

UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR

# Reell Analys

*Rami Abou Zahra*

Inlämningsdatum  
November 3, 2022

## CONTENTS

1. TODO	2
2. Introduction	3
3. Sammanfattning Kap2	3
3.1. Notation	3
3.2. Relationer	3
3.3. Funktioner	4
3.4. Pullback & Pushforward	5
3.5. Abstrakt algebra	5
3.6. Kardinalitet	6

## 1. TODO

- Abelian group (and non-abelian)
- Non-commutative ring
- Commutative ring which is not a field

## 2. INTRODUCTION

Before proving injectivity & surjectivity, first show it is a function

## 3. SAMMANFATTNING KAP2

## 3.1. Notation.

Vi använder ett "+" för att beteckna om mängden innehåller positiva element. Om det är känt att mängden innehåller negativa element behöver vi tydliggöra om 0 finns i mängden, det finns olika notation.

Vi skriver "upphöjt i +" för att visa att mängden är helt positivt (innehåller ingen 0), och "nedsänkt i +" för att visa att mängden är positiv men innehåller 0.

**Exempel:**

De positiva reella talen:  $\mathbb{R}^+$

Icke-negativa reella talen:  $\mathbb{R}_+$

## 3.2. Relationer.

En relation  $R$  på en mängd  $M$  är:

$$R \subseteq M \times M$$

Vi har 5 "adjektiv" att beskriva våra relationer med:

- Reflexiv ( $xRx \quad \forall x \in M$ )
- Symmetrisk ( $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in M$ )
- Antisymmetrisk ( $xRy \& yRx \Rightarrow x = y$ )
- Transitiv ( $xRy \& yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in M$ )
- Connex ( $xRy$  eller  $yRx \quad \forall x, y \in M$ )

Som exempel på dessa kan man betrakta relationen  $=$  eller relationen  $<$  över  $R$

**Exempel:**

Låt  $A = \{a, b\}$  och potensmängden till  $A$  vara  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Vilka av de 5 kraven uppfylls om relationen är  $\subseteq$ ?

För att lösa detta så kommer vi ihåg att relationer är definierade på mängdens kartesiska produkt, så vi har i själva verket en relation  $\subseteq$  över  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$

Vi kollar reflexivitet. Om vi tar ett element från  $\mathcal{P}(A)$ , är det då en delmängd till sig själv? **Ja, en mängd är alltid delmängd till sig själv.** Viktigt att notera att den inte är en äkta delmängd!

Är relationen symmetrisk? Tag  $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$  och  $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$ . Då gäller att  $\{a\} \subseteq \{a, b\}$  men  $\{a, b\} \not\subseteq \{a\}$ . Eftersom relationen skulle gälla  $\forall$  element i relationsmängden, så gäller *inte* symmetri!

Är relationen antisymmetrisk? Antisymmetri gäller om  $xRy \& yRx \Rightarrow x = y$ , vi undersöker negationen, vilket är  $xRy \& x \neq y \Rightarrow \neg yRx$ . Detta säger i princip "om  $x$  är delmängd till  $y$  och  $x$  inte är lika med  $y$  så är  $y$  inte en delmängd till  $x$ ", vilket vi vet gäller.

Är relationen transitiv? Ja, om  $x$  är en delmängd till  $y$  och  $y$  är en delmängd till  $z$  så gäller att  $x$  är en delmängd till  $z$

Connex? Nej, tag  $x = \{a\}$  och  $y = \{b\}$ , då är  $x \not\subseteq y$  och  $y \not\subseteq x$

### 3.2.1. Klassifikationer av relationer.

Vi har 3st Klassifikationer för relationer:

- Ekvivalensrelation (reflexiv, symmetrisk, transitiv)
- Partiell ordning (reflexiv, antisymmetrisk, transitiv)
- Total ordning (connex, reflexiv, antisymmetrisk, transitiv)

#### Anmärkning:

En total ordning är en connex partiell ordning.

**Exempel:** (Ekvivalensrelation)

$=$  (likhet) är en ekvivalensrelation

**Exempel:** (Partiell ordning)

$\leq$  är en partiell ordning (men inte en ekvivalensrelation)

**Exempel:** (Total ordning)

$\leq$  är en total ordning

### 3.3. Funktioner.

#### 3.3.1. Domän, kodomän.

En funktion (eller även kallad en avbildning) definierad från en *domän*  $A$  till en *kodomän*  $B$ , kan ses som en delmängd till  $A \times B$ .

Denna brukar även kallas för *graf* till funktionen.

Om  $f : A \rightarrow B$  så är alltså  $\text{graf}(f) \subseteq A \times B$

#### Anmärkning:

För varje  $x \in A$  så finns det ett *unikt*  $y \in B$  så att  $f(x) = y$  (alternativ beteckning:  $(x, y) \in \text{graf}(f)$ )

#### 3.3.2. Bilden.

Något som verkar lite förvirrande först är att kodomänen inte är bilden av funktionen. Om vi exempelvis betraktar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \ x \mapsto x$  så ser vi att de värden som faktiskt "träffas" är hela  $\mathbb{R}$ , vilket är en delmängd till  $\mathbb{C}$  men inte hela  $\mathbb{C}$ !

