

UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR

# Affin & Projektiv Geometri

*Rami Abou Zahra*

Inlämningsdatum  
October 3, 2022

## CONTENTS

1. Plana algebraiska kurvor	2
2. Affina avbildningar	4
3. Klassificering av andragradspolynom i två variabler	7
4. Övningsuppgifter	8
5. Komplexa planet $\mathbb{C}^2$	8
6. Vad är bra med $\mathbb{C}$ -kurvor?	10
7. Skärningstalet (skärningsmultiplicitet)	12
7.1. Konsekvenser av axiomen	13
8. Vad vi vet nu om Bezouts sats	15
9. Projektiv Geometri över $\mathbb{R}$	16
9.1. Projektiva transformationer	18
9.2. Ekvivalenta polynom upp till projektiv transformation	20
9.3. Skärningstalet i $\mathbb{R}P^2$	20
9.4. Generalisering av $\mathbb{R}P^2$	21
10. Komplexa projektiva planet $\mathbb{C}P^2$	22
11. Mer om Andragradskurvor	23
12. Singulära kurvor	27
12.1. Hur många singulära punkter kan en kurva ha? (i $\mathbb{C}P^2$ )	28
12.2. Tredjegradskurvor	29
12.3. Tredjegradskurvor	30
13. Elliptiska kurvor	33

## 1. PLANA ALGEBRAISKA KURVOR

Vi inleder med definition:

**Theorem 1.1: Plan affin algebraisk kurva**

En **plan affin algebraisk kurva** är nollställesmängden till ett icke-konstant polynom  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  där  $\mathbb{R}[x, y]$  är mängden av alla polynom med 2 variabler med reella koefficienter.

**Nollställesmängden** kan betecknas  $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

**Theorem 1.2: Affin-avbildning**

En linjär avbildning är på formen  $x \mapsto ax$ , medan en affin avbildning är "ungefär linjär", dvs  $x \mapsto ax + b$

Ett sätt att betrakta polynom är att de är ett ändligt antal utförande av operatorer på kropp-element.

**Exempel:**

Betrakta följande polynom i  $\mathbb{R}^2$ ,  $ax + by + c = f(x, y)$ . Polynomet är av grad 1, och är därför därmed ett linjärt polynom.

**Exempel:**

Vi kan även ha nollställesmängden som parabel med följande funktion  $f(x, y) = y - x^2$

Bygger vi vidare på föregående exempel kommer vi fram till följande mer generella formel för att "omvandla" ett endimensionellt polynom till en flerdimensionell:

$$f(x, y) = y - p(x)$$

Där  $p(x)$  är ett godtyckligt polynom.

**Exempel:**

Om vi betraktar följande funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (enhetscirkeln) så har den en nollställesmängd som är en punkt.

**Exempel:**

Om vi betraktar tomma-mängden som nollställesmängd (dvs exempelvis  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ) så är det absolut en valid nollställesmängd, men en obehaglig sådan ty det inte finns en intuitiv geometrisk bild, kan vi kalla den för en kurva?  $f(x, y) = x^2 + 1$  har ju samma nollställesmängd!

**Exempel:**

Betrakta följande funktion  $f(x, y) = xy$ . Denna har unionen av  $x$ -axeln och  $y$ -axeln som lösningsmängd

En affin funktion från flervariabeln som vi kanske minns är faktiskt linjäriseringen av  $f$ :

$$f(\bar{r}) \approx f(\bar{r}_0) + \nabla f(\bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

I den här kursen tillåter vi allmänna linjära basbyten, alltså ej bara isometriska avbildningar utan vi kan skala om ena axeln och krympa den/deformera den!

**Theorem 1.3: Singulära punkter**

En punkt  $\bar{r}_0$  sådant att  $f(\bar{r}_0) = 0$  sådant att  $\nabla f(\bar{r}_0) = (0, 0)$  kallas **singulär**. Singulära punkter bevaras under affin transformation.

