

# **Fourieranalys**

**Lars-Åke Lindahl**

2013

Fourieranalys

© 2013 Lars-Åke Lindahl, Matematiska institutionen, Uppsala universitet

# Innehåll

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Förord</b>                                     | vii       |
| <b>1 Inledning</b>                                | <b>1</b>  |
| <b>2 Rekvisita</b>                                | <b>13</b> |
| 2.1 Komplexvärda funktioner                       | 13        |
| 2.2 Följder och serier                            | 19        |
| 2.3 Normerade vektorrum                           | 24        |
| 2.4 Rummet $L^1$                                  | 26        |
| 2.5 Inreprodukttrum                               | 30        |
| 2.6 Rummet $L^2$                                  | 37        |
| 2.7 Diracmåttet                                   | 39        |
| <b>3 Fourierserier</b>                            | <b>45</b> |
| 3.1 Periodiska funktioner                         | 45        |
| 3.2 Trigonometriska polynom                       | 49        |
| 3.3 Fourierserien                                 | 53        |
| 3.4 Sinus- och cosinusserier                      | 61        |
| 3.5 Räkneregler                                   | 64        |
| 3.6 Faltning                                      | 67        |
| 3.7 Fourierseriens konvergens                     | 69        |
| 3.8 Gibbs fenomen                                 | 73        |
| 3.9 Rummet $L^2(\mathbf{T})$ och Parsevals formel | 75        |
| 3.10 Annan period än $2\pi$                       | 79        |
| <b>4 Fourierseriens konvergens</b>                | <b>83</b> |
| 4.1 Omkastning av gränsprocesser                  | 83        |
| 4.2 Kontinuitetsprincipen                         | 89        |
| 4.3 Abelsummation                                 | 92        |
| 4.4 Poissonkärnan                                 | 94        |
| 4.5 Fourierseriens abelsumma                      | 97        |
| 4.6 Riemann–Lebesgues lemma                       | 101       |
| 4.7 Parsevals formel                              | 102       |
| 4.8 Punktvis konvergens                           | 104       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.9      | Weierstrass approximationssats . . . . .                          | 110        |
| <b>5</b> | <b>Tillämpningar på fourierserien</b>                             | <b>113</b> |
| 5.1      | Toner . . . . .   | 113        |
| 5.2      | Svängande strängen . . . . .                                      | 115        |
| 5.3      | Värmeledning i en stav . . . . .                                  | 119        |
| 5.4      | Dirichlets problem för en skiva . . . . .                         | 124        |
| <b>6</b> | <b>Fouriertransformen</b>   | <b>127</b> |
| 6.1      | Introduktion . . . . .  | 127        |
| 6.2      | Fouriertransformen . . . . .                                      | 129        |
| 6.3      | Räkneregler . . . . .   | 131        |
| 6.4      | Fouriertransformering och derivering . . . . .                    | 133        |
| 6.5      | Faltning . . . . .  | 136        |
| 6.6      | Inversionsformler . . . . .                                       | 138        |
| 6.7      | Plancherels formel . . . . .                                      | 141        |
| 6.8      | Poissons summationsformel . . . . .                               | 144        |
| <b>7</b> | <b>Mer om fouriertransformen</b>                                  | <b>147</b> |
| 7.1      | Värmeledningsskärnan . . . . .                                    | 147        |
| 7.2      | Inversionssatsen . . . . .  | 148        |
| 7.3      | Dirichletskärnan och punktvis konvergens . . . . .                | 151        |
| 7.4      | $L^2$ -teori . . . . .  | 153        |
| 7.5      | Fourieranalys i högre dimensioner . . . . .                       | 159        |
| 7.6      | Fouriertransformen för mått . . . . .                             | 161        |
| <b>8</b> | <b>Tillämpningar på fouriertransformen</b>                        | <b>163</b> |
| 8.1      | Värmeledningsekvationen på $\mathbf{R}$ . . . . .                 | 163        |
| 8.2      | Samplingssatsen . . . . .   | 165        |
| 8.3      | Linjära tidsinvarianta system . . . . .                           | 170        |
| 8.4      | Heisenbergs osäkerhetsprincip . . . . .                           | 175        |
| 8.5      | Centrala gränsvärdessatsen . . . . .                              | 177        |
| <b>9</b> | <b>Laplacetransformen</b>   | <b>187</b> |
| 9.1      | Laplacetransformens definition . . . . .                          | 187        |
| 9.2      | Räkneregler . . . . .   | 194        |
| 9.3      | Deriverbarhet och entydighet . . . . .                            | 195        |
| 9.4      | Derivatans transform och linjära differentialekvationer . . . . . | 201        |
| 9.5      | Begynnelsevärdes- och slutvärdesregeln . . . . .                  | 204        |
| 9.6      | Kausala LTI-system . . . . .                                      | 206        |
| 9.7      | Laplacetransformen för mått . . . . .                             | 210        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>10 Z-transformen</b>   | <b>213</b> |
| 10.1 Definition och egenskaper . . . . .                              | 213        |
| 10.2 Translation och differensekvationer . . . . .                    | 220        |
| 10.3 Faltning . . . . .   | 222        |
| 10.4 Diskreta kausala LTI-system . . . . .                            | 224        |
| <b>11 Diskreta fouriertransformen</b>                                 | <b>229</b> |
| 11.1 Cykliska gruppen $\mathbf{Z}_N$ . . . . .                        | 229        |
| 11.2 Karaktärerna till gruppen $\mathbf{Z}_N$ . . . . .               | 232        |
| 11.3 Den diskreta fouriertransformen . . . . .                        | 235        |
| 11.4 Faltning och translationsinvarianta operatorer . . . . .         | 240        |
| 11.5 Sambandet mellan $\mathbf{Z}_N$ och $\mathbf{Z}_{N/2}$ . . . . . | 245        |
| 11.6 Snabba fouriertransformen . . . . .                              | 248        |
| <b>12 Utblickar mot abstrakt harmonisk analys</b>                     | <b>253</b> |
| 12.1 Lokalt kompakta abelska grupper . . . . .                        | 253        |
| 12.2 Fouriertransformen . . . . .                                     | 257        |
| 12.3 De klassiska grupperna . . . . .                                 | 260        |
| 12.4 $L^2$ -teorin . . . . .  | 262        |
| <b>Formler</b> . . . . .  | 263        |
| <b>Svar till övningsuppgifter</b> . . . . .                           | 271        |
| <b>Litteratur</b> . . . . .   | 279        |
| <b>Sakregister</b> . . . . .  | 281        |



# Förord

Den här boken ger en introduktion till fourieranalysen och visar på några av dess många tillämpningar. Den vänder sig i första hand till studenter som inte nöjer sig med en katalog av resultat utan också är beredda att lägga ner både tid och möda för att förstå sammanhang och se bevis för gjorda påståenden. Men för att även den som inte anser sig ha behov av att se allt bevisat ska kunna använda boken med god behållning, har de mer avancerade delarna av teorin för fourierserier och fourierintegraler, såsom bevisen för olika konvergensresultat, förlagts till två separata kapitel som man kan hoppa över utan att förlora sammanhangen. Detta medför visserligen en del upprepning för den som läser allt, men repetition är aldrig skadligt.

Den som främst är intresserad av fourieranalys och transformteori för alla tillämpningars skull får därför en god grund genom att enbart läsa kapitlen 1–3, 5–6, 8–10.

Avslutningskapitlet om abstrakt harmonisk analys har tillkommit för att väcka intresse för fortsatta teoretiska studier inom området.

Tillräckliga förkunskaper för att tillgodogöra sig innehållet har den som läst en kurs i flerdimensionell analys och en kurs i linjär algebra. Naturligtvis är det en fördel att också ha studerat komplex analys, men det förutsätter jag inte.

Jag har tagit mig friheten att använda Lebesgueintegralen och Lebesgues sats om dominerad konvergens eftersom det gör det lättare att formulera många resultat och enklare att bevisa dem, trots att detta integralbegrepp inte behandlas förrän på masternivå. Att den genomsnittlige läsaren därigenom inte kan förväntas förstå alla detaljer bekymrar mig inte – den som går vidare mot högre studier i matematik kommer att göra detta så småningom, och den som inte fortsätter med matematik på högre nivå kan helt obekymrat leva vidare i den förvissningen att Lebesgueintegralen ger samma resultat som Riemannintegralen för alla funktioner som man (som icke-matematiker) träffar på i praktiken.

Uppsala, augusti 2013  
*Lars-Åke Lindahl*





# Kapitel 1

## Inledning

Fourieranalys är teorin för hur funktioner kan representeras eller approximeras som summor eller integraler av enkla trigonometriska funktioner. Det är en teori med många tillämpningar inom såväl ren matematik som naturvetenskap och teknik. Som exempel på användningsområden kan nämnas teorin för partiella differentialekvationer, talteori, sannolikhetssteori, kryptologi, optik, kvantmekanik, signal- och bildbehandling, medicinsk diagnostik, kristallografi och akustisk fonetik. Fourieranalysen har fått sitt namn efter den franske matematikern och fysikern Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), som använde sig av trigonometriska serier för att studera värmeledning.

Vad fourieranalys handlar om och hur fourieranalys används beskrivs kanske bäst av några exempel från olika tillämpningsområden. Vi inleder därför vårt studium av fourieranalysen med några exempel från vitt skilda områden. Eftersom det handlar om en introduktion går vi i det här kapitlet inte in på sådana subtiliteter som vilka villkor som krävs för att olika serier eller generaliserade integraler ska vara konvergenta — den diskussionen får anstå till senare kapitel.

### Musik

Fourieranalys kallas ibland också *harmonisk analys*. Den termen har förstås sitt ursprung inom musiken, så vad kan vara mer naturligt än att starta där.

En ton är ett hörbart ljud som uppstår då periodiska ljudvågor träffar örat. För hörbarhet krävs att tonhöjden, dvs. ljudvågens frekvens, ligger inom området ca 15–20 000 hertz och att tonstyrkan, dvs. ljudvågens amplitud, överstiger ett visst tröskelvärde.

De allra enklaste tonerna är rena sinussvängningningar och kan med noll som medelnivå modelleras som

$$A \sin(2\pi\nu t + \phi),$$

där  $A$  är amplituden,  $\nu$  är frekvensen,  $t$  är tidsvariabeln och  $\phi$  anger fasförskjutningen. Frekvensen har enheten Hz när tiden mäts i sekunder.

Sedan urminnes tider har musiker rent praktiskt känt till att toner som fås genom att addera toner med frekvenser som är multipler av grundtonens frekvens har samma tonhöjd. Matematiskt kan en sådan ton modelleras som en summa av typen

$$(1.1) \quad f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(2\pi\nu nt + \phi_n)$$

med  $N \approx 20\,000/\nu$  om vi håller oss till för människor hörbara toner, och som vi ska se i kapitel 5 alstrar sträng- och blåsinstrument toner som är summor av detta slag. Sinusoiderna  $A_n \sin(2\pi\nu nt + \phi_n)$  kallas *deltoner* till tonen  $f$ . Den första deltonen kallas *grundtonen* och övriga deltoner kallas *övertoner*. Den  $n$ :te övertonen är med andra ord den  $n + 1$ :ta deltonen.

I örats snäcka finns tusentals hörselceller, en för varje hörbar frekvens. Varje grundton och överton retar en särskild hörselcell i snäckan vilket ger upphov till impulser till hjärnan, vars styrka beror av ljudtrycket, dvs. amplituden  $A_n$ . Örat och hjärnan uppfattar därför amplituderna och frekvenserna hos deltonerna men däremot inte fasförskjutningarna  $\phi_n$ . Även om det bara är få människor med s. k. absolut gehör som har förmågan att kunna uppfatta och ange den exakta tonhöjden hos en ton, så tycks de flesta ha förmågan att uppfatta intervallen mellan olika toner.

Hur en ton låter beror således inte enbart av dess tonhöjd och tonstyrka utan också i allra högsta grad av dess *spektrum*, dvs. mixen av deltoner, som ger tonen dess specifika klangfärg. Exempelvis låter ju toner med samma tonhöjd alstrade av en flöjt, en trumpet, ett piano och en violin helt olika.

Gregory Sandells SHARC Timbre Database, som finns fritt tillgänglig på [www.timbre.ws/sharc](http://www.timbre.ws/sharc), innehåller analyser av över 1300 toner, och hela registren för i stort sett samtliga orkesterinstrument (utom slagverk) är representerade. Figur 1.1 visar vågform och spektrum för en ton med frekvensen 116.5 Hz (tonen A<sup>#</sup> i stora oktaven) spelad på en basklarinett. Spektraldiagrammet ger amplituderna  $A_n$  för motsvarande frekvenser  $116.5n$ , men observera att skalan på amplitudaxeln är logaritmisk eftersom amplituderna är angivna i decibel.

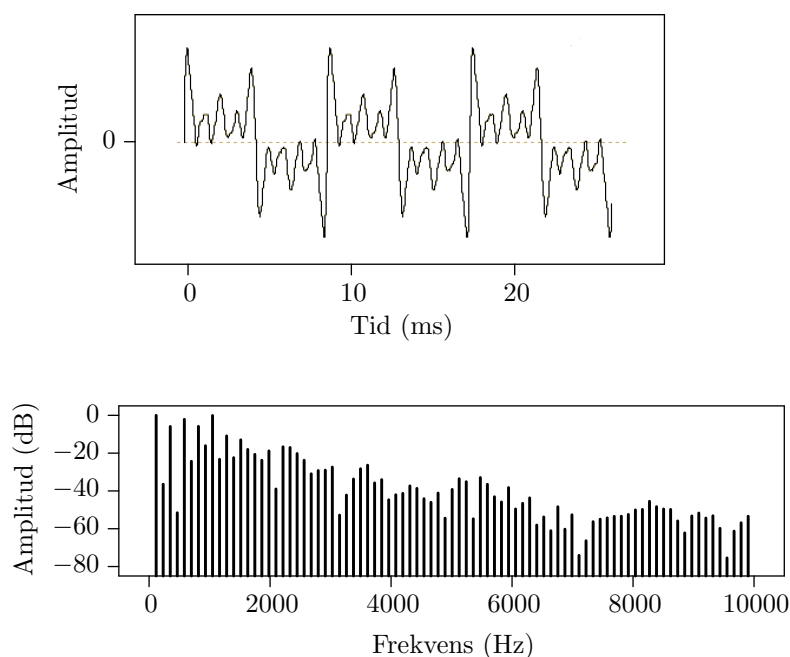
Genom att utnyttja det trigonometriska sambandet

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

kan vi skriva om formeln (1.1) på formen

$$f(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi\nu nt) + b_n \sin(2\pi\nu nt)).$$

Låt oss nu generalisera detta genom att dels addera en konstant så att svängningarna nu inte längre behöver ske kring medelnivån noll, dels även



**Figur 1.1.** Vågform och spektrum för tonen A<sup>#</sup> på en basklarinett.

addera ”ohörbara toner” med frekvenser som är multipler av  $\nu$ . Om vi väljer vår tidsenhet så att grundfrekvensen  $\nu$  blir lika med  $1/2\pi$  samt döper den konstanta termen till  $a_0/2$ , så får vi en summa av typen

$$(1.2) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Förutsatt att summan är konvergent är tydligen  $f$  en periodisk funktion med perioden  $2\pi$ . Serien i högerledet kallas i förekommande fall funktionens *fourierserie*, och koefficienterna  $a_n$  och  $b_n$  kallas *fourierkoefficienter*.

Vi kan nu vända på steken genom att starta med en godtycklig  $2\pi$ -periodisk funktion  $f$  och fråga oss vilka villkor som behövs för att funktionen ska kunna fourierserieutvecklas, dvs. skrivas på formen (1.2), och hur man i så fall bestämmer fourierkoefficienterna. En rent formell räkning som utnyttjar att

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nt \sin mt \, dt &= 0 \quad \text{för alla } n \text{ och } m, \\ \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt \, dt &= \begin{cases} 0 & \text{för } n \neq m, \\ \pi & \text{för } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

ger att

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \, dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right) \sin mt \, dt \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} \sin mt \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos nt \sin mt + b_n \sin nt \sin mt) \, dt \\ &= \pi b_m,\end{aligned}$$

eftersom alla integralerna innanför summan utom en är lika med noll. En motsvarande räkning ger oss  $a_m$ , och därmed leds vi fram till följande formler för fourierkoefficienterna:

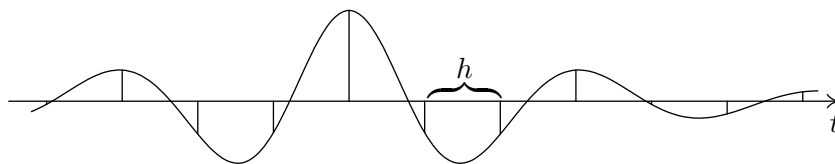
$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt.\end{aligned}$$

Formlerna ovan resulterar i väldefinierade koefficienter  $a_n$  och  $b_n$  för alla integrerbara funktioner  $f$  och då speciellt för alla kontinuerliga funktioner. Men därifrån är steget långt till slutsatsen att serien i högerledet av ekvation (1.2) är konvergent och att dess summa är lika med  $f(t)$ , och det krävs ytterligare villkor på funktionen  $f$  för att slutsatsen ska vara sann. Vi kommer att studera den frågan i kapitel 3 och 4.

## Signalbehandling

En signal är något som förmedlar information från en sändare till en eller flera mottagare, men vi kommer att inskränka oss till att behandla signaler som kan modelleras matematiskt med hjälp av funktioner av en tidsvariabel,  $t$ . Om signalfunktionen är definierad på ett helt intervall, och då speciellt hela reella axeln, talar man om en signal i *kontinuerlig tid* eller en *analog* signal. Om funktionen som representerar signalen bara är definierad i en följd av diskreta punkter som vi alltid kan numrera så att funktionens definitionsmängd blir en delmängd av  $\mathbf{Z}$ , mängden av alla heltal, kallas signalen *diskret*.

En analog signal  $f$  med  $\mathbf{R}$  som definitionsmängd ger upphov till en diskret signal genom *sampling*, dvs. genom att den bara betraktas i en följd av diskreta tidpunkter, exempelvis tidpunkterna  $\dots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \dots$  för något lämpligt valt tal  $h$ . Den samplade signalen representeras således av följden  $(f(nh))_{n \in \mathbf{Z}}$ , som förstås matematiskt sett är lika med restriktionen av funktionen  $f$  till mängden  $h\mathbf{Z} = \{nh \mid n \in \mathbf{Z}\}$ .



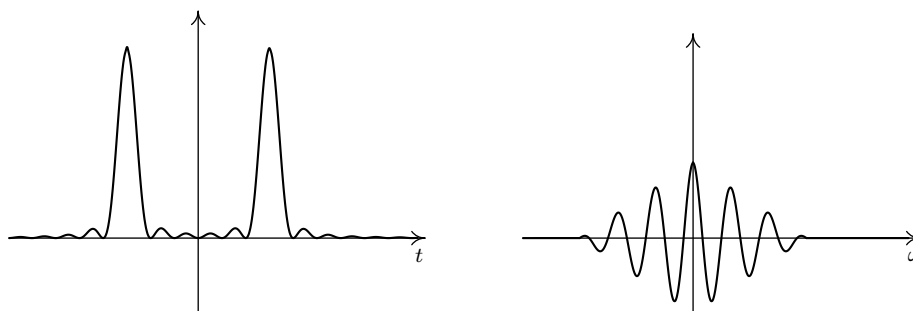
**Figur 1.2.** Vid sampling betraktas en analog signal i en följd av diskreta tidpunkter.

En analog, kontinuerlig signal  $f$  kan, förutsatt att den avtar tillräckligt snabbt då tiden går mot oändligheten (vilket naturligtvis inte är något problem i praktiken), skrivas på formen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

där den i integranden förekommande funktionen  $\hat{f}$  kallas *fouriertransformen* till funktionen  $f$ , och  $e^{i\omega t}$  är en förkortning för  $\cos \omega t + i \sin \omega t$ . Signalen  $e^{i\omega t}$  är periodisk med perioden  $2\pi/\omega$  s och frekvensen  $\omega/2\pi$  Hz, om tiden  $t$  mäts i sekunder s. Variabeln  $\omega$  ska med andra ord tolkas som en frekvensvariabel, och fouriertransformen  $\hat{f}$  säges därför vara definierad i *frekvensrummet*.

Om  $\hat{f}(\omega) = 0$  för alla  $\omega$  utanför intervallet  $[a, b]$  kallas signalen *bandbegränsad*, och intervallets längd  $b - a$  är signalens *bandbredd*.<sup>1</sup>



**Figur 1.3.** Till vänster en bandbegränsad signal  $f$  och till höger dess fouriertransform  $\hat{f}$ .

Digital teknik för inspelning, lagring och avspelning av signaler bygger på att analoga signaler med bandbredd  $2L$  är fullständigt bestämda av sina sampelvärden i punkterna  $\frac{\pi}{L} \cdot n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , och att det finns effektiva algoritmer

<sup>1</sup>Bandbredden anges vanligen i Hz och är då följaktligen lika med  $(b - a)/2\pi$  Hz.

för att rekonstruera den analoga signalen från sampelvärdena. Mer precist gäller för signaler  $f$  som är bandbegränsade till intervallet  $[-L, L]$  att

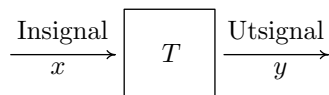
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{\pi}{L}n\right) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi},$$

en formel som vi kommer att härleda i kapitel 8.

Det mänskliga örat kan inte uppfatta ljud med frekvenser som överstiger 20 kHz. Signalen  $e^{i\omega t}$  är därför ohörbar om  $|\omega| > 40\,000\pi$ . Allt hörbart ljud har därmed en bandbredd på högst  $80\,000\pi$  (dvs. 40 kHz). För perfekt ljudåtergivning räcker det därför på grund av ovanstående rekonstruktionsformel att sampla audiosignaler i diskreta tidpunkter som har ett tidsavstånd av  $1/40\,000$  s, dvs. med samplingsfrekvensen 40 kHz. Vanliga CD-spelare använder samplingsfrekvensen 44.1 kHz.

## Svarta lådor

Många tekniska apparater fungerar ur ett användarperspektiv som *svarta lådor* – de tar emot insignaler som processas på något för användaren okänt sätt och levererar utsignaler. Ur matematisk synvinkel är en svart låda därför inte något annat än en funktion  $T$  som till varje tillåten insignal  $x$  associerar en utsignal  $y = T(x)$ . Lådan kallas *diskret* om insignalerna och utsignalerna är diskreta och således kan modelleras med hjälp av följder.



**Figur 1.4.** Svart låda

Många svarta lådor kan med god approximation anses vara *linjära*, dvs. om  $x$  och  $x'$  är två insignaler samt  $\alpha$  och  $\alpha'$  är två (inte alltför stora) tal, så resulterar den sammansatta insignalen  $\alpha x + \alpha' x'$  i utsignalen  $\alpha T(x) + \alpha' T(x')$ . Ett annat rimligt antagande är att de är *tidsinvarianta*, dvs. fungerar exakt likadant vid alla tillfällen. Svarta lådor som opererar i realtid är vidare *kausala* i den meningen att utsignalens värde vid varje tidpunkt bara kan bero av insignalens värden fram till och med denna tidpunkt.

Diskreta kausala tidsinvarianta linjära svarta lådor har en mycket enkel matematisk beskrivning, och de är fullständigt bestämda av *impulssvaret*, dvs. utsignalen till insignalen  $\delta = (1, 0, 0, 0, \dots)$  som kallas en *impuls*.

Så låt  $T$  vara en diskret kausal tidsinvariant linjär svart låda. Vi ska beräkna utsignalen  $y = T(x)$  för en godtycklig insignal  $x = (x_n)_0^\infty$ . Eftersom lådan är kausal beror utsignalens värde  $y_n$  vid tidpunkten  $n$  bara

av insignalens utseende fram till och med tidpunkten  $n$ . Detta innebär att utsignalen  $y' = T(x')$  till insignalen

$$x' = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$$

har samma värde vid tidpunkten  $n$  som utsignalen  $y$ , dvs.  $y_n = y'_n$ .

Låt nu  $a = (a_n)_{n=0}^\infty$  beteckna impulssvaret  $T(\delta)$  så att

$$T(1, 0, 0, 0, 0, \dots) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Om lådan får sin impuls ett antal tidsenheter senare kommer impulssvaret att förskjutas lika många tidsenheter på grund av tidsinvariansen. Följaktligen är

$$\begin{aligned} T(0, 1, 0, 0, 0, \dots) &= (0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \\ T(0, 0, 1, 0, 0, \dots) &= (0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots), \\ T(0, 0, 0, 1, 0, \dots) &= (0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, \dots), \quad \text{osv.} \end{aligned}$$

Eftersom

$$x' = x_0(1, 0, 0, 0, \dots) + x_1(0, 1, 0, 0, \dots) + \dots + x_n(0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

följer det av lineariteten att

$$y' = T(x') = x_0T(1, 0, 0, 0, \dots) + x_1T(0, 1, 0, 0, \dots) + x_2T(0, 0, 1, 0, \dots) + \dots + x_nT(0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

och genom att betrakta koordinaten med index  $n$  ser vi att

$$y_n = y'_n = x_0a_n + x_1a_{n-1} + \dots + x_{n-1}a_1 + x_na_0 = \sum_{k=0}^n a_{n-k}x_k.$$

Detta visar att utsignalen  $y = T(x)$  vid alla tidpunkter  $n$  är helt bestämd av insignalen  $x$  och impulssvaret  $a = T(\delta)$ .

Sättet att kombinera två följder  $a = (a_n)_{n=0}^\infty$  och  $x = (x_n)_{n=0}^\infty$  till en ny följd  $y = (y_n)_{n=0}^\infty$  genom att sätta

$$y_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}x_k$$

för alla  $n$  kallas en *faltning*, och man använder beteckningssättet  $a * x$  för den erhållna följden  $y$ .

Faltningar av ovanstående typ uppkommer också när man multiplicerar två potensserier eftersom

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \end{aligned}$$

med  $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k$ . Med hjälp av faltningsbegreppet kan vi således uttrycka sambandet mellan koefficientföljderna  $a = (a_n)_0^\infty$ ,  $b = (b_n)_0^\infty$  och  $c = (c_n)_0^\infty$  i de tre potensserierna som  $c = a * b$ .

I kapitel 10 kommer vi att studera den s. k. *z-transformen*. Det är en transform som är definierad för följder, och med z-transformen till följden  $a = (a_n)_0^\infty$  menas den oändliga serien

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

som om följden inte är alltför snabbt växande är konvergent för alla komplexa tal  $z$  utanför en tillräckligt stor cirkel i komplexa talplanet.

Genom att byta  $x$  mot  $1/z$  i de tre potensserierna ovan ser vi att faltningen  $c = a * b$  genom z-transformering övergår i en produkt av typen  $C(z) = A(z)B(z)$ .

Låt oss nu återvända till de diskreta kausala tidsinvarianta linjära svarta lådorna. Z-transformen  $A(z)$  till impulssvaret  $a = T(\delta)$  kallas lådans *överföringsfunktion*, och i termer av den blir sambandet mellan in- och ut-signalernas z-transformer mycket enkelt:

*Mellan in- och utsignal i en diskret kausal tidsinvariant linjär svart låda råder sambandet*

$$Y(z) = A(z)X(z),$$

där  $X(z)$  och  $Y(z)$  är z-transformerna till in- resp. utsignalerna och  $A(z)$  är överföringsfunktionen.

## Diffusion

Många matematiska modeller inom naturvetenskapen är konsekvenser av enkla bevarandepprinciper. Exempel på sådana klassiska fysikaliska konserveringslagar är att rörelsemängden i ett slutet system är konstant, att massan bevaras och att energin bevaras (i klassisk icke-relativistisk fysik). Vi ska använda principen att massa inte uppstår ur tomma intet för att härleda en ekvation för koncentrationen i en diffunderande lösning samt skissera hur man i det endimensionella fallet kan lösa den erhålla partiella differentialekvationen med hjälp av fouriermetoder.

Låt  $c(x, t)$  beteckna koncentrationen i punkten  $x = (x_1, x_2, x_3)$  och vid tiden  $t$  av ett kemiskt ämne som lösts i en vätska, och låt  $B$  beteckna ett fixt sfäriskt område i lösningen. Vi ska studera hur mängden kemiskt ämne inom sfären  $B$  förändras genom diffusionen under ett tidsintervall  $[\alpha, \beta]$ . Vid tidpunkten  $t_0$  är mängden substans i sfären lika med

$$\iiint_B c(x, t_0) dx,$$



där vi skrivit  $dx$  för  $dx_1 dx_2 dx_3$ , så massförändringen i  $B$  under det aktuella tidsintervallet ges av differensen

$$D = \iiint_B (c(x, \beta) - c(x, \alpha)) dx = \iiint_B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dt dx.$$

Massförändringen beror på att molekyler av ämnet diffunderat ut och in genom sfärens begränsningsyta  $\partial B$ , och diffusion fungerar på så sätt att molekyler vandrar från områden med högre koncentration till områden med lägre koncentration med en nettohastighet  $J$  som är proportionell mot koncentrationsgradienten.

Med matematiskt språk gäller alltså följande samband för nettohastigheten  $J(x, t)$  i punkten  $x$  vid tiden  $t$ :

$$J(x, t) = -\kappa \nabla c(x, t),$$

en ekvation som brukar kallas *Ficks första lag* och där den positiva proportionalitetskonstanten  $\kappa$  kallas diffusionskonstanten.<sup>2</sup> Vi kan därför uttrycka massinströmningshastigheten genom begränsningsytan  $\partial B$  vid tidpunkten  $t$  som en ytingtegral, nämligen som integralen

$$- \iint_{\partial B} -\kappa \nabla c(x, t) \mathbf{n} dS,$$

där minustecknet framför integralen förklaras av att enhetsnormalvektorn  $\mathbf{n}$  till sfären valts utåtriktad. Genom att utnyttja Gauss divergenssats och det faktum att

$$\operatorname{div}(\nabla c) = \Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2}$$

kan vi nu skriva inströmningshastigheten genom  $\partial B$  som följande trippelintegral över  $B$ :

$$\iiint_B \kappa \Delta c(x, t) dx.$$

Mängden kemiskt ämne som strömmar in genom begränsningsytan  $\partial B$  under tidsintervallet  $[\alpha, \beta]$  är således lika med

$$\int_{\alpha}^{\beta} \iiint_B \kappa \Delta c(x, t) dx dt,$$

och eftersom ämnet inte förstörs eller nybildas i  $B$ , svarar inflödet exakt mot den mängdförändring  $D$  som vi beräknade ovan. Genom att jämföra de båda uttrycken och byta integrationsordning leds vi alltså till likheten

$$\iiint_B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dt dx = \iiint_B \int_{\alpha}^{\beta} \kappa \Delta c(x, t) dt dx.$$

<sup>2</sup>Diffusionskonstantens värde i enheten  $10^{-7} \text{cm}^2/\text{s}$  är som följer för några viktiga biokemiska ämnen utspädda i vattenlösning. Glukos: 660, Insulin: 210, Hemoglobin: 6.9.

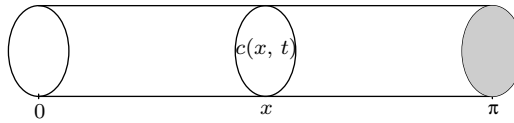
Låt nu slutligen sfären  $B$  krympa ihop till en punkt  $x$  och intervallet  $[\alpha, \beta]$  till en punkt  $t$ . Denna gränsövergång leder till slutsatsen att koncentrationen  $c(x, t)$  satisfierar den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa \Delta c,$$

som kallas *Ficks andra lag*, i det inre av det område  $\Omega$  som innehåller lösningen med det kemiska ämnet.

För att kunna bestämma koncentrationsfunktionen  $c(x, t)$  räcker det inte att veta att den satisfierar ovanstående partiella differentialekvation, utan vi behöver för att erhålla en entydig lösning specificera både randvärden, dvs. värden som lösningen ska ha för alla tidpunkter  $t$  då  $x$  ligger på randen av det givna området  $\Omega$ , och begynnelsevärden, dvs. värden som lösningen ska ha för alla  $x$  vid en viss tidpunkt  $t_0$ , t. ex.  $t_0 = 0$ .

Vi får nöja oss med detta allmänna konstaterande, för nu ska vi förenkla det hela genom att anta att den rumsliga variationen är begränsad till en dimension och därmed kan beskrivas av en endimensionell rumsvariabel. Situationen illustreras av figur 1.5, där det lösta ämnet finns i ett långt rör med konstant tvärsnittsarea och där all diffusion sker i längdriktningen.



**Figur 1.5.** Diffusion i ett rör. Lösningens koncentration ges av  $c(x, t)$ .

Låt oss välja vår längdenhet så att rörets längd är  $\pi$ . Det gör att koncentrationen  $c(x, t)$  satisfierar den partiella differentialekvationen

$$(PD) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Som randvillkor väljer vi

$$(RV) \quad c(0, t) = c(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

vilket betyder att koncentrationen hålls konstant lika med noll vid rörets ändpunkter, och som begynnelsevillkor

$$(BV) \quad c(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi$$

där  $f(x)$  är en känd funktion som ger oss koncentrationen i hela röret vid tidpunkten  $t = 0$ .

Om vi för ett ögonblick glömmer bort begynnelsevillkoret, så ser vi att det finns en mängd av lösningsfunktioner  $c_n(x, t)$  till den partiella differentialekvationen (PD) som också uppfyller randvillkoret (RV), nämligen funktionerna

$$c_n(x, t) = e^{-\kappa n^2 t} \sin nx,$$

där  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Eftersom differentialekvationen är linjär och randvillkoren också är linjära, är vidare varje linjärkombination av ovanstående funktioner en lösning. Förutsatt att koefficienterna  $b_n$  väljs så att serien

$$c(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa n^2 t} \sin nx$$

konvergerar och får deriveras under summatecknet, blir därför också funktionen  $c(x, t)$  en lösning till den partiella differentialekvationen, och uppenbarligen är  $c(0, t) = c(\pi, t) = 0$  för alla  $t$ .

Hur är det då med begynnelsevillkoret? Jo, eftersom

$$c(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

är begynnelsevillkoret uppfyllt ifall vi kan välja koefficienterna  $b_n$  så att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

för  $0 < x < \pi$ . Därmed har vi reducerat problemet till att utveckla funktionen  $f$  i en fourierserie som bara innehåller sinustermer, och det går förutsatt att funktionen är någorlunda reguljär. Tricket är att först utvidga funktionen  $f$  till en udda,  $2\pi$ -periodisk funktion, vilket kommer att medföra att fourierserien saknar cosinustermer. Detaljerna kommer att ges i kapitel 5.

## Historiska notiser

CD-teknologin utvecklades gemensamt av Sony och Philips under slutet av 1970-talet. Sony var först ut på marknaden med en cd-spelare år 1982.

Den första matematiska beskrivningen av diffusion gavs år 1855 av den tyske fysiologen ADOLF FICK (1829–1901). Diffusionsekvationen (Ficks andra lag) har samma form som Fouriers värmeledningsekvation från 1822 och kan därför angripas med fouriermetoder.



# Kapitel 2

## Rekvisita

Syftet med det här kapitlet är att repetera några fundamentala begrepp och resultat från analysen och den linjära algebran om reella funktioner, följder och vektorrum och att då samtidigt utvidga dem till det komplexa fallet. Vidare introduceras några viktiga funktionsklasser som kommer att spela en stor roll i den fortsatta framställningen.

### 2.1 Komplexvärda funktioner

Allmänt kan en funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ , dvs. en funktion som antar komplexa värden och är definierad på någon delmängd  $I$  av  $\mathbf{R}$ , skrivas på formen

$$f = u + iv,$$

där  $u$  och  $v$  är två reella envariabelsfunktioner. Vi sätter helt enkelt  $u(t)$  lika med realdelen och  $v(t)$  lika med imaginärdelen av  $f(t)$ .

En huvudroll i den här boken kommer att spelas av den komplexa *exponentialfunktionen*, som för imaginära argument definieras av likheten

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Genom att utnyttja välkända egenskaper hos sinus och cosinus får vi likheterna

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t = \overline{e^{it}}, \quad |e^{it}| = 1, \quad e^{i(s+t)} = e^{is} e^{it} \quad \text{och} \quad e^{2n\pi i} = 1.$$

Vi kan rekonstruera sinus och cosinus från exponentialfunktionen på följande vis:

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

## Kontinuitet

Begreppet kontinuitet definieras på följande sätt för komplexvärda funktioner:

**Definition.** En funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *kontinuerlig* i punkten  $t_0 \in I$  om

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - f(t_0)| = 0.$$

En funktion kallas *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd. Mängden av alla kontinuerliga komplexvärda funktioner definierade på  $I$  betecknas  $\mathcal{C}(I)$ .

Observera att kontinuitetsdefinitionen återför problemet att avgöra om en komplexvärd funktion är kontinuerlig på problemet att beräkna gränsvärdet av en reell funktion, samt att definitionen ser exakt likadan ut som för reellvärda funktioner – det är bara tolkningen av beloppet som skiljer det komplexvärda fallet från det reellvärda. Ett alternativt sätt att avgöra om en komplexvärd funktion är kontinuerlig är att betrakta de reellvärda real- och imaginärdelarna. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 2.1.1.** *En komplexvärd funktion  $f = u + iv$  är kontinuerlig i punkten  $t_0$  om och endast om de båda reella funktionerna  $u$  och  $v$  är kontinuerliga i samma punkt.*

*Bevis.* De elementära olikheterna

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad \text{och} \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

tillämpade på det komplexa talet  $z = f(t) - f(t_0)$  ger att

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| &\leq |f(t) - f(t_0)|, & |v(t) - v(t_0)| &\leq |f(t) - f(t_0)| \quad \text{och} \\ |f(t) - f(t_0)| &\leq |u(t) - u(t_0)| + |v(t) - v(t_0)|, \end{aligned}$$

och det följer omedelbart av dessa olikheter att påståendena

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - f(t_0)| = 0$$

och

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - u(t_0)| = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |v(t) - v(t_0)| = 0$$

är ekvivalenta. □

**EXEMPEL 2.1.1.** Den komplexvärda exponentialfunktionen  $e^{it}$  är kontinuerlig eftersom real- och imaginärdelarna  $\cos t$  och  $\sin t$  är kontinuerliga funktioner. □

## Likformig kontinuitet

Kontinuitetsdefinitionen återför begreppet kontinuitet på begreppet gränsvärde. I direkta termer innebär definitionen att en funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  är kontinuerlig om (och endast om) det för varje  $t \in I$  och varje positivt tal  $\epsilon$  finns ett positivt tal  $\delta$  så att  $|f(s) - f(t)| < \epsilon$  för all punkter  $s \in I$  som uppfyller olikheten  $|s - t| < \delta$ .

I allmänhet kommer talet  $\delta$  att bero av såväl  $\epsilon$  som punkten  $t$ ; exempelvis ser vi genom att titta på grafen till den reella funktionen  $f(t) = t^2$  med hela reella axeln som definitionsområde att det intervall kring  $t$  för vilket olikheten  $|s^2 - t^2| < 1$  är uppfylld, blir kortare och kortare ju större talet  $t$  är. Det finns därför i detta fall inget  $\delta > 0$  sådant att implikationen

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < 1$$

gäller för samtliga tal  $t$ .

Om funktionen  $f$  är sådan att det finns ett tal  $\delta$  som duger för samtliga  $t$  i funktionens definitionsområde, kallas funktionen likformigt kontinuerlig. Den formella definitionen lyder så här.

**Definition.** En funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *likformigt kontinuerlig* om det för varje  $\epsilon > 0$  finns ett tal  $\delta > 0$  så att olikheten  $|f(s) - f(t)| < \epsilon$  gäller för alla  $s, t \in I$  som uppfyller olikheten  $|s - t| < \delta$ .

Kontinuitet i en punkt  $t_0$  är en lokal egenskap – huruvida en funktion är kontinuerlig eller ej i punkten beror enbart på funktionens utseende nära punkten ifråga. Likformig kontinuitet är däremot en global egenskap – funktionens beteende i hela definitionsområdet spelar roll. Om definitionsområdet är ett kompakt (dvs. slutet och begränsat) intervall, så kan vi emellertid härleda den globala egenskapen likformig kontinuitet från den lokala egenskapen kontinuitet. Vi har nämligen följande viktiga sats, vars bevis vi utelämnar.

**Sats 2.1.2.** Om funktionen  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  är kontinuerlig och  $I$  är ett kompakt intervall, så är funktionen likformigt kontinuerlig.

Funktionen  $f(t) = t^2$ , som inte är likformigt kontinuerlig när definitionsområdet är hela  $\mathbf{R}$ , blir således likformigt kontinuerlig om vi inskränker definitionsområdet till, säg, intervallet  $[0, 100]$ .

## Translation

Om  $f: D \rightarrow \mathbf{C}$  är en godtycklig funktion och  $\tau$  är ett reellt tal, så får vi en ny funktion  $f_\tau: D_\tau \rightarrow \mathbf{C}$  med mängden

$$D_\tau = \{t \in \mathbf{R} \mid t - \tau \in D\}$$

som definitionsmängd genom att sätta

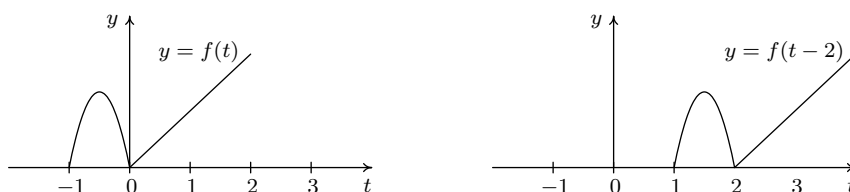
$$f_\tau(t) = f(t - \tau) \quad \text{för alla } t \in D_\tau.$$

Funktionen  $f_\tau$  kallas ett *translat* till  $f$ , och vi får dess graf genom att skjuta  $f$ 's graf  $\tau$  steg åt höger. Vi kommer att sätta

$$T_\tau f = f_\tau,$$

och själva operationen  $T_\tau$  som överför en funktion till dess translat kallas en *translation*.

Om  $T_\tau f = f$  för något nollskilt tal  $\tau$  kallas funktionen  $f$  *periodisk* med *period*  $\tau$ . Detta kräver förstås speciellt att definitionsmängden  $D$  till funktionen  $f$  är periodisk med samma period  $\tau$ , dvs. att  $D_\tau = D$ .



**Figur 2.1.** Exempel på translation,  $f$  och  $T_2 f$ .

## Derivata och integral

Man kan definiera begreppen derivata och integral för komplexvärda funktioner på ett direkt sätt genom att kopiera definitionen i det reella fallet och omtolka betydelsen av beloppet, men det är enklare att gå omvägen via real- och imaginärdelar på ett med sats 2.1.1 analogt sätt.

**Definition.** En komplexvärd funktion  $f = u + iv$  kallas

- *deriverbar* i punkten  $t$  med *derivata*  $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$ , om  $u$  och  $v$  båda är deriverbara i punkten  $t$ ,
- *integrerbar* över ett intervall  $[a, b]$  med *integral*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

om de båda integralerna i högerledet existerar.

Om  $I = [a, b]$ , så skriver vi i fortsättningen ofta  $\int_I f(t) dt$  istället för  $\int_a^b f(t) dt$ . På motsvarande sätt betecknar  $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt$  den generaliserade integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ .



Läsaren bör som enkel övning verifiera att följande linearitetsregler gäller för komplexvärda funktioner  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f$  och komplexa tal  $c$ :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) dt &= \int_a^b f_1(t) dt + \int_a^b f_2(t) dt, \\ \int_a^b cf(t) dt &= c \int_a^b f(t) dt.\end{aligned}$$

Man verifierar vidare lätt att om  $f$  är en kontinuerlig komplexvärd funktion med primitiv funktion  $F$  (dvs.  $F'(t) = f(t)$  för alla  $t$  i intervallet  $[a, b]$ ), så är

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

EXEMPEL 2.1.2. Derivatans till den komplexa exponentialfunktionen

$$e^{iat} = \cos at + i \sin at$$

fås med hjälp av definitionen till

$$\frac{d}{dt}(e^{iat}) = -a \sin at + ia \cos at = ia(\cos at + i \sin at) = iae^{iat}.$$

Den komplexa exponentialfunktionen uppför sig således precis som den reella med avseende på derivering.  $\square$

EXEMPEL 2.1.3. För  $\alpha \neq 0$  är  $(i\alpha)^{-1}e^{i\alpha t}$  en primitiv funktion till exponentialfunktionen  $e^{i\alpha t}$ . Det följer att

$$\int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}}{i\alpha}$$

om  $\alpha \neq 0$ .

Genom att speciellt låta  $\alpha = n$  vara ett heltal och välja  $b = a + 2\pi$ , samt utnyttja att  $e^{in(a+2\pi)} = e^{ina} \cdot e^{i2\pi n} = e^{ina}$ , erhåller vi följande mycket viktiga formler:

$$\int_a^{a+2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{om } n = 0 \\ 0, & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$$

Integralen av  $e^{int}$  över ett godtyckligt intervall av längd  $2\pi$  är med andra ord lika med noll för alla nollskilda heltal  $n$ .  $\square$

## Integrationsteknik

Vi kommer att behöva beräkna många integraler i den här boken, så det kan vara en god idé för läsaren att repetera hur man beräknar integraler med hjälp av primitiva funktioner, substitutioner och partiell integration. Speciellt den sista tekniken kommer till flitig användning, så här följer formeln.

**Sats 2.1.3.** Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  med primitiv funktion  $F$  och att funktionen  $g$  är kontinuerligt deriverbar på samma intervall. Då är

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \left[ F(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t) dt.$$

EXEMPEL 2.1.4. Vi beräknar integralen  $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{it} dt$  genom upprepad partiell integration på följande vis:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{it} dt &= \left[ t^2 \frac{e^{it}}{i} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{e^{it}}{i} dt \\ &= -i(\pi^2 e^{i\pi} - \pi^2 e^{-i\pi}) + 2i \int_{-\pi}^{\pi} t e^{it} dt \\ &= 0 + 2i \left( \left[ t \frac{e^{it}}{i} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}}{i} dt \right) \\ &= 2(\pi e^{i\pi} + \pi e^{-i\pi}) + 2i \left[ e^{it} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi(e^{i\pi} + e^{-i\pi}) + 2i(e^{i\pi} - e^{-i\pi}) = -4\pi. \quad \square \end{aligned}$$

### Triangelolikheten för integraler

Följande olikhet för integraler generaliserar triangelolikheten för komplexa tal och kommer att utnyttjas många gånger i fortsättningen.

**Sats 2.1.4** (Triangelolikheten för integraler). För alla integrerbara funktioner  $f$  på intervallet  $I$  är

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

*Bevis.* Skriv det komplexa talet  $\int_I f(t) dt$  på polär form som  $Re^{i\theta}$ , där  $R = \left| \int_I f(t) dt \right|$  är absolutbeloppet av talet och  $\theta$  är argumentet. Då är

$$R = e^{-i\theta} \int_I f(t) dt = \int_I e^{-i\theta} f(t) dt.$$

Talet  $R = \int_I e^{-i\theta} f(t) dt$  är reellt och är därför lika med sin realdel. Det följer att

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(t) dt \right| &= R = \operatorname{Re} \int_I e^{-i\theta} f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \\ &\leq \int_I |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_I |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Den tredje likheten i kedjan gäller på grund av sättet att definiera integralen av komplexvärda funktioner, medan olikheten beror på att  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) \leq |e^{-i\theta} f(t)|$ .  $\square$

## 2.2 Följder och serier

I det här avsnittet ska vi utvidga några, förhoppningsvis välbekanta, definitioner och resultat för reella talföljder och serier till komplexa följder och serier med komplexa termer.

### Talföljder

**Definition.** En följd  $(c_n)_1^\infty$  av komplexa tal kallas *konvergent* om det finns ett komplext tal  $c$  så att  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$ . Talet  $c$  kallas i så fall för följdens *gränsvärde* och betecknas  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

Gränsvärdesdefinitionen för komplexa följder är därmed reducerad till definitionen av gränsvärdet av en (icke-negativ) reell följd, och genom att utnyttja de olikheter som råder mellan ett komplext tals real- resp. imaginärdel och belopp erhåller vi, precis som för kontinuitet, omedelbart följande resultat:

**Sats 2.2.1.** Om  $c_n = a_n + ib_n$ , så konvergerar den komplexa följd  $(c_n)_1^\infty$  med  $c = a + ib$  som gränsvärde om och endast om de båda reella följderna  $(a_n)_1^\infty$  och  $(b_n)_1^\infty$  konvergerar mot  $a$  och  $b$ , respektive.

Därigenom har vi fullständigt reducerat problemet att bestämma gränsvärdet av en komplex följd till motsvarande problem för reella följder, men oftast är det enklast att arbeta direkt med den komplexa följd.

EXEMPEL 2.2.1. Låt  $z$  vara ett komplext tal. Om  $|z| < 1$ , så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0,$$

medan gränsvärdet inte existerar om  $|z| \geq 1$  och  $z \neq 1$ .

För  $|z| < 1$  är nämligen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0,$$

eftersom det för icke-negativa reella tal  $r$  som är mindre än 1 gäller att  $r^n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ .

Anta fortsättningsvis att  $|z| \geq 1$  och  $z \neq 1$ . För att visa att gränsvärdet inte existerar i detta fall, kan vi utnyttja att om en följd  $(c_n)_1^\infty$  är konvergent med gränsvärde  $c$  så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c - c = 0.$$

Men för  $c_n = z^n$  är  $c_{n+1} - c_n = z^{n+1} - z^n = z^n(z - 1)$ , och följaktligen

$$|c_{n+1} - c_n| = |z|^n |z - 1| \geq |z - 1| > 0 \quad \text{för alla } n.$$

Detta betyder att  $c_{n+1} - c_n$  inte kan gå mot noll, och bevisar att följd  $(z^n)_1^\infty$  är divergent.  $\square$

En svårighet om vi försöker använda gränsvärdesdefinitionen för att avgöra om en given följd är konvergent, är att vi behöver känna till det eventuella gränsvärdet, eftersom definitionen refererar till gränsvärdet. Följande sats visar att vi kan avgöra en följdens konvergens genom att enbart hänvisa till följdens termer. Vi hoppar över beviset för satsen eftersom vi inte kommer att utnyttja den annat än i något enstaka exempel, men det hör till allmänbildningen att känna till den.

**Sats 2.2.2** (Cauchys konvergensprincip). *En komplex talföljd  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent om och endast om följande villkor är uppfyllt:*

*För varje  $\epsilon > 0$  finns det ett tal  $N$  så att olikheten  $|c_m - c_n| < \epsilon$  gäller för alla  $n \geq m \geq N$ .*

Att villkoret är nödvändigt är enkelt att inse. Antag nämligen att följden har ett gränsvärde  $c$ . Då är per definition  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$ , dvs. givet  $\epsilon > 0$  finns det ett tal  $N$  så att  $|c_n - c| < \epsilon/2$  gäller för alla  $n \geq N$ . Om både  $m \geq N$  och  $n \geq N$ , så gäller därför på grund av triangelolikheten att

$$|c_m - c_n| = |(c_m - c) + (c - c_n)| \leq |c_m - c| + |c - c_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

## Serier

Vi övergår nu till att behandla serier. Själva begreppet serie och konvergens av en serie återförs på begreppet talföljd och konvergens av talföljd med hjälp av följande definition.

**Definition.** Låt  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en följd av komplexa tal, och sätt

$$S_N = \sum_{n=1}^N c_n, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Man säger att den oändliga *serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

är *konvergent* med *summa*  $S$  om följden  $(S_N)_{N=1}^{\infty}$  av seriens *partialsummor* (eller *delsummor*) är en konvergent följd med gränsvärde  $S$ . Man använder i så fall också symbolen  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  som beteckning för seriens summa.

En icke-konvergent serie kallas *divergent*.

**EXEMPEL 2.2.2.** Serien  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , där  $z$  är ett komplext tal, kallas en *geometrisk serie*. Den geometriska serien är konvergent om och endast om  $|z| < 1$ , i vilket fall

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Vi kan nämligen beräkna partialsummorna och får för  $z \neq 1$  att

$$S_N = \sum_{k=0}^N z^k = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z},$$

medan förstås  $S_N = N + 1$  i fallet  $z = 1$ .

Det följer nu att  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1/(1-z)$  om  $|z| < 1$ , samt att gränsvärdet inte existerar om  $|z| \geq 1$ .  $\square$

Genom att dela upp termerna  $c_n$  i en komplex serie i sina real- och imaginärdelar,  $c_n = a_n + ib_n$ , får vi en motsvarande uppdelning av serien i två reella serier:

$$(2.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Här är den komplexa serien  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent om och endast om de båda reella serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  är konvergenta, i vilket fall likheten (2.1) också gäller för de tre seriernas summor. Att så är fallet följer omedelbart av motsvarande resultat för följder (sats 2.2.1).

Därför har vi förstås i princip reducerat alla problem rörande komplexa serier till problem för reella serier.

För serier med positiva termer finns det ett flertal olika konvergenstkriterier, som samtliga bygger på det s. k. *jämförelsekriteriet*: Om varje term i en given positiv serie är mindre än motsvarande term i en känd konvergent positiv serie, så är den givna serien också konvergent. Därför är följande sats mycket användbar i de fall då den är tillämplig.

**Sats 2.2.3 (Absolutkonvergens).** *En komplex serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  är konvergent om den positiva serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  är konvergent.*

En serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  kallas *absolutkonvergent* om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  konvergerar. En konvergent serie som inte är absolutkonvergent kallas *betingat konvergent*.

*Bevis.* Vi återför beviset av satsen på det reella fallet. Sätt därför  $c_n = a_n + ib_n$ . Då är  $|a_n| \leq |c_n|$  och  $|b_n| \leq |c_n|$ . Om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  konvergerar, så följer det av jämförelsekriteriet för positiva serier att också serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  konvergerar. Motsvarigheten till sats 2.2.3 för reella serier ger nu att de båda reella serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerar, och följaktligen är också serien  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent med summa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .  $\square$

**EXEMPEL 2.2.3.** Om  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$  är en konvergent serie med positiva termer  $r_n$ , så är serien  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{int}$  absolutkonvergent för alla  $t$ , eftersom  $|r_n e^{int}| = r_n$ .

Eftersom den positiva serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

är konvergent om (och endast om)  $p > 1$  får vi därför som specialfall att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} e^{int}$$

är absolutkonvergent för alla  $t$  om  $p > 1$ .

Däremot kan vi inte dra någon omedelbar slutsats om konvergensen för serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$ , ty serien är inte absolutkonvergent eftersom serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  är divergent. Är serien betingat konvergent för några värden på  $t$ ?  $\square$

Frågan som blev hängande i luften i exemplet ovan kan besvaras med hjälp av följande sats som generaliserar Leibnitz sats om alternerande serier.

**Sats 2.2.4.** Låt  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en följd av komplexa tal och antag att det för någon konstant  $M$  gäller att

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \right| \leq M \quad \text{för alla } n.$$

Låt vidare  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en avtagande följd av positiva tal med gränsvärde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Då är serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$  konvergent.

*Bevis.* Betrakta den givna seriens partialsummor  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k c_k$ ; vi ska visa att dessa konvergerar då  $n \rightarrow \infty$ , och eftersom vi inte känner gränsvärdet använder vi Cauchys konvergensprincip (sats 2.2.2).

Vi börjar med att skriva om summan  $\sum_{k=m+1}^n a_k c_k$  på ett sätt som är en direkt motsvarighet till formeln för partiell integration. Sätt

$$C_k = \sum_{j=1}^k c_j$$

för  $k \geq 1$  och  $C_0 = 0$ . Då blir  $c_k = C_k - C_{k-1}$  för alla  $k$ , och vi kan därför

göra omskrivningen

$$\begin{aligned}
 S_n - S_m &= \sum_{k=m+1}^n a_k C_k = \sum_{k=m+1}^n a_k (C_k - C_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n a_k C_k - \sum_{k=m+1}^n a_k C_{k-1} \\
 &= \sum_{k=m+1}^n a_k C_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} C_k \\
 &= a_n C_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) C_k - a_{m+1} C_m.
 \end{aligned}$$

Applicera nu triangelolikheten på summan och utnyttja att  $|C_k| \leq M$  för alla  $k$ . Detta ger oss olikheten

$$\begin{aligned}
 |S_n - S_m| &\leq |a_n C_n| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) C_k| + |a_{m+1} C_m| \\
 &= a_n |C_n| + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |C_k| + a_{m+1} |C_m| \\
 &\leq a_n M + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) M + a_{m+1} M = 2a_{m+1} M.
 \end{aligned}$$

Eftersom  $a_n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ , finns det givet  $\epsilon > 0$  ett  $N$  så att olikheten  $2a_{m+1} M < \epsilon$  gäller så snart  $m \geq N$ . För  $n \geq m \geq N$  är därför

$$|S_n - S_m| < \epsilon,$$

och detta visar att förutsättningarna i Cauchys konvergensprincipsats är uppfyllda. Följden  $(S_n)_{n=1}^\infty$  av partialsummor är således konvergent, och detta innebär att den givna serien konvergerar.  $\square$

EXEMPEL 2.2.4. Med hjälp av sats 2.2.4 kan vi visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$$

är betingat konvergent för  $0 < t < 2\pi$ , ty följderna  $(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$  är avtagande med gränsvärde 0, och för summorna

$$S_n = \sum_{k=1}^n e^{ikt} = e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k = e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}$$

har vi uppskattningen

$$|S_n| = |e^{it}| \cdot \frac{|1 - e^{int}|}{|1 - e^{it}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|} = M \quad \text{för alla } n. \quad \square$$

## 2.3 Normerade vektorrum

Transformerna som vi ska studera kommer att vara definierade för hela klasser av funktioner. För dessa funktionsklasser gäller att linjärkombinationer (med komplexa koefficienter) av funktioner i en funktionsklass också tillhör klassen samt att det finns ett naturligt sätt att ange "storleken" hos funktionerna i klassen.

TVå naturliga kandidater för storleken hos en funktion  $f$  som är definierad på ett intervall  $I$  är funktionens till beloppet största värde respektive integralen av funktionens belopp, dvs.

$$\sup_{t \in I} |f(t)| \quad \text{resp.} \quad \int_I |f(t)| dt$$

förutsatt att dessa kvantiteter är ändliga.

Vi ska nu precisera begreppen och illustrera med några exempel.

**Definition.** En klass  $\mathcal{B}$  av komplexvärda funktioner som är definierade på någon mängd  $I$ , bildar ett *komplext vektorrum* om varje linjärkombination  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  av funktioner  $f_1, f_2 \in \mathcal{B}$  med komplexa koefficienter  $c_1, c_2$  också ligger i  $\mathcal{B}$ .

EXEMPEL 2.3.1. Låt  $I$  vara godtyckligt intervall. Exempel på komplexa vektorrum av komplexvärda funktioner med  $I$  som definitionsområde är:

- $\mathcal{C}(I)$ , mängden av alla kontinuerliga funktioner på  $I$ ;
- $\mathcal{C}_b(I)$ , mängden av alla begränsade, kontinuerliga funktioner på  $I$ ;
- $\mathcal{C}_K(I)$ , mängden av alla kontinuerliga funktioner som är lika med noll utanför någon kompakt delmängd av  $I$  (där den kompakta delmängden får bero av funktionen);
- $L^1(I)$ , mängden av alla integrerbara funktioner  $f$  på intervallet  $I$  med egenskapen att integralen  $\int_I |f(t)| dt$  är ändlig.

Eftersom varje kontinuerlig funktion är begränsad på kompakta (dvs. slutna och begränsade) delmängder av definitionsområdet gäller inklusionerna

$$\mathcal{C}_K(I) \subseteq \mathcal{C}_b(I) \subseteq \mathcal{C}(I),$$

och om intervallet  $I$  är kompakt är förstås  $\mathcal{C}_K(I) = \mathcal{C}(I)$ .

Vidare är  $\mathcal{C}_K(I)$  en delmängd av  $L^1(I)$  eftersom varje kontinuerlig funktion som är noll utanför en kompakt delmängd är integrerbar med ändlig integral.  $\square$

Storleken av funktioner mäts med hjälp av normbegreppet, som definieras så här:



**Definition.** En norm  $\|\cdot\|$  på ett vektorrum  $\mathcal{B}$  är en funktion  $\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$  med följande egenskaper:

- (i)  $\|f\| \geq 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ ;
- (ii)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  för alla  $f, g \in \mathcal{B}$  (*triangelolikheten*);
- (iii)  $\|cf\| = |c|\|f\|$  för alla  $f \in \mathcal{B}$  och alla komplexa tal  $c$ ;
- (iv)  $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ .

Ett komplext vektorrum med en given norm kallas ett *normerat rum*.

EXEMPEL 2.3.2. Låt  $\mathcal{B}$  vara ett vektorrum av funktioner definierade på mängden  $I$  och antag att alla funktionerna i  $\mathcal{B}$  är begränsade. (Exempel på sådana rum är  $\mathcal{C}_K(I)$  och  $\mathcal{C}_b(I)$  för godtyckliga intervall  $I$ .) Vi får en norm  $\|\cdot\|_\infty$ , den s.k. *supnormen*, på vektorrummet  $\mathcal{B}$  genom att definiera

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Att egenskaperna (i), (iii) och (iv) i normdefinitionen är uppfyllda är uppenbart, och egenskap (ii) följer av triangelolikheten för komplexa tal, som innebär att

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|,$$

och som medför att

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup_{t \in I} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in I} (|f(t)| + |g(t)|) \\ &\leq \sup_{t \in I} |f(t)| + \sup_{t \in I} |g(t)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Om  $I$  är ett kompakt intervall,  $I = [a, b]$ , så antar en kontinuerlig funktion på  $I$  sitt supremum i någon punkt. För funktioner  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  är därför

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|. \quad \square$$

## Konvergens i normerade vektorrum

För en talföljd  $(a_n)_1^\infty$  definieras begreppet konvergens i termer av begreppet *avstånd*; följden konvergerar mot  $a$  om avståndet  $|a_n - a|$  mellan termen  $a_n$  och  $a$  går mot noll då  $n \rightarrow \infty$ . I ett normerat vektorrum  $\mathcal{B}$  med norm  $\|\cdot\|$  kan vi också definiera avstånd på ett naturligt sätt – med avståndet mellan två element  $f, g \in \mathcal{B}$  menas normen av deras differens, dvs.  $\|f - g\|$ . Detta gör följande definition av begreppet konvergens i ett normerat vektorrum fullständigt naturlig.

**Definition.** En följd  $(f_n)_1^\infty$  av element i ett normerat vektorrum  $\mathcal{B}$  säges *konvergera* mot elementet  $f \in \mathcal{B}$  om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ .

Om  $(a_n)_1^\infty$  är en följd av element i ett normerat vektorrum, så menas med serien  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  följden  $(S_N)_{N=1}^\infty$  av partialsummor  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ . Serien kallas *konvergent* med summa  $S$  om följden av partialsummor konvergerar mot  $S$ . Summan betecknas i så fall också  $\sum_{n=1}^\infty a_n$ .

Precis som i fallet med talföljder visar man att gränselementet till en konvergent följd i ett normerat vektorrum är entydigt bestämt samt att summan av två konvergenta följder konvergerar mot summan av de båda följdernas gränselement.

EXEMPEL 2.3.3. För konvergens i det fall då det normerade vektorrummet består av funktioner som är begränsade och normen är *supnormen*  $\|\cdot\|_\infty$  har man följande terminologi:

Följden  $(f_n)_1^\infty$  *konvergerar likformigt* mot  $f$ , om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ .

Vi kommer att studera likformig konvergens närmare i kapitel 4.  $\square$

## Övningar

2.1 Visa följande olikhet för normen i ett normerat rum

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|.$$

2.2 Låt  $(f_n)_1^\infty$  och  $(g_n)_1^\infty$  vara två konvergenta följder i ett normerat rum och sätt  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  och  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Visa att

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = f + g, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

## 2.4 Rummet $L^1$

Även om klassen av kontinuerliga funktioner är stor så finns det många i olika tillämpningar förekommande intressanta och viktiga funktioner som inte är kontinuerliga och som vi vill kunna transformera. En funktionsklass som innehåller alla kontinuerliga funktioner om definitionsintervallet  $I$  är kompakt, och alla kontinuerliga funktioner som avtar tillräckligt snabbt i oändligheten om intervallet  $I$  är obegränsat, är klassen av alla absolutintegrabla funktioner, som vi nu ska studera.

**Definition.** Låt  $I$  vara ett intervall. En integrerbar funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *absolutintegrabel* om

$$\int_I |f(t)| dt < \infty.$$

Rummet av alla absolutintegrabla funktioner på  $I$  betecknas  $L^1(I)$ . För funktioner  $f \in L^1(I)$  sätter vi

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt,$$

där  $d$  är längden av intervallet  $I$  om det är begränsat, och  $d = 1$  om intervallet  $I$  är obegränsat.

*Anmärkning.* Normaliseringsfaktorn  $d$  är ditstoppad av det enkla skälet att vi vill att den konstanta funktionen 1 ska ha norm lika med 1 i de fall då intervallet  $I$  är begränsat. (För obegränsade intervall ligger förstås inga andra konstanta funktioner än nollfunktionen i  $L^1(I)$ .)

Vi har inte förklarat vad  $L$  i beteckningen  $L^1(I)$  står för. Svaret är "Lebesgue", ty det i sammanhanget "rätta" integralbegreppet är inte Riemannintegralen utan den s. k. *Lebesgueintegralen* som behandlas i mer avancerade kurser i mått- och integrationsteori. Detta är dock inget som behöver bekymra den här bokens läsare, som inte kan förväntas ha studerat denna integral, ty för alla Riemannintegrabla funktioner och därmed för alla funktioner som kan tänkas förekomma i tillämpningarna, är Lebesgueintegralen lika med Riemannintegralen. Fördelen med Lebesgueintegralen är att fler funktioner blir integrerbara samt att ett antal satser om gränsövergång under integraltecknet förenklas. Det är således inte nödvändigt att precis kunna avgöra vilka funktioner som ingår i rummet  $L^1(I)$  för att förstå och kunna följa den kommande framställningen av fourierteorin. Väsentligt är däremot att veta att rummet har följande egenskaper, ty dem kommer vi att använda oss flitigt av i fortsättningen.

### 1. Rummet $L^1(I)$ är ett vektorrum

Om  $f_1, f_2$  är funktioner i  $L^1(I)$  och  $c_1, c_2$  är komplexa tal, så ligger med andra ord funktionen  $c_1 f_1 + c_2 f_2$  också i  $L^1(I)$ , och

$$\int_I (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt = c_1 \int_I f_1(t) dt + c_2 \int_I f_2(t) dt.$$

### 2. Rummet $L^1(I)$ är ett normerat vektorrum med $\|\cdot\|_1$ som norm

Vi kallar  $\|f\|_1$  för  $L^1$ -normen av funktionen  $f$ . De båda normegenskaperna  $\|f\|_1 \geq 0$  och  $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1$  är uppenbara, och triangelolikheten

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

följer genom integration av olikheten  $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ , som gäller för alla  $t$  på grund av triangelolikheten för komplexa tal.

För att få det återstående normkravet att gälla, nämligen kravet att nollfunktionen ska vara den enda funktionen i rummet som har norm noll, måste vi emellertid ta till ett trick eftersom likheten

$$\|f\|_1 = \frac{1}{d} \int_I |f(t)| dt = 0$$

uppenbarligen gäller för andra funktioner än nollfunktionen. Exempelvis gäller likheten för alla funktioner som är lika med noll överallt på intervallet  $I$  utom i enstaka punkter.

För att komma runt detta dilemma finns det ingen annan utväg än att betrakta alla funktioner  $f \in L^1(I)$  med egenskapen att  $\|f\|_1 = 0$  som samma funktion, nämligen nollfunktionen. Och då måste vi också betrakta alla funktioner  $f$  och  $g$  med egenskapen att  $\|f - g\|_1 = 0$  som samma funktion. Om du tycker att detta låter alltför lösligt, så kan vi göra det hela matematiskt oantastligt på följande vis. Först behövs då en definition.

**Definition.** Två funktioner  $f$  och  $g$  i  $L^1(I)$  säges vara *lika nästan överallt*, vilket vi förkortar som  $f(t) = g(t)$  n.ö., om  $\|f - g\|_1 = 0$ .

Speciellt är alltså  $f(t) = 0$  n.ö. om  $\|f\|_1 = 0$ .

Därefter konstaterar vi att egenskapen "likhet nästan överallt" är en ekvivalensrelation, vilket innebär att

- (a)  $f(t) = f(t)$  n.ö. för alla funktioner  $f$ .
- (b)  $f(t) = g(t)$  n.ö.  $\Rightarrow g(t) = f(t)$  n.ö.
- (c)  $f(t) = g(t)$  n.ö. &  $g(t) = h(t)$  n.ö.  $\Rightarrow f(t) = h(t)$  n.ö.

Vi kan därför partitionera  $L^1(I)$  i ekvivalensklasser, där varje sådan klass består av alla funktioner som är lika med varandra nästan överallt, och elementen i vårt "nya  $L^1(I)$ " får nu bli dessa ekvivalensklasser. Detta nya rum blir med naturliga definitioner av linjärkombinationer och norm ett normerat vektorrum. Vi avstår från att genomföra detaljerna i denna konstruktion som är analog med hur man definierar rationella tal som ekvivalensklasser av bråk så att exempelvis bråken  $1/2$ ,  $2/4$ ,  $3/6$ , ... blir representanter för samma rationella tal. Kontentan av det hela är ändå bara att vi inte ska skilja på två funktioner som är lika nästan överallt eftersom de har samma integral.

Då uppstår naturligtvis frågan om det finns något direkt sätt att avgöra om två funktioner är lika nästan överallt som inte bygger på att man beräknar integralen av beloppet av funktionernas differens. Exempelvis är ju två funktioner  $f$  och  $g$  lika nästan överallt om  $f(t) = g(t)$  för alla  $t$  i intervallet  $I$  utom i en punkt, eller i två punkter, eller mer generellt i ändligt många punkter. Det precisa svaret är att två funktioner  $f$  och  $g$  är lika nästan överallt om och endast om mängden  $\{t \mid f(t) \neq g(t)\}$  av punkter där funktionerna skiljer sig åt är en *nollmängd*, där begreppet nollmängd definieras på följande vis.

**Definition.** En delmängd  $E$  av de reella talen kallas en *nollmängd* om det är möjligt att täcka över mängden med öppna intervall vars sammanlagda längd är godtyckligt liten, dvs. om det för varje  $\epsilon > 0$  finns en följd  $I_1, I_2, I_3, \dots$  av öppna intervall sådan att  $E \subseteq \bigcup I_n$  och  $\sum_n |I_n| < \epsilon$ . (Här betecknar  $|I_n|$  längden av intervallet  $I_n$ .)

Alla ändliga mängder är förstås nollmängder, men också mängden  $\mathbf{Q}$  av alla rationella tal är en nollmängd.

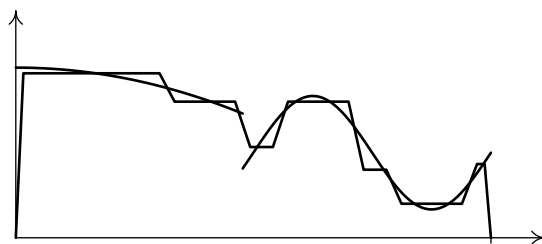
Speciellt betraktas alltså en funktion  $f$  som lika med nollfunktionen om mängden av punkter där funktionen är skild från noll är en nollmängd.

Om  $g$  är en icke-negativ, kontinuerlig funktion och  $\int_I g(t) dt = 0$ , så är nödvändigtvis  $g(t) = 0$  för alla  $t$ . En kontinuerlig absolutintegrabel funktion  $f$  med norm  $\|f\|_1 = 0$  är därför identiskt lika med noll. Om en kontinuerlig funktion är noll nästan överallt, så är den följaktligen noll överallt.

### 3. Delrummet $\mathcal{C}_K(I)$ av kontinuerliga funktioner som är noll utanför någon kompakt delmängd av $I$ är tätt i $L^1(I)$

Innebörden av detta påstående är att varje funktion i  $L^1(I)$  kan approximeras av en kontinuerlig funktion som är noll utanför någon kompakt delmängd av  $I$  med godtycklig noggrannhet. Givet  $f \in L^1(I)$  och  $\epsilon > 0$  finns det med andra ord en funktion  $g \in \mathcal{C}_K(I)$  sådan att  $\|f - g\|_1 < \epsilon$ .

Med en analogi kan vi således säga att ur approximationssynpunkt förhåller sig de kontinuerliga funktionerna som är noll utanför någon kompakt delmängd av  $I$  till funktionerna i  $L^1(I)$  som de rationella talen gör till de reella talen. För Riemannintegrabla funktioner  $f$  visar man påståendet genom att först approximera funktionen med en trappstegsfunktion och sedan i sin tur approximera trappstegsfunktionen med en styckvis linjär funktion. Figur 2.2 illustrerar det hela.



**Figur 2.2.** Approximation av integrerbar funktion med styckvis linjär funktion.

Att en följd  $(f_n)_1^\infty$  av funktioner i  $L^1(I)$  konvergerar mot funktionen  $f$  betyder enligt vår generella definition av konvergens i ett normerat rum att  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . Ibland behöver man förtydliga att det är just den konvergens som det rör sig om (och att det t. ex. inte handlar om punktvis konvergens), och då säger man att funktionsföljden *konvergerar i  $L^1$ -mening* mot  $f \in L^1(\mathbf{T})$ .

Att rummet  $\mathcal{C}_K(I)$  är tätt i  $L^1(I)$  innebär att man för givet  $f \in L^1(I)$  och varje positivt heltal  $n$  kan hitta en funktion  $g_n \in \mathcal{C}_K(I)$  med egenskapen att  $\|f - g_n\|_1 \leq 1/n$ . Man kan med andra ord konstruera en följd  $(g_n)_1^\infty$  av kontinuerliga funktioner, där varje funktion är noll utanför någon kompakt delmängd av  $I$ , som konvergerar i  $L^1$ -mening mot  $f$ .

## Övningar

2.3 Vilka av följande funktioner ligger i  $L^1([0, 1])$ ? Beräkna i förekommande fall normen.

- a)  $f(t) = t^{-1/2}$ ,  $0 < t \leq 1$       b)  $f(t) = t^{-1}$ ,  $0 < t \leq 1$   
 c)  $f(t) = \ln t$ ,  $0 < t \leq 1$ .

2.4 Antag att  $f \in L^1(I)$ , där  $I$  är ett begränsat intervall, och att  $|f(t)| \leq C$  för alla  $t \in I$ . Visa att  $\|f\|_1 \leq C$ .

## 2.5 Inreproduktrum

Du vet säkert vad som menas med en skalärprodukt på ett reellt vektorrum. Motsvarigheten för komplexa vektorrum kallas vanligtvis *inre produkt*, och definitionen av detta begrepp lyder så här:

**Definition.** En *inre produkt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  på ett komplext vektorrum  $V$  är en avbildning som för varje par av element  $f, g \in V$  ger ett komplext tal  $\langle f, g \rangle$  med följande egenskaper:

- (i1)  $\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, g \rangle = c_1 \langle f_1, g \rangle + c_2 \langle f_2, g \rangle$
- (i2)  $\langle f, c_1 g_1 + c_2 g_2 \rangle = \bar{c}_1 \langle f, g_1 \rangle + \bar{c}_2 \langle f, g_2 \rangle$
- (ii)  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
- (iii)  $\langle f, f \rangle \geq 0$
- (iv)  $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ .

Ett komplext vektorrum som försetts med en inre produkt kallas ett *inreproduktrum*.

Inre produkter ger på ett naturligt sätt upphov till normer; den med inre produkten  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  associerade normen  $\|\cdot\|$  är

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Samtliga normegenskaper utom triangelolikheten följer omedelbart ur egenskaperna (i)–(iv) i inre produktdefinitionen. Beviset för triangelolikheten är mer intrikat och bygger på att man först visar följande viktiga olikhet:

**Sats 2.5.1** (Cauchy–Schwarz olikhet). Om  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  är en inre produkt och  $\|\cdot\|$  är motsvarande norm, så är

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

för alla  $f, g$ .

*Bevis.* Olikheten är trivialt sann om  $f = 0$ . Antag därför att  $f \neq 0$ . På

grund av inreprodukttegenskaperna är

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda f + g, \lambda f + g \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle f, f \rangle + \lambda \langle f, g \rangle + \bar{\lambda} \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= |\lambda|^2 \|f\|^2 + \lambda \langle f, g \rangle + \overline{\lambda \langle f, g \rangle} + \|g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle f, g \rangle) + \|g\|^2 \end{aligned}$$

för alla komplexa tal  $\lambda$ . Välj nu speciellt  $\lambda = -\overline{\langle f, g \rangle} / \|f\|^2$ . Detta resulterar i olikheten

$$\|g\|^2 - |\langle f, g \rangle|^2 / \|f\|^2 \geq 0,$$

som efter förenkling ger oss Cauchy–Schwarz olikhet.  $\square$

Triangelolikheten följer nu av följande räkning, som i tur och ordning utnyttjar definitionen av  $\|\cdot\|$  i termer av den inre produkten, egenskapen (i<sub>2</sub>), triangelolikheten för komplexa tal samt Cauchy–Schwarz olikhet:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= |\langle f + g, f + g \rangle| = |\langle f + g, f \rangle + \langle f + g, g \rangle| \\ &\leq |\langle f + g, f \rangle| + |\langle f + g, g \rangle| \\ &\leq \|f + g\|_2 \|f\|_2 + \|f + g\|_2 \|g\|_2 \\ &= \|f + g\|_2 (\|f\|_2 + \|g\|_2). \end{aligned}$$

Om  $\|f + g\|_2 \neq 0$ , så erhåller vi den sökta triangelolikheten för normen genom att dividera båda sidor av olikheten ovan med  $\|f + g\|_2$ , och om  $\|f + g\|_2 = 0$  är triangelolikheten trivialt sann.  $\square$

EXEMPEL 2.5.1 (Rummet  $\ell^2$ ). En komplexvärd följd  $(z_n)_1^\infty$  är ur matematisk synvinkel detsamma som en funktion  $z: \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{C}$  med funktionsvärdena  $z(n) = z_n$ , så mängden av alla sådana följder bildar ett vektorrum under vanlig definition av addition och skalär multiplikation.

Låt nu  $\ell^2$  beteckna mängden av alla följder  $z = (z_n)_1^\infty$  som uppfyller villkoret

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty.$$

Vi ska visa att  $\ell^2$  är ett vektorrum och att vi får en inre produkt på rummet genom att definiera

$$(2.2) \quad \langle z, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w_n}.$$

Motsvarande norm blir då

$$\|z\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

För att bevisa att  $\ell^2$  är ett vektorrum räcker det att visa att summan av två följder i  $\ell^2$  ligger i  $\ell^2$ , och att produkten av en komplex skalär och en följd i  $\ell^2$  ligger i  $\ell^2$ .

Låt därför  $z = (z_n)_1^\infty$  och  $w = (w_n)_1^\infty$  vara två följder i  $\ell^2$ , dvs. antag att de båda summorna  $\sum_n |z_n|^2$  och  $\sum_n |w_n|^2$  är ändliga. För varje komplext tal  $\lambda$  är då uppenbarligen summan  $\sum_n |\lambda z_n|^2$  också ändlig, så följden  $\lambda z = (\lambda z_n)_1^\infty$  ligger i  $\ell^2$  för varje komplext tal  $\lambda$ .