#### Definition/Sats 3.1: Bilden till en avbildning

$$f : A \rightarrow B$$

$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\}$$

#### Anmärkning:

- Om  $f, g$  är injektiva, så är  $g \circ f$  injektiv
- Om  $f, g$  är surjektiva, så är  $g \circ f$  surjektiv
- Om  $f, g$  är bijektiv, så är  $g \circ f$  bijektiv

### 3.4. Pullback & Pushforward.

Antag att vi har en avbildning  $f : X \rightarrow Y$ , då gäller följande:

#### Definition/Sats 3.2: Pullback

Inte hela kodomänen träffas av en avbildning/funktion. Det beror på vad domänen är (och hur funktionen ser ut).

Vi kan däremot korta ner domänen och undersöka hur det påverkar bilden av avbildningen, detta är *pullback*:

$$f_*(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\} = f(A) \quad A \subseteq \mathcal{P}(X)$$

#### Anmärkning:

$A \subseteq X \Rightarrow X \subseteq \mathcal{P}(X)$ , samt att  $f_* \subseteq Y \Leftrightarrow f_* \subseteq \mathcal{P}(Y)$

Vi har då  $f_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$

#### Definition/Sats 3.3: Pushforward

Liknande/Motsatsen gäller för *pushforward*. Här vill vi undersöka vad som händer med domänen om vi betraktar en delmängd till kodomänen:

$$f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \quad B \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

#### Anmärkning:

Pushforward är invariant under union **och** snitt

Pullback är **enbart** invariant under union (annars, låt  $f(x) = x^2$  och visa vad som händer med  $f_*({-}1)$  resp.  $f_*({1})$ )

Detta följer från definitionen och påminner lite om lagen om total sannolikhet från kursen Sannolikhetsteori 1.

### 3.5. Abstrakt algebra.

#### Definition/Sats 3.4: Ordad kropp

Låt  $\mathbb{F}$  vara en kropp med en strikt ordning  $<$  så att:

- $x, y, z \in \mathbb{F}$  och  $y < z$  så är även  $x + y < x + z$
- $x, y \in \mathbb{F}$  och  $x, y > 0$  så är även  $xy > 0$

#### Definition/Sats 3.5: Vektorrum över kropp

En mängd  $V$  är ett vektorrum över en kropp  $\mathbb{F}$  om vi har följande 2 avbildningar:

$$\begin{aligned} V \times V &\xrightarrow{+} V & \mathbb{F} \times V &\xrightarrow{\cdot} V \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

#### Definition/Sats 3.6: Stödet till en avbildning

Låt  $f : M \rightarrow \mathbb{F}$  där  $\mathbb{F}$  är en kropp. Vi definierar

$$\text{supp}(f) = \{m \in M \mid f(m) \neq 0\}$$

Vi kan generalisera detta till avbildningar över vektorrum  $V$  och definiera:

$$V_{\text{fin}} = \{f \in V \mid \text{supp}(f) \text{ ändlig}\}$$

Vi har i andra kurser kikat på hur vi kan kvota mängder med ideal. Vi kan även kvota med ekvivalensrelationer enligt följande:

$$M/\sim = \{[x] \in \mathcal{P}(M) \mid x \in M\}$$

Givet en binär komposition  $*$  över  $M$  och en ekvivalensrelation  $\sim$  säger vi att  $\sim$  **respekterar**  $*$  om:

$$x \sim x' \quad \& y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y' \quad \forall x, y \in M$$

Vi kan då definiera den *inducerade binära kompositionen*  $\bar{*}$  på  $M/\sim$  genom:

$$\begin{aligned} M/\sim \times M/\sim &\xrightarrow{\bar{*}} M/\sim \\ ([x], [y]) &\mapsto [x * y] \end{aligned}$$

### 3.6. Kardinalitet.

Två mängder har samma kardinalitet om det finns en bijektion mellan de.

Vi säger att en mängd  $A$  är uppräknelig om det finns en bijektion mellan  $A$  och  $\mathbb{N}$ .

Om det inte finns en bijektion säger vi att  $A$  är överuppräknelig.

#### Anmärkning:

Om  $A_1, A_2, \dots$ , är uppräkneliga så är deras union uppräknelig.

#### Definition/Sats 3.7: Cantors sats

Låt  $X$  vara en mängd. Det finns **ingen** surjektion från  $X$  till  $\mathcal{P}(X)$

#### Definition/Sats 3.8: Schröder-Bernsteins sats

Betrakta följande:

$$X \xrightarrow{f} Y \quad Y \xrightarrow{g} X$$

Om  $f, g$  är injektiva så finns en bijektion  $X \xrightarrow{h} Y$

För att visa detta krävs följande sats:

#### Definition/Sats 3.9: Tarskis fixpunktssats

Antag att  $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  är monotont växande, dvs

$$A \subseteq B \Rightarrow F(A) \subseteq F(B)$$

Då finns det  $M \subseteq X$  så att  $F(M) = M$