**Theorem 1.4: Transversell skärning**

Två kurvor  $f(\bar{r}) = 0$  och  $g(\bar{r}) = 0$  sägs skära varandra transversellt i  $[\bar{r}]_0$  om  $f(\bar{r}_0) = 0 = g(\bar{r}_0)$  och  $\nabla f(\bar{r}_0) \neq 0 \neq \nabla g(\bar{r}_0)$  och  $\nabla f(\bar{r}_0)$  och  $\nabla g(\bar{r}_0)$  är *inte* parallella (linjärkombinationer av varandra)

I linjär algebra 2 skiljde vi på t.ex ellipser med olika halvaxlar (och andra former) genom att undersöka egenvärden  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  i motsvarande kvadratiska form.

I linjär algebra använde vi ortonormala avbildningar som var isometriska, det ska vi strunta i här eftersom vi vill kunna deformera kurvor utan att bevara längd/vinklar

## 2. AFFINA AVBILDNINGAR

En affin avbildning är *nästan* samma sak som en linjär avbildning, men inte riktigt! Den tillåter translationer (flytta saker axel-parallellt). Alltså, ej en isometri.

### Theorem 2.1: Affin Avbildning

En avbildning  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  på formen  $F(\bar{v}) = L(\bar{v}) + \bar{b}$

Där  $\bar{b}$  är en konstant vektor och  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kallas för en **affin** avbildning

**Anmärkning:** I en linjär avbildning är den konstanta vektorn  $\bar{b} = 0$ , alltså är alla linjära avbildning affina.

### Exempel:

Betrakta följande avbildning:  $\bar{F}(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$   $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

Det är  $+e$  och  $+f$  som gör avbildningen affin

### Anmärkning:

I exemplet är det  $e, f$  som är "translationerna" (translationsfaktor). Det enda de gör är att flytta saker, de bevarar längder och vinklar Alternativ notation:

$$\bar{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{L(\bar{v})} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

### Theorem 2.2: Affin Transformation

Om  $\det(\bar{L}) \neq 0$  så kallas  $\bar{F}$  för en **affin transformation**. En affin transformation är en bijektion.

### Theorem 2.3: Euklidisk Transformation

En transformation som bevarar längd och vinklar, även kallad för ortonormal transformation

**Notation:** Mängden affina avbildningar noteras  $Aff(n) = \{\text{affina transformationer} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$

### Egenskaper:

- $F, G \in Aff(n) \Rightarrow F \circ G \in Aff(n)$
- Om  $\det(\bar{L}) \neq 0$  så är  $\bar{F}$  inverterbar ( $\bar{L}$  är inverterbar)
- $id_{\mathbb{R}^n}$  är affin

### Proof 2.1: Egenskap 1

$$\begin{aligned} F(\bar{v}) &= L(\bar{v}) + \bar{b} & G(\bar{w}) &= M(\bar{w}) + \bar{c} \\ F(\bar{G}(\bar{w})) &= F(\bar{M}(\bar{w}) + \bar{c}) = L(\bar{M}(\bar{w}) + \bar{c}) + \bar{b} = L(\bar{M}(\bar{w})) + L(\bar{c}) + \bar{b} \end{aligned}$$

□

**Proof 2.2: Egenskap 2**

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \bar{F}(\bar{x}) = \bar{L}(\bar{x}) + \bar{b} \\ \bar{F}^{-1}(\bar{y}) &= \bar{L}^{-1}(\bar{y} - \bar{b})\end{aligned}$$

□

**Anmärkning:**

Man kan betrakta  $\text{Aff}(n)$  som en grupp, där identiteten är identitetsavbildningen ( $\bar{b} = 0$ , linjär identitet = enhetsmatrisen)

