Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS
ENDIMENSIONELL ANALYS
2008-03-26

SVAR OCH ANVISNINGAR

Svaren är inte kontrollräknade.

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)}{e^{x^2}-e^{-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \ldots) - (-x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \ldots)}{\left[1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \ldots\right] - \left[1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \ldots\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \ldots}{2x^2 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \ldots}{2 + \ldots} = 1.$$

2. Den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ med rötterna $\pm 2i$ så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' + y = \sin x$ ansättes $y_P = A \sin x + B \cos x$. Derivering och insättning ger $A = \frac{1}{3}, B = 0$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x.$$

Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ger $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{1}{6}$ så lösningen är $y = \cos 2x - \frac{1}{6} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$.

3.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\, dx = \frac{1}{2} \ln^2(1+x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln^2 2.$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \ln(1+x^2)\Big|_1^\infty - \int_1^\infty -\frac{1}{x} \frac{2x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \ln 2 + 2 \tan^{-1} x\Big|_1^\infty = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

4. Definitionsområdet är $x \neq 0$. Funktionen är udda, dvs $y(-x) = -y(x)$. Det är alltså tillräckligt att studera kurvan för $x > 0$ och sedan spegla den i origo.
Funktionens nollställen är $x = \pm 1$.
Vertikal asymptot är $x = 0$. $\lim\limits_{x\to 0+} y = +\infty$. $\lim\limits_{x\to 0-} y = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y(x) - x) = \mp 0$. Linjen $y = x$ är alltså sned asymptot.

$$y' = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \qquad y'' = -\frac{4}{x^3} + \frac{12}{x^5}.$$

$y'(\pm 1) = 0$ så $x = \pm 1$ är lokala extrempunkter, t ex enligt andra derivatans tecken. $y''(\pm\sqrt{3}) = 0$ och det följer att $x = \pm\sqrt{3}$ är inflexionspunkter, t ex enligt andraderivatans teckenväxling. Intressant observation är att kurvan skär sin sneda asymptot $y = x$ i $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt x där $f(x) > 0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus (Adams Gift). Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0) = 0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt.
Vi skriver först funktionen utan beloppstecken och deriverar på de öppna intervallen $x < 1$ och $x > 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2e^{x-1}, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ x^2e^{1-x}, & x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} (2x + x^2)e^{x-1}, & x < 1 \\ (2x - x^2)e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

Vi ser att på de öppna intervallen $x < 1$ och $x > 1$ är $f(x)$ deriverbar och det finns två punkter x_0 där $f'(x_0) = 0$ nämligen $x_0 = -2$ och $x_0 = 2$. Punkten $x = 1$ kan eventuellt vara singulär punkt. Vi behöver inte undersöka detta. Punkterna -2, 1 och 2 är kandidater för det största värdet och är ändligt många.
Vi finner $f(-2) = 4e^{-3} < 1$, $f(1) = 1$ och $f(2) = 4e^{-1} > 1$. Största värdet är alltså $\dfrac{4}{e}$.

6. En integrerande faktor är $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(x^2 y)' = 1 - \cos x$ som ger $x^2 y = x - \sin x + C$ så allmänna lösningen är $y = \dfrac{x - \sin x}{x^2} + \dfrac{C}{x^2}$.

7. Den första serien $\sum a_n$ är positiv och här testar vi med kvotkriteriet.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

då $n \to \infty$. Serien är alltså konvergent.

Den andra serien $\sum b_n$ är inte positiv så vi studerar $\sum |b_n|$ och eventuell absolut konvergens. Vi jämför med $\sum c_n = \sum \dfrac{1}{n^2}$, som är konvergent och använder jämförelsesatsen. Olikheterna $|\sin n| \leq 1$ och $\sin \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ ger $\sum |b_n| \leq \sum \dfrac{1}{n^2}$. Det följer att den andra serien till och med är absolutkonvergent.

8.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad , \quad f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0.$$

$\lim\limits_{x \to 0} x^{-n} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} t^n e^{-t^2} = 0,\ n \in \mathbf{Z}$. Därför följer att $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Derivatorna är alla av formen $P(\dfrac{1}{x}) e^{-1/x^2}$ där P är ett polynom. Därför blir på samma sätt som ovan $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = 0$.

Det finns inga lodräta asymptoter.

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-1/x^2} == \lim_{t \to \pm 0} (1 - t^2 + \frac{1}{2!} t^4 + \ldots) = 1-$$

så $y = 1$ är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.