UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Kragh

TENTAMEN i matematik
1MA025: Linjär algebra och geometri I
KandMa1, MatematikI, IT2, fristående
20 Oktober 2020 klockan 14.00–19.00

Tillåtna hjälpmedel: Boken (ny eller gammal), material i Studium, egna anteckningar och skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med **motiveringar** och **tillräckliga mellanberäkningar** (extra vikt blir lagt på detta på en hemtenta med bok).

Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs **godkänt på varje moment** samt minst 18, 25 respektive 32 poäng. För godkänd på moment ska man visa färdighet inom momentet på denna tenta - eller bli godkänd på momentet på hemsidan uu.mozquizto.se (kan göras i efterhand till och med den 25e oktober) de 8 moment är beskrivet i kursplanen som är en del av Studium materialet.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_3 - x_4 = a \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

för varje värde på $a \in \mathbb{R}$.

2. I varje deluppgift hitta vinkeln mellan vektorerna och arean av en parallellogram med dem som sidor.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ och $\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$ där $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ och $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1$.

3. Låt $A = (-1, 1, 2)$, $B = (0, 2, 0)$ och $C = (1, 3, -2)$ vara punkter i $\mathbb{R}^3$.

a) Visa att A, B och C ligger i planet $\pi : x + y + z = 2$.

b) Visa att A, B och C ligger i planet $\tau : 2x + z = 0$.

c) Avgör om de två plan är lika.

d) Vad säger detta om punkterna?

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$BX - A = B + AX.$$

Var god vänd!

5. Hitta alla reella x så att

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$$

6. Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion i planet $\pi : 5x + y - z = 0$.

a) Hitta P:s standardmatris $[P]$.

b) Använd a) till att hitta närmaste punkten till $A = (2, -1, 1)$ i planet π.

c) Avgör om P är injektiv.

7. Låt $\underline{v} = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_4)$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) För vilka a utgör $\underline{v}$ en bas för $\mathbb{R}^4$?

b) För $a = 0$ hitta koordinatorna för vektorerna

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i denna bas.

8. Låt A och B vara $n \times n$ matriser som uppfyller

$$AB + BA = I \qquad \text{och} \qquad AB^2 + B^2A = I.$$

a) Visa att B är inverterbar.

b) Hitta A och B.

Lycka till!

Lösningar till provet i 1MA025: Linjär algebra och geometri I 20 Oktober 2020 klockan 14.00–19.00

Lösning till problem 1. Totalmatrisen:

$$\boxed{1}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & -3 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \boxed{1}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+5 \end{array}\right)$$

Vi har alltså inga lösningar om $a \neq -5$. Så vi antar nu $a = -5$ och fortsättar:

$$\boxed{-1}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \boxed{\tfrac{1}{2}} \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Alla lösningar (parametriserat med $x_2 = t$ och $x_4 = s$):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + 3t, t, -\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}s, s), t, s \in \mathbb{R}.$$

Lösning till problem 2. a) $\vec{v} \bullet \vec{w} = -9 + 16 = 7$, $\vec{v} \bullet \vec{v} = 25 = \vec{w} \bullet \vec{w}$ vilket ger vinkeln

$$\theta = \arccos\left(\tfrac{7}{25}\right).$$

Arean är absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -24.$$

Så arean är 24.

b) $\vec{v} \bullet \vec{w} = 1 - 2 + 4 = 3$, $\vec{v} \bullet \vec{v} = 21$, $\vec{w} \bullet \vec{w} = 3$ vilket ger vinkeln

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{21}\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right).$$

Arean är längden av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Så arean blir $\sqrt{36 + 9 + 9} = 3\sqrt{6}$

c)

$$\begin{aligned} \vec{v} \bullet \vec{w} &= (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{b} \bullet \vec{b} = 4 - 4 = 0 \\ \vec{v} \bullet \vec{v} &= (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} + 2\vec{a} \bullet \vec{b} = 4 + 4 + 2 = 10 \\ \vec{w} \bullet \vec{w} &= (\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} - 2\vec{a} \bullet \vec{b} = 4 + 4 - 2 = 6 \end{aligned}$$

De två vektorer är ortogonala (vinkel $\frac{\pi}{2}$) och parallellogrammen är ett kvadrat. Sidorlängderna är $\sqrt{10}$ och $\sqrt{6}$ som ger area $2\sqrt{15}$.

