Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Axel Husin

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS
2011-12-09

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 3 extra problem (max 4 poäng per extra problem). Till både uppgifterna, problemen och extra problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{e^{2x^2} - e^{-2x^2}}$.
2. Bestäm det **absolut största värdet** av $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ på intervallet $0 \le x < \infty$.
3. Beräkna integralen $\int_0^\infty (x-1)^2 e^{-x}\, dx$.
4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}.$$
Bestäm särskilt eventuella asymptoter samt lokala extrempunkter.
5. Beräkna integralen $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$.
6. Lös differentialekvationen $y'' + y = x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.
7. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 2xy = 2x$ för vilken $y(0) = 0$.
8. Ange de x för vilka $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x.
9. Potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$ har konvergensradien lika med 2. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.
10. Motivera varför $f(x) = x\ln x,\ 0 < x \le 1, f(0) = 0$ antar ett absolut minimivärde på intervallet $0 \le x \le 1$ samt bestäm detta minimivärde.

V.G.V!

PROBLEM

1. Kurvorna $y = x^3$ och $y = x^2$ har två gemensamma tangenter. Bestäm tangeringspunkterna på respektive kurva. Skissera kurvorna och de gemensamma tangenterna.

2. $$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

   a) Bevisa att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, dvs att funktionen är kontinuerlig i origo.

   b) Bevisa att $f'(0) = 0$.

   c) Bestäm lokala extrempunkterna och asymptoterna till $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ samt skissera grafen.

EXTRA PROBLEM

1. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två funktioner sådana att $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existerar ändligt och $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Bevisa att $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

2. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion definierad på ett intervall och utan punkter där $f'(x) = 0$. Bevisa att då är f ett-till-ett.

3. Ge bevis eller motexempel till följande påståenden om den deriverbara funktionen $f(x)$:

   a) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ så existerar $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ändligt.

   b) Om $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar ändligt så är $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}, \ |r| < 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$