Genom att kombinera den elementära olikheten

$$(2.3) \quad 2ab \leq a^2 + b^2,$$

som gäller för alla reella tal, med triangelolikheten för komplexa tal erhåller vi olikheten

$$\begin{aligned} |z_n + w_n|^2 &\leq (|z_n| + |w_n|)^2 = |z_n|^2 + 2|z_n||w_n| + |w_n|^2 \\ &\leq 2(|z_n|^2 + |w_n|^2). \end{aligned}$$

Det följer därför att  $\sum_n (|z_n + w_n|^2) \leq 2(\sum_n |z_n|^2 + \sum_n |w_n|^2) < \infty$ , vilket innebär att summan  $z + w = (w_n + z_n)_1^\infty$  tillhör  $\ell^2$ .

För att se att ekvation (2.2) definierar en inre produkt behöver vi först visa att den definierande serien konvergerar. Men på grund av olikheten (2.3) är  $|z_n \overline{w_n}| \leq \frac{1}{2}|z_n|^2 + \frac{1}{2}|w_n|^2$ , och därför är serien absolutkonvergent enligt jämförelsekriteriet.

Vi måste också visa att villkoren (i)–(iv) i inreproduktdefinitionen är uppfyllda, men detta är en enkel verifikation. Exempelvis är uppenbarligen  $\langle z, z \rangle = \sum_n |z_n|^2 \geq 0$ , och likhet råder om och endast om alla  $z_n = 0$ , dvs. om och endast om  $z = 0$ .  $\square$

I inreproduktrum definieras normen  $\|\cdot\|$  i termer av den inre produkten  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  via relationen  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . Omvänt kan man rekonstruera den inre produkten utifrån kännedom om normen. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 2.5.2.** *För alla vektorer  $f, g$  i ett inreproduktrum gäller att*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - \|f - g\|^2 - i\|f - ig\|^2).$$

*Bevis.* Man bevisar identiteten genom att använda normdefinitionen och utveckla högerledet med hjälp av räknereglerna för den inre produkten. Detaljerna lämnas som övning.  $\square$

## Ortogonalitet, ON-system och ortogonala projektioner

Två vektorer  $f$  och  $g$  i ett inreproduktrum  $V$  kallas *ortogonala* om  $\langle f, g \rangle = 0$ . En familj  $\{f_i \mid i \in I\}$  av vektorer i ett inreproduktrum kallas ett *ON-system* om vektorerna i familjen är parvis ortogonala och har norm 1, dvs. om  $\langle f_i, f_j \rangle = 0$  för  $i \neq j$  och  $\langle f_i, f_i \rangle = 1$  för alla  $i$  i indexfamiljen  $I$ .



EXEMPEL 2.5.2. Låt  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$  beteckna den talföljd i  $\ell^2$  som består av idel nollor utom på plats nummer  $n$ , där talet istället är en etta. Då är uppenbarligen  $\{\mathbf{e}_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$  ett ON-system.

Om  $z = (z_n)_1^\infty$  är ett godtyckligt element i  $\ell^2$ , så är serien  $\sum_{n=1}^\infty z_n \mathbf{e}_n$  konvergent i  $\ell^2$  med summa  $z$ , ty om  $S_N$  är den  $N$ :te partialsumman,

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n = (z_1, z_2, \dots, z_N, 0, 0, \dots),$$

så är

$$\|S_N - z\|^2 = \|(0, \dots, 0, z_{N+1}, z_{N+2}, \dots)\|^2 = \sum_{n=N+1}^\infty |z_n|^2,$$

och den sistnämnda summan går mot noll då  $N \rightarrow \infty$  eftersom serien  $\sum_{n=1}^\infty |z_n|^2$  är konvergent.

Att  $z = \sum_{n=1}^\infty z_n \mathbf{e}_n$  för alla  $z \in \ell^2$  betyder emellertid *inte* att ON-systemet  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\}$  är en bas för rummet  $\ell^2$ . För att en familj  $\mathcal{F}$  av vektorer ska vara en bas krävs nämligen att varje vektor i rummet på ett unikt sätt ska kunna skrivas som en *ändlig* linjärkombination av vektorerna i familjen  $\mathcal{F}$ . En ändlig linjärkombination av vektorer i  $\mathcal{E}$  är en talföljd som från och med en viss punkt bara består av nollor. Följden  $(1/n)_1^\infty$ , som ligger i  $\ell^2$ , kan således inte skrivas som en linjärkombination av elementen i ON-systemet  $\mathcal{E}$ .  $\square$

Vår nästa sats kan ses som en generalisering av Pythagoras sats.

**Sats 2.5.3.** *Antag att  $f$  och  $g$  är två ortogonala vektorer i ett inreprodukttrum. Då är*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Låt  $\{e_i \mid i = 1, 2, \dots\}$  vara ett ON-system inreprodukttrummet  $V$ , och låt  $W$  beteckna det linjära delrum av  $V$  som spänns upp av den  $n$  första vektorerna  $e_1, e_2, \dots, e_n$  i ON-systemet och som följaktligen består av alla linjärkombinationer av dessa  $n$  vektorer. Vi definierar en linjär avbildning  $P_n: V \rightarrow W$  genom att för  $f \in V$  sätta

$$P_n f = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i.$$

Avbildningen  $P_n$  kallas den *ortogonala projektionen* av  $V$  på delrummet  $W$  av skäl som framgår av följande sats.

**Sats 2.5.4.** Låt  $f$  vara en godtycklig vektor i  $V$ . Då är

$$f = P_n f + (f - P_n f)$$

en uppdelning av vektorn  $f$  som en summa av två parvis ortogonala vektorer. Vektorn  $P_n f$  ligger i delrummet  $W$ , vektorn  $f - P_n f$  är ortogonal mot delrummet  $W$  och

$$\|P_n f\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle|^2.$$

*Bevis.* För  $k \leq n$  gäller på grund av inreprodukttegenskaperna (i) och (ii) och ortogonalitetsegenskapen hos ON-systemet att

$$\langle f - P_n f, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i, e_k \right\rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle = 0.$$

Vektorn  $f - P_n f$  är således ortogonal mot vektorerna  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , och därmed också mot alla linjärkombinationer av dessa, däribland  $P_n f$ .

Det följer vidare av inreprodukttegenskaperna (i) och (ii) att

$$\begin{aligned} \|P_n f\|^2 &= \langle P_n f, P_n f \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i, \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \langle f, e_i \rangle \overline{\langle f, e_k \rangle} \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle|^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Sats 2.5.5** (Bessels olikhet). Låt  $\{e_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  vara ett ON-system i ett inreprodukttrum  $V$ . För alla vektorer  $f \in V$  gäller olikheten

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Likhet gäller i olikheten ovan om och endast om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f - f\| = 0.$$

*Bevis.* Genom att kombinera satserna 2.5.3 och 2.5.4 ser vi att

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle|^2 = \|P_n f\|^2 = \|f\|^2 - \|f - P_n f\|^2 \leq \|f\|^2$$

för alla positiva heltal  $n$ . Bessels olikhet följer därför genom att låta  $n$  gå mot oändligheten.

Likhet gäller i Bessels olikhet om och endast om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\|^2 = \|f\|^2$ , och av den andra likheten i (2.4) följer att detta gäller om och endast om  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n f\| = 0$ .  $\square$

EXEMPEL 2.5.3. I exempel 2.5.2 introducerade vi ON-systemet  $\{\mathbf{e}_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  i rummet  $\ell^2$ . För  $z = (z_n)_1^\infty$  i  $\ell^2$  är  $\langle z, \mathbf{e}_n \rangle = z_n$ , så i det här fallet är det trivialt sant att vi har likhet

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \mathbf{e}_n \rangle|^2 = \|z\|^2$$

i Bessels olikhet – likheten följer ju direkt av definitionen av  $\ell^2$ -normen.  $\square$

ON-system  $\{e_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  som ger likhet i Bessels olikhet är speciellt intressanta, bl. a. av den anledning att de gör det möjligt att beräkna normen  $\|f\|$  av ett godtyckligt element som roten ur  $\sum_i |\langle f, e_i \rangle|^2$ . Jämför med ON-baser  $e_1, e_2, \dots, e_n$  i reella *ändligtdimensionella* vektorrum, där längden av en godtycklig vektor  $v$  med koordinaterna  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ges av att  $\|v\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  med  $x_i = \langle v, e_i \rangle$ . Vi inför därför följande terminologi:

**Definition.** Ett ON-system  $\{e_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  i ett inreproduktum  $V$  kallas *fullständigt* om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f - f\| = 0$$

för alla vektorer  $f \in V$ .

Vi har nu följande resultat

**Sats 2.5.6.** Låt  $\{e_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  vara ett ON-system i ett inreproduktum  $V$ . Då är följande tre villkor ekvivalenta:

- (i) ON-systemet är fullständigt.
- (ii)  $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2$  för alla  $f \in V$ .
- (iii)  $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle}$  för alla  $f, g \in V$ .

*Bevis.* Ekvivalensen mellan (i) och (ii) ges av föregående sats, och att (iii) medför (ii) följer genom att välja  $g = f$ .

För att visa att (ii) medför (iii) utnyttjar vi att vi kan uttrycka den inre produkten i termer av normer (sats 2.5.2), och vi gör detta både i rummet  $V$  och i rummet  $\ell^2$ . Sätt  $z_i = \langle f, e_i \rangle$  och  $w_i = \langle g, e_i \rangle$ . Då ligger följderna  $z = (z_i)_1^\infty$  och  $w = (w_i)_1^\infty$  båda i  $\ell^2$  på grund av Bessels olikhet, och vi har därför dels

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - \|f - g\|^2 - i\|f - ig\|^2),$$

dels

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i = \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |z_i + w_i|^2 + i \sum_{i=1}^{\infty} |z_i + iw_i|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |z_i - w_i|^2 - i \sum_{i=1}^{\infty} |z_i - iw_i|^2 \right).$$

Om (ii) gäller, så är varje term i högerledet av uttrycket för  $\langle f, g \rangle$  lika med motsvarande term i högerledet av uttrycket för  $\sum_i z_i \bar{w}_i$ , och därför är  $\langle f, g \rangle = \sum_i z_i \bar{w}_i$ , dvs. påstående (iii) gäller.  $\square$

Om  $\{e_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  är ett godtyckligt ON-system i inreproduktrummet  $V$ , så erhåller vi på grund av Bessels olikhet en avbildning  $T: V \rightarrow \ell^2$  genom att sätta

$$Tf = (\langle f, e_n \rangle)_1^\infty.$$

Avbildningen  $T$  är uppenbarligen linjär, och om ON-systemet är fullständigt är den på grund av likheten (ii) i sats 2.5.6 också normbevarande, dvs.  $\|Tf\| = \|f\|$  för alla  $f \in V$ . Normbevarande linjära avbildningar kallas *isometrier*.

Är avbildningen  $T$  också surjektiv, dvs. finns det för varje följd  $z = (z_n)_1^\infty$  i  $\ell^2$  en vektor  $f$  sådan att  $Tf = z$ , eller ekvivalent, sådan att  $\langle f, e_n \rangle = z_n$ ? Den naturliga kandidaten är i så fall  $f = \sum_{n=1}^\infty z_n e_n$ , men det förutsätter förstås att serien ifråga konvergerar mot något element i det normerade rummet  $\mathcal{B}$ . För att detta ska gälla krävs att det normerade rummet har en egenskap som kallas *kompletthet*. Att gå in på detta skulle föra för långt, utan vi får nöja oss med påpekandet att rummet  $\ell^2$  har den egenskapen (vilket är trivialt) liksom  $L^2$ -rummen, som vi ska definiera i nästa avsnitt.

Om ON-systemet är fullständigt och rummet är komplett, så är med andra ord den linjära avbildningen  $T: V \rightarrow \ell^2$  bijektiv och normbevarande. Detta innebär att om vi är ute efter egenskaper som bara har med linearitet, norm och inre produkt att göra, så kan vi identifiera de båda rummen  $V$  och  $\ell^2$ . Alla räkningar i  $V$  kan lika gärna utföras i  $\ell^2$ ! Jämför med  $n$ -dimensionella reella vektorrum som med en given ON-bas kan identifieras med  $\mathbf{R}^n$ .

## Övningar

2.5 Vilka av följande följder ligger i  $\ell^2$ ? Beräkna i förekommande fall normen.

a)  $(n^{-1/2})_1^\infty$       b)  $(2^{-n})_1^\infty$ .

2.6 Visa att om  $\mathcal{S} = \{e_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$  är ett fullständigt ON-system i ett inreproduktrum, så finns det inte någon annan vektor än nollvektorn som är ortogonal mot samtliga vektorer i  $\mathcal{S}$ . Ett fullständigt ON-system är således maximalt i den meningen att det inte kan utvidgas till något större ON-system.

2.7 Visa att om  $(f_n)_1^\infty$  och  $(g_n)_1^\infty$  är två följder i ett inreproduktrum som konvergerar mot  $f$  resp.  $g$ , så är  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle$ .

## 2.6 Rummet $L^2$

I många tillämpningssammanhang är den intressanta funktionsklassen inte klassen av absolutintegrabla funktioner, dvs.  $L^1(I)$ , utan klassen av funktioner vars kvadrater är absolutintegrabla. Antag som exempel att vi studerar något elektriskt system under ett tidsintervall  $I$  och där spänningen  $u(t)$  V över en resistans på  $1 \Omega$  är en viktig parameter. Eftersom den av spänningen utvecklade energin ges av integralen  $\int_I u(t)^2 dt$  och bara ändliga energier kan förekomma, är det klart att vi kan inskränka oss till att studera spänningsfunktioner  $u$  för vilka ovannämnda integral är ändlig. Detta är ett skäl att studera den funktionsklass som vi nu ska definiera.

**Definition.** Med  $L^2(I)$  menas rummet av alla funktioner  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  som är integrerbara och uppfyller villkoret

$$\int_I |f(t)|^2 dt < \infty.$$

För funktioner  $f, g \in L^2(I)$  definierar vi

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{d} \int_I f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{och} \quad \|f\|_2 = \left( \frac{1}{d} \int_I |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

där  $d$  är längden av intervallet  $I$  om det är begränsat, och  $d = 1$  om intervallet är obegränsat.

De väsentliga egenskaperna hos rummet  $L^2(\mathbf{T})$  är samlade i följande sats.

- Sats 2.6.1.** (i)  $L^2(I)$  är ett inre produktrum med  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  som inre produkt och  $\|\cdot\|_2$  som motsvarande norm.  
(ii) För begränsade intervall  $I$  är  $L^2(I)$  ett delrum till  $L^1(I)$ , och för varje funktion  $f \in L^2(I)$  gäller normolikheten  $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ .

*Bevis.* (i) För att visa att  $L^2(I)$  är ett komplext vektorrum räcker det att visa att summan av två funktioner i  $L^2(I)$  ligger i  $L^2(I)$  samt att produkten av ett komplext tal och en funktion i  $L^2(I)$  ligger i  $L^2(I)$ , ty det är uppenbart att samtliga övriga vektorrumsaxiom (som vi ju inte specificerat ordentligt) är uppfyllda.

Låt därför  $f$  och  $g$  vara två funktioner i  $L^2(\mathbf{T})$ , dvs. antag att de båda integralerna  $\int_I |f(t)|^2 dt$  och  $\int_I |g(t)|^2 dt$  är ändliga. Uppenbarligen är då också integralen  $\int_I |cf(t)|^2 dt$  ändlig för varje komplext tal  $c$ , så funktionen  $cf$  ligger i  $L^2(I)$  för varje  $c \in \mathbf{C}$ .

Genom att kombinera den elementära olikheten

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

som gäller för alla reella tal, med triangelolikheten för komplexa tal erhåller vi olikheten

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)|^2 &\leq (|f(t)| + |g(t)|)^2 = |f(t)|^2 + 2|f(t)||g(t)| + |g(t)|^2 \\ &\leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2), \end{aligned}$$

och genom att integrera den sistnämnda olikheten får vi olikheten

$$\int_I |f(t) + g(t)|^2 dt \leq 2 \int_I |f(t)|^2 dt + 2 \int_I |g(t)|^2 dt < \infty.$$

som visar att summan  $f + g$  ligger i  $L^2(I)$ .

För att visa att inreprodukttegenskaperna är uppfyllda för den föreslagna inre produkten måste vi först visa att definitionen ger oss ett komplext tal  $\langle f, g \rangle$  för varje par  $f, g$  av  $L^2(I)$ -funktioner, dvs. att den definierande integralen är ändlig, men detta följer av olikheten

$$|f(t)\overline{g(t)}| = |f(t)||g(t)| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$$

som medför att integranden  $f(t)\overline{g(t)}$  tillhör  $L^1(I)$ . Att sedan egenskaperna (i)–(iii) i inreproduktens definition är uppfyllda följer omedelbart. För att få egenskap (iv) att gälla måste vi ta till samma trick som vi gjorde för normen på  $L^1(I)$ ; vi måste identifiera alla funktioner som är lika nästan överallt, ty av  $\langle f, f \rangle = \int_I |f(t)|^2 dt = 0$  följer för allmänna funktioner  $f$  endast att  $f(t) = 0$  nästan överallt.

(ii) Antag att  $f \in L^2(I)$ , och tillämpa Cauchy–Schwarz olikhet på de båda funktionerna  $|f|$  and 1; detta ger

$$\|f\|_1 = \frac{1}{d} \int_I |f(t)| \cdot 1 dt = \langle |f|, 1 \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 = \|f\|_2 < \infty,$$

vilket bevisar den angivna olikheten och att  $f \in L^1(I)$ . □

## Övningar

2.8 Avgör för följande funktioner  $f$  och intervall  $I$  om  $f \in L^2(I)$ , samt beräkna i förekommande fall  $L^2$ -normen.

- a)  $f(t) = 1/t$ ,  $I = ]0, 1]$       b)  $f(t) = 1/t$ ,  $I = [1, \infty[$   
 c)  $f(t) = e^{-|t|}$ ,  $I = \mathbf{R}$ .

2.9 Ge exempel på funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  som inte tillhör  $L^2(\mathbf{R})$  och på en funktion  $g \in L^2(\mathbf{R})$  som inte tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ .

## 2.7 Diracmåttet

Funktioner karakteriseras av att varje värde på den oberoende variabeln ger ett unikt värde på den beroende variabeln. I många sammanhang är emellertid en funktion  $f$  inte i första hand intressant på grund av sina enskilda funktionsvärden utan på grund av att den förekommer som ingrediens i en integral av typen

$$(2.5) \quad T_f(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t)f(t) dt,$$

där  $\phi$  är en funktion som kan väljas på olika sätt.

Exempelvis gäller det för en slumpvariabel  $X$  med *täthetsfunktion*  $f$  att sannolikheten  $\text{Prob}(X \leq x)$  att  $X$  ska ha ett värde som är mindre än eller lika med  $x$  ges av integralen

$$\int_{\mathbf{R}} \chi_{]-\infty, x]}(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

att *väntevärdet*  $E(X)$  ges av integralen

$$\int_{\mathbf{R}} tf(t) dt$$

och att slumpvariabelns s. k. *karakteristiska funktion* ges av integralen

$$\int_{\mathbf{R}} e^{its} f(t) dt.$$

För absolutintegrabla funktioner  $f$  är uttrycket  $T_f(\phi)$  väldefinierat för exempelvis alla kontinuerliga funktioner  $\phi$  på  $\mathbf{R}$  som går mot noll i oändligheten, och dessa funktioner bildar ett linjärt rum som brukar betecknas  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ .  $T_f(\phi)$  varierar vidare linjärt med  $\phi$ , dvs.

$$T_f(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1T_f(\phi_1) + \lambda_2T_f(\phi_2),$$

och detta betyder att  $T_f$  är en linjär avbildning på rummet  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ . Komplexvärda linjära avbildningar brukar kallas *linjära funktionaler*. Den linjära funktionalen  $T_f$  är slutligen kontinuerlig i den bemärkelsen att  $\phi_n \rightarrow \phi$  (likformigt) medför att  $T_f(\phi_n) \rightarrow T_f(\phi)$ .

Absolutintegrabla funktioner  $f$  ger således upphov till kontinuerliga linjära funktionaler  $T_f$  genom ekvationen (2.5), men har alla kontinuerliga funktionaler på rummet  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$  denna form? Svaret är nej! För att kunna beskriva alla kontinuerliga linjära funktionaler som en slags integraler behövs det en ny klass av objekt som inkluderar de absolutintegrabla funktionerna som specialfall. Dessa objekt kallas (*ändliga*) *mått*.

Om man behöver namnge ett generellt mått så brukar man ha en viss förkärlek för den grekiska bokstaven  $\mu$ , och istället för att använda  $\mu(\phi)$  som

beteckning för den linjära funktionalens  $\mu$ :s värde på funktionen  $\phi$  skriver man värdet som en integral så att

$$\mu(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) d\mu(t).$$

Mätteori spelar en viktig roll för exempelvis sannolikheteeteorin, men vi får här nöja oss med att beskriva de allra enklaste måtten, nämligen de som i sannolikheteeteorin svarar mot diskreta slumpvariabler. Den enklaste slumpvariabeln är den som antar ett enda värde helt säkert. Motsvarande sannolikhetsmått kallas en punktmassa eller ett Diracmått.

**Definition.** *Diracmåtten*  $\delta_a$  i punkten  $a$  definieras av att

$$\delta_a(\phi) = \phi(a)$$

för alla funktioner  $\phi$ . För Diracmåtten  $\delta_0$  i origo använder vi den kortare beteckningen  $\delta$ .

Trots att Diracmåtten inte är funktioner kommer vi att använda beteckningssättet

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) \delta_a(t) dt$$

istället för det mer korrekta  $\delta_a(\phi)$  eller  $\int_{\mathbf{R}} \phi(t) d\delta_a(t)$ . Men observera att  $\delta_a(t)$  inte är ett funktionsvärde.<sup>1</sup>

Vi har tidigare använt  $f_\tau$  som beteckning för den funktion som erhålls av  $f$  genom en translation  $\tau$  enheter åt höger så att  $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ . Beteckningen  $\delta_a$  för Diracmåtten i punkten  $a$  är förenlig med detta skrivsätt eftersom  $\delta_a$  också kan uppfattas som ett translat till Diracmåtten  $\delta$  i origo. Formeln för linjärt variabelbyte i en integral fungerar också för Diracmåtten i den betydelsen att

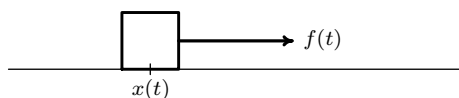
$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) \delta_a(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) \delta(t - a) dt = \int_{\mathbf{R}} \phi(u + a) \delta(u) du = \phi(0 + a) = \delta_a(\phi).$$

De enda mått som kommer att figurera i den här boken (och som inte är funktioner) är Diracmått och summor av Diracmått. Linjärkombinationer  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{a_j}$  och oändliga summor av typen  $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \delta_{a_j}$  med koefficienter som uppfyller  $\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$  är förstås också mått.

**EXEMPEL 2.7.1.** Ett föremål med massa  $m$  kan röra sig utefter en linje,  $x$ -axeln. För tidpunkter  $t \leq 0$  befinner det sig i vila i origo. För  $t \geq 0$  påverkas det av en kraft  $f(t)$ , som sätter föremålet i rörelse så att det vid tiden  $t$  befinner sig i punkten  $x(t)$  och har hastigheten  $v(t) = x'(t)$ .

<sup>1</sup>Fysiker, som inte är lika noga som matematiker, kallar dock  $\delta$  för Diracfunktionen.





**Figur 2.3.** Ett föremål påverkat av kraften  $f(t)$ .

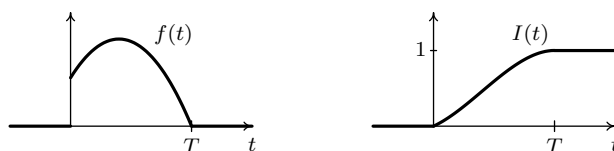
Föremålets rörelse beskrivs av Newtons lag:

$$f(t) = mx''(t) = mv'(t),$$

och genom att integrera denna ekvation över intervallet  $]-\infty, t]$  erhåller vi (eftersom  $f(t) = 0$  för  $t \leq 0$ ):

$$\int_{-\infty}^t f(s) ds = \int_0^t f(s) ds = m \int_0^t v'(s) ds = mv(t) - mv(0) = mv(t).$$

I fysiken kallar man  $I(t) = mv(t)$  för föremålets *impuls*, och sambandet ovan innebär alltså att förändringen av ett föremåls impuls över ett tidsintervall är lika med integralen av kraften över samma intervall. Om vi antar att kraften  $f(t)$  är lika med 0 utanför intervallet  $[0, T]$ , att  $m = 1$  och att  $\int_0^T f(t) dt = 1$ , och plottar kraften respektive impulsen som funktioner av tiden, får vi grafer som dem i figur 2.4.



**Figur 2.4.** Kraften respektive impulsen som funktion av tiden.

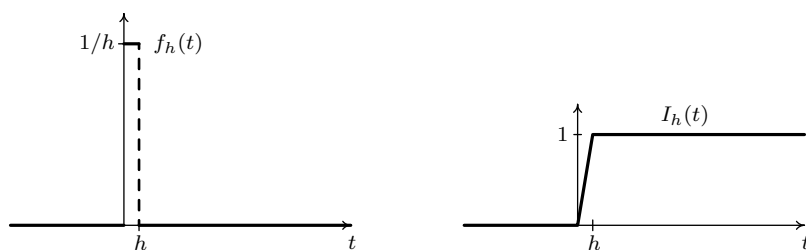
Låt nu föremålet ifråga vara en biljardboll, som vid tidpunkten  $t = 0$  utsätts för en kraftig stöt. Tidsintervallet  $[0, h]$  under vilket stötkraften verkar på bollen är mycket kort – låt oss anta att

$$f_h(t) = \begin{cases} 1/h & \text{då } 0 \leq t \leq h, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Impulsen blir då

$$I_h(t) = \int_{-\infty}^t f_h(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq 0, \\ t/h & \text{för } 0 \leq t \leq h, \\ 1 & \text{för } t \geq h. \end{cases}$$

Graferna för kraften  $f_h(t)$  och impulsen  $I_h(t)$  visas i figur 2.5.



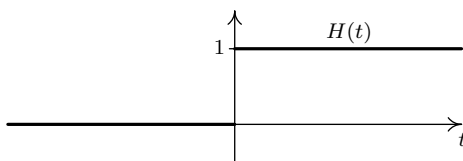
**Figur 2.5.** Stötkraft  $f_h(t)$  och motsvarande impuls  $I_h(t)$ .

Vi undersöker gränsvärdet av  $I_h(t)$  då  $h$  går mot 0. Tydligt är

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t \leq 0, \\ 1 & \text{om } t > 0. \end{cases}$$

Detta ger oss anledning att introducera *Heavisidefunktionen*  $H$  som definieras av att

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0, \\ 1 & \text{om } t \geq 0. \end{cases}$$



**Figur 2.6.** Heavisidefunktionen.

Tydligt går impulsfunktionen  $I_h(t)$  punktvis mot  $H(t)$  då  $h$  går mot 0, utom i punkten  $t = 0$ , men gränsvärdet i en enstaka punkt är oväsentligt för den kommande diskussionen. Heavisidefunktionen beskriver därför impulsen med god approximation för krafter som verkar under mycket kort tid. Slutsatsen gäller även om stötkraften har ett annat utseende än det som ges av figur 2.5. För alla kraftfunktioner  $f_h(t)$  som är 0 utanför intervallet  $[0, h]$  och vars integral över intervallet  $[0, h]$  är lika med 1, gäller att motsvarande impulsfunktioner  $I_h(t)$  konvergerar mot Heavisidefunktionen då  $h \rightarrow 0$ . (Om integralen av kraftfunktionen istället är konstant lika med  $\alpha$ , så konvergerar impulsen mot  $\alpha H(t)$ .)

Vi gör därför en idealisering av verkligheten och säger att impulsen vid en stöt ges av Heavisidefunktionen (eller en multipel av densamma). Men

kan man då på något vettigt sett beskriva impulsen som en integral av någonting, dvs. är

$$(2.6) \quad H(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

för någon ”kraft”  $f$ ? Problemet är att det inte kan finnas någon *funktion*  $f$  som åstadkommer detta. För alla intervall  $[a, b]$  som inte innehåller 0 är  $\int_a^b f(s) ds = H(b) - H(a) = 0$ . Om  $f$  är en integrerbar funktion, så får vi därför dels att  $\int_{-\infty}^0 f(s) ds = 0$  (genom att låta  $a \rightarrow -\infty$  och  $b \rightarrow 0^-$ ), dels att  $\int_0^t f(s) ds = 0$  (genom att låta  $a \rightarrow 0^+$  och välja  $b = t > 0$ ) med slutsatsen att  $\int_{-\infty}^t f(s) ds = \int_{-\infty}^0 f(s) ds + \int_0^t f(s) ds = 0$  för  $t > 0$ , vilket strider mot definitionen av Heavisidefunktionen  $H$ .

Diracmåttet  $\delta$  löser vårt problem, ty

$$\int_{-\infty}^t \delta(s) ds = \int_{\mathbf{R}} \chi_{]-\infty, t]}(s) \delta(s) ds = \chi_{]-\infty, t]}(0) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0 \\ 1 & \text{om } t \geq 0 \end{cases} = H(t).$$

Vi har alltså ett objekt  $f(t) = \delta(t)$  som uppfyller ekvation (2.6) och som stötkrafterna  $f_h(t)$  ”konvergerar” mot då  $h \rightarrow 0$ . Eftersom  $\delta(t)$  inte är en funktion rör det sig om en helt annan typ av konvergens än den vi stött på hittills.  $\square$

## Historiska notiser

Den matematiska analysens pionjärer ISAAC NEWTON (1642–1727) och GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) använde sig av ett intuitivt integralbegreppet som var kopplat till begreppet derivata via integralkalkylens fundamentalsats. Detta var oproblematiskt eftersom endast funktioner givna av analytiska uttryck var föremål för integration. Behovet av en rigorös integraldefinition uppstod därför först i samband med att själva funktionsbegreppet vidgades, vilket skedde runt 1830.

BERNHARD RIEMANN (1826–1866) ger en precis definition av integralbegreppet år 1854 i sin habilitationsskrift som handlar om trigonometriska serier. Riemannintegralen, som är den integral som lärs ut i grundläggande matematikkurser, är fullt tillräcklig för den övervägande delen av praktiska tillämpningar, men den har en allvarlig brist i det att den inte uppför sig speciellt väl vid gränsövergång under integraltecknet.

I mer avancerade sammanhang används därför Lebesgueintegralen som introducerades 1904 av HENRI LEBESGUE (1875–1941). Exempel på en avgörande skillnad mellan Lebesgue- och Riemannintegralerna (som vi dock i den här framställningen bara kommer att använda en passant) är att med Lebesgueintegralen blir rummet  $L^2(\mathbf{R})$  fullständigt, dvs. varje Cauchyföljd av funktioner i  $L^2(\mathbf{R})$  konvergerar mot en gränsv funktion i  $L^2(\mathbf{R})$ . Om rummet  $L^2(\mathbf{R})$  istället skulle ha definierats med hjälp av Riemannintegralen så skulle det inte ha denna egenskap.



## Kapitel 3

# Fourierserier

Fourieranalys går generellt ut på att representera funktioner som summor eller integraler av enkla beståndsdelar. När funktionerna är periodiska är dessa enkla beståndsdelar sinusfunktioner med frekvenser som står i ett harmoniskt förhållande till varandra, vilket betyder att samtliga frekvenser är heltalsmultipler av en gemensam grundfrekvens, och representationen har formen av en oändlig summa av sådana sinusfunktioner, *fourierserien*. För funktioner  $f$  med perioden  $2\pi$  innebär detta att fourierserien har formen

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nt + \phi_n)$$

eller, om man uttrycker sinusfunktionerna med hjälp av Eulers formler,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

I det här kapitlet ska vi visa hur man bestämmer en funktions fourierserie och hur den påverkas av enkla transformationer av funktionen. Vi kommer också att formulera några satser om fourierseriens konvergens – bevisen för dessa är ganska komplicerade och kräver en del förberedelser, så de behandlas först i nästa kapitel.

### 3.1 Periodiska funktioner

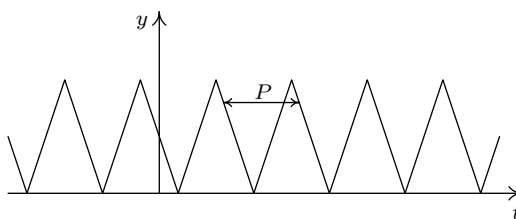
Vi påminner om att en funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *periodisk* om det finns ett nollskilt tal  $P$  sådant att

$$f(t + P) = f(t)$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Talet  $P$  kallas i så fall en *period* till funktionen.

Om funktionen  $f$  är periodisk med period  $P$ , så är också

$$f(t + 2P) = f(t + P) = f(t) = f(t - P) = f(t - 2P)$$



**Figur 3.1.** Periodisk funktion.

och mer allmänt att

$$f(t + nP) = f(t)$$

för alla heltal  $n$ . Funktionens period är således inte entydigt bestämd eftersom  $nP$  är en period för alla nollskilda heltal  $n$ .

Om  $P_1$  och  $P_2$  är två (olika) perioder till en funktion, så är

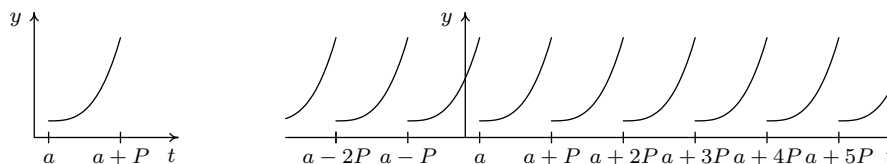
$$f(t + P_1 - P_2) = f(t + P_1) = f(t)$$

för alla  $t$ , så differensen  $P_1 - P_2$  är också en period. Härav följer, vilket vi lämnar som övningsuppgift att visa, att om en periodisk funktion har en *minsta* positiv period  $P_0$ , så är alla andra perioder heltalsmultipler av denna minsta period.

En periodisk funktion kan sakna minsta positiv period – exempelvis saknar förstås alla konstanta funktioner en minsta period – men i så fall måste funktionen ha godtyckligt små positiva perioder. Alla icke-konstanta, kontinuerliga, periodiska funktioner har en minsta positiv period.

Varje periodisk funktion med period  $P$  är fullständigt bestämd av sina värden på ett godtyckligt halvöppet intervall av längd  $P$ , exempelvis intervallet  $[0, P[$  eller intervallet  $] -P/2, P/2]$ .

Omvänt kan varje funktion  $f$  som ursprungligen är definierad på ett halvöppet intervall  $I = [a, b[$  av längd  $P$  utvidgas till en periodisk funktion  $\tilde{f}$  med period  $P$ ; den utvidgade funktionen definieras av att  $\tilde{f}(t + nP) = f(t)$  för  $t \in I$  och  $n \in \mathbf{Z}$ . Se figur 3.2.



**Figur 3.2.** Funktion  $f$  (vänster) och funktionens periodiska utvidgning  $\tilde{f}$  (höger).

Observera att för att den utvidgade funktionen  $\tilde{f}$  skall vara kontinuerlig på hela reella axeln räcker det inte att funktionen  $f$  är kontinuerlig på det halvöppna intervallet  $I$ , utan dessutom måste högergränsvärdet  $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$  av  $f$  i den vänstra ändpunkten av intervallet vara lika med vänstergränsvärdet  $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$  av  $f$  i den högra ändpunkten av samma intervall. Detta beror på att  $\lim_{t \rightarrow a^-} \tilde{f}(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$  och  $\lim_{t \rightarrow a^+} \tilde{f}(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ .

En motsvarande anmärkning gäller förstås beträffande deriverbarhet.

### Perioditetsbevarande operationer

Summor och produkter av periodiska funktioner med samma period  $P$  är uppenbarligen också periodiska med period  $P$ .

Exempelvis är funktionen  $\sin 2t + 3 \cos 3t$  periodisk med perioden  $2\pi$  eftersom detta är en gemensam period till de båda funktionerna  $\sin 2t$  och  $\cos 3t$ .

Vi påminner om att translatet  $T_\tau f$  till den funktion  $f$  ges av att  $T_\tau f(t) = f(t - \tau)$  för alla  $t$ . Om funktionen  $f$  är periodisk med period  $P$ , så är samtliga translat  $T_\tau f$  periodiska med samma period  $P$ , ty

$$T_\tau f(t + P) = f(t + P - \tau) = f(t - \tau) = T_\tau f(t)$$

för alla  $t$ .

Om  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  är en godtycklig funktion och  $a$  är ett nollskilt reellt tal, så säger vi att funktionen  $S_a f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  som definieras av att

$$S_a f(t) = f(at),$$

erhållits av  $f$  genom en *skalning* (på argumentsidan). Periodicitet bevaras också under skalning, men nu förändras periodlängden: Om funktionen  $f$  är periodisk med period  $P$  så är den omskalade funktionen  $S_a f$  periodisk med period  $P/a$ .

Eftersom varje heltalsmultipel av en period också är en period, drar vi slutsatsen att i de fall då skalningsfaktorn  $a$  är ett heltal och funktionen  $f$  är periodisk med period  $P$ , så är  $P$  också en period till den skalade funktionen  $S_a f$ .

Om vi vill studera periodiska funktioner, kan vi utan inskränkning koncentrera oss på funktioner med en specifik period  $P_0$ . Om  $f$  är en godtycklig funktion med period  $P$  och vi väljer  $a = P/P_0$ , så blir nämligen den skalade funktionen  $g = S_a f$  periodisk med period  $P_0$ . Olika egenskaper hos den periodiska funktionen  $g$  kan vi sedan enkelt översätta till egenskaper hos  $f$  eftersom vi återfår funktionen  $f$  ur funktionen  $g$  genom en ny skalning som  $f = S_{1/a} g$ . Den speciella periodlängd som vi kommer att välja lite längre fram är  $P_0 = 2\pi$ , och det beror förstås på att våra elementära trigonometriska funktioner sinus och cosinus har just den periodlängden.

EXEMPEL 3.1.1. Funktionen  $\sin(2t+3)$  kan fås ur funktionen  $\sin t$  genom att först utföra en translation (med  $-3$  enheter), vilket bevarar periodlängden, och sedan skala argumentet med skalningsfaktorn 2, vilket halverar periodlängden. Funktionen (minsta) period är således  $\pi$ .  $\square$

### Integralen över en periodlängd

Integralen av en periodisk funktion över ett intervall av periodens längd är oberoende av intervallets läge på reella axeln. Detta är geometriskt uppenbart (se figur 3.3), och ett formellt bevis erhålls med hjälp av några enkla variabelbyten på följande vis.

Antag att funktionen  $f$  har period  $P$  och betrakta integralen över intervallet  $[a, a+P]$ . För att visa att denna integral är lika med integralen över intervallet  $[0, P]$ , bestämmer vi först heltalet  $n$  så att talet  $b = a - nP$  ligger i det halvöppna intervallet  $[0, P[$ . Med hjälp av två variabelbyten får vi sedan

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad \int_a^{a+P} f(t) dt &= \int_a^{(n+1)P} f(t) dt + \int_{(n+1)P}^{a+P} f(t) dt \\
 &= \int_a^{(n+1)P} f(t - nP) dt + \int_{(n+1)P}^{a+P} f(t - (n+1)P) dt \\
 &= \int_b^P f(u) du + \int_0^b f(u) du = \int_0^P f(u) du.
 \end{aligned}$$



**Figur 3.3.** Integralen av en periodisk funktion över en periodlängd är oberoende av intervallets läge.

Ett annat sätt att uttrycka likheten (3.1) är att integralen över ett intervall av periodens längd är densamma för alla translater av funktionen  $f$ . Vi kan generalisera detta genom att även tillåta skalningar med heltalsfaktorer och får då följande resultat.

**Sats 3.1.1.** Antag att funktionen  $f$  är integrerbar och periodisk med period  $P$ , att  $n$  är ett nollskilt heltal och att  $\tau$  är ett godtyckligt reellt tal. Då är

$$\int_0^P f(nt + \tau) dt = \int_0^P f(t) dt.$$



*Bevis.* Varje variabelbyte av typen  $u = nt + \tau$  kan skrivas som en sammansättning av en translation  $u = t + c$ , en skalning  $u = nt$  med  $n > 0$  och (om  $n < 0$ ) en inversion  $u = -t$ , och det räcker att visa likheten i satsen för dessa tre specialfall. Genom att utnyttja att integralen av  $f$  över ett godtyckligt intervall av längd  $P$  är lika med integralen över intervallet  $[0, P]$  får vi i respektive fall efter variabelbyte:

$$\begin{aligned}\int_0^P f(t+c) dt &= \int_c^{c+P} f(u) du = \int_0^P f(u) du; \\ \int_0^P f(nt) dt &= \frac{1}{n} \int_0^{nP} f(u) du = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)P}^{kP} f(u) du \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^P f(u) du = \int_0^P f(u) du; \\ \int_0^P f(-t) dt &= - \int_0^{-P} f(u) du = \int_{-P}^0 f(u) du = \int_0^P f(u) du. \quad \square\end{aligned}$$

## Övningar

- 3.1 Bestäm den minsta positiva perioden till funktionen  $f(t) = \sin 6\pi t$ .
- 3.2 Definiera funktionen  $f$  genom att sätta  $f(t) = 0$  om  $t$  är ett rationellt tal och  $f(t) = 1$  om  $t$  är ett irrationellt tal. Vad har denna funktion för perioder?
- 3.3 Anta att  $P$  och  $P_0$  är två perioder till en periodisk funktion. Visa att för varje heltal  $n$  är  $P - nP_0$  också en period eller lika med 0. Utnyttja sedan detta för att visa att om en periodisk funktion har en minsta positiv period  $P_0$ , så är varje annan period  $P$  en heltalsmultipel av  $P_0$ .
- 3.4 Visa att om periodisk funktion saknar minsta positiv period, så måste den ha godtyckligt små perioder.
- 3.5 Visa att om en periodisk kontinuerlig funktion saknar minsta positiv period, så är den konstant.
- 3.6 Funktionen  $f$  är periodisk med period 2 och för  $0 \leq t < 2$  är  $f(t) = t^2$ . Beräkna integralen  $\int_{-1}^1 f(t) dt$ .

## 3.2 Trigonometriska polynom

### Sinusoiden

Den rena sinusvågen eller *sinusoiden* är en grundläggande vågform inom akustik, elektricitetslära, signal- och bildbehandling och många andra till-

lämpningar. Matematiskt beskrivs en sådan våg med tiden  $t$  som variabel av den periodiska funktionen

$$(3.2) \quad f(t) = A \sin(\omega t + \phi).$$

Här är  $A$  och  $\omega$  positiva tal och  $\phi$  är ett reellt tal. Talet  $A$  kallas *amplituden* och anger vågens maximala avvikelse från jämviktsläget,  $\omega$  kallas *vinkelfrekvensen* och  $\phi$  kallas *fasvinkeln*. Fasvinkeln specificerar var i cykeln svängningarna börjar då  $t = 0$ , och jämfört med vågen  $A \sin(\omega t)$  är vågen (3.2) förskjuten  $\phi/\omega$  tidsenheter åt vänster.

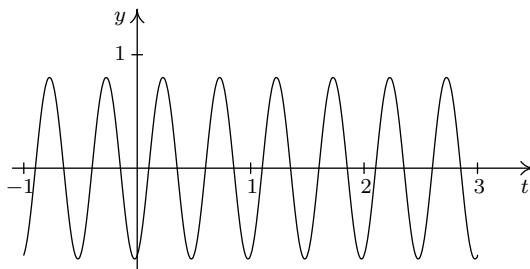
Vågfunktionen  $f$  är periodisk med minsta period

$$P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Vågens frekvens  $\nu$ , dvs. antalet perioder eller cykler per tidsenhet, är följaktligen

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi},$$

vilket ger oss sambandet  $\omega = 2\pi\nu$  mellan vinkelfrekvens och frekvens.



**Figur 3.4.** Sinusoiden  $y = 0.8 \sin(4\pi t + 5)$ .

Vågframställningen (3.2) har den fördelen att de ingående parametrarna har omedelbara fysikaliska tolkningar, men den matematiska behandlingen förenklas av några omformuleringar. Genom att utnyttja additionsformeln

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

kan vi skriva vågfunktionen (3.2) på *trigonometrisk form* som

$$(3.3) \quad f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

med följande samband mellan parametrarna  $A$ ,  $\phi$  och parametrarna  $a$ ,  $b$ :

$$a = A \sin \phi, \quad b = A \cos \phi.$$

Omvänt återfår vi förstas amplitud-fasvinkelframställningen (3.2) ur formeln (3.3) genom att sätta

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},$$

och sedan bestämma fasvinkeln  $\phi$  som en lösning till systemet

$$\sin \phi = a/A, \quad \cos \phi = b/A.$$

Ytterligare en mycket användbar variant, *exponentialformen*, erhålls genom att utnyttja Eulers formler

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Insättning av dessa i ekvation (3.3) leder efter förenkling till formeln

$$f(t) = C_- e^{-i\omega t} + C_+ e^{i\omega t},$$

där

$$C_- = \frac{1}{2}(a + ib), \quad C_+ = \frac{1}{2}(a - ib).$$

I andra riktningen är

$$a = C_- + C_+, \quad b = i(C_+ - C_-).$$

### Trigonometriska polynom

Linjärkombinationer som bildas av en konstant och sinusoider vars frekvenser är multipler av en given fix frekvens, kallas trigonometriska polynom. Med sinusoiderna skrivna på trigonometrisk form får vi följande definition:

**Definition.** Ett *trigonometriskt polynom* är en ändlig summa av typen

$$P_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

där koefficienterna  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  är godtyckliga komplexa tal.

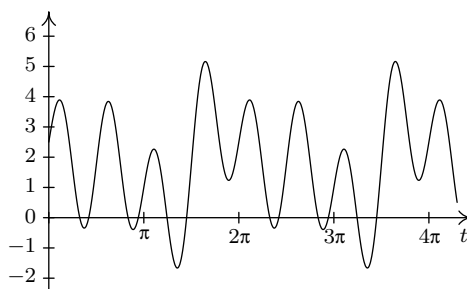
Trigonometriska polynom är kontinuerliga periodiska funktioner med period  $2\pi/\omega$ . Att vi kallar den konstanta termen för  $a_0/2$  och inte  $a_0$  beror på att det kommer att ge oss snyggare formler för koefficienterna längre fram.

Genom att utnyttja Eulers formler kan vi skriva det trigonometriska polynomet i definitionen ovan på formen

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$$

med följande samband mellan koefficienterna:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \\ a_n &= c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$



**Figur 3.5.** Det trigonometriska polynomet  
 $1.75 + \cos t - \sin 2t - 0.25 \cos 3t + 2 \sin 4t$ .

EXEMPEL 3.2.1. Skriv  $\cos^3 t$  som ett trigonometriskt polynom.

*Lösning:* Funktionen  $\cos^3 t$  har inte den rätta formen, men genom att utnyttja att  $\cos kt = \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt})$  och kombinera med binomialsatsen får vi

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \frac{1}{8}(e^{it} + e^{-it})^3 = \frac{1}{8}(e^{3it} + 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t. \quad \square\end{aligned}$$

### Dirichlets polynom

Det trigonometriska polynomet

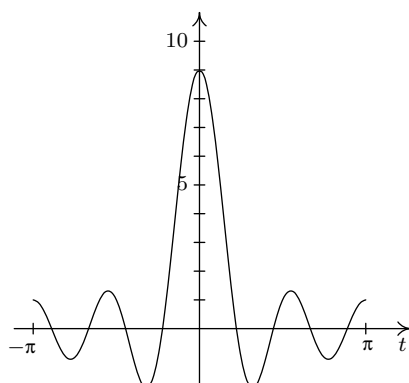
$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}$$

kommer att spela en viktig roll längre fram. Polynomet kallas *Dirichlets polynom* av grad  $N$ , och vi kan bestämma ett explicit uttryck för det eftersom det är en geometrisk summa av  $2N + 1$  termer med  $e^{-iNt}$  som första term och  $e^{it}$  som kvot. Med hjälp av summaformeln och Eulers former erhålls:

$$\begin{aligned}D_N(t) &= e^{-iNt} \cdot \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \cdot \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}.\end{aligned}$$

För  $t = 0$  är förstås  $D_N(0) = 2N + 1$ , vilket också är lika med gränsvärdet av högerledet ovan då  $t \rightarrow 0$ .

Dirichlets polynom är uppenbarligen jämnt, dvs.  $D_N(-t) = D_N(t)$ .



**Figur 3.6.** Dirichlets polynom  $D_4(t)$ .

### Övningar

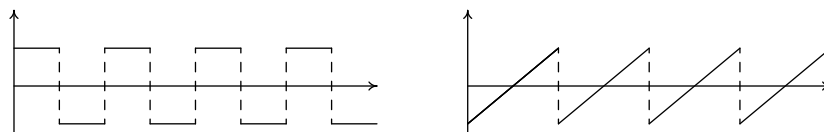
- 3.7 Skriv sinusoiden  $y = 3 \sin(2t + \frac{\pi}{4})$  på exponentialform.
- 3.8 Visa att summan av två sinusoider med samma vinkelfrekvens  $\omega$  är en ny sinusoid med vinkelfrekvensen  $\omega$ .
- 3.9 Visa att summan  $C_+e^{i\omega t} + C_-e^{-i\omega t}$  är en sinusoid  $A \sin(\omega t + \phi)$  med reell amplitud  $A$  om och endast om  $C_- = \overline{C_+}$ .
- 3.10 Skriv  $\cos^3 t$  som ett trigonometriskt polynom på amplitud-fasvinkel-form.
- 3.11 Skriv  $\sin^4 t$  som ett trigonometriskt polynom på exponentialform och på trigonometrisk form.
- 3.12 Skriv Dirichlets polynom  $D_N(t)$  på trigonometrisk form, dvs. som en summa av sinus- och cosinusfunktioner.
- 3.13 Hur många nollställen har  $D_N(t)$  på intervallet  $[-\pi, \pi]$ ?

### 3.3 Fourierserien

Vårt mål är att representera tämligen godtyckliga periodiska funktioner som trigonometriska serier. Eftersom varje periodisk funktion kan transformeras till en funktion med period  $2\pi$  med hjälp av en skalning, kan vi då utan att förlora i generalitet anta att perioden hos de studerade funktionerna är just  $2\pi$ , något som kommer att förenkla en del formler. Försättningsvis använder vi därför begreppet *periodisk funktion* i betydelsen *periodisk funktion med period  $2\pi$* , om inte annat sägs explicit.

### Rummet $L^1(\mathbf{T})$

Även om klassen av kontinuerliga periodiska funktioner är stor, så finns det förstås många i olika tillämpningar förekommande intressanta och viktiga funktioner som inte är kontinuerliga och som vi vill kunna fourierserietveckla. Två exempel på diskontinuerliga signaler från signalteorin är ”fyrkantsvågen” och ”sågtandsvågen”, som visas i figur 3.7.



**Figur 3.7.** Fyrkantsvåg och sågtandsvåg

En funktionsklass som innehåller alla kontinuerliga och alla begränsade styckvis kontinuerliga periodiska funktioner är klassen av alla periodiska funktioner som är absolutintegrabla över en period, dvs. över ett intervall av längd  $2\pi$ . För dem och för de kontinuerliga periodiska funktionerna inför vi följande beteckningar.

**Definition.** Klassen av alla kontinuerliga periodiska funktioner med period  $2\pi$  betecknas  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ , och klassen av alla periodiska funktioner med period  $2\pi$  som är absolutintegrabla över ett intervall av periodens längd betecknas  $L^1(\mathbf{T})$ .

Bokstaven  $\mathbf{T}$  i beteckningen är vald därför att den är första bokstav i ordet ”torus”. Periodiska funktioner kan nämligen på ett naturligt sätt uppfattas som funktioner definierade på enhetscirkeln, den endimensionella torusen.

Klassen  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$  är ett normerat vektorrum med

$$\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|$$

som norm, och rummet innehåller uppenbarligen alla trigonometriska polynom.

Eftersom en periodisk funktion är entydigt bestämd av sina värden i exempelvis intervallet  $[0, 2\pi]$ , kan vi uppenbarligen identifiera rummet  $L^1(\mathbf{T})$  med  $L^1([0, 2\pi])$  som vi studerade i avsnitt 2.4, och som norm i  $L^1(\mathbf{T})$  använder vi följaktligen

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

För att bli av med faktorn  $1/2\pi$  i en mängd formler visar det sig praktiskt

att införa den normaliserade integralen  $\int_{\mathbf{T}} f(t) dt$  genom att sätta

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

På grund av periodiciteten är då förstås

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(t) dt$$

för varje intervall  $[a, b]$  av längd  $2\pi$ .

Vi kommer fortsättningsvis att kalla  $\int_{\mathbf{T}} f(t) dt$  för *integralen av funktionen  $f$  över  $\mathbf{T}$* , och med vår nya beteckning blir följaktligen

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt.$$

Som vi redan påpekat i avsnitt 2.4 är  $L^1(\mathbf{T})$  ett normerat vektorrum med  $\|\cdot\|_1$  som norm. Rummet innehåller  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$  som tät delmängd. Dessutom är rummet translationsinvariant och invariant under skalning med heltalsfaktorer. Med detta menas att om  $f \in L^1(\mathbf{T})$ ,  $\tau$  är ett godtyckligt reellt tal och  $m$  är ett godtyckligt nollskilt heltal, så ligger såväl translatet  $T_\tau f$  som den skalade funktionen  $S_m f$  i  $L^1(\mathbf{T})$ , och

$$\int_{\mathbf{T}} f(t - \tau) dt = \int_{\mathbf{T}} f(mt) dt = \int_{\mathbf{T}} f(t) dt.$$

### De trigonometriska polynomets koefficienter

Vårt mål är som nämnts att skriva en tämligen godtycklig funktion  $f$  som en trigonometrisk serie eller mer generellt att skriva  $f$  som ett gränsvärde av en följd av trigonometriska polynom (som i seriefallet är seriens partialsummor), och vi har vidare specificerat att vi med "godtycklig funktion" menar en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$ . Koefficienterna i de approximerande trigonometriska polynomen till en funktion kommer att ges i form av speciella integraler med funktionen och den komplexa exponentialfunktionen som ingredienser. Förutom exponentialfunktionens multiplikativa egenskaper kommer vi då att utnyttja följande egenskap:

**Lemma 3.3.1.** *För alla heltal  $n$  är*

$$\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0, \\ 0 & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$$

*Bevis.* För nollskilda heltal  $n$  är

$$\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{1}{2n\pi i} \left[ e^{int} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2n\pi i} (e^{2n\pi i} - 1) = 0$$

och för  $n = 0$  fås förstås

$$\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \int_{\mathbf{T}} 1 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1. \quad \square$$

Vi ska börja med att skaffa oss en formel för trigonometriska polynoms koefficienter. Betrakta för den skull ett trigonometriskt polynom

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$$

på exponentialform, och låt oss beräkna integralen

$$\int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-ikt} dt$$

då  $k$  är ett heltal mellan  $-N$  och  $N$ . Eftersom  $P(t) e^{-ikt} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i(n-k)t}$ , blir

$$\int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=-N}^N c_n \int_{\mathbf{T}} e^{i(n-k)t} dt.$$

På grund av lemma 3.3.1 är alla termer i summan ovan lika med noll utom den term som fås då summationsindex  $n$  är lika med  $k$ . Slutsatsen är att

$$\int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-ikt} dt = c_k,$$

och vi har därmed funnit följande formel för koefficienterna  $c_n$  i polynomet  $P(t)$ :

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} dt.$$

### Fourierkoefficienter

De trigonometriska polynomen är periodiska funktioner, men det finns naturligtvis periodiska funktioner som inte är trigonometriska polynom, dvs. ändliga summor av sinus- och cosinusfunktioner, eller ekvivalent komplexa exponentialfunktioner. Det ligger då nära tillhands att undersöka om inte alla periodiska funktioner kan skrivas som oändliga summor. Det ideala vore att hitta en serierepresentation av typen

$$(3.4) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int}$$



där den oändliga summan skall tolkas som gränsvärdet av partialsummorna

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

då  $N$  går mot oändligheten.

Om nu  $S_N(t)$  konvergerar mot  $f(t)$  på ett "hyggligt" vis<sup>1</sup>, så kan man dra slutsatsen att integralerna  $\int_{\mathbf{T}} S_N(t) e^{-int} dt$  konvergerar mot  $\int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt$  då  $N$  går mot oändligheten. Men vi vet från föregående avsnitt att

$$\int_{\mathbf{T}} S_N(t) e^{-int} dt = c_n$$

om  $|n| \leq N$ , så följaktligen är i så fall också  $\int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt = c_n$  för alla  $n$ . Detta innebär att om vi har en framställning på formen (3.4) och om konvergensen är hygglig, så vet vi vad koefficienterna  $c_n$  är; de måste ges av formeln

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt.$$

Nu observerar vi att högerledet i denna formel är väldefinierat och meningsfullt för alla funktioner  $f \in L^1(\mathbf{T})$  eftersom funktionen  $f(t) e^{-int}$  tillhör  $L^1(\mathbf{T})$  om  $f$  gör det. Formeln får därför bli utgångspunkt för följande generella definition.

**Definition.** För  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och  $n \in \mathbf{Z}$  sätter vi

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt$$

och kallar talen  $\hat{f}(n)$  för  $f$ :s *fourierkoefficienter*. Serien

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

kallas funktionens *fourierserie*.

Fourierserien säges vara *konvergent* i punkten  $t$  om följderna  $(S_N f(t))_{N=0}^\infty$  av partialsummor

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

konvergerar då  $N$  går mot oändligheten.

---

<sup>1</sup>t. ex. likformigt på intervallet  $[0, 2\pi]$ , vilket är en typ av konvergens som behandlas i nästa kapitel.

Notera speciellt att koefficienten

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

är lika med medelvärdet av funktionen  $f$  över en period.

Vi kommer att skriva

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

för att ange att serien ifråga är fourierserie till funktionen  $f$ . Observera att vi därmed inte påstår att fourierserien konvergerar – konvergensen är ett delikat problem som vi kommer att behandla i senare avsnitt.

Genom att bilda fourierkoefficienterna till en funktion  $f$  skaffar vi oss en följd  $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbf{Z}}$  av komplexa tal, och avbildningen  $\mathcal{F}$  som definieras av att

$$\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbf{Z}}$$

för alla funktioner  $f \in L^1(\mathbf{T})$ , är ett exempel på en transform, *fouriertransformen på  $L^1(\mathbf{T})$* . Tre naturliga frågor som då uppstår är:

1. Är avbildningen  $\mathcal{F}$  injektiv, dvs. är funktionen  $f$  entydigt bestämd av sina fourierkoefficienter?
2. Kan vi om så är fallet bestämma inversen  $\mathcal{F}^{-1}$ , dvs. rekonstruera funktionen  $f$  från dess fourierkoefficienter?
3. Kan vi karakterisera bildmängden till  $\mathcal{F}$ , dvs. vilka följder som kan vara fourierkoefficienter?

Svaret på de två första frågorna är ja, men beviset för att så är fallet är inte helt enkelt och får därför anstå till kapitel 4. Den tredje frågan har inte något enkelt svar, men en sak kan vi säga redan nu – följderna av fourierkoefficienter måste vara begränsad. Det finns exempelvis ingen funktion  $f$  vars fourierkoefficienter är  $\hat{f}(n) = n$ . Begränsningen är en konsekvens av följande sats:

**Sats 3.3.2.** *Antag  $f \in L^1(\mathbf{T})$ . Då är  $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ .*

*Bevis.* Påståendet är en direkt följd av triangelolikheten för integraler:

$$|\hat{f}(n)| = \left| \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \int_{\mathbf{T}} |f(t) e^{-int}| dt = \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt = \|f\|_1. \quad \square$$

**EXEMPEL 3.3.1.** Låt oss bestämma fourierserien till den  $2\pi$ -periodiska funktion  $f$  som bestäms av att  $f(t) = t$  för  $|t| < \pi$ . (Notera att vi inte specificerat något funktionsvärde i punkten  $\pi$ , och därmed inte heller i någon av punkterna  $n\pi$  för udda heltal  $n$ . Funktionsvärdet  $f(\pi)$  är emellertid irrelevant,

eftersom integralen som definierar fourierkoefficienterna inte bryr sig om funktionsvärdet i en enstaka punkt.)

Fourierkoefficienten  $\hat{f}(0)$  fås direkt som

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0,$$

medan fourierkoefficienter  $\hat{f}(n)$  för  $n \neq 0$  beräknas med hjälp av en partiell integration:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \left[ t \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi ni} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{-2\pi ni} (\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}) + 0 = \frac{i}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Således gäller att

$$f(t) \sim i \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{int}.$$

Vi kan skaffa oss ett alternativt uttryck för fourierserien genom att kombinera termer som svarar mot  $-n$  och  $n$ :

$$i \frac{(-1)^{-n}}{-n} e^{-int} + i \frac{(-1)^n}{n} e^{int} = \frac{(-1)^n}{n} i (e^{int} - e^{-int}) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Detta innebär att

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt,$$

vilket är fourierseriens trigonometriska form.

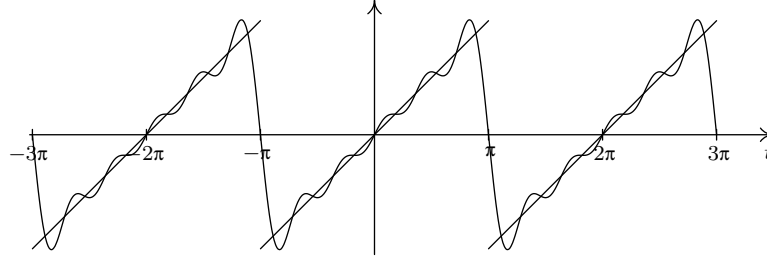
Genom att utnyttja att  $-\sin t = \sin(t + \pi)$  får vi också fourierserien på amplitud-fasvinkelform:

$$f(t) \sim \sum_{n \text{ udda}} \frac{2}{n} \sin nt + \sum_{n \text{ jämn}} \frac{2}{n} \sin(nt + \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nt + \phi_n),$$

där

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är udda,} \\ \pi & \text{om } n \text{ är jämnt.} \end{cases}$$

Vi har än så länge inte verktyg nog för att visa att fourierserien konvergerar mot  $f(t)$  utan får vänta till avsnitt 4.8 innan vi kan göra detta, men figur 3.8 som visar delsumman med fem termer, ger en klar indikation på att så är fallet i alla kontinuitetspunkter till  $f$ .  $\square$



**Figur 3.8.** Funktionen  $f$  i exempel 3.3.1 och delsumman  $\sum_{n=1}^5 \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$  till funktionens fourierserie.

### Trigonometrisk form

Exempel 3.3.1 visar att det finns flera alternativa sätt att skriva en funktions fourierserie på – formen

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

är enklast och bäst när vi ska analysera serien, men den känns inte lika naturlig i många tillämpningssammanhang, speciellt inte om funktionen  $f$  är reell. Genom att utnyttja att

$$\hat{f}(n) e^{int} + \hat{f}(-n) e^{-int} = (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)) \cos nt + i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) \sin nt$$

och sätta

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \quad \text{och} \quad b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)),$$

samt observera att detta speciellt innebär att  $\hat{f}(0) = a_0/2$ , ser vi att

$$(3.5) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Serien i högerledet av (3.5) kallas fourierseriens *trigonometriska form*. Eftersom

$$\hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \int_{\mathbf{T}} f(t) (e^{-int} + e^{int}) dt = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt dt$$

och

$$i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = i \int_{\mathbf{T}} f(t) (e^{-int} - e^{int}) dt = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt dt$$

ges den trigonometriska formens koefficienter  $a_n$  och  $b_n$  av följande integraler:

$$(3.6) \quad a_n = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt dt.$$

Observera att koefficienterna  $a_n$  och  $b_n$  säkert är reella om funktionen  $f$  är reell. En fourierseries partialsummor

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

är således reellvärda trigonometriska polynom om själva funktionen  $f$  är reellvärd.

### Övningar

3.14 Beräkna  $\int_{\mathbf{T}} P(t) \sin 2t \, dt$  och  $\int_{\mathbf{T}} P(t) \cos 2t \, dt$  för det trigonometriska polynomet

$$P(t) = 2e^{-i3t} - e^{-i2t} + 4e^{-it} + 5 + e^{it} + 3e^{i2t} + 5e^{i6t}.$$

3.15 Beräkna  $\int_{\mathbf{T}} P(t) \sin t \, dt$  för det trigonometriska polynomet

$$P(t) = 2 + \cos t - 4 \sin t + 3 \cos 2t + 10 \sin 2t.$$

3.16 Bestäm fourierserien till den periodiska funktionen  $f$  om

- a)  $f(t) = 2 \sin t + 3 \cos 2t + 4 \sin 3t$       b)  $f(t) = \cos^2 3t$   
 c)  $f(t) = t^2$  för  $-\pi < t \leq \pi$       d)  $f(t) = e^t$  för  $-\pi < t \leq \pi$   
 e)  $f(t) = 0$  för  $-\pi < t < 0$  och  $f(t) = \sin t$  för  $0 \leq t \leq \pi$ .

### 3.4 Sinus- och cosinusserier

Fourierserien i exempel 3.3.1 innehåller bara sinustermer. Detta är ingen tillfällighet och beror på att funktionen är udda. Om funktionen  $f$  är *udda*, så är också  $f(t) \cos nt$  udda, och det följer därför att integralen av  $f(t) \cos nt$  över intervallet  $[-\pi, \pi]$  är lika med noll, vilket på grund av formel (3.6) betyder att  $b_n = 0$ . Eftersom funktionen  $f(t) \sin nt$  under samma premisser är jämn, kan vi vidare ersätta integralen av  $f(t) \sin nt$  över intervallet  $[-\pi, \pi]$  med två gånger integralen av samma funktion över intervallet  $[0, \pi]$ .

För udda periodiska funktioner  $f$  har vi med andra ord följande formler för fourierkoefficienterna  $a_n$  och  $b_n$ :

$$a_n = 0 \quad \text{och} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin nt \, dt.$$

Helt analogt gäller för *jämna* periodiska funktioner  $f$  att

$$b_n = 0 \quad \text{och} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt$$

för alla  $n$ .

EXEMPEL 3.4.1. Låt  $f$  vara den  $2\pi$ -periodiska funktion som för  $|t| \leq \pi$  ges av att  $f(t) = |t|$ . Eftersom funktionen är jämn är funktionens fourierserie en ren cosinusserie,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

Fourierkoefficienterna är

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi \quad \text{och} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n} \, dt \right) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \quad \text{för } n \geq 1. \end{aligned}$$

Koefficienterna med jämna index  $\geq 2$  är tydligen lika med noll, så därför kan vi skriva fourierserien på formen

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

Serien är tydligen absolutkonvergent för alla  $t$  på grund av jämförelsekriteriet, men är summan lika med  $f(t)$ ? Svaret är ja, men motiveringen får vi återkomma till senare.  $\square$

Vi kan utnyttja det faktum att en udda funktions fourierserie bara innehåller sinustermer och en jämn funktions fourierserie bara innehåller cosinustermer för att utveckla funktioner definierade på intervallet  $[0, \pi]$  i rena sinusserier eller rena cosinusserier.

Antag nämligen att  $f$  är en integrerbar funktion med intervallet  $[0, \pi]$  som definitionsområde. Om vi utvidgar  $f$  till en jämn  $2\pi$ -periodisk funktion  $\tilde{f}$  genom att definiera  $\tilde{f}(-t) = \tilde{f}(t) = f(t)$  för  $0 \leq t \leq \pi$ , så är alla sinus-koefficienter i fourierserieutvecklingen av  $\tilde{f}$  lika med noll. Det följer att vi kan representera  $f(t)$  som

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

i alla punkter  $t \in [0, \pi]$  där serien konvergerar mot  $f(t)$ .

På liknande sätt erhåller vi, genom att utvidga  $f$  till en udda  $2\pi$ -periodisk funktion  $\tilde{f}$ , en representation av  $f$  i form av en ren sinusserie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt,$$

i alla punkter  $t \in ]0, \pi[$  där serien konvergerar mot  $f(t)$ .

EXEMPEL 3.4.2. Låt  $f(t) = t$  för  $0 \leq t \leq \pi$ . Den jämna utvidgningen är  $\tilde{f}(t) = |t|$  för  $|t| \leq \pi$ , och denna funktion har en cosinusserie som vi bestämde i exempel 3.4.1. Eftersom serien i det här fallet är konvergent med funktionsvärdet som summa i alla punkter följer det speciellt att

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$

för  $0 \leq t \leq \pi$ .

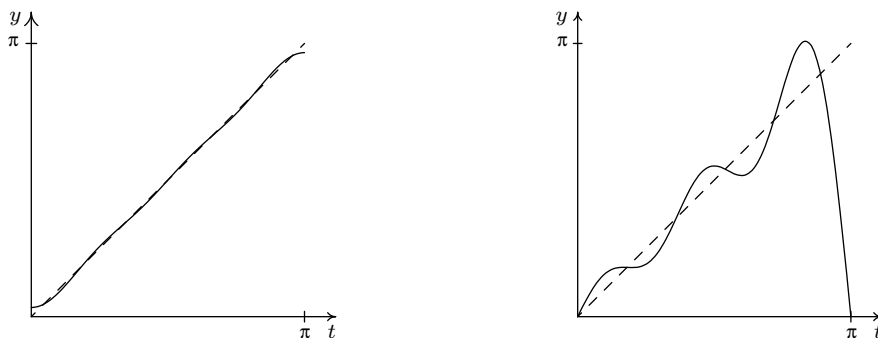
Den udda utvidgningen  $\tilde{f}$  av  $f$  ges förstås av att  $\tilde{f}(t) = t$  för  $-\pi < t < \pi$ . Vi beräknade fourierserien av den funktionen i exempel 3.3.1 och fann då att

$$\tilde{f}(t) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Serien konvergerar mot  $\tilde{f}(t)$  för  $-\pi < t < \pi$ , varför

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt \quad \text{om } 0 \leq t < \pi.$$

Figur 3.9 visar att konvergensen mot  $f(t)$  är bättre för cosinusserien än för sinusserien, något som är helt naturligt eftersom koefficienterna i cosinusserien har en mindre storleksordning än koefficienterna i sinusserien.  $\square$



**Figur 3.9.** Partialsummorna  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t)$  till cosinusserien (vänster) och  $2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{2}{5} \sin 5t$  till sinusserien (höger) för funktionen  $f(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

## Övningar

3.17 Utveckla funktionen  $f(t) = \cos t$  i sinusserie på intervallet  $0 < t < \pi$ .

3.18 Utveckla funktionen  $f(t) = \sin t$  i cosinusserie på intervallet  $0 < t < \pi$ .

### 3.5 Räknerregler

Rummet  $L^1(\mathbf{T})$  är ett vektorrum som är invariant under translation och under skalning med heltaliga skalfaktorer, och fouriertransformering kan uppfattas som en avbildning  $\mathcal{F}: f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  från  $L^1(\mathbf{T})$  till vektorrummet av alla begränsade följder. De två första likheterna i följande sats visar att fouriertransformering är en linjär avbildning, medan återstående två likheter visar hur fouriertransformering fungerar i kombination med translation  $T_\tau$  och skalning  $S_m$ . Vi erinrar då om att  $T_\tau f(t) = f(t - \tau)$  och  $S_m f(t) = f(mt)$ .

**Sats 3.5.1.** *Antag att  $f$  och  $g$  är funktioner i  $L^1(\mathbf{T})$ , att  $c$  är ett komplext tal, att  $\tau$  är ett reellt tal samt att  $m$  är ett nollskilt heltal. För alla heltal  $n$  är då*

$$\begin{aligned}\widehat{(f+g)}(n) &= \hat{f}(n) + \hat{g}(n), \\ \widehat{(cf)}(n) &= c\hat{f}(n), \\ \widehat{(T_\tau f)}(n) &= e^{-in\tau} \hat{f}(n), \\ \widehat{(S_m f)}(n) &\begin{cases} \hat{f}(n/m) & \text{om } n \text{ är en multipel av } m, \\ 0 & \text{om } n \text{ inte är en multipel av } m. \end{cases}\end{aligned}$$

*Bevis.* De tre första likheterna följer av att integration är en linjär och translationsinvariant operation:

$$\begin{aligned}\widehat{(f+g)}(n) &= \int_{\mathbf{T}} (f(t) + g(t)) e^{-int} dt = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt + \int_{\mathbf{T}} g(t) e^{-int} dt \\ &= \hat{f}(n) + \hat{g}(n), \\ \widehat{(cf)}(n) &= \int_{\mathbf{T}} cf(t) e^{-int} dt = c \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt = c\hat{f}(n), \\ \widehat{(T_\tau f)}(n) &= \int_{\mathbf{T}} f(t - \tau) e^{-int} dt = e^{-in\tau} \int_{\mathbf{T}} f(t - \tau) e^{-in(t-\tau)} dt \\ &= e^{-in\tau} \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du = e^{-in\tau} \hat{f}(n).\end{aligned}$$

Om  $n = km$  är en multipel av  $m$ , så är vidare

$$\begin{aligned}\widehat{(S_m f)}(n) &= \int_{\mathbf{T}} f(mt) e^{-int} dt = \int_{\mathbf{T}} f(mt) e^{-ikmt} dt = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \hat{f}(k) = \hat{f}(n/m),\end{aligned}$$

där vi i den näst sista likheten utnyttjat oss av sats 3.1.1 tillämpad på den periodiska funktionen  $f(t)e^{-ikt}$ . För godtyckliga heltal  $n$  är vidare

$$\begin{aligned}\widehat{(S_m f)}(n) &= \int_{\mathbf{T}} f(mt) e^{-int} dt = \int_{\mathbf{T}} f(mt + 2\pi) e^{-int} dt \quad [u = t + 2\pi/m] \\ &= \int_{\mathbf{T}} f(mu) e^{-i(nu - 2\pi n/m)} du = e^{i2\pi n/m} \widehat{(S_m f)}(n).\end{aligned}$$



Om  $n$  inte är en multipel av  $m$ , så är  $2\pi n/m$  inte en heltalsmultipel av  $2\pi$ , och faktorn  $e^{i2\pi n/m}$  är då skild från 1. Det följer därför av likheten ovan att  $(\widehat{S_m f})(n) = 0$ .  $\square$

Låt  $f$  vara en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$  och definiera en ny funktion  $F$  genom att sätta

$$F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

Funktionen  $F$  kontinuerlig och  $F'(t) = f(t)$  i alla kontinuitetspunkter  $t$  till  $f$ . Funktionen  $F$  behöver emellertid inte vara periodisk; nödvändigt och tillräckligt för att så skall vara fallet, dvs. för att också  $F$  skall tillhöra  $L^1(\mathbf{T})$ , är att  $\int_{\mathbf{T}} f(u) du = 0$ , ty då blir

$$F(t + 2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(u) du = \int_0^{2\pi} f(u) du = 0$$

för alla  $t$ . Sambandet mellan de båda periodiska funktionernas fourierkoefficienter ges i detta fall av nästa sats.

**Sats 3.5.2.** (i) Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och att  $\int_{\mathbf{T}} f(u) du = 0$ , samt definiera

$$F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

Då är  $F$  en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$  och för alla nollskilda heltal  $n$  är

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in}.$$

(ii) Antag att funktionen  $f$  är periodisk och kontinuerligt deriverbar. Då är

$$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n).$$

*Bevis.* (i) Genom att använda definitionen av fourierkoefficient samt byta integrationsordning erhåller vi likheterna

$$\begin{aligned} \hat{F}(n) &= \int_{\mathbf{T}} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t f(u) e^{-int} du dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_u^{2\pi} f(u) e^{-int} dt du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \left[ \frac{e^{-int}}{-in} \right]_u^{2\pi} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \frac{e^{-inu} - 1}{in} du = \frac{1}{in} \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du - \frac{1}{in} \int_{\mathbf{T}} f(u) du \\ &= \frac{1}{in} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

(ii) Föreläsningsarna medför speciellt att  $f' \in L^1(\mathbf{T})$  och

$$f(t) = \int_0^t f'(u) du + f(0).$$

För  $n \neq 0$  är därför likheten  $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$  en omedelbar konsekvens av resultatet i (i), och för  $n = 0$  fås

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0$$

på grund av periodiciteten. □

Resultatet i (ii) kan naturligtvis itereras. Om funktionen  $f$  är periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar, så är

$$\widehat{f''}(n) = in\widehat{f'}(n) = -n^2\widehat{f}(n),$$

och om funktionen är  $k$  gånger kontinuerligt deriverbar, så är

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \widehat{f}(n).$$

Genom att kombinera likheten ovan med sats 3.3.2 får vi omedelbart följande resultat:

**Sats 3.5.3.** *Fourierkoefficienterna till en  $k$  gånger kontinuerligt deriverbar periodisk funktion  $f$  satisfierar för  $n \neq 0$  olikheten*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k},$$

där konstanten  $C$  är lika med  $k$ :te derivatans  $L^1$ -norm.

Speciellt går således deriverbara funktioners fourierkoefficienter mot noll då  $n$  går mot  $\pm\infty$ , och snabbare desto mer reguljär (deriverbar) funktionen är.

Om  $|\widehat{f}(n)| \leq C|n|^{-2}$  för  $n \neq 0$ , så är serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$  absolutkonvergent enligt jämförelsekriteriet. Vi kan alltså redan nu dra slutsatsen att en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion  $f$  har en konvergent fourierserie, men det återstår förstås att visa att seriens summa i punkten  $t$  är lika med funktionsvärdet  $f(t)$  (vilket den är).

Det nödvändiga (men inte tillräckliga villkoret) för fourierseriens konvergens att fourierkoefficienterna  $\widehat{f}(n)$  går mot noll då  $n$  går mot oändligheten är också uppfyllt för godtyckliga  $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner, och det är ett resultat som vi kommer att visa lite längre fram. (Se sats 4.6.1.)

### Övningar

- 3.19 Bestäm sambandet mellan  $\hat{f}(n)$  och  $\hat{g}(n)$  för funktionerna  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  om
- a)  $g(t) = f(t - c)$  för något reellt tal  $c$ ;
  - b)  $g(t) = e^{imt} f(t)$  för något heltal  $m$ ;
  - c)  $g(t) = f''(t - \pi)$ .
- 3.20 Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och definiera en ny funktion  $g \in L^1(\mathbf{T})$  genom att sätta  $g(t) = e^{2it} f(t - 3)$ . Bestäm sambandet mellan  $\hat{f}(n)$  och  $\hat{g}(n)$ .
- 3.21 Bevisa (ii) i sats 3.5.2 genom partiell integration.
- 3.22 Funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och periodisk med period  $2\pi$ . Vidare är  $f'(t) = 2if(t + \pi)$  för alla  $t$ . Bestäm  $f$ .

