2019-04-16

② $\left(\neg(A \vee B) \rightarrow C\right) \rightarrow (A \wedge \neg B) = \sigma$

A	B	C						
1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0

σ eq $\underbrace{(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)} \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ DNF

eq $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

eq $\cancel{(A \vee \neg A)} \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg B)$
$\wedge (\neg B \vee \neg C)$

eq $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge \underbrace{(\neg A \vee \neg B) \wedge \underbrace{(\neg B) \wedge (\neg B \vee \neg C)}_{KNF}}_{\neg B}$

eq $\neg B$

$\neg B$

eq. $\underbrace{(\neg B) \wedge (A \vee \neg C)}_{KNF.}$

③ a) $A \to B \vdash \neg(A \land \neg B)$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\cancel{A \land \neg B}^{\,1}}{A}\,\land E
    \qquad A \to B
  }{B}
  \qquad
  \dfrac{\cancel{A \land \neg B}^{\,1}}{\neg B}\,\land E
}{
  \dfrac{\bot}{\neg(A \land \neg B)}\,\neg I\,(1)
}\,\neg E
$$

b) $A,\ B \lor C \vdash (A \land B) \lor (A \land C)$

$$
\dfrac{
  B \lor C
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{A \qquad \cancel{B}^{\,1}}{A \land B}\,\land I}{(A \land B) \lor (A \land C)}\,\lor I
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{A \qquad \cancel{C}^{\,2}}{A \land C}\,\land I}{(A \land B) \lor (A \land C)}\,\lor I
}{(A \land B) \lor (A \land C)}\,\lor E\,(1)\,(2)
$$

4 a) $A \to (B \lor C) \nvDash (A \to B) \land C$

Betrakta σ-strukturen

A sann

B, falska

C sann

Då är $A \to (B \lor C)$ sann, men $\underbrace{(A \to B)}_{\text{falsk}} \land C$ falsk

b) $(A \to B) \lor C \vDash A \to (B \lor C)$ gäller

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    (A \to B) \lor C
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{\cancel{A \to B}^{\,1} \qquad \cancel{A}^{\,3}}{B}}{B \lor C}
    \qquad
    \dfrac{\cancel{C}^{\,2}}{B \lor C}
  }{B \lor C}\,\lor E\,(1)\,(2)
}{A \to B \lor C}\,\to I\,(3)
$$

Påst stämmer enl sundhetssatsen.

5. (a) $A \vee B \vdash (B \to A) \vee (A \to B)$

$A \vee B$	$(B \to A)$	$\vee$	$(A \to B)$	A	B
1	1	$\boxed{1}$	1	1	1
1	1	$\boxed{1}$	0	1	0
1	0	$\boxed{1}$	1	0	1
0	1	$\boxed{1}$	1	0	0

Formeln t.h. är sann för alla σ-strukturer (och alltså även för alla som gör $A \vee B$ sann).
Alltså gäller $A \vee B \models_{\sigma} (B \to A) \vee (A \to B)$
Enl fullständighetssatsen följer att $A \vee B \vdash (B \to A) \vee (A \to B)$

(b) $\neg(A \vee B) \to C,\ \neg A \wedge \neg B \vdash \neg((A \wedge B) \to C)$

Låt σ-strukturen vara A, B falska, C sann.
Då är $\underset{1}{\neg}(A \underset{0}{\vee} B) \underset{1}{\to} C$ sann

$\neg A \wedge \neg B$ sann

och $\underset{0}{\neg}((A \underset{0}{\wedge} B) \underset{1}{\to} C)$ falsk.

Alltså en motexempelstruktur.
Alltså $\not\models$.
Enl. sundhetssatsen följer att $\nvdash$.

6. τ $\quad \bar{P}(\bar{c}, \bar{F}(\bar{c})) \wedge \exists x \forall y (x \doteq y \vee \bar{P}(x,y))$

struktur $\mathfrak{A}$ s.a. $\mathfrak{A} \models \tau$

struktur $\mathfrak{B}$ s.a. $\mathfrak{B} \not\models \tau$.

$\mathfrak{A}$: $\mathbb{N}$, $\bar{c}$ är 0, $\bar{F}(n) = n+1$, $\bar{P}$ är $<$.

$0 < 0+1$ och det finns ett x s.a. $\forall y$ $x=y$ eller $x<y$ $(x=0)$.