**Geometrisk egenskap hos  $\text{Aff}(n)$** 

- Om  $l$  är en linje,  $\bar{F} \in \text{Aff}(n) \Rightarrow \bar{F}(l)$  är en linje
- Om  $l, l'$  är parallella linjer så är  $\bar{F}(l) = \bar{F}(l')$
- Om två kurvor skär varandra transversellt så gäller detsamma bilderna av kurvorna
- Säg att vi har 4 punkter på en linje, så bevarar  $\bar{F}$  längdförhållandet mellan dem:

$$\frac{|\bar{A}\bar{B}|}{|\bar{C}\bar{D}|} = \frac{|F(\bar{A})F(\bar{B})|}{|F(\bar{C})F(\bar{D})|}$$

**Anmärkning:**

Affina avbildningar bevarade nödvändigtvis inte längder och vinklar, men 4:e egenskapen här verkar tyda på att någonting bevaras.

**Theorem 2.4**

Säg att vi har en affin transformation  $\bar{F} \in \text{Aff}(n)$ , vi inducerar en avbildning:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n] & \xrightarrow{F^*} & \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n] \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} & f \mapsto f \circ \bar{F} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ F} & & \end{array}$$

**Exempel:**

Betrakta följande avbildning:  $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sådant att  $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ .  
 $f \in \mathbb{R}[x, y] = x^2 + y^2$  ger följande:

$$\begin{aligned}F^*(f)(x, y) &= f \circ \bar{F}(x, y) \\ (x + y)^2 + (x - y)^2 &= 2(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

**Theorem 2.5**

Om  $\deg(f) = k$  så  $\deg(F^*(f)) = k$

**Anmärkning:**

Det här  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  är en ring med 1:a (identitet). Det är också en  $\mathbb{R}$ -algebra (ett vektorrum över  $\mathbb{R}$  så att multiplikation med  $\lambda \in \mathbb{R}$  beter sig civiliserat m.a.p ringstruktur).

Då är  $F^* : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  en  $\mathbb{R}$ -algebraringhomomorfi, det vill säga:

- $F^*(f + g) = F^*(f) + F^*(g)$
- $F^*(fg) = F^*(f)F^*(g)$
- $F^*(1) = 1$
- $F^*(\lambda f) = \lambda F^*(f)$

**Notation:**

Mängden av alla  $\mathbb{R}$ -algebraringhomomorfi betecknas för  $Auf(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]) = \{\mathbb{R}\text{-algebraringhomomorfi}\}$

**Theorem 2.6**

Avbildningen  $\text{Aff}(n) \xrightarrow[*]{} Auf(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n])$   $F \mapsto F^*$  har egenskapen  $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

**Proof 2.3: Bevis av föregående sats**

$$(F \circ G)^*(f) = f \circ (F \circ G) = (f \circ F) \circ G = G^*(F^*(f)) = (G^* \circ F^*)(f)$$

□

**Theorem 2.7: Affint ekvivalens**

Låt  $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Vi säger att  $f$  och  $g$  är **affint ekvivalenta** om det finns en affin transformation  $\bar{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  och ett tal ( $\lambda \neq 0$ ) så att:

$$F^*(f) = \lambda g$$

Detta är en ekvivalensrelation på  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  ( $f \sim g$ )

### 3. KLASIFICERING AV ANDRAGRADSPOLYNOM I TVÅ VARIABLER

Vi vill veta hur många "andragradskurvor" det finns och vilka. Det är planen.

Vi kikar på det allmänna fallet  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ .

Vi försöker förenkla  $f(x, y)$  (som är ett allmänt polynom) m.h.a affina transformationer och multiplikation med konstanter  $\lambda \neq 0$

Vi noterar från  $f(x, y)$  att vi har en bit som är en rent kvadratisk form  $(ax^2 + bxy + cy^2)$ , och vi vet att vi alltid kan diagonalisera kvadratiske former, m.h.a variabelbyte. Vi ser vad som händer om vi gör detta:

$$f(x, y) \Rightarrow x^2 + \lambda y^2 + Dx + Ey + f$$

Där  $\lambda \in \{0, 1, -1\}$ . Vi falluppdelar:

- $\lambda = \pm 1 \Rightarrow$  Vi kan kvadratkomplettera och vi får  $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4} + \lambda \left(y + \frac{E}{2\lambda}\right)^2 - \frac{E^2}{4\lambda} + f$

Vi samlar alla konstanter till en och gör ett variabelbyte på  $x, y \Rightarrow x^2 + \lambda y^2 + F$

#### Theorem 3.1: Signaturen av en kvadratisk form

Hur många positiva resp. negativa egenvärden = signaturen. Betecknas som koordinater  $(x, y)$  där  $x$  = hur många positiva och  $y$  = hur många negativa.

Notera! Signaturen är oförändrad under affina transformationer (invariant)

#### Theorem 3.2

Om  $f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)$ , så är nollställesmängden unionen:

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$$

Ur detta följer det att alla polynomringar  $k[x_1, \dots, x_n]$  är *faktoriella ringar* (varje polynom har en entydig faktorisering i irreducibla polynom). Detta är inte så lätt att visa om vi har fler variabler än 1.

#### Theorem 3.3: Irreducibla komponenter

Det faktorerade polynomet kommer ha bitar (faktorer) som korresponderar till element i nollställesmängden. Dessa kallar vi för **irreducibla komponenter**

#### Theorem 3.4

Två irreducibla kurvor  $f$  och  $g$  sammafaller (skär varandra) i högst *ändligt* många punkter



## 4. ÖVNINGSUPPGIFTER

Vi påminner att om  $f(x, y) = a^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$  så är  $f(x, y)$  affint ekvivalent med exakt en av följande:

- $x^2 + y^2 - 1$  (cirkel)
- $x^2 - y^2 - 1$  (hyperbel)
- $x^2 - y$  (parabel)
- $x^2 - y^2$  (linjekon)
- $x^2 + y^2$  (punkt)
- $x(x - 1)$  (två parallella linjer)
- $x^2$  ("dubbellinje")
- $x^2 + 1$  (tom)
- $x^2 + y^2 + 1$  (tom)

Man skulle kunna säga att målet med första halvan av kurvan är att bevisa följande sats:

**Theorem 4.1: Bezoutes Pseudosats**

Om  $f, g$  är algebraiska kurvor så skär de varandra precis  $(\deg f)(\deg g)$  gånger

I nuläget är det här väldigt fel, vi kan hitta motexempel, men det ska inte stoppa oss! Vi vill gärna att den ska vara sann, för den är så elegant, så vi skapar en miljö där detta stämmer (eskapism i matematisk form).

Det finns 3 huvudsakliga skäl till varför den är falsk:

- Betrakta  $f(x, y) = y - x^2$  och  $g(x, y) = y + 1$  (har inga reella lösningar)
- Betrakta  $f(x, y) = y - x^2$  och  $g(x, y) = y$  (ej transversell skärning)
- Betrakta 2 parallella linjer  $f(x, y) = x$  och  $g(x, y) = x - 1$  (måste införa projektiv geometri, från affina planet till det projektiva)

5. KOMPLEXA PLANET  $\mathbb{C}^2$ 

$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , består alltså av ordnade par  $(a + ib, c + id)$ . Man kan tänka på det som  $\mathbb{R}^4 \Rightarrow (a, b, c, d)$ .

Naturligtvis kan vi generalisera, upp till  $\mathbb{C}^n = \{x_1, \dots, x_n : x_i \in \mathbb{C}\}$ .