### 3.6 Faltning

För att avgöra om fourierserien till en funktion  $f$  konvergerar behöver vi studera fourierseriens partialsummor

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}.$$

I avsnitt 3.2 införde vi Dirichlets polynom  $D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}$  och påstod, utan att förklara varför, att det skulle spela en stor roll i fortsättningen. Nu kan vi ge förklaringen – partialsumman  $S_N f(t)$  kan uttryckas som en integral med hjälp av  $D_N(t)$  på följande vis:

**Sats 3.6.1.** *Låt  $f$  vara en godtycklig funktion i  $L^1(\mathbf{T})$ . Då är*

$$S_N f(t) = \int_{\mathbf{T}} f(t - s) D_N(s) ds.$$

*Bevis.* Vi utgår från formeln

$$D_N(s) = \sum_{n=-N}^N e^{ins},$$

som vi multiplicerar med  $f(t - s)$  och sedan integrerar. Detta leder till formeln

$$\int_{\mathbf{T}} f(t - s) D_N(s) ds = \sum_{n=-N}^N \int_{\mathbf{T}} f(t - s) e^{ins} ds.$$

Variabelbytet  $u = t - s$  i högerledets integraler ger

$$\int_{\mathbf{T}} f(t - s) e^{ins} ds = \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{in(t-u)} du = e^{int} \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du = \hat{f}(n) e^{int},$$

och därmed är formeln bevisad.  $\square$

Vi ska i nästa kapitel använda oss av formeln i sats 3.6.1 för att bevisa ett tillräckligt konvergensvillkor för fourierserier.

Det sätt som funktionen  $f$  och Dirichletpolynomet  $D_N$  kombineras på för att ge partialsumman  $S_N f(t)$  kallas en faltning. För allmänna periodiska funktioner definieras och betecknas faltningar på följande vis.

**Definition.** Med *faltningen*  $f * g$  av två funktioner  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  menas funktionen

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{T}} f(t-s)g(s) ds.$$

Med hjälp av faltningsdefinitionen kan vi således skriva vårt resultat i sats 3.6.1 kortare som

$$S_N f(t) = f * D_N(t).$$

Man kan visa att faltningen  $f * g$  av två  $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner är en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$  och att operationen är kommutativ och associativ, dvs. att

$$f * g = g * f$$

och

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

**Sats 3.6.2.** För normen av en faltning av två funktioner  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  gäller följande olikhet:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

*Bevis.* Genom att använda triangelolikheten för integraler samt kasta om integrationsordningen erhåller vi följande kedja av olikheter och likheter:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbf{T}} \left| \int_{\mathbf{T}} f(t-s)g(s) ds \right| dt \leq \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)g(s)| ds dt \\ &= \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)||g(s)| dt ds = \int_{\mathbf{T}} |g(s)| \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)| dt ds \\ &= \int_{\mathbf{T}} |g(s)| \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt ds = \int_{\mathbf{T}} |g(s)| \|f\|_1 ds = \|f\|_1 \|g\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

## Övningar

3.23 Visa att faltning är en kommutativ och associativ operation, dvs. att  $f * g = g * f$  och  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .

3.24 Visa att  $f * e^{in\cdot} = \hat{f}(n)e^{in\cdot}$ .

3.25 Visa att  $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ .

## 3.7 Fourierseriens konvergens

Fourierserien

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

till en funktionen  $f$  är per definition *konvergent i punkten  $t$*  om partialsumorna

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

konvergerar då  $N \rightarrow \infty$ . Observera alltså att det inte krävs att de två delserierna  $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n) e^{-int}$  ska konvergera var för sig.

Om vi istället skriver fourierserien på trigonometrisk form som

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

så blir

$$S_N f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Villkoret att följderna av partialsummor ska konvergera är således i detta fall identiskt med den vanliga definitionen av konvergens för en serie.

I vissa fall kan man enkelt avgöra att en funktions fourierserie är konvergent genom att bara betrakta fourierkoefficienterna; så är exempelvis fallet om fourierkoefficienterna  $\hat{f}(n)$  är av storleksordningen  $1/n^2$  (eller mindre), ty detta medför att fourierserien är absolutkonvergent i alla punkter. I punkter där funktionen är kontinuerlig och, mer generellt, i punkter där funktionen har ändliga *vänster-* och *högergränsvärden* ges en konvergent fourierseries summa av följande sats, där vi använder beteckningarna  $f(t^-)$  och  $f(t^+)$  för vänster- resp. högergränsvärdena så att

$$f(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} f(s), \quad f(t^+) = \lim_{s \rightarrow t^+} f(s).$$

**Sats 3.7.1.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$ , att  $t$  är en punkt där funktionens fourierserie är konvergent, samt att de båda ensidiga gränsvärdena  $f(t^-)$  och  $f(t^+)$  existerar. Då är fourierseriens summa i punkten  $t$  lika med*

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

*I en punkt  $t$  där fourierserien är konvergent och funktionen  $f$  är kontinuerlig är således seriens summa lika med  $f(t)$ .*

Vi skjuter upp beviset för satsen till nästa kapitel (se sats 4.5.4).

EXEMPEL 3.7.1. Den periodiska utvidgningen av  $f(t) = |t|$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ , som studerades i exempel 3.4.1, har fourierserien

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

Eftersom serien är absolutkonvergent för alla  $t$  och funktionen  $f$  är kontinuerlig i alla punkter, följer det av sats 3.7.1 att

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} = |t| \quad \text{för } -\pi \leq t \leq \pi.$$

För  $t = 0$  är således speciellt

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 0,$$

vilket efter förenkling ger oss resultatet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Summan  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  kan nu också beräknas med hjälp av följande omskrivning:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ jämn}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

som medför att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

För att med hjälp av föregående sats beräkna summan av fourierserien till en funktion måste vi först visa att fourierserien är konvergent. Ett tillräckligt villkor som garanterar detta är enligt sats 3.5.3 att funktionen är två gånger kontinuerligt deriverbar överallt. Detta är ett globalt villkor på funktionen, men huruvida en funktions fourierserie är konvergent eller ej i en punkt  $t_0$  beror, som vi ska se längre fram, enbart på funktionens uppförande i en godtyckligt liten omgivning av punkten  $t_0$ .

Ett enkelt *lokalt* villkor som garanterar att fourierserien konvergerar i punkten  $t_0$  är att funktionen är kontinuerlig och deriverbar i punkten  $t_0$ , och villkoret på deriverbarhet kan försvagas något så att existens av vänster- och högerderivata är tillräckligt. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 3.7.2.** Låt  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , och antag att  $t$  är en punkt där funktionen är kontinuerlig och där vänster- och högerderivatorna existerar. Då är funktionens fourierserie konvergent i punkten  $t$  och summan är lika med  $f(t)$ .

Även för denna sats skjuter vi upp beviset till nästa kapitel, där vi kommer att bevisa ett mer generellt resultat. (Se sats 4.8.2.)

EXEMPEL 3.7.2. I exempel 3.3.1 bestämde vi fouriersserien till den periodiska utvidgningen av  $f(t) = t$ ,  $|t| < \pi$ , och fann att

$$f(t) \sim i \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig och deriverbar i det öppna intervallet  $] -\pi, \pi[$ . Det följer därför av sats 3.7.2 att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt = t$$

för  $-\pi < t < \pi$ . (För  $t = \pm\pi$  är förstås seriens summa lika med 0 eftersom alla sinustermerna är lika med 0 i dessa punkter).  $\square$

EXEMPEL 3.7.3. Betrakta den  $2\pi$ -periodiska funktionen  $f$ , som definieras av att

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig överallt i det öppna intervallet  $] -\pi, \pi[$  och deriverbar överallt i samma intervall utom i punkten 0, där dock vänster- och högerderivatorna existerar (och är lika med 0 resp. 1). Enligt sats 3.7.2 är därför fouriersserien konvergent med  $f(t)$  som summa för  $-\pi < t < \pi$ .

Låt oss beräkna fouriersserien på trigonometrisk form. Seriens koefficienter är

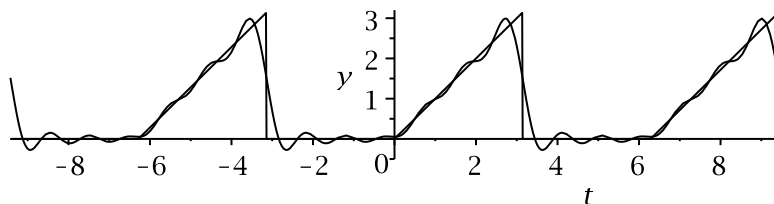
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos t \, dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{om } n = 0 \\ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, & \text{om } n \geq 1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin t \, dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

och vi kan nu dra slutsatsen att

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ udda}} \frac{\cos nt}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt = \begin{cases} 0 & \text{för } -\pi < t < 0, \\ t & \text{för } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

För  $t = \pi$  är serien också konvergent, och enligt sats 3.7.1 är fouriersseriens summa då lika med  $\frac{1}{2}(f(\pi^-) + f(\pi^+)) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{1}{2}\pi$ .  $\square$



**Figur 3.10.** Funktionen  $f$  i exempel 3.7.3 och partialsumman  $S_6 f(t)$ .

### Övningar

3.26 Funktionen  $f$  är periodisk. Avgör var fourierserien konvergerar och bestäm dess summa om

- a)  $f(t) = t^2$  för  $-\pi < t \leq \pi$ ;  
 b)  $f(t) = 0$  för  $-\pi < t < 0$  och  $f(t) = \sin t$  för  $0 \leq t \leq \pi$ .

3.27 Använd fourierserierna till funktionerna i föregående övning (dessa bestämdes i övning 3.16) för att beräkna följande summor:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ .

3.28 Bestäm faltningen  $f * \cos t$  då  $f$  är funktionen i exempel 3.7.3.

3.29 Visa att  $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$  genom att välja ett lämpligt  $t$  i formeln i exempel 3.7.2.

3.30  $\alpha$  är ett reellt tal som inte är ett heltal. Sätt  $f(t) = e^{i\alpha t}$  för  $-\pi < t \leq \pi$  och utvidga  $f$  till en  $2\pi$ -periodisk funktion. Visa följande två formler genom att studera funktionens fourierserie för  $t = 0$  och  $t = \pi$ :

$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{och} \quad \pi \cot \alpha \pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Om man sätter  $x = \alpha \pi$ , så kan formlerna också skrivas på formen

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad \text{och} \quad \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

Jämför detta med partialbråksutveckling för rationella funktioner!

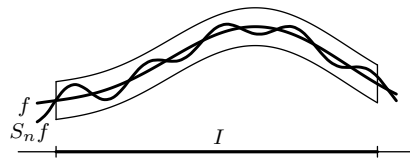
3.31 Använd föregående övning för att för reella tal  $\alpha$  som inte är heltal beräkna summan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - \alpha)^2}.$$



### 3.8 Gibbs fenomen

Om funktionen  $f \in L^1(\mathbf{T})$  är kontinuerlig och har vänster- och högerderivator i alla punkter i ett slutet intervall  $I$ , så följer det av sats 3.7.2 att fourierserien är konvergent för alla punkter i intervallet. Konvergensen kan vidare visas vara likformig, vilket innebär att det för varje givet  $\epsilon > 0$  finns ett  $N$  så att fourierseriens partialsummor  $S_n f(t)$  satisfierar olikheten  $|S_n f(t) - f(t)| < \epsilon$  för alla  $t \in I$  och alla  $n \geq N$ . Geometriskt betyder detta att punkterna  $(t, S_n f(t))$  ligger i en remsa av bredd  $\epsilon$  runt grafen  $y = f(t)$  för  $t \in I$  och  $n \geq N$ . Se figur 3.11.



**Figur 3.11.** Fourierserien konvergerar likformigt mot funktionen på slutna intervall där funktionen är kontinuerlig och har vänster- och högerderivator.

Om funktionen däremot har en språngdiskontinuitet i punkten  $t_0 \in I$  så att exempelvis  $f(t_0^+) > f(t_0^-)$ , så kan omöjligtvis grafen  $y = S_n f(t)$  till partialsumman ligga i ett sådant band, eftersom partialsummorna är kontinuerliga funktioner. Vad man däremot skulle kunna förvänta sig är att partialsummornas grafer ska konvergera mot en kurva, som i en omgivning till vänster och till höger om diskontinuitetspunkten  $t_0$  sammanfaller med funktionskurvan  $y = f(t)$  och för  $t = t_0$  består av en vertikal linje mellan punkterna  $(t_0, f(t_0^-))$  och  $(t_0, f(t_0^+))$ . Så är emellertid inte fallet utan för  $t = t_0$  får man ett vertikalt segment av en längd som är ca 18 % längre än  $|f(t_0^+) - f(t_0^-)|$ .

Fenomenet kallas *Gibbs fenomen*, och vi skall härleda det i det mest renodlade fallet, nämligen då  $f$  är den  $2\pi$ -periodiska fyrkantstvågfunktion som definieras av att  $f(t) = 1$  för  $0 < t < \pi$ ,  $f(t) = -1$  för  $-\pi < t < \pi$ , och  $f(0) = 0$ . Eftersom funktionen är udda, har den en sinusserie med koefficienter

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

som är noll för jämna  $n$ . Det följer av sats 3.7.2 att fourierserien är konvergent och att

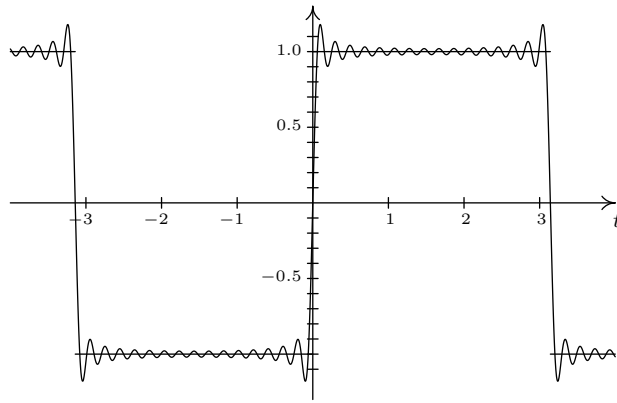
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

för alla  $t$ .

Betrakta nu seriens partialsummor

$$S_{2N+1}f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

på intervallet  $]0, \pi[$ . Vi vet att  $S_{2N+1}f(t) \rightarrow 1$  då  $N \rightarrow \infty$ , men om vi ritar graferna till  $S_{2N+1}f$  kommer vi att upptäcka ett märkligt beteende.  $S_{2N+1}f(t)$  har ett maximum i en punkt  $t_N > 0$  nära 0, och  $t_N$  går mot 0 då  $N$  växer, men maximivärdet närmar sig inte 1 utan förblir istället större än 1.17. Jämför figur 3.12.



**Figur 3.12.** Gibbs fenomen: Fyrkantsvågen  $f(t)$  och partialsumman  $S_{31}f(t)$ .

Låt oss analysera situationen i detalj. Derivatans till  $S_{2N+1}f$  kan beräknas på följande sätt:

$$\begin{aligned} (S_{2N+1}f)'(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \cos(2n+1)t = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^N e^{i(2n+1)t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left( e^{it} \frac{e^{i(2N+2)t} - 1}{e^{i2t} - 1} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \frac{e^{i(2N+2)t} - 1}{e^{it} - e^{-it}} \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \frac{i - ie^{i(2N+2)t}}{2 \sin t} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(2N+2)t}{\sin t}. \end{aligned}$$

Det första nollstället i intervallet  $]0, \pi[$  till derivatan  $(S_{2N+1}f)'$  ligger i punkten  $t_N = \pi/(2N+2)$ . Genom att betrakta derivatans tecken på ömse sidor om punkten drar vi slutsatsen att  $t_N$  är en maximipunkt. För att beräkna maximivärdet noterar vi först att  $S_{2N+1}(0) = 0$ , varav följer att

$$(3.7) \quad S_{2N+1}f(t_N) = \int_0^{t_N} (S_{2N+1}f)'(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin(2N+2)t}{\sin t} dt.$$

Vi vill undersöka gränsvärdet av  $S_{2N+1}f(t_N)$  då  $N \rightarrow \infty$ . Eftersom integralen i (3.7) är en smula komplicerad på grund av nämnaren, approximerar vi den med den enklare integralen

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin(2N+2)t}{t} dt = \quad [\text{sätt } u = (2N+2)t] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = I. \end{aligned}$$

Integralerna  $I_N$  har med andra ord det konstanta värdet  $I$ , och en numerisk beräkning ger vid handen att  $I \approx 1.179$ .

Härnäst noterar vi att

$$S_{2N+1}f(t_N) - I = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \left( \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin(2N+2)t dt.$$

Funktionen

$$g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t}$$

går mot 0 då  $t \rightarrow 0$ , så dess absoluta värde är därför säkert mindre än 1 på intervallet  $[0, t_N]$ , bara  $N$  är tillräckligt stort. Slutsatsen blir att

$$|S_{2N+1}f(t_N) - I| \leq \frac{2}{\pi} \cdot t_N = \frac{1}{N+1}.$$

Följaktligen konvergerar  $S_{2N+1}f(t_N)$  mot  $I$  då  $N \rightarrow \infty$ .

Eftersom funktionen  $S_{2N+1}f$  är udda, har den ett minimum i punkten  $-t_N$ , och minimivärdet är approximativt lika med  $-1.179$  för stora  $N$ .

Fastän funktionen  $f$  har ett språng i origo som är lika med 2 enheter, kommer således partialsummorna  $S_{2N+1}f(t)$  i en omgivning av origo att approximerar ett vertikalt segment av ungefärlig längd 2.358 då  $N$  går mot oändligheten. Samma fenomen inträffar vid varje sprängdiskontinuitet.

### 3.9 Rummet $L^2(\mathbf{T})$ och Parsevals formel

Varje funktion i rummet  $L^1(\mathbf{T})$  har en fourierserie, men rummet är lite för stort för att vissa önskvärda resultat ska kunna gälla för alla dess funktioner. Ett i flera avseende "bättre" och i många tillämpningar mer naturligt rum består av kvadratisk integrerbara funktioner. Om vi exempelvis modellerar en  $2\pi$ -periodisk signal som funktionen  $f$ , så representerar integralen  $\int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt$  signalens effekt och den är naturligtvis ändlig. Vi inför därför följande beteckning.

**Definition.** Med  $L^2(\mathbf{T})$  menas rummet av alla  $2\pi$ -periodiska funktioner  $f$  som uppfyller villkoret

$$\int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

För funktioner  $f, g \in L^2(\mathbf{T})$  definierar vi

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{och} \quad \|f\|_2 = \left( \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Om  $I$  är ett godtyckligt intervall av längd  $2\pi$ , så kan vi identifiera rummet  $L^2(\mathbf{T})$  med rummet  $L^2(I)$  genom att identifiera funktionerna i  $L^2(\mathbf{T})$  med deras restriktioner till intervallet  $I$ . Följande sats är därför bara en omformulering av sats 2.6.1.

**Sats 3.9.1.** (i) Rummet  $L^2(\mathbf{T})$  är ett inre produktrum med  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  som inre produkt och  $\|\cdot\|_2$  som motsvarande norm.

(ii)  $L^2(\mathbf{T})$  är det delrum till  $L^1(\mathbf{T})$ , och för varje funktion  $f \in L^2(\mathbf{T})$  gäller normolikheten  $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ .

Eftersom  $L^2(\mathbf{T})$  är en delmängd av  $L^1(\mathbf{T})$  har varje  $L^2(\mathbf{T})$ -funktion  $f$  fourierkoefficienter, men vad som är speciellt för  $L^2$ -funktioner är att fourierkoefficienten  $\hat{f}(n)$  kan uppfattas som en inre produkt beroende på att

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt = \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{e^{int}} dt = \langle f, e^{in\cdot} \rangle.$$

Ett annat fundamentalt faktum är vidare att mängden  $\{e^{int} \mid n \in \mathbf{Z}\}$  är ett *ON-system*, dvs. att funktionerna i mängden är parvis ortogonala och att de har norm 1. På grund av lemma 3.3.1 är nämligen

$$\langle e^{int}, e^{ikt} \rangle = \int_{\mathbf{T}} e^{i(n-k)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{om } n = k, \\ 0 & \text{om } n \neq k. \end{cases}$$

Ett faktum, som inte är lika enkelt att visa, är att detta ON-system är fullständigt, vilket har som konsekvens att följande sats gäller:

**Sats 3.9.2** (Parsevals formler). Antag att  $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ . Då är

$$(i) \quad \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2,$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

För att bevisa fullständigheten hos ON-systemet  $\{e^{int} \mid n \in \mathbf{Z}\}$  behöver vi fler verktyg än vad vi har nu, så därför spar vi beviset för ovanstående sats till avsnitt 4.7.

**EXEMPEL 3.9.1.** Låt  $f$  vara den periodiska utvidgningen av  $f(t) = t$  för  $|t| < \pi$ . Funktionen ligger i  $L^2(\mathbf{T})$  och

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

Funktionens fourierkoefficienterna beräknades i exempel 3.3.1:  $\hat{f}(0) = 0$  och  $\hat{f}(n) = (-1)^n/n$  för  $n \neq 0$ . Parsevals formel ger därför att

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

Det följer att  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . □

Eftersom en funktions fourierserie ofta ges på trigonometrisk form, speciellt om funktionen är reell, är det också användbart att ha den trigonometriska versionen av Parsevals formler:

**Sats 3.9.3** (Parsevals formler på trigonometrisk form). *Antag att  $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ , att*

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

och att

$$g(t) \sim \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt).$$

Då är

$$(i) \quad \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{4}a_0 \bar{c}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \bar{c}_n + b_n \bar{d}_n).$$

*Bevis.* Utnyttja att sambandet mellan å ena sidan koefficienterna  $a_n$  och  $b_n$  och å andra sidan fourierkoefficienterna  $\hat{f}(n)$  för  $n \geq 1$  är  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$  och  $\hat{f}(-n) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ , medan  $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}a_0$ . Detta innebär att

$$\begin{aligned} |\hat{f}(0)|^2 &= \frac{1}{4}|a_0|^2 \quad \text{och} \\ |\hat{f}(n)|^2 + |\hat{f}(-n)|^2 &= \frac{1}{4}(a_n - ib_n)(\bar{a}_n + i\bar{b}_n) + \frac{1}{4}(a_n + ib_n)(\bar{a}_n - i\bar{b}_n) \\ &= \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2), \end{aligned}$$

vilket insatt i formel (i) i sats 3.9.2 ger den första formeln i satsen ovan. Den andra formeln följer på liknande sätt. □

Vi får en intressant tolkning om vi skriver en reell  $L^2$ -funktion  $f$  med fourierserietvecklingen  $f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$  på amplitud-

fasvinkelform som

$$f(t) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nt + \phi_n).$$

Eftersom  $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$  säger Parsevals relation i detta fall att

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Om funktionen  $f(t)$  modellerar en periodisk signal, så är integralen i vänsterledet signalens effekt, medan  $A_0^2$  är effekten hos en konstant signal med amplituden  $A_0$  och  $\frac{1}{2}A_n^2$  är effekten hos signalen  $A_n \sin(nt + \phi_n)$ . Parsevals relation innebär därför att en godtycklig signals effekt är lika med summan av effekterna hos de i signalen ingående harmoniska delarna.

Vi avslutar med en sats som visar att man kan beräkna integralen  $\int_a^b f(t) dt$  till en  $L^2(\mathbf{T})$ -funktion genom att integrera funktionens fourierserie  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$  termvis.

**Sats 3.9.4.** *Antag att  $f \in L^2(\mathbf{T})$ . Då är*

$$\int_a^b f(t) dt = \hat{f}(0)(b-a) + \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{f}(n)}{in} (e^{inb} - e^{ina}).$$

*Bevis. Sätt*

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - \hat{f}(0)) dt.$$

Då är funktionen  $F$  kontinuerlig och periodisk med period  $2\pi$  eftersom

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t) dt - 2\pi\hat{f}(0) = 2\pi\hat{f}(0) - 2\pi\hat{f}(0) = 0.$$

Enligt sats 3.5.2 är därför

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in}$$

för alla heltal  $n \neq 0$ .

Vi uppskattar nu summan  $\sum |\hat{F}(n)|$  genom att först använda Cauchy-Schwarz olikhet för summor och sedan Parsevals formel och får då olikheten

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |\hat{F}(n)| &= \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| \frac{1}{|n|} \leq \left( \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left( \frac{2\pi^2}{6} \right)^{1/2} = \|f\|_2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} < \infty. \end{aligned}$$

Fourierserien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{F}(n) e^{int}$  är följaktligen absolutkonvergent, och enligt sats 3.7.1 är seriens summa lika med  $F(t)$  för alla  $t$ . Definitionen av  $F(x)$  ger oss därför likheten

$$\int_0^b f(t) dt = F(b) + \hat{f}(0)b = \hat{F}(0) + \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{f}(n)}{in} e^{inb} + \hat{f}(0)b,$$

och genom att subtrahera motsvarande uttryck för  $\int_0^a f(t) dt$  erhåller vi den sökta likheten i satsen.  $\square$

## Övningar

3.32 Använd fourierserierna i övning 3.26 för att beräkna följande summor:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

## 3.10 Annan period än $2\pi$

Fourierserieutvecklingen till en periodisk funktion med godtycklig period kan man få genom att skala om funktionen så att perioden blir  $2\pi$ . För framtida bruk ska vi nu härleda de formler som man då erhåller.

Antag att funktionen  $f$  är periodisk med periodlängd  $P$ , dvs. att

$$f(t + P) = f(t) \quad \text{för alla } t \in \mathbf{R},$$

och sätt  $\Omega = 2\pi/P$ , funktionens *grundvinkelfrekvens*. Definiera funktionen  $g$  genom att sätta

$$g(u) = f(u/\Omega).$$

Då är  $g(u + 2\pi) = f(u/\Omega + 2\pi/\Omega) = f(u/\Omega + P) = f(u/\Omega) = g(u)$ , dvs. funktionen  $g$  är  $2\pi$ -periodisk med en fourierserieutveckling på formen

$$f(u/\Omega) = g(u) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inu},$$

där

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-inu} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(u/\Omega) e^{-inu} du \\ &= \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-in\Omega t} dt, \end{aligned}$$

och där vi förstås gjort variabelbytet  $t = u/\Omega$  för att erhålla den sistnämnda integralen. Samma variabelbyte i serieutvecklingen av  $g$  ger att

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{in\Omega t},$$

vilket är den sökta fourierserieutvecklingen av  $f$ .

Motsvarande kan förstås göras för den trigonometriska varianten av fourierserieutvecklingen, vilket resulterar i följande formler:

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \cos n\Omega t \, dt \quad \text{och} \quad b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \sin n\Omega t \, dt.$$

För  $P$ -periodiska  $L^2$ -funktioner får slutligen Parsevals formel följande utseende:

$$\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

## Historiska notiser

Teorin för trigonometriska serier går tillbaka till första hälften av 1700-talet, då matematiker börjar använda sig av sådana serier, särskilt i samband med olika astronomiska beräkningar. LEONHARD EULER (1707–1783) representerar en funktion som han erhållit genom att analysera planetrörelser som en trigonometrisk serie och anger en formel för koefficienterna i form av en integral av den studerade funktionen, JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783) beskriver inversa avståndet mellan två planeter som en cosinusserie och anger också en formel för koefficienterna, och ALEXIS CLAIRAUT (1713–1765) härleder en cosinusrepresentation för en funktion han erhållit i samband med studiet av solens rörelse. Euler, d'Alembert, DANIEL BERNOULLI (1700–1782) och JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) studerar också problemet med den svängande strängen och anger lösningar i form av trigonometriska serier.

JOSEPH FOURIER (1768–1830) var emellertid först med den banbrytande idén att varje funktion kan representeras av en trigonometrisk serie. Idén presenterades i manuskriptform för den franska vetenskapsakademien 1807, men hans manuskript kritiserades för vaghet och bristande stringens och publicerades inte. Det skulle därför dröja till 1822 innan Fouriers verk *Theorié analytique de la chaleur* kom ut.

Fouriers arbete rönt stort intresse men det uppfyller naturligtvis inte nutida krav på stringens. Exempelvis saknas bevis för att erhållna serier konvergerar. En källa till svårigheterna är att själva funktionsbegreppet inte var klarlagt på den tiden, och begreppen kontinuitet och integral saknade också precisa definitioner.

Det första korrekta beviset med tillräckliga villkor för fourierseriens konvergens gavs 1829 av PETER LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859). Dirichlet preciserar också funktionsbegreppet genom att definiera en funktion genom egenskapen ”att det för varje  $x$  finns ett enda ändligt  $y$ ”, även om han senare svävar på målet genom att när han diskuterar styckvis kontinuerliga funktioner säga att funktionen har två värden i diskontinuitetspunkterna.

Att många användbara egenskaper hos fourierserien är konsekvenser av att basfunktionerna  $e^{int}$  är ortogonala och att motsvarande egenskaper gäller för många



andra klasser av funktioner, exempelvis Besselfunktioner och ortogonala polynom, uppmärksammades av FRIEDRICH BESSEL (1784–1846). Parsevals sats har sitt namn efter MARC-ANTOINE PARSEVAL (1755–1836) som år 1799 i en artikel formulerade en formel för summan av kvadraterna på koefficienterna i en trigonometrisk serie som en integral.

Gibbs fenomen beskrevs och förklarades 1848 av HENRY WILBRAHAM (1825–1883) men har sitt namn efter WILLARD GIBBS (1839–1903) som ovetande om Wilbraham återupptäckte fenomenet femtio år senare.



## Kapitel 4

# Fourierseriens konvergens

Att bestämma om och var en godtycklig periodisk funktions fourierserie är konvergent är ett svårt problem som sysselsatt många framstående matematiker. I det här kapitlet ska vi bevisa konvergensresultaten som vi formulerade men lämnade obevisade i förra kapitlet samt några kompletterande resultat. Vi gör detta genom att införa ett sätt att summera serier som kallas Abelsummation och som gör att vissa divergenta serier låter sig summeras på ett vettigt sätt. En viktig biprodukt av våra mödor är resultatet att  $L^1$ -funktioner alltid är entydigt bestämda av sina fourierserier.

### 4.1 Omkastning av gränsprocesser

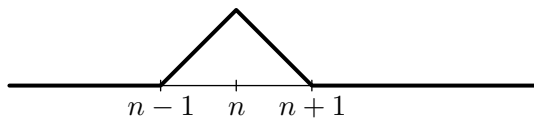
I flera av det här kapitlets bevis kommer vi att behöva göra gränsövergångar under integraltecknet eller kasta om ordningen mellan summation och integration, dvs. utnyttja att det för de aktuella funktionsföljderna eller summorna gäller att

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \quad \text{resp.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(t) dt &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) dt.\end{aligned}$$

Att en sådan omkastning av de två gränsprocesserna inte alltid är tillåten framgår av följande två exempel, så därför behöver de i förekommande fall motiveras på något sätt.

EXEMPEL 4.1.1. Definiera en funktionsföljd  $(f_n(t))_1^\infty$  på intervallet  $[0, \infty[$  genom att sätta

$$f_n(t) = \begin{cases} t - n + 1 & \text{för } n - 1 \leq t \leq n, \\ n + 1 - t & \text{för } n \leq t \leq n + 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$



**Figur 4.1.** Grafen till funktionen  $f_n$

Vi får tydligen grafen till funktionen  $f_n$  genom att på intervallet  $[n-1, n+1]$  rita en likbent triangel med intervallet som bas och höjd 1 (se figur 4.1).

Observera att  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$  för alla  $t \in [0, \infty[$ , ty för fixt  $t$  är  $f_n(t) = 0$  för alla heltal  $n \geq t + 1$ . Den punktvisa gränsv funktionen  $f(t)$  är således funktionen som är identiskt lika med noll. Men

$$\int_0^\infty f_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^\infty f(t) dt$$

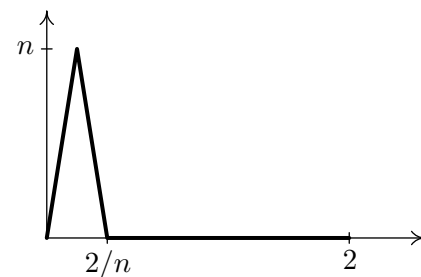
för alla  $n$ . I det här fallet är det således inte tillåtet att byta ordning på limes och integral.  $\square$

**EXEMPEL 4.1.2.** Funktionsföljden  $(g_n(t))_1^\infty$  är definierad på intervallet  $[0, 2]$  av att

$$g_n(t) = \begin{cases} n^2 t & \text{för } 0 \leq t \leq 1/n, \\ 2n - n^2 t & \text{för } 1/n \leq t \leq 2/n, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vi får funktionen  $g_n$ :s graf genom att resa en likbent triangel på intervallet  $[0, 2/n]$  av höjd  $n$  och med intervallet som bas.

Eftersom  $g_n(t) = 0$  så snart  $n > 2/t$  och  $g_n(0) = 0$  för alla  $n$ , är  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = 0$ . Funktionsföljden konvergerar således punktvis mot funk-



**Figur 4.2.** Grafen till funktionen  $g_n$  i exempel 4.1.2.

tionen  $g(t) = 0$  för alla  $t$ . Men

$$\int_0^\infty g_n(t) dt = 1$$

för alla  $n$ , så inte heller i det här fallet är det tillåtet att byta ordning på limes och integral.  $\square$

För att i förekommande fall motivera omkastning av limes och integration kommer vi att använda oss av ett resultat från teorin för Lebesgueintegralen.

Vi påminner då först om att en följd  $(f_n)_1^\infty$  av funktioner säges vara *punktvís konvergent* mot funktionen  $f$  på intervallet  $I$  om det för alla  $t \in I$  gäller att  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  då  $n \rightarrow \infty$ . Punktvís konvergens räcker som vi sett ovan inte för att det ska vara tillåtet att flytta in limes under integraltecknet, utan det behövs ytterligare villkor och ett tillräckligt sådant är att funktionerna i följd inte blir alltför "stora" utan "domineras" av någon icke-negativ funktion  $h$  med ändlig integral i den betydelsen att  $|f_n(t)| \leq h(t)$  för (nästan) alla  $t$ . Resultatet kallas *Lebesgues sats om dominerad konvergens*. Vi kommer inte att behöva satsen i dess fulla generalitet, utan formulerar följande lite svagare version som är anpassad till våra behov.

**Sats 4.1.1** (Dominerad konvergens). *Låt  $(g_n)_1^\infty$  vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar punktvís mot funktionen  $g$  på intervallet  $I$ , och antag att funktionerna i följd är uniformt begränsade på  $I$ , dvs. att det finns en konstant  $C$  sådan att  $|g_n(t)| \leq C$  för alla  $t \in I$  och alla  $n$ .*

*För alla funktioner  $f \in L^1(I)$  är då*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f(t)g_n(t) dt = \int_I f(t)g(t) dt.$$

Beviset för satsen är alltför komplicerat för att ges här, så den som är intresserad av att se beviset får konsultera någon lärobok i integrationsteori.

Genom att tillämpa satsen om dominerad konvergens på partialsummor-na till en funktionsserie får vi följande korollarium.

**Korollarium 4.1.2.** *Låt  $(a_n)_1^\infty$  vara en följd av kontinuerliga funktioner på ett intervall  $I$ , och antag att det finns en följd  $(M_n)_1^\infty$  av positiva tal med följande egenskaper:*

- (i)  $|a_n(t)| \leq M_n$  för alla  $t \in I$  och alla  $n$ ;
- (ii) den positiva serien  $\sum_{n=1}^\infty M_n$  är konvergent.

*För varje funktion  $f \in L^1(I)$  är då*

$$\sum_{n=1}^\infty \int_I f(t)a_n(t) dt = \int_I \sum_{n=1}^\infty f(t)a_n(t) dt.$$

*Bevis.* Antagandena (i) och (ii) medför att serien  $\sum_1^\infty a_n(t)$  är absolutkonvergent och att dess partialsummor  $g_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t)$  är uniformt begränsade på intervallet  $I$  eftersom

$$|g_N(t)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n(t)| \leq \sum_{n=1}^N M_n \leq \sum_{n=1}^\infty M_n = C.$$

För ändliga summor är det naturligtvis inget problem att byta ordning på summation och integration, och därför är enligt föregående sats

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \int_I f(t) a_n(t) dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_I f(t) a_n(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_I f(t) g_N(t) dt \\ &= \int_I f(t) \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(t) dt = \int_I f(t) \sum_{n=1}^\infty a_n(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPEL 4.1.3. Som tillämpning på satsen om dominerad konvergens visar vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} f(t) dt$$

för alla  $f \in L^1(\mathbf{R})$ .

Sätt för den skull

$$g_n(t) = \begin{cases} (1 - |t|/n) & \text{om } |t| \leq n, \\ 0 & \text{om } |t| \geq n. \end{cases}$$

Funktionerna  $g_n$  är kontinuerliga, uniformt begränsade på reella axeln av konstanten 1 samt konvergerar punktvis mot den konstanta funktionen 1. Det följer därför av satsen om dominerad konvergens att  $\int_{\mathbf{R}} g_n(t) f(t) dt \rightarrow \int_{\mathbf{R}} f(t) dt$  då  $n \rightarrow \infty$ , och eftersom

$$\int_{\mathbf{R}} g_n(t) f(t) dt = \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) f(t) dt$$

är beviset klart. □

Ett starkare villkor som tillåter gränsövergång under integraltecknet är det i sats 4.1.1 är likformig konvergens. Vi påminner om att en följd  $(f_n)_1^\infty$  av begränsade funktioner sägs *konvergera likformigt* på intervallet  $I$  mot funktionen  $f$  om

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Likformig konvergens bevarar kontinuitet.

**Sats 4.1.3.** *Antag att  $(f_n)_1^\infty$  är en följd av funktioner som konvergerar likformigt mot funktionen  $f$  på intervallet  $I$  samt att funktionerna  $f_n$  är kontinuerliga i punkten  $t_0 \in I$ . Då är också gränsfunktionen  $f$  kontinuerlig i punkten  $t_0$ .*

*Bevis.* Välj givet  $\epsilon > 0$  ett index  $N$  sådant att  $\sup_{t \in I} |f_N(t) - f(t)| < \epsilon/3$ , vilket går på grund av den likformiga konvergensen. Välj sedan  $\delta > 0$  så att  $|f_N(t) - f_N(t_0)| < \epsilon/3$  för alla  $t \in I$  med  $|t - t_0| < \delta$ , vilket går eftersom funktionen  $f_N$  är kontinuerlig.

För alla  $t$  i definitionsmängden  $I$  som uppfyller  $|t - t_0| < \delta$  gäller då att

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |(f(t) - f_N(t)) + (f_N(t) - f_N(t_0)) + (f_N(t_0) - f(t_0))| \\ &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(t) - f_N(t_0)| < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

vilket visar att funktionen  $f$  är kontinuerlig i punkten  $t_0$ .  $\square$

Att man kan flytta in limes under integraltecknet för en likformigt konvergent följd av kontinuerliga funktioner, förutsatt att integrationsintervallet är ändligt, är nu mer eller mindre trivialt.

**Sats 4.1.4.** *Antag att  $(f_n)_1^\infty$  är en likformigt konvergent följd av kontinuerliga funktioner på ett begränsat slutet intervall  $[a, b]$ . Då är*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

*Bevis.* Gränsfunktionen  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  är enligt föregående sats kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$ , så den är säkert integrerbar. Det följer därför av triangelolikheten för integraler och definitionen av likformig konvergens att

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dt \\ &= (b - a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad \square$$

En följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på ett kompakt intervall är naturligtvis uniformt begränsad, så föregående sats är naturligtvis också en omedelbar konsekvens av satsen om dominerad konvergens.

Ett enkelt villkor som garanterar likformig konvergens hos en funktionsserie ges av följande sats, vars enkla bevis lämnas som övning. (Jmf med korollarium 4.1.2.)

**Sats 4.1.5 (Weierstrass majorantsats).** *Låt  $(a_n)_1^\infty$  vara en följd av funktioner definierade på ett intervall  $I$  och antag att det finns en följd  $(M_n)_1^\infty$  av positiva tal med följande egenskaper:*

- (i)  $|a_n(t)| \leq M_n$  för alla  $t \in I$  och alla  $n$ ;  
(ii) den positiva serien  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  är konvergent.  
Då är funktionsserien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$  likformigt konvergent på intervallet  $I$ .

Vi avslutar med en sats om derivation under summatecknet.

**Sats 4.1.6.** Låt  $(g_n)_1^{\infty}$  vara en följd av deriverbara funktioner på intervallet  $I$  med konvergent summa

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$$

för alla  $t \in I$ . Antag vidare att derivatorna  $g'_n$  är begränsade på  $I$  och att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t \in I} |g'_n(t)| < \infty.$$

Då är funktionen  $f$  deriverbar på intervallet med derivata

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(t).$$

*Bevis.* Vi kan genom att betrakta real- och imaginärdelar var för sig utan inskränkning anta att funktionerna  $g_n$  är reellvärda. Sätt  $M_n = \sup_{t \in I} |g'_n(t)|$ . Det följer då av medelvärdessatsen att

$$\left| \frac{g_n(t+h) - g_n(t)}{h} - g'_n(t) \right| = |g'_n(t+\theta h) - g'_n(t)| \leq 2M_n.$$

Välj nu givet  $t \in I$  och  $\epsilon > 0$  ett tal  $N$  sådant att  $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \epsilon/2$ , och sedan talet  $\delta > 0$  sådant att

$$\left| \sum_{n=1}^N \left( \frac{g_n(t+h) - g_n(t)}{h} - g'_n(t) \right) \right| < \epsilon$$

om  $0 < |h| < \delta$ . Detta är förstas möjligt eftersom funktionerna  $g_n$  är deriverbara.

För  $0 < |h| < \delta$  får vi nu följande uppskattning:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(t) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{g_n(t+h) - g_n(t)}{h} - g'_n(t) \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N \left( \frac{g_n(t+h) - g_n(t)}{h} - g'_n(t) \right) \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{g_n(t+h) - g_n(t)}{h} - g'_n(t) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N \left( \frac{g_n(t+h) - g_n(t)}{h} - g'_n(t) \right) \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2M_n \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \end{aligned}$$

som visar att funktionen  $f$  är deriverbar med derivata  $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(t)$ .  $\square$



## Övningar

4.1 Beräkna gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/n}}{1+t^2} dt$ .

4.2 Följden  $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  är begränsad och  $0 < r < 1$ . Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n r^{|n|} e^{int}$$

är oändligt deriverbar.

## 4.2 Kontinuitetsprincipen

Antag att funktionen  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  är kontinuerlig och att vi vet att  $f(x) = 0$  för alla rationella tal  $x$ . Då följer det av kontinuiteten och av det faktum att varje reellt tal kan approximeras med godtycklig noggrannhet av rationella tal (dvs. av att  $\mathbf{Q}$  är tät i  $\mathbf{R}$ ) att  $f(x) = 0$  för alla  $x$ . Vi ska formulera och bevisa en liknande princip som exempelvis kan användas för att utvinna information om hur en avbildning beter sig på mängden  $L^1(\mathbf{T})$  från information om hur samma avbildning beter sig på den täta delmängden  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ . Principen, som vi kallar *kontinuitetsprincipen*, bygger på ett generellt resultat vars bevis är synnerligen enkelt. För att kunna formulera den på ett enkelt sätt inför vi först följande definitioner.

**Definition.** Låt  $\mathcal{B}$  beteckna ett godtyckligt normerat vektorrum med norm  $\|\cdot\|$ . En avbildning  $S: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{C}$  kallas

- *additiv* om  $S(f+g) = S(f) + S(g)$  för alla  $f, g \in \mathcal{B}$ ;
- *begränsad* om det finns en konstant  $C$  sådan att  $|S(f)| \leq C\|f\|$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ .

En avbildning  $S: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$  kallas

- *subadditiv* om  $S(f+g) \leq S(f) + S(g)$  för alla  $f, g \in \mathcal{B}$ ;
- *positiv* om  $S(f) \geq 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ .

Vi påminner också om definitionen av begreppet *tät mängd*.

**Definition.** En delmängd  $D$  av ett normerat rum  $\mathcal{B}$  kallas *tät* i  $\mathcal{B}$  om det för varje  $f \in \mathcal{B}$  och varje  $\epsilon > 0$  finns ett element  $g \in D$  med egenskapen att  $\|f - g\| < \epsilon$ .

**Sats 4.2.1** (Kontinuitetsprincipen). *Antag att  $S: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$  är en positiv, subadditiv, begränsad avbildning på ett normerat rum  $\mathcal{B}$  samt att  $S(f) = 0$  för alla  $f$  i någon tät delmängd av  $\mathcal{B}$ . Då är  $S(f) = 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ .*

*Bevis.* Antag att  $S(g) = 0$  för alla element  $g$  i den täta delmängden  $D$ , och låt  $f$  vara ett godtyckligt element i  $\mathcal{B}$ . För varje  $\epsilon > 0$  finns det då ett

element  $g \in D$  sådant att  $\|f - g\| < \epsilon$ , och av antagandena om avbildningen  $S$  följer därför att

$$\begin{aligned} 0 \leq S(f) &= S(f - g + g) \leq S(f - g) + S(g) \\ &= S(f - g) \leq C\|f - g\| < C\epsilon. \end{aligned}$$

Eftersom detta gäller för alla  $\epsilon > 0$ , är  $S(f) = 0$ . □

Sats 4.2.1 har följande två korollarier som är de versioner av kontinuitetsprincipen som vi kommer att använda oss av vid ett flertal tillfällen.

**Korollarium 4.2.2.** *Låt  $T_i: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $i = 1, 2$ , vara två additiva, begränsade avbildningar på ett normerat rum  $\mathcal{B}$ , och antag att  $T_1(f) = T_2(f)$  för alla  $f$  i någon tät delmängd  $D$  av  $\mathcal{B}$ . Då är  $T_1(f) = T_2(f)$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ .*

*Bevis.* Sätt  $S(f) = |T_1(f) - T_2(f)|$ . Då är  $S$  en positiv och subadditiv avbildning  $\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$ , ty

$$\begin{aligned} S(f + g) &= |T_1(f) - T_2(f) + T_1(g) - T_2(g)| \\ &\leq |T_1(f) - T_2(f)| + |T_1(g) - T_2(g)| = S(f) + S(g). \end{aligned}$$

Eftersom avbildningarna  $T_1$  och  $T_2$  är begränsade finns det vidare en konstant  $C$  sådan att  $|T_1(f)| \leq C\|f\|$  och  $|T_2(f)| \leq C\|f\|$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ , och detta medför att

$$S(f) \leq |T_1(f)| + |T_2(f)| \leq C\|f\| + C\|f\| = 2C\|f\|.$$

Avbildningen  $S$  är således också begränsad.

Slutligen är  $S(f) = 0$  för alla  $f \in D$ . Det följer därför av kontinuitetsprincipen att  $Sf = 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ , vilket bevisar korollariet. □

**Korollarium 4.2.3.** *Låt  $T_n: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , vara avbildningar på ett normerat rum  $\mathcal{B}$  som är positiva, subadditiva och uniformt begränsade, dvs. det finns en konstant  $C$  så att  $T_n(f) \leq C\|f\|$  för alla  $f \in \mathcal{B}$  och alla  $n$ . Antag vidare att  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = 0$  för alla  $f$  i någon tät delmängd  $D$  av  $\mathcal{B}$ . Då är  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ .*

*Anmärkning.* Vi kommer också att använda en variant av korollariet där man istället för att ha en familj av avbildningar som indexeras av de positiva heltalen har en familj av typen  $(T_x)_{x \in I}$  där  $I$  är ett intervall, säg  $I = ]a, b[$ . Om dessa avbildningar är positiva, subadditiva och uniformt begränsade och  $\lim_{x \rightarrow b} T_x(f) = 0$  för alla  $f$  i någon tät delmängd av  $\mathcal{B}$ , så är  $\lim_{x \rightarrow b} T_x(f) = 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ .

*Bevis.* Vi skulle vilja sätta  $S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f)$  och tillämpa kontinuitetsprincipen på avbildningen  $S$ . Problemet är att vi inte apriori vet att

gränsvärdet existerar för alla  $f$ , och för att komma runt detta sätter vi istället

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} T_k(f).$$

Detta är ett gränsvärde som säkert existerar för varje  $f \in \mathcal{B}$ , ty följderna

$$a_n = \sup_{k \geq n} T_k(f), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

är uppenbarligen avtagande och nedåt begränsad (av 0), och den har följaktligen ett gränsvärde.<sup>1</sup>

Vi påstår nu att  $S(f) = 0$  om och endast om  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = 0$ .

Om  $S(f) = 0$ , så finns det nämligen givet  $\epsilon > 0$  ett tal  $N$  så att  $a_N < \epsilon$ , och då är per definition  $0 \leq T_n(f) \leq a_N < \epsilon$  för  $n \geq N$ , vilket innebär att  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = 0$ .

Om det sistnämnda gränsvärdet är lika med 0, så finns det å andra sidan, givet  $\epsilon > 0$ , ett tal  $N$  så att  $0 \leq T_n(f) < \epsilon$  för  $n \geq N$ , och då är speciellt  $0 \leq a_N \leq \epsilon$ . Eftersom följderna  $(a_n)_1^\infty$  är avtagande, är gränsvärdet  $S(f)$  mindre än  $a_N$ , så vi drar slutsatsen att  $0 \leq S(f) \leq \epsilon$ . Härav följer slutligen att  $S(f) = 0$ , eftersom  $\epsilon$  är ett godtyckligt positivt tal.

Att avbildningen  $S: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$  är positiv är uppenbart. Låt oss nu visa att den också är subadditiv och begränsad.

Subadditiviteten  $T_k(f + g) \leq T_k(f) + T_k(g)$  hos var och en av avbildningarna  $T_k$  medför först genom supremumbildning att

$$\sup_{k \geq n} T_k(f + g) \leq \sup_{k \geq n} T_k(f) + \sup_{k \geq n} T_k(g)$$

och sedan genom gränsövergång då  $n \rightarrow \infty$  att  $S(f + g) \leq S(f) + S(g)$ .

Av  $0 \leq T_k(f) \leq C\|f\|$  följer genom supremumbildning att

$$0 \leq \sup_{k \geq n} T_k(f) \leq C\|f\|,$$

och då gäller också för gränsvärdet  $S(f)$  att  $0 \leq S(f) \leq C\|f\|$ .

Antagandet  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = 0$  för  $f \in D$  medför slutligen att  $S(f) = 0$  för alla  $f$  i den täta mängden  $D$ . Enligt kontinuitetsprincipen är därför  $S(f) = 0$  för alla  $f \in \mathcal{B}$ . Därmed är korollariet bevisat.  $\square$

Som ett exempel på hur man kan använda sig av korollarium 4.2.3 visar vi nu att translatet  $T_t f$  till en  $L^1(\mathbf{T})$ - eller  $L^2(\mathbf{T})$ -funktion  $f$  varierar med  $t$  på ett kontinuerligt vis.

<sup>1</sup>Den som är bekant med begreppet *övre limes*,  $\limsup$ , känner omedelbart igen  $S(f)$  som  $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n(f)$ .

**Sats 4.2.4.** Låt  $p$  vara 1 eller 2, och antag att  $f \in L^p(\mathbf{T})$ . För alla reella tal  $t_0$  är då

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T_t f - T_{t_0} f\|_p = 0.$$

*Bevis.* Eftersom integralen är translationsinvariant är

$$\begin{aligned} \|T_t f - T_{t_0} f\|_p^p &= \int_{\mathbf{T}} |f(s-t) - f(s-t_0)|^p ds \\ &= \int_{\mathbf{T}} |f(s-t+t_0) - f(s)|^p ds = \|T_{t-t_0} f - f\|_p^p. \end{aligned}$$

Det räcker följaktligen att visa påståendet i fallet  $t_0 = 0$ , vilket vi nu ska göra.

Definiera därför avbildningarna  $S_t: L^p(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbf{R}$  genom att sätta

$$S_t f = \|T_t f - f\|_p.$$

Avbildningarna  $S_t$  är uppenbarligen positiva, och de är också subadditiva och uniformt begränsade eftersom

$$\begin{aligned} S_t(f+g) &= \|T_t(f+g) - (f+g)\|_p = \|T_t f - f + T_t g - g\|_p \\ &\leq \|T_t f - f\|_p + \|T_t g - g\|_p = S_t f + S_t g \quad \text{och} \\ S_t f &= \|T_t f - f\|_p \leq \|T_t f\|_p + \|f\|_p = \|f\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p. \end{aligned}$$

Rummet  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$  av kontinuerliga periodiska funktioner är tätt i såväl  $L^1(\mathbf{T})$  som  $L^2(\mathbf{T})$ , så för att visa satsen räcker det på grund av korollarium 4.2.3 (och den efterföljande anmärkningen) att visa att  $S_t g \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow 0$  för godtyckliga funktioner  $g$  i  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ .

Så antag att  $g \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ . Eftersom kontinuerliga periodiska funktioner är likformigt kontinuerliga, finns det givet  $\epsilon > 0$  ett tal  $\delta > 0$  med egenskapen att  $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |g(t_1) - g(t_2)| < \epsilon$ . Vidare är  $\|g\|_p \leq \|g\|_\infty$ . För  $|t| < \delta$  är följaktligen

$$0 \leq S_t g = \|T_t g - g\|_p \leq \|T_t g - g\|_\infty = \max_{s \in \mathbf{T}} |g(s-t) - g(s)| \leq \epsilon,$$

vilket visar att  $S_t g \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow 0$ . □

### 4.3 Abelsummation

En fouriersserie behöver inte konvergera, och frågan uppstår därför om det finns något annat sätt att ge mening åt serien. Betrakta för den skull först en godtycklig numerisk serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Om serien är divergent, så finns det fortfarande en möjlighet att serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  konvergerar för  $0 < r < 1$  eftersom termerna i den sistnämnda serien är mindre än i den förstnämnda. Exempelvis är serien säkert konvergent om termerna  $a_n$  är begränsade. Detta tjänar som motivering för följande definition.

**Definition.** Serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  säges vara *abelsummerbar med summa  $s$*  om serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  är konvergent för  $0 \leq r < 1$  och

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s.$$

EXEMPEL 4.3.1. Den divergenta serien  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  är abelsummerbar med summa  $\frac{1}{2}$ , ty

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \frac{1}{1+r} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då } r \rightarrow 1^-.$$

Den divergenta serien  $\sum_{n=0}^{\infty} 1$  är däremot inte abelsummerbar, ty

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \rightarrow +\infty \quad \text{då } r \rightarrow 1^-. \quad \square$$

Abelsummerbarhet generaliserar begreppet ”konvergent serie”, ty varje konvergent serie är abelsummerbar och abelsumman sammanfaller med den vanliga summan. Detta är kontentan av vår nästa sats.

**Sats 4.3.1 (Abels summationssats).** Om serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  är konvergent med summa  $s$ , så är den också abelsummerbar med summa  $s$ , dvs.

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

*Bevis.* Vi ska använda kontinuitetsprincipen och låter därför  $\mathcal{B}$  beteckna rummet av alla konvergenta serier  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Vi definierar en norm på detta rum genom att sätta

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\| = \sup_{k \geq 0} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \right|.$$

och överlåter åt läsaren att verifiera att normegenskaperna är uppfyllda.

Låt nu  $D$  vara mängden av alla ändliga serier, dvs. serier vars alla termer från och med ett visst index är lika med noll. Detta är givetvis en delmängd av mängden av alla konvergenta serier. Vi ska visa att delmängden är tät. Låt för den skull  $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  vara en godtycklig konvergent serie. Om  $\epsilon$  är ett positivt tal, så finns det på grund av konvergensdefinitionen ett heltal  $N$  sådant att  $|\sum_{n=k}^{\infty} a_n| < \epsilon$  för alla  $k > N$ . Låt nu  $b$  vara den serie som fås genom att trunkera serien  $a$  efter termen  $a_N$ , dvs.

$$b = a_0 + a_1 + \cdots + a_N + 0 + 0 + \cdots$$

Då är  $a - b = 0 + \cdots + 0 + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$ , och följaktligen

$$\|a - b\| = \sup_{k > N} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \right| \leq \epsilon.$$

Detta bevisar att mängden  $D$  är tät i  $\mathcal{B}$ .

Definiera nu för  $0 < r < 1$  avbildningarna  $T_r: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$  genom att för  $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  sätta

$$(4.1) \quad T_r(a) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right|.$$

Påståendet i Abels sats är ekvivalent med påståendet att  $\lim_{r \rightarrow 1} T_r(a) = 0$  för alla konvergenta serier, dvs. för alla element i  $\mathcal{B}$ .

Uppenbarligen är  $\lim_{r \rightarrow 1} T_r(a) = 0$  för alla element  $a$  i den täta mängden  $D$ , ty då är de i definitionen av  $T_r(a)$  ingående summorna i (4.1) ändliga. För att bevisa Abels sats räcker det därför på grund av korollarium 4.2.3 till kontinuitetssatsen att visa att avbildningarna  $T_r$  är positiva, subadditiva och uniformt begränsade.

De två förstnämnda egenskaperna är uppenbara, så det återstår bara att visa den uniforma begränsningen. Sätt för den skull  $s_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ . På grund av definitionen av norm är  $|s_k| \leq \|a\|$  för alla  $k$ . Vidare är  $a_n = s_n - s_{n+1}$ , så det följer att

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n+1}) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_n r^{n-1} = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n (r^n - r^{n-1}). \end{aligned}$$

Följaktligen är

$$\begin{aligned} T_r(a) &= \left| s_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} s_n (r^{n-1} - r^n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| (r^{n-1} - r^n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a\| (r^{n-1} - r^n) = \|a\| \sum_{n=1}^{\infty} (r^{n-1} - r^n) = \|a\|. \end{aligned}$$

Därmed är den uniforma begränsningen visad och beviset klart.  $\square$

## Övningar

- 4.3 För vilka komplexa tal  $\alpha$  är serien  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$  abelsummerbar? Bestäm i förekommande fall summan.
- 4.4 För vilka komplexa tal  $\alpha$  är serien  $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n$  abelsummerbar och vad är i förekommande fall summan?

## 4.4 Poissonkärnan

Baktanken med att införa begreppet abelsummation är att använda denna teknik på fourierserien som ju har större chans att vara abelsummerbar än

att enbart vara konvergent, och om fourierserien faktiskt konvergerar så är ju abelsumman och den vanliga summan lika.

Vi är med andra ord intresserade av att undersöka gränsvärdet av

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) r^n = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{int},$$

då  $r \rightarrow 1^-$ . Eftersom fourierkoefficienterna är begränsade (av  $\|f\|_1$ ) är serien absolutkonvergent för varje  $r$  i intervallet  $[0, 1[$ , så frågan är bara om den har något gränsvärde då  $r \rightarrow 1^-$ .

För att kunna hantera och studera den oändliga serien är det fördelaktigt att skriva om den som en integral, precis som vi gjorde då vi i avsnitt 3.6 uttryckte partialsumman  $S_N f(t)$  som en faltning av funktionen  $f$  med Dirichletpolynomet  $D_N(t)$ . Ett försök att generalisera Dirichletpolynomet vore förstås att låta  $N$  gå mot oändligheten; problemet är att den resulterande serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{int}$  är divergent för alla  $t$ . Vi förbättrar situationen genom att multiplicera den  $n$ :te och  $-n$ :te termen med  $r^{|n|}$  och erhåller då serien

$$P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int}$$

som för  $0 \leq r < 1$  är en summa av två konvergenta geometriska serier. Vi kan därför lätt beräkna summan  $P_r(t)$  explicit. Enklast blir räkningarna om vi sätter  $z = re^{it}$  vilket medför att  $re^{-it} = \bar{z}$ . Vi får då

$$P_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}^k = \frac{1}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}.$$

**Definition.** Funktionerna

$$P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t},$$

där  $0 \leq r < 1$ , kallas *Poissonkärnan*.

Poissonkärnan har följande egenskaper:

**Sats 4.4.1 (Poissonkärnan).** (a) Funktionerna  $P_r(t)$  är jämna, positiva och kontinuerliga.

(b)  $\int_{\mathbf{T}} P_r(t) dt = 1.$

(c) Om  $0 < \delta < \pi$  så gäller att  $\int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow 1.$

(d) Om  $0 < \delta < \pi$  så gäller att  $\max_{\delta \leq t \leq \pi} P_r(t) \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow 1.$

(e) För alla  $f \in L^1(\mathbf{T})$  är

$$f * P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}.$$

(f) För alla  $f \in L^1(\mathbf{T})$  är funktionerna  $f * P_r$  oändligt deriverbara.

*Bevis.* (a) följer omedelbart av det explicita uttrycket för  $P_r(t)$ .

(b) Genom att byta ordning mellan integration och summation samt utnyttja att  $\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = 0$  för  $n \neq 0$  får vi

$$\int_{\mathbf{T}} P_r(t) dt = \int_{\mathbf{T}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \int_{\mathbf{T}} 1 dt = 1.$$

Omkastningen är tillåten på grund av korollarium 4.1.2 till satsen om dominerad konvergens eftersom  $|r^{|n|} e^{int}| = r^{|n|}$  för alla  $t \in \mathbf{R}$  och  $\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} < \infty$ .

(d) Eftersom funktionerna  $P_r$  är avtagande i intervallet  $[\delta, \pi]$  gäller att

$$\max_{\delta \leq t \leq \pi} P_r(t) = P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \delta} \rightarrow 0 \quad \text{då } r \rightarrow 1.$$

(c) är förstås en omedelbar konsekvens av (d).

(e) För fixt  $t$  ligger funktionen  $s \mapsto f(t - s)$  i  $L^1(\mathbf{T})$ . Det följer därför av korollariet till satsen om dominerad konvergens att

$$\begin{aligned} f * P_r(t) &= \int_{\mathbf{T}} f(t - s) P_r(s) ds = \int_{\mathbf{T}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{ins} f(t - s) ds \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\mathbf{T}} r^{|n|} e^{ins} f(t - s) ds = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\mathbf{T}} r^{|n|} f(u) e^{in(t-u)} du \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}. \end{aligned}$$

(f) Påståendet följer genom upprepad användning av sats 4.1.6 på serie-representationen i (e) av  $f * P_r$ .

Sätt  $g_n(t) = r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}$ ; då är  $k$ :te derivatan  $g_n^{(k)}(t) = (in)^k r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}$  och för dess supnorm  $M_n = \sup |g_n^{(k)}(t)|$  gäller att  $M_n \leq |n|^k r^{|n|} \|f\|_1$ . Det följer att

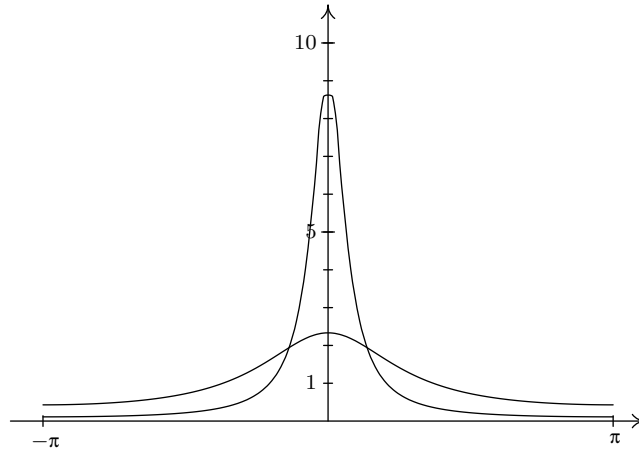
$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} M_n \leq \|f\|_1 \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^k r^{|n|} < \infty,$$

så enligt sats 4.1.6 existerar  $k$ :te derivatan till  $f * P_r$ , och den ges av summan

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (in)^k r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}.$$

□





**Figure 4.3.** Poissonkärnan  $P_r(t)$  för  $r = 0.4$  och  $r = 0.8$ .

## 4.5 Fourierseriens abelsumma

En kontinuerlig periodisk funktions fourierserie behöver inte konvergera i alla punkter men den är abelsummerbar i samtliga punkter med funktionsvärdet som summa. Och godtyckliga  $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner är abelsummerbara i  $L^1$ -mening i en betydelse som preciseras nedan. Detta är kontentan av följande sats, som utgör en av höjdpunkterna i det här kapitlet.

**Sats 4.5.1.** *Låt  $f$  vara en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$ . Då är*

- (i)  $\lim_{r \rightarrow 1} \|f * P_r - f\|_1 = 0$ ;
- (ii)  $\lim_{r \rightarrow 1} f * P_r(t) = f(t)$  om  $f$  är kontinuerlig i punkten  $t$ ;
- (iii)  $\lim_{r \rightarrow 1} \|f * P_r - f\|_\infty = 0$  om  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ .

Påstående (ii) betyder, eftersom

$$f * P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int},$$

att fourierserien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$  till en funktion  $f$  är abelsummerbar med  $f(t)$  som summa i varje punkt  $t$  där funktionen är kontinuerlig.

*Bevis.* (i) Eftersom  $\int_{\mathbf{T}} P_r(s) ds = 1$ , är  $f(t) = \int_{\mathbf{T}} f(t) P_r(s) ds$ , varav följer att

$$\begin{aligned} f * P_r(t) - f(t) &= \int_{\mathbf{T}} f(t-s) P_r(s) ds - \int_{\mathbf{T}} f(t) P_r(s) ds \\ &= \int_{\mathbf{T}} (f(t-s) - f(t)) P_r(s) ds = \int_{\mathbf{T}} (T_s f(t) - f(t)) P_r(s) ds. \end{aligned}$$

Triangelolikheten för integraler ger nu olikheten

$$(4.2) \quad |f * P_r(t) - f(t)| \leq \int_{\mathbf{T}} |T_s f(t) - f(t)| P_r(s) ds,$$

som vi integrerar med avseende på  $t$  för att få normen av  $f * P_r - f$ . Genom att kombinera detta med en omkastning av integrationsordningen får vi uppskattningen

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \|f * P_r - f\|_1 &\leq \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} |T_s f(t) - f(t)| P_r(s) ds dt \\ &= \int_{\mathbf{T}} P_r(s) \int_{\mathbf{T}} |T_s f(t) - f(t)| dt ds \\ &= \int_{\mathbf{T}} \|T_s f - f\|_1 P_r(s) ds. \end{aligned}$$

Vi ska visa påstående (i) genom att visa att integralen i högerledet av olikheten (4.3) går mot noll då  $r \rightarrow 1$ , och det gör vi genom att dela upp integrationsintervallet  $\mathbf{T}$  i två delar: en del  $I_\delta$ , där normen  $\|T_s f - f\|_1$  är liten, och komplementet  $J_\delta$ , där integralen av  $P_r(s)$  är liten och går mot noll då  $r \rightarrow 1$ .

Enligt sats 4.2.4 går  $\|T_s f - f\|_1$  mot noll då  $s \rightarrow 0$ . Därför finns det givet  $\epsilon > 0$  ett positivt tal  $\delta$  sådant att  $\|T_s f - f\|_1 < \epsilon$  för alla  $s$  i intervallet  $[-\delta, \delta]$ . Och för alla  $s$  är  $\|T_s f - f\|_1 \leq \|T_s f\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$ . Med  $I_\delta = [-\delta, \delta]$  och  $J_\delta = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  får vi nu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{I_\delta} \|T_s f - f\|_1 P_r(s) ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{I_\delta} \epsilon P_r(s) ds \leq \epsilon \int_{\mathbf{T}} P_r(s) ds = \epsilon$$

och

$$\frac{1}{2\pi} \int_{J_\delta} \|T_s f - f\|_1 P_r(s) ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{J_\delta} 2\|f\|_1 P_r(s) ds = \frac{2\|f\|_1}{\pi} \int_{J_\delta} P_r(s) ds,$$

där vi utnyttjat egenskaperna (a) och (b) i sats 4.4.1 hos Poissonkärnan. Addition av de båda olikheterna ger oss nu på grund av olikheten (4.3) den nya olikheten

$$\|f * P_r - f\|_1 \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_1}{\pi} \int_{J_\delta} P_r(s) ds,$$

och det följer nu av egenskapen (c) hos Poissonkärnan att det finns ett tal  $r_0 < 1$  sådant att  $\|f * P_r - f\|_1 \leq 2\epsilon$  för  $r_0 < r < 1$ . Detta bevisar påstående (i), dvs. att  $f * P_r$  konvergerar mot  $f$  i  $L^1$ -mening då  $r \rightarrow 1$ .

Beviset för påståendena (ii) och (iii) är analogt, men nu utgår vi från olikheten (4.2) och kommer att visa att integralen i högerledet av olikheten går mot 0 då  $r \rightarrow 1$  om funktionen  $f$  är kontinuerlig i punkten  $t$ , samt att samma integral går likformigt mot noll på  $\mathbf{T}$  om funktionen är kontinuerlig på hela  $\mathbf{T}$ . Vi låter den här gången intervallet  $I_\delta = [-\delta, \delta]$  vara den del där

differensen  $|f(t-s) - f(t)|$  är liten. På komplementet  $J_\delta = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  är Poissonkärnan  $P_r(s)$  liten och går mot 0 då  $r \rightarrow 1$ .

Så antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig i punkten  $t$ . Då finns det, givet  $\epsilon > 0$ , ett positivt tal  $\delta$  så att

$$|s| \leq \delta \Rightarrow |T_s f(t) - f(t)| < \epsilon,$$

och om funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbf{T}$  så kan vi på grund av likformig kontinuitet välja  $\delta$  så att ovanstående implikation gäller för alla  $t \in \mathbf{T}$ . Detta ger oss följande uppskattning av integralen över intervallet  $I_\delta$ :

$$(4.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{I_\delta} |T_s f(t) - f(t)| P_r(s) ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{I_\delta} \epsilon P_r(s) ds \leq \epsilon \int_{\mathbf{T}} P_r(s) ds = \epsilon,$$

som om  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$  således gäller för alla  $t$ .

För  $s \in J_\delta$  utnyttjar vi istället att

$$\begin{aligned} |T_s f(t) - f(t)| P_r(s) &\leq |T_s f(t)| P_r(s) + |f(t)| P_r(s) \\ &\leq |T_s f(t)| \max_{s \in J_\delta} P_r(s) + |f(t)| P_r(s) \\ &= |T_s f(t)| P_r(\delta) + |f(t)| P_r(s), \end{aligned}$$

och genom att integrera denna olikhet med avseende på  $s$  över  $J_\delta$  samt utnyttja att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{J_\delta} |T_s f(t)| ds \leq \int_{\mathbf{T}} |T_s f(t)| ds = \int_{\mathbf{T}} |f(u)| du = \|f\|_1$$

erhåller vi olikheten

$$(4.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{J_\delta} |T_s f(t) - f(t)| P_r(s) ds \leq \|f\|_1 P_r(\delta) + \frac{|f(t)|}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(s) ds$$

Genom att addera de två uppskattningarna (4.4) och (4.5) erhåller vi nu slutligen följande olikhet ur olikheten (4.2)

$$|f * P_r(t) - f(t)| \leq \epsilon + \|f\|_1 P_r(\delta) + \frac{|f(t)|}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(s) ds,$$

som gäller för alla  $t \in \mathbf{T}$  om  $f$  är kontinuerlig överallt. I detta fall är således

$$\|f * P_r - f\|_\infty \leq \epsilon + \|f\|_1 P_r(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(s) ds.$$

Enligt sats 4.4.1 går såväl  $P_r(\delta)$  som  $\int_{\delta}^{\pi} P_r(s) ds$  mot 0 då  $r$  går mot 1. Det finns således ett tal  $r_0 < 1$  sådant att

$$|f * P_r(t) - f(t)| < 2\epsilon \quad \text{resp.} \quad \|f * P_r - f\|_\infty < 2\epsilon$$

för  $r_0 < r < 1$ , vilket bevisar påståendena (ii) och (iii).  $\square$

*Anmärkning.* Eftersom faltningarna  $f * P_r$  är oändligt deriverbara, visar påstående (i) i sats 4.5.1 att de oändligt deriverbara funktionerna är täta i  $L^1(\mathbf{T})$ .

Vi kan skärpa påstående (ii) i satsen genom att utnyttja att Poissonkärnan är jämn och skriva faltningen  $f * P_r$  på formen

$$f * P_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} P_r(s) ds.$$

Med nästan exakt samma resonemang som i beviset för påstående (ii) får vi nu följande mer generella resultat:

**Sats 4.5.2.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  samt att*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} = A.$$

*Då är fourierserien till  $f$  abelsummerbar i punkten  $t$  med summa  $A$ .*

Observera att

$$A = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$$

om de båda ensidiga gränsvärdena

$$f(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} f(s) \quad \text{och} \quad f(t^+) = \lim_{s \rightarrow t^+} f(s)$$

existerar.

En av våra inledande frågor om fourierkoefficienterna var huruvida de bestämmer funktionen entydigt, och den frågan kan vi nu besvara jakande. Vi har nämligen följande entydighetsresultat.

**Sats 4.5.3 (Entydighetssatsen).** (a) *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och att  $\hat{f}(n) = 0$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ . Då är  $\|f\|_1 = 0$ , dvs.  $f(t) = 0$  nästan överallt. Speciellt är  $f(t) = 0$  i alla kontinuitetpunkter  $t$  till funktionen.*

(b) *Antag att  $f$  och  $g$  är två funktioner i  $L^1(\mathbf{T})$  med  $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ . Då är  $f(t) = g(t)$  nästan överallt, och speciellt är  $f(t) = g(t)$  i alla punkter  $t$  där båda funktionerna är kontinuerliga.*

*Bevis.* (a) Eftersom  $\hat{f}(n) = 0$  för alla  $n$ , är  $f * P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int} = 0$  för alla  $t$  och  $0 \leq r < 1$ . Följaktligen är  $\|f\|_1 = \|f * P_r - f\|_1$  för  $0 \leq r < 1$ . Men enligt sats 4.5.1 går  $\|f * P_r - f\|_1$  mot 0 då  $r \rightarrow 1$ , och således är  $\|f\|_1 = 0$ .

(b) följer av (a) genom att vi betraktar differensen  $f - g$ . □

Vi avslutar det här avsnittet med ett par följsatser till sats 4.5.1. Den första säger oss vad fourierseriens summa måste vara om vi vet att den konvergerar.

**Sats 4.5.4.** Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$ , att  $f$  är kontinuerlig i punkten  $t$  (eller mer generellt att  $A = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} (f(t+s) + f(t-s))$  existerar), samt att funktionens fourierserie är konvergent i punkten  $t$ . Då är fourierseriens summa i punkten  $t$  lika med  $f(t)$  (resp.  $A$ ).

*Bevis.* Enligt sats 4.5.1 (resp. sats 4.5.2) är serien abelsummerbar med abelsumma  $f(t)$  (resp.  $A$ ), och eftersom serien är konvergent är abelsumman lika med den vanliga summan.  $\square$

**Sats 4.5.5.** Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och att  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ . Då är

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

nästan överallt och speciellt i alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.

*Bevis.* På grund av Weierstrass majorantsats (sats 4.1.5) konvergerar

$$f * P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}$$

likformigt mot  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$  då  $r \rightarrow 1$ . Men enligt sats 4.5.1 konvergerar  $f * P_r$  i  $L^1$ -mening mot  $f(t)$ . De två gränsvärdena måste vara lika nästan överallt, vilket betyder att likheten i satsen gäller nästan överallt. Eftersom funktionen i högerledet av likheten är kontinuerlig överallt, gäller likheten säkert i alla punkter där funktionen  $f$  är kontinuerlig.  $\square$

## Övning

4.5 Visa att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int} = f(t)$$

om funktionen  $f \in L^1(\mathbf{T})$  är två gånger kontinuerligt deriverbar.

## 4.6 Riemann–Lebesgues lemma

Hittills har vi bara visat att en godtycklig  $L^1(\mathbf{T})$ -funktions fourierkoefficienter är begränsade, men läsaren har säkert noterat att i samtliga exempel och övningar som förekommit har koefficienterna gått mot noll då  $|n|$  går mot oändligheten. Detta är ingen tillfällighet, utan vi har följande generella resultat som brukar gå under namnet *Riemann–Lebesgues lemma*.

**Sats 4.6.1** (Riemann–Lebesgues lemma). För alla funktioner  $f \in L^1(\mathbf{T})$  gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

*Bevis.* Vi ska använda korollarium 4.2.3 till kontinuitetsprincipen genom att välja  $\mathcal{B} = L^1(\mathbf{T})$  och  $T_n(f) = |\hat{f}(n)|$ . För alla  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  och  $n \in \mathbf{Z}$  är

$$T_n(f + g) = |\hat{f}(n) + \hat{g}(n)| \leq |\hat{f}(n)| + |\hat{g}(n)| = T_n(f) + T_n(g)$$

och

$$0 \leq T_n(f) \leq \|f\|_1,$$

så avbildningarna  $T_n$  är positiva, subadditiva och uniformt begränsade. Som tät mängd  $D$  väljer vi mängden

$$D = \{f * P_r \mid f \in L^1(\mathbf{T}), 0 \leq r < 1\};$$

att mängden är tät i  $L^1(\mathbf{T})$  följer av sats 4.5.1 (i). För att bevisa Riemann–Lebesgues lemma räcker det därför att visa att  $T_n(g) = |\hat{g}(n)| \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \pm\infty$  för alla funktioner  $g \in D$ . Men för  $g = f * P_r \in D$  är

$$T_n(g) = |\hat{g}(n)| = |r^{n|} \hat{f}(n)| \leq r^{n|} \|f\|_1,$$

och  $r^{n|} \rightarrow 0$  eftersom  $0 < r < 1$ . Därmed är saken klar.  $\square$

## Övningar

4.6 Visa för  $f \in L^1(\mathbf{T})$  att

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt \, dt = 0$
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt \, dt = 0$
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin(n + \frac{1}{2})t \, dt = 0$ .

## 4.7 Parsevals formel

Vi noterade i avsnitt 3.9 att  $\{e^{int} \mid n \in \mathbf{Z}\}$  är ett ON-system i inreprodukttrummet  $L^2(\mathbf{T})$  och att  $\hat{f}(n) = \langle f, e^{in\cdot} \rangle$  för  $f \in L^2(\mathbf{T})$ . Vi presenterade också två varianter av en viktig formel, Parsevals formel, som innebär att ON-systemet är fullständigt, ett resultat som vi nu upprepar och dessutom ska bevisa.

**Sats 4.7.1** (Parsevals sats). *Antag  $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ . Då gäller:*

- (i)  $\int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2$ .
- (ii)  $\int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} \, dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$ .
- (iii) Serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$  konvergerar i  $L^2$ -mening mot  $f$ .

Enligt sats 2.5.6 är de tre påståendena i satsen ekvivalenta så det räcker att bevisa ett av dem, t. ex. påstående (i). Beviset kräver ett par hjälpsatser och vi startar med Bessels olikhet.

**Lemma 4.7.2** (Bessels olikhet för  $L^2(\mathbf{T})$ ). *Antag att  $f \in L^2(\mathbf{T})$ . Då är*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

*Bevis.* Satsen är det specialfall av sats 2.5.5 som fås för inreprodukttrummet  $L^2(\mathbf{T})$  och ON-systemet  $\{e^{int} \mid n \in \mathbf{Z}\}$ .  $\square$

För att förenkla beteckningarna inför vi följande notation.

**Definition.** Om  $f$  är en funktion med  $\mathbf{R}$  som definitionsområde, så är  $\check{f}$  funktionen som definieras av att

$$\check{f}(t) = f(-t)$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ .

