Övningar till lektion 8

Sundhetssatsen och fullständighetssatsen för första ordningens logik

Låt $\sigma = \langle\ ; \mathbf{f}; \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}\rangle$ av ställighet $\langle\ ; 1; 1, 1, 2\rangle$.

Avgör om påståendena $T \models \varphi$ nedan gäller. Om de gäller, så utför beviset $T \vdash \varphi$. Om påståendet inte gäller så hitta en motmodell, dvs. en struktur $\mathcal{A}$ så att $\mathcal{A} \models T$ men $\mathcal{A} \not\models \varphi$. I vardera fall, så motivera varför påståendet stämmer, eller varför bevis inte finns med sundhetssatsen eller fullständighetssatsen.

1. $\forall x(\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \models \forall x\mathbf{P}(x) \vee \forall x\mathbf{Q}(x)$
2. $\exists x(\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)) \models \exists x\mathbf{P}(x) \vee \exists x\mathbf{Q}(x)$
3. $\forall x\mathbf{P}(x) \wedge \forall x\mathbf{Q}(x) \models \forall x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))$
4. $\exists x\mathbf{P}(x) \wedge \exists x\mathbf{Q}(x) \models \exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x))$
5. $\exists x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x)) \models \exists x\mathbf{P}(x)$
6. $\forall x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x)) \models \forall x\mathbf{P}(x)$
7. $\{\exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \neg\mathbf{Q}(x)),\ \forall x(\mathbf{P}(x) \to \neg\mathbf{Q}(x))\} \models \forall x\neg\mathbf{Q}(x)$
8. $\forall x\mathbf{P}(x) \models \forall x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))$
9. $\{\forall x\forall y(\mathbf{R}(x,y) \to \mathbf{R}(x,x)),\ \exists x\exists y\mathbf{R}(x,y)\} \models \forall x\mathbf{R}(x,x)$
10. $\{\forall x\forall y(\mathbf{R}(x,y) \to \mathbf{R}(x,x)),\ \exists x\forall y\mathbf{R}(x,y)\} \models \forall x\mathbf{R}(x,x)$
11. $\{\exists y\forall x(\mathbf{R}(x,y) \to \mathbf{P}(x)),\ \forall x\mathbf{P}(x)\} \models \exists x\mathbf{R}(x,x)$
12. $\{\forall x\exists y(\mathbf{R}(x,y) \to \mathbf{P}(x)),\ \forall x\neg\mathbf{P}(x)\} \models \neg\exists x\mathbf{R}(x,x)$
13. $\{\forall x(\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{P}(\mathbf{f}(x))),\ \exists x\mathbf{P}(x)\} \models \exists x\mathbf{P}(\mathbf{f}(x))$
14. $\exists y\forall x(\mathbf{f}(x) = y \to \mathbf{P}(y)) \models \forall x(\mathbf{f}(x) \neq x) \to \exists y\neg\mathbf{P}(y)$
15. $\forall x\forall y(\mathbf{f}(x) = y \leftrightarrow \mathbf{R}(x,y)) \models \forall x\forall y\forall z((\mathbf{R}(z,y) \wedge \mathbf{R}(z,x)) \to x = y)$

    I uppgifterna som följer så arbetar vi med godtyckliga signaturer. Så när man ska visa att sundhetssatsen inte gäller (under givna antaganden i respektive uppgift) så räcker det att visa att den inte gäller för någon signatur som man kan välja själv. Om man ska visa att sundhetssatsen gäller så betyder det att man ska visa att den gäller för varje signatur (dvs. beviset ska vara oberoende av signaturen).

16. (svårare) I följande deluppgifter, antag att vi i strukturdefinitionen definierat $\forall x$ på samma sätt som vi definierade $\exists x$ dvs $\mathcal{M} \models \forall x\varphi(x)$ om det finns $a \in D$, så att $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.
    (a) Hitta en formel φ och en struktur $\mathcal{M}$ så att $\vdash \varphi$ men $\mathcal{M} \not\models \varphi$.
    (b) Visa att sundhetssatsen inte längre är sann.

(c) Visa att varje sats φ som endast innehåller $\forall$ är logiskt ekvivalent med exakt samma formel där varje $\forall$ är utbytta mot $\exists$.
Detta kan tyckas trivialt, men för att göra detta ordentligt måste vi ändå göra induktion över formlers uppbyggnad.

(d) Visa att om vi begränsar oss till formler som endast innehåller $\exists$,$\neg$ och $\vee$ så gäller ännu sundhetssatsen (för varje signatur).
Tips: Induktion

17. (svårare) Antag att bevisregeln för $\exists-$elimination ändras så att $\exists x\varphi(x) \vdash \varphi(t)$ där t är en godtycklig sluten term. Visa att sundhetssatsen inte gäller längre.

18. (svårare) Låt $\exists^\infty$ vara en ny kvantor så att $\mathcal{M} \models \exists^\infty x\mathbf{P}(x)$ om och endast om det finns ett oändligt antal $c \in D$ så att $\mathcal{M} \models \mathbf{P}(c)$.

    (a) Hitta en L-struktur $\mathcal{M}$ och en formel φ (innehållandes $\exists^\infty$) så att $\mathcal{M} \models \exists^\infty x\varphi(x) \wedge \exists^\infty x\neg\varphi(x)$.

    (b) Visa att om φ är en sats endast innehållandes $\wedge, \vee$ och $\exists^\infty$ samt ψ är samma formel fast där $\exists^\infty$ är utbytt mot $\exists$, så kommer $\varphi \models \psi$.
    Tips: Induktion över φ

    (c) Om vi låter $\exists^\infty$ ha samma bevisregler som $\exists$, visa att sundhetssatsen ej gäller längre.