UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

DUGGA
Logik och bevisteknik
2017-04-12

Skrivtid: 14 – 17. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles).

Uppgift n examinerar kursmål n (för $n \in \{1, \dots, 8\}$).

1. Förklara

(a) vad en satslogisk signatur är, och

(b) givet en satslogisk signatur σ, hur formler i $LP(\sigma)$ är uppbyggda.

2. (a) Låt σ vara en satslogisk signatur. Förklara vad en σ-struktur är. (Ett annat ord för σ-struktur är sannings(värdes)tilldelning för σ.)

3. Beskriv bevis/härlednings-reglerna i naturlig deduktion med följande namn. Eller annorlunda uttryckt, givet en eller flera härledningar, förklara hur en ny bildas med hjälp av reglerna nedan:

(a) $\wedge$-introduktion.

(b) $\vee$-elimination.

(c) $\neg$-introduktion.

4. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande slutledningar/sekventer är korrekta, där A och B betecknar påståenden. Börja med (a) och använd dess härledning i (b).

(a) $\{A \wedge \neg B,\ A \to B\} \vdash \neg A$.

(b) $\{A \to B\} \vdash (A \wedge \neg B) \to \neg A$.

5. Låt σ vara en satslogisk signatur och låt $\varphi, \psi \in LP(\sigma)$. Förklara vad som menas om man säger att

(a) φ är satisfierbar.

(b) φ är en tautologi.

(c) φ är ekvivalent med ψ.

Fortsätter på nästa sida

6. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$. Vilka av följande påståenden stämmer? Motivera svaret med en sanningsvärdestabell eller lämplig σ-struktur.

(a) $p \to (\neg r \to \neg(q \vee \neg p))$ är en tautologi.

(b) $((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee \neg q$ och $q \to \neg(p \vee \neg(q \wedge \neg r))$ är ekvivalenta.

(c) $\{q \to \neg r,\ \ r \to \neg p,\ \ q\} \models_\sigma r \vee p$.
(Dvs. $r \vee p$ är en konsekvens av $\{q \to \neg r,\ r \to \neg p,\ q\}$.)

7. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$. Beskriv en formel i disjunktiv normalform som är ekvivalent med

$$(p \leftrightarrow \neg r) \to \neg(p \to q)$$

och visa hur du har kommit fram till din disjunktiva normalform.

8. Låt σ vara en satslogisk signatur, vilken som helst, och låt $\varphi, \psi, \chi \in LP(\sigma)$. Vilka av följande slutledningar/sekventer är korrekta? Svaren måste motiveras. Sundhets- och fullständighetssatsen för satslogiken får användas i motiveringen. Vi antar att φ, ψ och χ kan anta båda sanningsvärdena obeorende av varandra.

(a) $\{(\varphi \wedge \psi) \to \neg\chi,\ \ \varphi \leftrightarrow \neg\psi,\ \ \psi\} \vdash_\sigma \chi \to \neg\varphi$.

(b) $\{\varphi \to (\chi \wedge \neg\psi),\ \ \chi \vee \psi\} \vdash_\sigma \neg\varphi$.

Lycka till!