Om  $f$  ligger i  $L^2(\mathbf{T})$ , så ligger förstås också  $\check{f}$  i  $L^2(\mathbf{T})$  och  $\|\check{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

**Lemma 4.7.3.** *Faltningen  $f * g$  av två  $L^2(\mathbf{T})$ -funktioner  $f$  och  $g$  är en kontinuerlig funktion.*

*Bevis.* Det följer av Cauchy–Schwarz olikhet att

$$\begin{aligned} |f * g(t) - f * g(t_0)| &= \left| \int_{\mathbf{T}} f(s) (\check{g}(s-t) - \check{g}(s-t_0)) ds \right| \\ &\leq \left( \int_{\mathbf{T}} |f(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{T}} |\check{g}(s-t) - \check{g}(s-t_0)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_2 \|T_t \check{g} - T_{t_0} \check{g}\|_2, \end{aligned}$$

och enligt sats 4.2.4 går högerledet i olikheten ovan mot 0 då  $t \rightarrow t_0$ . Detta visar att faltningen är kontinuerlig i den godtyckliga punkten  $t_0$ .  $\square$

*Bevis för Parsevals sats.* Antag att  $f \in L^2(\mathbf{T})$  och sätt

$$h(t) = f * \check{\bar{f}}(t) = \int_{\mathbf{T}} f(s) \overline{f(s-t)} ds.$$

Enligt lemma 4.7.3 är  $h$  en kontinuerlig  $L^1(\mathbf{T})$ -funktion, och eftersom

$$\mathcal{F}(\check{\bar{f}})(n) = \int_{\mathbf{T}} \overline{f(-t)} e^{-int} dt = \overline{\int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du} = \overline{\hat{f}(n)},$$

är

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(n)} = |\hat{f}(n)|^2$$

för alla  $n \in \mathbf{Z}$ .

Enligt Bessels olikhet är serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2$  konvergent, så det följer därför av sats 4.5.5 att

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 e^{int}$$

för alla  $t$ , och speciellt är alltså

$$h(0) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Men

$$h(0) = \int_{\mathbf{T}} f(s) \overline{f(s)} ds = \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt,$$

och därmed är likheten (i) i Parsevals sats bevisad.  $\square$

Parsevals sats har en trevlig tolkning i termer av isometrier, dvs. normbevarande linjära avbildningar. Mängden  $\ell^2(\mathbf{Z})$  av alla komplexa följder  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  som uppfyller villkoret

$$\|a\|_2 = \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

är ett inreprodukttrum med  $\|\cdot\|_2$  som norm och

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \overline{b_n}$$

som inre produkt (jmf. exempel 2.5.1), och sats 4.7.1 innebär att fouriertransformen

$$\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbf{Z}}$$

av en funktion  $f \in L^2(\mathbf{T})$  är ett element i  $\ell^2(\mathbf{Z})$  och att  $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ . Restriktionen av fouriertransformen till rummet  $L^2(\mathbf{T})$  är med andra ord en isometri från  $L^2(\mathbf{T})$  till  $\ell^2(\mathbf{Z})$ . Man kan vidare visa att avbildningen är surjektiv, så som normerade rum (och inreprodukttrum) kan funktionsrummet  $L^2(\mathbf{T})$  och rummet  $\ell^2(\mathbf{Z})$  av följder uppfattas som "samma" rum.

## 4.8 Punktvis konvergens

Vi har tidigare konstaterat att partialsumman

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

till en funktions fourierserie kan skrivas som en faltning

$$S_N f(t) = f * D_N(t)$$



av funktionen  $f$  med Dirichletpolynomet

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

Dirichletpolynomen har egenskaper som påminner om Poissonkärnan. Exempelvis är

$$(4.6) \quad \int_{\mathbf{T}} D_N(t) dt = 1$$

och

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} D_N(t) dt = 0 \quad \text{om } 0 < \delta < \pi.$$

Likheten (4.6) följer genom att integrera summan  $\sum_{n=-N}^N e^{int}$  termvis eftersom  $\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt$  är lika med 0 för  $n \neq 0$  och lika med 1 för  $n = 0$ , och gränsvärdet är en konsekvens av Riemann-Lebesgues lemma eftersom funktionen  $1/\sin \frac{1}{2}t$  tillhör  $L^1([\delta, \pi])$ .

För att visa att partialsummorna konvergerar mot  $f(t)$  i en punkt  $t$  är det frestande att försöka kopiera beviset för sats 4.5.1, men det fungerar inte av det skälet att Dirichletpolynomen till skillnad från Poissonkärnan inte är positiva. För att fourierserien skall konvergera punktviss krävs det ytterligare villkor på funktionen  $f$ , och vi skall nu härleda ett tillräckligt sådant.

Antag som alltid att  $f \in L^1(\mathbf{T})$ , och låt till att börja med  $A$  vara ett godtyckligt tal. Genom att utnyttja ekvation (4.6) erhåller vi identiteten

$$\begin{aligned} S_N f(t) - A &= f * D_N(t) - A = \int_{\mathbf{T}} (f(t-s) - A) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(t-s) - A) D_N(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-s) - A) D_N(s) ds. \end{aligned}$$

Vi gör nu variabelbytet  $u = -s$  i integralen över  $[-\pi, 0]$  samt utnyttjar att Dirichletpolynomet  $D_N$  är en jämn funktion. Detta resulterar i att

$$\begin{aligned} S_N f(t) - A &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t+u) - A) D_N(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-s) - A) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t+s) + f(t-s) - 2A) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s} \sin(N + \frac{1}{2})s ds. \end{aligned}$$

Om nu funktionen

$$g(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s}$$

tillhör  $L^1([0, \pi])$ , så följer det av Riemann-Lebesgues lemma att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(t) - A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(s) \sin(N + \frac{1}{2})s \, ds = 0,$$

dvs. partialsummorna  $S_N f(t)$  konvergerar mot  $A$ .

Vi kan ersätta villkoret  $g \in L^1([0, \pi])$  med ett något enklare villkor genom att använda den elementära olikheten

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x,$$

som gäller för  $0 \leq x \leq \pi/2$  och följer av att sinuskurvan för  $0 \leq x \leq \pi/2$  ligger mellan kordan från origo till maximipunkten  $(\pi/2, 1)$  och tangenten i origo. För  $0 < s \leq \pi$  är således  $2 \leq s/\sin \frac{1}{2}s \leq \pi$ , så om vi definierar funktionen  $h$  genom att sätta

$$h(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} = g(s) \frac{\sin \frac{1}{2}s}{s}$$

blir följaktligen

$$2|g(s)| \leq |h(s)| \leq \pi|g(s)|$$

för  $0 < s \leq \pi$ . Funktionen  $g$  tillhör således  $L^1([0, \pi])$  om och endast om funktionen  $h$  gör det.

Vi undersöker därför när  $h$  tillhör  $L^1([0, \pi])$  och låter för den skull  $\delta$  vara ett godtyckligt tal i det öppna intervallet  $]0, \pi[$ . För  $s \geq \delta$  är

$$|h(s)| \leq \delta^{-1}(|f(t+s)| + |f(t-s)| + 2|A|)$$

och följaktligen

$$\begin{aligned} \int_\delta^\pi |h(s)| \, ds &\leq \delta^{-1} \int_0^\pi (|f(t+s)| + |f(t-s)| + 2|A|) \, ds \\ &= 2\pi\delta^{-1}(\|f\|_1 + |A|) < \infty. \end{aligned}$$

Funktionen  $h$  ligger således i  $L^1([0, \pi])$  om och endast om

$$\int_0^\delta |h(s)| \, ds = \int_0^\delta \left| \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} \right| \, ds < \infty$$

för något  $\delta > 0$ . Därmed har vi bevisat följande sats.

**Sats 4.8.1** (Dinis konvergenskriterium). *Fourierserien till  $L^1(\mathbf{T})$ -funktionen  $f$  är konvergent i punkten  $t$  med gränsvärde  $A$  om*

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} \right| \, ds < \infty$$

för något positivt tal  $\delta$ .

Dinis konvergensvillkor är uppfyllt om gränsvärdet

$$(4.7) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s}$$

existerar, ty detta medför att funktionen  $h(s)$  är begränsad nära  $s = 0$ . Och ett svagare tillräckligt villkor är att det finns positiva konstanter  $C$  och  $\alpha$  sådana att olikheten

$$(4.8) \quad |f(t+s) + f(t-s) - 2A| \leq Cs^\alpha$$

gäller för alla tillräckligt små tal  $s$ .

Sammanfattningsvis har vi alltså visat att  $S_N f(t) \rightarrow A$  då  $N \rightarrow \infty$  om villkoret (4.7) eller villkoret (4.8) är uppfyllt, och för att med utgångspunkt från detta skaffa oss två konvergenskriterier som är enkla att verifiera inför vi följande beteckningar och definitioner.

**Definition.** I en punkt  $t_0$  där högergränsvärdet

$$f(t_0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t_0 + s)$$

existerar kallas gränsvärdet

$$f'_+(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + s) - f(t_0^+)}{s}$$

för den *generaliserade högerderivatan*, förutsatt att det existerar. Och i en punkt där vänstergränsvärdet

$$f(t_0^-) = \lim_{s \rightarrow 0^-} f(t_0 + s)$$

existerar kallas gränsvärdet

$$f'_-(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{f(t_0 + s) - f(t_0^-)}{s}$$

för den *generaliserade vänsterderivatan*, förutsatt att det existerar.

I punkter  $t_0$  där funktionen är kontinuerlig är förstås  $f(t_0^+) = f(t_0^-) = f(t_0)$ , och om den "vanliga" vänsterderivatan existerar så är den lika med  $f'_-(t_0)$ , och motsvarande gäller för den "vanliga" högerderivatan. Speciellt existerar såväl  $f'_+(t_0)$  som  $f'_-(t_0)$  i alla punkter  $t_0$  där funktionen  $f$  är deriverbar.

**Definition.** Funktionen  $f$  kallas *Hölderkontinuerlig* i punkten  $t_0$  om det finns positiva konstanter  $C$ ,  $\alpha$  och  $\delta$  sådana att olikheten

$$|f(t) - f(t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

gäller för  $|t - t_0| < \delta$ .

Utrustade med dessa definitioner kan vi nu formulera följande konvergenskriterier.

**Sats 4.8.2.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$ , och låt  $t$  vara en punkt där de båda ensidiga gränsvärdena  $f(t^-)$  och  $f(t^+)$  och de två generaliserade ensidiga derivatorna  $f'_-(t)$  och  $f'_+(t)$  existerar. Då konvergerar fourierserien till  $f$  i punkten  $t$  mot  $\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$ .*

*Bevis.* Sätt  $A = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$ . Våra antaganden medför att

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(t^+)}{s} \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t-s) - f(t^-)}{-s} = f'_+(t) - f'_-(t) \end{aligned}$$

existerar, dvs. det för konvergens tillräckliga villkoret (4.7) är uppfyllt.  $\square$

**Sats 4.8.3.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och att  $t$  är en punkt där funktionen  $f$  är Hölderkontinuerlig. Då är funktionens fourierserie konvergent i punkten  $t$  med summa  $f(t)$ .*

*Bevis.* På grund av antagandet finns det positiva konstanter  $C$  och  $\alpha$  sådana att

$$|f(t \pm s) - f(t)| \leq Cs^\alpha$$

för alla tillräckligt små  $s$ , och då är det tillräckliga konvergensvillkoret (4.8) uppfyllt med  $A = f(t)$ .  $\square$

Huruvida en fourierserie konvergerar i en punkt beror enbart på funktionens uppförande i en godtyckligt liten omgivning av punkten. Detta är innebörden av följande sats.

**Sats 4.8.4 (Riemanns lokaliseringsprincip).** (a) *Låt  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och antag att  $f(t) = 0$  för  $|t - t_0| < \delta$ , där  $\delta$  är ett godtyckligt litet positivt tal. Då konvergerar fourierserien till  $f$  mot 0 i punkten  $t_0$ .*

(b) *Låt  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  och antag att  $f(t) = g(t)$  för alla  $t$  i någon öppen omgivning av  $t_0$ . Då är antingen fourierserierna till  $f$  och  $g$  båda konvergenta i punkten  $t_0$  med samma summa, eller också är båda serierna divergenta.*

*Bevis.* (a) är en omedelbar konsekvens av sats 4.8.2, och (b) följer genom att tillämpa (a) på differensen  $f - g$ , eftersom  $S_n f(t) = S_n(f - g)(t) + S_n g(t)$ .  $\square$

Lokaliseringsprincipen är onekligen överraskande, ty genom att ändra en funktion utanför en godtyckligt liten omgivning av en punkt kan vi förändra samtliga koefficienter i fourierserien, men detta påverkar alltså inte fourierseriens summa i punkten.

Vi avslutar det här avsnittet med några konvergensresultat, vars bevis är alltför komplicerade för att ges här.

Den svenske matematikern Lennart Carleson visade 1966 följande sats.

**Sats (Carlesons sats).** *Mängden av punkter där fourierserien till en  $L^2(\mathbf{T})$ -funktion **inte** konvergerar är en nollmängd.*

Eftersom alla kontinuerliga funktioner på  $\mathbf{T}$  ligger i  $L^2(\mathbf{T})$  följer speciellt:

**Korollarium.** *Mängden av punkter där fourierserien till en kontinuerlig funktion på  $\mathbf{T}$  **inte** konvergerar är en nollmängd.*

Korollariets resultat är det bästa vi kan hoppas på på grund av nästa sats.

**Sats (Kahane–Katznelson).** *För varje nollmängd  $E$  på  $\mathbf{T}$  finns det en kontinuerlig funktion vars fourierserie divergerar för alla punkter i  $E$ .*

Och för allmänna  $L^1$ -funktioner har vi följande negativa resultat.

**Sats (Kolmogorov).** *Det finns en  $L^1(\mathbf{T})$ -funktion vars fourierserie divergerar punktviss överallt.*

Varje  $L^1$ -funktions fourierserie är enligt sats 4.5.1 abelsummerbar i  $L^1$ -mening med funktionen som summa. Detta betyder emellertid inte att fourierseriens partialsummor behöver konvergera mot funktionen i  $L^1$ -mening, ty vi har följande sats.

**Sats.** *Det finns en  $L^1(\mathbf{T})$ -funktion vars fourierserie **inte** konvergerar mot funktionen i  $L^1$ -mening.*

För bevisen av samtliga satser ovan, förutom Carlesons sats, hänvisas till Yitzhak Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd ed., Cambridge University Press, 2004.

## Övningar

4.7 Visa följande normresultat för Dirichletkärnan:

$$\text{a) } \|D_N\|_\infty = 2N + 1 \quad \text{b) } \|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1).$$

Det följer att  $\|D_N\|_1 \rightarrow \infty$  då  $N \rightarrow \infty$ , och det är detta faktum som gör att det exempelvis finns kontinuerliga funktioner med fourierserier som divergerar i vissa punkter.

## 4.9 Weierstrass approximationssats

Vi kan beräkna ett polynoms värden exakt med hjälp av enbart elementära aritmetiska räkneoperationer. Ur beräkningssynpunkt är det därför betydelsefullt att alla kontinuerliga funktioner kan approximeras likformigt med polynom på slutna begränsade intervall  $[a, b]$  med godtycklig noggrannhet. Mängden av polynom är med andra ord tät i rummet  $\mathcal{C}([a, b])$  av alla kontinuerliga funktioner på intervallet  $[a, b]$  med avseende på den naturliga supnormen  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Sats 4.9.1** (Weierstrass approximationssats). *Låt  $I = [a, b]$  vara ett slutet, begränsat intervall. För varje  $f \in \mathcal{C}(I)$  och  $\epsilon > 0$  finns det ett polynom  $p(t)$  så att  $|f(t) - p(t)| < \epsilon$  för  $a \leq t \leq b$ .*

*Bevis.* Det räcker att visa satsen för intervallet  $[0, \pi]$ , ty det allmänna fallet kan återföras på detta fall med hjälp av variabelbytet  $s = \pi(t - a)/(b - a)$ .

Låt därför  $f$  vara en godtycklig kontinuerlig funktion på intervallet  $[0, \pi]$ . Vi börjar med att visa att vi kan approximera  $f$  uniformt på intervallet med godtycklig noggrannhet med hjälp av trigonometriska polynom, dvs. att det givet  $\epsilon > 0$  finns ett trigonometriskt polynom  $P(t)$  sådant att

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon \quad \text{för } 0 \leq t \leq \pi.$$

Utvidga för den skull först  $f$  till en jämn funktion  $\tilde{f}$  på  $[-\pi, \pi]$ ; den jämna utvidgningen är förstas kontinuerlig med  $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ , så den  $2\pi$ -periodiska utvidgningen är också kontinuerlig, dvs. den tillhör  $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ . Eftersom funktionen  $\tilde{f}$  är jämn, innehåller fourierserien bara cosinustermer. Abelserien

$$\tilde{f} * P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{\tilde{f}}(n) r^{|n|} e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos nt$$

innehåller därför också bara cosinustermer och för koefficienterna gäller uppskattningen

$$|a_n| = |\hat{\tilde{f}}(n) + \hat{\tilde{f}}(-n)| \leq 2\|\tilde{f}\|_1.$$

Enligt sats 4.5.1 finns det ett tal  $r < 1$  sådant att

$$|f(t) - \tilde{f} * P_r(t)| < \epsilon/4 \quad \text{för } 0 \leq t \leq \pi.$$

För alla  $t$  är vidare

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \cos nt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq 2\|\tilde{f}\|_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n = 2\|\tilde{f}\|_1 \frac{r^{N+1}}{1-r} < \epsilon/4$$

bara  $N$  är tillräckligt stort, eftersom  $r^n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . För det trigonometriska polynomet

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n r^n \cos nt$$

gäller därför uppskattningen

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad |f(t) - P(t)| &= |f(t) - \tilde{f} * P_r(t) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \cos nt| \\
 &\leq |f(t) - \tilde{f} * P_r(t)| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n r^n \cos nt \right| \\
 &\leq \epsilon/4 + \epsilon/4 < \epsilon/2
 \end{aligned}$$

likformigt för  $0 \leq t \leq \pi$ .

Det återstår nu endast att visa att det trigonometriska polynomet  $P(t)$  kan approximeras uniformt på intervallet  $[0, \pi]$  med ett vanligt polynom. Vi approximerar därför funktionen  $P(t)$  med dess Maclaurinpolynom

$$p(t) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

av grad  $m-1$ . Maclaurinutvecklingens approximationsfel  $P(t) - p(t)$  kan uttryckas på formen

$$P(t) - p(t) = \frac{P^{(m)}(\theta t)}{m!} t^m$$

där  $\theta$  är ett tal mellan 0 och 1. För jämna tal  $m \geq 2$  är

$$P^{(m)}(t) = (-1)^{m/2} \sum_{n=1}^N n^m a_n r^n \cos nt,$$

och för udda  $m$  fås ett motsvarande uttryck med  $\sin nt$  istället för  $\cos nt$ . Följaktligen är

$$|P^{(m)}(t)| \leq \sum_{n=1}^N n^m |a_n| r^n \leq \sum_{n=1}^N N^m |a_n| = N^m \sum_{n=1}^N |a_n|$$

för alla  $t$ , och detta ger oss uppskattningen

$$\sup_{0 \leq t \leq \pi} |P(t) - p(t)| = \sup_{0 \leq t \leq \pi} \frac{|P^{(m)}(\theta t)|}{m!} t^m \leq \frac{(N\pi)^m}{m!} \sum_{n=1}^N |a_n|.$$

Eftersom  $(N\pi)^m/m! \rightarrow 0$  då  $m \rightarrow \infty$ , följer det av olikheten närmast ovan att

$$(4.10) \quad |P(t) - p(t)| < \epsilon/2$$

för alla  $t \in [0, \pi]$ , förutsatt att Maclaurinpolynomets gradtal  $m$  valts tillräckligt stort, och genom att addera de två uppskattningarna (4.9) och (4.10) erhåller vi den sökta olikheten  $|f(t) - p(t)| < \epsilon$  för alla  $t \in [0, \pi]$ .  $\square$

## Historiska notiser

Många matematiker var under sjuttonhundratalet fascinerade av problemet att summera divergenta serier. Exempelvis diskuterar GUIDO GRANDI (1671–1742) serien  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  i ett arbete år 1703, och han tilldelar den med olika argument summan  $1/2$ . Grandis serie kommenterades av flera samtida matematiker, bl. a. Gottfried Wilhelm Leibniz och Leonhart Euler, och en metod som användes för att motivera just värdet  $1/2$  är den summationsmetod som numera kallas Abelsummation på grund av NIELS HENRIK ABELS (1802–1829) sats 4.3.1.

Det finns flera andra sätt att summera divergenta serier, exempelvis Cesàrosummation, en metod som fått sitt namn efter ERNESTO CESÀRO (1859–1906). Denna summationsmetod definierar en given series summa som gränsvärdet av medelvärdena till seriens partialsummor då antalet partialsummor går mot oändligheten. Den ungerske matematikern LIPÓT FEJÉR (1880–1959) visade att en periodisk funktions fourierserie är Cesàrosummerbar med funktionsvärdet som summa i varje kontinuitetspunkt till funktionen, dvs. den direkta motsvarigheten till sats 4.5.1 för abelsummation. Beviset är parallellt med beviset för sats 4.5.1 och utnyttjar endast att den mot Poissonkärnan svarande Fejérkärnan också är en positiv summationskärna, dvs. har egenskaper motsvarande dem i sats 4.4.1.

Poissonkärnan introducerades av SIMÉON POISSON (1781–1840) som ett verktyg för att lösa Dirichlets problem i enhetsskivan, dvs. Laplace ekvation med kontinuerliga randvärden. Poissons arbeten om fourierserier beredde också väg för Dirichlets och Riemanns arbeten inom samma område.

Fourier hade inga bevis för att hans serier var punktvis konvergenta, så det är naturligt att konvergensproblemet väckte de samtida matematikernas intresse. Det första beviset i den riktningen gavs av Dirichlet som visade att fourierserien till en styckvis monoton, styckvis kontinuerlig, begränsad funktion är konvergent med funktionsvärdet som summa (utom i diskontinuitetspunkterna där summan istället är lika med medelvärdet av höger- och vänstergränsvärdena). I sitt bevis använde sig Dirichlet av Dirichletkärnan. Hans kriterium generaliserades sedan av exempelvis CAMILLE JORDAN (1838–1922) som visade att fourierserien är konvergent i varje öppet intervall där funktionen är kontinuerlig och av begränsad variation, och ULISSE DINI (1845–1918) som visade sats 4.8.1. Ett ännu svagare, men mer svårverifierbart, konvergensvillkor har givits av Henri Lebesgue.

Att kontinuitet inte är tillräckligt för att en funktions fourierserie ska konvergera punktvis överallt är en konsekvens av att Dirichletkärnornas  $L^1$ -normer inte är uniformt begränsade. Mängden där en kontinuerlig funktions fourierserie inte konvergerar måste emellertid vara en nollmängd enligt korollariet till LENNART CARLESONS (1928– ) djupa sats från 1966.



## Kapitel 5

# Tillämpningar på fourierserien

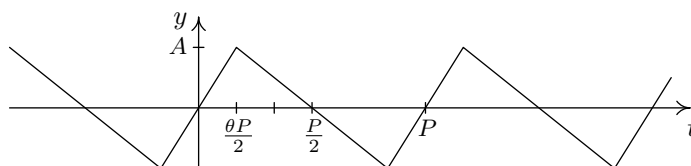
### 5.1 Toner

I inledningskapitlet introducerade vi fourierserien genom att diskutera toner; en ton med tonhöjden  $\nu$  Hz modellerades som en periodisk funktion  $f$  med en fourierserieutveckling av typen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi\nu nt + \phi_n)$$

på amplitud-fasvinkelform, och de ingående sinusoiderna  $A_n \sin(2\pi\nu nt + \phi_n)$  kallades deltoner.

Som exempel ska vi nu analysera en ton  $f(t)$  med frekvens  $\nu$ , amplitud  $A$  och sågtandsform enligt figur 5.1.



**Figur 5.1.** Sågtandsformad vågfunktion  $f$

Funktionen  $f$  är udda och periodisk med period  $P = 1/\nu$  och antar maximivärdet  $A$  för  $t = \theta P/2$ , där  $0 < \theta < 1$ . På intervallet  $[0, P/2]$  är därför

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2A\nu}{\theta}t & \text{för } 0 \leq t \leq \frac{\theta P}{2} \\ \frac{2A\nu}{1-\theta}\left(\frac{P}{2} - t\right) & \text{för } \frac{\theta P}{2} \leq t \leq \frac{P}{2}. \end{cases}$$

På trigonometrisk form har funktionen  $f$  fourierserieutvecklingen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n \nu t,$$

där

$$b_n = \frac{4}{P} \int_0^{P/2} f(t) \sin 2\pi n \nu t \, dt.$$

Variabelbytet  $x = 2\pi n \nu t$  resulterar i formeln

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x/2\pi\nu) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2A}{\theta\pi} \left( \int_0^{\theta\pi} \frac{x}{\pi} \sin nx \, dx + \frac{\theta}{(1-\theta)} \int_{\theta\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin nx \, dx \right), \end{aligned}$$

och efter partiell integration fås

$$b_n = \frac{2A}{\theta(1-\theta)\pi^2} \cdot \frac{\sin n\theta\pi}{n^2}.$$

Absolutbeloppet av kvoten  $b_n/b_1$  mellan amplituden  $b_n$  hos övertonen med frekvens  $n\nu$  och amplituden  $b_1$  hos grundtonen ger ett mått på den relativa tonstyrkan hos övertonen. I föreliggande fall är

$$\frac{b_n}{b_1} = \frac{\sin n\theta\pi}{\sin \theta\pi} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

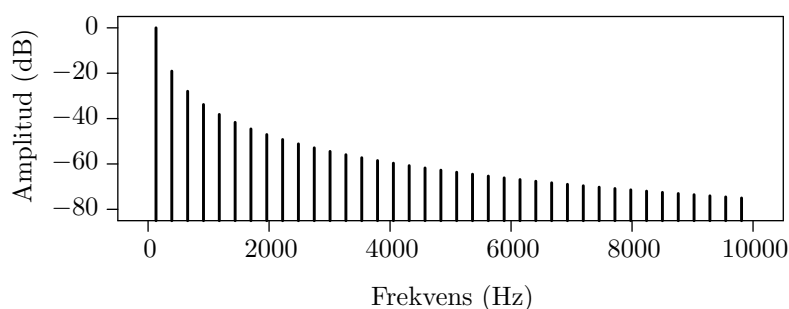
Om  $\theta = 1/N$ , där  $N$  är ett heltal, så är  $b_{kN} = 0$  för alla  $k$ , vilket innebär att det inte finns några övertoner med frekvenser som är heltalsmultipler av  $N\nu$ .

Låt oss nu speciellt analysera fallet  $\theta = 1/2$ . Då är alltså  $b_n = 0$  för alla jämna tal  $n$  medan  $|b_n/b_1| = 1/n^2$  för udda  $n$ . Om grundfrekvensen  $\nu$  hos sågtandstonen är lika med frekvensen hos tonen lilla c som är 130.8 Hz, får de nio första deltonerna frekvenser och relativ styrka  $b_n/b_1$  enligt tabell 5.1, där vi för varje delton också angivet motsvarande ton i tolvtonsskalan.<sup>1</sup> Sågtandstonens spektrum visas i figur 5.2. Observera att amplitudskalan är logaritmisk.

<sup>1</sup>Intervall mellan en ton och tonen med dubblad frekvens kallas en *oktav*. I västerländsk musik delas oktaven i 12 (logaritmiskt) lika stora halvtonsteg, vilket betyder att varje halvtonsteg multiplicerar frekvensen med  $2^{1/12} = 1.0595$ . Det går exempelvis 5 halvtonsteg mellan tonerna C och F och 7 halvtonsteg mellan tonerna C och G inom en och samma oktav, vilket innebär att tonerna F och G har frekvenser som är  $2^{5/12} = 1.3348$  resp.  $2^{7/12} = 1.4983$  gånger frekvensen hos C. Tonstegsintervall av samma storlek som intervallen C–F resp. C–G kallas kvart resp. kvint. Notera att de rationella talen  $4/3$  resp.  $3/2$  är mycket bra approximationer till  $2^{5/12}$  resp.  $2^{7/12}$  vilket förklarar varför kvarter och kvinter klingar harmoniskt. Vid s. k. ren stämning stämmer man för övrigt musikinstrumenten så att kvarts- och kvintintervallen blir exakt  $4/3$  och  $3/2$ .

Tabell 5.1. Deltoner till sågtandstonen för  $\theta = 1/2$ .

| Delton nr $n$  | 1   | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7               | 8              | 9              |
|----------------|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| Frekvens, Hz   | 131 | 262            | 392            | 523            | 654            | 785            | 916             | 1047           | 1177           |
| Tonläge        | c   | c <sup>1</sup> | g <sup>1</sup> | c <sup>2</sup> | e <sup>2</sup> | g <sup>2</sup> | a <sup>#2</sup> | c <sup>3</sup> | d <sup>3</sup> |
| Relativ styrka | 1   | 0              | $\frac{1}{9}$  | 0              | $\frac{1}{25}$ | 0              | $\frac{1}{49}$  | 0              | $\frac{1}{81}$ |

Figur 5.2. Sågtandstonens spektrum då  $\theta = 1/2$ .

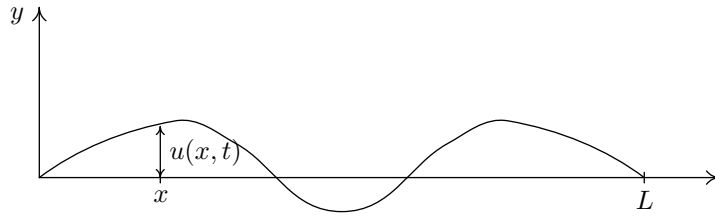
## 5.2 Svängande strängen

I det förra avsnittet analyserade vi toner som fysikaliskt sett är periodiska mekaniska vågor som i form av förtätningar och förtunningar i luften når örat. Man kan som bekant åstadkomma sådana vågor på olika sätt, genom att knäppa, gnida eller slå på en sträng som i stränginstrument eller genom att sätta en luftpelare i rörelse som i blåsinstrument. Den alstrade tonens tonhöjd, tonstyrka och klangfärg beror av geometriska och fysikaliska egenskaper hos instrumentet. Vi ska analysera detta för det enkla fallet att vårt instrument består av en enda sträng.

Betrakta för den skull en sträng av längd  $L$  som är fastspänd i sina ändpunkter som vi förlägger till punkterna 0 och  $L$  på  $x$ -axeln. Om vi sätter strängen i rörelse i  $xy$ -planet, t. ex. genom att lyfta den och sedan släppa den (som på en gitarr) eller genom att slå på den (som hammaren i ett piano),

---

Omfånget av det hörbara frekvensområdet motsvarar ca 10 oktaver, så det behövs ca 120 namn för att notera de av tolvtonskalan genererade tonerna. Det gör man genom att först ge de olika oktaverna namn såsom stora oktaven, lilla (eller ostrukna) oktaven, ettstrukna, tvåstrukna oktaven, osv. Sedan får tonerna inom en oktav oktavens namn som tillägg. Exempelvis kallas tonen C i stora oktaven "stora C" och betecknas C, tonen C i lilla oktaven kallas "lilla C" och betecknas c, tonen C i ettstrukna oktaven kallas "ettstrukna c" och betecknas c<sup>1</sup>, osv. På ett piano svarar C-tangenten mitt på pianot mot ettstrukna c. Tonernas frekvenser fixeras av att a<sup>1</sup>, ettstrukna a, har frekvensen 440 hertz.



**Figur 5.3.** Svängande sträng

så kommer den att svänga periodiskt till dess att rörelsen så småningom dämpas av friktionen mot luften och av gravitationen.

Om vi bortser från dämpningen och låter  $u(x, t)$  beteckna avvikelser från viloläget i punkten  $x$  vid tidpunkten  $t$ , så följer det från Newtons rörelselagar att rörelsen för  $0 < x < L$  och  $t > 0$  beskrivs av den partiella differentialekvationen

$$(pd) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Här är  $\rho$  strängens densitet (massa per längdenhet) och  $T$  strängens tension som är ett mått på strängens motståndskraft mot förändring och som ökar med ökande spänning hos strängen.

Eftersom strängen är fastspänd i sina ändpunkter har vi också två randvillkor i form av

$$(rv) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{för } t \geq 0.$$

Strängens rörelse bestäms slutligen också av begynnelsevillkoren

$$(bv) \quad \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < L; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), & 0 < x < L, \end{cases}$$

där  $u_0(x)$  beskriver strängens läge och  $v_0(x)$  är den hastighet vid punkten  $x$  som strängen har i  $y$ -riktningen i startögonblicket  $t = 0$ .

Vi ska nu konstruera en lösning till differentialekvationen som satisfierar givna rand- och begynnelsevillkor och konstaterar då först att funktionerna

$$u_n(x, t) = b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

satisfierar de homogena randvillkoren (rv) för alla positiva heltal  $n$  och godtyckligt val av funktionerna  $b_n(t)$ . En godtycklig summa av sådana funktioner satisfierar också randvillkoren, så därför ska vi undersöka om vi inte kan

hitta en lösning till vårt problem i form av en lämplig oändlig summa av funktioner  $u_n(x, t)$ . För att förenkla beteckningarna sätter vi

$$\Omega = \pi/L$$

och ansätter följaktligen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\Omega x.$$

Låt oss nu anta att summan är konvergent för  $0 \leq x \leq L$  och  $t \geq 0$ , att funktionerna  $b_n$  är minst två gånger deriverbara samt att vi kan bestämma de partiella derivatorna till funktionen  $u$  genom att derivera innanför summatecknet – att så verkligen är fallet kommer vi att verifiera i efterhand. Då blir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin n\Omega x$$

och

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \Omega^2 b_n(t) \sin n\Omega x.$$

Genom att jämföra koefficienterna för  $\sin n\Omega x$  ser vi att vår funktion  $u$  satisfierar differentialekvationen (pd) om

$$\rho b_n''(t) = -n^2 \Omega^2 T b_n(t)$$

för alla  $n$ . Detta är en ordinär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter vars karakteristiska ekvation har rötterna  $\pm nc\Omega i$ , där vi satt

$$c = \sqrt{T/\rho}.$$

Differentialekvationens allmänna lösning har således formen

$$b_n(t) = A_n \cos nc\Omega t + B_n \sin nc\Omega t.$$

Förutsatt att våra förutsättningar angående deriveringen är uppfyllda satisfierar därför funktionen

$$(5.1) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nc\Omega t + B_n \sin nc\Omega t) \sin n\Omega x$$

såväl differentialekvation som randvärdesvillkor, men det återstår förstås att uppfylla begynnelsevillkoren som kräver att

$$(5.2) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\Omega x = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc\Omega B_n \sin n\Omega x = v_0(x). \end{cases}$$

För att bestämma koefficienterna  $A_n$  och  $B_n$  så att detta gäller utvidgar vi funktionerna  $u_0(x)$  och  $v_0(x)$  till udda funktioner på intervallet  $[-L, L]$  och sedan till periodiska funktioner med period  $2L$ . De utvidgade funktionernas fourierserier kommer då på trigonometrisk form att vara rena sinusserier, och koefficienterna i dessa serier bestämmer koefficienterna  $A_n$  och  $B_n$ , närmare bestämt som

$$(5.3) \quad \begin{cases} A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin n\Omega x \, dx \\ nc\Omega B_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin n\Omega x \, dx. \end{cases}$$

Om det finns en lösning  $u(x, t)$  som uppfyller våra förutsättningar om deriverbarhet, så har den således formen (5.1) med koefficienter som ges av ekvationerna (5.3).

Vår härledning bygger på antagandet att det finns en deriverbar lösning med en fourierserieutveckling som kan deriveras under summatecknet. I efterhand kan vi verifiera detta genom att visa att den erhållna lösningen verkligen har dessa egenskaper förutsatt att funktionerna  $u_0$  och  $v_0$  i begynnelsevillkoret är tillräckligt reguljära.

**Sats 5.2.1.** *Antag att den periodiska, udda utvidgningen av  $u_0$  är fyra gånger kontinuerligt deriverbar och att motsvarande utvidgning av  $v_0$  är tre gånger kontinuerligt deriverbar. Då är den av serien (5.1) definierade funktionen  $u(x, t)$  med konstanter  $A_n$  och  $B_n$  bestämda av formlerna (5.3) två gånger kontinuerligt deriverbar och en lösning till differentialekvationen (pd) som uppfyller randvillkoret (rv) och begynnelsevillkoret (bv).*

*Bevis.* Det följer av sats 3.5.3 att koefficienterna  $A_n$  och  $B_n$  uppfyller olikheterna  $|A_n| \leq Kn^{-4}$  och  $|B_n| \leq Kn^{-4}$  för någon konstant  $K$ . Serien (5.1) liksom de serier som fås genom att derivera partiellt under summatecknet en och två gånger är därför absolut och likformigt konvergenta. Det följer nu av sats 4.1.6 att funktionen  $u$  har partiella kontinuerliga partiella derivator av ordning två samt att derivatorna erhålls genom derivering under summatecknet. Vidare konvergerar enligt sats 3.7.1 fourierserierna i (5.2) med  $u_0(x)$  resp.  $v_0(x)$  som summa. Funktionen  $u(x, t)$  satisfierar därför såväl differentialekvation som begynnelsevillkor.  $\square$

*Anmärkning.* Man kan också visa att lösningen i satsen ovan är entydigt bestämd.

Det följer omedelbart av lösningsformeln att  $u(x, t + 2\pi/c\Omega) = u(x, t)$  för alla  $x$  och  $t$ . Den vibrerande strängen återfår med andra ord sin ursprungliga form  $y = u_0(x)$  periodiskt med perioden

$$P = 2\pi/c\Omega = 2L\sqrt{\rho/T},$$

vilket är anledningen till att den alstrar ljudvågor med frekvensen

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Frekvensen hos den alstrade tonen ökar således med minskande stränglängd, ökande spänning och minskande densitet (tjocklek), något som man enkelt kan verifiera genom att knäppa på en gitarrsträng.

## Övningar

5.1 Bestäm en lösning till vågekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 2x, & 0 < x < \pi. \end{array} \right.$$

5.2 Vibrationerna hos en pianosträng beskrivs idealiserat av följande differentialekvation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 1/h, & \text{för } a < x < a + h, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Här beskriver  $a$  hammarens anslagpunkt på strängen, och  $h$  som är ett litet tal, är hammarens bredd. Bestäm gränsvärdet till lösningen  $u(x, t)$  då  $h \rightarrow 0$ .

## 5.3 Värmeledning i en stav

I inledningskapitlet härledde vi utifrån fysikaliska principer en partiell differentialekvation för diffusion. Värmeledning fungerar på ett helt analogt sätt. Om  $u(x, y, z, t)$  betecknar temperaturen i punkten  $(x, y, z)$  inuti en homogen kropp  $K$  vid tidpunkten  $t$ , så satisfierar således  $u$  differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u,$$

förutsatt att det inte finns några värmekällor eller värmesänkor inuti kroppen. Här är  $\kappa$  en materialkonstant som beror på kroppens värmeledningsförmåga.

Vi ska nu lösa värmeledningsekvationen i det fall då vår kropp  $K$  är en homogen stav av längd  $L$  som hålls isolerad från omgivningen utom i ändarna, där temperaturen hålls konstant. Allt värme flöde sker i detta fall i stavens längdriktning, så problemet att bestämma värmefördelningen inuti staven är i princip endimensionellt. Med  $u(x, t)$  som temperaturen i punkten  $x$  vid tiden  $t$ , beskrivs temperaturen för  $0 < x < L$  och  $t > 0$  följaktligen av differentialekvationen

$$(pd) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ett randvillkor av typen

$$(rv) \quad u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b \quad \text{för } t \geq 0,$$

där  $a$  och  $b$  är givna tal, och ett begynnelsevillkor av typen

$$(bv) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{för } 0 < x < L,$$

där  $u_0$  är en given funktion.

Vi ska lösa denna differentialekvation med fouriermetoder och börjar med att behandla fallet *homogena* randvillkor, dvs. fallet  $a = b = 0$ . Om vi sätter  $\Omega = \pi/L$  så kan vi precis som för vågekvationen konstatera att funktionerna

$$u_n(x, t) = b_n(t) \sin n\Omega x$$

satisfierar dessa randvillkor för varje  $n$  och varje val av deriverbar funktion  $b_n(t)$ . Det är därför naturligt att försöka ansätta en lösning till vårt problem på formen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\Omega x.$$

Förutsatt att vi kan derivera partiellt under summatecknet blir nu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin n\Omega x & \text{och} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \Omega^2 b_n(t) \sin n\Omega x, \end{aligned}$$

så  $u(x, t)$  löser den partiella differentialekvationen (pd) och randvärdesvillkoret (rv) med  $a = b = 0$  om

$$b'_n(t) = -\kappa n^2 \Omega^2 b_n(t).$$



Vi har nu en första ordningens differentialekvation med lösningen

$$b_n(t) = B_n e^{-\kappa \Omega^2 n^2 t},$$

vilket innebär att vår lösning till värmeledningsproblemet bör ha formen

$$(5.4) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\kappa \Omega^2 n^2 t} \sin n \Omega x.$$

För att också uppfylla begynnelsevillkoret ska koefficienterna  $B_n$  bestämmas så att

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n \Omega x = u_0(x).$$

Koefficienterna ska med andra ord vara koefficienter i sinusserien till funktionen  $u_0$ , och sinusserien fås genom att utvidga  $u_0$  till en udda periodisk funktion med period  $2L$ . Detta bestämmer koefficienterna som

$$(5.5) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin n \Omega x \, dx.$$

När vi nu har funnit en formel för lösningen, kan vi i efterhand verifiera att deriverbarhetsförutsättningarna faktiskt är uppfyllda, och detta leder till följande sats.

**Sats 5.3.1.** *Antag att funktionen  $u_0$  är kontinuerlig och begränsad och uppfyller något villkor som gör att den udda utvidgningen av  $u_0$  till intervall  $[-L, L]$  har en konvergent fourierserie (t. ex. att funktionen  $u_0$  är Hölderkontinuerlig i alla punkter). Då löser den av serien (5.4) definierade funktionen  $u$  med koefficienter bestämda av ekvation (5.5) värmelednings-ekvationen (pd) med homogena randvillkor (rv) och begynnelsevillkoret (bv). Funktionen  $u$  har vidare partiella derivator av alla ordningar.*

*Bevis.* Det följer av förutsättningarna att begynnelsevillkoret är uppfyllt, så det räcker att verifiera att  $u$  har partiella derivator av godtycklig ordning samt att dessa fås genom att derivera under summatecknet.

Den  $n$ :te termen i den serie som fås genom att derivera serien (5.4) partiellt under summatecknet  $p$  gånger med avseende på  $x$  och  $q$  gånger med avseende på  $t$  har formen

$$B_n (n \Omega)^p (-\kappa \Omega^2 n^2)^q e^{-\kappa \Omega^2 n^2 t} (\pm \sin n \Omega x)$$

med sinus bytt mot cosinus om  $p$  är udda. Eftersom fourierkoefficienterna  $B_n$  är begränsade följer det att ovanstående term för  $t > \delta > 0$  och alla  $x$  till beloppet är begränsad av

$$C n^{p+2q} e^{-an^2}$$

för  $a = \kappa \Omega^2 \delta > 0$  och någon konstant  $C$  som inte beror av  $n$ .

För varje exponent  $r$  är serien  $\sum_n n^r e^{-an^2}$  konvergent, så det följer att den partiellt deriverade serien är absolut och likformigt konvergent. Enligt sats 4.1.6 är det därför legitimt att derivera under summatecknet. Följaktligen är funktionen  $u(x, t)$  oändligt deriverbar, och speciellt är deriveringarna som ledde till formlerna för de partiella derivatorna  $\frac{\partial u}{\partial t}$  och  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  tillåtna. Detta visar a posteriori att härledningen av formeln (5.4) för lösningen  $u(x, t)$  är korrekt.  $\square$

### Inhomogena randvillkor

Det allmänna fallet med inhomogena randvillkor återför vi på det homogena fallet genom att sätta

$$\phi(x) = a + \frac{b-a}{L}x$$

samt konstatera att funktionen  $u(x, t)$  löser värmeledningsekvationen (pd) med inhomogena randvillkor (rv) och begynnelsevillkor  $u(x, 0) = u_0(x)$  om och endast om funktionen

$$v(x, t) = u(x, t) - \phi(x)$$

löser samma värmeledningsekvation (pd) med de homogena randvillkoren  $v(0, t) = v(L, t) = 0$  och begynnelsevillkoret  $v(x, 0) = u_0(x) - \phi(x)$ .

### Varianter

Värmespridningen i en stav som är isolerad även i sina ändpunkter, vilket innebär att det inte förekommer något utflöde av värme i stavens längdriktning i ändpunkterna, beskrivs av samma partiella differentialekvation som ovan, dvs,

$$(pd) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

men randvillkoren har nu formen

$$(rv') \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Givet ett begynnelsevillkor av samma typ som tidigare, dvs.

$$(bv) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

så erhåller vi nu den entydigt bestämda lösningen genom ansatsen

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa \Omega^2 n^2 t} \cos n\Omega x,$$

där som tidigare  $\Omega = \pi/L$ . Koefficienterna  $A_n$  fås den här gången genom att utveckla funktionen  $u_0$  i en cosinusserie, vilket betyder att

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos n\Omega x \, dx.$$

Notera att den temperatur som uppnås i staven när lång tid förflutit, dvs.  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ , är konstant och lika med

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) \, dx$$

vilket är medelvärdet av den initiala temperaturen i staven. Detta förefaller rimligt eftersom ingen värme försvinner ut från staven.

## Övningar

5.3 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5.4 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + 3 \cos 4x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5.5 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5.6 Lös värmeledningsekvationerna

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = \pi x - x^2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = \pi x - x^2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5.7 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 1, & t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

## 5.4 Dirichlets problem för en skiva

Värmeledningsekvationen  $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u$  beskriver temperaturen i en kropp  $K$  som funktion av tiden  $t$ , och givet att temperaturen inte varierar med tiden på kroppens yta  $\partial K$  så är temperaturen  $u$  inuti kroppen bestämd för all framtid  $t$  av begynnelsevärdena för någon tidpunkt, t. ex.  $t = 0$ . När lång tid förflutit, i matematiska termer då  $t$  går mot oändligheten, bör temperaturen nå ett stationärt tillstånd som karakteriseras av att den inte förändras med tiden, dvs. av att  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Den stationära temperaturfördelningen  $u = u(x, y, z)$  inuti kroppen erhålls därför som lösning till den partiella differentialekvationen

$$\Delta u = 0$$

med ett randvärdesvillkor av typen

$$u(x, y, z) = f(x, y, z) \quad \text{för } (x, y, z) \in \partial K.$$

En lösning  $u$  till den partiella differentialekvation  $\Delta u = 0$  kallas *harmonisk* i (det inre av)  $K$ , så med denna terminologi kan vi formulera problemet att bestämma den stationära värmefördelningen på följande sätt.

*Dirichlets problem:* Bestäm en funktion  $u$  som är harmonisk i det inre av  $K$  och lika med en given funktion  $f$  på randen  $\partial K$  av  $K$ .

Dirichlets problem är trivialt i en dimension – om  $u''(x) = 0$  för alla  $x$  i ett intervall  $]0, L[$ , så är  $u(x)$  ett förstgradspolynom. Med randvillkoren  $u(0) = a$  och  $u(L) = b$  blir därför  $u(x) = a + (b - a)x/L$  den unika lösningen.

I två dimensioner kan man angripa problemet med hjälp av teorin för analytiska funktioner, och om området är en cirkelskiva kan vi använda fouriertechnik. Så låt oss därför studera Dirichlets problem för cirkelskivan

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Vi antar alltså att vi har en funktion  $f(x, y)$  som är definierad då  $x^2 + y^2 = 1$  och söker en funktion  $u(x, y)$  som satisfierar differentialekvationen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i cirkelskivan och randvillkoret

$$u(x, y) = f(x, y)$$

för alla punkter på periferin  $x^2 + y^2 = 1$  av cirkelskivan.

Geometrin i problemet gör det naturligt att övergå till polära koordinater och införa funktionerna  $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  och  $\tilde{f}(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$ . Kedjeregeln ger oss sambandet

$$\Delta u = r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}$$

så i polära koordinater kan vi skriva Dirichlets problem på formen

$$(pd) \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

med randvillkoret

$$(rv) \quad \tilde{u}(1, \theta) = \tilde{f}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Det är lätt att verifiera att funktionerna  $\tilde{u}_n(r, \theta) = r^{|n|} e^{in\theta}$  löser differentialekvationen (pd) för alla heltal  $n$ . Om koefficienterna  $c_n$  är begränsade så definierar därför

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

en funktion  $\tilde{u}$  som löser differentialekvationen (pd), ty den oändliga serien är likformigt konvergent i cirkelskivan  $0 \leq r \leq r_0 < 1$  liksom alla de serier som fås genom att derivera partiellt under summatecknet ett godtyckligt antal gånger med avseende på  $r$  och  $\theta$ . Funktionen  $\tilde{u}$  har därför partiella derivator av godtycklig ordning, och derivatorna fås genom att derivera under summatecknet, och detta medför speciellt att  $\tilde{u}$  löser differentialekvationen.

Randvillkoret (bv) övergår nu i likheten

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{in\theta} = \tilde{f}(\theta),$$

som bestämmer koefficienterna  $c_n$  entydigt som fourierkoefficienterna till funktionen  $\tilde{f}$ , dvs.  $c_n = \hat{\tilde{f}}(n)$ . Vi erinrar nu om att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{\tilde{f}}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = \tilde{f} * P_r(\theta)$$

där  $P_r(\theta)$  är Poissonkärnan. I ljuset av sats 4.5.1 har vi därmed bevisat följande resultat:

**Sats 5.4.1.** Funktionen  $\tilde{u}(r, \theta) = \tilde{f} * P_r(\theta)$  är harmonisk i enhetsskivan  $D$ , och i alla randpunkter  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , där randfunktionen  $f$  är kontinuerlig, är

$$\lim_{r \rightarrow 1} \tilde{u}(r, \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta).$$

## Historiska notiser

Vågekvationen studerades av 1700-talsmatematikerna Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli and Joseph-Louis Lagrange som beskrivning av en svängande sträng.

Värmeledningsekvationen formulerades först av Fourier i ett manuskript 1807, men han hade till en början svårt att övertyga sina samtida matematiker, bl. a. på grund av att värmets natur inte var klarlagt vid den tiden.

Lösningen till det stationära värmeledningsproblemet för en skiva gavs av Poisson.

## Kapitel 6

# Fouriertransformen

### 6.1 Introduktion

För att en funktion ska kunna skrivas som en fourierserie måste funktionen vara periodisk. Denna inskränkning är dock inte så allvarlig som man kan tycka vid första anblicken; funktioner med begränsade intervall som definitionsmängd kan ju alltid utvidgas till periodiska funktioner, och de kan därför – om de är tillräckligt reguljära – representeras av fourierserier i sina ursprungliga definitionsmängder. För icke-periodiska funktioner med hela  $\mathbf{R}$  som definitionsmängd finns det emellertid inte något hopp om att erhålla fourierserier som representerar funktionerna överallt. Lösningen består i att istället representera sådana funktioner med integraler. För att komma fram till hur denna integralrepresentation bör se ut resonerar vi i detta avsnitt helt heuristiskt och lämnar detaljfrågor om konvergens till följande avsnitt.

Låt därför  $f(t)$  vara en hygglig funktion, definierad på  $\mathbf{R}$  och med absolutkonvergent integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ , och låt  $T$  vara ett (stort) positivt tal. Genom att utvidga restriktionen av funktionen  $f$  till intervallet  $] -T, T[$  periodiskt med period  $2T$  får vi för  $|t| < T$  en fourierserieutveckling av  $f(t)$  av följande slag

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(T) e^{in\pi t/T},$$

där fourierkoefficienterna  $c_n(T)$  ges av formeln

$$c_n(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-in\pi t/T} dt.$$

Tanken är nu att låta  $T$  gå mot oändligheten. Eftersom integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\pi t/T} dt$$

är absolutkonvergenta, går de båda svansarna

$$\int_{-\infty}^{-T} f(t) e^{-in\pi t/T} dt \quad \text{och} \quad \int_T^{\infty} f(t) e^{-in\pi t/T} dt$$

mot 0 då  $T \rightarrow \infty$ , så därför bör vi för stora  $T$  med god approximation kunna sätta

$$c_n(T) \approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\pi t/T} dt.$$

Om vi inför definitionen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbf{R})$$

kan vi alltså kortare skriva  $c_n(T) \approx (2T)^{-1} \hat{f}(n\pi/T)$ , och insättning av detta i fourierserien för  $f(t)$  på intervallet  $[-T, T]$  ger oss approximationen

$$f(t) \approx \frac{1}{2T} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n\pi/T) e^{in\pi t/T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\pi}{T} \hat{f}(n\pi/T) e^{in\pi t/T}.$$

Summan i högerledet ovan är en rektangelapproximation till  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  med steglängd  $\pi/T$ , och när  $T \rightarrow \infty$  konvergerar summan mot denna integral. Efter gränsövergång bör vi således erhålla formeln

$$(6.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Funktionen  $\hat{f}$  kallas *fouriertransformen* till funktionen  $f$ , och genom integralformeln (6.1), som går under namnet *inversionsformeln*, representeras  $f$  av sin fouriertransform på ett sätt som motsvarar hur en periodisk funktion representeras av sin fourierserie. Naturligtvis behöver funktionen  $f$  uppfylla vissa villkor för att formeln ovan ska gälla, och sådana villkor kommer vi att studera närmare i avsnitt 6.6 och kapitel 7.

Vi kompletterar nu den informella härledningen av inversionsformeln med en lika informell härledning av en motsvarighet till Parsevals formel som för  $2T$ -periodiska funktioner har följande form:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(T)|^2.$$

Insättning av approximationen  $c_n(T) \approx (2T)^{-1} \hat{f}(n\pi/T)$  ger efter multiplikation med  $2T$

$$\int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \approx \frac{1}{2T} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n\pi/T)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\pi}{T} |\hat{f}(n\pi/T)|^2.$$

Summan i högerledet konvergerar mot integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$  då  $T \rightarrow \infty$ . Vi kan följaktligen förvänta oss att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$



Denna formel, *Plancherels formel*, gäller (med lämplig tolkning av fouriertransformen  $\hat{f}$ ) för alla funktioner  $f$  med ändligt vänsterled, och vi kommer att behandla den i avsnitt 6.7 och i kapitel 7.

Vi avslutar det här avsnittet med en fysikalisk tolkning av inversionsformeln och Plancherels formel genom att låta funktionen  $f(t)$  vara en kontinuerlig signal som varierar med tiden  $t$ . Funktionerna  $e^{i\omega t}$  representerar då rena periodiska svängningar med vinkelfrekvensen  $\omega$ . Om  $t$  mäts i sekunder så är tiden för en period lika med  $2\pi/\omega$  sekunder, dvs. svängningsfunktionen  $e^{i\omega t}$  hinner med  $\omega/2\pi$  perioder per sekund, vilket innebär att dess frekvens är  $\omega/2\pi$  hertz.

En godtycklig kontinuerlig signal som avtar tillräckligt snabbt i oändligheten kan sättas ihop av rena svängningar, och inversionsformeln (6.1) beskriver hur detta går till. En integral av typen  $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$  kan tolkas som signalens energiinnehåll under tiden mellan  $t_1$  och  $t_2$ , medan integralen  $\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$  istället är energiinnehållet i frekvensbandet mellan  $\omega_1$  och  $\omega_2$  (om man mäter i lämpliga enheter). Plancherels formel uttrycker då bara att energin är densamma om man summerar över hela signalens livslängd eller över alla frekvenser.

## 6.2 Fouriertransformen

Låt oss påminna om att  $L^1(\mathbf{R})$  betecknar det normerade rummet av alla integrerbara komplexvärda funktioner på  $\mathbf{R}$  som uppfyller

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

Om  $f \in L^1(\mathbf{R})$  så är integralen  $\int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$  väldefinierad för alla reella tal  $\omega$ . Detta tillåter oss att göra följande definition.

**Definition.** Låt  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och definiera en funktion  $\hat{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  genom att för  $\omega \in \mathbf{R}$  sätta

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Funktionen  $\hat{f}$  kallas *fouriertransformen* till funktionen  $f$  och betecknas också  $\mathcal{F}[f]$ .

EXEMPEL 6.2.1. Låt oss bestämma fouriertransformen till den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-a,a]}$  till det symmetriska intervallet  $[-a, a]$ . Eftersom

$$\chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } |t| \leq a, \\ 0 & \text{för } |t| > a, \end{cases}$$

är

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) &= \int_{\mathbf{R}} \chi_{[-a,a]} e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} \left[ e^{-i\omega t} \right]_{-a}^a \\ &= 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}.\end{aligned}\quad \square$$

EXEMPEL 6.2.2. Funktionen  $e^{-|t|}$  har fouriertransformen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.\end{aligned}\quad \square$$

EXEMPEL 6.2.3. Analogt får man att funktionen

$$e^{-|t|} \operatorname{sgn} t = \begin{cases} e^{-t} & \text{om } t > 0, \\ 0 & \text{om } t = 0, \\ -e^t & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

har fouriertransformen

$$\mathcal{F}[e^{-|t|} \operatorname{sgn} t](\omega) = -\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}.\quad \square$$

Eftersom  $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ , kan fouriertransformen till en funktion  $f$  förstås också beräknas som

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{\mathbf{R}} f(t) \sin \omega t dt.$$

För reellvärda funktioner  $f$  ger detta en naturlig uppdelning av fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  i real- och imaginärdel. För *jämna*, *reellvärda* funktioner  $f$  är speciellt fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

reellvärd för alla  $\omega$ , och för *udda*, *reellvärda* funktioner  $f$  är

$$\hat{f}(\omega) = -i \int_{\mathbf{R}} f(t) \sin \omega t dt = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

rent imaginär för alla  $\omega$ .

Det är alltså ingen tillfällighet att fouriertransformerna i exemplen 6.2.1 och 6.2.2 är reellvärda och att fouriertransformen i exempel 6.2.3 är rent imaginär.

## Övningar

6.1 Bestäm fouriertransformen till funktionen  $f$  om

- a)  $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$     b)  $f(t) = t \cdot \chi_{[0,1]}(t)$     c)  $f(t) = te^{-|t|}$   
 d)  $f(t) = \sin t \cdot \chi_{[0,\pi]}(t)$     e)  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ .

## 6.3 Räkneregler

Fouriertransformering kan uppfattas som en avbildning  $\mathcal{F}$  som är definierad för alla  $L^1(\mathbf{R})$ -funktioner och som för varje sådan funktion  $f$  ger en ny funktion  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ . Vår första sats visar att värdemängden till avbildningen  $\mathcal{F}$  är en delmängd av rummet av alla begränsade kontinuerliga funktioner på  $\mathbf{R}$ .

**Sats 6.3.1.** *Fouriertransformen  $\hat{f}$  till en funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är en begränsad, kontinuerlig funktion på  $\mathbf{R}$ . Mera precist gäller att*

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1 \quad \text{för alla } \omega \in \mathbf{R}.$$

*Bevis.* Begränsningen följer med en gång av triangelolikheten för integraler. För att bevisa att fouriertransformen  $\hat{f}$  är kontinuerlig använder vi satsen om dominerad konvergens. Eftersom funktionerna  $t \mapsto e^{-i\omega t}$  är kontinuerliga och uniformt begränsade och  $f$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ , kan vi göra gränsövergång under integraltecknet och får

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \hat{f}(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbf{R}} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \hat{f}(\omega_0), \end{aligned}$$

vilket visar att fouriertransformen  $\hat{f}$  är kontinuerlig överallt på  $\mathbf{R}$ . □

Vi kommer senare att visa att  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow \pm\infty$  (se sats 7.2.6). Mängden av alla kontinuerliga funktioner  $g$  på  $\mathbf{R}$  som har egenskapen att  $g(\omega) \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow \pm\infty$  är ett linjärt delrum till  $\mathcal{C}(\mathbf{R})$  och brukar betecknas  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ . Fouriertransformering  $\mathcal{F}$  är med andra ord en avbildning från  $L^1(\mathbf{R})$  till  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ , och för alla  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är  $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$ . Detta betyder emellertid inte att värdemängden till  $\mathcal{F}$  är lika med  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ , och någon god karakterisering av värdemängden finns inte.

$L^1(\mathbf{R})$  är ett linjärt, translations- och skalningsinvariant rum, och nästa sats visar att fouriertransformering är en linjär operation och beskriver hur den fungera ihop med translation, skalning, konjugering och multiplikation med den komplexa exponentialfunktionen.

**Sats 6.3.2.** Låt  $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ . För alla  $\omega \in \mathbf{R}$  är då

- (a)  $\widehat{(af + bg)}(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega) \quad (a, b \in \mathbf{C})$
- (b)  $\widehat{f(t - t_0)}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-it_0\omega} \quad (t_0 \in \mathbf{R})$
- (c)  $\widehat{f(\lambda t)}(\omega) = |\lambda|^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1}\omega) \quad (\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0)$
- (d)  $\widehat{\hat{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$
- (e)  $\widehat{(e^{i\omega_0 t} f)}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0) \quad (\omega_0 \in \mathbf{R})$

*Bevis.* (a), (d) och (e) är uppenbara, och (b) och (c) följer efter enkla variabelbyten.  $\square$

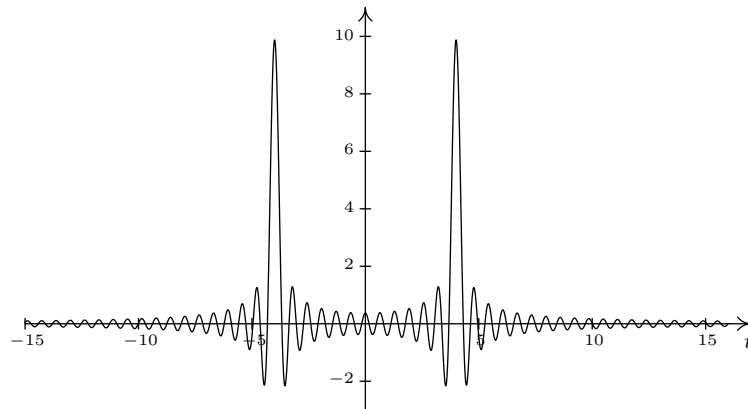
**EXEMPEL 6.3.1.** Definiera en funktion  $f$  genom att sätta  $f(t) = \cos bt$  för  $|t| \leq a$  och  $f(t) = 0$  för  $|t| > a$ . Med hjälp av den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-a,a]}$  för intervallet  $[-a, a]$  kan vi skriva funktionen som

$$f(t) = \cos bt \cdot \chi_{[-a,a]} = \frac{1}{2}(e^{ibt} + e^{-ibt}) \cdot \chi_{[-a,a]},$$

och vi kan därför beräkna dess fouriertransform genom att kombinera resultatet i exempel 6.2.1 med räkneregeln (e) i sats 6.3.2:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\sin a(\omega - b)}{\omega - b} + 2 \frac{\sin a(\omega + b)}{\omega + b} \right) \\ &= \frac{\sin a(\omega - b)}{\omega - b} + \frac{\sin a(\omega + b)}{\omega + b}. \end{aligned}$$

I figur 6.1 visas fouriertransformen då  $a = 10$  och  $b = 4$ .  $\square$



**Figur 6.1.** Fouriertransformen till funktionen  $f(t) = \cos 4t \cdot \chi_{[-10,10]}$ .

## Övningar

- 6.2 Bestäm med hjälp av sats 6.3.2 och resultaten i exemplen 6.2.1 och 6.2.2 fouriertransformen till funktionen  $f$  om
- a)  $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$    b)  $f(t) = \sin t \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(t)$    c)  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ .
- 6.3 Definiera för  $f \in L^1(\mathbf{R})$  funktionen  $\tilde{f}$  genom att sätta  $\tilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$ .
- a) Bestäm sambandet mellan fouriertransformerna  $\hat{f}$  och  $\tilde{\hat{f}}$ .
- b) Visa att fouriertransformen  $\hat{f}$  är reell om  $f = \tilde{f}$ .

## 6.4 Fouriertransformering och derivering

En anledning till att fouriertransformen är så användbar är att derivering genom fouriertransformering överförs i den mycket enklare operationen multiplikation. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 6.4.1.** *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och att både  $f$  och  $f'$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

*Bevis.* Eftersom integralen  $\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt$  är ändlig, finns det en följd  $(t_n)_1^\infty$  med egenskapen att  $t_n \rightarrow \infty$  och  $f(t_n) \rightarrow 0$ , då  $n \rightarrow \infty$ . (Annars skulle det finnas ett tal  $\epsilon > 0$  och ett tal  $T$  så att  $|f(t)| \geq \epsilon$  för alla  $t \geq T$ , något som uppenbarligen är orimligt när  $f$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ .) Analogt finns det en följd  $(u_n)_1^\infty$  sådan att  $u_n \rightarrow -\infty$  och  $f(u_n) \rightarrow 0$ .

Partiell integration ger nu

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n}^{t_n} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left[ f(t) e^{-i\omega t} \right]_{u_n}^{t_n} + i\omega \int_{u_n}^{t_n} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= i\omega \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Nästa sats ger istället ett tillräckligt villkor för att fouriertransformen ska vara deriverbar.

**Sats 6.4.2.** *Om funktionerna  $f(t)$  och  $tf(t)$  båda tillhör rummet  $L^1(\mathbf{R})$ , så är fouriertransformen  $\hat{f}$  deriverbar och*

$$\widehat{(tf(t))}(\omega) = i\hat{f'}(\omega).$$

*Bevis.* Formellt erhåller man derivatan genom att derivera

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

under integraltecknet. Detta resulterar nämligen i

$$\hat{f}'(\omega) = -i \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \widehat{(tf(t))}(\omega).$$

Naturligtvis krävs det någon form av motivering för ovanstående operation. Betrakta därför differenskvoten

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \frac{\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)}{h} &= \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}}{h} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} \frac{e^{-iht} - 1}{ht} dt. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\left| \frac{e^{-iht} - 1}{ht} \right| = \left| -i \int_0^1 e^{-ihtu} du \right| \leq \int_0^1 |e^{-ihtu}| du = \int_0^1 du = 1,$$

är de kontinuerliga funktionerna

$$g_h(t) = e^{-i\omega t} \frac{e^{-iht} - 1}{ht}$$

till beloppet uniformt begränsade av talet 1. Vidare är

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h(t) = -ie^{-i\omega t}.$$

Satsen om dominerad konvergens tillåter oss därför att i formeln (6.2) låta  $h \rightarrow 0$  under integraltecknet, vilket leder till att differenskvoten går mot

$$-i \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \widehat{(tf(t))}(\omega).$$

Detta bevisar satsen. □

Om vi känner en funktions fouriertransform  $\hat{f}$  så kan vi således genom att iterera föregående sats bestämma fouriertransformen till den funktion som fås genom att multiplicera  $f$  med ett polynom, förutsatt att funktionerna  $t^n f(t)$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  för alla exponenter  $n$  som är mindre än eller lika med polynomets gradtal.

EXEMPEL 6.4.1. Det är naturligtvis ingen konst att bestämma fouriertransformen till "takfunktionen"

$$f(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$$

direkt från definitionen, men vi ska som övning beräkna den med hjälp av våra räkneregler. Vi skriver då först om funktionen på följande vis:

$$\begin{aligned} f(t) &= \chi_{[-1,1]}(t) - t\chi_{[0,1]}(t) + t\chi_{[-1,0]}(t) \\ &= \chi_{[-1,1]}(t) + t(\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t + \frac{1}{2}) - \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t - \frac{1}{2})). \end{aligned}$$

Fouriertransformen till funktionen  $g(t) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t + \frac{1}{2}) - \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t - \frac{1}{2})$  får vi genom att tillämpa translationsregeln (b) i sats 6.3.2 på fouriertransformen till den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$  som beräknades i exempel 6.2.1 med följande resultat:

$$\hat{g}(\omega) = (e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}) \cdot 2 \frac{\sin(\omega/2)}{\omega} = 4i \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega}.$$

Vi använder nu regeln för multiplikation med  $t$  på  $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) + tg(t)$  och får då

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + i \frac{d}{d\omega} \left( 4i \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega} \right) \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} - 4 \frac{\omega \sin(\omega/2) \cos(\omega/2) - \sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \\ &= 4 \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2}. \end{aligned} \quad \square$$

EXEMPEL 6.4.2. Genom att utnyttja de två föregående satserna kan vi beräkna fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-t^2/2}$ . Eftersom  $f'(t) = -tf(t)$ , är

$$i\omega \hat{f}(\omega) = \widehat{f'}(\omega) = \widehat{(-tf(t))}(\omega) = -i\hat{f}'(\omega),$$

dvs.  $\hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0$ . Den allmänna lösningen till denna differentialekvation är  $\hat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2}$ . Konstanten  $C$  bestäms av villkoret

$$C = \hat{f}(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} dt.$$

För att beräkna  $C$  skriver vi  $C^2$  som en dubbelintegral över  $\mathbf{R}^2$  och inför polära koordinater:

$$\begin{aligned} C^2 &= \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} dx \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2} dy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi \left[ -e^{-r^2/2} \right]_0^\infty = 2\pi. \end{aligned}$$

Följaktligen är  $C = \sqrt{2\pi}$ , och vi har alltså

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}. \quad \square$$

## Övningar

6.4 Beräkna med hjälp av sats 6.4.2 och resultaten i exemplen 6.2.1 och 6.2.2 fouriertransformen till funktionen  $f$  om

a)  $f(t) = t\chi_{[-1,1]}(t)$       b)  $f(t) = te^{-|t|}$ .

- 6.5 Antag att funktionen  $f$  är två gånger kontinuerligt deriverbar och att  $f$ ,  $f'$  och  $f''$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ . Visa att fouriertransformen  $\hat{f}$  också ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ .

## 6.5 Faltning

Medelvärden jämnar ut skillnader. Om  $f$  är en funktion med  $\mathbf{R}$  som definitionsmängd, bör därför medelvärden bildade av dess translater  $f_s$  uppföra sig mer regelbundet än funktionen själv. Ett viktat medelvärde som tar hänsyn till oändligt många translater har formen  $\int_{\mathbf{R}} g(s)f_s ds$ , där  $g$  är en icke-negativ funktion och  $\int_{\mathbf{R}} g(s) ds = 1$ . Integralen  $\int_{\mathbf{R}} g(s)f_s ds$  ska då tolkas som den funktion som i punkten  $t \in \mathbf{R}$  har värdet

$$\int_{\mathbf{R}} g(s)f_s(t) ds = \int_{\mathbf{R}} g(s)f(t-s) ds.$$

Ovanstående sätt att bilda en ny funktion av två givna funktioner  $f$  och  $g$  är ett exempel på en operation som kallas *faltning*. Den allmänna definitionen av begreppet, som inte kräver att den ena funktionen ska vara icke-negativ och ha integral lika med 1, ser ut så här.

**Definition.** Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner definierade på  $\mathbf{R}$ . Integralen

$$\int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds$$

kallas om den är väldefinierad för *faltningen* av funktionerna  $f$  och  $g$  (i punkten  $t$ ) och betecknas  $f * g(t)$ .

Variabelbytet  $u = t - s$  ger att

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds = \int_{\mathbf{R}} f(u)g(t-u) du = g * f(t),$$

så faltning är en kommutativ operation.

För att faltningen  $f * g(t)$  ska vara väldefinierad måste funktionen

$$s \mapsto f(t-s)g(s)$$

avta tillräckligt snabbt då  $s$  går mot  $\pm\infty$ , men det är knepigt att ge uttömmande nödvändiga villkor på funktionerna  $f$  och  $g$  för att så ska vara fallet. Om funktionen  $g$  är stor i  $+\infty$  så kan ju detta kompenseras av att funktionen  $f$  är liten i  $-\infty$ , och vice versa. Exempelvis är faltningen väldefinierad för alla  $t \in \mathbf{R}$  om båda funktionerna är kontinuerliga och identiskt lika med noll på negativa reella axeln  $]-\infty, 0[$ , ty i så fall är produkten  $f(t-s)g(s)$  lika med noll för alla  $s$  om  $t < 0$ , och för alla  $s$  utanför intervallet  $[0, t]$  om  $t \geq 0$ .

Andra tillräckliga villkor för att faltningen ska vara väldefinierad ges av följande två satser.



**Sats 6.5.1.** *Antag att en av funktionerna  $f$  och  $g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  och den andra är kontinuerlig och begränsad. Då är faltningen  $f * g$  en kontinuerlig och begränsad funktion på  $\mathbf{R}$ .*

*Bevis.* Antag utan inskränkning att funktionen  $f$  är kontinuerlig och till beloppet begränsad av konstanten  $C$  och att funktionen  $g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . För varje  $t$  är då  $|f(t-s)g(s)| \leq C|g(s)|$  vilket medför att funktionen

$$s \mapsto f(t-s)g(s)$$

tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . Faltningen  $f * g(t)$  är således väldefinierad för alla  $t$ , och triangelolikheten för integraler ger att

$$|f * g(t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)g(s)| ds \leq \int_{\mathbf{R}} C|g(s)| ds = C\|g\|_1,$$

vilket visar att faltningen  $f * g$  är en begränsad funktion. Att funktionen också är kontinuerlig i alla punkter  $t_0$  följer av satsen om dominerad konvergens enligt vilken

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} f * g(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds = \int_{\mathbf{R}} \lim_{t \rightarrow t_0} f(t-s)g(s) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(t_0-s)g(s) ds = f * g(t_0). \end{aligned} \quad \square$$

**Sats 6.5.2.** *Antag att  $f$  och  $g$  är två funktioner i  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är faltningen  $f * g$  väldefinierad som  $L^1(\mathbf{R})$ -funktion. Vidare gäller att*

$$(a) \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

$$(b) \quad \widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \text{ för alla } \omega \in \mathbf{R}.$$

*Bevis.* (a) Vi måste avstå från beviset för att  $f * g$  är en väldefinierad funktion eftersom detta kräver kunskaper i integrationsteori. Normolikheten följer sedan genom att integrera olikheten

$$|f * g(t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)||g(s)| ds,$$

byta integrationsordning och göra ett variabelbyte, vilket ger att

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbf{R}} |f * g(t)| dt \leq \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)||g(s)| ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)||g(s)| dt ds = \int_{\mathbf{R}} (|g(s)| \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)| dt) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} (|g(s)| \int_{\mathbf{R}} |f(u)| du) ds = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

(b) Omkastning av integrationsordningen och ett variabelbyte ger vidare att

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{\mathbf{R}} f * g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) e^{-i\omega t} ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) e^{-i\omega(t-s)} e^{-i\omega s} dt ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left( g(s) e^{-i\omega s} \int_{\mathbf{R}} f(t-s) e^{-i\omega(t-s)} dt \right) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left( g(s) e^{-i\omega s} \int_{\mathbf{R}} f(u) e^{-i\omega u} du \right) ds = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega). \quad \square\end{aligned}$$

## Övningar

6.6 Sätt  $f(t) = e^{-t}H(t)$  och  $g(t) = e^t(1 - H(t))$ , där  $H$  är Heavisidefunktionen (dvs.  $H(t) = 0$  om  $t < 0$  och  $H(t) = 1$  om  $t \geq 0$ ). Bestäm produkten  $\hat{f} \cdot \hat{g}$  och faltningen  $f * g$ .

6.7 Bestäm en lösning till integralekvationen

$$f(t) = e^{-|t|} + \frac{1}{2} e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u f(u) du.$$

6.8 a) Bestäm faltningen  $f * f$  om  $f(t) = e^{-|t|}$ .

b) Bestäm en funktion  $y = y(t)$  i  $L^1(\mathbf{R})$  som löser differentialekvationen

$$y''(t) - y(t) = e^{-|t|}.$$

## 6.6 Inversionsformler

Fouriertransformering är en teknik som bl. a. används för att lösa vissa typer av differentialekvationer. Genom transformering omvandlas ekvationen innehållande den obekanta funktionen  $f$  till en ekvation i transformen  $\hat{f}$  som man kan lösa. En förutsättning för att man utifrån kännedom om  $\hat{f}$  också ska kunna bestämma den ursprungliga funktionen  $f$  är då förstås att fouriertransformen  $\hat{f}$  bestämmer funktionen  $f$  entydigt, eller med andra ord att den linjära avbildningen  $\mathcal{F}: L^1(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$  är injektiv. Vår nästa sats innebär att så verkligen är fallet.

**Sats 6.6.1** (Entydighetssatsen). Om  $f, g \in L^1(\mathbf{R})$  och  $\hat{f} = \hat{g}$ , så är  $f = g$ .

Likheten  $f = g$  skall förstås tolkas som likhet för  $L^1$ -funktioner, vilket betyder att  $f(t) = g(t)$  gäller för alla  $t$  utanför någon nollmängd. Om funktionerna  $f$  och  $g$  är kontinuerliga, så gäller likheten  $f(t) = g(t)$  överallt.

Eftersom beviset för entydighetssatsen inte är så enkelt, sparar vi det till kapitel 7 (se sats 7.2.5).

Nästa fråga som nu inställer sig är om och hur man kan återvinna  $f$  om man känner transformen? Genom att låta periodlängden gå mot oändligheten gjorde vi i inledningen till det här kapitlet en informell härledning av följande inversionsformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Fouriertransformen  $\hat{f}$  tillhör dock inte nödvändigtvis  $L^1(\mathbf{R})$  (se exempel 6.2.1), så integralen ovan måste ges en lämplig tolkning, liksom innebörden av likhetstecknet. I det här avsnittet nöjer vi oss med att beskriva några villkor som garanterar att inversionsformeln gäller och använder den på några exempel. Bevisen är ganska tekniska, så vi sparar också dem till nästa kapitel.

**Sats 6.6.2** (Inversionssatsen). *Om både  $f$  och  $\hat{f}$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ , så är*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

*nästan överallt och speciellt i alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.*

Om vi definierar funktionen  $\check{f}$  genom att sätta

$$\check{f}(t) = f(-t),$$

kan vi uttrycka likheten i sats 6.6.2 på följande eleganta vis:

$$(6.3) \quad \hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f}.$$

EXEMPEL 6.6.1. I exempel 6.2.2 beräknade vi fouriertransformen till funktionen  $e^{-|t|}$  och fann att  $\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = 2(1 + \omega^2)^{-1}$ . Eftersom den transformerade funktionen ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ , följer det nu av formel (6.3) att

$$\mathcal{F}[2(1 + t^2)^{-1}](\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|},$$

dvs.

$$\mathcal{F}[(1 + t^2)^{-1}](\omega) = \pi e^{-|\omega|}. \quad \square$$

Konvergenskriteriet i sats 4.8.2 för fourierserier har också en direkt motsvarighet i fouriertransformfallet som ser ut så här:

**Sats 6.6.3.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och låt  $t \in \mathbf{R}$  vara en punkt där de två ensidiga gränsvärdena  $f(t^-)$  och  $f(t^+)$  och de två generaliserade ensidiga derivatorna  $f'_-(t)$  och  $f'_+(t)$  existerar. Då är*

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Vi bevisar satsen i nästa kapitel (se sats 7.3.3).