Man kan addera dessa vektorer precis som vanligt, multiplicera med  $\lambda \in \mathbb{C}$  osv, hela den grundläggande teorin bakom vektorrum bevaras. Vi har alltså bara vektorrum över  $\mathbb{C}$  istället för över  $\mathbb{R}$

Vi kan exempelvis definiera en parametriserad linje på samma sätt som i  $\mathbb{R}^2$ :

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\bar{v} \quad t \in \mathbb{C}$$

**Kuriosa:**

Detta är en linje:

$$\mathbb{C}x\{0\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

**Theorem 5.1**

Genom två olika punkter i  $\mathbb{C}^n$  går endast en linje

**Theorem 5.2**

$\mathbb{C}^2$ , om två linjer inte är parallella (skiljer sig åt med en komplex faktor) så skär de varandra i en entydig punkt

Nu kan vi prata om  $V(f)$  till polynom  $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ . Det är vad vi menar med plana affina algebraiska kurvor (nu har vi någonstans där de kan bo).

Vi definierar singularitet på samma sätt, det vill säga om Taylorutvecklingen inte har en linjär faktor så är den singulär i den punkten.

Vi kan nu tala om linjära & affina avbildningar över  $\mathbb{C}^n$ , dvs  $\text{Aff}_{\mathbb{C}}(n)$ . De definieras på samma sätt:

$$\bar{F}(\bar{v}) = \bar{L}(\bar{v}) + \bar{b} \quad \bar{L} \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

Där  $\text{GL}(n, \mathbb{C}) =$  mängden av alla inverterbara  $n \times n$ -matriser

Vi kan även här på samma sätt definiera  $F^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Återigen, på samma sätt kan vi definiera ekvivalens mellan polynom samt att det bara finns en linje i  $\mathbb{C}^2$  precis som i  $\mathbb{R}$

En kvadratisk form över  $\mathbb{C}^n$  är ekvivalent med en diagonalform med bara ettor och nollor  
I  $\mathbb{C}^2$  har vi alltså följande kvadratiske former:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Theorem 5.3: Klassificering av andragskurvor i  $\mathbb{C}^2$** 

- $x^2 + y^2 - 1$  (cirkel)
- $x^2 - y$  (parabel) (här kan vi använda  $T(x, y) = (x, iy)$  för att få cirkel)
- $x^2 + y^2$  (linjekors)
- $x(x - 1)$  (parallell linje)
- $x^2$  ("dubbellinje")

**Exempel:**

Betrakta följande polynom:  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3y + 1$

Vi behöver nldväldigtvis inte finna den kvadratiske formen här, utan vi kan göra det för hand genom att kvadratkomplettera alla kvadratiske termer med  $x$  och  $xy$ :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \underbrace{(x+y)^2}_{\text{kvadratisk}} + \underbrace{2x-3y+1}_{\text{linjärt}} \\ &\left. \begin{array}{l} x = x+y \\ y = 2x-3y+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \neq 0 \\ &\Rightarrow X^2 + Y \Rightarrow \text{Parabel} \end{aligned}$$

6. VAD ÄR BRA MED  $\mathbb{C}$ -KURVOR?**Theorem 6.1**

Om  $f(x, y) = \mathbb{C}[x, y]$  samt icke-konstant polynom, då har  $V(f) \subseteq \mathbb{C}^2$  oändligt många punkter (överuppräknligt)

Här är det lite intuitivt lätt att klura ut hur vi skall bevisa detta. Vi arbetar med komplexa tal, så rimligtvis någon sats inom komplexa polynom, såsom algebras fundamentalsats!

**Proof 6.1: Bevis av föregående sats**

Vi vill hitta en massa lösningar genom att använda att vi vet lösningarna till envariabelpolynom. Det vi kan göra är att undersöka hur  $V(f)$  skär linjen  $y = k$  (där  $k$  är en godtycklig konstant). Matar vi in detta i polynomet har vi  $f(x, c)$  som är ett polynom i en variabel, som har nollställen förutsatt att det inte är konstant  $\neq 0$

Vi behöver nu undersöka vad som händer om polynomet är konstant allt för ofta, men för att göra detta behöver vi svara på frågan "vad betyder det att  $f(x, c)$  är konstant, säg  $= d$ ?" Då skulle  $f(x, c) - d = 0$  alltid, vilket innebär att alla koefficienter i  $f$  beror på  $c$ , men om det skall vara 0 så måste  $c$  vara en gemensam rot till alla koefficienterna i  $f - d$

