P(x) \rightarrow D(x)) \vdash \forall x\,(\exists y\,(P(y) \wedge H(x,y)) \rightarrow \exists y\,(D(y) \wedge H(x,y)))$
BEVIS:
(i) *Klausulform*:
(1) $D(x) \leftarrow P(x)$
$\neg\forall x\,(\exists y\,(P(y) \wedge H(x,y)) \rightarrow \exists y\,(D(y) \wedge H(x,y)))$
$\Leftrightarrow \exists x\,\neg(\exists y\,(P(y) \wedge H(x,y)) \rightarrow \exists y\,(D(y) \wedge H(x,y)))$
$\Leftrightarrow \exists x\,(\exists y\,(P(y) \wedge H(x,y)) \wedge \neg\exists y\,(D(y) \wedge H(x,y)))$
$\Leftrightarrow \exists x\,(\exists y\,(P(y) \wedge H(x,y)) \wedge \forall y\,\neg\,(D(y) \wedge H(x,y)))$
$\Leftrightarrow$ (*variabelbyte (PK4)*)
$\exists x\,(\exists y\,(P(y) \wedge H(x,y)) \wedge \forall z\,\neg(D(z) \wedge H(x,z)))$
$\Leftrightarrow$ (*Flytta ut $\exists y$ och $\forall z$, (PK24), (PK28)*)
$\exists x \exists y \forall z\,((P(y) \wedge H(x,y)) \wedge \neg(D(z) \wedge H(x,z)))$
Skolemform:
$\forall z\,((P(b) \wedge H(a,b)) \wedge \neg(D(z) \wedge H(a,z)))$
(2) $P(b) \leftarrow$
(3) $H(a,b) \leftarrow$
(4) $\leftarrow D(z), H(a,z)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $D(x) \leftarrow P(x)$	P
(2) $P(b) \leftarrow$	P
(3) $H(a,b) \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow D(z), H(a,z)$	P
(5) $\leftarrow D(x), H(a,x)$	4, Unif m. (1)
(6) $\leftarrow P(x), H(a,x)$	1, 5, Resol
(7) $\leftarrow P(b), H(a,b)$	6, Unif m. (2)

(8) $\leftarrow H(a,b)$	2, 7, Resol
(9) $\leftarrow$	3, 8, Resol

13-7.16
(a) (1) $\forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
(2) $\underline{\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))}$
(3) $\forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(x,x))$
BEVIS:
(i) *Klausulform*:
(1) $R(y,x) \leftarrow R(x,y)$
(2) $R(x,z) \leftarrow R(x,y), R(y,z)$
$\neg\forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(x,x))$
$\Leftrightarrow \exists x \exists y\,\neg(R(x,y) \rightarrow R(x,x))$ (PK15)
$\Leftrightarrow \exists x \exists y\,(R(x,y) \wedge \neg R(x,x))$ (K6)
Skolemform:
$R(a,b) \wedge \neg R(a,a)$
(3) $R(a,b) \leftarrow$
(4) $\leftarrow R(a,a)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $R(y,x) \leftarrow R(x,y)$	P
(2) $R(x,z) \leftarrow R(x,y), R(y,z)$	P
(3) $R(a,b) \leftarrow$	P
(4) $\leftarrow R(a,a)$	P
(5) $R(a,a) \leftarrow R(a,y), R(y,a)$	2, Unif m. (4)
(6) $\leftarrow R(a,y), R(y,a)$	4, 5, Resol
(7) $\leftarrow R(a,b), R(b,a)$	6, Unif m. (3)
(8) $\leftarrow R(b,a)$	3, 7, Resol
(9) $R(b,a) \leftarrow R(a,b)$	1, Unif m. (8)
(10) $\leftarrow R(a,b)$	8, 9, Resol
(11) $\leftarrow$	3, 10, Resol

(b) (1) $\forall x \exists y\, R(x,y)$
(2) $\forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
(3) $\underline{\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)}$
(4) $\forall x\, R(x,x)$
BEVIS:
(i) *Klausulform*:
$\forall x \exists y\, R(x,y)$ på Skolemform:
$\forall x\, R(x, f(x))$
(1) $R(x, f(x)) \leftarrow$
(2) $R(y,x) \leftarrow R(x,y)$
(3) $R(x,z) \leftarrow R(x,y), R(y,z)$
$\neg\forall x\, R(x,x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg R(x,x)$ (PK15)
Skolemform: $\neg R(a,a)$
(4) $\leftarrow R(a,a)$

(ii) *Deduktion*:

(1) $R(x, f(x)) \leftarrow$	P
(2) $R(y,x) \leftarrow R(x,y)$	P
(3) $R(x,z) \leftarrow R(x,y), R(y,z)$	P
(4) $\leftarrow R(a,a)$	P
(5) $R(a,a) \leftarrow R(a,y), R(y,a)$	3, Unif m. (4)
(6) $\leftarrow R(a,y), R(y,a)$	4, 5, Resol
(*Vi unifierar (1) och (6) med $\sigma = \{x = a, y = f(a)\}$*)	
(7) $R(a, f(a)) \leftarrow$	1, Unif m. (6)
(8) $\leftarrow R(a, f(a)), R(f(a), a)$	6, Unif m. (1)
(9) $\leftarrow R(f(a), a)$	7, 8, Resol.
(*Vi unifierar (2) och (9) med $\sigma = \{x = a, y = f(a)\}$*)	
(10) $R(f(a), a) \leftarrow R(a, f(a))$	2, Unif m. (9)
(11) $\leftarrow R(a, f(a))$	9, 10, Resol
(12) $\leftarrow$	7, 11, Resol

