Svar/lösningar till vissa uppgifter till Duggan 2017-04-12

1. Se sidorna 32-33 i kursboken
2. Se Definition 3.5.3 i kursboken.
3. Se kapitel 2 i kursboken.
4. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\land\neg B}{A}\,(\land E)\qquad A\to B}{B}\,(\to E)\qquad \dfrac{A\land\neg B}{\neg B}\,(\land E)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A}\,(\neg I)$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A\land\neg B}^{1}}{A}\,(\land E)\qquad A\to B}{B}\,(\to E)\qquad \dfrac{\cancel{A\land\neg B}^{1}}{\neg B}\,(\land E)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A}\,(\neg I)}{(A\land\neg B)\to\neg A}\,(\to I)^{1}$$

5. Se definitionerna 3.5.8 och 3.6.2 i kursboken.
(Som definition av "φ är ekvivalent med ψ" kan ni alltså ta vilket som helst av villkoren (i), (ii) eller (iii) i Lemma 3.6.1.)

6. (a) Formeln är inte en tautologi. För en sanningsvärdestilldelning A, definierad så här, gör formeln falsk:

$$A(p) = A(q) = s, \quad A(r) = f.$$

(b) Formlerna är ekvivalenta, för om man skriver upp en sanningsvärdestabell så blir de sanna på precis samma rader.

p	q	r	$((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee \neg q$	$q \to \neg(p \vee \neg(q \wedge \neg r))$
s	s	s	f	f
s	s	f	f	f
f	s	s	f	f
s	f	s	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$
f	f	s	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$
s	f	f	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$
f	s	f	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$
f	f	f	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$

(c) $r \vee p$ är inte en konsekvens av $\{q \to \neg r,\ r \to \neg p,\ q\}$. För om sanningsvärdestilldelningen A definieras så här, så blir antagandena sanna men slutsatsen falsk:

$$A(r) = A(p) = f \quad , A(q) = s .$$

(Alternativt: Om man skriver upp en sanningsvärdetabell för alla formlerna, så ser man att på raden där p och r är falska och q sann så blir $q \to \neg r$, $r \to \neg p$ och q sanna, men $r \vee p$ blir falsk.)

7. Jag använder metoden med sanningsvärdestabell. (utan att ange alla detaljer).

p	q	r	$(p \leftrightarrow \neg r) \to \neg(p \to q)$	"Block" som "kodar" motsvarande sanningstilldelning
s	s	s	s	$p \wedge q \wedge r$
s	s	f	f	
f	s	s	f	
s	f	s	s	$p \wedge \neg q \wedge r$
f	f	s	f	
s	f	f	s	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
f	s	f	s	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
f	f	f	s	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Vi får nu följande DNF:

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$
$$\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$

8. (a) Om man skriver upp en sanningsvärdestabell så ser man att på varje rad där alla formlerna

$$(\varphi\wedge\psi)\to\neg\chi\ ,\ \varphi\leftrightarrow\neg\psi\ ,\ \psi$$

är sanna, så är även $\chi\to\neg\varphi$ sann. Det följer att

$$\{(\varphi\wedge\psi)\to\neg\chi,\varphi\leftrightarrow\neg\psi,\psi\}\models_\sigma\chi\to\neg\varphi$$

är korrekt. Från fullständighetssatsen följer att även

$$\{(\varphi\wedge\psi)\to\neg\chi,\varphi\leftrightarrow\neg\psi,\psi\}\vdash_\sigma\chi\to\neg\varphi$$

är korrekt.

(b) Om φ och χ är sanna och ψ är falsk, så blir $\varphi\to(\chi\wedge\neg\psi)$ och $\chi\vee\psi$ sanna, men $\neg\varphi$ falsk. Så

$\{\varphi\to(\chi\wedge\neg\psi),\chi\vee\psi\}\models_\sigma\neg\varphi$ stämmer inte.

Från sundhetssatsen följer att

$$\{\varphi \to (\chi \wedge \neg\psi),\ \chi \vee \psi\} \vdash_{\sigma} \neg\varphi$$

<u>inte</u> är korrekt.