EXEMPEL 6.6.2. Fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t$  beräknades i exempel 6.2.3 och befanns vara  $\hat{f}(\omega) = -2i\omega(1 + \omega^2)^{-1}$ . Förutsättningarna i satsen ovan är i detta fall uppfyllda i alla punkter  $t$ , varför

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a -\frac{2i\omega}{1 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t.$$

Genom att först ersätta  $t$  med  $-t$  och sedan låta variablerna  $t$  och  $\omega$  byta roller erhåller vi efter förenkling följande resultat:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{t}{1 + t^2} e^{-i\omega t} dt = -\pi i e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega. \quad \square$$

## Övningar

- 6.9 Bestäm fouriertransformen till funktionen  $f(t) = \frac{1}{b^2 + t^2}$  och beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{b^2 + t^2} dt$$

för alla positiva värden på de reella konstanterna  $a$  och  $b$ .

- 6.10 Utnyttja resultatet i exempel 6.4.1 för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

- 6.11 Beräkna, t. ex. genom att först bestämma derivatans transform, fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \arctan(t + 1) - \arctan(t - 1).$$

- 6.12 Funktionen  $f$  är kontinuerlig och tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . Vidare är

$$\int_{-1}^1 f(t - s) ds = f(t)$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Visa att  $f(t) = 0$  för alla  $t$ .

- 6.13 Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är kontinuerlig och att  $f(t-1) + f(t) + f(t+1) = 0$  för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Visa, t. ex. genom att fouriertransformera, att  $f(t) = 0$  för alla  $t \in \mathbf{R}$ .

## 6.7 Plancherels formel

Rummet  $L^2(\mathbf{R})$  består av alla funktioner  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  som uppfyller villkoret

$$\|f\|_2 = \left( \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty$$

och är ett inre produktrum med  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$  som inre produkt.

I avsnitt 6.1 gav vi en informell härledning för den första av de två formlerna i följande sats, och den andra formeln följer enkelt från den första om man uttrycker inre produkten  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  med hjälp av normen  $\|\cdot\|_2$  precis som i sats 2.5.2.

**Sats 6.7.1** (Plancherels formler). *Om  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ , så är*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ \text{(ii)} \quad & \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Beviset för satsen får vi återkomma till i nästa kapitel, men det finns ett problem som vi först måste lösa: Hur ska vi definiera fouriertransformen för godtyckliga  $L^2(\mathbf{R})$ -funktioner? För periodiska funktioner hade vi inga svårigheter att definiera fourierserien till en  $L^2$ -funktion eftersom fourierserien är väldefinierad för alla  $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner och  $L^2(\mathbf{T})$  är ett delrum till  $L^1(\mathbf{T})$ . Rummet  $L^1(\mathbf{R})$  är emellertid ett ganska "litet" rum som inte innehåller  $L^2(\mathbf{R})$  som delrum, eftersom exempelvis funktionen  $1/(1+|t|)$  tillhör det senare men inte det förra rummet. Vi kan därför inte beräkna fouriertransformen  $\hat{f}$  av en godtycklig  $L^2(\mathbf{R})$ -funktion  $f$  med hänvisning till definitionen i avsnitt 6.2, ty integralen som definierar transformen existerar inte för  $L^2$ -funktioner som inte tillhör  $L^1$ .

Situationen är emellertid inte så allvarlig som det kan verka, ty snittet  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  är en tät delmängd till  $L^2(\mathbf{R})$ . Fouriertransformen, som är definierad för alla funktioner i snittet, kan därför på ett entydigt sätt utvidgas till funktioner i hela  $L^2(\mathbf{R})$ . Jämför med hur man på ett entydigt sätt kan utvidga en kontinuerlig funktion som endast är definierad för rationella tal till en kontinuerlig funktion som är definierad för alla reella tal. Vi kommer att utveckla detta närmare i avsnitt 7.4; tills vidare får vi nöja oss med påståendet att det går bra samt att Plancherels formler är giltiga för godtyckliga  $L^2(\mathbf{R})$ -funktioner.

Utvidgningen av fouriertransformen till  $L^2(\mathbf{R})$  är viktig för tillämpningarna, ty integraler av typen  $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt$  kan ofta tolkas som energiuttryck; att säga att  $f$  tillhör  $L^2(\mathbf{R})$  betyder i så fall att energin är ändlig, vilket är ett i högsta grad relevant fysikaliskt villkor.

EXEMPEL 6.7.1. Funktionen  $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$  har fouriertransformen  $\hat{f}(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$ . Det följer därför av Plancherels formel att

$$2 = \int_{-1}^1 1 \, dt = \int_{\mathbf{R}} |\chi_{[-1,1]}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \, d\omega,$$

vilket efter förenkling ger att

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \, d\omega = \pi.$$

Med ett litet trick kan vi använda detta resultat för att också beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt,$$

som vi kommer att behöva i avsnitt 7.3. Eftersom funktionen  $\sin^2 \omega / \omega^2$  är jämn får vi med hjälp av partiell integration att

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \, d\omega = \left[ -\frac{1}{\omega} \sin^2 \omega \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\omega} \, d\omega \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega} \, d\omega = [\text{Sätt } 2\omega = t] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt. \end{aligned} \quad \square$$

## Övningar

6.14 Funktionen  $f$  definieras av att  $f(t) = (2 - |t|) \cdot \chi_{[-2,2]}(t)$ .

a) Beräkna fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^\infty \left( \frac{\sin t}{t} \right)^4 \, dt.$$

6.15 Använd fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$  för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \, d\omega.$$

6.16 Definiera funktionen  $f$  genom att sätta  $f(t) = (1 - t^2) \cdot \chi_{[-1,1]}(t)$

a) Bestäm fouriertransformen  $\hat{f}$ .

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(\sin t - t \cos t)^2}{t^6} \, dt.$$

6.17 Låt  $f$  vara en funktion som är lika med noll överallt utom på intervallen  $[n, n + 2n^{-3}]$  för  $n = 1, 2, 3, \dots$ , där funktionens graf är en likbent triangel med intervallet som bas och höjden  $n$ . Visa att  $f$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  men inte  $L^2(\mathbf{R})$ .

6.18 Visa att varje begränsad funktion i  $L^1(\mathbf{R})$  tillhör  $L^2(\mathbf{R})$ .

6.19 Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och definiera en ny funktion  $g$  genom att sätta

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{f(t-x)} dt.$$

Bestäm  $\hat{g}(\omega)$ .

(Inom signalteorin kallas  $g$  *autokorrelationsfunktionen* till  $f$ .)

6.20 Definiera funktionen  $f$  genom att sätta

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } |t| \leq 1, \\ 2 - |t| & \text{för } 1 < |t| \leq 2, \\ 0 & \text{för } |t| > 2. \end{cases}$$

a) Bestäm fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos t - \cos 2t)^2}{t^4} dt.$$

c) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - \cos 2t}{t^2} e^{-|t|} dt.$$

6.21 a) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

b) Bestäm fouriertransformen till funktionen  $g$  om

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq -1, \\ (t+1)e^{-t} & \text{för } -1 \leq t \leq 1, \\ 2e^{-t} & \text{för } t \geq 1. \end{cases}$$

c) Bestäm fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  om funktionen  $f$  uppfyller likheten

$$ef(t+1) - e^{-1}f(t-1) = g(t),$$

där  $g$  är funktionen i b).

d) Beräkna  $L^2$ -normen  $\|f\|_2$  för funktionen  $f$  i c).

6.22 Sätt

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(t^2 + n^2)}.$$

- a) Visa att serien är likformigt konvergent på  $\mathbf{R}$  och att funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ .
- b) Beräkna fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .
- c) Beräkna  $L^1(\mathbf{R})$ -normen  $\|f\|_1$ .

## 6.8 Poissons summationsformel

Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion med reella axeln som definitionsmängd och antag att  $f(t) = O(1/|t|^{1+\delta})$  för någon positiv konstant  $\delta$  då  $t \rightarrow \pm\infty$ . Antagandena medför att funktionen  $f$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ , så funktionen har en fouriertransform  $\hat{f}$ .

Betrakta nu summan

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n).$$

Vi påstår att serien är konvergent för alla  $t \in \mathbf{R}$  samt att summan är en kontinuerlig,  $2\pi$ -periodisk funktion. Att summan är periodisk är uppenbart, så därför räcker det att visa att serien är konvergent för  $0 \leq t < 2\pi$  samt att summafunktionen  $F$  är kontinuerlig där. Men våra antaganden medför att  $|f(t + 2\pi n)| \leq C/|n|^{1+\delta}$  för  $0 \leq t < 2\pi$ , så därför är serien likformigt konvergent på intervallet  $[0, 2\pi]$  enligt Weierstrass majorantsats, och eftersom termerna  $f(t + 2\pi n)$  är kontinuerliga, är summan  $F(t)$  kontinuerlig.

Funktionen  $F$  har således en fourierserie, och följande räkning ger oss fourierkoefficienterna  $\hat{F}(k)$  till  $L^1(\mathbf{T})$ -funktionen  $F$  uttryckta i termer av fouriertransformen  $\hat{f}$  till  $L^1(\mathbf{R})$ -funktionen  $f$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2\pi n) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2\pi n) e^{-ik(t+2\pi n)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

(Bytet av summations- och integrationsordning, som var nödvändigt för att erhålla den andra likheten i ovanstående kedja av likheter, är tillåtet på grund av den likformiga konvergensens.)



Vi har med andra ord kommit fram till att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

och eftersom funktionen i vänsterledet är kontinuerlig kan vi ersätta  $\sim$  med äkta likhet  $=$  i varje punkt  $t$  där fourierserien i högerledet är konvergent.

För  $t = 0$  får vi speciellt likheten

$$(6.4) \quad 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n),$$

som alltså gäller om serien i högerledet är konvergent. Observera att summan i högerledet ska tolkas som gränsvärdet av symmetriska partialsummor, dvs.

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n).$$

Ett enkelt variabelbyte leder nu fram till följande resultat:

**Sats 6.8.1** (Poissons summationsformel). *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig och att det finns två konstanter  $C > 0$  och  $\delta > 0$  sådana att  $|f(t)| \leq C/|t|^{1+\delta}$  för alla  $t$ . Låt vidare  $L$  vara ett positivt tal. Då är*

$$\frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(2\pi \frac{n}{L}\right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(nL)$$

*förutsatt att summan i högerledet, uppfattad som gränsvärdet av de symmetriska partialsummorna, är konvergent.*

*Bevis.* Likheten följer genom att tillämpa formel (6.4) på funktionen  $g(t) = L^{-1}f(L^{-1}t)$ , som uppfyller de nödvändiga förutsättningarna för formeln.  $\square$

## Övningar

- 6.23 Använd Poissons summationsformel och fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-|t|}$  för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + an^2},$$

där  $a > 0$ .

- 6.24 Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ ,  $|f(t)| \leq t^{-2}$  för  $|t| \geq 1$  och  $\hat{f}(n) = 0$  för alla heltal  $n$ . Sätt

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi).$$

Visa att  $g(t) = 0$  för alla  $t$ .

## Historiska notiser

Fouriertransformen på  $\mathbf{R}$  och inversionsformeln förekommer första gången i Fouriers arbeten. Fourier erhåller sina resultat genom att betrakta periodiska funktioner med periodlängder som går mot oändligheten.

## Kapitel 7

# Mer om fouriertransformen

I det här kapitlet ska vi bevisa de resultat för fouriertransformen som vi i det förra kapitlet nöjde oss med att enbart formulera, exempelvis inversionsatsen och Plancherels formler. Precis som för fourierserier kommer vi att använda oss av en lämplig summationskärna för att erhålla de önskvärda resultaten.

### 7.1 Värmeledningskärnan

För att kunna summera godtyckliga fourierserier använde vi oss i kapitel 4 av Poissonkärnan  $(P_r)_{0 < r < 1}$  och abelsummation. Vi ska nu göra motsvarande manöver för fouriertransformen och kommer då att använda oss av den s. k. värmeledningskärnan.

**Definition.** Definiera för  $\tau > 0$  funktionerna  $H_\tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  genom att sätta

$$H_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}.$$

Familjen  $(H_\tau)_{\tau>0}$  kallas *värmeledningskärnan* eller *Gausskärnan*.

Notera att alla funktionerna i familjen  $(H_\tau)_{\tau>0}$  kan erhållas ur funktionen

$$H_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

genom en skalning eftersom

$$H_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} H_1(t/\sqrt{\tau}).$$

**Sats 7.1.1.** *Värmeledningkärnan  $(H_\tau)_{\tau>0}$  har följande egenskaper:*

(a) *Funktionerna  $H_\tau$  är kontinuerliga, positiva och jämna för alla  $\tau > 0$ .*

- (b)  $\int_{\mathbf{R}} H_{\tau}(t) dt = 1$  för alla  $\tau > 0$ .
- (c) För alla  $\delta > 0$  är  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} H_{\tau}(t) dt = 0$ .
- (d) För alla  $\delta > 0$  är  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{t \geq \delta} H_{\tau}(t) = 0$ .
- (e)  $\hat{H}_{\tau}(\omega) = e^{-\tau\omega^2/2}$ .

*Bevis.* a) Egenskaperna följer omedelbart från definitionen av  $H_{\tau}$ .

(e) Funktionen  $H_1$  har enligt exempel 6.4.2 transformen  $\hat{H}_1(\omega) = e^{-\omega^2/2}$ , så enligt skalningsregeln (c) i sats 6.3.2 är  $\hat{H}_{\tau}(\omega) = \hat{H}_1(\sqrt{\tau}\omega) = e^{-\tau\omega^2/2}$ .

(b) Eftersom  $\int_{\mathbf{R}} H_{\tau}(t) dt = \hat{H}_{\tau}(0)$ , följer (b) ur (e).

(c) Genom att utnyttja sambandet mellan  $H_{\tau}$  och  $H_1$  och göra variabelbytet  $u = t/\sqrt{\tau}$  erhålls

$$\int_{\delta}^{\infty} H_{\tau}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{\delta}^{\infty} H_1(t/\sqrt{\tau}) dt = \int_{\delta/\sqrt{\tau}}^{\infty} H_1(u) du,$$

och integralen i högerledet går mot 0 då  $\tau \rightarrow 0$ , eftersom den undre integrationsgränsen går mot  $\infty$ .

(d) Funktionerna  $H_{\tau}$  är avtagande för  $t \geq 0$ , så  $\sup_{t \geq \delta} H_{\tau}(t) = H_{\tau}(\delta)$  och

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} H_{\tau}(\delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-\delta^2 x^2} = 0. \quad \square$$

När man faltar en  $L^1(\mathbf{R})$ -funktion  $f$  med värmeledningskärnan  $H_{\tau}$  får man funktioner som approximerar den givna funktionen  $f$  godtyckligt bra i följande mening.

**Sats 7.1.2.** Låt  $f$  vara en funktion i  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är

- (i)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|f * H_{\tau} - f\|_1 = 0$ ;
- (ii)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} f * H_{\tau}(t) = f(t)$  om  $f$  är kontinuerlig i punkten  $t$ ;
- (iii)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|f * H_{\tau} - f\|_{\infty} = 0$  om  $f$  är likformigt kontinuerlig och begränsad på  $\mathbf{R}$ .

*Bevis.* Satsen är en direkt motsvarighet till sats 4.5.1 för Poissonkärnan, och beviset för den satsen utnyttjar endast egenskaper hos Poissonkärnan som är direkta motsvarigheter till egenskaperna (a), (b), (c) och (d) hos värmeledningskärnan i sats 7.1.1. Beviset för sats 4.5.1 fungerar därför närmast ordagrant som bevis för föreliggande sats.  $\square$

## 7.2 Inversionssatsen

Vi ska nu bestämma sambandet mellan fouriertransformen  $\hat{f}$  och faltningen  $f * H_{\tau}$  mellan funktionen  $f$  och värmeledningskärnan. För den skull behöver

vi följande hjälpsats.

**Lemma 7.2.1.** *Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner i  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$\int_{\mathbf{R}} f(s)\hat{g}(s) ds = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)g(\omega) d\omega.$$

*Bevis.* Omkastning av integrationsordningen ger

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} f(s)\hat{g}(s) ds &= \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} g(\omega)e^{-i\omega s} d\omega ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} g(\omega) \int_{\mathbf{R}} f(s)e^{-i\omega s} ds d\omega = \int_{\mathbf{R}} g(\omega)\hat{f}(\omega) d\omega. \quad \square \end{aligned}$$

**Sats 7.2.2.** *Antag  $f \in L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$f * H_{\tau}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} d\omega.$$

*Bevis.* Vi använder lemma 7.2.1 med  $g$  som funktionen

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{i\omega t}H_{1/\tau}(\omega)$$

som har fouriertransformen

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-(s-t)^2/2\tau} = H_{\tau}(t-s).$$

Enligt lemmat är därför

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} d\omega = \int_{\mathbf{R}} f(s)H_{\tau}(t-s) ds = f * H_{\tau}(t). \quad \square$$

Genom att kombinera satserna 7.1.2 och 7.2.2 får vi således följande resultat som är en kontinuerlig variant av abelsummerbarhet för fourierserier.

**Sats 7.2.3 (Inversionssatsen).** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$ . Då gäller:*

(a) *Integralen*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} d\omega$$

*konvergerar då  $\tau \rightarrow 0$  i  $L^1(\mathbf{R})$ -mening mot funktionen  $f$ .*

(b) *I varje punkt  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig, är*

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} d\omega.$$

*Konvergensen är vidare likformig på  $\mathbf{R}$  om funktionen  $f$  är likformigt kontinuerlig och begränsad på  $\mathbf{R}$ .*

För funktioner vars fouriertransformer också tillhör  $L^1$  får vi följande följsats till inversionssatsen.

**Sats 7.2.4.** *Antag att både  $f$  och  $\hat{f}$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

*nästan överallt och speciellt i alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.*

*Bevis.* Eftersom funktionerna  $e^{-\tau\omega^2/2}$  är uniformt begränsade (av 1) och går mot 1 då  $\tau \rightarrow 0$ , följer det av satsen om dominerad konvergens att

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{-\tau\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

för alla  $t$ . Men integralen i vänsterledet ovan konvergerar enligt sats 7.2.3 (a) i  $L^1$ -mening mot  $f(t)$ , så det punktvisa gränsvärdet måste vara lika med  $f(t)$  nästan överallt, vilket innebär att likheten i satsen gäller nästan överallt. Eftersom likhetens högerled är en kontinuerlig funktion av  $t$  måste vidare likhet gälla i alla punkter där funktionen  $f$  är kontinuerlig.  $\square$

Vi avslutar det här avsnittet med ytterligare två följsatser till inversionssatsen. Först har vi entydighetssatsen, som visar att en  $L^1$ -funktion är entydigt bestämd av sin fouriertransform.

**Sats 7.2.5** (Entydighetssatsen). *Låt  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , och antag att  $\hat{f}(\omega) = 0$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ . Då är funktionen  $f$ , betraktad som  $L^1(\mathbf{R})$ -funktion, lika med nollfunktionen, dvs.  $f(t) = 0$  för alla  $t$  utanför en nollmängd.*

*Speciellt är  $f(t) = 0$  i alla kontinuitetspunkter  $t$  till funktionen.*

*Bevis.* Om  $\hat{f}(\omega) = 0$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ , så ligger förstås  $\hat{f}$  i  $L^1(\mathbf{R})$ . Det följer därför omedelbart av sats 7.2.4 att  $f(t) = 0$  nästan överallt.  $\square$

**Sats 7.2.6** (Riemann–Lebesgues lemma). *För alla funktioner  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

*Bevis.* På grund av kontinuitetsprincipen (korollarium 4.2.3), tillämpad på de positiva, subadditiva och uniformt begränsade avbildningarna

$$T_\omega(f) = |\hat{f}(\omega)|,$$

räcker det att visa att  $\hat{g}(\omega) \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow \pm\infty$  för alla funktioner  $g$  i någon tät delmängd  $D$  av  $L^1(\mathbf{R})$ . Som tät delmängd kan vi på grund av sats 7.1.2 välja mängden  $\{f * H_\tau \mid f \in L^1(\mathbf{R}), \tau > 0\}$ .

För  $g = f * H_\tau$  är  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{H}_\tau(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-\tau\omega^2/2}$ , och eftersom  $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$  och  $e^{-\tau\omega^2/2} \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow \pm\infty$ , är saken klar.  $\square$

## Övningar

- 7.1 Funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och  $f(t) = 0$  för  $|t| \geq 5$ . Bevisa, utan att använda Riemann-Lebesgues lemma, att

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 0.$$

- 7.2 Visa, t. ex. med hjälp av sats 7.2.2, att funktionerna  $f * H_\tau$  är oändligt deriverbara. (De oändligt deriverbara funktionerna i  $L^1(\mathbf{R})$  utgör med andra ord en tät delmängd av  $L^1(\mathbf{R})$ .)

## 7.3 Dirichletkärnan och punktvis konvergens

Förutsättningen i sats 7.2.4 att  $\hat{f}$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$  är nödvändig för att integralen  $\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  ska existera. Men även om denna integral inte existerar så kan förstås gränsvärdet

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

som fås genom att integrera den kontinuerliga funktionen  $\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$  över symmetriska intervall och låta intervallets längd gå mot oändligheten, existera. Låt oss därför undersöka integralerna

$$S_a(f; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

som är fourierintegralmotsvarigheten till fourierseriens symmetriska partialsummor.

En fourierseries partialsumma kan uttryckas som en faltning mellan funktionen och Dirichletkärnan. Motsvarande gäller för integralerna  $S_a(f; t)$ .

**Sats 7.3.1.** Sätt för  $a > 0$  och  $t \in \mathbf{R}$

$$D_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin at}{\pi t}.$$

För varje funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är då

$$S_a(f; t) = (f * D_a)(t).$$

Funktionsfamiljen  $(D_a)_{a>0}$  kallas *Dirichletkärnan* på  $\mathbf{R}$ .

*Bevis.* Genom att byta integrationsordning fås

$$\begin{aligned}
 2\pi S_a(f; t) &= \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-a}^a \left( \int_{\mathbf{R}} f(u) e^{-i\omega u} du \right) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-a}^a \int_{\mathbf{R}} f(u) e^{i\omega(t-u)} du d\omega = \int_{\mathbf{R}} \int_{-a}^a f(u) e^{i\omega(t-u)} d\omega du \\
 &= \int_{\mathbf{R}} f(u) \int_{-a}^a e^{i\omega(t-u)} d\omega du = 2\pi \int_{\mathbf{R}} f(u) D_a(t-u) du \\
 &= 2\pi(f * D_a)(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

Dirichletkärnan på  $\mathbf{R}$  har följande egenskaper:

**Sats 7.3.2.** *Funktionerna  $D_a$  är kontinuerliga och jämna, och*

- (i)  $\int_{-\infty}^{\infty} D_a(t) dt = 1$  för alla  $a > 0$ ,
- (ii)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\infty} D_a(t) dt = 0$  om  $\delta > 0$ .

Anm. Eftersom  $D_a$  inte är en  $L^1$ -funktion, ska integralerna i (i) och (ii) tolkas som generaliserade integraler.

*Bevis.* Att funktionerna  $D_a$  är jämna och kontinuerliga är uppenbart från definitionen. För att beräkna integralerna gör vi variabelbytet  $u = at$ , vilket leder till att

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_a(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1,$$

där den sista likheten följer av exempel 6.7.1.

Samma variabelbyte ger också

$$\int_{\delta}^{\infty} D_a(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{a\delta}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

och den sista integralen går mot 0 då  $a \rightarrow \infty$  beroende på att den generaliserade integralen  $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$  är konvergent.  $\square$

Vi har nu de hjälpmedel som behövs för att bevisa följande konvergenstkriterium.

**Sats 7.3.3.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , och låt  $t \in \mathbf{R}$  vara en punkt där de två ensidiga gränsvärdena  $f(t^-)$  och  $f(t^+)$  och de två generaliserade ensidiga derivatorna  $f'_-(t)$  och  $f'_+(t)$  existerar. Då är*

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$



*Bevis.* Beviset är analogt med beviset för motsvarande konvergenskriterium för fourierserier, så därför kan vi vara mycket kortfattade.

Sätt  $A = (f(t^+) + f(t^-))/2$ . Genom att utnyttja att Dirichletkärnan är jämn och har integral 1 över reella axeln erhåller vi först identiteten

$$S_a(f; t) - A = f * D_a(t) - A = \int_0^\infty (f(t-s) + f(t+s) - 2A) D_a(s) ds.$$

För  $\delta > 0$  skriver vi sedan integralen i högerledet ovan som en summa av de tre integralerna

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \int_0^\delta \frac{f(t-s) + f(t+s) - 2A}{\pi s} \sin as \, ds, \\ I_2(a) &= \int_\delta^\infty \frac{f(t-s) + f(t+s)}{\pi s} \sin as \, ds \quad \text{och} \\ I_3(a) &= -2A \int_\delta^\infty D_a(s) \, ds. \end{aligned}$$

Antagandet att de generaliserad vänster- och högerderivatorna existerar medför att funktionen

$$g(s) = \frac{f(t-s) + f(t+s) - 2A}{\pi s}$$

har ett gränsvärde då  $s \rightarrow 0$ . Funktionen är därför begränsad nära 0, vilket betyder att den ligger i  $L^1([0, \delta])$  om vi väljer  $\delta$  tillräckligt litet. Integralen  $I_1(a)$  går därför mot 0 då  $a \rightarrow \infty$  på grund av Riemann-Lebesgues lemma.

Funktionen

$$h(s) = \frac{f(t-s) + f(t+s)}{\pi s}$$

ligger i  $L^1([\delta, \infty])$  och integralen  $I_2(a)$  går därför också mot 0 då  $a \rightarrow \infty$  på grund av samma lemma.

Slutligen går  $I_3(a)$  mot 0 på grund av sats 7.3.2.  $\square$

## 7.4 $L^2$ -teori

I det här avsnittet ska vi skissera hur utvidgningen av fouriertransformen till rummet  $L^2(\mathbf{R})$  går till samt bevisa Plancherels formler. Det hela hänger på att snittet  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  är tätt i  $L^2(\mathbf{R})$ , dvs. varje funktion  $f \in L^2(\mathbf{R})$  kan approximeras med funktioner  $f_n$ , som ligger i snittet  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  och så att  $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . Funktionerna  $f_n$  har fouriertransformer, varför man kan definiera transformen av  $f$  som gränsvärdet av transformerna  $\widehat{f_n}$ . Vi måste naturligtvis visa att gränsvärdet existerar i någon rimlig mening. En viktig ingrediens i beviset för detta är följande specialfall av Plancherels formel.

**Lemma 7.4.1.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ . Då tillhör fouriertransformen  $\hat{f}$  rummet  $L^2(\mathbf{R})$  och*

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2.$$

*Bevis. Sätt*

$$g = f * \bar{\bar{f}},$$

där  $\bar{\bar{f}}(t) = \overline{f(-t)}$ . Funktionen  $g$  kan skrivas som en inre produkt, nämligen

$$g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(u) \overline{f(u-t)} du = \langle f, T_t f \rangle,$$

och speciellt är  $g(0) = \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$ .

Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$|g(t) - g(t_0)| = |\langle f, T_t f - T_{t_0} f \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|T_t f - T_{t_0} f\|_2,$$

och eftersom

$$\|T_t f - T_{t_0} f\|_2 = \|T_{t-t_0} f - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{då } t \rightarrow t_0,$$

följer det av olikheten ovan att  $g(t) \rightarrow g(t_0)$  då  $t \rightarrow t_0$ . Funktionen  $g$  är med andra ord kontinuerlig i alla punkter.

Eftersom  $g$  är en faltning av två  $L^1$ -funktioner ligger  $g$  också i  $L^1$ , och räknereglererna för fouriertransformering ger att

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2.$$

Enligt inversionssatsen (sats 7.2.3 (b)), tillämpad på funktionen  $g$  i punkten 0, är därför

$$(7.1) \quad 2\pi\|f\|_2^2 = 2\pi g(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega.$$

Om funktionen  $\hat{f}$  ligger i  $L^2(\mathbf{R})$ , dvs.  $|\hat{f}|^2$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ , så kan vi använda satsen om dominerad konvergens på gränsvärdet i (7.1) med slutsatsen att

$$2\pi\|f\|_2^2 = \int_{\mathbf{R}} \lim_{\tau \rightarrow 0} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega = \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{f}\|_2^2.$$

För att slutföra beviset, dvs. visa att  $\hat{f}$  verkligen ligger i  $L^2(\mathbf{R})$ , konstaterar vi först att  $\hat{f}$  säkert ligger i  $L^2(I)$  för varje begränsat intervall  $I$ , beroende på att fouriertransformen är kontinuerlig. För sådana intervall kan vi således använda satsen om dominerad konvergens med

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_I |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega = \int_I \lim_{\tau \rightarrow 0} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega = \int_I |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

som resultat. Eftersom integranden i (7.1) är icke-negativ är gränsvärdet för integralen över  $I$  mindre än gränsvärdet i (7.1). För alla begränsade intervall  $I$  är således

$$\int_I |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq 2\pi \|f\|_2^2,$$

och detta medför att

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq 2\pi \|f\|_2^2.$$

Fouriertransformen  $\hat{f}$  ligger således i  $L^2(\mathbf{R})$ , och därmed är beviset för lemmat komplett.  $\square$

Antag nu att  $f$  är en godtycklig  $L^2(\mathbf{R})$ -funktion, och definiera för varje positivt heltal  $n$  funktionen  $f_n$  genom att sätta

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{om } |t| \leq n \\ 0, & \text{om } |t| \geq n. \end{cases}$$

Funktionerna  $f_n$  tillhör förstas  $L^2(\mathbf{R})$  och eftersom

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f_n(t)|^2 dt &= \int_{-n}^n |f(t)|^2 \cdot 1 dt \leq \left( \int_{-n}^n |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{-n}^n 1^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2n} \|f\|_2 < \infty \end{aligned}$$

tillhör de också  $L^1(\mathbf{R})$ . Vidare gäller att

$$\|f_n - f\|_2 = \left( \int_{|t| \geq n} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Givet  $\epsilon > 0$  finns det därför ett  $N$  så att  $m, n \geq N$  medför att  $\|f_m - f_n\|_2 < \epsilon$ . Detta uttrycker man vanligen genom att säga att funktionsföljden  $(f_n)_1^\infty$  är en *Cauchyföljd* i  $L^2(\mathbf{R})$ .

Eftersom funktionerna  $f_n$  ligger i snittet  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  är lemma 7.4.1 tillämpligt på differensen  $f_m - f_n$  vilket ger att

$$\|\widehat{f_m - f_n}\|_2^2 = \|\widehat{f_m - f_n}\|_2^2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2^2.$$

Härav drar vi slutsatsen att  $m, n \geq N$  medför att  $\|\widehat{f_m - f_n}\|_2 < \sqrt{2\pi} \epsilon$ , dvs. funktionsföljden  $(\widehat{f_n})_1^\infty$  är också en Cauchyföljd i  $L^2(\mathbf{R})$ .

Nu har rummet  $L^2(\mathbf{R})$  en mycket trevlig egenskap, vars bevis ligger utanför ramen för den här framställningen, nämligen att varje Cauchyföljd konvergerar mot en unik gränsfunktion i  $L^2(\mathbf{R})$ . Det finns därför en funktion, som vi betecknar  $\hat{f}$ , med egenskapen att  $\|\widehat{f_n} - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . Det är denna funktion som kallas fouriertransformen till  $L^2(\mathbf{R})$ -funktionen  $f$ .

Sammanfattningsvis har vi alltså kommit fram till följande definition.

**Definition.** Fouriertransformen  $\hat{f}$  till en funktion  $f \in L^2(\mathbf{R})$  definieras som

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

där gränsvärdet ska tolkas som ett gränsvärde i  $L^2$ -mening.

*Anmärkning.* För funktioner  $f$  i snittet  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  har vi nu två definitioner av fouriertransformen  $\hat{f}$ ,  $L^1$ -definition i avsnitt 6.2 och definitionen ovan. Lyckligtvis ger de båda definitionerna samma resultat. Med beteckningarna ovan gäller nämligen att  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ , så det följer av sats 6.3.1 (a) att funktionerna  $\widehat{f_n}$  konvergerar likformigt på  $\mathbf{R}$  mot  $L^1$ -fouriertransformen  $\hat{f}$ . Detta har till följd att  $\hat{f}$  också är  $L^2$ -gränsvärdet till följderna  $(\widehat{f_n})_1^\infty$ .

EXEMPEL 7.4.1. Enligt exempel 6.6.2 är

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{t}{1+t^2} e^{-i\omega t} d\omega = -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

Detta medför att

$$\mathcal{F}\left[\frac{t}{1+t^2}\right](\omega) = -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

Observera att  $L^2(\mathbf{R})$ -funktionen  $t/(1+t^2)$  inte tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . □

Identiteten i Lemma 7.4.1 kan nu utvidgas till att gälla för hela  $L^2(\mathbf{R})$ .

**Sats 7.4.2** (Plancherels formler). Om  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ , så är

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ \text{(ii)} \quad & \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

*Bevis.* Med beteckningarna ovan gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f_n} - \hat{f}\|_2 = 0.$$

Härav följer med hjälp av triangelolikheten

$$\|f\|_2 - \|f - f_n\|_2 \leq \|f_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f\|_2$$

att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$ , och på motsvarande sätt att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ . Men enligt lemma 7.4.1 är  $\|\widehat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_n\|_2$ , så det följer att

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2,$$

vilket är ekvivalent med likheten (i).

Den polariserade versionen (ii) följer av (i) om man uttrycker den inre produkten med hjälp av normen som i sats 2.5.2. □

Som korollarium till Plancherels formler visar vi hur man kan fouriertransformera en produkt av två  $L^2$ -funktioner; resultatet är dualt till sats 6.5.2 (b).

**Sats 7.4.3.** *Antag att  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ . Då ligger produkten  $fg$  i  $L^1(\mathbf{R})$  och*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}.$$

*Bevis.* På grund av Cauchy-Schwarz olikhet är

$$\|fg\|_1 = \langle |f|, |g| \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty,$$

dvs. produkten  $fg$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$  och har därför en fouriertransform. För att beräkna denna noterar vi först att  $\mathcal{F}[\overline{g(t)} e^{i\alpha t}](\omega) = \mathcal{F}[\overline{g}](\omega - \alpha) = \hat{g}(\alpha - \omega)$ . Plancherels formel (ii) ger därför

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(\alpha) &= \int_{\mathbf{R}} f(t)g(t) e^{-i\alpha t} dt = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\overline{g(t)} e^{i\alpha t}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}[f(t)](\omega) \overline{\mathcal{F}[\overline{g(t)} e^{i\alpha t}](\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\alpha - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

För  $L^2(\mathbf{R})$ -funktioner gäller följande inversionssats.

**Sats 7.4.4.** *Antag att  $f \in L^2(\mathbf{R})$ . Då är*

$$\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi \check{f}(t) = 2\pi f(-t),$$

där likheten ska uppfattas som en likhet för  $L^2$ -funktioner, dvs. likhet råder utom eventuellt på en nollmängd.

*Bevis.* Vi konstaterar först att inversionssatsen gäller för kontinuerliga  $L^1$ -funktioner  $f$  med fouriertransform i  $L^1$  på grund av sats 7.2.4.

Ett tillräckligt villkor på  $f$  för att satsen ska gälla är därför att  $f$  är två gånger kontinuerligt deriverbar och  $= 0$  utanför något begränsat intervall. Detta medför nämligen för det första att såväl  $f$  som  $f''$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  (och  $L^2(\mathbf{R})$ ). Eftersom  $\widehat{f''}(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$  och fouriertransformen  $\widehat{f''}(\omega)$  är begränsad, är vidare  $|\hat{f}(\omega)| \leq C|\omega|^{-2}$  för stora  $|\omega|$ , så fouriertransformen  $\hat{f}$  tillhör också  $L^1(\mathbf{R})$ .

Låt nu  $f$  vara en godtycklig  $L^2(\mathbf{R})$ -funktion. Då finns det en följd  $(f_n)_1^\infty$  av funktioner som är oändligt deriverbara och lika med noll utanför begränsade intervall, och som approximerar  $f$  godtyckligt bra i  $L^2$ -mening, dvs. så att  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . (Jmf anmärkningen efter sats 4.5.1.) Av Plancherels formel följer nu först att  $\|\widehat{f_n} - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0$  och sedan att

$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 \rightarrow 0$ . Men som vi konstaterat ovan är  $\widehat{f_n} = 2\pi\check{f}_n$ . Funktionerna  $2\pi\check{f}_n$  konvergerar därför både mot  $2\pi\check{f}$  och mot  $\widehat{f}$ , så de båda sistnämnda funktionerna måste vara identiska som  $L^2$ -funktioner.  $\square$

Plancherels formel innebär att fouriertransformering  $\mathcal{F}$ , dvs. avbildningen  $f \rightarrow \hat{f}$ , är en linjär avbildning från rummet  $L^2(\mathbf{R})$  till sig självt, och avbildningen är injektiv eftersom  $\hat{f} = 0$  uppenbarligen medför att  $f = 0$ . Inversionssatsen visar att avbildningen också är surjektiv, dvs. varje funktion  $g \in L^2(\mathbf{R})$  är fouriertransform till en (unik)  $L^2(\mathbf{R})$ -funktion  $f$ , nämligen funktionen  $f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\check{g}]$ .

Sammanfattningsvis gäller alltså

**Sats 7.4.5** (Plancherels sats). *Fouriertransformering  $\mathcal{F}: L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$  är en isomorfism (dvs. en bijektiv linjär avbildning).*

Vi avslutar med en sats om fouriertransformen till  $L^2$ -funktioners derivata som vi kommer att behöva i avsnitt 8.4.

**Sats 7.4.6.** *Antag att funktionerna  $f$  och  $\omega\hat{f}(\omega)$  båda tillhör  $L^2(\mathbf{R})$ . Då är funktionen  $f$  (efter att eventuellt ha modifierats på en nollmängd) kontinuerlig. Vidare existerar derivatan  $f'$  nästan överallt och tillhör  $L^2(\mathbf{R})$ , och*

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

*Bevis.* Funktionerna  $(1 + \omega^2)^{1/2}\hat{f}$  och  $(1 + \omega^2)^{-1/2}$  ligger båda i  $L^2(\mathbf{R})$ . Det följer därför av sats 7.4.3 att deras produkt  $\hat{f}$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ . Vi kan därför definiera en kontinuerlig funktion  $F$  på  $\mathbf{R}$  genom att sätta

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega.$$

Eftersom  $2\pi F(t) = \mathcal{F}(\hat{f})(-t)$  följer det av inversionssatsen för  $L^2$ -funktioner att  $F = f$  som  $L^2$ -funktioner, dvs.  $F(t) = f(t)$  nästan överallt.

Det återstår att visa att funktionen  $F$  är deriverbar nästan överallt och att derivatan  $F'$  ligger i  $L^2(\mathbf{R})$  och har fouriertransform  $i\omega\hat{f}(\omega)$ . Men eftersom funktionen  $i\omega\hat{f}(\omega)$  ligger i  $L^2(\mathbf{R})$  finns det enligt Plancherels sats en funktion  $g \in L^2(\mathbf{R})$  sådan att  $\hat{g}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$ , och vi ska visa  $F'(t) = g(t)$  nästan överallt.

Betrakta för den skull integralen  $\int_0^x g(t) dt$ . Genom att uttrycka denna integral med hjälp av den karakteristiska funktionen  $\chi_{[0,x]}$  till intervallet  $[0, x]$ , som har fouriertransformen  $\hat{\chi}_{[0,x]}(\omega) = -(e^{-ix\omega} - 1)/i\omega$ , samt använda

Plancherels andra formel, får vi

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t) dt &= \int_{\mathbf{R}} g(t) \overline{\chi_{[0,x]}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{g}(\omega) \frac{e^{ix\omega} - 1}{i\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) (e^{ix\omega} - 1) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) d\omega.\end{aligned}$$

Detta innebär att

$$F(x) = \int_0^x g(t) dt + C,$$

där  $C$  är en konstant, och härav följer att funktionen  $F$  är deriverbar nästan överallt med derivata  $F'(x) = g(x)$ . Därmed är beviset klart.  $\square$

## 7.5 Fourieranalys i högre dimensioner

I många tillämpningar är de förekommande funktionerna flervariabelfunktioner, vilket är en anledning till att utveckla fourieranalys också för sådana funktioner. Dessbättre är det mycket enkelt att generalisera definitionen av fouriertransformen till funktioner på  $\mathbf{R}^n$ , och de flesta resultaten i det här och det förra kapitlet gäller med lämplig tolkning i den nya situationen och med i stort sett oförändrade bevis. Vi nöjer oss därför här med att ge själva definitionen samt med att formulera några av de viktigare resultaten.

Vi skriver

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx$$

för integralen av en funktion  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$  över hela  $\mathbf{R}^n$ , och rummet av alla integrerbara funktioner  $f$  som uppfyller villkoret

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| dx < \infty$$

betecknas  $L^1(\mathbf{R}^n)$ .

För  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  och  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  i  $\mathbf{R}^n$  sätter vi vidare  $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  och  $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ , dvs.  $x \cdot y$  är den vanliga skalärprodukten på  $\mathbf{R}^n$  och  $|x|$  är längden av vektorn  $x$ .

**Definition.** För  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$  och  $\omega \in \mathbf{R}^n$  sätter vi

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx$$

och kallar funktionen  $\hat{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$  *fouriertransformen* av  $f$ . Istället för  $\hat{f}$  använder vi också beteckningen  $\mathcal{F}(f)$ .

Fouriertransformen till en  $L^1(\mathbf{R}^n)$ -funktion är kontinuerlig; mer precist gäller:

**Sats 7.5.1.** *För varje  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$  är fouriertransformen  $\hat{f}$  en kontinuerlig funktion,  $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$  för alla  $\omega$  och  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .*

Fouriertransformen till linjärkombinationer, translat, produkter med en komplex exponentialfunktion och faltningar beräknas med hjälp av följande sats.

**Sats 7.5.2.** *Antag att  $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ . Då är*

- (a)  $(\widehat{\alpha f + \beta g})(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$  *för alla  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ,*
- (b)  $\widehat{f(x-a)}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-ia \cdot \omega}$  *för alla  $a \in \mathbf{R}^n$ ,*
- (c)  $(\widehat{e^{ia \cdot x} f})(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$  *för alla  $a \in \mathbf{R}^n$ ,*
- (d)  $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$

Nästa sats, som generaliserar sats 6.6.1, innebär att fouriertransformen  $\hat{f}$  bestämmer funktionen  $f$  entydigt.

**Sats 7.5.3.** *Fouriertransformen  $\mathcal{F}: L^1(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n)$  är en injektiv linjär avbildning.*

Det som gör fouriertransformen till ett användbart hjälpmedel för att studera och lösa partiella differentialekvationer är att derivering (med avseende på  $x_j$ ) omvandlas till något mycket enklare, nämligen multiplikation (med  $i\omega_j$ ).

**Sats 7.5.4.** *Om  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$  är kontinuerligt differentierbar och den partiella derivatan  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  också tillhör  $L^1(\mathbf{R}^n)$ , så är*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\omega) = i\omega_j \hat{f}(\omega).$$

För  $L^1(\mathbf{R}^n)$ -funktioner  $f$  vars fouriertransform också tillhör  $L^1(\mathbf{R}^n)$  kan vi rekonstruera  $f$  från dess fouriertransform med hjälp av följande inversionssats.

**Sats 7.5.5.** *Antag att  $f$  och  $\hat{f}$  båda ligger i  $L^1(\mathbf{R}^n)$ . Då är*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega$$

*nästan överallt och speciellt i alla punkter  $x$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.*

För  $L^2$ -funktioner konstruerar man fouriertransformen genom utvidgning:



**Sats 7.5.6.** *Det finns en unik kontinuerlig linjär avbildning*

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$$

som sammanfaller med fouriertransformen på delrummet  $L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$ . Den utvidgade avbildningen  $\mathcal{F}$  är vidare bijektiv och uppfyller Plancherels likhet

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}f\|_2^2$$

för alla  $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ .

## 7.6 Fouriertransformen för mått

Det är också möjligt att definiera en fouriertransform för andra objekt än funktioner, och allra enklast är det att utvidga definitionen till att också gälla för ändliga mått såsom Diracmåttet och allmänna sannolikhetsmått.

Vi erinrar om att ett ändligt mått  $\mu$  är en kontinuerlig linjär funktional som till att börja med är definierad för alla funktioner  $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ , dvs. kontinuerliga funktioner  $\phi$  som går mot noll i oändligheten, och att vi för funktionalvärdet  $\mu(\phi)$  använder integralbeteckningen

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) d\mu(t).$$

Definitionsområdet för måttet kan utvidgas till en klass av funktioner som innehåller alla begränsade kontinuerliga funktioner, och eftersom funktionerna  $e^{-i\omega t}$  är kontinuerliga och begränsade kan vi nu helt sonika definiera *fouriertransformen*  $\hat{\mu}(\omega)$  av måttet  $\mu$  som

$$\hat{\mu}(\omega) = \mu(e^{-i\omega t}) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\omega t} d\mu(t).$$

Fouriertransformen  $\hat{\mu}$  blir därigenom en kontinuerlig och begränsad funktion på  $\mathbf{R}$ .

Definitionen generaliserar definitionen av fouriertransformen för absolutintegrabla funktioner, ty en sådan funktion  $f$  svarar som mått mot måttet  $f(t) dt$ , och detta mått har enligt definitionen ovan fouriertransformen

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

som är den vanliga fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .

Diracmåttet  $\delta_a$  i punkten  $a$  får fouriertransformen

$$\hat{\delta}_a(\omega) = \delta_a(e^{-i\omega t}) = e^{-ia\omega},$$

och speciellt är alltså  $\hat{\delta}(\omega) = 1$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ .

Om  $\mu$  och  $\nu$  är två mått, så definierar vi deras *faltning*  $\mu * \nu$  som det mått som uppfyller likheten

$$\mu * \nu(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} \phi(s+t) d\mu(s) \right) d\nu(t)$$

för alla kontinuerliga funktioner  $\phi$ . För mått av typen  $f(t) dt$  är den nya definitionen konsistent med definitionen av faltning för funktioner.

Faltningen är kommutativ, och det är lätt att verifiera att

$$\mu * \delta = \delta * \mu = \mu$$

för alla mått  $\mu$ . Diracmåttet  $\delta$  fungerar alltså som multiplikativ enhet för faltning.

Insättning av  $\phi(t) = e^{-i\omega t}$  i faltningsdefinitionen leder vidare till likheten

$$\widehat{\mu * \nu}(\omega) = \hat{\mu}(\omega) \hat{\nu}(\omega).$$

## Historiska notiser

Teorin för fouriertransformen utvecklades parallellt med teorin för fourierserier, men  $L^2$ -teorin fick en tillfredsställande lösning först genom Lebesgueintegralen som möjliggjorde en utvidgning av fouriertransformen till hela  $L^2(\mathbf{R})$ .

MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) visade satsen med hans namn 1910. Tre år tidigare hade FRIGYES RIESZ (1880–1956) och ERNST FISCHER (1875–1954) oberoende av varandra visat att fouriertransformen avbildar  $L^1(\mathbf{T})$  isometriskt på rummet  $\ell^2$ .

## Kapitel 8

# Tillämpningar på fouriertransformen

### 8.1 Värmeledningsekvationen på $\mathbf{R}$

I avsnitt 5.3 studerade vi värmeledningsproblemet för en ändlig stav. Nu ska vi studera motsvarande problem för en oändlig stav som vi modellerar som reella axeln. Antag att begynnelsetemperaturen i punkten  $x$  vid tiden  $t = 0$  är  $f(x)$ , och låt  $u(x, t)$  beteckna temperaturen i samma punkt vid tiden  $t$ . Det följer med samma resonemang som i avsnitt 5.3 att funktionen  $u$  satisfierar den partiella differentialekvation

$$(pd) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

för  $x \in \mathbf{R}$  och  $t > 0$  och uppfyller begynnelsevillkoret

$$u(x, 0) = f(x)$$

för alla  $x \in \mathbf{R}$ .

Vi ska härleda en lösning  $u$  till problemet och räknar till en början helt formellt. Låt för den skull  $\hat{u}(\omega, t)$  beteckna fouriertransformen till funktionen  $u(\cdot, t)$  så att

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{\mathbf{R}} u(x, t) e^{-ix\omega} dx.$$

Derivering under integraltecknet ger att

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-ix\omega} dx = \mathcal{F}_x \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)(\omega),$$

där förstås  $\mathcal{F}_x$  betecknar fouriertransformering med avseende på variabeln  $x$ . Formeln för andraderivatans fouriertransform ger oss å andra sidan att

$$\mathcal{F}_x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)(\omega) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t),$$

så genom att fouriertransformera den givna partiella differentialekvationen erhåller vi följande ordinära differentialekvation i variabeln  $t$ :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\kappa\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

med lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t}.$$

På grund av begynnelsevillkoret  $u(x, 0) = f(x)$  är vidare

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),$$

vilket innebär att integrationskonstanten  $C(\omega)$  är lika med  $\hat{f}(\omega)$  och att följaktligen

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t}.$$

Vi erinrar nu om värmeledningskärnan

$$H_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-x^2/2\tau}$$

som vi introducerade avsnitt 7.1, och vars fouriertransform är

$$\hat{H}_\tau(\omega) = e^{-\tau\omega^2/2}.$$

I termer av den är tydligen

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\hat{H}_{2\kappa t}(\omega),$$

och enligt faltningsformeln är därför

$$u(x, t) = (f * H_{2\kappa t})(x).$$

Genom att precisera förutsättningarna i ovanstående informella härledning erhåller vi följande sats.

**Sats 8.1.1.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och sätt*

$$u(x, t) = (f * H_{2\kappa t})(x)$$

*för  $t > 0$  och  $x \in \mathbf{R}$ , där  $H_\tau$  är värmeledningskärnan. Då gäller:*

- (i) *Funktionen  $u$  är oändligt deriverbar i övre halvplanet  $x \in \mathbf{R}$ ,  $t > 0$  och satisfierar värmeledningsekvationen (pd).*
- (ii) *Om funktionen  $f$  är likformigt kontinuerlig och begränsad på  $\mathbf{R}$ , så konvergerar  $u(x, t)$  likformigt mot  $f(x)$  då  $t \rightarrow 0$ .*
- (iii) *Om  $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ , så konvergerar funktionerna  $u(\cdot, t)$  mot  $f$  i  $L^2$ -mening då  $t \rightarrow 0$ .*

*Bevis.* (i) Enligt sats 7.2.2 är

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{-\kappa\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega.$$

För  $t > 0$  kan vi nu utan problem derivera partiellt under integraltecknet ett obegränsat antal gånger med avseende på såväl  $x$  som  $t$  beroende på att  $e^{-\kappa\omega^2 t}$  avtar så snabbt i oändligheten. Funktionen  $u$  är därför oändligt deriverbar i övre halvplanet. Eftersom funktionerna  $e^{-\kappa\omega^2 t} e^{i\omega x}$  satisfierar värmeledningsekvationen för varje fixt  $\omega$  följer det vidare genom derivering under integraltecknet att funktionen  $u(x, t)$  också satisfierar värmeledningsekvationen. Detta bevisar påståendet (i).

(ii) Påståendet är en omedelbar konsekvens av sats 7.1.2.

(iii) Enligt Plancherels formel är

$$\|u(\cdot, t) - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}(\cdot, t) - \hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 |e^{-\kappa\omega^2 t} - 1|^2 d\omega,$$

och integranden i högerledet går mot noll då  $t \rightarrow 0$  samt majoreras av  $4|\hat{f}(\omega)|^2$ . Det följer därför av satsen om dominerad konvergens att integralen går mot noll då  $t \rightarrow 0$ , vilket bevisar vårt påstående.  $\square$

*Anmärkning.* Villkoren i sats 8.1.1 garanterar att värmeledningsekvationen (pd) är lösbar, men de är inte tillräckliga för att lösningen ska vara entydigt bestämd. För entydighet behöver man ställa krav på lösningens uppförande då  $x$  går mot oändligheten.

## 8.2 Samplingssatsen

En analog signal som modelleras av funktionen  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , säges vara *bandbegränsad* till intervallet  $[a, b]$  om signalens spektrum ligger i intervallet, dvs. om fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  är lika med noll för alla  $\omega$  utanför intervallet  $[a, b]$ . Intervallets längd  $b - a$  kallas signalens *bandbredd*.

Den teoretiska grunden för digital teknik för inspelning, lagring och avspelning av akustiska signaler finns i följande sats.

**Sats 8.2.1** (Samplingssatsen). *En kontinuerlig signal med bandbredd  $2L$  är entydigt bestämd av signalens värden i de diskreta tidpunkterna  $n\pi/L$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .*

*Bevis.* Vi noterar först att vi utan inskränkning kan anta att bandbegränsningsintervallet är symmetriskt kring origo, dvs. är intervallet  $[-L, L]$ . Om signalen  $f$  har sitt spektrum i ett godtyckligt intervall  $[a, b]$  av längd  $2L$  och  $m$  betecknar intervallets mittpunkt, så har nämligen den kontinuerliga signalen  $g(t) = e^{-imt} f(t)$  sitt spektrum i intervallet  $[-L, L]$  eftersom  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega + m)$ , och vi kan uppenbarligen rekonstruera  $f$  från värdena i punkterna  $n\pi/L$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , om vi kan rekonstruera signalen  $g$  från samma värden.

Anta alltså att  $f$  är bandbegränsad till intervallet  $I = [-L, L]$ . Eftersom fouriertransformen till en  $L^1(\mathbf{R})$ -funktion är kontinuerlig och  $\hat{f}(\omega) = 0$  utanför det begränsade intervallet  $I$ , ligger  $\hat{f}$  i  $L^1(\mathbf{R})$ . Inversionssatsen ger oss därför likheten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Att signalen  $f$  är entydigt bestämd av samplingsvärdena  $f(n\pi/L)$  följer nu omedelbart av följande sats, som också ger en explicit formel för själva rekonstruktionen av signalen från samplingsvärdena.  $\square$

**Sats 8.2.2.** *Antag att*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

där  $\phi$  är en funktion i  $L^2([-L, L])$ . Då är

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ , och serien i högerledet konvergerar likformigt på  $\mathbf{R}$ .

*Bevis.* Sätt  $g(\omega) = L\phi(\omega)/\pi$ , och låt  $h_t$  beteckna restriktion av funktionen  $\omega \mapsto e^{-i\omega t}$  till intervallet  $[-L, L]$ . Funktionerna  $g$  och  $h_t$  ligger i  $L^2([-L, L])$ , och med hjälp av dem kan vi skriva  $f(t)$  på formen

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(\omega) \overline{h_t(\omega)} d\omega.$$

Enligt den polariserade versionen av Parsevals sats är därför

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \overline{d_n(t)},$$

där  $c_n$  och  $d_n(t)$  betecknar fourierkoefficienterna till funktionerna  $g$  och  $h_t$ . Dessa är

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{L}{\pi} \phi(\omega) e^{-i(n\pi/L)\omega} d\omega = f(-n\pi/L),$$

$$d_n(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-it\omega} e^{-i(n\pi/L)\omega} d\omega = \frac{\sin(Lt + n\pi)}{Lt + n\pi}.$$

Eftersom fourierkoefficienterna  $d_n(t)$  är reella följer det nu att

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n d_n(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{-n} d_{-n}(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n\pi/L) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi},$$

vilket bevisar rekonstruktionsformeln.

För att visa att konvergensen är likformig uppskattar vi svansarna i serien och får då med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet och Parsevals sats:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|n|>N} c_n \overline{d_n(t)} \right|^2 &\leq \sum_{|n|>N} |c_n|^2 \cdot \sum_{|n|>N} |d_n(t)|^2 \leq \sum_{|n|>N} |c_n|^2 \cdot \sum_{n \in \mathbf{Z}} |d_n(t)|^2 \\ &= \sum_{|n|>N} |c_n|^2 \cdot \|h_t\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |c_n|^2. \end{aligned}$$

Uppskattningen visar att  $\sum_{|n|>N} c_n \overline{d_n(t)}$  går mot noll uniformt då  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

För att vi ska kunna använda rekonstruktionsformeln krävs det att signalen har ändlig bandbredd. Men vilka analoga signaler har ändlig bandbredd? Egentligen inga fysiska signaler, ty en sådan signal varar ju bara under ett ändligt tidsintervall och ska då egentligen modelleras med en funktion  $f$  som är noll utanför ett begränsat intervall. Och en sådan funktion, som inte är identiskt lika med noll, kan inte ha en fouriertransform  $\hat{f}$  som är noll utanför ett ändligt intervall. Se övning 8.1.

I praktiken spelar dock detta inte någon roll. Det mänskliga örat kan inte uppfatta ljud med högre frekvens än 20 kHz. Med tiden  $t$  angiven i sekunder har signalen  $e^{i\omega t}$  frekvensen  $|\omega|/2\pi$  Hz och den är således ohörbar om  $|\omega| > 40\,000\pi$ . Alla hörbara signaler kan därför anses ha sitt spektrum i intervallet  $] -40\,000\pi, 40\,000\pi[$  och därmed ha en bandbredd som inte överstiger  $80\,000\pi$ . För perfekt ljudåtergivning räcker det därför att sampla signalen i diskreta tidpunkter med tidsavståndet  $\Delta t = 1/40\,000$  sekund, dvs. med samplingsfrekvensen 40 kHz. Vanliga CD-spelare använder samplingsfrekvensen 44.1 kHz.

## Undersampling

Låt oss undersöka vad som händer om man använder rekonstruktionsformeln i sats 8.2.2 på en signal  $f$  vars faktiska bandbredd är större än  $2L$ . Antag att fouriertransformen  $\hat{f}$  i själva verket bara är noll utanför intervallet  $[-L - \delta, L + \delta]$ , där  $0 < \delta < L$ , och låt  $f_R$  beteckna den signal som fås med hjälp av rekonstruktionsformeln, dvs.

$$f_R(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}.$$

Vi ska bestämma fouriertransformen  $\widehat{f_R}$  och se hur den skiljer sig från den ursprungliga signalens fouriertransform  $\hat{f}$ . Vi uttrycker för den skull samplingsvärdena  $f(n\pi/L)$  med hjälp av fouriertransformen till  $f$ . Inversionsformeln ger att

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{n\pi}{L}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L-\delta}^{L+\delta} \hat{f}(\omega) e^{i(n\pi/L)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-L-\delta}^{-L} \hat{f}(\omega) e^{i(n\pi/L)(\omega+2L)} d\omega \right. \\
&\quad \left. + \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{i(n\pi/L)\omega} d\omega + \int_L^{L+\delta} \hat{f}(\omega) e^{i(n\pi/L)(\omega-2L)} d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-L-\delta}^L \hat{f}(\omega-2L) e^{i(n\pi/L)\omega} d\omega + \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{i(n\pi/L)\omega} d\omega \right. \\
&\quad \left. + \int_{-L}^{L+\delta} \hat{f}(\omega+2L) e^{i(n\pi/L)\omega} d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L (\hat{f}(\omega-2L) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega+2L)) e^{i(n\pi/L)\omega} d\omega.
\end{aligned}$$

Sätt

$$h(\omega) = (\hat{f}(\omega-2L) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega+2L))\chi_{[-L,L]}(\omega),$$

där  $\chi_{[-L,L]}$  som vanligt betecknar den karakteristiska funktionen till intervallet  $[-L, L]$ . Funktionen  $h$  är kontinuerlig på intervallet  $[-L, L]$  och lika med noll utanför detsamma och tillhör följaktligen speciellt  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ . Om vi definierar funktionen  $g$  som

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L (\hat{f}(\omega-2L) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega+2L)) e^{i\omega t} d\omega,$$

så är  $g(t) = \frac{1}{2\pi} \hat{h}(-t)$ , och inversionsformeln (för  $L^2$ -funktioner) ger att

$$\hat{g}(\omega) = h(\omega)$$

för alla  $\omega$  i intervallet  $[-L, L]$ .

På grund av formeln för samplingsvärdena  $f(n\pi/L)$  och definitionen av funktionen  $g$  är slutligen  $g(n\pi/L) = f(n\pi/L)$ , så det följer av rekonstruktionsformeln i sats 8.2.2 att

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi} = f_R(t).$$

För  $|\omega| \leq L$  är följaktligen

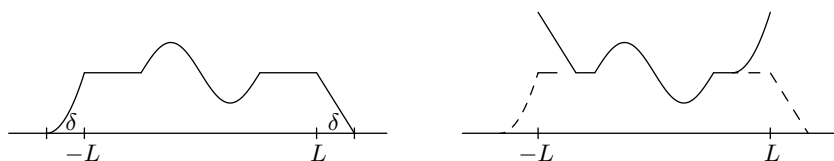
$$\widehat{f_R}(\omega) = \hat{g}(\omega) = h(\omega) = (\hat{f}(\omega-2L) + \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega+2L))\chi_{[-L,L]}(\omega).$$

Notera att  $f_R \neq f$  eftersom  $\widehat{f_R} \neq \hat{f}$ . Om vi jämför de båda signalernas transformer så ser vi att

$$\widehat{f_R}(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega+2L) & \text{för } -L \leq \omega \leq -L + \delta, \\ \hat{f}(\omega) & \text{för } -L + \delta \leq \omega \leq L - \delta, \\ \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega-2L) & \text{för } L - \delta \leq \omega \leq L. \end{cases}$$

Genom undersamplingen skiftas således högfrekvent innehåll i signalen  $f$  till lägre frekvensområden. Se figur 8.1. Fenomet kalls *vikning* eller *aliasing*.





**Figur 8.1.** Vikning: Till vänster fouriertransformen till en signal med bandbredd  $2L + 2\delta$ , och till höger transformen av den signal som fås genom sampling med samplingsbredden  $2L$ .

## Övning

- 8.1 Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig och lika med noll utanför ett begränsat intervall samt att fouriertransformen  $\hat{f}$  också är noll utanför något begränsat intervall. Visa att  $f$  är lika med noll överallt.

[Ledning: Antag utan inskränkning att  $f$  är noll utanför intervallet  $[0, \pi]$ , och låt  $F$  vara restriktionen av  $f$  till intervallet  $[0, 2\pi]$ . Visa genom att beräkna fourierkoefficienterna att  $F$  är ett trigonometriskt polynom, vilket är orimligt om inte  $F(t) = 0$  för alla  $t$ .]

- 8.2 Låt  $f$  vara som i sats 8.2.2. Visa att om  $\lambda > 1$ , så är

$$f(t) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L\lambda}\right) K_\lambda(L\lambda t - n\pi),$$

där

$$K_\lambda(x) = \frac{\cos(x/\lambda) - \cos x}{x^2}.$$

Rekonstruktionsformeln konvergerar således snabbare om man samplar  $f$  oftare, ty  $K_\lambda(x) = O(1/|x|^2)$  då  $|x| \rightarrow \infty$ .

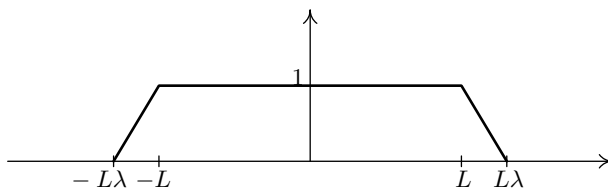
[Ledning: Låt  $k$  vara funktionen i figur 8.2 och definiera funktionerna  $g$  och  $h_t$  på intervallet  $[-L\lambda, L\lambda]$  genom att sätta

$$g(\omega) = \begin{cases} L\lambda\phi(\omega)/\pi & \text{för } |\omega| \leq L \\ 0 & \text{för } |\omega| > L \end{cases} \quad \text{och} \quad h_t(\omega) = e^{-i\omega t} k(\omega).$$

Notera att

$$f(t) = \frac{1}{2L\lambda} \int_{-L\lambda}^{L\lambda} g(\omega) \overline{h_t(\omega)} d\omega$$

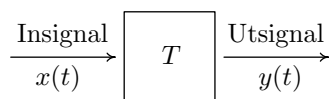
och använd Parsevals sats.]



**Figur 8.2.** Funktionen  $k$  i övning 8.2.

### 8.3 Linjära tidsinvarianta system

I inledningskapitlet exemplifierade vi begreppet (diskret) faltning med diskreta svarta lådor. Nu ska vi diskutera den analoga motsvarigheten, dvs. system eller apparater som tar emot kontinuerliga signaler, processar dem på något sätt och levererar kontinuerliga utsignaler. Vi är fortfarande inte intresserade av vad som händer inuti systemet/apparaten utan betraktar det som en funktion  $T$  med mängden av alla möjliga insignaler som definitionsmängd. Sambandet mellan insignal  $x$  och utsignal  $y$  har följaktligen formen  $y = T(x)$ , och vi kan beskriva det hela schematiskt med figur 8.3.



**Figur 8.3.** Analog svart låda

Ett sådant system kallas *linjärt* om funktionen  $T$  är linjär, dvs. om

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$$

för alla insignaler  $x_1$  och  $x_2$  och alla skalärer  $a_1$  och  $a_2$ .

Inga verkliga apparater kan naturligtvis vara fullständigt linjära, men många kan med god approximation anses vara linjära inom sina begränsade funktionsområden.

Om ett system fungerar på samma sätt oavsett när det används, kallas det tidsinvariant. För att formulera egenskapen matematisk låter vi  $x_\tau$  beteckna den med  $\tau$  enheter translaterade signalen  $x$ , dvs.  $x_\tau(t) = x(t - \tau)$ . Systemet  $T$  är då *tidsinvariant* om

$$T(x_\tau) = T(x)_\tau$$

för alla signaler  $x$  och alla  $\tau \in \mathbf{R}$ . Om insignalen  $x(t)$  ger upphov till utsignalen  $y(t)$ , så ska alltså den translaterade insignalen  $x(t - \tau)$  resultera i utsignalen  $y(t - \tau)$ .

System som är både linjära och tidsinvarianta kallas *LTI-system*. Exempel på apparater som kan modelleras som LTI-system är digitala förstärkare och filter.<sup>1</sup>

EXEMPEL 8.3.1. Ett system där utsignalens värde varje tidpunkt  $t$  är medelvärdet av insignalen under tidsintervallet  $[t-1, t+1]$ , dvs. där sambandet mellan insignal  $x$  och utsignal  $y$  ges av ekvationen

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} x(s) ds,$$

är ett LTI-system.

Sambandet mellan ut- och insignal kan uttryckas som en faltning. Variabelsubstitutionen  $s = t - u$  i integralen ger nämligen att

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t-u) du = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} x(t-u) \chi_{[-1,1]}(u) du,$$

så  $y = k * x$  för funktionen  $k = \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}$ . □

EXEMPEL 8.3.2. Ett system där utsignalens värde vid varje tidpunkt  $t$  är lika med medelvärdet av insignalens värden vid tidpunkterna  $t-1$  och  $t+1$ , dvs. där

$$y(t) = \frac{x(t-1) + x(t+1)}{2},$$

är också ett LTI-system. Även i detta fall kan vi skriva sambandet mellan ut- och insignal som en faltning  $y = k * x$ , men nu behöver vi använda oss av Diracmåttet för att definiera  $k$ . För Diracmåttet  $\delta_a$  i punkten  $a$  är  $\delta_a * x(t) = x(t-a)$ , så faltningssambandet gäller för  $k = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ . □

Låt  $T$  vara ett LTI-system som kan processa sinusoider och deras komplexa motsvarigheter, dvs. de komplexa exponentialfunktionerna, och låt  $y^\omega(t)$  beteckna utsignalen till insignalen  $e^{i\omega t}$ . Vi ska titta på utsignalen till den translaterade insignalen  $e^{i\omega(t-\tau)}$ . Eftersom

$$e^{i\omega(t-\tau)} = e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t}$$

är utsignalen dels lika med  $y^\omega(t-\tau)$  på grund av tidsinvarians, dels lika med  $e^{-i\omega\tau} y^\omega(t)$  på grund av linearitet. Det följer att

$$y^\omega(t-\tau) = e^{-i\tau\omega} y^\omega(t)$$

för alla  $\tau$  och alla  $t$ , och genom att speciellt välja  $t = 0$  och sedan byta  $\tau$  mot  $-t$  ser vi att

$$T(e^{i\omega t}) = y^\omega(t) = y^\omega(0) e^{i\omega t}.$$

---

<sup>1</sup>Ett filter är en komponent som släpper igenom signaler vars frekvenser ligger inom ett givet intervall och kraftigt reducerar övriga signaler.

Funktionerna  $e^{i\omega t}$  är med andra ord egenfunktioner till avbildningen  $T$  med  $K(\omega) = y^\omega(0)$  som motsvarande egenvärden. Sammanfattningsvis har vi därmed visat följande sats.

**Sats 8.3.1.** För LTI-system  $T$  är de komplexa exponentialfunktionerna  $e^{i\omega t}$  egenfunktioner, dvs. det finns en funktion  $K(\omega)$  med egenskapen att

$$T(e^{i\omega t}) = K(\omega)e^{i\omega t}.$$

Funktionen  $K(\omega)$  kallas systemets frekvenssvar.

EXEMPEL 8.3.3. För LTI-systemet i exempel 8.3.1 resulterar insignalen  $e^{i\omega t}$  i utsignalen

$$y^\omega(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} e^{i\omega s} ds.$$

Frekvenssvaret är därför

$$K(\omega) = y^\omega(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\omega s} ds = \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Den uppmärksamme läsaren noterar nu att frekvenssvaret  $K(\omega)$  är fouriertransform till funktionen  $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$ , dvs. till den funktion  $k$  som gör att sambandet mellan in- och utsignal kan skrivas som en faltning  $y = k * x$ .  $\square$

EXEMPEL 8.3.4. Frekvenssvaret i LTI-systemet i exempel 8.3.2 är på motsvarande vis

$$K(\omega) = \frac{1}{2}(e^{-i\omega} + e^{i\omega}) = \cos \omega,$$

och även i det här exemplet är frekvenssvaret lika med fouriertransformen till  $k = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$  i faltningssambandet  $y = k * x$  mellan in- och utsignal.  $\square$

Alla system i vilka sambandet mellan in- och utsignal ges av en faltning, är LTI-system.

**Sats 8.3.2.** Låt  $k$  vara en funktion eller mer allmänt ett mått. Då definierar faltningen  $y = k * x$  ett LTI-system med  $x$  som insignal och  $y$  som utsignal.

Det är underförstått att de tillåtna insignalerna är de funktioner som gör faltningen väldefinierad.

*Bevis.* Både linearitet och tidsinvarians följer omedelbart från faltningsdefinitionen  $y(t) = k * x(t) = \int_{\mathbf{R}} k(t-u)x(u) du$ .  $\square$

I LTI-systemet  $y = k * x$  kallas  $k$  systemets *impulssvar*, och anledningen är att insignalen  $\delta$  (en impuls) ger  $y = k * \delta = k$  som utsignal.

Att LTI-systemen i exemplen ovan kan skrivas som faltningar och att frekvenssvaret  $K(\omega)$  ges av fouriertransformen till impulssvaret  $k$  är ingen tillfällighet, utan motsvarande gäller under tämligen allmänna förhållanden som följande heuristiska resonemang visar.

Låt  $T$  vara ett LTI-system vars frekvenssvar  $K(\omega)$  är fouriertransform till någon funktion  $k$  (eller mer generellt till något mått  $k$ ), och betrakta en insignal  $x(t)$  med fouriertransform  $\hat{x}(\omega)$ . Antag att signalen kan rekonstrueras från fouriertransformen med hjälp av inversionssatsen, dvs. att

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

att motsvarande gäller för signalen  $k * x(t)$ , samt att LTI-systemet  $T$  är kontinuerligt i den bemärkelsen att linearitetsegenskapen kan utsträckas från att gälla för ändliga summor av insignaler till "oändliga summor" i form av integraler. Då är

$$\begin{aligned} T(x)(t) &= T\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} T(\hat{x}(\omega) e^{i\omega t}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) T(e^{i\omega t}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) K(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{k}(\omega) \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{k * x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= k * x(t). \end{aligned}$$

En önskvärd egenskap hos många verkliga system är att de ska vara stabila. Det finns flera olika stabilitetsbegrepp i bruk, men det vanligaste är följande.

**Definition.** Ett LTI-system kallas *BIBO-stabilt* om utsignalen är begränsad för varje begränsad insignal. BIBO står för "bounded input-bounded output".

**Sats 8.3.3.** *LTI-systemet  $y = k * x$ , där  $k$  är en funktion, är BIBO-stabilt om och endast om funktionen  $k$  är absolutintegrabel.*

*Bevis.* Att systemet är BIBO-stabilt om  $k \in L^1(\mathbf{R})$  följer av olikheten

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} k(s) x(t-s) ds \right| \leq \int_{\mathbf{R}} |k(s)| |x(t-s)| ds \leq \int_{\mathbf{R}} |k(s)| \sup_{s \in \mathbf{R}} |x(s)| ds \\ &= \|k\|_1 \sup_{s \in \mathbf{R}} |x(s)|, \end{aligned}$$

som visar att utsignalen är begränsad för alla begränsade insignaler.

Antag omvänt att systemet är BIBO-stabilt och låt  $x(t)$  vara den insignal som fås genom att sätta  $x(t) = \overline{k(-t)}/|k(-t)|$  om  $k(-t) \neq 0$  och  $x(t) = 0$  om

$k(-t) = 0$ . Insignalen  $x(t)$  är då till beloppet begränsad av 1, så motsvarande utsignal  $y(t)$  är begränsad. Eftersom

$$y(0) = \int_{\mathbf{R}} k(s)x(-s) ds = \int_{\mathbf{R}} |k(s)| ds = \|k\|_1,$$

är  $\|k\|_1 < \infty$ . □

**EXEMPEL 8.3.5.** Ett lågpasfilter är ett filter som släpper igenom signaler med frekvenser som understiger ett givet värde  $a$  och reducerar övriga signaler. Ett LTI-system med följande frekvenssvar

$$K(\omega) = \chi_{[-a,a]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } |\omega| \leq a \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

skulle därför vara ett perfekt lågpasfilter eftersom systemet annihilerar signaler med frekvenser som överstiger  $a$  fullständigt. Motsvarande impuls-svar  $k$ , dvs. den funktion som har  $K$  som fouriertransform, är funktionen  $\sin at/\pi t$  och den är inte absolutintegrabel. Ett idealt lågpasfilter är därför inte BIBO-stabilt. □

Ideala lågpasfilter går heller inte att realisera i praktiken, bl. a. av det skälet att det inte fungerar i realtid. För system som fungerar i realtid kan utsignalens värde i en punkt  $t$  bara bero av insignalens värden i tidpunkter upp till och med  $t$ . Sådana system kallas *kausala*. Ett system  $T$  är med andra ord kausalt om

$$x(s) = z(s) \text{ för } s \leq t \Rightarrow T(x)(t) = T(z)(t)$$

för alla  $t$ . För linjära system  $T$  är detta ekvivalent med att

$$x(s) = 0 \text{ för } s \leq t \Rightarrow T(x)(t) = 0.$$

**Sats 8.3.4.** *Ett faltningsystem är kausalt om och endast om det kan skrivas på formen*

$$y(t) = \int_0^\infty k(s)x(t-s) ds.$$

*Bevis.* Antag först att systemet  $T$  har den formen, och låt  $x$  vara en insignal sådan att  $x(s) = 0$  för  $s \leq t$ . Då är

$$T(x)(t) = \int_0^\infty k(s)x(t-s) ds = \int_0^\infty k(s) \cdot 0 ds = 0$$

vilket visar att systemet är kausalt.

Antag omvänt att systemet  $y = T(x) = k * x$  är kausalt. För alla signaler  $x$  med  $x(s) = 0$  för  $s \leq 0$  är då är

$$0 = T(x)(0) = \int_{\mathbf{R}} k(s)x(0-s) ds = \int_{-\infty}^0 k(s)x(-s) ds,$$

och eftersom  $x(-s)$  kan väljas godtyckligt för  $s < 0$  medför detta att  $\int_{-\infty}^0 k(s)f(s) ds = 0$  för alla funktioner  $f$ . Speciellt är därför

$$\begin{aligned} T(x)(t) &= \int_{\mathbf{R}} k(s)x(t-s) ds = \int_{-\infty}^0 k(s)x(t-s) ds + \int_0^{\infty} k(s)x(t-s) ds \\ &= \int_0^{\infty} k(s)x(t-s) ds \end{aligned}$$

för alla insignaler  $x$ . □

EXEMPEL 8.3.6. Inga av systemen i exemplen 8.3.1, 8.3.2 och 8.3.5 är kausala. □

## 8.4 Heisenbergs osäkerhetsprincip

Vi börjar med en olikhet som brukar kallas Heisenbergs olikhet eftersom den finns implicit i ett av hans kvantmekaniska arbeten.

**Sats 8.4.1** (Heisenbergs olikhet). *Antag att  $f \in L^2(\mathbf{R})$ . Då är*

$$(8.1) \quad \int_{\mathbf{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2.$$

*Mer generellt gäller att*

$$(8.2) \quad \int_{\mathbf{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{\mathbf{R}} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2.$$

*för alla reella tal  $a, b$ .*

*Bevis.* Genom att använda olikheten (8.1) på funktionen

$$g(t) = e^{-ib(t+a)} f(t+a),$$

som har fouriertransformen

$$\hat{g}(\omega) = e^{iaw} \hat{f}(\omega+b)$$

ser man att olikheten (8.2) följer av olikheten (8.1).

För att visa olikheten (8.1) kan vi naturligtvis utan inskränkning anta att integralerna  $\int_{\mathbf{R}} t^2 |f(t)|^2 dt = \|tf(t)\|_2^2$  och  $\int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|\omega\hat{f}(\omega)\|_2^2$  är ändliga. Enlig sats 7.4.6 medför detta att funktionen  $f$  är kontinuerlig (om man modifierar den på en nollmängd), att derivatan  $f'$  existerar nästan överallt och tillhör  $L^2(\mathbf{R})$  samt att  $\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$ . Genom att utnyttja att

$$\frac{d}{dt} |f(t)|^2 = \frac{d}{dt} (f(t)\overline{f(t)}) = f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)} = 2 \operatorname{Re}(f(t)\overline{f'(t)})$$

får vi nu med hjälp av partiell integration:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \int_a^b |f(t)|^2 dt &= \left[ t|f(t)|^2 \right]_a^b - \int_a^b t \frac{d}{dt} |f(t)|^2 dt \\ &= b|f(b)|^2 - a|f(a)|^2 - 2 \operatorname{Re} \int_a^b t f(t) \overline{f'(t)} dt. \end{aligned}$$

Funktionen  $t f(t) \overline{f'(t)}$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  på grund av Cauchy–Schwarz olikhet, ty

$$(8.4) \quad \int_{\mathbf{R}} |t f(t) \overline{f'(t)}| dt \leq \|t f(t)\|_2 \|f'(t)\|_2.$$

Integralerna i vänster- och högerleden av likheten (8.3) konvergerar därför då  $b \rightarrow \infty$  resp.  $a \rightarrow -\infty$ , vilket medför att de båda gränsvärdena  $\lim_{b \rightarrow \infty} b|f(b)|^2$  och  $\lim_{a \rightarrow -\infty} a|f(a)|^2$  måste existera. Båda gränsvärdena är vidare lika med noll, ty i motsatt fall vore  $|f(t)|$  av storleksordningen  $|t|^{-1/2}$  då  $t$  går mot plus eller minus oändligheten, vilket strider mot antagandet  $f \in L^2(\mathbf{R})$ .