Avsnitt 13-9

13-9.1
$\{\forall x\, P(x, f(x)), \forall y\, \neg P(y,y)\}$ är konsistent.
BEVIS:
Definiera $\mathcal{m}$ = (M, **P**, **f**) där
M = {a,b}
P = {(a,b), (b,a)}

x	**f**(x)
a	b
b	a

(a,b) $\in$ **P**		$\mathcal{m} \models P(a,b)$	(1)
(1) + b = **f**(a)	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \models P(a, f(a))$	(2)
(b,a) $\in$ **P**	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \models P(b,a)$	(3)
(3) + a = **f**(b)	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \models P(b, f(b))$	(4)
(2) + (4)	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{m} \models \forall x\, P(x, f(x))}$	
(a,a) $\notin$ **P**	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \not\models P(a,a)$	
	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \models \neg P(a,a)$	(5)
(b,b) $\notin$ **P**	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \not\models P(b,b)$	
	$\Rightarrow$	$\mathcal{m} \models \neg P(b,b)$	(6)
(5) + (6)	$\Rightarrow$	$\underline{\mathcal{m} \models \forall y\, \neg P(y,y)}$	

13-9.2
Sökordningen i § 13-8.4:
I $\leftarrow P_1, P_2, \ldots, P_m$ testa från vänster åt höger, dvs P_1, först, därefter P_2, etc.
I programsatserna
(R_1)
(R_2)
.
.
.
(R_n)
testa uppifrån och ned, dvs (R_1) först, därefter (R_2) etc, för varje val av P_i.

(a) Låt
(R1) P(a,b) ←
(R2) P(c,b) ←
(R3) P(x,z) ← P(x,y), P(y,z)
(R4) P(x,y) ← P(y,x)
Mål: ← P(a,c)

Visa att den vänstra grenen i sökrymden för detta problem med den ovangivna sökordningen blir oändlig.
LÖSNING:
° ← $\underline{P(a,c)}$
{x = a, z = c}

° ← $\underline{P(a,y)}$, P(y,c) (R3), Resol
{x = a, z = y}

° ← $\underline{P(a,y)}$, P(y,y), P(y,c) (R3), Resol
{x = a, z = y}

° ← P(a,y), P(y,y), P(y,y), P(y,c) (R3), Resol

.
.
.

° ← P(a,y), P(y,y), …, P(y,y), P(y,c)

Detta är den vänstra grenen i sökrymden. Vi ser att grenen blir oändlig och aldrig kan sluta med ←.

(b) Resultatet i (a) gäller oberoende av i vilken ordning programsatserna (R1) – (R4) står och oberoende av ordningen mellan de atomära formlerna i R3:s antecedent.
BEVIS:
Eftersom ingen av P(a,b) i (R1) och P(c,b) i (R2) kan matchas med P(a,c), behöver vi endast ta hänsyn till ordningen mellan (R3) och (R4). Vi har följande möjligheter:
(I) (R3) (II) (R4)
(R4) (R3)

För R3:s antecedent finns följande möjligheter:
(1) P(x,y), P(y,z) (2) P(y,z), P(x,y)
Totalt blir det således 4 möjligheter att undersöka:
(I.1), (I.2), (II.1), (II.2).

<u>(I.1):</u>
Undersöktes i (a).

(I.2):
(R1) P(a,b) ←
(R2) P(c,b) ←
(R3) P(x,z) ← P(y,z), P(x,y)
(R4) P(x,y) ← P(y,x)
° ← $\underline{P(a,c)}$
{x = a, z = c}

° ← $\underline{P(y,c)}$, P(a,y) (R3), Resol
{x = y, z = c}

° ← $\underline{P(y,c)}$, P(y,y), P(a,y) (R3), Resol
{x = y, z = c}

° ← P(y,c), P(y,y), P(y,y), P(a,y) (R3), Resol

…………

° ← P(y,c), P(y,y), …, P(y,y), P(a,y)

Detta är nu den vänstra grenen i sökträdet. Grenen blir oändlig. Med en djupet-först strategi fortsätter PROLOG deduktionen längre och längre ned i denna gren.

(II.1)
(R1) P(a,b) ←
(R2) P(c,b) ←
(R3) P(x,z) ← P(x,y), P(y,z)
(R4) P(x,y) ← P(y,x)

° ← $\underline{P(a,c)}$
{x = a, y = c}

° ← $\underline{P(c,a)}$ (R4), Resol
{x = c, y = a}

° ← P(a,c) (R4), Resol

…………..

Den vänstra grenen blir oändlig. Varannan klausul blir ← P(a,c) och varannan blir ← P(c,a).

(II.2)
Blir som (II.1), eftersom (R3) inte berörs.

(c) Deducera ← från (R1) – (R4) och ← P(a,c).
BEVIS:

(1) P(a,b) ←	P (R1)
(2) P(c,b) ←	P (R2)
(3) P(x,z) ← P(x,y), P(y,z)	P (R3)
(4) P(x,y) ← P(y,x)	P (R4)
(5) ← P(a,c)	P
(6) P(a,c) ← P(a,y), P(y,c)	3, Unif m. (5)
(7) ← P (a,y), P(y,c)	5, 6, Resol
(8) ← P(a,b), P(b,c)	7, Unif m. (1)

(9) ← P(b,c)	1, 8, Resol
(10) P(b,c) ← P(c,b)	4, Unif m. (9)
(11) ← P(c,b)	9, 10, Resol
(12) ←	2, 11, Resol