Det finns max ändligt många sådana rötter, eftersom koefficienterna är bara polynom. Det finns ändligt många komplexa tal  $c \in \mathbb{C}$  så att  $f(x, c) - d = 0$   $\square$

**Exempel:**

Givet  $f(x, y) = yx^2 + y^2x + 3$ . Sätt  $y = c$ , vi får då:

$$f(x, c) = cx^2 + c^2x + 3$$

Typiskt sett har detta polynom 2 rötter, ty det är ett andragradspolynom, men det finns vissa undantag såsom när  $c$  är valt så att det blir konstant

I detta fall gäller detta när  $c = 0$ , för det är då vi får ett konstant polynom

**Theorem 6.2: Hilberts nollställessats**

Denna sats gäller i allmän dimension, men vi ska formulera den för kurvor.

Tag 2st polynom  $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$

Vi har sett att  $V(f) = V(g)$  oavsett hur olika polynomen ser ut (för reella fall), vi kikar på hur det ser ut i den komplexa världen:

$$V(f) = V(g) \Leftrightarrow f, g \text{ har samma irreducibla faktorer}$$

**Exempel:**

Givet  $V(f)$  finns ett "enklaste" polynom med denna nollställesmängd, nämligen den som har *en* irreducibel faktor (faktorer av multiplicitet 1), exempelvis:

$$V((x^2 + y^2 - 1)^2(x + y)^3) = V((x^2 + y^2 - 1)(x + y))$$

Detta är det värsta som kan hända! Nollställesmängden bestämmer mer eller mindre polynomet upp till multiplicitet (i  $\mathbb{C}$ )

Hur ser  $V(f)$  ut? Vi kikar närmare på definitionen av  $f(x, y) = 0$ :

$$f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \Leftrightarrow f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Detta är två rella ekvationer i fyra rella variabler, vi förväntar oss (rell) dimension 2 (tänk gausseliminering, 2 ekvationer, 4 variabler, ger oftast 2 parametrar (om de är oberoende)).

Vi kan använda implicita funktionssatsen för att visa att lokalt kring *icke-singulära punkter* är  $V(f)$  en 2D disk

**Sammanfattning:**

- Komplexa kurvor har **många** punkter (med bevis)
- Komplexa kurva bestämmer  $f$  nästan entydigt (Hilberts nollställessats)
- Komplexa kurvor är rella ytor (Implicita funktionssatsen)

Tricket går i någon mening ut på att reducera till en variabel och sedan använda algebrans fundamentalssats, precis som man i flervariabler reducerade till en variabel och bevisade envariabelfallet.

## 7. SKÄRNINGSTALET (SKÄRNINGSMULTIPLICITET)

Vi vill försöka hitta ett sätt att räkna skärningen mellan kurvor med multiplicitet.

Sättet vi kommer göra detta på är inte genom att definiera skärningstalet (detta gör vi sista föreläsningen), utan att vi komma lista upp de egenskaper vi vill ha och hitta axiom som gör att vi kan arbeta med dessa egenskaperna och hitta det vi vill hitta.

Vi vill definiera en funktion  $I_p(f, g)$  där  $p \in \mathbb{C}^2$  och  $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ . Tanken är att  $I_p(f, g) =$  antalet gånger  $f, g$  skär varandra i  $p$ , det vill säga i  $\mathbb{C}^2$

Denna funktion  $I_p(f, g) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  (vi behöver oändligheten om exempelvis 2 kurvor är lika så sammanfaller de oändligt mycket).

