Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS M
2013-04-05

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift) samt 2 problem (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 14.00-19.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}$.

2. Bestäm det **största värdet** av $f(x) = x^2 e^{-\frac{2x^3}{3}}$ på intervallet $0 \le x < \infty$.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{2x^3}{3}}\, dx$.

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{x^3} = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}.$$
Bestäm särskilt asymptoterna, lokala extrempunkterna samt inflexionspunkterna.

   Ledning: $y' = \dfrac{(x^2-1)(x^2+3)}{x^4}, \quad y'' = -\dfrac{4(x^2-3)}{x^5}$.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$.

6. Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

7. Lös differentialekvationen $y' = y^2,\ y(0) = 1,\ 0 \le x < 1$.

8. Ange de x för vilka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x.

9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\, 2^n}\, x^n$ har konvergensradien lika med 2. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.

10. Motivera varför $f(x) = x \ln^2 x,\ 0 < x \le 1,\ f(0) = 0$ antar ett **största värde** på intervallet $0 \le x \le 1$ samt bestäm detta värde.

V.G.V!

PROBLEM

1. Det finns precis två tangenter genom punkten $(2a, 0)$ som tangerar ellipsen
$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1,\ a > 0.$$
Bestäm x-koordinaten för respektive tangeringspunkt.

2. $$f(x) = x + 2x^2 \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$
   a) Bevisa att $f(x)$ är kontinuerlig i origo.
   b) Bevisa att $f'(0) = 1$.
   c) Bevisa att $f'(x)$ inte är kontinuerlig i origo.

DIVERSE FORMLER OCH SATSER

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r},\ |r| < 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$

Om ekvationen $ar^2 + br + c = 0$ har dubbelroten $r_1 = r_2 = r$ så har differentialekvationen $ay'' + by' + cy = 0$ lösningarna $y = Ae^{rt} + Bte^{rt}$, där A och B är godtyckliga konstanter.