# Lösningsförslag till duggan 2019-04-26

1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^1 \qquad \varphi\to\psi}{\psi}\,(\to E) \qquad\qquad \psi\to\chi}{\chi}\,(\to E)}{\varphi\to\chi}\,(\to I)^1$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\chi}{\varphi}\,(\wedge E) \qquad \cancel{\varphi\to\psi}^1}{\psi}\,(\to E) \qquad\qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg E)}{\neg(\varphi\to\psi)}\,(\neg I)^1$$

2. Sanningsvärdestabell för formeln:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(\neg p\vee q)$ | $\to$ | $(\neg r\to\neg q)$ | formel som "beskriver" sanningsvärdena för $p,q,r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| s | s | s | | s | s | $p\wedge q\wedge r$ |
| f | s | s | | s | s | $\neg p\wedge q\wedge r$ |
| s | f | s | | s | s | $p\wedge\neg q\wedge r$ |
| s | s | f | s | f | f | $p\wedge q\wedge\neg r$ |
| f | f | s | | s | s | $\neg p\wedge\neg q\wedge r$ |
| f | s | f | s | f | f | $\neg p\wedge q\wedge\neg r$ |
| s | f | f | | s | s | $p\wedge\neg q\wedge\neg r$ |
| f | f | f | | s | s | $\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$ |

sanningsvärdena för hela formeln.

Låt $\varphi$ beteckna $(\neg p \vee q) \to (\neg r \to \neg q)$.

Då är följande en DNF som är ekvivalent med $\varphi$:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

(Detta är disjunktionen av de understrukna formlerna i kolumnen längst till höger, motsvarande raderna där $\varphi$ är sann.)

Vi får en KNF som är ekvivalent med $\varphi$ på följande sätt (där vi väljer de icke-understrukna raderna och negerar dom):

$$\varphi \text{ eq } \neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\text{eq } (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

Den sista formeln är en KNF.

3. (a) Om både $p$ och $q$ är sanna så blir $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow p$ sann, så formeln är <u>satisfierbar</u>. Men om $p$ är sann och $q$ falsk så blir $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow p$ falsk, så den är <u>inte</u> en tautologi.

(b) Sanningsvärdestabell:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg($ | $p$ | $\leftrightarrow$ | $q)$ | $\vee$ | $\neg($ | $\neg$ | $r$ | $\wedge$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s | s | s | | | | | $\boxed{s}$ | s | f | s | f | |
| f | s | s | | | | | $\boxed{s}$ | s | f | s | | |
| s | f | s | | | | | $\boxed{s}$ | s | | | | f |
| s | s | f | f | | s | | $\boxed{f}$ | f | s | f | | s |
| f | f | s | f | | s | | $\boxed{s}$ | s | | | | f |
| f | s | f | s | | f | | $\boxed{s}$ | | | | | |
| s | f | f | s | | f | | $\boxed{s}$ | | | | | |
| f | f | f | | | | | $\boxed{s}$ | | s | | | f |

sanningsvärdet för hela formeln

Man ser, genom att jämföra med tabellen till uppgift 2, att varje sanningsvärdestilldelning som gör $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)$ sann även gör $\neg(p \leftrightarrow q) \vee \neg(\neg r \wedge q)$ sann. Alltså är $\neg(p \leftrightarrow q) \vee \neg(\neg r \wedge q)$ en <u>logisk konsekvens</u> av $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)$.

4. (a) Nej, om man (exempelvis) väljer

$\varphi$ som $p$

$\psi$ som $q$,

$\chi$ som $p$ och

$\lambda$ som $q$,

så får man

$$\{p \vee q, p \to p, q \to q\} \vdash p \wedge q$$

Vi har $\{p \vee q, p \to p, q \to q\} \not\models p \wedge q$ för om $p$ är sann och $q$ falsk så blir alla antaganden sanna men $p \wedge q$ blir falsk. Enligt sundhetssatsen så

$$\{p \vee q, p \to p, q \to q\} \nvdash p \wedge q.$$

(b) Ja, om man (exempelvis) väljer

$\varphi$ som $p$,

$\psi$ som $p$,

$\chi$ som $p$ och

$\lambda$ som $p$

så får man

$$\{p \vee p, p \to p, p \to p\} \vdash p \wedge p$$

och denna sekvent stämmer. Motiveringen kan göras på liknande sätt som i a-delen.