Gränsövergång i likheten (8.3) i kombination med olikheten (8.4) och Plancherels formel  $\|f'\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\hat{f}'\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\omega f(\omega)\|_2$  leder således till olikheten

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt \leq 2 \int_{\mathbf{R}} |t f(t) \overline{f'(t)}| dt \leq 2 \|t f(t)\|_2 \|f'(t)\|_2 \\ &= 2 \|t f(t)\|_2 \cdot (2\pi)^{-1/2} \|\omega f(\omega)\|_2, \end{aligned}$$

som efter kvadrering är olikheten (8.1). □

Vi ska nu ge en sannolikheteoretisk tolkning av Heisenbergs olikhet och erinrar då om att en *täthetsfunktion* är en icke-negativ funktion  $g$  sådan att  $\int_{\mathbf{R}} g(t) dt = 1$ , dvs. en icke-negativ funktion  $g \in L^1(\mathbf{R})$  med  $\|g\|_1 = 1$ .

Täthetsfunktioner  $g$  ger upphov till sannolikhetsmått på  $\mathbf{R}$ , och om  $\int_{\mathbf{R}} t^2 g(t) dt < \infty$ , så existerar *väntevärdet*

$$\mu = \int_{\mathbf{R}} t g(t) dt,$$

eftersom  $\mu$  är den inre produkten av de två  $L^2(\mathbf{R})$ -funktionerna  $t g(t)^{1/2}$  och  $g(t)^{1/2}$ , och *variansen*

$$\operatorname{Var}(g) = \int_{\mathbf{R}} (t - \mu)^2 g(t) dt = \int_{\mathbf{R}} t^2 g(t) dt - \mu^2.$$

Liten varians betyder att huvudparten av sannolikhetsmassan är lokaliserad till en liten omgivning av väntevärdet, medan stor varians innebär att sannolikhetsmassan är utsmetad över ett större intervall.



Låt nu  $f \in L^2(\mathbf{R})$  vara en funktion med norm  $\|f\|_2 = 1$ . Enligt Plancherels sats är då också  $\|(2\pi)^{-1/2}\hat{f}\|_2 = 1$ , och detta innebär att både  $|f|^2$  och  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$  är täthetsfunktioner till sannolikhetsmått. Om vi i sats 8.4.1 väljer konstanterna  $a$  och  $b$  som väntevärdena till  $|f|^2$  resp.  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$ , så får vi därför följande resultat för de båda sannolikhetsmåttens varians.

**Sats 8.4.2.** *Antag  $f \in L^2(\mathbf{R})$  och  $\|f\|_2 = 1$ . Då är*

$$\text{Var}(|f|^2) \cdot \text{Var}((2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{4}.$$

Resultatet innebär att de båda varianserna inte kan vara små samtidigt. Om tätheten  $|f|^2$  har en liten varians  $\delta$ , så har den duala tätheten  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$  en varians av minst storleksordningen  $1/\delta$ .

Heisenbergs olikhet har som nämnts sina rötter i kvantmekaniken. Inom kvantmekaniken beskrivs läge och rörelsemängd hos en elektron som rör sig utefter en linje av  $L^2(\mathbf{R})$ -funktioner. Varken läge eller rörelsemängd kan anges exakt utan det är enbart möjligt att ange sannolikheten för att elektronen ska finnas i ett givet intervall och ha en rörelsemängd inom ett givet intervall. Positionssannolikheten har en täthetsfunktion av typen  $|f|^2$  med  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , medan täthetsfunktionen för rörelsemängd ges av  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$ .

Om man använder positionsfördelningens väntevärde för att ange elektronens läge, så blir fördelningens standardavvikelse, dvs. kvadratroten ur variansen, ett mått på osäkerheten i positionsangivelsen. Ju mindre standardavvikelse desto mer sannolikt att elektronen befinner sig i ett intervall av given storlek kring väntevärdet. På motsvarande sätt blir standardavvikelsen hos täthetsfunktionen för rörelsemängden ett mått på osäkerheten då rörelsemängden ges av motsvarande väntevärde. Om  $\Delta x$  och  $\Delta p$  står för standardavvikelserna i positionsangivelsen resp. rörelsemängdsangivelsen, så blir därför den kvantmekaniska tolkningen av olikheten i sats 8.4.2 att

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq C,$$

där  $C$  är en konstant, och med rätt val av fysikaliska enheter är  $C = h/4\pi$ , där  $h$  är Plancks konstant. Olikheten visar att det är principiellt omöjligt att med godtyckligt stor precision samtidigt bestämma läge och rörelsemängd.

## 8.5 Centrala gränsvärdessatsen

Låt oss börja med att rekapitulera några grundläggande begrepp från sannolikheteeteorin och samtidigt fixera den notation som vi kommer att använda oss av.

En reell *stokastisk variabel*  $X$  är en funktion som är definierad på något sannolikhetsrum. Vi kan därför meningsfullt tala om sannolikheten att  $X$

ska ha ett värde som ligger i en viss delmängd  $B$  av  $\mathbf{R}$ , och denna sannolikhet betecknas  $\Pr(X \in B)$ . Speciellt kan vi betrakta sannolikheten  $\Pr(X \leq x)$  att  $X$  ska vara mindre än eller lika med  $x$ , och detta ger oss den stokastiska variabelns (*kumulativa*) *fördelningsfunktion*  $F$ , som definieras av att

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

för alla  $x$ . Fördelningsfunktionen är uppenbarligen växande, och den går mot 1 då  $x \rightarrow \infty$  och mot 0 då  $x \rightarrow -\infty$ . Man kan vidare visa att funktionen är kontinuerlig utom i högst uppräknligt många punkter, och i diskontinuitetspunkterna är den högerkontinuerlig.

Den stokastiska variabeln  $X$  kallas *absolutkontinuerlig* om det finns en icke-negativ funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  sådan att

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

för alla  $x$ , i vilket fall nödvändigtvis  $\|f\|_1 = 1$ . Funktionen  $f$  kallas variabelns *täthetsfunktion*.

Till varje stokastisk variabel  $X$  kan man associera en linjär s. k. *väntevärdesoperator*  $E_X$  som är definierad för en klass av funktioner som inkluderar alla begränsade funktioner, och som för den karakteristiska funktionen  $\chi_{]-\infty, x]}$  till intervallet  $]-\infty, x]$  ges av att  $E_X(\chi_{]-\infty, x]}) = F(x)$ . En stokastisk variabel  $X$  är således fullständigt bestämd av sin väntevärdesoperator  $E_X$ .

För absolutkontinuerliga stokastiska variabler med täthetsfunktion  $f$  är speciellt

$$E_X(g) = \int_{\mathbf{R}} g(t)f(t) dt,$$

där definitionsmängden består av alla (mätbara) funktioner  $g$  sådana att  $\int_{\mathbf{R}} |g(t)|f(t) dt < \infty$ .

Om  $E_X(\text{id})$  existerar för den identiska funktionen  $\text{id}$ , dvs. funktionen som definieras av att  $\text{id}(t) = t$ , så sätter man

$$E(X) = E_X(\text{id})$$

och kallar  $E(X)$  för *väntevärdet* eller *medelvärdet* av den stokastiska variabeln  $X$ . För absolutkontinuerliga stokastiska variabler  $X$  med täthetsfunktion  $f$  är alltså speciellt

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} tf(t) dt$$

förutsatt att integranden  $tf(t)$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ .

Ett slående faktum av stor betydelse är att om  $X$  är en stokastisk variabel och  $g$  är en godtycklig funktion och vi definierar en ny stokastisk variabel  $Y$  genom att sätta  $Y = g(X)$ , så är

$$E(g(X)) = E_X(g),$$

om något av de två väntevärdena existerar. I det absolutkontinuerliga fallet då  $X$  har täthetsfunktion  $f$ , är således speciellt

$$E(g(X)) = \int_{\mathbf{R}} g(t)f(t) dt.$$

Väntevärdena  $E(X^n)$  kallas i förekommande fall för den stokastiska variabeln  $X$ :s *moment av ordning  $n$* . Förstamomentet är tydligen lika med väntevärdet och betecknas ofta  $\mu$ . Om andramomentet existerar, så existerar automatiskt förstamomentet  $\mu$ , liksom *variansen*

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Låt nu  $X$  vara en godtycklig stokastisk variabel med väntevärdesoperator  $E_X$  och låt  $\omega \in \mathbf{R}$ . Eftersom funktionen  $t \mapsto e^{i\omega t}$  är begränsad, har den stokastiska variabeln  $e^{i\omega X}$  ett väntevärde, nämligen  $E(e^{i\omega X}) = E_X(e^{i\omega t})$ . Vi kan därför definiera en funktion  $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  genom att sätta

$$\phi(\omega) = E(e^{i\omega X}).$$

Probabilisterna kallar funktionen  $\phi$  för den stokastiska variabelns *karaktéristiska funktion*.<sup>2</sup>

Om den stokastiska variabeln  $X$  har en täthetsfunktion  $f$ , så är tydligen

$$\phi(\omega) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(-\omega),$$

vilket är förklaringen till att fourieranalis är ett viktigt hjälpmedel inom sannolikhetsteorin.<sup>3</sup> Det följer av inversionssatsen att den karaktéristiska funktionen  $\phi$  bestämmer täthetsfunktionen  $f$  och därmed också fördelningsfunktionen  $F$  entydigt.

Naturligtvis är  $\phi(0) = 1$ , och om andramomentet existerar, så följer det av sats 6.4.2 att funktionen  $\phi$  är två gånger deriverbar med derivatorna

$$\phi'(\omega) = i \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} t f(t) dt \quad \text{och} \quad \phi''(\omega) = - \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} t^2 f(t) dt,$$

och speciellt är alltså  $\phi'(0) = iE(X)$  och  $\phi''(0) = -E(X^2)$ . För stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians  $\sigma^2$  är med andra ord  $\phi(0) = 1$ ,  $\phi'(0) = 0$  och  $\phi''(0) = -\sigma^2$ , vilket betyder att  $\phi$  har en Taylorutveckling kring 0 på formen

$$(8.5) \quad \phi(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + o(\omega^2).$$

<sup>2</sup>Ordet karaktéristisk funktion förekommer således i två betydelser, dels som karaktéristisk funktion till en mängd, dels som karaktéristisk funktion till en stokastisk variabel. Karaktéristiska funktioner till mängder kallas också för indikatorfunktioner.

<sup>3</sup>Den karaktéristiska funktionen är en fouriertransform även för stokastiska variabler som inte är absolutkontinuerliga, t. ex. diskreta stokastiska variabler, men då krävs det förstås att vi generaliserar begreppet fouriertransform till att omfatta transformer av mått.

Detta gäller också i det allmänna fallet även om härledningen ovan bara gjorts för absolutkontinuerliga stokastiska variabler.

En stokastisk variabel  $X$  med täthetsfunktionen

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

kallas *normalfördelad* med parametrarna  $\mu$  och  $\sigma^2$ , och det är lätt att verifiera att  $\mu$  är variabelns väntevärde och att  $\sigma^2$  är dess varians. Om väntevärdet är 0 och variansen är 1, kallas variabeln *standardnormalfördelad*. Fördelningsfunktionen till standardnormalfördelningen betecknas  $\Phi$ , och dess karakteristiska funktion  $\phi$  är (jmf exempel 6.4.2)

$$\phi(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Inom sannolikhetsteorin spelar normalfördelningen en speciellt betydelsefull roll av följande anledning:

**Sats 8.5.1** (Centrala gränsvärdessatsen). *Antag att  $X_1, X_2, X_3, \dots$  är en följd av oberoende, lika fördelade stokastiska variabler med väntevärde  $\mu$  och varians  $\sigma^2$ , och sätt*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

*För alla reella tal  $x$  är då*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

*Bevis.* Slumpvariablerna  $X_k - \mu$  har samma sannolikhetsfördelning, så de har förstås också samma karakteristiska funktion, som vi betecknar  $\phi$ , och eftersom deras väntevärde och varians är 0 resp.  $\sigma^2$ , ges  $\phi$ 's Taylorutveckling av ekvation (8.5).

Låt nu  $\phi_n$  beteckna den karakteristiska funktionen till den stokastiska variabeln  $(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ . Eftersom de stokastiska variablerna  $X_k$  är oberoende är också variablerna  $e^{i\omega(X_k - \mu)}$  oberoende, så det följer att

$$\begin{aligned} \phi_n(\omega) &= E\left(e^{i\omega \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = E\left(e^{i\omega \frac{(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\ &= E\left(e^{i\omega \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot e^{i\omega \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot \dots \cdot e^{i\omega \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\ &= E\left(e^{i\omega \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \cdot E\left(e^{i\omega \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \cdot \dots \cdot E\left(e^{i\omega \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\omega^2}{2n} + o\left(\frac{\omega^2}{n}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

För fixt  $\omega$  går

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{2n} + o\left(\frac{\omega^2}{n}\right)\right)^n$$

mot  $\exp(-\frac{1}{2}\omega^2)$  då  $n \rightarrow \infty$ , och de karakteristiska funktionerna  $\phi_n$  konvergerar således punktvis mot standardnormalfördelningens karakteristiska funktion då  $n \rightarrow \infty$ . Centrala gränsvärdessatsen är därför en konsekvens av följande sats.  $\square$

**Sats 8.5.2 (Lévys sats).** Låt  $(Y_n)_1^\infty$  vara en följd av stokastiska variabler med fördelningsfunktioner  $(F_n)_1^\infty$  och karakteristiska funktioner  $(\phi_n)_1^\infty$ , och antag att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\omega) = \phi(\omega)$$

för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ , där  $\phi$  är den karakteristiska funktionen till någon stokastisk variabel  $Y$  med fördelningsfunktion  $F$ . Då är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

i alla punkter  $x$  där fördelningsfunktionen  $F$  är kontinuerlig.

*Anmärkning.* Omvändningen gäller också, dvs. om fördelningsfunktionerna  $F_n$  konvergerar mot  $F$  punktvis i alla kontinuitetspunkter till  $F$ , så konvergerar de karakteristiska funktionerna  $\phi_n$  punktvis mot  $\phi$  överallt.

Lévys sats gäller generellt, men vi ska inskränka oss till att behandla fallet att alla inblandade stokastiska variabler är absolutkontinuerliga. Då följer satsen av följande tre lemmen.

**Lemma 8.5.3.** Låt  $(f_n)_1^\infty$  vara en följd av reella, icke-negativa  $L^1(\mathbf{R})$ -funktioner med norm 1, och antag att det finns en reell, icke-negativ funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  sådan att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ . För alla reella tal  $a$  och  $b$  är i så fall

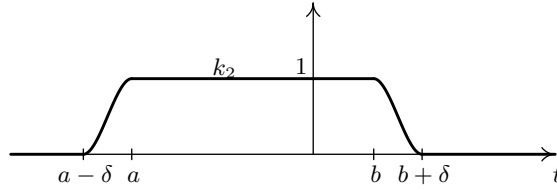
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

*Bevis.* Antag utan inskränkning att  $a < b$  och välj givet  $0 < \delta < (b-a)/2$  två funktioner  $k_1$  och  $k_2$  som är två gånger kontinuerligt deriverbara och uppfyller följande villkor (se figur 8.4):

$$\begin{cases} k_1(t) = 1 & \text{för } a + \delta \leq t \leq b - \delta, \\ k_1(t) = 0 & \text{för } t \leq a \text{ och } t \geq b, \\ 0 \leq k_1(t) \leq 1 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} k_2(t) = 1 & \text{för } a \leq t \leq b, \\ k_2(t) = 0 & \text{för } t \leq a - \delta \text{ och } t \geq b + \delta, \\ 0 \leq k_2(t) \leq 1 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$



**Figur 8.4.** Funktionen  $k_2$ .

Eftersom funktionerna är två gånger deriverbara, är deras fouriertransformer  $O(|\omega|^{-2})$  i oändligheten, vilket betyder att de ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ . Det följer därför av inversionssatsen (sats 7.2.4) att funktionerna  $k_i$  själva är fouriertransformer till  $L^1(\mathbf{R})$ -funktioner, och vi sätter därför fortsättningsvis  $k_1(t) = \hat{\psi}_1(t)$  och  $k_2(t) = \hat{\psi}_2(t)$ , där  $\psi_1$  och  $\psi_2$  är funktioner i  $L^1(\mathbf{R})$ .

För icke-negativa funktioner  $g \in L^1(\mathbf{R})$  har vi uppenbarligen följande olikheter:

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} g(t) dt \leq \int_{\mathbf{R}} \hat{\psi}_1(t) g(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

och

$$\int_a^b g(t) dt \leq \int_{\mathbf{R}} \hat{\psi}_2(t) g(t) dt \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} g(t) dt.$$

Vi använder nu lemma 7.2.1 enligt vilket

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{\psi}_i(t) g(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \psi_i(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega$$

för att formulera om olikheterna ovan så att de får formen:

$$(8.6) \quad \int_{a+\delta}^{b-\delta} g(t) dt \leq \int_{\mathbf{R}} \psi_1(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega \leq \int_a^b g(t) dt$$

och

$$(8.7) \quad \int_a^b g(t) dt \leq \int_{\mathbf{R}} \psi_2(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} g(t) dt.$$

Låt oss sedan använda den högra halvan av olikheten (8.6) med  $f_n$  istället för  $g$  och den vänstra halvan av samma olikhet med  $f$  istället för  $g$  och vi får då de båda olikheterna

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_1(\omega) \hat{f}_n(\omega) d\omega \leq \int_a^b f_n(t) dt$$

och

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(t) dt \leq \int_{\mathbf{R}} \psi_1(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Då  $n \rightarrow \infty$  går  $\hat{f}_n(\omega)$  punktvis mot  $\hat{f}(\omega)$ , och det följer av Lebesgues sats om dominerad konvergens att vänsterledet i den första av de båda olikheterna ovan går mot högerledet av den andra olikheten. Givet  $\epsilon > 0$  finns det därför ett tal  $N$  så att

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(t) dt - \epsilon \leq \int_a^b f_n(t) dt$$

för alla  $n \geq N$ .

Genom att på motsvarande sätt använda den vänstra halvan av olikheten (8.7) med  $f_n$  istället för  $g$  och den högra halvan av samma olikhet med  $f$  istället för  $g$  samt låta  $n \rightarrow \infty$ , erhåller vi olikheten

$$\int_a^b f_n(t) dt \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} f(t) dt + \epsilon$$

för  $n \geq N$ .

Eftersom  $\int_{a\pm\delta}^{b\pm\delta} f(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt$  då  $\delta \rightarrow 0$ , kan vi från början välja talet  $\delta$  så litet att de båda olikheterna ovan kombineras till olikheten

$$\int_a^b f(t) dt - 2\epsilon \leq \int_a^b f_n(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt + 2\epsilon$$

som då gäller för alla tillräckligt stora  $n$ , vilket bevisar vårt lemma.  $\square$

**Lemma 8.5.4.** *Antag att funktionen  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är reell och icke-negativ och att  $\|f\|_1 = 1$ . För varje  $a > 0$  är då*

$$\int_{|t| \geq a} f(t) dt \leq \frac{a}{2} \int_{|\omega| \leq 2a^{-1}} (1 - \operatorname{Re} \hat{f}(\omega)) d\omega.$$

*Bevis.* För  $T > 0$  är

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{f}(\omega) d\omega &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-T}^T e^{-it\omega} d\omega dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin Tt}{Tt} dt. \end{aligned}$$

Integralen är uppenbarligen reell, och genom att utnyttja de triviala olikheterna

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1 \quad \text{och} \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$$

följer nu olikheten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \operatorname{Re} \hat{f}(\omega) d\omega &= \int_{|t| \leq a} f(t) \frac{\sin Tt}{Tt} dt + \int_{|t| \geq a} f(t) \frac{\sin Tt}{Tt} dt \\ &\leq \int_{|t| \leq a} f(t) dt + \frac{1}{Ta} \int_{|t| \geq a} f(t) dt \\ &= 1 + \left( \frac{1}{Ta} - 1 \right) \int_{|t| \geq a} f(t) dt, \end{aligned}$$

som vi kan skriva om som

$$\left(1 - \frac{1}{Ta}\right) \int_{|t| \geq a} f(t) dt \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (1 - \operatorname{Re} \hat{f}(\omega)) d\omega.$$

Olikheten i lemmat följer nu genom att välja  $T = 2/a$ .  $\square$

**Lemma 8.5.5.** *Antag att  $(f_n)_1^\infty$  är en följd av reella, icke-negativa funktioner i  $L^1(\mathbf{R})$ , alla med norm 1, samt att funktionernas fouriertransformer  $\hat{f}_n$  konvergerar punktvis mot en funktion  $g$  som är kontinuerlig i punkten 0. Då finns det givet  $\epsilon > 0$  ett tal  $a > 0$  sådant att*

$$\int_{|t| \geq a} f_n(t) dt < \epsilon$$

för alla  $n$ .

*Bevis.* Eftersom  $\hat{f}_n(0) = 1$  för alla  $n$ , och funktionerna  $f_n$  konvergerar punktvis mot  $g$ , är speciellt  $g(0) = 1$ . Kontinuiteten hos funktionen  $g$  i origo medför därför att

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \int_{|\omega| \leq 2a^{-1}} (1 - \operatorname{Re} g(\omega)) d\omega &\leq \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \sup_{|\omega| \leq 2a^{-1}} |1 - \operatorname{Re} g(\omega)| \\ &= 2 \cdot \sup_{|\omega| \leq 2a^{-1}} |1 - \operatorname{Re} g(\omega)| < \epsilon/2 \end{aligned}$$

om talet  $a$  är tillräckligt stort,  $a = a_0$  säg.

Enligt föregående lemma är vidare

$$\int_{|t| \geq a} f_n(t) dt \leq \frac{a}{2} \int_{|\omega| \leq 2a^{-1}} (1 - \operatorname{Re} \hat{f}_n(\omega)) d\omega$$

för alla  $n$ , och då  $n$  går mot oändligheten går högerledet i denna olikhet mot vänsterledet i föregående olikhet på grund av Lebesgues sats om dominerad konvergens. Det finns därför ett  $N$  sådant att

$$\int_{|t| \geq a_0} f_n(t) dt < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

för alla  $n \geq N$ .

För var och en av de återstående funktionerna  $f_1, f_2, \dots, f_{N-1}$  kan vi uppenbarligen välja ett tal  $a_i$  sådant att

$$\int_{|t| \geq a_i} f_i(t) dt < \epsilon.$$

Genom att välja  $a$  som det största av talen  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  har vi därför fått ett tal  $a$  som uppfyller villkoret i lemmat.  $\square$



*Bevis för Lévy's sats.* Vi behandlar som sagt enbart fallet att de inblandade stokastiska variablerna är absolutkontinuerliga. Låt därför  $f_n$  och  $f$  beteckna täthetsfunktionerna till de stokastiska variablerna  $Y_n$  och  $Y$ .

Eftersom  $\phi_n(\omega) = \hat{f}_n(-\omega)$  och  $\phi(\omega) = \hat{f}(-\omega)$ , uppfyller funktionern  $f_n$  förutsättningarna i lemma 8.5.5. Vi kan därför välja ett tal  $a$  sådant att

$$\int_{-\infty}^a f_n(t) dt < \epsilon \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^a f(t) dt < \epsilon$$

för alla  $n$ . Sedan använder vi lemma 8.5.3 för att bestämma ett tal  $N$  med egenskapen att

$$\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| < \epsilon$$

om  $n \geq N$ . Det följer nu att

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_{-\infty}^a f_n(t) dt + \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt - \int_{-\infty}^a f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^a f_n(t) dt + \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| + \int_{-\infty}^a f(t) dt \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

för alla  $n \geq N$ , vilket bevisar satsen.  $\square$

## Övning

8.3 Beräkna täthetsfunktionen till summan av två oberoende normalfördelade stokastiska variabler  $X_1$  och  $X_2$  med medelvärde och varians  $\mu_1$  och  $\sigma_1^2$  resp.  $\mu_2$  och  $\sigma_2^2$ , dvs. beräkna faltningen  $\phi_{\mu_1, \sigma_1} * \phi_{\mu_2, \sigma_2}$ , där

$$\phi_{\mu, \sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Formulera resultatet i sannolikhetsteoretiska termer.

## Historiska notiser

Samplingssatsen blev allmänt känd som teoretisk grund för digital teknologi genom en artikel år 1949 av CLAUDE SHANNON (1916–2001), ”informationsteorins fader”, men satsen och rekonstruktionsformeln hade publicerats långt tidigare, 1898 av ÉMILE BOREL (1871–1956) och 1915 av EDMUND WHITTAKER (1873–1956).

Centrala gränsvärdessatsen går tillbaka till år 1733 då de Moivre approximerade antalet krona som erhålls vid ett stort antal kast med ett symmetriskt mynt med normalfördelningen. Hans resultat generaliserades sedan av PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1749–1827) som år 1812 härledde normalapproximationen till binomialfördelningen. För generella summor av oberoende, likafördelade variabler visades centrala gränsvärdessatsen 1901 av ALEKSANDR LYAPUNOV (1857–1918) med

förutsättningar som är något starkare än de i sats 8.5.1, som härstammar från JARL LINDEBERG (1876–1932) och PAUL LÉVY (1886–1971). Centrala gränsvärdessatsen har sedan generaliserats i olika riktningar.

## Kapitel 9

# Laplacetransformen

För att en funktion ska kunna fouriertransformeras måste den tillhöra  $L^1(\mathbf{R})$  eller  $L^2(\mathbf{R})$ , vilket innebär att sådana viktiga funktioner som polynom och exponentialfunktioner saknar fouriertransform.<sup>1</sup> För att råda bot på detta ska vi definiera en transform som fungerar för funktioner som inte växer snabbare än exponentiellt.

### 9.1 Laplacetransformens definition

Låt  $f$  vara en funktion som till att börja med är definierad på halvaxeln  $[0, \infty[$  och utvidga funktionen till hela  $\mathbf{R}$  genom att sätta  $f(t) = 0$  för  $t < 0$ . Låt  $\sigma$  vara ett reellt tal och betrakta produkten  $f(t)e^{-\sigma t}$ ; för  $\sigma > 0$  går faktorn  $e^{-\sigma t}$  mot 0 då  $t \rightarrow +\infty$ , så därför har produkten  $f(t)e^{-\sigma t}$  större förutsättningar än funktionen  $f$  att tillhöra  $L^1(\mathbf{R})$ . Även om  $f(t)$  är stor för stora  $t$  kan således funktionen  $f(t)e^{-\sigma t}$  tillhöra  $L^1(\mathbf{R})$ , och vi kan då bilda fouriertransformen som är

$$\mathcal{F}([f(t)e^{-\sigma t}](\tau) = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\tau t} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma+i\tau)t} dt.$$

Detta leder oss till att betrakta integraler av typen

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

där  $s$  är ett komplext tal. Här och i fortsättningen kommer vi konsekvent att skriva komplexa tal på formen  $s = \sigma + \tau i$ , där alltså  $\sigma$  betecknar realdelen och  $\tau$  imaginärdelen. Låt oss först precisera klassen av funktioner för vilka ovanstående integral är väldefinierad för åtminstone något komplext tal  $s$ .

---

<sup>1</sup>Man kan definiera fouriertransformen för polynom, men transformerna blir då inte funktioner utan distributioner.

**Definition.** En funktion  $f$  med en definitions mängd som innehåller intervallet  $[0, \infty[$ , tillhör klassen  $\mathcal{E}$  om det finns ett reellt tal  $a$  sådant att

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt < \infty.$$

EXEMPEL 9.1.1. Funktionen  $f(t) = t$  tillhör  $\mathcal{E}$  eftersom  $\int_0^\infty t e^{-t} dt < \infty$ . Däremot tillhör funktionen  $g(t) = e^{t^2}$  inte klassen  $\mathcal{E}$ , ty  $\int_0^\infty e^{t^2-at} dt = \infty$  för alla reella tal  $a$ .  $\square$

Observera att om  $f \in \mathcal{E}$ , så tillhör  $f$  automatiskt  $L^1(I)$  för varje begränsat intervall  $I = [0, c]$ . Per definition finns det nämligen ett tal  $a$  så att  $\int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt < \infty$ , och eftersom funktionen  $e^{-at}$  är nedåt begränsad på intervallet  $I$  av den positiva konstanten  $m = \min(1, e^{-ac})$ , får vi olikheten

$$m \int_I |f(t)| dt \leq \int_I |f(t)| e^{-at} dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt < \infty,$$

som visar att  $f$  tillhör  $L^1(I)$ .

**Lemma 9.1.1.** Låt  $f \in \mathcal{E}$ . Mängden

$$E(f) = \{a \in \mathbf{R}: \int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt < \infty\}$$

är ett intervall på formen  $]\alpha, \infty[$ ,  $[\alpha, \infty[$  eller  $]-\infty, \infty[$ . I de första två fallen sätter vi  $\sigma_a(f) = \alpha$ , och i det sistnämnda fallet sätter vi  $\sigma_a(f) = -\infty$ .

Talet (eller oändlighetssymbolen)  $\sigma_a(f)$  kallas funktionens (absolut)konvergensabscissa.

*Bevis.* En icke-tom delmängd  $I$  av  $\mathbf{R}$  är ett intervall av den typ som beskrivs i lemmat om och endast om mängden har följande egenskap:

$$a \in I \ \& \ b > a \implies b \in I.$$

Mängden  $E(f)$  i lemmat har denna egenskap, ty om  $b > a$ , så är  $|f(t)| e^{-bt} \leq |f(t)| e^{-at}$  för  $t > 0$ , och därför medför  $a \in E(f)$  att  $b \in E(f)$ .  $\square$

EXEMPEL 9.1.2. Läsaren kan lätt verifiera att  $E(t) = ]0, \infty[$ ,  $E((1+t^2)^{-1}) = [0, \infty[$  och  $E(e^{-t^2}) = ]-\infty, \infty[$ . Således är  $\sigma_a(t) = \sigma_a((1+t^2)^{-1}) = 0$  och  $\sigma_a(e^{-t^2}) = -\infty$ .  $\square$

Låt oss kalla en funktion  $f$  *exponentiellt växande* om det finns en reell konstant  $k$  och en positiv konstant  $M$  så att  $|f(t)| \leq M e^{kt}$  för alla  $t > 0$ .

Om en funktion  $f$  är exponentiellt växande med exponent  $k$ , så är uppenbarligen integralen  $\int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt$  ändlig för alla  $a > k$ , dvs.  $f$  tillhör klassen  $\mathcal{E}$  och  $\sigma_a(f) \leq k$ .

Exponentialfunktioner  $e^{ct}$  och polynom är självklart exponentiellt växande funktioner.

Antag att  $f \in \mathcal{E}$  och sätt  $s = \sigma + \tau i$ . Eftersom  $|f(t) e^{-st}| = |f(t)| e^{-\sigma t}$ , är integralen  $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$  väldefinierad för alla komplexa tal  $s$  med realdel  $\sigma > \sigma_a$ . Vi kan därför göra följande definition.

**Definition.** Låt  $f \in \mathcal{E}$ . För komplexa tal  $s = \sigma + \tau i$  med  $\sigma > \sigma_a(f)$  sätter vi

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

och kallar funktionen  $\tilde{f}$  *laplacetransformen* till  $f$ . Ibland kommer vi att skriva  $\mathcal{L}[f]$  istället för  $\tilde{f}$ .

Laplacetransformen  $\tilde{f}$ 's definitionsmängd är alltså ett halvplan, halvplanet  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$ , utom i fallet  $\sigma_a(f) = -\infty$  då definitionsmängden är hela komplexa planet  $\mathbf{C}$ .

Fördelen med att definiera laplacetransformen för komplexa argument  $s = \sigma + \tau i$  är att det ger oss ett enkelt samband mellan laplacetransformen och fouriertransformen. Som vi noterade inledningsvis är

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_{\mathbf{R}} f^*(t) e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} dt = \mathcal{F}[f^*(t) e^{-\sigma t}](\tau),$$

där  $f^*$  är den funktionen som fås från  $f$  genom att sätta

$$f^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0, \\ f(t) & \text{om } t \geq 0. \end{cases}$$

Laplacetransformen till funktionen  $f$  i punkten  $s = \sigma + \tau i$  är således lika med fouriertransformen till funktionen  $f^*(t) e^{-\sigma t}$  i punkten  $\tau$ . Man kan utnyttja detta samband för att översätta egenskaper hos fouriertransformen till egenskaper hos laplacetransformen.

**EXEMPEL 9.1.3.** Låt oss beräkna laplacetransformen till exponentialfunktionen  $f(t) = e^{ct}$ ,  $t \geq 0$ . Här är  $c = a + bi$  ett godtyckligt komplext tal.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \int_0^\infty e^{ct} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s-c} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t}. \end{aligned}$$

För  $\sigma > a$  är  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-a)t} e^{-i(\tau-b)t} = 0$ . Det följer att

$$\mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c} \quad \text{om } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c.$$

Genom att speciellt välja  $c = 0$  respektive  $c = 1$  får man

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad \text{för } \operatorname{Re} s > 0 \quad \text{och} \quad \mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{för } \operatorname{Re} s > 1.$$

Värdena  $c = \pm i$  ger istället att  $\mathcal{L}[e^{it}](s) = (s-i)^{-1}$  och  $\mathcal{L}[e^{-it}](s) = (s+i)^{-1}$  för  $\operatorname{Re} s > 0$ , och eftersom  $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$  och  $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ , följer det att

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos t](s) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{s^2+1}, \\ \mathcal{L}[\sin t](s) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

för  $\operatorname{Re} s > 0$ . □

EXEMPEL 9.1.4. Vi beräknar laplacetransformen till funktionen  $f(t) = t$ . För  $\operatorname{Re} s > 0$  är

$$\mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left[ -t \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \left[ e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Här har vi utnyttjat att  $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ . □

EXEMPEL 9.1.5. Funktionen  $[t]$ , heltalsdelen av  $t$ , definieras av att

$$[t] = n \quad \text{om } n \leq t < n+1,$$

där  $n$  betecknar ett godtycklig heltal. Funktionen har språngdiskontinuiteter i heltalspunkterna, och eftersom  $\lim_{t \rightarrow \infty} [t] e^{-kt} = 0$  för  $k > 0$  är dess laplacetransform definierad i halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$ . Genom att utnyttja identiteten  $\sum_{n=0}^\infty n z^n = z(1-z)^{-2}$  som gäller för  $|z| < 1$ , får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[[t]](s) &= \int_0^\infty [t] e^{-st} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} [t] e^{-st} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} n e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty n s^{-1} (e^{-ns} - e^{-(n+1)s}) = s^{-1} (1 - e^{-s}) \sum_{n=0}^\infty n e^{-ns} \\ &= s^{-1} (1 - e^{-s}) e^{-s} (1 - e^{-s})^{-2} = s^{-1} e^{-s} (1 - e^{-s})^{-1} \\ &= \frac{1}{s(e^s - 1)}.\end{aligned}$$
□

**Sats 9.1.2.** Klassen  $\mathcal{E}$  är ett vektorrum som är slutet under multiplikation med polynom, dvs.

- (i)  $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f + g \in \mathcal{E}$
- (ii)  $f \in \mathcal{E}, c \in \mathbf{C} \Rightarrow cf \in \mathcal{E}$
- (iii)  $f \in \mathcal{E}, p \text{ polynom} \Rightarrow pf \in \mathcal{E}$

Vidare är

$$\begin{aligned}\sigma_a(f+g) &\leq \max(\sigma_a(f), \sigma_a(g)), \\ \sigma_a(cf) &= \sigma_a(f), \\ \sigma_a(pf) &= \sigma_a(f)\end{aligned}$$

för alla nollskilda konstanter  $c$  och alla polynom  $p$  utom nollpolynomet.

*Bevis.* Om  $a > m = \max(\sigma_a(f), \sigma_a(g))$  så är  $\int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt < \infty$  och  $\int_0^\infty |g(t)| e^{-at} dt < \infty$ . Det följer att

$$\int_0^\infty |f(t) + g(t)| e^{-at} dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt + \int_0^\infty |g(t)| e^{-at} dt < \infty.$$

Detta visar att  $f+g \in \mathcal{E}$  och att  $\sigma_a(f+g) \leq a$ . Eftersom den sistnämnda olikheten gäller för alla  $a > m$ , följer det att  $\sigma_a(f+g) \leq m$ .

(ii) är trivialt.

(iii) För konstanta polynom följer (iii) av (ii). Antag därför att  $f \in \mathcal{E}$  och att  $p(t)$  är ett godtyckligt icke-konstant polynom. Låt  $a > \sigma_a(f)$  vara godtyckligt, och välj  $\epsilon > 0$  så att  $a - \epsilon > \sigma_a(f)$ .

Eftersom funktionen  $p(t)e^{-\epsilon t}$  är kontinuerlig och går mot 0 då  $t \rightarrow \infty$ , finns det en konstant  $M$  så att  $p(t)e^{-\epsilon t} \leq M$  för alla  $t \geq 0$ . Detta innebär att  $p(t) \leq Me^{\epsilon t}$ , så det följer att

$$|p(t)f(t)| e^{-at} \leq M|f(t)| e^{\epsilon t} e^{-at} = M|f(t)| e^{-(a-\epsilon)t}$$

för  $t \geq 0$ . Genom att integrera denna olikhet får vi

$$\int_0^\infty |p(t)f(t)| e^{-at} dt \leq M \int_0^\infty |f(t)| e^{-(a-\epsilon)t} dt < \infty$$

där integralen i högerledet är ändlig beroende på att  $a - \epsilon > \sigma_a(f)$ . Detta visar att funktionen  $pf$  tillhör  $\mathcal{E}$  och att  $\sigma_a(pf) \leq a$ . Eftersom den sistnämnda olikheten gäller för alla  $a > \sigma_a(f)$  är  $\sigma_a(pf) \leq \sigma_a(f)$ .

För att bevisa den omvända olikheten för konvergensabscissan startar vi med ett godtyckligt tal  $a > \sigma_a(pf)$ , och väljer talet  $c > 0$  så stort att olikheten  $|p(t)| \geq 1$  gäller för  $t > c$ . Då blir

$$\int_c^\infty |f(t)| e^{-at} dt \leq \int_c^\infty |p(t)||f(t)| e^{-at} dt \leq \int_0^\infty |p(t)f(t)| e^{-at} dt < \infty.$$

Integralen  $\int_0^c |f(t)| e^{-at} dt$  är också ändlig, eftersom  $f$  tillhör  $L^1([0, c])$  och faktorn  $e^{-at}$  är begränsad på intervallet. Det följer att  $\int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt < \infty$ , vilket innebär att  $\sigma_a(f) \leq a$ . Eftersom  $a > \sigma_a(pf)$  är godtyckligt, följer det att  $\sigma_a(f) \leq \sigma_a(pf)$ .  $\square$

Eftersom exponentialfunktionen  $e^{ct}$  tillhör klassen  $\mathcal{E}$ , följer det av satsen ovan att klassen  $\mathcal{E}$  innehåller alla funktioner som kan skrivas som summor och produkter av polynom, exponentialfunktioner och de trigonometriska funktionerna  $\sin kt$  och  $\cos kt$ .

### Faltning

Vi erinrar om att faltningen  $f * g$  av två godtyckliga  $L^1(\mathbf{R})$ -funktioner  $f$  och  $g$  definieras genom formeln  $f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-u)g(u) du$ . Om funktionerna  $f$  och  $g$  båda är lika med noll på den negativa reella axeln, så är  $f(t-u)g(u) = 0$  för  $u < 0$  och för  $u > t$ , och därför är  $f * g(t) = 0$  om  $t < 0$  och

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

om  $t \geq 0$ . Den sistnämnda formeln är meningsfull så snart som funktionerna  $f$  och  $g$  är definierade på halvaxeln  $[0, \infty[$  och tillhör  $L^1(I)$  för varje begränsat delintervall  $I$  till  $[0, \infty[$ . Denna observation motiverar följande faltningsdefinition som vi kommer att använda för funktioner i klassen  $\mathcal{E}$ .

**Definition.** *Faltningen*  $f * g$  av två funktioner  $f$  och  $g$  med definitionsmängder som innehåller intervallet  $[0, \infty[$  och som tillhör  $L^1(I)$  för varje begränsat delintervall  $I$  av  $[0, \infty[$ , definieras av formeln

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

för  $t \geq 0$ .

För funktioner som också tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  har vi nu två olika definitioner av faltningsbegreppet, men det är den nya definitionen som vi exklusivt kommer att använda oss av i det här kapitlet. Läsaren kan lätt kontrollera att det uppfyller följande följande kommutativa, associativa och distributiva räkneregler:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f, \\ f * (g * h) &= (f * g) * h, \\ f * (g + h) &= f * g + f * h. \end{aligned}$$

EXEMPEL 9.1.6. Låt  $f(t) = e^t$  och  $g(t) = \cos t$ . Då är

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{t-u} \cos u du = e^t \int_0^t e^{-u} \cos u du.$$

Integralen i högerledet kan beräknas med hjälp av två partiella integrationer eller enklare genom att ersätta  $\cos u$  med  $\frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$ . Slutresultatet blir (kontrollera gärna!):

$$\int_0^t e^{-u} \cos u du = \frac{1}{2}(1 + e^{-t}(\sin t - \cos t)),$$

dvs.

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t).$$

□



**Sats 9.1.3.** Faltningen  $f * g$  av två funktioner  $f$  och  $g$  i klassen  $\mathcal{E}$  tillhör själv klassen  $\mathcal{E}$ , och  $\sigma_a(f * g) \leq \max(\sigma_a(f), \sigma_a(g))$ .

*Bevis.* Vi behöver visa att funktionen  $(f * g)(t) e^{-at}$  tillhör  $L^1([0, \infty[)$  för varje tal  $a > \max(\sigma_a(f), \sigma_a(g))$ . Men för  $t \geq 0$  är

$$(f * g)(t) e^{-at} = e^{-at} \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t f(t-u) e^{-a(t-u)} g(u) e^{-au} du,$$

så genom att använda triangelolikheten för integraler och sedan integrera den erhållna olikheten över  $[0, \infty[$ , byta integrationsordning och göra ett variabelbyte erhåller vi olikheten

$$\begin{aligned} \|(f * g)(t) e^{-at}\|_{L^1([0, \infty[)} &= \int_0^\infty |(f * g)(t) e^{-at}| dt \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^t |f(t-u)| e^{-a(t-u)} |g(u)| e^{-au} du dt \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty |f(t-u)| e^{-a(t-u)} |g(u)| e^{-au} dt du \\ &= \int_0^\infty |g(u)| e^{-au} du \int_0^\infty |f(v)| e^{-av} dv \\ &= \|g(t) e^{-at}\|_{L^1([0, \infty[)} \cdot \|f(t) e^{-at}\|_{L^1([0, \infty[)} < \infty. \square \end{aligned}$$

## Övningar

9.1 Bestäm laplacetransformen till funktionen  $f$  om

a)  $f(t) = t^2$    b)  $f(t) = te^{2t}$    c)  $f(t) = e^t \sin t$    d)  $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$

e)  $f(t) = t\chi_{[0,1]}(t)$

f) funktionen är periodisk med period 1 och  $f(t) = t$  för  $0 \leq t < 1$ .

9.2 Beräkna faltningen  $f * g$  för

a)  $f(t) = 1, g(t) = t$    b)  $f(t) = g(t) = t$    c)  $f(t) = t, g(t) = e^{2t}$

d)  $f(t) = 1, g(t) = \chi_{[0,1]}(t)$    e)  $f(t) = t, g(t) = \chi_{[0,1]}(t)$ .

9.3 Visa kommutativa och associativa lagen för faltning, dvs.

$$\begin{aligned} f * g &= g * f, \\ f * (g * h) &= (f * g) * h. \end{aligned}$$

9.4 Antag att funktionen  $f$ 's laplacetransform  $\tilde{f}(s)$  existerar för  $s \geq 0$ , och låt  $g$  beteckna laplacetransformen till funktionen  $\tilde{f}$ , dvs.  $g(s) = \mathcal{L}[\tilde{f}](s)$ . Visa att

$$g(s) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+s} dt.$$

(Man kallar  $g$  för Stieltjestransformen av  $f$ .)

## 9.2 Räknerregler

För att laplacetransformen ska vara ett effektivt räknehjälpmedel behöver vi, förutom att kunna ett antal elementära funktioners laplacetransformer, också räknerregler för hur transformen beter sig då funktioner kombineras på olika sätt.

**Sats 9.2.1.** Låt  $f, g \in \mathcal{E}$ ,  $c \in \mathbf{C}$  och  $\lambda > 0$ . Då är

- (a)  $\mathcal{L}[f + g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s)$
- (b)  $\mathcal{L}[cf](s) = c \mathcal{L}[f](s)$
- (c)  $\mathcal{L}[f(\lambda t)](s) = \lambda^{-1} \mathcal{L}[f](s/\lambda)$
- (d)  $\mathcal{L}[e^{ct} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - c)$
- (e)  $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$

för alla  $s$  för vilka laplacetransformerna i högerleden existerar.

*Bevis.* Vi lämnar reglerna (a) – (d) som enkla övningar. Räkneregel (e) följer genom omkastning av integrationsordningen på följande vis:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty (f * g)(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \int_0^t f(t-u) g(u) e^{-st} du dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u) e^{-s(t-u)} g(u) e^{-su} du dt \\
 &= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u) e^{-s(t-u)} g(u) e^{-su} dt du \\
 &= \int_0^\infty g(u) e^{-su} \int_u^\infty f(t-u) e^{-s(t-u)} dt du \\
 &= \int_0^\infty g(u) e^{-su} du \int_0^\infty f(v) e^{-sv} dv = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s). \quad \square
 \end{aligned}$$

**EXEMPEL 9.2.1.** Vi vet redan att  $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ . Med hjälp av (c) och (d) i sats 9.2.1 får man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\sin at](s) &= \frac{1}{a((s/a)^2 + 1)} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{och} \\
 \mathcal{L}[e^{bt} \sin at](s) &= \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}.
 \end{aligned}$$

På motsvarande sätt fås

$$\mathcal{L}[e^{bt} \cos at](s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}. \quad \square$$

För att sambandet mellan Laplace- och fouriertransformen ska gälla ska funktionen som transformeras sättas lika med noll för negativa värden på

argumentet. Detta har som konsekvens att definitionen av högertranslation ser ut så här för funktioner som ska laplacetransformeras.

**Definition.** För  $f \in \mathcal{E}$  och  $\lambda > 0$  definieras den högertranslaterade funktionen  $f_\lambda$  av att

$$f_\lambda(t) = f(t - \lambda)H(t - \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < \lambda, \\ f(t - \lambda) & \text{om } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Högertranslation motsvaras på transformsidan av multiplikation med funktionen  $e^{-\lambda s}$ .

**Sats 9.2.2.** Antag att  $f \in \mathcal{E}$  och  $\lambda > 0$ . Då är

$$\mathcal{L}[f_\lambda](s) = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f](s)$$

för  $s > \sigma_a(f)$ .

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_\lambda](s) &= \int_0^\infty f_\lambda(t) e^{-st} dt = \int_\lambda^\infty f(t - \lambda) e^{-st} dt \\ &= e^{-s\lambda} \int_0^\infty f(u) e^{-su} du = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f](s). \end{aligned} \quad \square$$

## Övningar

9.5 Beräkna laplacetransformen till funktionen  $f$  om

- a)  $f(t) = \sin 3t$     b)  $f(t) = \cos 3t$     c)  $f(t) = e^{-2t} \cos 3t$   
d)  $f(t) = e^{2(t-1)} H(t-1)$     e)  $f(t) = e^{3t} * \sin 2t$

## 9.3 Deriverbarhet och entydighet

Laplacetransformerna är mycket snälla funktioner – de är oändligt deriverbara och går mot noll då  $\operatorname{Re} s$  går mot oändligheten.

**Sats 9.3.1.** Laplacetransformen  $\tilde{f}$  till en funktion  $f \in \mathcal{E}$  är deriverbar i hela sitt definitionsområde  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$  med derivata

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

*Anmärkning.* För läsare som har studerat komplex analys kan vi formulera sats 9.3.1 på följande sätt: Laplacetransformen  $\tilde{f}$  är analytisk i halvplanet  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$ . Detta faktum har långtgående konsekvenser.

*Bevis.* Formellt får man derivatan  $\tilde{f}'(s)$  genom att derivera laplacetransformen

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

under integraltecknet, vilket ger

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds} (f(t) e^{-st}) dt = - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

För att rigoröst motivera att detta är tillåtet betraktar man differenskvo-

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}(s+h) - \tilde{f}(s)}{h} &= \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h} dt \\ &= - \int_0^\infty t f(t) e^{-at} g_h(t) dt, \end{aligned}$$

där talet  $a$  är valt så att  $\sigma_a < a < \sigma = \operatorname{Re} s$  och

$$g_h(t) = \frac{e^{-ht} - 1}{-ht} e^{(a-s)t}.$$

Avsikten är förstås att låta  $h \rightarrow 0$ .

Vi konstaterar då först att funktionen  $tf(t)e^{-at}$  ligger i  $L^1([0, \infty[)$  och att funktionerna  $g_h$  är kontinuerliga. På grund av olikheten  $|e^{-ht} - 1| \leq t|h|e^{|h|t}$  är funktionerna  $g_h$  vidare uniformt begränsade för  $|h| \leq \sigma - a$ , eftersom

$$|g_h(t)| \leq e^{(|h|+a-\sigma)t} \leq e^{0 \cdot t} = 1$$

om  $|h| \leq \sigma - a$ . Slutligen är  $\lim_{h \rightarrow 0} g_h(t) = e^{(a-s)t}$ . Lebesgues sats om dominerad konvergens (sats 4.1.1) ger därför det önskade resultatet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(s+h) - \tilde{f}(s)}{h} = - \int_{\mathbf{T}} \lim_{h \rightarrow 0} t f(t) e^{-at} g_h(t) dt = - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt. \quad \square$$

Genom iteration får vi följande följande korollarium till sats 9.3.1.

**Korollarium 9.3.2.** Antag  $f \in \mathcal{E}$ . Då har laplacetransformen  $\tilde{f}$  derivator av alla ordningar i definitionsområdet  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$  och

$$\frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

EXEMPEL 9.3.1. Vi vet att  $\mathcal{L}[e^{ct}](s) = (s - c)^{-1}$ . Genom att derivera  $n$  gånger får vi

$$\mathcal{L}[t^n e^{ct}](s) = \frac{n!}{(s - c)^{n+1}},$$

och som specialfall

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad \square$$

Med hjälp av resultatet i föregående exempel och partialbråksuppdelning kan vi nu laplaceinvertera rationella funktioner. Vi visar först ett exempel.

EXEMPEL 9.3.2. Bestäm en funktion  $f$  med laplacetransformen

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 - s + 7}{(s-1)^2(s^2 + 2s + 5)}.$$

Lösning. Vi börjar med att partialbråksuppdelna funktionen och får

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}.$$

Vi kvadratkompletterar nämnaren  $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 2^2$  och gör sedan omskrivningen

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Nu ser vi att  $F$  är laplacetransform till funktionen

$$f(t) = te^t + e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

Alternativt kunde vi ha börjat med att faktorisera nämnaren i den rationella funktionen  $F$  fullständigt med hjälp av de komplexa rötterna  $-1 \pm 2i$  till andragradspolynomet  $s^2 + 2s + 5$ . Detta leder till partialbråksuppdelningen

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i}{s+1-2i} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i}{s+1+2i}.$$

Nu känner vi igen  $F$  som laplacetransform till funktionen

$$\begin{aligned} f(t) &= te^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)e^{-(1-2i)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)e^{-(1+2i)t} \\ &= te^t + e^{-t} \left( \frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) - \frac{1}{4}i(e^{2it} - e^{-2it}) \right) \\ &= te^t + e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t), \end{aligned}$$

dvs. samma funktion som ovan.

Det återstår förstås att visa att funktionen  $f$  är unik i den bemärkelsen att det inte finns några andra kontinuerliga funktioner med samma laplacetransformen. Den frågan ska vi strax återkomma till.  $\square$

Resultatet i exemplet ovan låter sig omedelbart generaliseras och vi har följande sats.

**Sats 9.3.3.** *Varje rationell funktion där täljaren har lägre grad än nämnaren, är laplacetransform till en funktion i  $\mathcal{E}$ .*

*Bevis.* Sådana rationella funktioner är linjärkombinationer av partialbråk av typen  $(s - c)^{-(n+1)}$  med  $n \geq 0$ , och de är därför laplacetransformer till motsvarande linjärkombinationer av funktionerna  $\frac{1}{n!}t^n e^{ct}$ .  $\square$

Att täljaren i den rationella funktionen ska ha lägre grad än nämnaren för att vara laplacetransformen till en funktion är ett nödvändigt villkor på grund av följande sats.

**Sats 9.3.4.** Om  $f \in \mathcal{E}$ , så gäller att  $\tilde{f}(s) \rightarrow 0$  då  $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$ .

*Bevis.* Välj  $a > \sigma_a(f)$ , sätt  $s = \sigma + \tau i$  och betrakta laplacetransformen  $\tilde{f}(s)$  för  $\sigma > a$ . Eftersom funktionen  $|f(t)|e^{-at}$  är absolutintegrabel på positiva reella axeln,  $|e^{(a-\sigma)t}| \leq 1$  och  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} e^{(a-\sigma)t} = 0$  om  $t > 0$ , följer det av satsen om dominerad konvergens att

$$|\tilde{f}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-at}e^{(a-\sigma)t} dt \rightarrow 0 \quad \text{då } \sigma \rightarrow \infty. \quad \square$$

Eftersom laplacetransformen  $\mathcal{L}[f]$  är definierad som en integral över intervallet  $[0, \infty[$  kan den naturligtvis inte ge någon information om funktionsvärdena  $f(t)$  för  $t < 0$ , såvida vi inte har ytterligare information om funktionen. För restriktionen av  $f$  till intervallet  $[0, \infty[$  har vi emellertid följande entydighetsresultat.

**Sats 9.3.5 (Entydighetssatsen).** Antag att  $f \in \mathcal{E}$  och att  $\tilde{f}(s) = 0$  för alla  $s$  i något intervall på  $\mathbf{R}$ . Då är  $f(t) = 0$  nästan överallt och speciellt i alla punkter  $t \in [0, \infty[$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.

Beviset utnyttjar egenskaper hos analytiska funktioner och bör därför hoppas över av den som inte har studerat komplex analys.

*Bevis.* På grund av entydighetssatsen för analytiska funktioner är  $\tilde{f}(s) = 0$  för alla  $s$  i transformens definitionsområde. Om  $\sigma_0 > \sigma_a(f)$ , så är därför speciellt  $\tilde{f}(\sigma_0 + \tau i) = 0$  för alla  $\tau \in \mathbf{R}$ . Men

$$\tilde{f}(\sigma_0 + \tau i) = \mathcal{F}[e^{-\sigma_0 t} f(t)](\tau),$$

där vi definierat om  $f$  genom att sätta  $f(t) = 0$  för  $t < 0$ . Fouriertransformen till  $L^1(\mathbf{R})$ -funktionen  $e^{-\sigma_0 t} f(t)$  är således identiskt noll. Entydighetssatsen för fouriertransformen leder därför till slutsatsen att  $e^{-\sigma_0 t} f(t) = 0$  nästan överallt och speciellt i alla punkter  $t$  där funktionen är kontinuerlig. Följaktligen är  $f(t) = 0$  nästan överallt och i alla kontinuitetspunkter.  $\square$

**Korollarium 9.3.6.** Om  $f, g \in \mathcal{E}$  och  $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)$  för alla tillräckligt stora reella tal  $s$ , så är  $f(t) = g(t)$  nästan överallt och speciellt i alla punkter  $t \in [0, \infty[$  där båda funktionerna är kontinuerliga.

*Bevis.* Tillämpa entydighetssatsen på funktionen  $f - g$ .  $\square$

Genom att utnyttja sambandet mellan laplace- och fouriertransformerna kan vi översätta inversionsformeln för fouriertransformen i sats 7.3.3 till en inversionsformel för laplacetransformen.

**Sats 9.3.7** (Inversionsformeln för laplacetransformen). *Antag att funktionen  $f \in \mathcal{E}$  är kontinuerligt deriverbar i punkten  $t \geq 0$ . Då är*

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \tilde{f}(\sigma + \tau i) e^{(\sigma + \tau i)t} d\tau,$$

där  $\sigma$  är ett godtyckligt tal som uppfyller  $\sigma > \sigma_a(f)$ .

*Bevis.* Inversionsformeln för fouriertransformen ger att

$$e^{-\sigma t} f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \tilde{f}(\sigma + \tau i) e^{i\tau t} d\tau,$$

så formeln i satsen följer efter multiplikation med  $e^{\sigma t}$ . □

Integralen i inversionsformeln som kallas *Bromwichintegralen*, är en integral över en vertikal linje i det komplexa talplanet, och för att formeln ska vara riktigt användbar bör man utnyttja residy teknik. Detta kräver emellertid kunskaper i komplex analys, och eftersom vi inte förutsätter några sådana, fördjupar vi oss inte i detta här.

EXEMPEL 9.3.3. Lös integralekvationen

$$f(t) = 1 + \int_0^t f(t-u) e^u du, \quad t \geq 0.$$

*Lösning:* Antag  $f \in \mathcal{E}$ . Genom att laplacetransformera integralekvationen får vi följande algebraiska ekvation

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[1 + f * e^t](s) = \frac{1}{s} + \tilde{f}(s) \frac{1}{s-1}$$

som vi löser med avseende på  $\tilde{f}(s)$ :

$$\tilde{f}(s) = \frac{s-1}{s(s-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2}.$$

Vi drar nu slutsatsen att

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t}. \quad \square$$

Det följer av anmärkningen efter sats 9.3.1 och ett resultat inom komplex analys att en funktions laplacetransform  $\hat{f}(s)$  är fullständigt bestämd av dess värden då variabeln  $s$  är reell. Vi utnyttjar detta faktum i följande exempel.

## EXEMPEL 9.3.4. Laplacetransformen

$$\mathcal{L}[t^\alpha](s) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt$$

till funktionen  $f(t) = t^\alpha$ , där  $\alpha > -1$ , är definierad i området  $\operatorname{Re} s > 0$ . Låt oss först beräkna integralen under antagandet att  $s$  är ett reellt positivt tal. Variabelbytet  $t = u/s$  ger då att

$$(9.1) \quad \mathcal{L}[t^\alpha](s) = s^{-(\alpha+1)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \Gamma(\alpha+1) s^{-(\alpha+1)},$$

där  $\Gamma$  är den s. k. *gammafunktionen* som för  $x > 0$  definieras av att

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du.$$

Med hjälp av partiell integration visar man enkelt att

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

för alla  $x > 0$ , och eftersom  $\Gamma(1) = 1$  följer det genom induktion att

$$\Gamma(n+1) = n!$$

för alla icke-negativa heltal  $n$ . För positiva heltal  $\alpha$  ger därför formel (9.1) samma resultat som exempel 9.3.1.

Härledningen av laplacetransformeln (9.1) är gjord för reella  $s$ , men två analytiska funktioner som är lika på positiva reella axeln är lika i hela sin definitionsområden. Det följer därför att formeln faktiskt gäller för alla komplexa tal  $s$  med positiv realdel.  $\square$

## Övningar

9.6 Bestäm funktionen  $f$  om dess laplacetransform är

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{s(s+1)} & \text{b)} \frac{1}{s^2+4s+29} & \text{c)} \frac{6s^2+4s-2}{(s-2)^2(s^2+2s+2)} \\ \text{d)} \frac{se^{-s}}{(s^2+1)^2} & \text{e)} \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}. \end{array}$$

9.7 Bestäm laplacetransformen till funktionen  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

9.8 Bestäm funktionen  $f$  om  $\tilde{f}(s) = \log \frac{s+3}{s+2}$ .

9.9 Bestäm en funktion  $f$  som är definierad på intervallet  $[0, \infty[$  och som löser integralekvationen

$$\int_0^t u f(t-u) du = t \sin t.$$



9.10 Bestäm funktioner  $x(t)$  och  $y(t)$ , definierade för  $t \geq 0$ , så att

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t y(t-u) du \\ y(t) = 1 + 2 \int_0^t x(t-u) \cos u du \end{cases}$$

9.11 Bestäm en lösning till integralekvationen

$$\int_0^t f(t-u) \cos 2u du = \sin t, \quad t \geq 0.$$

9.12 Lös integralekvationen

$$y(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t-u) y(u) du.$$

9.13 Visa rekursionsformeln  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  för  $\Gamma$ -funktionen.

9.14 Visa att  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  och bestäm sedan laplacetransformen till funktionen  $\sqrt{t}$ .

[Ledning: Gör substitutionen  $u = t^2/2$  i definitionen av  $\Gamma(\frac{1}{2})$  och utnyttja sedan fouriertransformen till funktionen  $e^{-t^2/2}$ .]

## 9.4 Derivatans transform och linjära differentialekvationer

Laplacetransformering är en teknik som kan användas för att lösa linjära differentialekvationer. Lösningssmetoden bygger på att man laplacetransformerar den givna differentialekvationen och på så sätt istället erhåller en ekvation för den obekanta funktionens laplacetransform som man löser explicit. Lösningen till differentialekvationen får man sedan genom inverstransformering.

Metoden förutsätter att vi kan uttrycka laplacetransformen till derivatan  $f'$  i termer av laplacetransformen till funktionen  $f$ . Nästa sats ger receptet för detta.

**Sats 9.4.1.** *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och att både  $f$  och derivatan  $f'$  tillhör klassen  $\mathcal{E}$ . Då är*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

*för alla komplexa tal  $s$  som har en realdel som är större än de båda funktionernas konvergensabskissor.*

*Bevis.* Antag att  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_a(f), \sigma_a(f'))$ . Då tillhör  $f(t) e^{-st}$  rummet  $L^1(\mathbf{R}_+)$ , och det följer att det finns en växande följd  $(t_n)_1^\infty$  sådan att  $t_n \rightarrow \infty$  och  $f(t_n) e^{-st_n} \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . En partiell integration ger nu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} f'(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( [f(t) e^{-st}]_0^{t_n} + s \int_0^{t_n} f(t) e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) e^{-st_n} - f(0) + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s\tilde{f}(s) - f(0). \quad \square\end{aligned}$$

**Korollarium 9.4.2.** Antag att  $f \in \mathcal{E}$  är  $n$  gånger kontinuerligt deriverbar och att alla derivatorna tillhör  $\mathcal{E}$ . För alla komplexa tal  $s$  med tillräckligt stor realdel är då

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k}.$$

*Anmärkning.* Derivatorna  $f^{(k)}(0)$  ska naturligtvis tolkas som högerderivator.

*Bevis.* Genom upprepad användning av sats 9.4.1 får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - f(0)s - f'(0),\end{aligned}$$

osv. □

Följande exempel illustrerar hur man använder laplacetransformering för att lösa en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

EXEMPEL 9.4.1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = -8e^{-t} \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

*Lösning:* Vi antar att lösningen  $y = y(t)$ , liksom  $y'$  och  $y''$ , har en laplace-transform. På grund av korollariet ovan är i så fall

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'](s) &= s\tilde{y}(s) - y(0) = s\tilde{y}(s) - 1 \\ \mathcal{L}[y''](s) &= s^2\tilde{y}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - s - 3.\end{aligned}$$

Linearitet ger därefter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'' + 2y' - 3y](s) &= s^2\tilde{y}(s) - s - 3 + 2(s\tilde{y}(s) - 1) - 3\tilde{y}(s) \\ &= (s^2 + 2s - 3)\tilde{y}(s) - s - 5.\end{aligned}$$

Å andra sidan visar exempel 9.2.1 att

$$\mathcal{L}[-8e^{-t} \sin 2t](s) = -8 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = -\frac{16}{s^2 + 2s + 5}.$$

Genom att jämföra laplacetransformerna till differentialekvationens vänster- och högerled erhåller vi därför ekvationen

$$(s^2 + 2s - 3)\tilde{y}(s) - s - 5 = -\frac{16}{s^2 + 2s + 5}.$$

Resultatet blev en algebraisk ekvation som vi kan lösa med avseende på  $\tilde{y}$ :

$$\tilde{y}(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}{(s-1)(s+3)(s^2 + 2s + 5)}.$$

Här ser vi inte omedelbart att högerledet är laplacetransformen till någon känd funktion, men om vi först delar upp högerledet i partialbråk, får vi

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Nu har vi tur, ty vi känner igen högerledet som laplacetransformen till funktionen  $e^t + e^{-t} \sin 2t$ . Eftersom funktionen  $y$  är entydigt bestämd av sin laplacetransform i intervallet  $[0, \infty[$ , drar vi slutsatsen att differentialekvationens lösning för  $t \geq 0$  är

$$y(t) = e^t + e^{-t} \sin 2t.$$

Naturligtvis löser i detta fall  $y(t)$  differentialekvationen på hela  $\mathbf{R}$ . □

## Övningar

9.15 Lös med hjälp av laplacetransformering systemet

$$\begin{cases} x + y' = 2e^t \\ x' - x - 2y' - y = \sin t \end{cases}$$

med begynnelsevärdena  $x(0) = 2$  och  $y(0) = 1$ .

9.16 Lös systemet

$$\begin{cases} z'' + y = 5e^{2t} \\ y'' - z = 3e^{2t}, \end{cases}$$

där  $y(0) = z(0) = 1$ ,  $y'(0) = z'(0) = 2$ .

9.17 Bestäm laplacetransformen till  $f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du$ .

## 9.5 Begynnelsevärdes- och slutvärdesregeln

När man studerar dynamiska system är man ofta intresserad av att veta hur systemet uppför sig efter lång tid, till exempel om det närmar sig ett stabilt tillstånd. Om tillståndet kan beskrivas av en funktion  $f$  så är med andra ord funktionens eventuella gränsvärde då tiden  $t$  går mot oändligheten en intressant storhet, och detta gränsvärde avspeglas i beteendet hos laplacetransformen  $\tilde{f}(s)$  då  $s \rightarrow 0^+$ . Vi har nämligen följande resultat som ger de båda gränsvärdena  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(t)$  och  $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(t)$  i termer av laplacetransformen  $\tilde{f}$ .

**Sats 9.5.1** (Begynnelsevärdes- och slutvärdesregeln). *Antag  $f \in \mathcal{E}$ .*

(a) *Om gränsvärdet  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  existerar så är*

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s).$$

(b) *Om gränsvärdet  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existerar, så är*

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\tilde{f}(s).$$

*Det är då underförstått att gränsvärdena då  $s \rightarrow \infty$  och då  $s \rightarrow 0^+$  bara tas för reella  $s$ .*

*Bevis.* Vi noterar först att  $\int_0^\infty se^{-st} dt = 1$  för alla reella positiva tal  $s$  och att därför

$$s\tilde{f}(s) - A = \int_0^\infty sf(t)e^{-st} dt - A = \int_0^\infty (f(t) - A)se^{-st} dt$$

om  $A$  är en godtycklig konstant.

Vi delar nu upp integrationsintervallet  $[0, \infty[$  i två delintervall  $I$  och  $J$ , antingen med  $I = [0, \delta]$  och  $J = [\delta, \infty[$  eller med  $I = [T, \infty[$  och  $J = [0, T]$ , och skriver i båda fallen för  $s > 0$  differensen  $s\tilde{f}(s) - A$  som en summa av tre integraler på följande vis:

$$\begin{aligned} (9.2) \quad s\tilde{f}(s) - A &= \int_I (f(t) - A)se^{-st} dt + \int_J f(t)se^{-st} dt - A \int_J se^{-st} dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

(a) För att bevisa begynnelsevärdesregeln sätter vi  $A = f(0^+)$  och väljer givet  $\epsilon > 0$  ett positivt tal  $\delta$  sådant att  $|f(t) - A| < \epsilon$  för  $0 < t \leq \delta$ . Med  $I = [0, \delta]$  och  $J = [\delta, \infty[$  blir nu

$$|I_1| \leq \int_0^\delta |f(t) - f(0^+)|se^{-st} dt \leq \epsilon \int_0^\delta se^{-st} dt < \epsilon \int_0^\infty se^{-st} dt = \epsilon,$$

medan

$$I_3 = -A \int_{\delta}^{\infty} se^{-st} dt = -Ae^{-\delta s} \rightarrow 0 \quad \text{då } s \rightarrow \infty.$$

För att uppskatta den tredje integralen  $I_2$  väljer vi först  $a > \sigma_a(f)$ , vilket medför att funktionen  $g(t) = e^{-at}f(t)$  är absolutintegrabel över intervallet  $[0, \infty[$ . Vi gör sedan omskrivningen

$$I_2 = \int_{\delta}^{\infty} f(t)se^{-st} dt = \int_{\delta}^{\infty} g(t)se^{-(s-a)t} dt.$$

Funktionerna  $t \mapsto se^{-(s-a)t}$  är för  $s \geq \max(a, 0)$  uniformt begränsade i intervallet  $[\delta, \infty[$  eftersom

$$se^{-(s-a)t} \leq se^{-(s-a)\delta} = se^{-s\delta}e^{a\delta} \leq \delta^{-1}e^{a\delta-1} \quad \text{om } s \geq \max(a, 0),$$

och

$$\lim_{s \rightarrow \infty} se^{-(s-a)t} = 0.$$

Det följer därför av satsen om dominerad konvergens att

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I_2 = \int_{\delta}^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty} g(t)se^{-(s-a)t} dt = \int_{\delta}^{\infty} 0 dt = 0.$$

För alla tillräckligt stora  $s$  är därför  $|s\tilde{f}(s) - A| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < 3\epsilon$ , vilket bevisar påståendet (a).

(b) För att bevisa slutvärdesregeln sätter vi istället  $A = f(\infty)$  och väljer givet  $\epsilon > 0$  talet  $T$  så stort att  $|f(t) - f(\infty)| < \epsilon$  för alla  $t \geq T$ . Med  $I = [T, \infty[$  och  $J = [0, T]$  blir då

$$|I_1| \leq \int_T^{\infty} |f(t) - f(\infty)|se^{-st} dt \leq \epsilon \int_T^{\infty} se^{-st} dt < \epsilon \int_0^{\infty} se^{-st} dt = \epsilon.$$

Eftersom restriktionen av  $f$  till intervallet  $J$  tillhör  $L^1(J)$  är

$$|I_2| \leq \int_0^T |f(t)|se^{-st} dt \leq s \int_0^T |f(t)| dt = s\|f\|_{L^1(J)},$$

och vi drar slutsatsen att  $I_2 \rightarrow 0$  då  $s \rightarrow 0^+$ .

Slutligen är

$$I_3 = -A \int_0^T se^{-st} dt = A(e^{-sT} - 1),$$

så  $I_3$  går också mot noll då  $s \rightarrow 0^+$ .

Det följer därför av uppdelningen (9.2) att det finns ett tal  $s_0 > 0$  sådant att  $|s\tilde{f}(s) - A| < 3\epsilon$  för  $0 < s < s_0$ , och detta bevisar slutvärdesregeln.  $\square$

## Övningar

9.18 Verifiera begynnelse- och slutvärdesregeln för funktionerna

$$\text{a) } f(t) = e^{-t} \quad \text{b) } f(t) = te^{-t} \quad \text{c) } f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

## 9.6 Kausala LTI-system

I linjära tidsinvarianta system kan sambandet mellan insignal  $x$  och utsignal  $y$  under tämligen generella villkor beskrivas av en faltning  $y = k * x$ , och i kausala system är vidare  $k(t) = 0$  för  $t < 0$ , vilket innebär att sambandet har formen

$$y(t) = \int_0^\infty k(u)x(t-u) du.$$

Om systemet befinner sig i vila fram till och med en viss tidpunkt som vi kan välja som  $t = 0$ , är insignalen  $x(t)$  lika med noll för  $t < 0$ . Likheten ovan reduceras därför för  $t \geq 0$  till

$$y(t) = \int_0^t k(u)x(t-u) du,$$

dvs. till den typ av faltning  $y = k * x$  som vi infört i samband med laplace-transformen, och genom laplacetransformering erhålls sambandet

$$\tilde{y}(s) = \tilde{k}(s)\tilde{x}(s)$$

för de ingående funktionernas laplacetransformer. Som tidigare kallas  $k$  systemets *impulssvar* medan  $\tilde{k}$  brukar kallas systemets *överföringsfunktion*.

Vi påminner om att ett dynamiskt system kallas BIBO-stabilt om begränsade insignaler resulterar i begränsade utsignaler. Det följer förstas av sats 8.3.3 att det kausala systemet  $y = k * x$  är BIBO-stabilt om

$$\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty.$$

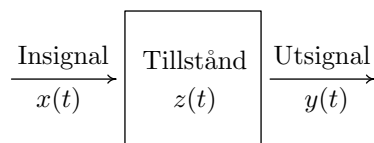
I många situationer beskriver man ett dynamiskt systems tillstånd med hjälp av en *tillståndsfunktion*  $z$ . Denna funktion är i allmänhet vektorvärd, men vi antar för enkelhets skull att  $z$  är en vanlig reellvärd funktion.

Låt oss nu anta att tillståndets påverkan av insignalen  $x(t)$  för  $t > 0$  regleras av en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter av typen

$$a_n z^{(n)}(t) + a_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = x(t)$$

där  $a_n \neq 0$ . Att systemet är i vila fram till tidpunkten  $t = 0$ , dvs. att  $z(t) = 0$  för  $t < 0$ , medför speciellt att

$$z^{(n-1)}(0) = \dots = z''(0) = z'(0) = z(0) = 0$$

**Figur 9.1.** Dynamiskt system

om tillståndsfunktionen förutsätts vara tillräckligt många gånger kontinuerligt deriverbar i origo. Differentialekvationen och begynnelsevärdena bestämmer sedan förstå systemets tillstånd entydigt.

Utsignalen  $y(t)$  antas vara beroende av systemets tillstånd på så sätt att den är en linjärkombination av derivator till  $z(t)$  av högst ordning  $n - 1$ , dvs.

$$y(t) = b_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + b_2z''(t) + b_1z'(t) + b_0z(t).$$

Låt nu  $P(s)$  och  $Q(s)$  vara polynomen

$$\begin{aligned} P(s) &= a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2 + a_1s + a_0 \quad \text{och} \\ Q(s) &= b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_2s^2 + b_1s + b_0. \end{aligned}$$

På grund av begynnelsevillkoren är  $\widetilde{z^{(k)}}(s) = s^k\tilde{z}(s)$  så genom att laplace-transformera de båda differentialekvationerna som innehåller  $x(t)$  resp.  $y(t)$  erhåller vi ekvationerna

$$P(s)\tilde{z}(s) = \tilde{x}(s) \quad \text{och} \quad \tilde{y}(s) = Q(s)\tilde{z}(s),$$

och genom att eliminera  $\tilde{z}(s)$  erhålls sambandet

$$\tilde{y}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}\tilde{x}(s)$$

mellan in- och utsignalernas laplacetransformer.

Eftersom täljaren hos den rationella funktionen  $K(s) = Q(s)/P(s)$  har lägre grad än nämnaren, är  $K(s)$  laplacetransform till en kontinuerlig funktion  $k(t)$ , och enligt sats 9.2.1 är  $\mathcal{L}[k * x](s) = \tilde{k}(s)\tilde{x}(s) = K(s)\tilde{x}(s) = \tilde{y}(s)$ . Sambandet mellan utsignal och insignal ges därför av en faltning, nämligen

$$y(t) = k * x(t) = \int_0^t k(t-u)x(u) du.,$$

och  $K$  är det kausala systemets överföringsfunktion.

**EXEMPEL 9.6.1.** Som konkret exempel betraktar vi en partikel med massa  $m$  som rör sig längs  $x$ -axeln under påverkan av en yttre kraft  $f(t)$ . Låt

$x(t)$  beteckna partikelns läge vid tidpunkten  $t$ , och antag att den är i vila då  $t \leq 0$ . Låt oss slutligen använda läget som den observerade variabeln (utsignalen)  $y$ .

Enligt Newtons rörelselag beskrivs systemets tillstånd av differential-ekvationen  $mx''(t) = f(t)$ , medan  $y(t) = x(t)$ . I föreliggande situation är således  $P(s) = ms^2$ ,  $Q(s) = 1$ ,  $K(s) = Q(s)/P(s) = 1/ms^2$  och  $k(t) = t/m$ . Sambandet mellan kraft (insignal)  $f$  och läge (utsignal)  $x$  ges således av faltningen

$$x(t) = k * f(t) = m^{-1} \int_0^t (t-u)f(u) du. \quad \square$$

Nollställena till nämnaren  $Q(z)$  i en rationell funktion  $P(z)/Q(z)$  som förkortats så att  $P(z)$  och  $Q(z)$  saknar gemensamma nollställen, kallas den rationella funktionens *poler*. Om  $z_0$  är en pol till den rationella funktionen  $R(z)$  så är uppenbarligen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |R(z)| = +\infty.$$

För kausala LTI-system med rationella överföringsfunktioner kan vi enkelt avgöra om systemen är BIBO-stabila eller ej genom att studera överföringsfunktionernas poler. Vi har nämligen följande sats.

**Sats 9.6.1.** *Ett kausalt linjärt tidsinvariant system med rationell överföringsfunktion är BIBO-stabilt om och endast om överföringsfunktionen inte har några poler i halvplanet  $\operatorname{Re} s \geq 0$ .*

*Bevis.* Betrakta ett kausalt linjärt system med rationell överföringsfunktion. Genom partialbråksutveckling kan överföringsfunktionen  $K(s)$  skrivas som en linjärkombination av bråk av typen  $(s-c)^{-n}$ , där  $c$  är en pol till  $K(s)$  och  $n \geq 1$  är polens ordning, och impulssvaret  $k(t)$  är en linjärkombination av motsvarande funktioner  $t^{n-1}e^{ct}$ . För alla poler  $c$  med negativ realdel är

$$\int_0^\infty |t^{n-1}e^{ct}| dt < \infty,$$

och om alla poler har negativ realdel uppfyller följaktligen linjärkombinationen  $k(t)$  villkoret  $\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty$ , vilket visar att systemet  $y = k * x$  är BIBO-stabilt i detta fall.

För att bevisa omvändningen, dvs. att systemet inte är BIBO-stabilt om överföringsfunktionen har en pol i det slutna halvplanet  $\operatorname{Re} s \geq 0$  noterar vi först att laplacetransformen  $\tilde{f}(s)$  till en begränsad funktion  $f$  är definierad och analytisk i det öppna halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$  eftersom konvergensabskissan  $\sigma_a(f)$  är  $\leq 0$ . Vidare är funktionen  $(\operatorname{Re} s)\tilde{f}(s)$  begränsad i samma halvplan av konstanten  $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$  på grund av olikheten

$$|\tilde{f}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st} dt \leq \int_0^\infty \|f\|_\infty e^{-\sigma t} dt = \sigma^{-1} \|f\|_\infty.$$



Om laplacetransformen  $\tilde{y}(s)$  till en signal  $y$  har en pol i halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$  eller om

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma |\tilde{y}(\sigma + bi)| = +\infty$$

för något reellt tal  $b$ , så kan följaktligen signalen  $y$  inte vara begränsad.

Antag nu att systemets överföringsfunktion  $K$  har en pol  $c$  i det öppna halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$ . Då resulterar den begränsade insignalen  $H$ , där  $H$  är Heavisidefunktionen, i en obegränsad utsignal  $y$ , eftersom laplacetransformen  $\tilde{y}(s) = K(s)s^{-1}$  då också har en pol i  $c$  och följaktligen inte är definierad i hela det öppna halvplanet.

