Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Johan Asplund

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS M
2015-12-11

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 3 extra problem (max 4 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(e^{2x} - e^{-2x})}{e^{x^2} - e^{-x^2}}$.
2. Motivera varför funktionen $f(x) = (x^2 - 1)^2$ måste anta ett minsta och ett största värde på det **slutna** intervallet $-2 \le x \le 2$ samt bestäm dessa värden.
3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$ genom att t ex utnyttja substitutionen $\ln x = u$.
4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2} = x - \frac{1}{x^2}.$$
Bestäm särskilt asymptoterna samt lokala extrempunkterna.
5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$.
6. Lös differentialekvationen $y'' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
7. Lös differentialekvationen $y' + \dfrac{1}{x^2} y = \dfrac{1}{x^2}, x > 0$, $y(1) = 1$.
8. Ange de x för vilka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x.
9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}\, 2^n}$ har konvergensradien lika med 2. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.
10. Funktionen $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{\ln x}$ har ett minsta värde på det **öppna** intervallet $1 < x < \infty$. Bestäm detta värde och motivera noggrant varför det angivna värdet är det minsta.

V.G.V!

PROBLEM

1. Genom punkten $(2,0)$ går två skilda linjer som tangerar kurvan $y = x(x-2)^2$. Bestäm x-koordinaten för respektive tangeringspunkt. Skissera kurvan med eventuella inflexionspunkter samt rita in tangenterna genom $(2,0)$.

2. Bevisa att om
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$
så är $f'(0) = f''(0) = 0$. Skissera också kurvan och ange särskilt dess asymptoter och inflexionspunkter.

DIVERSE FORMLER OCH SATSER

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots \quad (-1 < r < 1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$

EXTRA PROBLEM (Johan Asplund)

1. Låt $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara en deriverbar funktion som uppfyller $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$ för alla $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Visa att f är konstant.

2. En oändlig produkt $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerar per definition om och endast om $\lim_{N \to \infty} \prod_{n=0}^{N} a_n$ existerar ändligt. Visa i fallet $a_n > 0$ att $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ konvergerar om och endast om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerar.

   Ledning: Utnyttja att då $p_n > 0$ gäller att $\prod_{n=0}^{\infty} p_n$ konvergerar om och endast om $\sum_{n=0}^{\infty} \ln p_n$ konvergerar. Detta kriterium är en direkt konsekvens av bland annat att funktionen $\ln x\,, x > 0$ är kontinuerlig och behöver ej visas här.

V.G.V!

3. Den logaritmiska integral som betecknas $\mathrm{L}i(x)$ definieras som

$$\mathrm{L}i(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\, dt.$$

a) Visa att

$$\mathrm{L}i(x) \leq \frac{x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{1}{(\ln(t))^2}\, dt.$$

Ledning: Partialintegration.

b) Visa att

$$\int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln(t))^2}\, dt \leq \frac{1}{(\ln(2))^2} \frac{x}{(\ln(x))^2}.$$

Ledning: $\dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ är avtagande på intervallet $[2, \sqrt{x}]$ så $\dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ antar sitt maximala värde i $t = 2$. Notera även att $\sqrt{x} \leq \dfrac{x}{(\ln(x))^2}$.

c) Visa att

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln(t))^2}\, dt \leq \frac{4x}{(\ln(x))^2}$$

och dra slutsatsen att

$$\left|\mathrm{L}i(x) - \frac{x}{\ln(x)}\right| \leq C \left|\frac{x}{(\ln(x))^2}\right|$$

där C är en konstant.

Ledning: $\dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ är även avtagande på intervallet $[\sqrt{x}, x]$ så $\dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ antar sitt maximala värde i $t = \sqrt{x}$.

I denna uppgift har vi visat att $\mathrm{L}i(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{x}{(\ln(x))^2}\right)$. Detta medför ett starkare resultat än primtalssatsen nämligen att funktionen $\pi(x) = \{\text{antal primtal} \leq x\}$ växer asymptotiskt som funktionen $\mathrm{L}i(x)$.