1. a) Motexempel: Funktionen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig överallt men inte deriverbar för $x = 0$.

   b) Funktionen f är kontinuerlig på (a, b) om den uppfyller att

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

för alla x på intervallet (a, b). Eftersom f är deriverbar på (a, b) har vi att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

existerar för alla x på (a, b), så

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) &= \lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x))\frac{h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h = f'(x) \lim_{h\to 0} h = 0.\end{aligned}$$

Vi får därmed att

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

för alla x på (a, b), så f är kontinuerlig på (a, b). $\square$

2. Då funktionen $f(x)$ är deriverbar är den $1 - 1$ omm $f'(x)$ är en strikt positiv eller en strikt negativ funktion. Vi har att

$$f'(x) = 1 + ag'(x)$$

så $f'(x) > 0$ omm $1 + ag'(x) > 0$, omm $1 > -ag'(x)$. Om $g'(x) = 0$ gäller olikheten för alla a. Om $g'(x) \neq 0$ gäller olikheten speciellt om $|ag'(x)| < 1$, dvs om $a < \frac{1}{|g'(x)|}$. Men vi har givet att $|g'(x)| < M$ för alla x, så

$$\frac{1}{M} < \frac{1}{|g'(x)|}$$

för alla x där $g'(x) \neq 0$. Så om vi väljer $a = 1/M$ har vi att

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{M} g'(x) > 0$$

för alla x. Detta ger att $f(x) = x + 1/Mg(x)$ är 1-1 på intervallet. $\square$

3. Antag att $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ och antag, för att härleda en motsägelse, att det finns ett x_0 på intervallet $[a, b]$ så att $f(x_0) > 0$.
I och med att f är kontinuerlig på $[a, b]$ finns det ett intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ så att $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ för alla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Detta eftersom det för alla $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att om $|x - x_0| < \delta$ gäller det att $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Om vi väljer $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ får vi att

$$\begin{aligned}&|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} && \text{om och endast om} \\ &-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} && \text{om och endast om} \\ &\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}.\end{aligned}$$

Nu definierar vi en funktion g där

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \frac{f(x_0)}{2} & \text{om } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Vi får att $g(x)$ är integrerbar och att $g(x) \leq f(x)$ för alla x på $[a, b]$. Enligt sats gäller då att

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 2\delta \frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0$$

vilket motsäger antagandet att $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.
Så om $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ måste $f(x) = 0$ för alla x på intervallet $[a, b]$. $\square$