Om  $K$  istället har en pol  $bi$  på den imaginära axeln, så är utsignalen  $y$  till den begränsade insignalen  $e^{ibt}$  obegränsad, ty för laplacetransformen  $\tilde{y}(s) = K(s)(s - bi)^{-1}$  gäller i detta fall att

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma |\tilde{y}(\sigma + bi)| = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + b^2}} |K(\sigma + bi)| = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |K(\sigma + bi)| = +\infty.$$

Därmed är beviset klart.  $\square$

## Övningar

- 9.19 Bestäm överföringsfunktion och impulssvar för det kausala systemet  $y = k * x$  om sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av differentialekvationen

$$\begin{cases} z'''(t) + 4z''(t) + 5z'(t) + 2z(t) = x(t) \\ 2z'(t) + z(t) = y(t) \\ z''(0) = z'(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

Är systemet BIBO-stabilt?

- 9.20 Bestäm överföringsfunktion och impulssvar för det kausala systemet  $y = k * x$  om sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av differentialekvationen

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = x(t) \\ y'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Är systemet BIBO-stabilt?

- 9.21 Avgör om det kausala LTI-systemet  $y = k * x$  är BIBO-stabilt för följande impulssvar:

a)  $k(t) = \cos t$     b)  $k(t) = t^2 e^{-2t} \sin t$     c)  $k(t) = \chi_{[0,1]}(t)$   
 d)  $k(t) = \frac{1}{t^2 + 1}.$

9.22 Visa, t. ex. genom att betrakta utsignalens värden i punkterna  $2n\pi$  för insignalen  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n\pi, (n+1)\pi[}(t)$ , att LTI-systemet  $y = k * x$  är BIBO-instabilt om

$$\text{a) } k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n\pi, (n+1)\pi[}(t) \quad \text{b) } k(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

## 9.7 Laplacetransformen för mått

Vi har tidigare förklarat vad som menas med integralen  $\int_{\mathbf{R}} f(t) d\mu(t)$  över hela  $\mathbf{R}$  av en funktion  $f$  med avseende på ett (ändligt) mått  $\mu$ . Integralen  $\int_E f(t) d\mu(t)$  över ett delmängd  $E$  av den reella axeln återför vi nu på definitionen av en integral över hela  $\mathbf{R}$  genom att sätta funktionen  $f$  lika med noll utanför mängden  $E$ , dvs.

$$\int_E f(t) d\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \chi_E(t) d\mu(t).$$

Speciellt är alltså

$$\int_{[0, \infty[} f(t) d\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t) H(t) d\mu(t)$$

där  $H(t)$  är Heavisidefunktionen, men vi skriver fortsättningsvis

$$\int_0^{\infty} f(t) d\mu(t)$$

istället för  $\int_{[0, \infty[} f(t) d\mu(t)$ .

Utvidgningen av definitionsområdet för laplacetransformen till mått sker nu på ett uppenbart sätt: Om  $\mu$  är ett mått på  $\mathbf{R}$  så definieras dess *laplace-transform*  $\tilde{\mu}(s)$  som

$$\tilde{\mu}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mu(t).$$

För ändliga mått  $\mu$ , som är den typ av mått som vi har behandlat, existerar säkert laplacetransformen  $\mu(s)$  för alla komplexa tal  $s$  med realdel  $\operatorname{Re} s \geq 0$ , och man kan visa att funktionen  $\tilde{\mu}$  är begränsad och oändligt deriverbar i det öppna halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$ .

EXEMPEL 9.7.1. Diracmåttet  $\delta_a$ , där  $a \geq 0$ , har laplacetransformen

$$\tilde{\delta}_a(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta_a(t) dt = e^{-as}.$$

Speciellt har således  $\delta$ , Diracmåttet i origo, den konstanta funktionen 1 som laplacetransform.  $\square$

En funktions laplacetransform ger bara information om funktionens restriktion till icke-negativa reella axeln  $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$ . På motsvarande sätt ger laplacetransformen till ett mått bara information om den del av måttet som "lever" på  $\mathbf{R}_+$ . Låt oss säga att ett mått  $\mu$  är *koncentrerat* i mängden  $E$  om

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) d\mu(t) = 0$$

för alla begränsade kontinuerliga funktioner  $f$  som är lika med noll på  $E$ . Exempelvis är Diracmåttet  $\delta_a$  koncentrerat i punkten  $a$ .

Man kan nu visa följande entydighetssats.

**Sats 9.7.1.** *Two ändliga mått som är koncentrerade i (delmängder till) icke-negativa reella axeln  $[0, \infty[$ , är lika om de har samma laplacetransform.*

## Övningar

9.23 Bestäm laplacetransformen till måttet  $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta_n$ .

9.24 Verifiera transformeringsregeln  $\widetilde{\mu * \nu}(s) = \tilde{\mu}(s) \tilde{\nu}(s)$  för mått.

9.25 Bestäm impulssvar och överföringsfunktion för LTI-systemet

$$y(t) = x(t) + 2x(t-1),$$

där  $x(t) = 0$  för  $t \leq 0$ .

## Historiska notiser

Laplacetransformen har fått sitt namn efter Laplace som härledde några av dess egenskaper och använde transformen i sina sannolikheteoretiska arbeten och för att bestämma lösningar till värmeledningsekvationen då området är obegränsat.



# Kapitel 10

## Z-transformen

### 10.1 Definition och egenskaper

Z-transformen används för att studera följder  $(a_n)_0^\infty$  som inte blir alltför stora då  $n$  går mot oändligheten. Låt oss börja med att definiera detta villkor ordentligt.

**Definition.** En följd  $a = (a_n)_0^\infty$  av komplexa tal säges ha en tillväxt som är *högst exponentiell*, eller tillhöra klassen  $\mathcal{E}$ , om det finns två positiva konstanter  $K$  och  $r$  sådana att

$$|a_n| \leq Kr^n \quad \text{för alla } n.$$

Om  $(a_n)_0^\infty$  och  $(b_n)_0^\infty$  är två följder i  $\mathcal{E}$  och  $\lambda$  är ett godtyckligt komplext tal, så ligger summaföljden  $(a_n + b_n)_0^\infty$  och produktföljden  $(\lambda a_n)_0^\infty$  också i klassen  $\mathcal{E}$ . Detta betyder att  $\mathcal{E}$  är ett vektorrum.

**Definition.** För komplexa följder  $a = (a_n)_0^\infty$  i klassen  $\mathcal{E}$  definieras *z-transformen*  $\mathcal{Z}[a](z)$  som den oändliga serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

där  $z$  är en komplex variabel.

Villkoret att  $a$  tillhör  $\mathcal{E}$  garanterar att det finns ett icke-negativt tal  $\rho_a$  sådant att z-transformen  $\mathcal{Z}[a](z)$  är absolutkonvergent för  $|z| > \rho_a$  och divergent för  $|z| < \rho_a$ . Genom variabelbytet  $t = 1/z$  överförs nämligen z-transformen  $\mathcal{Z}[a](z)$  i potensserien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ , och villkoret att koefficientföljden är högst exponentiellt växande garanterar att potensserien har en konvergensradie  $R$  som är positiv eller  $+\infty$ . Översatt till z-transformen betyder detta att z-transformen är absolutkonvergent om  $|z| > 1/R$  och divergent om  $|z| < 1/R$ .

Av resultaten för potensserier följer vidare att z-transformen definierar en funktion som är oändligt många gånger deriverbar i området  $|z| > \rho_a$  och att derivatorna fås genom att derivera serien termvis.

Den genom variabelbytet  $t = 1/z$  erhållna potensserien innehåller naturligtvis samma information som z-transformen. Man skulle därför lika gärna kunna arbeta med potensserier som med z-transformer, men analogin med laplacetransformen blir bättre om man definierar z-transformen som vi gjort ovan.

EXEMPEL 10.1.1. Låt  $\lambda$  vara ett godtyckligt komplext tal. Följden  $(\lambda^n)_0^\infty$  tillhör förstas klassen  $\mathcal{E}$ , och dess z-transform är

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \lambda/z} = \frac{z}{z - \lambda}$$

för  $|z| > \lambda$ . □

Ett för alla tillämpningar väsentligt faktum är att z-transformen bestämmer talföljden entydigt. Detta är kontentan av följande sats.

**Sats 10.1.1** (Entydighetssatsen). *Z-transformen är en injektiv avbildning, dvs. om  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $b = (b_n)_0^\infty$  är två följder i  $\mathcal{E}$  och  $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$  för alla  $z$  utanför någon cirkel i komplexa talplanet, så är  $a = b$ .*

*Anmärkning.* Det räcker att veta att  $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$  för alla reella tal  $z$  som är större än något tal, eller till och med bara att  $\mathcal{Z}[a](z_n) = \mathcal{Z}[b](z_n)$  för någon följd  $(z_n)_0^\infty$  av tal som går mot oändligheten då  $n \rightarrow \infty$ , för att dra slutsatsen att  $a = b$ . Detta följer av att z-transformen är en s. k. analytisk funktion.

*Bevis.* Om  $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$  för alla  $z$  utanför någon cirkel så är motsvarande potensserier  $\mathcal{Z}[a](1/t)$  och  $\mathcal{Z}[b](1/t)$  lika för alla  $t$  i någon (punkterad) omgivning av  $t = 0$ , och härav följer på grund av entydighetssatsen för potensserier att  $a_n = b_n$  för alla  $n$ . □

En annan enkel observation är att Z-transformen är en linjär avbildning.

**Sats 10.1.2.** *Z-transformen är linjär, dvs. om  $a, b \in \mathcal{E}$  och  $\lambda, \mu$  är komplexa tal så är*

$$\mathcal{Z}[\lambda a + \mu b](z) = \lambda \mathcal{Z}[a](z) + \mu \mathcal{Z}[b](z)$$

*för alla  $z$  för vilka högerledet existerar.*

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\lambda a + \mu b](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^{-n} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \\ &= \lambda \mathcal{Z}[a](z) + \mu \mathcal{Z}[b](z). \end{aligned} \quad \square$$

Om  $(a_n)_0^\infty$  är en följd som växer högst exponentiellt, så har förstås också följden  $(\lambda^n a_n)_0^\infty$  samma egenskap för varje komplext tal  $\lambda$ , och sambandet mellan dessa båda följders z-transformer ges av nästa sats.

**Sats 10.1.3.** Om  $a = (a_n)_0^\infty$  är en följd i  $\mathcal{E}$  och  $\lambda$  är ett nollskilt komplext tal, så är

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n a_n)](z) = \mathcal{Z}[a](z/\lambda).$$

*Bevis.*  $\mathcal{Z}[(\lambda^n a_n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z/\lambda)^{-n} = \mathcal{Z}[a](z/\lambda). \quad \square$

EXEMPEL 10.1.2. Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess z-transform är

$$A(z) = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

*Lösning.* Enligt entydighetssatsen finns det högst en sådan följd, och för att bestämma den börjar vi med att bryta ut faktorn  $z$  och partialbråksuppdelar sedan det resterande bråket:

$$A(z) = z \cdot \frac{z^2 - 4z + 7}{(z-1)(z-2)(z-3)} = z \cdot \left( \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} \right).$$

Man finner lätt att koefficienterna är  $A = 2$ ,  $B = -3$  och  $C = 2$ , varför

$$A(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} - 3 \cdot \frac{z}{z-2} + 2 \cdot \frac{z}{z-3}.$$

Enligt exempel 10.1.1 är  $z/(z-\lambda)$  z-transform till följden  $(\lambda^n)$ , och om vi kombinerar detta faktum med linearitet, drar vi slutsatsen att den sökta följden är

$$a_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n. \quad \square$$

En naturlig generalisering av exempel 10.1.2 är att för alla rationella funktioner  $P(z)/Q(z)$  som är z-transformer, bestämma motsvarande följd. Ett nödvändigt villkor för att en rationell funktion ska vara z-transform är att täljarens gradtal inte är större än nämnarens; detta följer med en gång av följande sats.

**Sats 10.1.4.** För alla följder  $a = (a_n)_0^\infty$  i  $\mathcal{E}$  är  $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}[a](z) = a_0$ .

*Bevis.* Variabelbytet  $z = 1/t$  och det faktum att potensserier är kontinuerliga funktioner medför att

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0. \quad \square$$

Exempel 10.1.1 ger oss den inversa följderna till transformen  $z/(z - \lambda)$ , men för att komma vidare behöver vi också identifiera den inversa följderna till z-transformen  $z/(z - \lambda)^k$  för heltal  $k$  som är större än 1. Följande sats hjälper oss med detta. Vi påminner om att binomialkoefficienterna  $\binom{n}{k}$  ges av formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Observera att denna formel är meningsfull även för naturliga tal  $n$  som är mindre än  $k$  och att  $\binom{n}{k} = 0$  om  $0 \leq n < k$ .

**Sats 10.1.5.** Antag att  $a = (a_n)_0^\infty$  är en följd i  $\mathcal{E}$  med z-transform  $A(z)$  och sätt

$$b_n = \binom{n}{k} a_n,$$

där  $k$  är ett positivt heltal. Då ligger följderna  $b = (b_n)_0^\infty$  i  $\mathcal{E}$  och dess z-transform är

$$\mathcal{Z}[b](z) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)).$$

Speciellt är alltså

$$\mathcal{Z}[(na_n)](z) = -zA'(z).$$

*Bevis.* Det följer av binomialsatsen att  $\binom{n}{k} \leq (1+1)^n = 2^n$ , och denna olikhet medför förstas att följderna  $(b_n)_0^\infty$  tillhör  $\mathcal{E}$ . För att bestämma följdernas z-transform börjar vi med att derivera sambandet

$$z^{k-1} A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-(n-k+1)}$$

$k$  gånger; detta resulterar i formeln

$$\frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} (n-k+1)(n-k+2) \cdots n a_n z^{-(n+1)}$$

Genom att multiplicera båda sidorna i formeln ovan med  $(-1)^k z$  och dividera med  $k!$  erhålls den sökta formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n z^{-n} = \frac{(-1)^k z}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)). \quad \square$$

**Korollarium 10.1.6.** Följderna  $((\binom{n}{k} \lambda^{n-k})_{n=0}^\infty)$  har z-transform  $\frac{z}{(z - \lambda)^{k+1}}$ .

*Bevis.* Vi använder föregående sats på följderna  $(1, 1, 1, \dots)$  bestående av idel ettor och som har z-transform  $z/(z - 1)^{-1}$ . Detta ger att

$$\mathcal{Z}[(\binom{n}{k})](z) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{z^k}{z-1} \right) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{z^k - 1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \right).$$



Nu är

$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = z^{k-1} + z^{k-2} + \dots + z + 1$$

ett polynom i  $z$  av grad  $k - 1$ , så därför är  $k$ :te derivatan av denna del lika med noll. Det följer att

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[(\binom{n}{k})](z) &= \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{1}{z-1} \right) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{(z-1)^{k+1}} \\ &= \frac{z}{(z-1)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Detta visar korollariet i fallet  $\lambda = 1$ . Det allmänna fallet fås ur detta specialfall med hjälp av sats 10.1.3, som ger

$$\mathcal{Z}[(\binom{n}{k} \lambda^n)](z) = \frac{z/\lambda}{(z/\lambda - 1)^{k+1}} = \frac{\lambda^k z}{(z - \lambda)^{k+1}},$$

varur formeln i korollariet följer efter division med  $\lambda^k$ .  $\square$

Vi kan nu avgöra vilka rationella funktioner som är  $z$ -transformer och i princip också bestämma motsvarande följder.

**Sats 10.1.7.** *En rationell funktion  $R(z) = P(z)/Q(z)$  är  $z$ -transform till en följd i  $\mathcal{E}$  om och endast om polynomet  $P(z)$  har ett gradtal som inte överstiger gradtalet hos polynomet  $Q(z)$ .*

*Bevis.* Vi vet redan att villkoret på gradtalen är nödvändigt – för att bevisa att det också är tillräckligt antar vi att  $P(z)$  har ett gradtal som högst är lika med gradtalet hos  $Q(z)$ . Vi skriver den rationella funktionen  $R(z)$  på formen

$$R(z) = z \cdot \frac{P(z)}{zQ(z)}$$

och faktoreriserar polynomet  $zQ(z)$ :

$$zQ(z) = z^{m_0}(z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_k)^{m_k}.$$

Här är  $0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  de komplexa nollställena till polynomet  $zQ(z)$ , och  $m_0, m_1, \dots, m_k$  är nollställenas multiplicitet.

Eftersom gradtalet hos nämnaren  $zQ(z)$  är strikt större än gradtalet hos täljaren  $P(z)$ , kan den rationella funktionen  $P(z)/zQ(z)$  skrivas som en summa av partialbråk av typen

$$\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_{m_0}}{z^{m_0}}$$

och

$$\frac{B_1}{z - \lambda_i} + \frac{B_2}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{B_{m_i}}{(z - \lambda_i)^{m_i}},$$

där varje nollställe  $\lambda_i$  ger en summa av det sistnämnda slaget.

Genom att multiplicera tillbaka  $z$  ser vi att den rationella funktionen  $R(z)$  är en summa av uttryck av följande slag:

$$A_1 + \frac{A_2}{z} + \dots + \frac{A_{m_0}}{z^{m_0-1}}$$

och

$$\frac{B_1 z}{z - \lambda_i} + \frac{B_2 z}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{B_{m_i} z}{(z - \lambda_i)^{m_i}}.$$

Den förstnämnda summan är z-transform till följden

$$(10.1) \quad (A_1, A_2, \dots, A_{m_0}, 0, 0, \dots)$$

medan den andra summan är z-transform till en följd vars  $n$ -te term är

$$(10.2) \quad B_1 \lambda_i^n + B_2 \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} + \dots + B_{m_i} \binom{n}{m_i-1} \lambda_i^{n-(m_i-1)}.$$

På grund av linearitet är därför  $R(z)$  z-transform till den följd som fås genom att lägga ihop följden (10.1) med alla följderna (10.2).  $\square$

EXEMPEL 10.1.3. Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess z-transform är

$$A(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z - 3)^4}.$$

*Lösning.* Vi börjar med att bryta ut  $z$  ur täljaren och partialbråksuppdelar sedan det resterande bråket:

$$A(z) = z \cdot \frac{z + 4}{(z - 3)^4} = z \cdot \left( \frac{7}{(z - 3)^4} + \frac{1}{(z - 3)^3} \right) = 7 \cdot \frac{z}{(z - 3)^4} + \frac{z}{(z - 3)^3}.$$

Det följer nu av korollarium 10.1.6 att

$$a_n = 7 \binom{n}{3} 3^{n-3} + \binom{n}{2} 3^{n-2},$$

vilket kan förenklas till

$$a_n = \frac{1}{2} (7n^3 - 12n^2 + 5n) 3^{n-4}. \quad \square$$

EXEMPEL 10.1.4. Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess z-transform är

$$A(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - 2)(z^2 - 2z + 5)}.$$

*Lösning.* Eftersom det inte finns någon faktor  $z$  att bryta ut ur täljaren börjar vi med att förlänga bråket  $A(z)$  med  $z$  och skriver det på formen

$$A(z) = z \cdot \frac{z^2 + 1}{z(z - 2)(z^2 - 2z + 5)}$$

med avsikten att först partialbråksuppdelna den andra faktorn i ovanstående uttryck. Polynomet  $z^2 - 2z + 5$  har komplexa nollställena  $z = 1 \pm 2i$ , så dess faktorisering är  $(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$ . Detta betyder att vi har en partialbråksuppdelning av följande slag

$$\frac{z^2 + 1}{z(z - 2)(z^2 - 2z + 5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 2} + \frac{C}{z - 1 - 2i} + \frac{D}{z - 1 + 2i},$$

och koefficientbestämning ger

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{10}(2 + i), \quad D = -\frac{1}{10}(2 - i) = \overline{C}.$$

Följaktligen är

$$A(z) = A + B \frac{z}{z - 2} + C \frac{z}{z - 1 - 2i} + D \frac{z}{z - 1 + 2i},$$

och

$$a_n = A \delta_n + B 2^n + C (1 + 2i)^n + D (1 - 2i)^n,$$

där  $\delta = (\delta_n)_0^\infty$  betecknar följden

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{för } n = 0, \\ 0 & \text{för övriga } n. \end{cases}$$

Följden  $(a_n)_0^\infty$  är reell beroende på att  $D(1 - 2i)^n = \overline{C}(1 - 2i)^n = \overline{C(1 + 2i)^n}$ , vilket medför att  $C(1 + 2i)^n + D(1 - 2i)^n = 2 \operatorname{Re}(C(1 + 2i)^n)$ , och att således

$$a_n = -\frac{1}{10} \delta_n + 2^{n-1} - \frac{1}{5} \operatorname{Re}((2 + i)(1 + 2i)^n).$$

Vi kommer fram till en alternativ form för  $a_n$  genom att först skriva de komplexa talen  $1 + 2i$  och  $2 + i$  på polär form:

$$\begin{aligned} 1 + 2i &= \sqrt{5} e^{i\alpha}, \quad \alpha = \arg(1 + 2i) = \arctan 2, \\ 2 + i &= \sqrt{5} e^{i\beta}, \quad \beta = \arg(2 + i) = \arctan \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Det följer att

$$(2 + i)(1 + 2i)^n = \sqrt{5} e^{i\beta} \cdot \sqrt{5}^n e^{in\alpha} = \sqrt{5}^{n+1} e^{i(n\alpha + \beta)},$$

och att följaktligen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((2 + i)(1 + 2i)^n) &= \sqrt{5}^{n+1} \cos(n\alpha + \beta) \\ &= \sqrt{5}^{n+1} (\cos n\alpha \cos \beta - \sin n\alpha \sin \beta) \\ &= \sqrt{5}^{n+1} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \cos n\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin n\alpha \right) \\ &= \sqrt{5}^n (2 \cos n\alpha - \sin n\alpha). \end{aligned}$$

Detta betyder att

$$a_n = -\frac{1}{10} \delta_n + 2^{n-1} - \sqrt{5}^{n-2} (2 \cos n\alpha - \sin n\alpha). \quad \square$$

## Övningar

10.1 Bestäm z-transformen till följande följder  $(a_n)_0^\infty$ :

a)  $a_n = 2^{-n}$       b)  $a_n = n \cdot 3^n$       c)  $a_n = n^2 \cdot 2^n$

10.2 Bestäm z-transformen till följden  $(a_n)_0^\infty$  om

a)  $a_{2k} = (-1)^{k-1}$  för  $k \geq 1$  och  $a_n = 0$  för övriga  $n$ ;

b)  $a_{2k} = (k-1)(-1)^k$  för  $k \geq 1$  och  $a_n = 0$  för övriga  $n$ .

10.3 Bestäm z-transformen till följden  $(1/(n+1))_0^\infty$ .

10.4 Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess z-transform är

a)  $\frac{z}{3z-2}$       b)  $\frac{1}{z}$       c)  $\frac{3z^3 - 8z^2 + 16z}{(z-2)^2(z+1)}$ .

## 10.2 Translation och differensekvationer

Två viktiga operationer på rummet av alla följder  $(a_n)_0^\infty$  är *vänstertranslation*  $L$  och *högertranslation*  $R$ , som definieras på följande vis:

$$L(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

$$R(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Vänstertranslationen förskjuter följden ett steg åt vänster varvid första elementet  $a_0$  faller bort, medan högertranslationen förskjuter följden ett steg åt höger och introducerar en nolla på den första platsen (dvs. platsen med index 0).

Om vi sätter  $a_{-1} = 0$ , så är tydligen

$$R(a_n)_0^\infty = (a_{n-1})_0^\infty,$$

och för att slippa liknande påpekanden i fortsättningen inför vi nu följande konvention:

*Följder  $(a_n)_0^\infty$  som från början bara är definierade för icke-negativa index  $n$ , utvidgas till att vara definierade för alla heltalsindex genom definitionen  $a_n = 0$  för alla negativa index  $n$ .*

Vänster- och högertranslation är uppenbarligen linjära avbildningar på rummet av alla följder. Om  $a$  är en följd som växer högst exponentiellt, så har givetvis också de båda translaterade följderna  $La$  och  $Ra$  samma egenskaper. (Om  $(a_n)_0^\infty$  uppfyller tillväxtvillkoret  $|a_n| \leq Kr^n$ , så uppfyller de båda följderna  $(a_{n+1})_0^\infty$  och  $(a_{n-1})_0^\infty$  villkoret med samma  $r$  men med  $K$  ersatt av  $Kr$  resp.  $K/r$ .) Detta innebär att vi kan uppfatta translationerna  $L$  och  $R$  som operatorer på vektorrummet  $\mathcal{E}$ .

Genom att upprepa avbildningarna  $L$  resp.  $R$  flera gånger kan vi translatera flera steg åt vänster resp. höger:

$$L^k(a_n)_0^\infty = (a_{n+k})_0^\infty \quad \text{och} \quad R^k(a_n)_0^\infty = (a_{n-k})_0^\infty.$$

Vår nästa sats beskriver hur  $z$ -transformen förhåller sig till translation.

**Sats 10.2.1.** För alla följder  $a \in \mathcal{E}$  är

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[R^k a](z) &= z^{-k} \mathcal{Z}[a](z) \quad \text{och} \\ \mathcal{Z}[L^k a](z) &= z^k \mathcal{Z}[a](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \dots - a_{k-1} z. \end{aligned}$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[R^k a](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{-(n-k)} \\ &= z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m} = z^{-k} \mathcal{Z}[a](z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[L^k a](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{-(n+k)} = z^k \sum_{m=k}^{\infty} a_m z^{-m} \\ &= z^k \left( \mathcal{Z}[a](z) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m z^{-m} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Som tillämpning på föregående sats visar vi hur man kan använda  $z$ -transformen för att lösa linjära differensekvationer.

**EXEMPEL 10.2.1.** Lös differensekvationen

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4,$$

med begynnelsevillkoren  $a_0 = 1$  och  $a_1 = 2$ .

*Lösning.* Med hjälp av de givna begynnelsevillkoren kan vi bestämma talen  $a_2, a_3, a_4, \dots$  rekursivt på ett entydigt sätt, så differensekvationen har en entydig lösning  $a = (a_n)_0^\infty$ . Låt  $A(z)$  beteckna lösningsföljdens  $z$ -transform. De båda vänstertranslaterade följderna  $(a_{n+1})_0^\infty$  och  $(a_{n+2})_0^\infty$  har då  $z$ -transformerna  $zA(z) - z$  resp.  $z^2 A(z) - z^2 - 2z$ .  $z$ -transformen till följden i differensekvationens vänsterled är därför på grund av linearitet lika med

$$z^2 A(z) - z^2 - 2z - 5(zA(z) - z) + 6A(z) = (z^2 - 5z + 6)A(z) - z^2 + 3z$$

medan  $z$ -transformen till den konstanta följden 4 i högerledet ges av exempel 10.1.1 (med  $\lambda = 1$ ) och är  $4z/(z-1)$ . Följaktligen är

$$(z^2 - 5z + 6)A(z) - z^2 + 3z = \frac{4z}{z-1},$$

vilket leder till att

$$(z^2 - 5z + 6)A(z) = z^2 - 3z + \frac{4z}{z-1} = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{z-1};$$

$$A(z) = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

I exempel 10.1.2 fann vi att  $A(z)$  är z-transform till följden

$$a_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n,$$

som därför också är differensekvationens lösning.  $\square$

## Övningar

10.5 Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 0$  och  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -1$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

10.6 Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  och  $a_{n+2} + a_n = 2n + 4$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

10.7 Lös följande system av linjära differensekvationer med begynnelsevärdena  $a_0 = b_0 = 1$ :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n \\ b_{n+1} = -6a_n + b_n. \end{cases}$$

## 10.3 Faltning

När två potensserier

$$A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$$

och

$$B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots$$

multipliceras med varandra blir resultatet en ny potensserie

$$C(t) = A(t)B(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots,$$

och koefficienterna i den nya serien ges av att

$$c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \quad c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

och allmänt

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}.$$

Detta sätt att av två följder  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $b = (b_n)_0^\infty$  bilda en ny följd  $c = (c_n)_0^\infty$  kallas *faltning* och man skriver

$$c = a * b.$$

Man kan visa att om två potensserier  $A(t)$  och  $B(t)$  är konvergenta i en cirkelskiva  $|t| < R$ , så är säkert också potensserien för deras produkt  $C(t) = A(t)B(t)$  konvergent i samma cirkelskiva. Detta innebär att följden  $c = a * b$  växer högst exponentiellt om de båda följderna  $a$  och  $b$  växer högst exponentiellt. Eftersom vidare  $C(1/z) = A(1/z) \cdot B(1/z)$  och  $A(1/z)$ ,  $B(1/z)$  och  $C(1/z)$  är  $z$ -transformerna till de tre följderna  $a$ ,  $b$  och  $a * b$ , har vi kommit fram till följande sats:

**Sats 10.3.1.** Om  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $b = (b_n)_0^\infty$  är två följder i  $\mathcal{E}$ , så ligger faltningen  $a * b$  också i  $\mathcal{E}$ , och för de tre följdernas  $z$ -transformer gäller sambandet

$$\mathcal{Z}[a * b](z) = \mathcal{Z}[a](z) \cdot \mathcal{Z}[b](z).$$

En faltning  $a * b$  kan också skrivas som en linjärkombination av högertranslat till följden  $b$ . Låt som tidigare  $R$  beteckna högertranslationsoperatoren; då är  $b_{n-k} = (R^k b)_n$  och följaktligen

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k (R^k b)_n$$

för alla index  $n$ . Med vår konvention att  $(R^k b)_n = b_{n-k} = 0$  för  $k > n$  kan vi skriva denna summa som en oändlig summa

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (R^k b)_n,$$

vilket betyder att

$$a * b = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k b.$$

Observera att det inte finns några problem med konvergens eftersom summan ovan i realiteten är ändlig för varje fixt koordinatindex  $n$ .

## Övningar

10.8 Bestäm följden  $(x_n)_0^\infty$  om

- a)  $\sum_{k=0}^n 3^{-k} x_{n-k} = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- b)  $x_n + 2 \sum_{k=0}^n (n-k) x_k = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

## 10.4 Diskreta kausala LTI-system

Diskreta svarta lådor diskuterades redan i inledningskapitlet, men nu kan vi säga lite mer om dem. Vi börjar med att repetera några definitioner.

Ett diskret dynamiskt system är en funktion  $T$  som till varje följd  $x = (x_n)_0^\infty$  associerar en följd  $T(x) = y = (y_n)_0^\infty$ . Systemet kallas

- *linjärt* om

$$T(\alpha x + \alpha' x') = \alpha T(x) + \alpha' T(x').$$

för alla följder  $x$  och  $x'$  och alla komplexa tal  $\alpha$  och  $\alpha'$ ;

- *tidsinvariant* om

$$T(R^k x) = R^k T(x).$$

för alla följder  $x$  och alla naturliga tal  $k$ ;

- *kausalt* om det för alla följder  $x$  och  $x'$  och alla index  $n$  gäller att  $x_n = x'_n$  för  $0 \leq k \leq n$  medför att  $T(x)_n = T(x')_n$ .

Ett tidsinvariant system fungerar med andra ord likadant oavsett när det startas, och i ett kausalt system är utsignalens värde vid varje tidpunkt oberoende av insignalens framtida värden.

Diskreta kausala LTI-system karakteriseras fullständigt av följande sats.

**Sats 10.4.1.** Låt  $T$  vara ett diskret kausalt LTI-system och sätt  $a = T(\delta)$ , där  $\delta$  är följden  $(1, 0, 0, \dots)$ . Då är

$$T(x) = a * x$$

för alla  $x$ .

Omvänt är varje system som ges av en faltning av ovanstående slag ett kausalt LTI-system.

I signalteorisammanhang kallas  $\delta$  en *impuls* och  $a$  är *impulssvaret*.

*Bevis.* Vi ska visa att  $T(x)_n = (a * x)_n$  för alla index  $n$  och beräknar då först  $T(x')$  för följden

$$x' = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots).$$

På grund av kausaliteten är nämligen  $T(x)_n = T(x')_n$ .

Eftersom  $R\delta = (0, 1, 0, 0, \dots)$ ,  $R^2\delta = (0, 0, 1, 0, \dots)$ , osv., kan vi uttrycka följden  $x'$  som en summa på följande vis:

$$x' = x_0\delta + x_1R\delta + x_2R^2\delta + \dots + x_nR^n\delta.$$

Linearitet och tidsinvarians medför nu att

$$\begin{aligned} T(x') &= x_0T(\delta) + x_1T(R\delta) + x_2T(R^2\delta) + \dots + x_nT(R^n\delta) \\ &= x_0T(\delta) + x_1RT(\delta) + x_2R^2T(\delta) + \dots + x_nR^n(T\delta) = \sum_{k=0}^n x_k R^k a, \end{aligned}$$



och för den  $n$ :te koordinaten gäller därför att

$$T(x)_n = T(x')_n = \sum_{k=0}^n x_k (R^k a)_n = \sum_{k=0}^n x_k a_{n-k} = (x * a)_n = (a * x)_n.$$

Därmed är beviset för att  $T(x) = a * x$  klart.

Omvändningen, dvs. att faltning är en linjär, tidsinvariant och kausal operation lämnas som övning åt läsaren.  $\square$

För diskreta kausala LTI-system har vi följande karakterisering av BIBO-stabilitet.

**Sats 10.4.2.** *Systemet  $Tx = a * x$  är stabilt om och endast om  $\sum_n |a_n| < \infty$ .*

*Bevis.* För godtyckliga följder  $z = (z_n)_{n=0}^\infty$  inför vi beteckningarna

$$\|z\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |z_n| \quad \text{och} \quad \|z\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |z_n|.$$

För  $y = Tx = a * x$  gäller då speciellt olikheten

$$|y_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k x_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |x_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \|x\|_\infty \leq \|a\|_1 \|x\|_\infty$$

som innebär att

$$\|a * x\|_\infty \leq \|a\|_1 \|x\|_\infty.$$

Om  $\|a\|_1 < \infty$  och insignalen  $x$  är en begränsad följd (med  $\|x\|_\infty = C$ ) så är följaktligen utsignalen  $y$  också en begränsad följd (med  $\|y\|_\infty \leq C\|a\|_1$ ). Detta visar att  $\|a\|_1 < \infty$  medför BIBO-stabilitet.

Antag omvänt att  $\|a\|_1 = \infty$ . Vi ska visa att detta medför BIBO-instabilitet genom att konstruera en begränsad insignal  $x$  med obegränsad utsignal  $y$ .

Om  $\|a\|_\infty = \infty$ , dvs. om följden  $a = (a_n)_{n=0}^\infty$  är obegränsad, så ger insignalen  $\delta$  en obegränsad utsignal, eftersom  $T\delta = a * \delta = a$ .

Så antag fortsättningsvis att  $\|a\|_1 = \sum_{k=0}^\infty |a_k| = \infty$  och  $\|a\|_\infty < \infty$ . Eftersom serien är divergent kan vi induktivt välja en växande följd  $(n_p)_{p=0}^\infty$  av naturliga tal med  $n_0 = 0$  och som uppfyller olikheten

$$\sum_{k=0}^{n_p - n_{p-1} - 1} |a_k| \geq p + n_{p-1} \|a\|_\infty$$

för  $p \geq 1$ .

Vi definierar nu vår insignal  $x = (x_k)_{k=0}^\infty$  genom att sätta  $x_0 = 0$  och sedan välja övriga tal  $x_k$  så att deras absolutbelopp är lika med 1 och

$$x_k a_{n_p - k} = |a_{n_p - k}| \quad \text{för } n_{p-1} < k \leq n_p.$$

Följden  $x$  är givetvis begränsad, men för utsignalen  $y = a * x$  gäller att

$$\begin{aligned}
 |y_{n_p}| &= \left| \sum_{k=0}^{n_p} a_{n_p-k} x_k \right| = \left| \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{n_p-k} x_k + \sum_{k=0}^{n_{p-1}} a_{n_p-k} x_k \right| \\
 &= \left| \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} |a_{n_p-k}| + \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{n_p-k} x_k \right| \\
 &\geq \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} |a_{n_p-k}| - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} |a_{n_p-k} x_k| \\
 &= \sum_{k=0}^{n_p-n_{p-1}-1} |a_k| - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} |a_{n_p-k}| \geq \sum_{k=0}^{n_p-n_{p-1}-1} |a_k| - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} \|a\|_\infty \\
 &\geq p + n_{p-1} \|a\|_\infty - n_{p-1} \|a\|_\infty = p.
 \end{aligned}$$

Eftersom detta gäller för alla naturliga tal  $p \geq 1$  är följden  $y$  obegränsad, och därmed är beviset klart.  $\square$

EXEMPEL 10.4.1. Ett system med impulssvaret  $((n+1)^{-2})_{n=0}^\infty$  är stabilt, och ett system med impulssvaret  $((n+1)^{-1})_{n=0}^\infty$  är instabilt.  $\square$

Vi förutsätter fortsättningsvis att impulssvar och insignaler i våra diskreta kausala LTI-system är högst exponentiellt växande.

Z-transformen

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

till ett systems impulssvar  $a$  kallas systemets *överföringsfunktion*. Det följer av satserna 10.3.1 och 10.4.1 att sambandet mellan insignalens z-transform  $X(z)$  och utsignalens z-transform  $Y(z)$  ges av ekvationen

$$Y(z) = A(z)X(z).$$

Låt nu  $\rho_a$  beteckna det entydigt bestämda tal för vilket z-transformen  $A(z)$  är konvergent i området  $|z| > \rho_a$  och divergent i området  $|z| < \rho_a$ . Nästa sats beskriver ett systems stabilitetsegenskaper i termer av konvergensraden  $\rho_a$ .

**Sats 10.4.3.** *Ett diskret kausalt LTI-system med överföringsfunktion  $A(z)$  är*

- (a) *BIBO-stabilt om  $\rho_a < 1$ ;*
- (b) *BIBO-instabilt om  $\rho_a > 1$ , eller om  $\rho_a = 1$  och överföringsfunktionen är diskontinuerlig i någon punkt på randen  $|z| = 1$  av konvergensområdet.*

*Bevis.* (a) Antag att systemet är instabilt. Då är  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$  vilket medför att serien  $A(z)$  är divergent för alla komplexa tal  $z$  med  $|z| < 1$

och att följaktligen  $\rho_a \geq 1$ . Villkoret  $\rho_a < 1$  medför således att systemet är stabilt.

(b) Om systemet är stabilt, dvs. om  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ , så är serien  $A(z)$  absolutkonvergent för  $|z| \geq 1$ , vilket betyder att  $\rho_a \leq 1$ . Dessutom är  $z$ -transformen  $A(z)$  säkert kontinuerlig för  $|z| \geq 1$ . Om  $\rho_a > 1$  eller om  $\rho_a = 1$  och funktionen  $A(z)$  är diskontinuerlig i någon punkt på cirkeln  $|z| = 1$ , måste följaktligen systemet vara instabilt.  $\square$

För diskreta kausala LTI-system med rationella överföringsfunktioner har vi följande korollarium till sats 10.4.3.

**Korollarium 10.4.4.** *Ett diskret kausalt LTI-system med rationell överföringsfunktion  $A(z)$  är BIBO-stabilt om och endast om alla polerna till överföringsfunktionen ligger strikt innanför cirkeln  $|z| = 1$ .*

*Bevis.* Låt  $\rho$  vara beloppet hos den av överföringsfunktionens poler som har störst belopp. Då existerar överföringsfunktionen  $A(z)$  för alla  $z$  med  $|z| > \rho$  men inte för alla  $z$  med  $|z| = \rho$ , vilket betyder att konvergensradien  $\rho_a = \rho$ . I en pol  $z_0$  till  $A(z)$  är vidare  $\lim_{z \rightarrow z_0} |A(z)| = +\infty$ , vilket speciellt innebär att funktionen  $A(z)$  har en diskontinuitetspunkt på cirkeln  $|z| = \rho_a$ .

Om alla polerna ligger innanför enhetscirkeln är följaktligen  $\rho_a < 1$ . Om det däremot finns en pol på eller utanför enhetscirkeln så är  $\rho_a \geq 1$ , och i fallet  $\rho_a = 1$  har överföringsfunktionen en diskontinuitetspunkt på enhetscirkeln. Påståendet i korollariet följer därför av sats 10.4.3.  $\square$

**EXEMPEL 10.4.2.** Ett system med  $A(z) = (z^2 + 1)^{-1}$  som överföringsfunktion är instabilt eftersom polerna  $\pm i$  ligger på enhetscirkeln. Systemets impuls-svar  $a = (a_n)_0^\infty$  fås genom inverstransformering och ges av att  $a_{2k} = (-1)^{k-1}$  för  $k \geq 1$  och  $a_n = 0$  för alla övriga  $n$ . Observera att följderna  $a$  är begränsad.

Med  $x = a$  som begränsad insignal fås en utsignal  $y$  som har  $z$ -transformen

$$Y(z) = A(z)X(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Denna utsignalen är obegränsad, ty genom inverstransformering erhålls

$$y_{2k} = (k-1)(-1)^k \quad \text{för } k \geq 1$$

medan  $y_n = 0$  för alla övriga  $n$ . (Jämför övning 10.2.)  $\square$

## Övningar

10.9 Visa att faltning är en tidsinvariant operation genom att visa att

$$R_k(a * x) = a * R_k x$$

för alla naturliga tal  $k$ .

- 10.10 I ett diskret kausalt LTI-system ges impulssvaret av följden  $(\sin \frac{\pi}{2}n)_0^\infty$ . Bestäm utsignalen  $y$  till insignalen  $x = (\cos \frac{\pi}{2}n)_0^\infty$ . Är systemet stabilt?
- 10.11 Är ett diskret LTI-system med impulssvar  $\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)_0^\infty$  stabilt? Bestäm också överföringsfunktionen.

## Historiska notiser

En talföljds z-transform innehåller samma information som följdens *genererande funktion*, dvs. som potensserien med den betraktade talföljden som koefficienter, och genererande funktioner introducerades 1730 av ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) som en metod för att lösa linjära rekursionsproblem. Pierre-Simon de Laplace använde z-transformen i sannolikheteoretiska arbeten.

Sitt namn fick z-transformen 1952 då den blivit populär som transformationsmetod inom diskret signalbehandling och diskret kontrollteori.

## Kapitel 11

# Diskreta fouriertransformen

Den diskreta fouriertransformen används i praktiska tillämpningar för att analysera funktioner som genom sampling bara är kända i ändligt många punkter. Transformen omvandlar listan av funktionsvärden till en lista av koefficienter till komplexa sinusoider som är ordnade efter sina frekvenser. I tillämpningar såsom signal- och bildbehandling transformeras därigenom den samplade funktionen från tids- resp. rumsdomänen till frekvensdomänen.

Eftersom det handlar om ändliga datamängder kan den diskreta fouriertransformen implementeras i datorer med numeriska algoritmer eller direkt i hårdvaran. Dessa implementeringar använder algoritmer som går under namnet den *snabba fouriertransformen*.

### 11.1 Cykliska gruppen $\mathbf{Z}_N$

Vektorrummet  $\mathbf{C}^n$  av alla  $n$ -tupler  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  kan identifieras med vektorrummet av alla funktioner  $z: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{C}$ . Vilken indexmängd som används är förstas oväsentligt så länge som den innehåller  $n$  stycken element; vi kan ersätta  $\{1, 2, \dots, n\}$  med vilken annan mängd som helst med  $n$  stycken element.

Genom att förse indexmängden med en gruppstruktur kan man konstruera baser för vektorrummet  $\mathbf{C}^n$  med speciella egenskaper. I det här kapitlet skall vi studera fourierbasen och den därmed associerade diskreta fouriertransformen. Andra exempel på baser är de s. k. waveletbaserna, som numera utgör oumbärliga verktyg inom signal- och bildbehandling.

För att förenkla framtida beteckningar kommer vi från och med nu att byta index  $n$  mot  $N$  samt övergå till att använda  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  som indexmängd för  $\mathbf{C}^N$ . Vi indexerar med andra ord elementen i  $\mathbf{C}^N$  så här:

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}).$$

Som gruppoperation på vår indexmängd använder vi *addition modulo*  $N$ , och den resulterande gruppen betecknas  $\mathbf{Z}_N$ .

**Definition.** Med  $\mathbf{Z}_N$  menas mängden  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  försedd med följande addition  $m+n$  för  $m, n \in \mathbf{Z}_N$ :

$$m+n = \begin{cases} m+n & \text{om } m+n \leq N-1 \\ m+n-N & \text{om } m+n \geq N. \end{cases}$$

Plustecknet  $+$  förekommer här i två betydelser; i vänsterledet står det för den definierade additionen, och på alla ställen i högerledet efter klammern har det sin vanliga betydelse av addition av naturliga tal.

I  $\mathbf{Z}_3$  är exempelvis  $1+1=2$ ,  $1+2=2+1=0$  och  $2+2=1$ .

Varje element  $n$  i  $\mathbf{Z}_N$  har en additiv invers  $-n$ ; den definieras av att

$$-n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0 \\ N-n & \text{om } 0 < n \leq N-1. \end{cases}$$

(Också minustecknet används förstås här i två betydelser!)

**Sats 11.1.1.**  $\mathbf{Z}_N$  är en kommutativ grupp, dvs. för alla  $k, m, n \in \mathbf{Z}_N$  är

$$\begin{aligned} m+n &= n+m \\ k+(m+n) &= (k+m)+n \\ n+0 &= n \\ n+(-n) &= 0 \end{aligned}$$

*Bevis.* Enkel verifikation. □

**Rummet**  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$

Vektorrummet  $\mathbf{C}^N$  identifieras i fortsättningen med vektorrummet av alla funktioner  $f: \mathbf{Z}_N \rightarrow \mathbf{C}$ . Genom att förse  $\mathbf{C}^N$  med den vanliga inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \overline{g(n)}$$

får vi ett inre produktrum, som betecknas  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ . Motsvarande norm betecknas  $\|\cdot\|_2$ , dvs.

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2.$$

Rummet  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  är  $N$ -dimensionellt. Funktionerna  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$ , som definieras av att

$$\mathbf{e}_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = k \\ 0 & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

bildar en ON-bas, som vi kallar *standardbasen* i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .

Det är lämpligt att uppfatta index  $k$  i  $\mathbf{e}_k$  som ett element i  $\mathbf{Z}_N$ . För  $N = 5$  är exempelvis  $\mathbf{e}_{2+3} = \mathbf{e}_0$  och  $\mathbf{e}_{3+3} = \mathbf{e}_1$ .

Rummet  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  kan också uppfattas som rummet av alla  $N$ -periodiska funktioner definierade på hela  $\mathbf{Z}$ . Varje funktion  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  kan nämligen på ett unikt sätt utvidgas till en  $N$ -periodisk funktion  $F: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ , så att  $F(n) = f(n)$  för  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Det är bara att definiera

$$F(n + kN) = f(n) \quad \text{för } 0 \leq n \leq N-1 \text{ och } k \in \mathbf{Z}.$$

### Translationsoperatorerna $R_k$

**Definition.** För  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $k \in \mathbf{Z}_N$  definierar vi funktionen  $R_k f$  genom att sätta

$$R_k f(n) = f(n - k).$$

Vi kallar  $R_k f$  för ett *translat* av  $f$  och avbildningarna  $R_k: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  för *translationer* eller *translationsoperatorer*.

Translationsoperatorerna är uppenbarligen *linjära* operatorer. Observera att  $R_0 = I$ , den identiska avbildningen, och att  $R_k R_m = R_{k+m}$  för alla  $k, m \in \mathbf{Z}_N$ . Vidare gäller för potenser av  $R_1$  att  $R_1^k = R_k$  för  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , medan  $R_1^N = R_0 = I$ .

Operatorerna  $R_k$  kallas translationer därför att de translaterar eller skjuter funktionsvärdena  $k$  steg åt höger cykliskt. Exempelvis är

$$\begin{aligned} (R_1 f(0), R_1 f(1), R_1 f(2), \dots, R_1 f(N-1)) \\ = (f(N-1), f(0), f(1), \dots, f(N-2)). \end{aligned}$$

EXEMPEL 11.1.1. För standardbasvektorerna i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  gäller att  $R_k \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k$ , och mer generellt att  $R_k \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+k}$ .  $\square$

### Summor

För funktioner  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  kommer vi ofta att ha anledning att betrakta summor av typen

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n),$$

där vi summerar över alla funktionsvärdena  $f(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

Vi kan förstås uppfatta summationen  $\sum_{\mathbf{Z}_N}$  som en avbildning, som till varje funktion  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  tillordnar ett komplext tal. Det som är väsentligt

för denna avbildning, och som vi kommer att utnyttja om och om igen, är att den är *linjär*, dvs.

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} (\alpha f(n) + \beta g(n)) = \alpha \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) + \beta \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} g(n),$$

och *translationsinvariant*, dvs.

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} R_k f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n)$$

för alla  $k \in \mathbf{Z}_N$ . Den sista likheten är förstås bara ett sätt att uttrycka att

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n-k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n),$$

något som är fullständigt självklart eftersom vi i båda fallen summerar samtliga  $N$  funktionsvärden  $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ .

## 11.2 Karaktärerna till gruppen $\mathbf{Z}_N$

**Definition.** En funktion  $\chi: \mathbf{Z}_N \rightarrow \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$  kallas en *karaktär* till gruppen  $\mathbf{Z}_N$  om

$$(11.1) \quad \chi(m+n) = \chi(m) \cdot \chi(n)$$

för alla  $m, n \in \mathbf{Z}_N$ .

Egenskapen (11.1) kallas *multiplikativitet*.

**Sats 11.2.1.** *Karaktärerna är funktioner i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  med följande egenskaper:*

- (i)  $\chi(0) = 1$
- (ii)  $\chi(-n) = \overline{\chi(n)}$
- (iii)  $\chi(n) = \chi(1)^n$
- (iv)  $\chi(1)^N = 1$

*Bevis.* (i) Av likheten  $\chi(0) = \chi(0+0) = \chi(0)^2$  följer att  $\chi(0) = 1$ , eftersom  $\chi(0) \neq 0$ .

(ii) På grund av (i) och multiplikativiteten är

$$1 = \chi(0) = \chi(n-n) = \chi(n) \cdot \chi(-n).$$

Eftersom  $|\chi(n)| = 1$  följer det nu att

$$\chi(-n) = 1/\chi(n) = \overline{\chi(n)}/|\chi(n)|^2 = \overline{\chi(n)}.$$



- (iii) bevisas med induktion, där induktionssteget är  $\chi(m) = \chi(m-1) \cdot \chi(1)$ .  
 (iv) På grund av (i), multiplikativitet och (iii) är

$$1 = \chi(0) = \chi(N-1)\chi(1) = \chi(1)^{N-1} \cdot \chi(1) = \chi(1)^N. \quad \square$$

Vi kan nu bestämma samtliga karaktärer till  $\mathbf{Z}_N$ .

**Sats 11.2.2.** *Det finns  $N$  karaktärer  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$  till  $\mathbf{Z}_N$  och de har formen*

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i kn/N}.$$

*Det gäller vidare att*

- (i)  $\chi_0(n) = 1$  för alla  $n \in \mathbf{Z}_N$ ,  
 (ii)  $\chi_k(n) \cdot \chi_m(n) = \chi_{k+m}(n)$  för alla  $k, m, n \in \mathbf{Z}_N$   
 (iii)  $\chi_{-k}(n) = \overline{\chi_k(n)}$  för alla  $k, n \in \mathbf{Z}_N$ .

*Bevis.* Låt  $\chi$  vara en karaktär och sätt  $c = \chi(1)$ . Enligt (iv) i sats 11.2.1 är  $c^N = 1$ , dvs.  $c$  är en rot till ekvationen  $z^N = 1$ . Det följer att  $c = e^{2\pi i k/N}$  för något tal  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Enligt sats 11.2.1 (iii) är vidare  $\chi(n) = c^n = e^{2\pi i kn/N}$ .

Omvänt, för varje  $k \in \mathbf{Z}_N$  får vi en karaktär  $\chi_k$  genom att definiera

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i kn/N}.$$

Det följer att karaktärerna är  $N$  till antalet, att de har den form som anges i satsen, och att (i), (ii) och (iii) gäller.  $\square$

*Anmärkning.* Antag att  $\chi$  och  $\eta$  är två karaktärer. Att produkten  $\chi\eta$  och funktionen  $\bar{\chi} (= 1/\chi)$  är karaktärer följer direkt ur karaktärsdefinitionen. Likaså är förstas den konstanta funktionen  $1: n \mapsto 1$  en karaktär. Detta innebär att mängden av karaktärer bildar en kommutativ grupp under multiplikation. Sats 11.2.2 visar att vi kan uppfatta denna grupp av karaktärer som identisk (isomorf) med  $\mathbf{Z}_N$  via avbildningen  $k \mapsto \chi_k$ .

Egenskap (ii) i sats 11.2.2 innebär vidare att för varje fixt  $n$  är avbildningen

$$\mathbf{Z}_N \rightarrow \mathbf{C}, \quad k \mapsto \chi_k(n)$$

en karaktär på  $\mathbf{Z}_N$ , och det explicita uttryck för karaktären som vi härlett visar att

$$\chi_k(n) = \chi_n(k).$$

**Lemma 11.2.3.** *För karaktärerna  $\chi_k$  till  $\mathbf{Z}_N$  gäller att*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = \begin{cases} N & \text{om } k = 0, \\ 0 & \text{om } 1 \leq k \leq N-1. \end{cases}$$

Ett elegant sätt att uttrycka denna relation är att skriva

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = N \mathbf{e}_0(k).$$

*Bevis.* För fixt  $k$  bildar talen  $\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}$  en geometrisk följd, varför det är lätt att verifiera resultatet genom att använda formeln för summan av en geometrisk följd. Låt oss emellertid visa att resultatet är en konsekvens av karaktärsdefinitionen och av att operationen summation är translationsinvariant.

För  $k = 0$  är  $\chi_0(n) = 1$  för alla  $n$ , och det följer förstås att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_0(n) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Antag därför att  $k \neq 0$ . Vi har

$$R_1 \chi_k(n) = \chi_k(n-1) = \chi_k(n) \chi_k(-1) = \overline{\chi_k(1)} \chi_k(n),$$

eller kortare uttryck:  $R_1 \chi_k = \overline{\chi_k(1)} \chi_k$ . Genom att utnyttja translationsinvarians får vi därför

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} R_1 \chi_k(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \overline{\chi_k(1)} \chi_k(n) = \overline{\chi_k(1)} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n).$$

Av likheten mellan ytterleden följer det nu, eftersom  $\overline{\chi_k(1)} = e^{-2\pi i k / N} \neq 1$ , att summan  $\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = 0$ .  $\square$

**Sats 11.2.4.** Karaktärerna  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$  bildar en ortogonal bas för rummet  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ . Mera precist är

$$\langle \chi_k, \chi_m \rangle = \begin{cases} N & \text{om } k = m, \\ 0 & \text{om } k \neq m. \end{cases}$$

*Bevis.* Definitionen av inre produkt ger

$$\langle \chi_k, \chi_m \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) \overline{\chi_m(n)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) \chi_{-m}(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_{k-m}(n).$$

Satsen följer därför av föregående lemma.  $\square$

Av sats 11.2.4 följer speciellt att  $\|\chi_k\|_2 = \sqrt{N}$  för alla  $k$ . Genom att dividera alla karaktärerna med  $\sqrt{N}$  får vi således en ON-bas som vi kallar *fourierbasen* i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .

## 11.3 Den diskreta fouriertransformen

Eftersom karaktärerna  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$  bildar en ortogonal bas för  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  har varje funktion  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  en utveckling av typen

$$(11.2) \quad f = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \chi_n.$$

Koordinaterna  $a_n$  i denna utveckling kan uttryckas med hjälp av inre produkter; närmare bestämt är

$$\langle f, \chi_n \rangle = a_n \|\chi_n\|_2^2.$$

Eftersom  $\|\chi_n\|_2^2 = N$ , blir

$$a_n = \frac{1}{N} \langle f, \chi_n \rangle.$$

Detta är motivet till följande definition.

**Definition.** För  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $n \in \mathbf{Z}_N$  sätter vi

$$\hat{f}(n) = \langle f, \chi_n \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_n(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-2\pi i n k / N}.$$

Därigenom definieras en funktion  $\hat{f}$  på  $\mathbf{Z}_N$  som kallas *(den diskreta) fouriertransformen* av  $f$ . Vi använder också ordet fouriertransform som namn på den avbildning  $\mathcal{F}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  som definieras av att

$$\mathcal{F}f = \hat{f}.$$

Definitionen av  $\hat{f}(n)$  innebär att ekvation (11.2) nu kan skrivas

$$(11.3) \quad f = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \chi_n.$$

Eftersom  $\chi_n(k) = \chi_k(n)$ , kan vi vidare skriva definitionen av  $\hat{f}(n)$  på formen

$$\hat{f}(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_k(n)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_{-k}(n),$$

vilket innebär att

$$(11.4) \quad \mathcal{F}f = \hat{f} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_{-k}.$$

Detta uttrycker  $\mathcal{F}f$  som en linjärkombination av karaktärerna, och följande sats är nu en omedelbar konsekvens av detta.

**Sats 11.3.1.** *Fouriertransformen  $\mathcal{F}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  är en linjär inverterbar operator.*

*Bevis.* Lineariteten, dvs.

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$$

följer förstås av att summation är en linjär operation. Av formel (11.4) följer vidare att  $\mathcal{F}(\mathbf{e}_k) = \chi_{-k}$ , så fouriertransformering avbildar funktionerna i en bas, nämligen standardbasen, bijektivt på funktionerna i en annan bas, nämligen karaktärerna (i omvänd ordning), och en linjär operator med denna egenskap är inverterbar.  $\square$

För att beskriva inversen till fouriertransformering inför vi nu följande följeslagare till  $\mathcal{F}$ .

**Definition.** Den linjära operatoren  $\check{\mathcal{F}}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  definieras av att

$$\check{\mathcal{F}}f = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_k.$$

**Sats 11.3.2** (Inversionssatsen). *Operatoren  $\check{\mathcal{F}}$  är invers till  $\mathcal{F}$ , dvs.*

$$\mathcal{F}^{-1} = \check{\mathcal{F}}.$$

Vi kallar därför  $\check{\mathcal{F}}$  för den *inversa fouriertransformen* på  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .

*Bevis.* Med hjälp av definitionen av  $\check{\mathcal{F}}$  och formel (11.3) fås

$$\check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \check{\mathcal{F}}(\hat{f}) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \chi_n = f,$$

vilket innebär att  $\check{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I$ , identitetsoperatoren. Operatoren  $\check{\mathcal{F}}$  är således invers till fouriertransformen  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Här följer ytterligare notation som förenklar skrivandet av en del formler.

**Definition.** För  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  definierar vi funktionerna  $\check{f}$  och  $\tilde{f}$  genom att sätta

$$\check{f}(n) = f(-n) \quad \text{och} \quad \tilde{f}(n) = \overline{f(-n)}$$

för alla  $n \in \mathbf{Z}_N$ .

**Sats 11.3.3.**  $\check{\mathcal{F}}(f) = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\check{f})$  och  $\mathcal{F}(\tilde{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$ .

*Bevis.* Genom att kombinera definitionen av  $\check{\mathcal{F}}$  med formel (11.4) erhålls

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{F}}f &= \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_k = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(-k) \chi_{-k} = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} \check{f}(k) \chi_{-k} = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\check{f}), \\ \mathcal{F}(\check{f}) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} \overline{\check{f}(-k)} \chi_{-k} = \overline{\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(-k) \chi_k} = \overline{\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_{-k}} = \overline{\mathcal{F}(f)}. \quad \square\end{aligned}$$

EXEMPEL 11.3.1. Som redan noterats i beviset för sats 11.3.1 är

$$\mathcal{F}(\mathbf{e}_k) = \chi_{-k} = \check{\chi}_k.$$

Med hjälp av sats 11.3.3 fås därför

$$\mathbf{e}_k = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}\mathbf{e}_k = \check{\mathcal{F}}(\check{\chi}_k) = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\check{\chi}_k) = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\chi_k).$$

Således är

$$\mathcal{F}(\chi_k) = N\mathbf{e}_k. \quad \square$$

Till varje linjär operator på ett ändligt dimensionellt rum med given bas hör en unik matris – fouriertransformens matris med avseende på standardbasen ges av följande sats.

**Sats 11.3.4.** Med avseende på standardbasen för  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  har fouriertransformen  $\mathcal{F}$  matrisen

$$W_N = [\omega_N^{nk}]_{0 \leq n, k \leq N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

där  $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ .

Observera att matrisen  $W_N$  är symmetrisk.

*Bevis.* Eftersom  $\overline{\chi_n(k)} = e^{-2\pi i nk/N} = \omega_N^{nk}$ , kan definitionen av  $\hat{f}(n)$  skrivas på formen

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{nk} f(k).$$

Om vi nu uppfattar

$$f = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \hat{f} = \begin{bmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{bmatrix}$$

som kolonnmatriser, är med andra ord  $\hat{f}(n)$  lika med produkten av den  $n$ :te raden i matrisen  $W_N$  och kolonnmatrisen  $f$ . Detta innebär att kolonnmatrisen  $\hat{f}$  är lika med produkten av matriserna  $W_N$  och  $f$ .

Fouriertransformen kan således beräknas som matrisprodukten

$$\hat{f} = W_N f,$$

och detta betyder  $W_N$  är matrisen till operatoren  $\mathcal{F}$  med avseende på standardbasen i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .  $\square$

Matrisen  $W_N$  är inverterbar, beroende på att operatoren  $\mathcal{F}$  är inverterbar, och inversen  $W_N^{-1}$  är matris till den inversa operatoren  $\mathcal{F}^{-1}$  ( $= \check{\mathcal{F}}$ ). Nu är

$$\check{\mathcal{F}}f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \chi_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\omega_N^{nk}} f(k),$$

och härav följer att operatoren  $\check{\mathcal{F}}$  har matrisen

$$\frac{1}{N} \overline{W_N} = \frac{1}{N} [\overline{\omega_N^{nk}}]_{0 \leq n, k \leq N-1}.$$

Följaktligen är

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{W_N}.$$

EXEMPEL 11.3.2. Matriserna  $W_N$  har för  $N = 2, 3$  och  $4$  följande utseenden:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

$\square$

EXEMPEL 11.3.3. Fouriertransformen till funktionen  $f = (1, 2, 3, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$  ges av matrisprodukten

$$W_4 f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 + 2i \\ -2 \\ -2 - 2i \end{bmatrix}$$

med slutsatsen att  $\hat{f} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$ .

Den inversa fouriertransformen  $\check{\mathcal{F}}\hat{f}$  till  $\hat{f}$  erhålls som resultat av matrismultiplikationen

$$\frac{1}{4} \overline{W_4} \hat{f} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 + 2i \\ -2 \\ -2 - 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

vilket verifierar inversionssatsen enligt vilken  $\check{\mathcal{F}}\hat{f} = f$ .  $\square$

Vi fortsätter nu med två räkneregler som visar hur fouriertransformen ändras då en funktion translateras och multipliceras med karaktärer.

**Sats 11.3.5.** *Antag att  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $m \in \mathbf{Z}_N$ . Då är*

- (i)  $\mathcal{F}(R_m f) = \bar{\chi}_m \mathcal{F}f$
- (ii)  $\mathcal{F}(\chi_m f) = R_m(\mathcal{F}f)$ .

*Bevis.* (i) följer av följande räkning:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R_m f)(n) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} R_m f(k) \overline{\chi_n(k)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k-m) \overline{\chi_n(k-m)} \overline{\chi_n(m)} \\ &= \overline{\chi_n(m)} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k-m) \overline{\chi_n(k-m)} \\ &= \overline{\chi_m(n)} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_n(k)} = \overline{\chi_m(n)} \hat{f}(n) = (\bar{\chi}_m \mathcal{F}f)(n). \end{aligned}$$

Beviset bygger som synes på att karaktärer är multiplikativa och att summan  $\sum_{\mathbf{Z}_N}$  är translationsinvariant.

(ii) följer av följande kalkyl:

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_m f}(n) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_m(k) \overline{\chi_n(k)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_{n-m}(k)} \\ &= \hat{f}(n-m) = R_m \hat{f}(n). \end{aligned} \quad \square$$

Vi avslutar det här avsnittet med två mycket viktiga identiteter som följer ur ekvation (11.3) och det faktum att fourierbasen är ortogonal.

**Sats 11.3.6.** *För  $f$  och  $g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  gäller följande Parsevalrelationer:*

- (i)  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$
- (ii)  $\|f\|_2^2 = \frac{1}{N} \|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} |\hat{f}(n)|^2$ .

*Bevis.* Av (11.3) och motsvarande formel för  $g$  får vi

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} \|\chi_n\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)},$$

eftersom  $\|\chi_n\|_2^2 = N$ . Detta bevisar (i), och (ii) är förstås ett specialfall av (i).  $\square$

EXEMPEL 11.3.4. I exempel 11.3.3 beräknade vi fouriertransformen till följden  $f = (1, 2, 3, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$  och fann att  $\hat{f} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$ . För dessa två följer är

$$\|f\|_2^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

och

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 10^2 + |-2 + 2i|^2 + |-2|^2 + |-2 - 2i|^2 = 120,$$

så  $\|f\|_2^2 = \frac{1}{4}\|\hat{f}\|_2^2$ , vilket verifierar Parsevals relation.  $\square$

## Övningar

11.1 Beräkna  $\hat{f}$  när

a)  $f = (1, 2, 3, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$       b)  $f = (1, i, 2 + i, -3) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$

c)  $f = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in \ell^2(\mathbf{Z}_6)$

11.2 Visa att fouriertransformen  $\hat{f}$  är reell om och endast om  $f(k) = \overline{f(-k)}$  för alla  $k$ .

## 11.4 Faltning och translationsinvarianta operatörer

**Definition.** För  $f, g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  definieras *faltningen*  $f * g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  av att

$$(f * g)(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)g(n - k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k g(n),$$

dvs.

$$f * g = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k g.$$

Faltningen  $f * g$  är med andra ord en viktad summa av translat  $R_k g$ , där vikterna är  $f(k)$ .

EXEMPEL 11.4.1. Vi beräknar faltningen  $f * \chi_m$  mellan en godtycklig funktion och en karaktär:

$$\begin{aligned} (f * \chi_m)(n) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\chi_m(n - k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\chi_m(n)\chi_m(-k) \\ &= \chi_m(n) \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\overline{\chi_m(k)} = \chi_m(n)\hat{f}(m). \end{aligned}$$

Alltså är

$$f * \chi_m = \hat{f}(m)\chi_m. \quad \square$$



Faltning är en ganska komplicerad operation. En av finesserna med fouriertransformen är att den överför faltning till multiplikation av funktioner. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 11.4.1.** För  $f, g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  är

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

*Bevis.* Genom att utnyttja linearitet och att  $\mathcal{F}(R_k g) = \bar{\chi}_k \mathcal{F}g$  erhålls:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) R_k g\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \mathcal{F}(R_k g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \bar{\chi}_k \mathcal{F}g \\ &= \mathcal{F}g \cdot \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \bar{\chi}_k = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g. \end{aligned} \quad \square$$

EXEMPEL 11.4.2. För att lösa faltningsekvationen

$$a * f = b,$$

för följderna  $a = (2, 3, 4, 1)$  och  $b = (0, 6, 8, 6)$  i  $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$  fouriertransformerar vi ekvationen och får då det ekvivalenta sambandet

$$\hat{a}(n) \hat{f}(n) = \hat{b}(n), \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Nu är  $\hat{a} = W_4 a = (10, -2 - 2i, 2, -2 + 2i)$  och  $\hat{b} = W_4 b = (20, -8, -4, -8)$ , så

$$\hat{f} = \left( \frac{20}{10}, \frac{-8}{-2 - 2i}, \frac{-4}{2}, \frac{-8}{-2 + 2i} \right) = (2, 2 - 2i, -2, 2 + 2i).$$

Inverstransformering ger slutligen att

$$f = \frac{1}{4} \overline{W_4} \hat{f} = (1, 2, -1, 0). \quad \square$$

**Sats 11.4.2.** För  $f, g, h \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  och  $k \in \mathbf{Z}_N$  är

- (i)  $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$
- (ii)  $f * g = g * f$
- (iii)  $f * (g * h) = (f * g) * h$
- (iv)  $f * \mathbf{e}_0 = f$
- (v)  $R_k(f * g) = (R_k f) * g = f * (R_k g)$

*Bevis.* Eftersom fouriertransformen är inverterbar räcker det att visa att båda sidor i respektive likhet har samma fouriertransform. Vi gör detta för (iii) och lämnar övriga identiteter som enkla övningar.

På grund av närmast föregående sats är

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * (g * h)) &= \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}(g * h) = \mathcal{F}f \cdot (\mathcal{F}g \cdot \mathcal{F}h) \\ &= (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) \cdot \mathcal{F}h = \mathcal{F}(f * g) \cdot \mathcal{F}h = \mathcal{F}((f * g) * h). \end{aligned} \quad \square$$

Naturligtvis kan man också visa identiteterna i sats 11.4.2 direkt genom att enbart utnyttja faltningsdefinitionen, och läsaren bör göra detta som övning.

**Definition.** En operator  $T: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  kallas *translationsinvariant* om

$$R_k T = T R_k$$

för alla  $k \in \mathbf{Z}_N$ .

Eftersom  $R_k = R_1^k$  är operatoren  $T$  translationsinvariant om och endast om  $R_1 T = T R_1$ .

**Sats 11.4.3.** Följande fem villkor är ekvivalenta för en godtycklig operator  $T: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .

- (i)  $T$  är linjär och translationsinvariant.
- (ii)  $T(f * g) = f * (Tg)$  för alla funktioner  $f, g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .
- (iii) Det finns en funktion  $b \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  sådan att  $Tf = b * f$ .
- (iv)  $T$  är linjär och karaktärerna  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$  är egenvektorer till  $T$ .
- (v) Det finns en funktion  $\mu \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  sådan att  $Tf = \check{F}(\mu \hat{f})$ .

*Bevis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Antag först att  $T$  är linjär och translationsinvariant. Eftersom  $f * g = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) R_k g$ , är

$$T(f * g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) T(R_k g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) R_k (Tg) = f * (Tg),$$

dvs. (ii) gäller.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Antag att  $T(f * g) = f * (Tg)$  för alla funktioner  $f$  och  $g$ . Då är speciellt

$$Tf = T(f * \mathbf{e}_0) = f * (T\mathbf{e}_0) = (T\mathbf{e}_0) * f,$$

dvs. (iii) gäller med  $b = T\mathbf{e}_0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Antag att  $Tf = b * f$ ; då är  $T$  linjär på grund av egenskap (i) i sats 11.4.2. På grund av (v) i samma sats är vidare

$$R_k T f = R_k (b * f) = b * (R_k f) = T(R_k f),$$

vilket visar att  $T$  är translationsinvariant.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Om (iii) gäller så är  $T$  linjär, och av resultatet i exempel 11.4.1 följer att  $T(\chi_n) = b * \chi_n = \hat{b}(n) \chi_n$  vilket innebär att  $\chi_n$  är en egenvektor med  $\hat{b}(n)$  som motsvarande egenvärde.

(iv)  $\Rightarrow$  (v): Antag att  $T\chi_n = \lambda(n)\chi_n$  för alla  $n \in \mathbf{Z}_N$ . På grund av inversionssatsen blir då

$$\begin{aligned} Tf &= T\left(\frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n)\chi_n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n)T\chi_n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \lambda(n)\hat{f}(n)\chi_n = \check{\mathcal{F}}(\lambda\hat{f}), \end{aligned}$$

vilket visar att (v) gäller med  $\mu(n) = \lambda(n)$ .

(v)  $\Rightarrow$  (iii): Antag att (v) gäller och sätt  $b = \check{\mathcal{F}}\mu$ ; då är  $\hat{b} = (\mathcal{F}\check{\mathcal{F}})\mu = \mu$  och

$$\check{\mathcal{F}}(\mu\hat{f}) = \check{\mathcal{F}}(\hat{b}\hat{f}) = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(b * f)) = b * f,$$

vilket visar att (iii) gäller.  $\square$

EXEMPEL 11.4.3. Definiera operatoren  $T: \ell^2(\mathbf{Z}_4) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_4)$  genom att sätta

$$Tf(n) = f(n) + 3f(n-2) - 2f(n-3).$$

I termer av translationsoperatorerna  $R_k$  är tydligen  $T = R_0 + 3R_2 - 2R_3$ . Det följer att  $R_1T = R_1 + 3R_3 - 2R_4 = TR_1$ , så operatoren  $T$  är translationsinvariant. För

$$b = T\mathbf{e}_0 = T(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 3, -2)$$

är  $Tf = b * f$ .  $\square$

En translationsinvariant operator känns, som vi strax ska se, omedelbart igen på utseendet av operatorns matris med avseende på standardbasen.

**Definition.** En  $N \times N$ -matris  $A = [a_{ij}]_{i,j \in \mathbf{Z}_N}$  kallas *cyklisk* om  $a_{i+1,j+1} = a_{ij}$  för alla index  $i, j \in \mathbf{Z}_N$ .

EXEMPEL 11.4.4. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

är cyklisk.  $\square$

Om vi uppfattar den  $k+1$ :ta kolonnen  $A_{*k}$  i  $N \times N$ -matrisen  $A$  som en vektor i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ , så är tydligen matrisen  $A$  cyklisk om och endast om  $A_{*k} = R_k A_{*0}$  för alla  $k$ . Kolonnerna i en cyklisk matris är med andra ord translaterade av den första kolonnen (kolonnen svarande mot  $k=0$ ).

**Sats 11.4.4.** En operator  $T$  på  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  är translationsinvariant om och endast om operatorns matris med avseende på standardbasen är cyklisk.

*Bevis.* Låt  $T$  vara en operator på  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ , och låt  $A$  vara operators matris med avseende på standardbasen  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}\}$ . Kolonnen  $A_{*k}$  i  $A$  består av vektorn  $T\mathbf{e}_k$ , eller närmare bestämt av vektorns koordinater med avseende på standardbasen.

Om  $T$  är translationsinvariant med  $T = b * f$ , så är

$$A_{*k} = T\mathbf{e}_k = T(R_k\mathbf{e}_0) = R_k(T\mathbf{e}_0) = R_k(b * \mathbf{e}_0) = R_k b.$$

Detta innebär att den första kolonnen i matrisen är lika med vektorn  $b$  och att övriga kolonner fås som successiva translat av denna kolonn, dvs. operators matris är cyklisk.

Omvänt, om matrisen är cyklisk med  $A_{*0} = b$ , så är  $T\mathbf{e}_k = A_{*k} = R_k b$ . För en godtycklig funktion  $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\mathbf{e}_k$  är därför

$$Tf = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)T\mathbf{e}_k = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k b = f * b,$$

vilket visar att  $T$  är translationsinvariant. □

EXEMPEL 11.4.5. Operatören i exempel 11.4.3 har matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som är cyklisk. □

## Övningar

11.3 Funktionen  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$  har fouriertransformen  $\hat{f} = (1, i, 1, -i)$ .

a) Beräkna  $f$ .      b) Beräkna  $f * f$ .

11.4  $f$  och  $g$  är två funktioner i  $\ell^2(\mathbf{Z}_3)$ . För funktionen  $f$  gäller att  $\hat{f} = (1, 2, 0)$  medan  $g = (1, \omega, \omega^2)$ , där  $\omega = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ . Beräkna  $f$ ,  $\hat{g}$  och  $f * g$ .

11.5 Lös faltningsekvationen

$$f * a = b$$

för  $a = (2, 3, 4, 1)$  och  $b = (0, 6, 8, 6)$  i  $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$ .

11.6 För  $a \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  gäller att  $\hat{a}(0) = 0$  medan  $\hat{a}(k) \neq 0$  för  $k = 1, \dots, N-1$ .

a) Bestäm alla lösningar  $f$  till ekvationen  $a * f = 0$ .

b) För vilka  $b \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  är ekvationen  $a * f = b$  lösbar? Är lösningen i så fall entydig?

11.7 Beräkna egenvärdena till den cykliska matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

11.8 Definiera en translationsinvariant avbildning  $T: \ell^2(\mathbf{Z}_4) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_4)$  genom att sätta

$$(Tf)(n) = 3f(n-2) + if(n) - (2+i)f(n+1).$$

- a) Bestäm  $T$ :s matris med avseende på standardbasen.
  - b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningen  $T$ .
- 11.9 Låt  $S$  och  $T$  vara två translationsinvarianta operatorer på  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ . Visa att operatorerna kommuterar, dvs. att  $ST = TS$ .
- 11.10 Antag att  $a \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och låt  $A$  vara den cykliska matris som har  $a$  som sin första kolumn. Visa att följande tre villkor är ekvivalenta:
- (i) Translaten  $R_0a, R_1a, \dots, R_{N-1}a$  utgör en bas för  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .
  - (ii) Matrisen  $A$  är inverterbar.
  - (iii)  $\hat{a}(n) \neq 0$  för alla  $n \in \mathbf{Z}_N$ .
- 11.11 Låt  $a$  och  $b$  vara element i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .
- a) Visa att  $\langle R_ka, R_mb \rangle = (a * \tilde{b})(m-k)$ .
  - b) Utnyttja a) för att visa att följande tre villkor är ekvivalenta:
    - (i) Translaten  $R_0a, R_1a, \dots, R_{N-1}a$  utgör en ON-bas för  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .
    - (ii)  $a * \tilde{a} = \mathbf{e}_0$ .
    - (iii)  $|\hat{a}(n)| = 1$  för alla  $n$ .
- 11.12 Låt  $u = \frac{\sqrt{2}}{4}(1, 1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2})$ .
- a) Visa att  $\{u, R_2u\}$  är en ON-mängd i  $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$ .
  - b) Bestäm en funktion  $v$  så att  $B = \{u, R_2u, v, R_2v\}$  blir en ON-bas i  $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$ . (ON-basen  $B$  är en s. k. *första etappens waveletbas* för  $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$ .)

## 11.5 Sambandet mellan $\mathbf{Z}_N$ och $\mathbf{Z}_{N/2}$

I det här avsnittet antar vi genomgående att *talet*  $N$  är *delbart med 2*. Vi sätter vidare  $M = N/2$  så att

$$N = 2M.$$

Gruppen  $\mathbf{Z}_M$  kan uppfattas som en delgrupp av gruppen  $\mathbf{Z}_N$  via den injektiva avbildningen

$$\phi: \mathbf{Z}_M \rightarrow \mathbf{Z}_N, \quad \phi(m) = 2m,$$

en avbildning som uppenbarligen respekterar gruppstrukturerna i den bemärkelsen att  $\phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$ . Sådana avbildningar mellan grupper kallas *homomorfier*, och bildmängden  $\phi(\mathbf{Z}_M) = \{0, 2, 4, \dots, N-2\}$  är en delgrupp av  $\mathbf{Z}_N$  som i alla gruppteoretiska avseenden är likvärdig med gruppen  $\mathbf{Z}_M$ .