Lösning till problem 3. a) vi sätter in i ekvationen:

$$\begin{array}{ll} A: (-1)+1+2=2 & \qquad\qquad \text{OK} \\ B: 0+2+0=2 & \qquad\qquad \text{OK} \\ C: 1+3+(-2)=2 & \qquad\qquad \text{OK} \end{array}$$

b) vi sätter in i ekvationen:

$$\begin{array}{ll} A: 2(-1)+2=0 & \qquad\qquad \text{OK} \\ B: 2(0)+0=0 & \qquad\qquad \text{OK} \\ C: 2(1)+(-2)=0 & \qquad\qquad \text{OK} \end{array}$$

c) Den ena ekvationen kan inte skalas om till den anden så det är inte samma plan. Alternativt: De två plan har icke-parallella normalvektorer:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

och är därför inte parallella (och därför inte samma plan).

d) De tre punkter måste ligga på skärningslinjen mellan de två plan. Eller bara: de tre punkter ligger på linje.

Lösning till problem 4. Vi försöker skriva om:

$$\begin{aligned} BX - A = B + AX \quad &\Leftrightarrow \quad BX - AX = B + A \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (B-A)X = (B+A) \quad \Leftrightarrow^* \quad X = (B-A)^{-1}(B+A). \end{aligned}$$

Det sista $(*)$ fungerar enbart om $B-A$ är inverterbar och vi ska använda denna invers så vi försöker hitta den:

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

som vi (försöker) inverterar med vanlig metod:

$$\begin{array}{c} 1 \;\; -1 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \;\; -2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ -1 \\ -1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

och därför är

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösning till problem 5. Vi använder räkneregler för determinanter för att få ett faktoriserat polynom:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1-x & x-1 \\ 0 & 1-x & 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 1-x & 1-x & 0 & x-1 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)^4 \begin{vmatrix} x & x & x & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^4 \begin{vmatrix} x & x & x & x & 1+x \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{R5} =$$

$$= -(x-1)^4 \begin{vmatrix} x & x & x & 1+x \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)^4 \begin{vmatrix} x & 0 & x & 1+2x \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{R4} =$$

$$= -(x-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & x & 1+2x \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & x & 1+2x \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{R3} =$$

$$-(x-1)^4 \begin{vmatrix} x & 1+2x \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)^4(x+2(1+2x)) = -(x-1)^4(5x+2).$$

Så svaret blir $x = 1$ eller $x = -\frac{2}{5}$.

Lösning till problem 6. a) För en ortogonal projection vet vi att $P(\vec{n}) = \vec{0}$ för en normalvektor till planet och at $P(\vec{v}) = \vec{v}$ om $\vec{v}$ är parallell med planet. Vi hittar 3 vektorer som dessa (2 parallell med planet), men som också är en bas (tillräckligt att de två vektorer parallell med planet inte är parallella med varandra):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{har } P \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{har } P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{har } P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Detta ger ekvationen för $[P]$:

$$[P] \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi hittar inversen (som existerar precis för att vi valde en bas):

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -5 & 26 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

och därmed också

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -5 & 26 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -5 & 26 & 1 \\ 5 & 1 & 26 \end{pmatrix}$$

b)

$$[P]\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 \\ -35 \\ 35 \end{pmatrix}$$

c) Eftersom projektionen skickat $\vec{n} \neq 0$ till $\vec{0}$ är den inte injektiv.

Lösning till problem 7. a) Vi har 4 vektorer i $\mathbb{R}^4$. Dessa är en bas om matrisen med dessa som kolonner er inverterbar - vi kollar determinanten för detta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{K2} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{K2} = -\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = a-1.$$

Vi ser att det är en bas precis när $a \neq 1$.

b) Vi löser det ekvationssystemet som motsvara att hitta koordinaterna:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -3 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Så för $a = 0$ blir koordinaterna:

$$\vec{a} = \underline{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \underline{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{c} = \underline{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vilka alla är lätta att verifiera med de ursprungliga vektorer (därför minus om man inte gör kontroll och har fel).

Lösning till problem 8. a) Vi använder den förste ekvationen i den andra ekvationen två gånger (vid $*$) och ser:

$$I = AB^2 + B^2A = (AB)B + B(BA) =^* (I - BA)B + B(I - AB) = B(2I - 2AB)$$

Då B är kvadratisk och B gånger något ger I är den inverterbar.

b) Vi kunna ha faktoriserat ut B på höger sida istället för vänster och fått:

$$I = (2I - 2BA)B$$

det betyder att inversen till B (som ju är entydig) kan skrivas på två sätt:

$$2I - 2BA = B^{-1} = 2I - 2AB \quad \Rightarrow \quad AB = BA$$

Förste ekvationen säger nu $2AB = I$ och andra ekvationen ger $2AB^2 = I$. Dessa ger att $IB = I \Rightarrow B = I$ och sen att $A = \frac{1}{2}I$.