$\mathfrak{B}$ $\quad \mathbb{Z}$, $\quad c = 0$

$F = +1$ $\quad P$ är $<$.

Men $\mathbb{Z}$ har inget minsta ele.

---

7. a) $\forall x(\bar{P}(x) \to \exists y \exists z (y \not\doteq z \wedge x \doteq \bar{F}(y,z)))$

b) τ: Det finns ett största primtal:

$\exists x(\bar{P}(x) \wedge \forall y(P(y) \to \bar{Q}(y,x) \vee y \doteq x))$

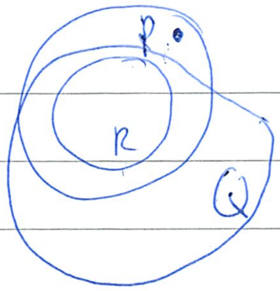
τ_0: Det finns inget största primtal:

$\neg\tau$.

8. a

$$\dfrac{\exists x P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P(x)}^{1} \quad \dfrac{\forall x(P(x)\to R(x))}{P(x)\to R(x)}}{R(x)} \qquad \dfrac{\cancel{P(x)}^{1} \quad \dfrac{\forall x(P(x)\to\neg Q(x))}{P(x)\to\neg Q(x)}}{\neg Q(x)}}{R(x)\wedge\neg Q(x)}}{\exists x(R(x)\wedge\neg Q(x))}\ \exists I}{\exists x(R(x)\wedge\neg Q(x))}\ \exists E\ 1$$

8b)



$R \subseteq Q$ $\quad \exists x(Px \wedge \neg Q(x))$

$R \subseteq P$

$\neg\forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

eq $\exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$

eq $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

$$\dfrac{\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\cancel{x})\wedge\neg Q(x)^{1}}{\neg Q(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(R(x)\to Q(x))}{R(x)\to Q(x)} \qquad \cancel{R(x)}^{1}}{Q(x)}}{\bot}}{\neg R(x)}\neg I\,1 \qquad \dfrac{\forall x\forall y(\neg R(x)\to P(y))}{\neg R(x)\to P(y)}\forall E}{\dfrac{P(y)}{\forall y P(y)}}}{\forall y P(y)}\exists E\,1$$

9. a) $\not\models \left(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)\right) \leftrightarrow \forall x\left(P(x) \to Q(x)\right)$

Motexempel: $A = \{0,1\}$ $P = \{0\}$, $Q = \{1\}$.

b) $\models \exists x\left(P(x) \land Q(c)\right) \leftrightarrow \exists x P(x) \land Q(c)$

Gäller:

$(\to)$

$$\dfrac{\exists x(Px \land Qc) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{P(x) \land Q(c)}}{P(x)}}{\exists x P(x)} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{P(x) \land Q(c)}}{Q(c)}}{\exists x P(x) \land Q(c)}}{\exists x P(x) \land Q(c)}\ \exists E\ (1)$$

$\leftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x P(x) \land Q(c)}{\exists x P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{P(x)} \qquad \dfrac{\exists x P(x) \land Q(c)}{Q(c)}}{P(x) \land Q(c)}}{\exists x\left(P(x) \land Q(c)\right)}\ \exists I}{\exists x\left(P(x) \land Q(c)\right)}\ \exists E\ (1)$$

10. $\varphi_1 = \forall x\, R(x,x)$

$\varphi_2 \quad \forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$

$\varphi_3 \quad \forall x \forall y \, (R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x \doteq y)$

$\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$:
$A = \{0,1\}$
$R = \{(0,0), (1,1), (0,1), (1,0)\}$
φ_3 är falsk.

φ_1 sann, φ_2 sann. $\therefore \varphi_1, \varphi_2 \nvdash \varphi_3$ (sundhet)

$\varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2$
$A = \{0,1,2\}$
$R = \{(0,1), (1,2), (0,0), (1,1), (2,2)\}$
ej transitiv, så φ_2 falsk.
φ_1 sann, φ_3 sann. $\therefore \varphi_1, \varphi_3 \nvdash \varphi_2$ enl sundhet

$\varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$
$A = \{0,1\}$
$R = \emptyset$
Nu är φ_1 falsk, men både φ_2, φ_3 är sanna.
$\therefore \varphi_2, \varphi_3 \nvdash \varphi_1$ enl sundhet.