För att förstå varför det kan vara fruktbart att studera gruppen  $\mathbf{Z}_M$  när man primärt är intresserad av  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ , betraktar vi en funktion  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ . Funktionen är uppenbarligen helt bestämd av de båda restriktionerna  $f|_A$  och  $f|_B$  av  $f$  till mängden  $A$  av alla jämna tal i  $\mathbf{Z}_N$  resp. mängden  $B$  av alla udda tal i  $\mathbf{Z}_N$ . Med vektornotation är

$$f|_A = (f(0), f(2), f(4), \dots, f(N-2))$$

och

$$\begin{aligned} f|_B &= (f(1), f(3), f(5), \dots, f(N-1)) \\ &= (R_{-1}f(0), R_{-1}f(2), R_{-1}f(4), \dots, R_{-1}f(N-2)) = (R_{-1}f)|_A. \end{aligned}$$

Att studera funktionen  $f$  är således ekvivalent med att studera de båda restriktionerna  $f|_A$  och  $(R_{-1}f)|_A$ , som via den ovan nämnda homomorfismen  $\phi$  kan uppfattas som två funktioner  $u$  och  $v$  på den mindre gruppen  $\mathbf{Z}_M$ . Vi ska se att det finns ett enkelt samband mellan fouriertransformen  $\hat{f}$  till  $f$  och fouriertransformerna i  $\mathbf{Z}_M$  till de båda funktionerna  $u$  och  $v$ . Vi ska också visa att det snabbaste sättet att beräkna fouriertransformen  $\hat{f}$  bygger på att man först beräknar fouriertransformerna  $\hat{u}$  och  $\hat{v}$ , en metod som kallas *snabba fouriertransformen*.

Vi börjar därför med att notera sambandet mellan karaktärerna till grupperna  $\mathbf{Z}_M$  och  $\mathbf{Z}_N$ .

**Sats 11.5.1.** Låt  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$  beteckna karaktärerna till gruppen  $\mathbf{Z}_N$  och  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{M-1}$  beteckna karaktärerna till gruppen  $\mathbf{Z}_M$  så att

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

och

$$\eta_k(m) = e^{2\pi i k m / M}, \quad m, k = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Då är

$$\eta_k(m) = \chi_k(2m) = \chi_{k+M}(2m) \quad \text{för } k, m = 0, 1, \dots, M-1.$$

*Bevis.* Sambandet mellan karaktärerna följer med en gång ur de explicita formlerna för  $\chi_k$  och  $\eta_k$ . Exempelvis är

$$\begin{aligned} \chi_{k+M}(2m) &= e^{2\pi i (k+M)2m/N} = e^{2\pi i (k+M)2m/2M} = e^{2\pi i k m / M} \cdot e^{2\pi i m} \\ &= e^{2\pi i k m / M} = \eta_k(m). \end{aligned} \quad \square$$

Det är naturligtvis ingen tillfällighet att sambandet mellan karaktärerna till  $\mathbf{Z}_N$  och  $\mathbf{Z}_M$  ser ut som det gör. Om  $\phi$  som tidigare betecknar homomorfin  $\phi(m) = 2m$  mellan  $\mathbf{Z}_M$  och delgruppen av alla multipler av 2 i  $\mathbf{Z}_N$ , och  $\chi$  är en karaktär till  $\mathbf{Z}_N$ , dvs. en multiplikativ avbildning  $\mathbf{Z}_N \rightarrow \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ , så är sammansättningen  $\chi \circ \phi$ , dvs. avbildningen  $m \mapsto \chi(2m)$ , uppenbarligen en karaktär till  $\mathbf{Z}_M$ . Funktionerna  $m \mapsto \chi_k(2m)$  är således karaktärer till  $\mathbf{Z}_M$  för  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Att vi inte får  $N$  stycken karaktärer till  $\mathbf{Z}_M$  på detta vis beror naturligtvis på att  $\chi_{k+M}(2m) = \chi_k(2m)$ , vilket reducerar antalet *olika* karaktärer till gruppen  $\mathbf{Z}_M$  med en faktor  $\frac{1}{2}$  till  $M$  stycken.

Följande två operatorer spelar en viktig roll i konstruktionen av waveletbaser och bidrar också till att förklara sambandet mellan fouriertransformerna till funktioner i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$ .

**Definition.** Nedsamlingsoperatören  $D: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_M)$  definieras av att

$$Df(m) = f(2m) \quad \text{för alla } m \in \mathbf{Z}_M,$$

och uppsamlingsoperatören  $U: \ell^2(\mathbf{Z}_M) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  av att

$$Ug(n) = \begin{cases} g(n/2) & \text{om } n \in \mathbf{Z}_n \text{ är jämnt,} \\ 0 & \text{om } n \in \mathbf{Z}_n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Här är förstas  $f$  en godtycklig funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $g$  en godtycklig funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$ . Med funktionerna  $f$  och  $g$  skrivna på vektorform som

$$\begin{aligned} f &= (f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)) \quad \text{resp.} \\ g &= (g(0), g(1), g(2), \dots, g(M-1)) \end{aligned}$$

är således

$$Df = (f(0), f(2), f(4), \dots, f(N-2))$$

och

$$Ug = (g(0), 0, g(1), 0, g(2), 0, \dots, g(M-1), 0).$$

Observera att  $DU = I$ , den identiska avbildningen, men att  $UD$  inte är lika med den identiska avbildningen, eftersom

$$UDf(n) = \begin{cases} f(n) & \text{om } n \text{ är jämnt,} \\ 0 & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Fouriertransformen av en funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  är en funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ , medan fouriertransformen av en funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$  förstas är en funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$ . Detta kommer emellertid inte att hindra oss från att använda samma beteckning,  $\hat{f}$  eller  $\mathcal{F}f$ , för fouriertransformen av funktioner i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$ , eftersom det knappast kan uppstå något missförstånd.

**Sats 11.5.2.** För  $g \in \ell^2(\mathbf{Z}_M)$  och  $k = 0, 1, \dots, M-1$  är

$$\widehat{Ug}(k) = \widehat{Ug}(k+M) = \hat{g}(k).$$

*Bevis.* För  $\epsilon = 0$  och  $\epsilon = 1$  är  $\chi_{k+\epsilon M}(2m) = \eta_k(m)$  enligt sats 11.5.1. Detta i kombination med att  $Ug(n) = 0$  för udda  $n$  och  $Ug(n) = g(n/2)$  för jämna  $n$  ger att

$$\begin{aligned} \widehat{Ug}(k+\epsilon M) &= \sum_{n=0}^{N-1} Ug(n) \overline{\chi_{k+\epsilon M}(n)} = \sum_{m=0}^{M-1} Ug(2m) \overline{\chi_{k+\epsilon M}(2m)} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} g(m) \overline{\eta_k(m)} = \hat{g}(k). \end{aligned} \quad \square$$

Eftersom vi inte kommer att behöva resultatet i följande sats, lämnar vi beviset för den som övning.

**Sats 11.5.3.** Antag att  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$  och  $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . Då är

$$\widehat{Df}(k) = \frac{1}{2}(\hat{f}(k) + \hat{f}(k+M)).$$

## 11.6 Snabba fouriertransformen

I det här avsnittet ska vi undersöka hur komplicerat det är att beräkna fouriertransformen till en funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ . Eftersom additioner kräver väsentligt mindre beräkningstid än multiplikationer, kommer vi att mäta beräkningsarbetets omfattning genom att räkna antalet komplexa multiplikationer som krävs för att beräkna transformen.

Beräkningsarbetet beror naturligtvis av  $N$  och växer då  $N$  växer. Låt därför  $\mu(N)$  beteckna antalet komplexa multiplikationer som maximalt behövs för att beräkna fouriertransformen  $\hat{f}$  av en godtycklig funktion  $f$  i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ .

Om fourierkoefficienten  $\hat{f}(k)$  beräknas med hjälp av definitionen

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i n k / N}$$

åtgår det tydligen  $N$  komplexa multiplikationer för varje komponent  $\hat{f}(k)$ , och eftersom det finns  $N$  komponenter behövs det  $N^2$  komplexa multiplikationer för att beräkna hela transformen. Detta visar att  $\mu(N) \leq N^2$ , och att det i allmänhet krävs  $N^2$  komplexa multiplikationer om man använder definitionen av  $\hat{f}$  för beräkningen.

Vi ska nu diskutera ett effektivare sätt att beräkna fouriertransformen, den s. k. *snabba fouriertransformen* (FFT). Algoritmen förutsätter att talet



$N$  är sammansatt. Vi nöjer oss med att beskriva det enklaste fallet att  $N$  är delbart med en potens av 2.

Antag därför till att börja med att talet  $N$  är jämnt. Den snabba fouriertransformen bygger på följande sats.

**Sats 11.6.1.** Definiera, givet funktionen  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ , funktionerna  $u$  och  $v$  i  $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2})$  genom att sätta

$$u = Df \quad \text{och} \quad v = DR_{-1}f,$$

dvs.

$$u = (f(0), f(2), \dots, f(N-2)) \quad \text{och} \quad v = (f(1), f(3), \dots, f(N-1)).$$

Då är

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \hat{u}(k) + e^{-2\pi i k/N} \hat{v}(k) \\ \hat{f}(N/2 + k) &= \hat{u}(k) - e^{-2\pi i k/N} \hat{v}(k) \end{aligned}$$

för  $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ .

*Bevis.* Eftersom

$$\begin{aligned} Uu &= (f(0), 0, f(2), 0, f(4), 0, \dots, f(N-2), 0) \quad \text{och} \\ R_1 Uv &= (0, f(1), 0, f(3), 0, f(5), \dots, 0, f(N-1)) \end{aligned}$$

är

$$f = Uu + R_1 Uv.$$

Det följer därför av linearitet, sats 11.3.5 (i) och sats 11.5.2 att

$$\hat{f}(k + \epsilon N/2) = \hat{u}(k) + \overline{\chi_1(k + \epsilon N/2)} \hat{v}(k),$$

där  $\epsilon$  är lika med 0 eller 1. Vidare är

$$\overline{\chi_1(k + \epsilon N/2)} = e^{-2\pi i (k + \epsilon N/2)/N} = e^{-2\pi i k/N} \cdot e^{-\epsilon \pi i} = \begin{cases} e^{-2\pi i k/N} & \text{om } \epsilon = 0, \\ -e^{-2\pi i k/N} & \text{om } \epsilon = 1. \end{cases}$$

Därmed är beviset klart.  $\square$

Om vi har beräknat fouriertransformerna  $\hat{u}$  och  $\hat{v}$ , behöver vi således bara utföra de  $N/2$  komplexa multiplikationerna  $e^{-2\pi i k/N} \cdot \hat{v}(k)$  (samt förstås  $N$  additioner) för att beräkna fouriertransformen  $\hat{f}$ . Detta visar att

$$(11.5) \quad \mu(N) \leq 2\mu(N/2) + N/2.$$

Transformen  $\hat{u}$  kan vi beräkna med hjälp av definitionen med  $(N/2)^2$  komplexa multiplikationer, och detsamma gäller för  $\hat{v}$ . Med hjälp av sats 11.6.1 kan vi således beräkna  $\hat{f}$  med

$$2(N/2)^2 + N/2 = \frac{1}{2}(N^2 + N)$$

komplexa multiplikationer, vilket är mindre än de  $N^2$  komplexa multiplikationer som behövs för att beräkna  $\hat{f}$  direkt.

Om  $N$  är delbart med fyra kan vi gå ett steg vidare genom att beräkna  $\hat{u}$  och  $\hat{v}$  med hjälp av sats 11.6.1, osv. Det gynnsammaste fallet är att  $N$  är en potens av 2. I detta fall leder en rekursiv användning av sats 11.6.1 till följande resultat.

**Sats 11.6.2.** *Antag att  $N$  är en potens av 2. Då kan fouriertransformen av en funktion i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  beräknas med högst*

$$\frac{1}{2}N \log_2 N$$

*komplexa multiplikationer.*

*Bevis.* Sätt  $N = 2^n$ ; påståendet i satsen är då ekvivalent med påståendet

$$(11.6) \quad \mu(2^n) \leq n2^{n-1}.$$

För att visa olikheten (11.6) använder vi induktion. För att beräkna transformen av en funktion  $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_2)$  behövs det inte någon multiplikation alls eftersom  $\hat{f}(0) = f(0) + f(1)$  och  $\hat{f}(1) = f(0) - f(1)$ . Således är  $\mu(2) = 0$ , så olikheten (11.6) gäller för  $n = 1$ .

Antag nu att olikheten (11.6) gäller då  $n = m$ . Induktionsantagandet tillsammans med olikheten (11.5) för  $N = 2^{m+1}$  ger då

$$\mu(2^{m+1}) \leq 2\mu(2^m) + 2^m \leq 2(m2^{m-1}) + 2^m = (m+1)2^m.$$

Detta visar att olikheten (11.6) gäller då  $n = m+1$ , och därmed är induktionsbeviset klart.  $\square$

EXEMPEL 11.6.1. Låt oss beräkna fouriertransformen till funktionen

$$f = (1, 0, 2, 6, 3, 8, 4, 6) \in \ell^2(\mathbf{Z}_8)$$

givet att vi redan beräknat transformerna till  $u = Df = (1, 2, 3, 4)$  och  $v = DR_{-1}f = (0, 6, 8, 6)$ . I exemplen 11.3.3 och 11.4.2 fann vi att

$$\hat{u} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i) \quad \text{och} \quad \hat{v} = (20, -8, -4, -8).$$

Eftersom  $e^{-2\pi i k/8}$  för  $k = 0, 1, 2$  och  $3$  är lika med  $1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i), -i$  och

$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , följer de nu av sats 11.6.1 att

$$\hat{f}(0) = 10 + 20 = 30$$

$$\hat{f}(4) = 10 - 20 = -10$$

$$\hat{f}(1) = -2 + 2i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(-8) = -2 - 4\sqrt{2} + (2 + 4\sqrt{2})i$$

$$\hat{f}(5) = -2 + 2i - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(-8) = -2 + 4\sqrt{2} + (2 - 4\sqrt{2})i$$

$$\hat{f}(2) = -2 - i(-4) = -2 + 4i$$

$$\hat{f}(6) = -2 + i(-4) = -2 - 4i$$

$$\hat{f}(3) = -2 - 2i - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(-8) = -2 + 4\sqrt{2} - (2 - 4\sqrt{2})i$$

$$\hat{f}(7) = -2 - 2i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(-8) = -2 - 4\sqrt{2} - (2 + 4\sqrt{2})i.$$

□

Den snabba fouriertransformen kan också användas för att beräkna faltningar effektivt. Om faltningen  $f * g$  av två  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ -funktioner beräknas direkt ur definitionen

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n-k)$$

behövs det  $N$  multiplikationer för varje komponent  $(f * g)(n)$  och således totalt  $N^2$  multiplikationer för att beräkna  $f * g$ . Om vi istället utnyttjar att

$$(f * g)(n) = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f * g)(n) = \frac{1}{N} \widehat{(\hat{f} \cdot \hat{g})}(-n),$$

kan vi beräkna  $f * g$  genom att först beräkna fouriertransformerna  $\hat{f}$  och  $\hat{g}$ , vilket totalt kräver högst  $2\mu(N)$  multiplikationer, sedan multiplicera ihop transformerna  $\hat{f}$  och  $\hat{g}$ , vilket kräver ytterligare  $N$  multiplikationer, sedan beräkna fouriertransformen  $\widehat{(\hat{f} \cdot \hat{g})}$ , vilket kräver ytterligare  $\mu(N)$  multiplikationer, och slutligen dividera med  $N$ . Den avslutande divisionen med heltalet  $N$  går snabbt, i synnerhet om  $N$  är en potens av 2, så den bortser vi ifrån i vår komplexitetsberäkning. Totalt åtgår således högst  $3\mu(N) + N$  komplexa multiplikationer. För heltalspotenser av  $N$  får vi därför följande korollarium till föregående sats.

**Sats 11.6.3.** *Om  $N$  är en potens av 2, kan faltningen av två funktioner i  $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$  beräknas med högst  $N + \frac{3N}{2} \log_2 N$  komplexa multiplikationer.*

## Övningar

- 11.13 a) Bestäm fouriertransformerna till  $a = (1, 4, 1, 2)$  och  $b = (1, 2, 3, 4)$  i  $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$ .  
 b) Utnyttja resultaten i a) och den snabba Fouriertransformen för att beräkna fouriertransformen till funktionen  $f = (1, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 4)$  i  $\ell^2(\mathbf{Z}_8)$ .

## Historiska notiser

Den diskreta fouriertransformen förekommer första gången i ett arbete av CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), publicerat posthumt 1866 i tredje volymen av hans samlade verk men skrivet 1805, två år före Fouriers första arbete om värmeledningsproblemet och fourierserier. Med utgångspunkt från problemet att bestämma en asteroidens bana utifrån ett ändligt antal observationer leds Gauss till problemet att bestämma koefficienterna  $a_k$  och  $b_k$  i serien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} b_k \sin 2\pi kx$$

när funktionsvärdena  $f(n/N)$  är kända för  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , och han visar att koefficienterna ges av de nu välkända formlerna för den diskreta fouriertransformen. Gauss utvecklar även en effektiv algoritm, identisk med den snabba fouriertransformen, för att bestämma koefficienterna då talet  $N$  är sammansatt.

Gauss arbete rönt föga uppmärksamhet, och den snabba fouriertransformen blev känd som en mycket effektiv algoritm för att bestämma den diskreta fouriertransformen först genom en uppsats 1965 av JAMES COOLEY (1926–) och JOHN TUCKER (1915–2000). Eftersom den diskreta fouriertransformen används inom många områden av digital signal- och bildbehandling, kom publiceringen av algoritmen att revolutionera utvecklingen inom dessa områden. Den snabba fouriertransformen är en av de mest använda numeriska algoritmerna.

## Kapitel 12

# Utblickar mot abstrakt harmonisk analys

Läsaren kan knappast ha undgått att märka de stora likheterna i resultaten för fourierserier och fouriertransformer. Detta är naturligtvis ingen tillfällighet utan det finns en bakomliggande generell teori. En grundlig genomgång av denna förutsätter kunskaper i funktionalanalys, mått- och integrationsteori och topologi, så diskussionen i detta kapitel blir därför nödvändigtvis skissartad.

### 12.1 Lokalt kompakta abelska grupper

#### Abelska grupper

Gemensamt för  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$  och  $\mathbf{Z}_N$ , som varit våra spelplaner för fourieranalysen, är att de är abelska grupper.

En *abelsk* eller *kommutativ grupp*  $G$  är en mängd som är försedd med en binär operation  $+$ , dvs. en operation som till varje par  $a, b$  av element i  $G$  tillordnar ett element  $a + b$  i  $G$ , som uppfyller följande fyra gruppaxiom:

- (i)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  för alla element  $a, b, c \in G$ . (*Associativitet*)
- (ii)  $a + b = b + a$  för alla element  $a, b \in G$ . (*Kommutativitet*)
- (iii) Det finns ett unikt *neutralt* element  $0$  i  $G$  sådant att  $a + 0 = a$  för alla  $a \in G$ .
- (iv) För varje element  $a \in G$  finns det ett unikt *inverst* element  $-a$  sådant att  $a + (-a) = 0$ .

$\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$  och  $\mathbf{Z}_N$  är som redan nämnts abelska grupper; gruppoperationen är för dessa grupper addition modulo  $2\pi$ , addition av heltal, addition av reella tal resp. addition av heltal modulo  $N$ . Gruppen  $\mathbf{T}$  kan också som mängd identifieras med enhetscirkeln i komplexa talplanet via avbildningen  $t \mapsto e^{it}$ , och gruppoperationen i  $\mathbf{T}$  svarar då mot multiplikation.

Andra exempel på naturliga abelska grupper är  $\mathbf{R}^n$  och  $\mathbf{T}^n$ , där gruppoperationen är komponentvis addition i  $\mathbf{R}$  resp. i  $\mathbf{T}$ .

Begreppet *translation* har en naturlig definition i abelska grupper  $G$ . Om  $X$  är en delmängd till gruppen och  $a$  är ett grupp-element, så kallas mängden  $a + X = \{a + x \mid x \in X\}$  ett translat till  $X$ . Och om  $f$  är en funktion som är definierad på hela gruppen, kallas funktionen  $f_a$ , definierad av att  $f_a(x) = f(x - a)$  för alla  $x \in G$ , ett translat till  $f$ .

### Topologiska grupper

Våra grundläggande objekt  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$  och  $\mathbf{Z}_N$  bär inte bara på en algebraisk struktur, utan de har också en topologisk struktur som gör det möjligt att tala om kontinuitet för funktioner som är definierade på grupperna och för själva gruppoperationerna addition (+) och inversbildning (-). Topologin definieras av att man specificerar vad som skall menas med (*öppna*) *omgivningar* till grupp-elementen.

En grupp med ett omgivningsbegrepp som uppfyller vissa naturliga villkor som vi inte specificerar här och som gör att gruppoperationerna blir kontinuerliga, kallas en *topologisk grupp*. Det räcker härvidlag att precisera omgivningarna till gruppens neutrala element, ty omgivningarna till övriga grupp-element fås som translat.

I grupperna  $\mathbf{R}$  och  $\mathbf{T}$  är de öppna omgivningarna av 0 öppna intervall  $]a, b[$  med  $a < 0 < b$ . Även i grupperna  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$  har vi ett omgivningsbegrepp, fast av det mer triviala slaget; varje delmängd av  $\mathbf{Z}$  resp. av  $\mathbf{Z}_N$  innehållande 0 är en öppen omgivning till 0, och speciellt är således enpunktsmängden  $\{0\}$  en öppen omgivning.

Grupperna  $\mathbf{T}$  och  $\mathbf{R}$  är tydligen *kontinuerliga* topologiska grupper i den meningen att det i varje öppen omgivning av ett godtyckligt element finns andra grupp-element. Grupperna  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$  är däremot *diskreta* grupper, vilket innebär att alla enpunktsmängder  $\{a\}$  är öppna omgivningar.

### Haarmåttet

För att man skall kunna utveckla någon slags motsvarighet till fourieranalysen på en grupp behöver man förstå ett användbart integralbegrepp, och för att kunna definiera ett sådant behöver man kunna mäta "storleken" hos delmängder till gruppen. För grupperna  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$  är detta enkelt; en delmängds mått är helt enkelt lika med antalet element i delmängden. En ändlig delmängds mått blir därigenom ett icke-negativt heltal, medan oändliga delmängder av  $\mathbf{Z}$  får mått  $+\infty$ .

Måttet för ett intervall i  $\mathbf{T}$  eller  $\mathbf{R}$  är lika med intervalllängden, och måttet för en mängd som är en disjunkt union av intervall är lika med summan av intervalllängderna. Man kan sedan utvidga definitionen så att varje "vettig" mängd blir mätbar, och det mått man får på detta vis kallas *Lebesguemåttet*.

En viktig egenskap hos Lebesguemåttet och hos de diskreta måtten på grupperna  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$  är att de är *translationsinvarianta*, dvs. alla translat  $a + X$  av en mängd  $X$  har samma mått.

Det finns en viktig klass av topologiska grupper för vilka man kan konstruera en motsvarighet till det translationsinvarianta Lebesguemåttet på  $\mathbf{R}$ , och det är grupper i vilka nollelementet har en öppen omgivning vars slutna hölje är kompakt. Sådana grupper kallas *lokalt kompakta*. Grupperna  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$  är uppenbarligen lokalt kompakta.

Varje lokalt kompakt abelsk grupp  $G$  har således ett translationsinvariant mått  $m$ , och detta mått är unikt i den bemärkelsen att om  $m_1$  och  $m_2$  är två translationsinvarianta mått, så finns det en positiv konstant  $c$  så att  $m_1(X) = cm_2(X)$  för alla (mätbara) delmängder  $X$ . Translationsinvarianta mått kallas *Haarmått*.<sup>1</sup>

I grupperna  $\mathbf{R}$  och  $\mathbf{T}$  är Haarmåttet det vanliga Lebesguemåttet. Det kan vara praktiskt att normalisera Haarmåttet i gruppen  $\mathbf{T}$  så att hela gruppen får mått 1, vilket förklarar förekomsten av faktorn  $1/2\pi$  i vår definition av  $L^1(\mathbf{T})$ -normen och fourierkoefficienterna  $\hat{f}(n)$ .

I diskreta grupper, som  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$ , får man ett Haarmått  $m$  genom att låta  $m(X)$  vara lika med antalet element i mängden  $X$ .

För varje givet mått, och då speciellt för Haarmåttet  $m$ , kan man på ett naturligt sätt definiera ett integralbegrepp. Definitionen av integralen  $\int_G f dm$  för komplexvärda funktioner  $f$  som är definierade på hela gruppen går i stora drag till så här:

- (i) Låt oss kalla en funktion  $f$  på  $G$  för *enkel* om den bara antar uppräkneligt många funktionsvärden, dvs. om man kan skriva  $G$  som en disjunkt union  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$  av uppräkneligt många (mätbara) delmängder och det finns tal  $c_n$  så att  $f(x) = c_n$  för alla  $x \in X_n$ . För reella, icke-negativa sådana enkla funktioner sätter man

$$\int_G f dm = \sum_{n=1}^{\infty} c_n m(X_n).$$

- (ii) Om  $f: G \rightarrow \mathbf{R}_+$  är en godtycklig (mätbar) funktion sätter man

$$\int_G f dm = \sup \int_G g dm,$$

där supremum tas över alla enkla reellvärda funktioner  $g$  som uppfyller  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  för alla  $x \in G$ .

- (iii) En godtycklig reell funktion  $f$  kan skrivas som en differens  $f = f_1 - f_2$  av två icke-negativa funktioner, och man sätter

$$\int_G f dm = \int_G f_1 dm - \int_G f_2 dm,$$

<sup>1</sup>Efter den ungerske matematikern Alfréd Haar, 1885–1933, som introducerade måttet.

förutsatt att minst en av integralerna i högerledet är ändlig. I övriga fall lämnas integralen odefinierad.

- (iv) Komplexvärda funktioner delas upp i real- och imaginärdel, varpå integralen definieras på ett uppenbart sätt.

I fortsättningen använder vi den traditionella beteckningen för integraler och skriver  $\int_G f(x) dx$  istället för  $\int_G f dm$ , då  $m$  är Haarmåttet.

Translationsinvariansen hos Haarmåttet översätts omedelbart i följande translationsinvariansegenskap hos integralen: För alla  $a \in G$  och alla integrerbara funktioner  $f$  är

$$\int_G f(x-a) dx = \int_G f(x) dx.$$

I de båda diskreta grupperna  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$ , där Haarmåttet för en enpunktsmängd är 1, blir integralen en summa. För en funktion (dvs. följd)  $f = (f(n))_{-\infty}^{\infty}$  definierad på  $\mathbf{Z}$  är med andra ord

$$\int_{\mathbf{Z}} f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

### $L^1(G)$ och $L^2(G)$

Med  $L^1(G)$  menas mängden av alla (mätbara) komplexvärda funktioner  $f$  på gruppen  $G$  som uppfyller

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| dx < \infty.$$

Med den vanliga definitionen av addition av funktioner och multiplikation med skalärer blir  $L^1(G)$  ett normerat vektorrum. Rummet är vidare fullständigt i den meningen att varje Cauchyföljd av funktioner i rummet har ett gränsvärde som också tillhör rummet. Fullständiga normerade vektorrum kallas *Banachrum*, så  $L^1(G)$  är ett Banachrum.

För  $L^1(G)$ -funktioner  $f$  och  $g$  kan man vidare definiera *faltning*  $f * g$  genom formeln

$$f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y) dy,$$

och den så erhållna funktionen  $f * g$  ligger också i  $L^1(G)$ , och uppfyller normolikheten  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

På rummet  $L^1(G)$  av funktioner har vi nu tre intressanta operationer – multiplikation med skalär, addition av funktioner och faltning – med ett antal egenskaper, exempelvis  $(f+g)*h = f*h + g*h$ ,  $f*(g*h) = (f*g)*h$  och  $f*g = g*f$ . Rummet  $L^1(G)$  är kort sagt en kommutativ *Banachalgebra*.



Ett annat mycket viktigt rum är inre produktrummet  $L^2(G)$ , som består av alla (mätbara) funktioner  $f$  på gruppen som uppfyller

$$\|f\|_2 = \left( \int_G |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

och med

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(x) \overline{g(x)} dx$$

som inre produkt. Även rummet  $L^2(G)$  är fullständigt, dvs. varje Cauchföljd av funktioner i rummet har ett gränsvärde som tillhör rummet, så rummet är ett s. k. *Hilbertrum*.

## 12.2 Fouriertransformen

*I fortsättningen antas  $G$  vara en godtycklig lokalt kompakt abelsk grupp. Generaliseringen av fourieranalysen till sådana grupper kallas harmonisk analys.*

Det första steget i en sådan abstrakt analys är att finna motsvarigheterna till de harmoniska svängningarna, som i fallet  $G = \mathbf{T}$  är funktionerna  $e^{int}$ . De två egenskaper hos dessa funktioner som låter sig generaliseras till allmänna grupper är att  $|e^{int}| = 1$  och  $e^{imt} \cdot e^{int} = e^{i(m+n)t}$ .

### Karaktärer och den duala gruppen

Med en *karaktär*  $\chi$  på  $G$  menas en kontinuerlig funktion  $\chi: G \rightarrow \mathbf{C}$  med följande två egenskaper:

- (i)  $|\chi(a)| = 1$  för alla  $a \in G$ ;
- (ii)  $\chi(a+b) = \chi(a) \cdot \chi(b)$  för alla  $a, b \in G$ .

Direkt ur karaktärsdefinitionen följer att karaktärerna på en grupp  $G$  har följande egenskaper:

- (a) Om  $\chi_1$  och  $\chi_2$  är karaktärer, så är också deras produkt  $\chi_1 \cdot \chi_2$  en karaktär.
- (b) Den konstanta funktionen 1 är en karaktär.
- (c) Om  $\chi$  är en karaktär, så är funktionen  $\bar{\chi}$  ( $= 1/\chi$ ) också en karaktär.

Vidare är uppenbarligen  $\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_2 \cdot \chi_1$  och  $\chi_1 \cdot (\chi_2 \cdot \chi_3) = (\chi_1 \cdot \chi_2) \cdot \chi_3$ , eftersom detta är egenskaper som alla funktioner har.

Karaktärerna till en lokalt kompakt abelsk grupp  $G$  bildar med andra ord en abelsk grupp med 1 som neutralt element, om vi använder oss av multiplikation av funktioner som gruppoperation. Denna grupp kallas den *duala gruppen* till  $G$  och brukar betecknas  $\hat{G}$ .

### Fouriertransformen

För  $f \in L^1(G)$  och  $\chi \in \widehat{G}$  sätter man

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\chi(-x) dx$$

vilket är väldefinierat eftersom  $|\chi(-x)| = 1$ , och därigenom definieras en komplexvärd funktion  $\hat{f}$  med den duala gruppen  $\widehat{G}$  som definitionsområde. Funktionen  $\hat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *fouriertransformen* till  $f$ .

Triangelolikheten för integraler ger med en gång att

$$(12.1) \quad |\hat{f}(\chi)| \leq \|f\|_1$$

för alla  $\chi \in \widehat{G}$ . Fouriertransformen till en  $L^1$ -funktion är med andra ord en begränsad funktion på  $\widehat{G}$ .

Kan man säga mer – är fouriertransformen  $\hat{f}$  en kontinuerlig funktion? För att besvara den frågan måste man först precisera topologin på den duala gruppen – än så länge har vi bara sagt att  $\widehat{G}$  är en grupp och inte nämnt någonting om dess topologi. Vi inför nu en sådan genom att som omgivningar i  $\widehat{G}$  ta med precis så många mängder som behövs för att fouriertransformerna till samtliga  $L^1(G)$ -funktioner skall bli kontinuerliga. Man kan visa att detta definierar en topologi på den duala gruppen som gör den till en lokalt kompakt abelsk grupp, och i denna topologi blir fouriertransformen per definition kontinuerlig. Fouriertransformen  $\hat{f}$  tillhör med andra ord rummet  $\mathcal{C}(\widehat{G})$  av alla kontinuerliga funktioner på  $\widehat{G}$ .

Man kan visa mer, nämligen att  $\hat{f}(\chi)$  går mot 0 i oändligheten, vilket svarar mot Riemann–Lebesgues lemma i fallet  $G = \mathbf{R}$ . I det allmänna abstrakta fallet säger man att en funktion  $\phi \in \mathcal{C}(\widehat{G})$  går mot 0 i oändligheten om det för varje  $\epsilon > 0$  finns en kompakt delmängd  $K$  av  $\widehat{G}$  så att  $|\phi(\chi)| < \epsilon$  för alla  $\chi$  som inte tillhör  $K$ , och rummet av alla kontinuerliga funktioner som går mot 0 i oändligheten betecknas  $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ . (För kompakta grupper  $\widehat{G}$  blir per definition  $\mathcal{C}_0(\widehat{G}) = \mathcal{C}(\widehat{G})$ .)

Rummet  $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$  är en algebra med addition av funktioner, multiplikation med skalär och multiplikation av funktioner som algebraoperationer, och med normen

$$\|\phi\| = \max_{\chi \in \widehat{G}} |\phi(\chi)|$$

blir rummet en fullständig normerad algebra, dvs. en Banachalgebra.

Eftersom fouriertransformen  $\hat{f}$  till en  $L^1(G)$ -funktion ligger i  $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ , får man en operator  $\mathcal{F}: L^1(G) \rightarrow \mathcal{C}_0(\widehat{G})$  genom att sätta

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}.$$

De viktigaste egenskaperna hos operatoren  $\mathcal{F}$  är sammanfattade i följande sats.

**Sats 12.2.1.** *Fouriertransformeringsoperatoren  $\mathcal{F}: L^1(G) \rightarrow \mathcal{C}_0(\widehat{G})$  har följande egenskaper:*

- (i) *Den är linjär, dvs.  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$ .*
- (ii) *Den är multiplikativ, dvs.  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$ .*
- (iii) *Den är begränsad, dvs.  $\|\mathcal{F}(f)\| \leq \|f\|_1$ .*
- (iv) *Den är injektiv, dvs.  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g) \Rightarrow f = g$ .*
- (v) *Givet att Haarmåttet  $dx$  på  $G$  är fixerat finns det en normalisering av Haarmåttet  $d\chi$  på  $\widehat{G}$  så att följande inversionsformel gäller:  
För alla  $L^1(G)$ -funktioner  $f$  med fouriertransform  $\hat{f}$  i  $L^1(\widehat{G})$  är*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x) d\chi,$$

*där likheten skall tolkas som likhet för  $L^1(G)$ -funktioner, dvs. nästan överallt. Speciellt råder likhet överallt om funktionen  $f$  är kontinuerlig.*

*Anmärkning.* Däremot är operatoren  $\mathcal{F}$  i allmänhet inte surjektiv, dvs. det finns  $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ -funktioner som inte är fouriertransformer.

*Bevis.* Linearitetsegenskapen, dvs. att  $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ , följer av att integralen är linjär, och multiplikativiteten, dvs. att  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ , följer genom omkastning av integrationsordningen precis som i fallet  $G = \mathbf{R}$ . Begränsningen är en omedelbar konsekvens olikheten (12.1).

Beviset för injektivitet och för inversionsformeln måste vi utelämnat här.

□

## Övningar

- 12.1 Låt  $G = \{0, a, b, c\}$  vara en grupp med fyra element och följande additionsregler (utöver regeln  $x + 0 = 0 + x = x$ ):

$$a + a = b + b = c + c = 0,$$

$$a + b = b + a = c,$$

$$a + c = c + a = b,$$

$$b + c = c + b = a.$$

Bestäm gruppens karaktärer och karakterisera den duala gruppen.

( $G$  och  $\mathbf{Z}_4$  är de enda grupperna med fyra element, och en konkret realisering av gruppen  $G$  får man genom att betrakta en kvadrat med hörn  $A, B, C, D$ , låta  $a$  beteckna spegling i diagonalen  $AC$ ,  $b$  spegling i diagonalen  $BD$  och  $c$  rotation 180 grader kring kvadratens mittpunkt, samt låta  $+$  betyda att operationerna utförs efter varandra.)

- 12.2 Visa att alla karaktärer  $\chi$  på gruppen  $\mathbf{R}$  (resp.  $\mathbf{T}$ ) har formen  $\chi(t) = e^{it\omega}$  med  $\omega \in \mathbf{R}$  (resp.  $\omega \in \mathbf{Z}$ ).

### 12.3 De klassiska grupperna

Låt oss nu gå igenom våra fyra klassiska grupper för att se vad de abstrakta begreppen blir i dessa fall.

#### Gruppen $\mathbf{T}$

Karaktärerna på gruppen  $\mathbf{T}$  utgörs av funktionerna  $\chi_n(t) = e^{int}$ , där  $n$  är ett godtyckligt heltal. Eftersom  $\chi_n(t) \cdot \chi_m(t) = \chi_{n+m}(t)$  är vidare den avbildning  $\phi: \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathbf{T}}$ , som fås genom att sätta  $\phi(n) = \chi_n$ , en 1-1-avbildning som respekterar gruppoperationerna i respektive grupper. Sådana avbildningar kallas *(grupp)isomorfier*.

Isomorfin  $\phi$  innebär att man "räknar med"  $\widehat{\mathbf{T}}$  som man räknar med  $\mathbf{Z}$  och gör att man kan identifiera den duala gruppen till  $\mathbf{T}$  med just gruppen  $\mathbf{Z}$  och skriva  $\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}$ .

Om man normaliserar Haarmåttet på  $\mathbf{T}$  så att ett intervall av längd  $\ell$  får mått  $\ell/2\pi$ , så blir fouriertransformen

$$\hat{f}(\chi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

där  $dt$  är det vanliga (Lebesgue-)måttet på  $\mathbf{T}$ . Genom att skriva  $\hat{f}(n)$  istället för  $\hat{f}(\chi_n)$  har vi således återfått vår ursprungliga definition av fouriertransformen till en  $L^1(\mathbf{T})$ -funktion.

Inversionsformeln

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

för  $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner med absolutkonvergent fourierserie (sats 4.5.5) visar att den korrekta normaliseringen av Haarmåttet på den duala gruppen  $\mathbf{Z}$  består i att ge varje punkt måttet 1.

#### Gruppen $\mathbf{Z}$

För varje reellt tal  $t$  är funktionen  $\chi_t(n) = e^{itn}$  en karaktär på  $\mathbf{Z}$ , och alla karaktärer på  $\mathbf{Z}$  har den formen. Eftersom  $\chi_{t_1} = \chi_{t_2}$  om  $t_1 - t_2$  är en multipel av  $2\pi$ , måste vi emellertid begränsa  $t$ -värdena till  $\mathbf{T} = ]-\pi, \pi]$  för att avbildningen  $\phi: \mathbf{T} \rightarrow \widehat{\mathbf{Z}}$ , definierad av att  $\phi(t) = \chi_t$ , skall vara bijektiv. Avbildningen bevarar vidare gruppoperationerna och är därför en gruppisomorfi, vilket innebär att vi kan identifiera karaktärsgruppen  $\widehat{\mathbf{Z}}$  med  $\mathbf{T}$ .

En  $L^1$ -funktion  $f$  på  $\mathbf{Z}$  är detsamma som en följd  $(f(n))_{n=-\infty}^{\infty}$  med absolutkonvergent summa, och med Haarmåttet på  $\mathbf{Z}$  normaliserat på det naturliga sättet, dvs. så att varje enpunktsmängd får mått 1, blir

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(\chi_t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) e^{-itn}.$$

Eftersom serien är likformigt konvergent, är fouriertransformen  $\hat{f}$  en kontinuerlig funktion, och genom att kasta om ordningen mellan summation och integration får vi som resultat

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(t) e^{itn} dt,$$

vilket är den konkreta versionen av inversionsformeln för gruppen  $\mathbf{Z}$ .

### Gruppen $\mathbf{R}$

För varje reellt tal  $\omega$  är funktionen  $\chi_\omega(t) = e^{i\omega t}$  en karaktär på  $\mathbf{R}$ , och alla karaktärer har den formen. Genom att sätta  $\phi(\omega) = \chi_\omega$  erhåller man en isomorfi  $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}$ , som gör att man kan identifiera den duala gruppen  $\widehat{\mathbf{R}}$  med gruppen  $\mathbf{R}$  själv.

Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

och inversionsformeln

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

för funktioner med fouriertransform tillhörande  $L^1(\mathbf{R})$  visar att om man väljer det vanliga Lebesguemåttet  $dt$  som Haarmått på  $\mathbf{R}$ , så måste man välja normaliseringsfaktorn  $1/2\pi$  för att få "rätt" Haarmått på den duala gruppen. (Om man ändrade definitionen av Fouriertransformen genom att multiplicera integralen med  $1/\sqrt{2\pi}$ , så skulle man få samma normaliseringsfaktor i inversionsformeln.)

### Gruppen $\mathbf{Z}_N$

Karaktärerna på den ändliga gruppen  $\mathbf{Z}_N$  består av de  $N$  funktionerna  $\chi_k(n) = e^{2\pi i kn/N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , och eftersom  $\chi_k(n) \cdot \chi_m(n) = \chi_{k+m}(n)$ , där additionen  $k+m$  sker i  $\mathbf{Z}_N$ , definierar avbildningen  $k \mapsto \chi_k$  en isomorfi mellan  $\mathbf{Z}_N$  och den duala gruppen  $\widehat{\mathbf{Z}_N}$ . Detta innebär att  $\widehat{\mathbf{Z}_N} = \mathbf{Z}_N$ .

Fouriertransformen till en funktion  $f = (f(n))_{n=0}^{N-1}$  på  $\mathbf{Z}_N$  är

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i kn/N},$$

vilket är den diskreta fouriertransformen som vi studerade i kapitel 11. Inversionsformeln för den diskreta fouriertransformen har formen

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{2\pi i kn/N}.$$

Faktorn  $1/N$  visar att om man normaliserar Haarmåttet på  $\mathbf{Z}_N$  så att varje enpunktsmängd får mått 1, så skall man normalisera Haarmåttet på den duala gruppen  $\widehat{\mathbf{Z}}_N = \mathbf{Z}_N$  så att hela gruppen får mått 1 för att inversionsformeln skall bli korrekt.

### Dualitet

Den duala gruppen  $\widehat{G}$  till en lokalt kompakt abelsk grupp  $G$  är själv en lokalt kompakt abelsk grupp och har som sådan i sin tur också en dual grupp. Karakteriseringen ovan av de duala grupperna till våra fyra klassiska grupper  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$  visar att i samtliga dessa fall är den duala gruppen till den duala gruppen av en grupp  $G$  gruppen  $G$  själv. Detta är en egenskap som gäller generellt – för alla lokalt kompakta abelska grupper  $G$  gäller att  $\widehat{\widehat{G}} = G$ .

Vidare är den duala gruppen till en kompakt grupp (som exempelvis grupperna  $\mathbf{T}$  och  $\mathbf{Z}_N$ ) alltid diskret, och den duala gruppen till en diskret grupp (som  $\mathbf{Z}$  och  $\mathbf{Z}_N$ ) alltid kompakt.

## 12.4 $L^2$ -teorin

Rummet  $L^2(G)$  är (för icke-kompakta grupper  $G$ ) inte en delmängd till  $L^1(G)$ , så därför är fouriertransformen  $\hat{f}$  inte apriori definierad för  $L^2$ -funktioner. Däremot är naturligtvis fouriertransformen definierad för alla funktioner  $f$  som ligger i snittet  $L^1(G) \cap L^2(G)$ , eftersom detta är en delmängd av  $L^1(G)$ , och man kan visa att det finns en *entydig linjär utvidgning* av fouriertransformen till hela  $L^2(G)$ . Den precisa formuleringen ges av *Plancherels sats*, som kan formuleras på följande vis.

**Sats 12.4.1.** *Det finns en unik bijektiv linjär operator*

$$\mathcal{F}: L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G})$$

*med egenskapen att  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  för alla  $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ . Om Haarmåtten på  $G$  och den duala gruppen  $\widehat{G}$  normaliseras så att inversionsformeln i sats 12.2.1 gäller, så är operatoren  $\mathcal{F}$  en isometri, dvs.*

$$(12.2) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

*för alla  $f \in L^2(G)$ .*

Parsevals formel för grupperna  $\mathbf{T}$  och  $\mathbf{Z}_N$  och Plancherels formel för gruppen  $\mathbf{R}$  är förstås specialfall av den generella formeln (12.2).

# Formler

## Fourierserier

Funktioner med period  $2\pi$ :

| $f(t)$   | $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ |
|--|--|
| <b>Allmänna regler</b>   |  |
| $\alpha f(t) + \beta g(t)$                                     | $\alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$                           |
| $e^{imt} f(t)$   | $\hat{f}(n - m)$   |
| $f(t - t_0)$   | $e^{-it_0 n} \hat{f}(n)$   |
| $f(-t)$  | $\hat{f}(-n)$  |
| $\overline{f(t)}$  | $\overline{\hat{f}(-n)}$   |
| $f'(t)$  | $in \hat{f}(n)$  |
| $f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) g(t - u) du$ | $\hat{f}(n) \hat{g}(n)$  |

**Trigonometrisk form**

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)).$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

**Funktioner med period  $P$ :**

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$\Omega = 2\pi/P,$$

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-in\Omega t} dt,$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \cos n\Omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \sin n\Omega t dt.$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$



## Fouriertransformen

| $f(t)$   | $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ |
|--|---|
| <b>Allmänna regler</b>                             |   |
| $\alpha f(t) + \beta g(t)$                         | $\alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$                  |
| $e^{i\alpha t} f(t)$                               | $\hat{f}(\omega - \alpha)$  |
| $f(t - t_0)$                                       | $e^{-it_0\omega} \hat{f}(\omega)$                                 |
| $f(-t)$  | $\hat{f}(-\omega)$  |
| $f(at) \quad (a \neq 0)$                           | $ a ^{-1} \hat{f}(\omega/a)$                                      |
| $\overline{f(t)}$                                  | $\overline{\hat{f}(-\omega)}$                                     |
| $tf(t)$  | $i \hat{f}'(\omega)$  |
| $f'(t)$  | $i\omega \hat{f}(\omega)$   |
| $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du$ | $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$                                  |
| $\hat{f}(t)$                                       | $2\pi f(-\omega)$   |
| $f(t)g(t)$   | $\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$                        |
| <b>Speciella funktioner</b>                        |   |
| $\chi_{[-a,a]}(t) \quad (a > 0)$                   | $\frac{2 \sin a\omega}{\omega}$                                   |
| $(a -  t )\chi_{[-a,a]}(t) \quad (a > 0)$          | $\frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}a\omega}{\omega^2}$                    |
| $e^{- t }$   | $\frac{2}{1 + \omega^2}$  |
| $e^{-t}H(t)$                                       | $\frac{1}{1 + i\omega}$   |
| $e^t(1 - H(t))$                                    | $\frac{1}{1 - i\omega}$   |
| $e^{- t } \operatorname{sgn}(t)$                   | $\frac{-2i\omega}{1 + \omega^2}$                                  |
| $\frac{1}{1 + t^2}$                                | $\pi e^{- \omega }$   |
| $e^{-t^2/2}$                                       | $\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$                                     |
| $\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$                  | $\pi \chi_{[-a,a]}(\omega)$                                       |

Plancherels formler:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

## Laplacetransformen

| $f(t)$                                | $F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ |
|---------------------------------------|---|
| <b>Allmänna regler</b>                |   |
| $\alpha f(t) + \beta g(t)$            | $\alpha F(s) + \beta G(s)$                                |
| $e^{at} f(t)$                         | $F(s - a)$  |
| $f(at), a > 0$                        | $a^{-1} F(s/a)$   |
| $f(t - a)H(t - a), a > 0$             | $e^{-as} F(s)$  |
| $t^n f(t)$                            | $(-1)^n F^{(n)}(s)$                                       |
| $f'(t)$                               | $sF(s) - f(0)$  |
| $f^{(n)}(t)$                          | $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)s^{n-1-k}$         |
| $\int_0^t f(u) du$                    | $s^{-1} F(s)$   |
| $f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t - u) du$ | $F(s)G(s)$  |
| <b>Speciella funktioner</b>           |   |
| 1                                     | $\frac{1}{s}$   |
| $t^n, n = 0, 1, 2, \dots$             | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                                      |
| $t^\alpha, \alpha > -1$               | $\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$                 |
| $e^{at}$                              | $\frac{1}{s - a}$   |
| $t^n e^{at}, n = 0, 1, 2, \dots$      | $\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$                                |
| $t^\alpha e^{at}, \alpha > -1$        | $\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(s - a)^{\alpha+1}}$           |
| $\cos at$                             | $\frac{s}{s^2 + a^2}$                                     |
| $\sin at$                             | $\frac{a}{s^2 + a^2}$                                     |
| $t \cos at$                           | $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$                         |
| $t \sin at$                           | $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$                               |

---

|                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| $\frac{\sin t}{t}$          | $\arctan \frac{1}{s}$              |
| $\log t$                    | $-\frac{\log s + \gamma}{s}$       |
| $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$ | $\log\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$ |

---

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\gamma = \text{Eulers konstant} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \approx 0.5772156.$$

## Z-transformen

| $a_n$   | $A(z) = \mathcal{Z}[a](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ |
|---|---|
| <b>Allmänna regler</b>  |   |
| $\alpha a_n + \beta b_n$  | $\alpha A(z) + \beta B(z)$                                  |
| $\lambda^n a_n$   | $A(z/\lambda)$  |
| $a_{n-k}$ , där $k \geq 1$ och<br>$a_{-1} = \cdots = a_{-k} = 0$                        | $z^{-k} A(z)$   |
| $a_{n+k}$ , där $k \geq 1$  | $z^k A(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^{k-j}$                   |
| $na_n$  | $-zA'(z)$   |
| $(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  | $A(z)B(z)$  |
| <b>Speciella följder</b>  |   |
| $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0, \\ 0 & \text{om } n \geq 1 \end{cases}$ | 1   |
| 1   | $\frac{z}{z-1}$   |
| $n$   | $\frac{z}{(z-1)^2}$   |
| $n^2$   | $\frac{z^2 + z}{(z-1)^3}$                                   |
| $\binom{n}{k}$  | $\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$                                     |
| $\lambda^n$   | $\frac{z}{z-\lambda}$                                       |
| $n\lambda^n$  | $\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$                           |
| $\binom{n}{k} \lambda^{n-k}$  | $\frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}$                               |
| $\cos \alpha n$   | $\frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$      |
| $\sin \alpha n$   | $\frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$            |

## Diskreta fouriertransformen

Grupp:  $\mathbf{Z}_N$

Karaktärer:  $\chi_k(n) = e^{2\pi i n k / N}$ , ( $k \in \mathbf{Z}_N$ )

Karaktärsrelationer:  $\chi_k(n) = \chi_n(k)$ ,  $\overline{\chi_k(n)} = \chi_k(-n) = 1/\chi_k(n)$

| $f(k)$   | $\hat{f}(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_n(k)}$ |
|--|--|
| <b>Allmänna regler</b>                               |  |
| $\alpha f(k) + \beta g(k)$                           | $\alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$                             |
| $\chi_m(k) f(k)$                                     | $\hat{f}(n - m)$   |
| $f(k - m)$   | $\overline{\chi_m(n)} \hat{f}(n)$                                  |
| $\hat{f}(k)$   | $N f(-n)$  |
| $f * g(k) = \sum_{m \in \mathbf{Z}_N} f(m) g(k - m)$ | $\hat{f}(n) \hat{g}(n)$  |

Parsevals formel: 
$$\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} |\hat{f}(n)|^2$$

## Snabba fouriertransformen

Låt  $N$  vara jämnt och sätt för  $f = (f(k))_{k=0}^{N-1}$ :

$$u = (f(2k))_{k=0}^{N/2-1} \quad \text{och} \quad v = (f(2k+1))_{k=0}^{N/2-1}.$$

Då är

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \hat{u}(k) + e^{-2\pi i k / N} \hat{v}(k) \\ \hat{f}(N/2 + k) &= \hat{u}(k) - e^{-2\pi i k / N} \hat{v}(k) \end{aligned}$$

för  $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ .

# Svar till övningsuppgifter

- 2.3 a)  $f \in L^1([0, 1])$ ,  $\|f\|_1 = 2$       b)  $f \notin L^1([0, 1])$   
c)  $f \in L^1([0, 1])$ ,  $\|f\|_1 = 1$

2.5 Följden i b) ligger i  $\ell^2$  och har norm  $3^{-1/2}$ .

- 2.8 a)  $f \notin L^2(I)$       b)  $f \in L^2(I)$ ,  $\|f\|_2 = 1$       c)  $f \in L^2(I)$ ,  $\|f\|_2 = 1$

2.9 T. ex.  $f(t) = |t|^{-1/2}(1 + |t|)^{-1}$  och  $g(t) = (1 + |t|)^{-1}$ .

3.1  $1/3$

3.2 Varje rationellt tal är en period.

3.3 Låt  $P$  vara en godtycklig period och skriv den på formen  $P = nP_0 + r$  där  $n$  är ett heltal och  $0 \leq r < P_0$ . Då är också  $r$  en period, så det följer att  $r = 0$  eftersom  $P_0$  är den minsta positiva perioden

3.4 Om  $P_0$  är lika med infimum över alla positiva perioder, så är  $P_0$  inte en period eftersom det inte finns någon minsta positiv period. Definitionen av infimum innebär att det finns perioder  $P > P_0$  godtyckligt nära  $P_0$ . Eftersom  $P - P_0$  också är en period, finns det därmed godtyckligt små positiva perioder.

3.5 Om den kontinuerliga periodiska funktionen  $f$  inte är konstant, så finns det två tal  $a$  och  $b$  där  $f(a) < f(b)$ . Kontinuiteten medför att  $f(a) < f(t)$  för alla  $t$  i en liten omgivning av  $b$ . Eftersom funktionen har godtyckligt små perioder finns det ett tal  $c$  i denna omgivning där  $f(c) = f(a)$ . Detta är en motsägelse.

3.6  $8/3$

3.7  $\frac{3\sqrt{2}}{4}(1 - i)e^{2it} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(1 + i)e^{-2it}$

3.10  $\frac{1}{4}\sin(3t + \frac{\pi}{2}) + \frac{3}{4}\sin(t + \frac{\pi}{2})$

3.11  $\frac{1}{16}e^{4it} - \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{1}{16}e^{-4it}$  resp.  $\frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}$

$$3.12 \quad 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nt$$

$$3.13 \quad 2N \text{ stycken}$$

$$3.14 \quad 2i \text{ resp. } 1.$$

$$3.15 \quad -2$$

$$3.16 \quad \text{a) } 2 \sin t + 3 \cos 2t + 4 \sin 3t \quad \text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6t$$

$$\text{c) } \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0} \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2} e^{int} \quad \text{d) } \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{int}$$

$$\text{e) } \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$$

$$3.17 \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nt}{4n^2 - 1}$$

$$3.18 \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$$

$$3.19 \quad \text{a) } \hat{g}(n) = e^{-inc} \hat{f}(n) \quad \text{b) } \hat{g}(n) = \hat{f}(n - m)$$

$$\text{c) } \hat{g}(n) = (-1)^{n-1} n^2 \hat{f}(n)$$

$$3.20 \quad \hat{g}(n) = e^{-3(n-2)i} \hat{f}(n - 2)$$

$$3.22 \quad f(t) = C e^{2it}$$

$$3.26 \quad \text{a) och b) Fourierserien konvergerar med summa } f(t) \text{ för alla } t.$$

$$3.27 \quad \text{a) } -\pi^2/12 \quad (\text{Välj } t = 0 \text{ i serien i 3.26 a)}$$

$$\text{b) } \pi^2/6 \quad (\text{Välj } t = \pi \text{ i serien i 3.26 a)}$$

$$\text{c) } 1/2 \quad (\text{Välj } t = 0 \text{ i serien i 3.26 b)}$$

$$3.28 \quad \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{\pi} \cos t$$

$$3.30 \quad f(t) \sim \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha - n} e^{int}$$

$$3.31 \quad \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha \pi}$$

$$3.32 \quad \text{a) } \frac{\pi^4}{90} \quad \text{b) } \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

$$4.1 \quad \pi$$



4.3 För  $|\alpha| \leq 1$  utom  $\alpha = 1$  med abelsumma  $(1 - \alpha)^{-1}$ .

4.4 För  $|\alpha| \leq 1$  utom  $\alpha = 1$  med abelsumma  $\alpha(1 - \alpha)^{-2}$ .

4.7 b) Visa först att  $\int_0^\pi \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})t|}{\sin \frac{1}{2}t} dt = 2 \int_0^\pi \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})t|}{t} dt + O(1) =$   
 $2 \int_0^{N\pi} \frac{|\sin u|}{u} du + O(1)$ . Utnyttja sedan att för  $k \geq 3$  är  
 $\frac{2}{\pi} \int_k^{k+1} \frac{du}{u} \leq \frac{2}{k\pi} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \leq \frac{2}{(k-1)\pi} \leq \frac{2}{\pi} \int_{k-2}^{k-1} \frac{du}{u}$ .

$$5.1 \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \sin 2t \sin 2x + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} (\cos(2n+1)t \sin(2n+1)x)$$

$$5.2 \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \sin nt \sin nx$$

$$5.3 \quad u(x, t) = e^{-t} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$5.4 \quad u(x, t) = 1 + 3e^{-16t} \cos 4x$$

$$5.5 \quad u(x, t) = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x$$

$$5.6 \quad \text{a) } u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{8e^{-2t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$5.7 \quad u(x, t) = \frac{x}{\pi} + \sin x - e^{-t} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin nx$$

$$6.1 \quad \text{a) } \frac{(e^{-i\omega} - 1)i}{\omega} \quad \text{b) } \frac{(1 + i\omega)e^{-i\omega} - 1}{\omega^2} \quad \text{c) } \frac{-4i\omega}{(1 + \omega^2)^2} \quad \text{d) } \frac{1 + e^{-i\pi\omega}}{1 - \omega^2}$$

$$\text{e) } 2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}$$

$$6.2 \quad \text{a) } \frac{(e^{-i\omega} - 1)i}{\omega} \quad \text{b) } \frac{2i \sin \pi\omega}{\omega^2 - 1} \quad \text{c) } 2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}$$

$$6.3 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

$$6.4 \quad \text{a) } 2i \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2} \quad \text{b) } -\frac{4i\omega}{(1 + \omega^2)^2}$$

$$6.6 \quad \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}; \quad f * g(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}.$$

$$6.7 \quad f(t) = \frac{4}{3}((1-H(t))e^t + H(t)e^{-t/2}) = \begin{cases} \frac{4}{3}e^t & \text{om } t < 0, \\ \frac{4}{3}e^{-t/2} & \text{om } t > 0. \end{cases}$$

[Ledning: Integralkvationen kan skrivas  $f(t) = e^{-|t|} + \frac{1}{2}k * f(t)$ , där  $k(t) = H(t)e^{-t}$ . Fouriertransformera!]

$$6.8 \quad \text{a) } f * f(t) = (1+|t|)e^{-|t|} \quad \text{b) } y(t) = -\frac{1}{2}(1+|t|)e^{-|t|}$$

$$6.9 \quad \hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}. \text{ Integralens värde är } \frac{\pi}{b}e^{-ab} \quad (= \hat{f}(a)).$$

$$6.10 \quad \pi$$

$$6.11 \quad \hat{f}(\omega) = 2\pi \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-|\omega|}$$

$$6.14 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \quad \text{b) } \frac{2\pi}{3}$$

$$6.15 \quad \pi$$

$$6.16 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \quad \text{b) } \frac{2\pi}{15}$$

$$6.19 \quad \hat{g}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$6.20 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = 2 \frac{\cos \omega - \cos 2\omega}{\omega^2} \quad \left( = 4 \frac{\sin^2 \omega - \sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \right)$$

$$\text{b) } \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{c) } 4 \arctan 2 - \frac{\pi}{2} - \log \frac{5}{2} \quad (\text{Använd Plancherels formel på polär form.})$$

$$6.21 \quad \text{a) } \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } \hat{g}(\omega) = \frac{e^{1+i\omega} - e^{-(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2} \quad \text{c) } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \quad \text{d) } \frac{1}{2}$$

$$6.22 \quad \text{b) } \hat{f}(\omega) = \pi(e^{e^{-|\omega|}} - 1) \quad \text{c) } \pi(e - 1)$$

$$6.23 \quad \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\pi/\sqrt{a}} + e^{-\pi/\sqrt{a}}}{e^{\pi/\sqrt{a}} - e^{-\pi/\sqrt{a}}} - \frac{1}{2}$$

$$6.1 \quad \text{a) } \frac{(e^{-i\omega} - 1)i}{\omega} \quad \text{b) } \frac{(1+i\omega)e^{-i\omega} - 1}{\omega^2} \quad \text{c) } \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad \text{d) } \frac{1+e^{-i\pi\omega}}{1-\omega^2}$$

$$6.2 \quad \text{a) } 2i \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2} \quad \text{b) } i \frac{e^{-ib\omega} - e^{-ia\omega}}{\omega} \quad \text{c) } 2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}$$

$$6.3 \quad \hat{f}(\omega) = 2\pi \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-|\omega|}$$

6.4 a)  $\hat{\phi}_{\mu,\sigma}(\omega) = e^{-i\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2}$

b)  $\phi_{\mu_1,\sigma_1} * \phi_{\mu_2,\sigma_2} = \phi_{\mu_1+\mu_2,\sigma}$ , där  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . I sannolikhetsteoretiska termer betyder detta att summan av oberoende normalfördelade stokastiska variabler är normalfördelad och att summans medelvärde resp. varians är lika med summan av medelvärdena resp. varianserna hos de i summan ingående stokastiska variablerna.

6.5 a)  $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$

6.6  $\hat{g}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$

6.8  $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{b} e^{-b|\omega|}$ . Integralens värde är  $\frac{\pi}{b} e^{-ab} \quad (= \hat{f}(a))$ .

6.9  $\pi$

6.10  $f * g(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$

6.13 a)  $f * f(t) = (1 + |t|)e^{-|t|}$       b)  $y(t) = -\frac{1}{2}(1 + |t|)e^{-|t|}$

6.14  $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} e^x & \text{om } x < 0, \\ \frac{4}{3} e^{-x/2} & \text{om } x > 0. \end{cases}$

6.15 a)  $\hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}$       b)  $\frac{2\pi}{3}$

6.16  $\pi$

6.17 a)  $\hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}$       b)  $\frac{2}{15} \pi$

6.18 a)  $\hat{f}(\omega) = 2 \frac{\cos \omega - \cos 2\omega}{\omega^2} \quad (= 4 \frac{\sin^2 \omega - \sin^2(\omega/2)}{\omega^2})$

b)  $\frac{4\pi}{3}$

c)  $4 \arctan 2 - \frac{\pi}{2} - \log \frac{5}{2}$  (Använd Plancherels formel på polär form.)

6.19 a)  $\frac{\pi}{2}$       b)  $\hat{g}(\omega) = \frac{e^{1+i\omega} - e^{-(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2}$       c)  $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2}$       d)  $\frac{1}{2}$

6.20  $\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\pi/\sqrt{a}} + e^{-\pi/\sqrt{a}}}{e^{\pi/\sqrt{a}} - e^{-\pi/\sqrt{a}}} + \frac{1}{2}$

8.3  $\phi_{\mu_1,\sigma_1} * \phi_{\mu_2,\sigma_2} = \phi_{\mu_1+\mu_2,\sigma}$ , där  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . I sannolikhetsteoretiska termer betyder detta att summan av oberoende normalfördelade stokastiska variabler är normalfördelad och att summans medelvärde resp. varians är lika med summan av medelvärdena resp. varianserna hos de i summan ingående stokastiska variablerna.

$$9.1 \quad \text{a) } \frac{2}{s^3} \quad \text{b) } \frac{1}{(s-2)^2} \quad \text{c) } \frac{1}{s^2-2s+2} \quad \text{d) } \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\text{e) } \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2} \quad \text{f) } \frac{e^s-1-s}{s^2(e^s-1)}$$

$$9.2 \quad \text{a) } \frac{1}{2}t^2 \quad \text{b) } \frac{1}{6}t^3 \quad \text{c) } \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \quad \text{d) } t\chi_{[0,1[}(t) + H(t-1)$$

$$\text{e) } \frac{1}{2}t^2\chi_{[0,1[}(t) + (t-\frac{1}{2})H(t-1)$$

$$9.5 \quad \text{a) } \frac{3}{s^2+9} \quad \text{b) } \frac{s}{s^2+9} \quad \text{c) } \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \quad \text{d) } \frac{e^{-s}}{s-2}$$

$$\text{e) } \frac{2}{(s-3)(s^2+4)}$$

$$9.6 \quad \text{a) } 1 - e^{-t} \quad \text{b) } \frac{1}{5}e^{-2t}\sin 5t \quad \text{c) } (3t+1)e^{2t} - e^{-t}\cos t$$

$$\text{d) } \frac{1}{2}(t-1)\sin(t-1) \cdot H(t-1) \quad \text{e) } (e^{2(t-1)} - e^{t-1})H(t-1)$$

$$9.7 \quad \tilde{f}(s) = \arctan \frac{1}{s}$$

$$9.8 \quad f(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}$$

$$9.9 \quad f(t) = 2\cos t - t\sin t$$

$$9.10 \quad x(t) = -t + e^t - e^{-t}, \quad y(t) = -1 + e^t + e^{-t}$$

$$9.11 \quad f(t) = 4 - 3\cos t$$

$$9.12 \quad y(t) = t + 2 + (2t-2)e^t$$

$$9.14 \quad \tilde{f}(s) = -\frac{\log s + C}{s}, \text{ där } C = -\int_0^\infty e^{-t} \log t \, dt.$$

Man kan visa att konstanten  $C$  är lika med Eulers konstant  $\gamma$ .

$$9.15 \quad x(t) = 2e^t + \sin t, \quad y(t) = \cos t$$

$$9.16 \quad y(t) = z(t) = e^{2t}$$

$$9.17 \quad \tilde{f}(s) = \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

$$9.19 \quad K(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2(s+2)}, \quad k(t) = (3-t)e^{-t} - 3e^{-2t}. \text{ Stabilt.}$$

$$9.20 \quad K(s) = \frac{1}{s^2+4}, \quad k(t) = \frac{1}{2}\sin 2t. \text{ Instabilt.}$$

$$9.21 \quad \text{a) Instabil} \quad \text{b) Stabil} \quad \text{c) Stabil} \quad \text{d) Stabil}$$

$$9.22 \quad \text{a) } y(2n\pi) = -2n\pi \rightarrow -\infty \quad \text{b) } y(2n\pi) = -\int_0^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \rightarrow -\infty$$

$$9.23 \quad \frac{2e^s}{2e^s - 1}$$

$$9.25 \quad \delta + 2\delta_1 \text{ resp. } 1 + 2e^{-s}$$

$$10.1 \quad \text{a) } \frac{z}{z+2} \quad \text{b) } \frac{3z}{(z-3)^2} \quad \text{c) } \frac{2z^2+4z}{(z-2)^3}$$

$$10.2 \quad \text{a) } \frac{1}{z^2+1} \quad \text{b) } \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

$$10.3 \quad -z \log\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$10.4 \quad \text{a) } \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq 1, \\ 1 & \text{om } n = 1 \end{cases} \quad \text{c) } a_n = n \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot (-1)^n.$$

$$10.5 \quad a_n = n + 5 - 3 \cdot 2^n$$

$$10.6 \quad a_n = n + 1 + \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = n + 1 + \sin \frac{\pi}{2} n$$

$$10.7 \quad a_n = \frac{2}{5} \cdot 4^n + \frac{3}{5} \cdot (-1)^n, \quad b_n = -\frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{9}{5} \cdot (-1)^n$$

$$10.8 \quad \text{a) } x_0 = 1, \quad x_n = \frac{5}{6} \cdot 2^n \text{ för } n \geq 1$$

$$\text{b) } x_n = \frac{1}{5}(2^n + 4 \cos \frac{\pi}{2} n - 2 \sin \frac{\pi}{2} n)$$

$$10.10 \quad \text{Systemet är instabilt. } y_{2k} = 0 \text{ och } y_{2k+1} = (-1)^k(k+1).$$

$$10.11 \quad \text{Systemet är stabilt. Överföringsfunktion: } (z^2 - z) \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) + z.$$

$$11.1 \quad \text{a) } \hat{f} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i) \quad \text{b) } \hat{f} = (2i, -4i, 6, -2 + 2i)$$

$$\text{c) } \hat{f} = (21, -3 + 3\sqrt{3}i, -3 + \sqrt{3}i, -3, -3 - \sqrt{3}i, -3 - 3\sqrt{3}i)$$

$$11.3 \quad \text{a) } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{b) } (0, 0, 1, 0)$$

$$11.4 \quad f = \left(1, \frac{i\sqrt{3}}{3}, -\frac{i\sqrt{3}}{3}\right), \quad \hat{g} = (0, 0, 3) \text{ och } f * g = (0, 0, 0).$$

$$11.5 \quad f = (1, 2, -1, 0)$$

$$11.6 \quad \text{a) } f = (c, c, \dots, c)$$

$$\text{b) Alla } b \text{ med } \sum_{k=0}^N b_k = 0. \text{ Lösningen är ej entydig.}$$

$$11.7 \quad \text{Eigenvärdena är } 8, -1 + i, 2 \text{ och } -1 - i.$$

$$11.8 \quad \text{a)}$$

$$\begin{bmatrix} i & -2-i & 3 & 0 \\ 0 & i & -2-i & 3 \\ 3 & 0 & i & -2-i \\ -2-i & 3 & 0 & i \end{bmatrix}$$

b) Egenvärden:  $1, -2-i, 5+2i$  och  $-4+3i$ . Motsvarande egenvektorer:  $(1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1)$  och  $(1, -i, -1, i)$ .

$$11.12 \text{ b) } v = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \sqrt{2}, 1, -1 - \sqrt{2}, 1)$$

$$11.13 \text{ a) } \hat{a} = (8, -2i, -4, 2i), \quad \hat{b} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i) \\ \text{b) } (18, (\sqrt{8} - 2)i, -4 + 2i, (\sqrt{8} + 2)i, -2, -(\sqrt{8} + 2)i, -4 - 2i, (2 - \sqrt{8})i)$$

12.1 Den duala gruppen  $\hat{G}$  består av fyra element  $\chi_1, \chi_A, \chi_B$  och  $\chi_C$  som definieras av tabellen

| $x$         | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
|-------------|---|-----|-----|-----|
| $\chi_1(x)$ | 1 | 1   | 1   | 1   |
| $\chi_A(x)$ | 1 | 1   | -1  | -1  |
| $\chi_B(x)$ | 1 | -1  | 1   | -1  |
| $\chi_C(x)$ | 1 | -1  | -1  | 1   |

Avbildningen  $0 \mapsto \chi_1, a \mapsto \chi_A, b \mapsto \chi_B, c \mapsto \chi_C$  är en isomorfi mellan  $G$  och  $\hat{G}$ , så de båda grupperna  $G$  och  $\hat{G}$  är isomorfa.

12.2 Visa först att om  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  är en kontinuerlig icke-trivial multiplikativ funktion, dvs. om  $f$  uppfyller

$$(1) \quad f(s+t) = f(s)f(t) \quad \text{och} \quad f(0) = 1,$$

så är  $f$  automatiskt deriverbar med  $f'(t) = f'(0)f(t)$ . Deriverbarheten följer genom att välja  $\delta > 0$  så litet att  $a(\delta) = \int_0^\delta f(s) ds \neq 0$  (här används att  $f$  är kontinuerlig och  $f(0) = 1$ ) och sedan integrera identiteten i (1) med avseende på  $s$  över intervallet  $[0, \delta]$ , vilket efter ett variabelbyte leder till

$$f(t) = a(\delta)^{-1} \int_t^{t+\delta} f(u) du.$$

# Litteratur

För dem som önskar fördjupa sig ytterligare inom området fourieranalys följer här några förslag på böcker.

THOMAS W. KÖRNER, *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1989.

Författaren presenterar ett skyltfönster med idéer, tekniker och resultat inom fourieranalysen. Boken är tillgänglig för alla med grundläggande kunskaper i analys.

ELIAS M. STEIN & RAMI SHAKARCHI, *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.

Boken riktar sig till studenter med begynnande kunskaper inom matematisk analys och presenterar teorin utan att fastna i teknikaliteter. Med utgångspunkt från vågekvationen behandlas först fourierserien, olika konvergens- och summabilitetsbegrepp samt ett flertal tillämpningar. Den andra delen av boken handlar om fouriertransformen med tillämpningar på de klassiska partielladifferentialekvationerna och Radontransformen. Avslutningsvis diskuteras fourierteorin för ändligaabelska grupper med tillämpning på primtal i aritmetiska följder.

ANDERS VRETBLAD, *Fourier Analysis and Its Applications*, Springer, 2003.

Boken innehåller förutom klassisk fourieranalys också en lättillgänglig introduktion till fourieranalys med distributioner.

YITZHAK KATZNELSON, *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd ed., Cambridge University Press, 2004.

Denna klassiker är en avancerad bok som förutsätter kunskaper i funktionalanalys och måtteori. Boken startar med cirkelgruppen  $\mathbf{T}$  och handlar i de första fem kapitlen om klassiska fourierserier för att sedan övergå till fourieranalys på  $\mathbf{R}$  i kapitel 6 och på allmänna lokalt kompakta grupper i kapitel 7. Ett avslutande kapitel ägnas åt kommutativa banachalgebror.

WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1987.

En klassiker för den som läst en grundläggande kurs i analys och vill lära sig mer om reell och komplex analys på masternivå. Tio av bokens tjugo kapitel ägnas åt reell analys: mått och integrationsteori,  $L^p$ -rum, fourieranalys, elementär hilbertrumsteori och exempel på banachrumsteknik.





# Sakregister

- ABEL, 112
- Abels summationssats, 93
- abelsk grupp, 253
- abelsummation, 93
- absolutkonvergent, 21
- additiv avbildning, 89
- D'ALEMBERT, 80
- aliasing, 168
- amplitud, 50
- analog signal, 4
- autokorrelationsfunktion, 143
- avbildning
  - additiv, 89
  - begränsad, 89
  - positiv, 89
  - subadditiv, 89
- avstånd, 25
- bandbegränsad, 5, 165
- bandbredd, 5, 165
- begränsad avbildning, 89
- begynnelsevärdesregeln, 204
- BERNOULLI, 80
- BESSEL, 81
- Bessels olikhet, 34, 103
- betingat konvergent, 21
- BIBO-stabilitet, 173, 225
- BOREL, 185
- Bromwichintegralen, 199
- $\mathcal{C}(I)$ , 24
- $\mathcal{C}_K(I)$ , 24
- $\mathcal{C}_b(I)$ , 24
- $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ , 54
- $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ , 131
- CARLESON, 112
- Cauchy–Schwarz olikhet, 30
- Cauchys konvergensprincip, 20
- centrala gränsvärdessatsen, 180
- CESÀRO, 112
- CLAIRAUT, 80
- COOLEY, 252
- cyklisk matris, 243
- delsumma, 20
- delton, 2
- diffusion, 8
- DINI, 112
- Dinis konvergenskriterium, 106
- Diracmåttet, 40
- DIRICHLET, 80
- Dirichletkärna, 151
- Dirichlets
  - polynom, 52
  - problem, 124
- diskret
  - fouriertransform 235
  - grupp, 254
  - signal, 4
- divergent serie, 20
- dominerad konvergens, 85
- dual grupp, 257
- $\mathcal{E}$ , 188, 213
- entydighetssatsen, 100, 138, 150, 198, 214
- EULER, 80
- exponentiellt växande, 188
- faltning, 7, 68, 136, 162, 192, 223, 240, 256
- fasvinkel, 50

- FEJÉR, 112  
 FICK, 11  
 Ficks lag, 9, 10  
 FISCHER, 162  
 FOURIER, 80  
 fourierbasen, 234  
 fourierkoefficient, 3, 57  
 fourierserie, 3, 45, 57  
 fouriertransform, 5, 58, 128, 129, 156, 159, 161, 235, 258  
 frekvenssvar, 172  
 fullständigt ON-system, 35  
  
 GAUSS, 252  
 Gausskärnan, 147  
 generaliserad derivata, 107  
 GIBBS, 81  
 Gibbs fenomen, 73  
 GRANDI, 112  
 grundton, 2  
 grundvinkelfrekvens, 79  
  
 Haarmått, 255  
 harmonisk  
     analys, 1  
     funktion, 124  
 Heavisidefunktionen, 42  
 Heisenbergs olikhet, 175  
 högergränsvärde, 69  
 Hölderkontinuitet, 107  
  
 impuls, 6, 224  
 impulssvar, 6, 172, 206, 224  
 inre produkt, 30  
 inreproduktrum, 30  
 invers fouriertransform, 236  
 inversionsformeln, 128, 199  
 inversionssatsen, 139, 149, 236  
  
 JORDAN, 112  
  
 karaktär, 232, 257  
 kausal, 6, 174, 224  
 komplext vektorrum, 24  
 kontinuerlig, 14  
 kontinuitetsprincipen, 89  
 konvergens  
     betingad, 21  
     dominerad, 85  
     i  $L^1$ , 29  
     i normerat rum, 25  
     likformig, 26, 86  
     punktvis, 85  
 konvergensabskissa, 188  
 konvergent serie, 20  
  
 $L^1$ , 24, 27, 54, 256  
 $L^1$ -normen, 27  
 $L^2$ , 37, 75, 257  
 $\ell^2$ , 31  
 LAGRANGE, 80  
 LAPLACE, 185  
 laplacetransform, 189, 210  
 LEBESGUE, 43  
 Lebesgues sats om dominerad konvergens, 85  
 LEIBNIZ, 43  
 LÉVY, 186  
 Lévy's sats, 181  
 likformig  
     konvergens, 26, 86  
     kontinuitet, 15  
 LINDBERG, 186  
 linjär funktional, 39  
 linjärt system, 170  
 lokalt kompakt grupp, 255  
 LTI-system, 171  
 LYAPUNOV, 185  
  
 DE MOIVRE, 228  
 multiplikativitet, 232  
 mått, 39  
  
 nedsamlingsoperator, 247  
 NEWTON, 43  
 nollmängd, 28  
 norm, 25  
 normerat rum, 25  
 nästan överallt, 28

- oktav, 114
- ON-system, 32
- ortogonal, 32
  - projektion, 33
- PARSEVAL, 81
- Parsevals
  - formel, 76, 77
  - sats, 102, 239
- partialsumma, 20
- period, 16, 45
- periodisk funktion, 16, 45
- PLANCHEREL, 162
- Plancherels
  - formel, 129, 141, 156, 161
  - sats, 158, 262
- POISSON, 112
- poissonkärnan, 95
- Poissons summationsformel, 145
- pol, 208
- positiv avbildning, 89
- punktvis konvergens, 85
- RIEMANN, 43
- Riemann–Lebesgues lemma, 101, 150
- Riemanns lokaliseringsprincip, 108
- RIESZ, 162
- $S_N$ , 57
- sampling, 4
- samplingssatsen, 165
- serie, 20
- SHANNON, 185
- signal i kontinuerlig tid, 4
- sinusoid, 49
- skalning, 47
- slutvärdesregeln, 204
- snabba fouriertransformen, 248
- spektrum, 2
- subadditiv avbildning, 89
- supnormen, 25
- svart låda, 6
- tidsinvariant, 6, 170, 224
- tillståndsfunktion, 206
- topologisk grupp, 254
- translat, 16, 231
- translation, 16, 220, 231, 254
- translationsinvariant, 242
- triangelolikheten, 18, 25
- trigonometrisk form, 50, 60
- trigonometriskt polynom, 51
- TUKEY, 252
- tät mängd, 29, 89
- uppsamlingsoperator, 247
- vikning, 168
- vinkelfrekvens, 50
- vänstergränsvärde, 69
- värmeledningskärnan, 147
- Weierstrass
  - approximationssats, 110
  - majorantsats, 87
- WHITTAKER, 185
- WILBRAHAM, 81
- z-transform, 213
- överföringsfunktion, 8, 206, 226
- övertton, 2