UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR

Fourieranalys

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
November 1, 2022

Contents

1. TODO

- Next lecture is laplace transform (integral transform)
- Review ODE notes
- Lebesgue-integral
- Över-undertrappor bevis envariabelanalys

2. Bakgrund

Låt oss betrakta $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ så att $f(0) = f(\pi) = 0$
När kan vi skriva denna funktion $f(x)$ som en analytisk funktion (potensserie), det vill säga:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n \cdot x) \tag{1}$$

Där $a_n \in \mathbb{R}$ är konstanter.

Inte alla funktioner tillfredställer att intervallet $[0, \pi]$ ger en konvergerande potensserie för f, frågan man kan ställa sig är *när kan vi skriva f som en serie av trigonometriska funktioner?*

Vi kommer inse att *om* f går att skriva som en potensserie av trigonometriska funktioner, så behöver vi hitta våra koefficienter. I fallet med MacLaurin serier så kom de (a_n) från derivatan.
I detta fall kommer det från:

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

I någon mening kommer analys-delen av denna kurs från att vi studerar funktioner utifrån integraler, såsom den ovan.
Integralen ovan är integral-transform.

Vi kan även skriva:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

Något mer vi kommer undersöka, är om vår fourierserie konvergerar, och om den konvergerar mot vår funktion (detta är inte alltid uppenbart)

2.1. **Komplexa exponentialer.**

Det finns en viktig eulerformel. Vi alla känner till e^x, men vad händer om $x = a + bi$?

Definition/Sats 2.1: Eulers formel

Vi får då $e^{a+bi} = \underbrace{e^a}_{\in \mathbb{R}} e^{ib} = e^a \left(\cos(b) + i \sin(b)\right)$ för varje $a, b \in \mathbb{R}$

Kom ihåg att vi kan representera komplexa tal med polära koordinater.
Vi har då att varje komplext tal $a + bi$ kan representeras som $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi får då $a + bi = re^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta}$

Övning:
Använd Eulers formel för att visa att $\cos(2x) = \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$ och $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Anmärkning:
Komplexa exponentialer är *inte* injektiva, alltså fungerar inte logaritmen.
Exempelvis kan vi betrakta $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$

Definition/Sats 2.2: Fourierpolynomial

Är på formen:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx}$$

Kallas för polynom för att vi har $e^{ikx} = (e^{ix})^k$ som är ett monom i e^{ix}

Vi kan uttrycka Fourierpolynom m.h.a sinus och cosinus enligt följande:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k})\cos(kx) + i(c_k - c_{-k})\sin(kx)$$

Anmärkning:
Detta är samma fourierpolynom som var på *exponential form* i *trigonometrisk form*

2.2. **Lebesgue integralen.**

Den vanliga definitionen av integralen som vi alla är vana vid är Riemann-integralen.