Övningar till lektion 6

Strukturer, sanning, ekvivalens och konsekvens

Låt
$\sigma_1 = \langle a;\ ; P, Q, R\rangle$ med ställighet $\langle 0;\ ; 1, 1, 2\rangle$,
$\sigma_2 = \langle a; \oplus; \rangle$ av ställighet $\langle 0; 2; \rangle$,
$\sigma_3 = \langle ;\ ; R\rangle$ av ställighet $\langle ;\ ; 3\rangle$,
$\sigma_4 = \langle ;\ ; E, F\rangle$ av ställighet $\langle ;\ ; 1, 1\rangle$ och
$\sigma_5 = \langle a;\ ; S\rangle$ av ställighet $\langle 0;\ ; 2\rangle$.

1. Låt $\mathcal{M} = \langle \{a_0, b_0, c_0\}, b_0; ; \{a_0, c_0\}, \{b_0\}, \{(a_0, c_0), (b_0, c_0)\}\rangle$ vara en σ_1- struktur (så $a^{\mathcal{M}} = b_0$).

   - Rita en bild och visualisera hur $\mathcal{M}$ ser ut.

   Vilka av följande stämmer? Förklara också varför det stämmer eller inte gör det. Avgör också om det som står till höger om '$\models$' är en sats i $LR(\sigma_1)$ eller ej.

   (a) $\mathcal{M} \models Q(a) \wedge P(a_0)$
   (b) $\mathcal{M} \models \exists x(R(x, a))$
   (c) $\mathcal{M} \models \forall y(Q(y) \to R(y, c_0))$
   (d) $\mathcal{M} \models \forall y(P(y) \to R(y, c_0))$
   (e) $\mathcal{M} \models \exists z \forall x(R(z, x))$
   (f) $\mathcal{M} \models \exists z \forall x \neg(R(x, z))$

2. Låt $\mathcal{N} = \langle \{a_0, b_0, c_0\}, a_0; ; \{a_0, b_0\}, \{c_0\}, \{(a_0, b_0), (b_0, c_0), (a_0, c_0)\}\rangle$ vara en σ_1- struktur (och notera att där $a^{\mathcal{N}} = a_0$ i denna struktur).

   - Rita en bild och visualisera hur $\mathcal{M}$ ser ut.

   Vilka av (a) – (d) stämmer? Förklara också varför det stämmer eller inte stämmer. Avgör också om det som står till höger om '$\models$' är en sats i $LR(\sigma_1)$.

   (a) $\mathcal{N} \models Q(a) \wedge P(a_0)$
   (b) $\mathcal{N} \models \exists x(R(x, a))$
   (c) $\mathcal{N} \models \forall y(Q(y) \to R(y, c_0))$
   (d) $\mathcal{N} \models \forall y(P(y) \to R(y, c_0))$
   (e) Följande stämmer: $\mathcal{N} \models \exists y(Q(y) \to R(y, c_0))$. Motivera varför.

3. Hitta satser (dvs slutna formler) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in LR(\sigma_1)$ så att för $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ i uppgift 2 respektive 3:

   (a) $\mathcal{M} \models \varphi_1$ men $\mathcal{N} \not\models \varphi_1$.
   (b) $\mathcal{M} \not\models \varphi_2$ men $\mathcal{N} \models \varphi_2$.
   (c) $\mathcal{M} \models \varphi_3$ och $\mathcal{N} \models \varphi_3$.
   (d) $\mathcal{M} \not\models \varphi_4$ och $\mathcal{N} \not\models \varphi_4$.

4. Låt $\mathcal{A} = \langle \{0,1\}\,; a^{\mathcal{A}};\ \oplus^{\mathcal{A}}; \rangle$ vara en σ_2-struktur där $a^{\mathcal{A}} = 0$ samt $0 \oplus^{\mathcal{A}} c = 0$ och $1 \oplus^{\mathcal{A}} c = 1$ för alla $c \in \{0,1\}$. Avgör om följande stämmer. Förklara också varför det stämmer eller inte gör det.

