

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Erik Lindgren

Tel.: 070-5892942

E-post: `erik.lindgren@math.uu.se`

Tentamen i matematik

Envariabelanalys för M, 1MA210

24 augusti 2021

*Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon.**Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5.*

1. Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{f(x)}.$$

- a) Ange ett polynom f så att gränsvärdet existerar och är lika med 0.
b) Ange ett polynom f så att gränsvärdet existerar och är lika med 1.

2. Skissa grafen till kurvan $y = \frac{x^2-3}{x+2}$. Bestäm och klassificera lokala och globala extrempunkter samt bestäm funktionens max- och minvärden om de finns. Bestäm även eventuella asymptoter.

3. Bestäm följande integraler:

a)

$$\int x \arctan x \, dx$$

b)

$$\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+3} \, dx$$

–Var god vänd–

4. Avgör om volymen av kroppen som uppstår när området

$$\left\{ x \in [2, \infty), \quad 0 \leq y \leq \frac{1 + \cos x}{x^4 - x} \right\}$$

roterar kring x -axeln är ändlig eller inte.

5. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

a)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + k^{\frac{1}{3}}}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k}{e^k}$$

6. a) Låt f vara en funktion definierad på $(-\infty, \infty)$ och A ett reellt tal. Definiera vad som menas med att

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

- b) Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 2} = 0.$$

7. Använd Taylorpolynom för att bestämma ett närmevärde till $\sqrt{101}$ med ett fel som är mindre än $1/1000$.

–Var god vänd–

8. Låt a_n vara följderna som ges av $a_0 = 1/2$ och

$$a_n = \frac{2a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2}, \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \dots$$

Visa att följderna är konvergent och bestäm dess gränsvärde.

9. I denna uppgift krävs endast svar och ingen motivering. Ge exempel på:

- a) En deriverbar funktion på $[-1, 1]$ som ej är två gånger deriverbar i $x = 0$.
- b) En kontinuerlig funktion på $[0, \infty)$ som ej är begränsad.
- c) En begränsad funktion på $[2, 5]$ som ej är integrerbar på $[2, 5]$.
- d) En följd som är monotont växande men ej konvergent.
- e) En begränsad talföljd som ej är monotont växande.

10. Antag att f är en kontinuerlig funktion på $[0, 10]$ sådan att

$$\int_0^1 f(x) dx = 1$$

och

$$\int_0^{10} f(x) dx = 2.$$

Visa att det finns ett $x \in [0, 10]$ så att $f(x) = 1/2$.

Lycka till!