Övningar 6: svar och ibland exempel på lösningar.

1. Följande stämmer: a, c, f.

2. Följande stämmer: d, e.
   Motivation till e: Eftersom $\mathcal{N} \not\models Q(a_0)$ så $\mathcal{N} \models Q(a_0) \to R(a_0, c_0)$ och då finns ju ett element i $\{a_0, b_0, c_0\}$ som satisfierar $Q(y) \to R(y, c_0)$.

3. Kan tex välja
   φ_1 att vara $Q(a)$,
   φ_2 — " — $\neg Q(a)$,
   φ_3 — " — $\forall x(x=x)$ och
   φ_4 — " — $\neg\forall x(x=x)$.

4. Följande stämmer: a, b, c.

5. Kan t.ex. välja $\mathcal{D} = \langle D ; a^{\mathcal{D}} ; \oplus^{\mathcal{D}} ; \rangle$ där $D = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $a^{\mathcal{D}} = 0$ och $\oplus^{\mathcal{D}}$ är vanlig addition.

Då är satserna i a–c falska i $\mathcal{D}$.

I del d så kan vi ta satsen som anges där.

6. Se kursboken.

7. (a) Låt $\mathcal{B} = \langle B ; ; ; R^{\mathcal{B}} \rangle$ där B är en mängd med minst två olika element och $R^{\mathcal{B}}$ är mängden av alla $(a, b, c) \in B^3$ sådana att $a \neq b$ eller $a \neq c$ eller $b \neq c$. Då är $\mathcal{B}$ en modell av T.

Låt $\mathcal{C} = \langle C ; ; ; R^{\mathcal{C}} \rangle$ där C är vilken icketom mängd som helst och $R^{\mathcal{C}} = \emptyset$.

Då gäller att $\mathcal{C} \not\models \exists x \exists y \forall z\, R(x, y, z)$ så $\mathcal{C}$ är <u>inte</u> en modell av T.

(b) Om $\mathcal{B}$ är som i a-delen och B är oändlig så är $\mathcal{B}$ en modell av T med oändligt universum.

(c) Nej. En struktur med endast ett element i sitt universum kan inte vara en modell av både $\forall x \neg R(x,x,x)$ och $\exists x \exists y \forall z R(x,y,z)$.

(d) Om $\mathcal{B}$ är som i a-delen och B innehåller exakt två olika element så $\mathcal{B} \models T$ och $\mathcal{B} \models \varphi$.

Vi visar nu att ingen modell av $T \cup \{\varphi\}$ kan ha mer än två element.

Först visar vi att

(1) Om $\mathcal{M} \models T$ och M har minst tre olika element så finns <u>olika</u> $a,b,c \in M$ så att $\mathcal{M} \models R(a,b,c)$.

Antag att $\mathcal{M} \models T$ och att M har minst tre olika element. Pga. första och tredje satsen i T så finns olika $a, b \in M$ så att för alla $c \in M$, $\mathcal{B} \models R(a, b, c)$. Eftersom $\mathcal{B}$ har minst tre element så finns $c \in M$ så att $c \neq a$, $c \neq b$ och $\mathcal{B} \models R(a, b, c)$.

Nu visar vi att

(2) Om $\mathcal{M} \models T \cup \{\varphi\}$ och $a, b, c \in M$ är olika element så $\mathcal{M} \models \neg R(a, b, c)$.

Antag att $\mathcal{M} \models T \cup \{\varphi\}$.
Pga den sista satsen i T så

$$\mathcal{M} \models R(b, c, b) \wedge R(c, b, c)$$

för alla $b, c \in M$ så att $b \neq c$.
Eftersom $\mathcal{M} \models \varphi$ så gäller

$\mathcal{M} \models \neg R(a, b, c)$ för alla $a, b, c \in \mathcal{M}$ så att $a \neq b$, $a \neq c$ och $b \neq c$.

Påståendena (1) och (2) medför att ingen modell av $T \cup \{\varphi\}$ har mer än två element.

8. (a) Tag tex. en struktur där E tolkas som tomma mängden och F som hela universumet.

(c) Tag tex. en struktur där både E och F tolkas som tomma mängden.

9. (d) Tag tex.

$$\langle \{1, 2\} ; 2 ; ; \{(2, 2)\} \rangle .$$

(e) Tag tex.

$$\langle \{1, 2\} ; 2 ; ; \{(1, 1), (2, 1)\} \rangle .$$