   (a) $\mathcal{A} \models \forall x(x \oplus a = x)$
   (b) $\mathcal{A} \models \forall x(x \oplus x = a \to x = a)$
   (c) $\mathcal{A} \models \forall x \forall y((x \oplus y = y \oplus x) \to x = y)$
   (d) $\mathcal{A} \models \exists x \forall y(x \oplus y = y)$

5. För var och en av formlerna i deluppgifterna till föregående uppgift, hitta en σ_2-struktur som gör formeln falsk. (*Tips: Återanvänd $\mathcal{A}$ när du kan*)

6. Definiera följande begrepp och notationer, där σ är någon signatur, $\varphi, \psi \in LR(\sigma)$ är satser och $T \subseteq LR(\sigma)$ är en mängd av satser, med andra ord en σ-teori (eller bara teori):

   (a) $\mathcal{M}$ är en *modell* av/för φ, med symboler: $\mathcal{M} \models \varphi$ (eller $\models_{\mathcal{M}} \varphi$).
   (b) $\mathcal{M}$ är en *modell* av/för T, med symboler: $\mathcal{M} \models T$ (eller $\models_{\mathcal{M}} T$).
   (c) φ och ψ är (logiskt) *ekvivalenta.*
   (d) φ är en (logisk) konsekvens av T, med symboler: $T \models \varphi$. (Man kan också skriva '$\models_\sigma$' för att tydliggöra vilken signatur man använder).
   (e) $\mathcal{M}$ är ett *motexempel till* φ (eller till T). (Vi kan också säga *motmodell.*)
   (f) $\mathcal{M}$ är ett *motexempel till* $T \models \varphi$.
   (g) φ är *satisfierbar/konsistent.*
   (h) φ är *valid* (eller *logisk sanning*).
   (i) φ är *osatisfierbar/inkonsistent.*
   (j) Följande stämmer: φ och *psi* är ekvivalenta om och endast om $\varphi \models \psi$ och $\psi \models \varphi$. Förklara varför.

7. (svårare) Låt T vara följande σ_3-teori:

$$T = \{\exists x \exists y \forall z R(x,y,z),\ \forall x \forall y(R(x,y,y) \leftrightarrow R(x,x,y)),\ \forall x \neg R(x,x,x),\ \forall x \forall y(\neg x = y \to R(y,x,y))\}$$

   (a) Hitta en modell $\mathcal{B}$ för T och en σ_3-struktur $\mathcal{C}$ som inte är en modell för T.
   (b) Hitta en modell för T som har oändligt universum (också kallat domän).
   (c) Finns det någon modell för T som har exakt 1 element i sitt universum?
   (d) Låt φ vara formeln nedan. Finns det någon modell $\mathcal{M}$ för T så att $\mathcal{M} \models \varphi$? Om 'Nej', motivera varför. Om 'Ja' svara då även på: hur många element kan en sådan struktur innehålla?

$$\forall x \forall y \forall z \Big((x \neq y \wedge R(x,y,z)) \to \neg(R(z,x,z) \wedge R(x,z,x))\Big)$$

8. Följande satser i $LR(\sigma_4)$ är *inte* logiska sanningar, visa detta genom att hitta motmodeller till vardera påståendet.

   (a) $\exists x(E(x) \vee \neg F(x))$
   (b) $\forall x\big((E(x) \to F(x)) \vee \neg E(x)\big)$
   (c) $\forall x \exists y(E(x) \vee F(y))$
   (d) $\forall x \forall y\Big(((E(x) \wedge F(y)) \to E(y)\Big)$

9. Nedan görs påståenden om satser från $LR(\sigma_5)$ som säger att satsen till höger om '$\not\models$' *inte* är en logisk konsekvens av satsen/satserna till vänster om '$\not\models$'. Visa detta genom att hitta en motmodell i vart och ett av fallen.

   (a) $\exists x \exists y R(x, y) \not\models \exists x R(a, x)$

   (b) $\exists x R(x, a) \not\models \forall x R(x, a)$

   (c) $\forall x R(x, a) \not\models \forall x R(a, x)$

   (d) $\{\forall x \big(R(x, a) \to R(a, x)\big),\ R(a, a)\} \not\models \forall x R(x, x)$

   (e) $\{\forall x \exists y R(x, y),\ \exists x R(x, x)\} \not\models \exists x R(x, a)$