**Axiom 0:**

Vi vill kunna titta på skärningen i vilket affint koordinatssystem som helst (bevaras under affin transformation): (Affint invariant)

$$I_p(f, g) = I_{F^{-1}(p)}(F^*f, F^*g) \quad \forall F \in \text{Aff}_{\mathbb{C}}(2)$$

**Axiom 1:**

Säger att  $f$  och  $g$  skär varandra lika många gånger som  $g$  och  $f$  skär varandra:

$$I_p(f, g) = I_p(g, f)$$

**Axiom 2:**

Skärningstalet mellan  $f$  och  $g$  skall vara nollskilt om punkten  $p$  ligger på båda kurvorna:

$$I_p(f, g) \neq 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p) = 0$$

**Axiom 3:**

Koordinatxlarna (speciella kurvor) skär varandra i en enda punkt, alltså borde de ha skärningstalet 1:

$$I_0(x, y) = 1$$

**Axiom 4:**

$$I_p(f, gh) = I_p(f, g) + I_p(f, h)$$

**Axiom 5:**

Skärningstalet i  $p$  mellan  $f$  och  $g$  är detsamma som skärningstalet mellan  $f$  och  $g + fh$ :

$$I_p(f, g) = I_p(f, g + fh) \quad \forall h \in \mathbb{C}[x, y]$$

*Motivering:* Antag först att  $p \in V(f) \cap V(g) \Leftrightarrow f(p) = 0 = g(p)$ . Då gäller:

$$f(p) = 0$$

$$\underbrace{g(p)}_{=0} + \underbrace{f(p)}_{=0} h(p) = 0 \Leftrightarrow I_p(f, g + fh) \neq 0$$

Dvs  $I_p(f, g) = 0$  om  $I_p(f, g + fh) = 0 \forall h$ .

Vi kan också se att  $f, g$  skär varandra transversellt i  $p$  om  $g + fh$  skär varandra transversellt i  $p$

**Exempel:** Hur kan axiomen användas för beräkning?

Vi vet vad vi vill i vissa situationer, betrakta  $f(x, y) = y - x^2$ , vi vill hitta  $I_0(y, y - x^2)$ . Rimligtvis borde detta vara 2

Vi använder axiom 5, och adderar  $-y$  i andra inputen så vi får  $I_0(y, -x^2)$

Nu kan vi använda axiom 4, ty det är samma sak  $I_0(y, x^2) + \underbrace{I_0(y, -1)}_{=0}$  (vi använder axiom 2, eftersom

de skär ej varandra)

$$\Rightarrow I_0(y, x^2) = I_0(y, x) + I_0(y, x) = 2I_0(x, y) = 2$$

### 7.1. Konsekvenser av axiomen.

Vi skall titta på olika sätt att beräkna skärningstalet givet två polynom och en punkt. Framförallt, i fallet när en av kurvorna är grafen till ett envariabelpolynom ( $y - p(x) = 0$ )

Vi har redan sett följande exempel:

$$I_0(y, y - x^m)$$

(då  $m = 2$ ) så såg vi att  $I_0 = m$ . I den räkningen såg vi även att detta var lika med  $I_0(y, x^m)$ , där vi har  $m$ -st multiplar av  $y$ -axeln

#### Theorem 7.1

Om ett polynom  $h(p) \neq 0$  så gäller:

$$I_p(f, gh) = I_p(f, g)$$

Detta är praktiskt, för man kan kasta bort faktorer som är nollskilda och förenkla mycket. Beviset sker genom att använda 4de axiomet samt det andra.

Skärningstalet verkar generalisera multipliciten för envariabelfallet, exempelvis kan vi betrakta  $x^3$  som har ett nollställe, fast multiplicitet 3.

#### Theorem 7.2

Om  $f = y - p(x)$  (graf till envariabelpolynom) och  $a$  är ett nollställe till  $p(x)$  med multiplicitet  $k$  så:

$$I_{(a,0)}(y - p(x), y) = k$$

#### Proof 7.1: Föregående sats

$a$  nollställe av multiplicitet  $k$  betyder per definition:

$$p(x) = (x - a)^k q(x)$$

för något polynom  $q$  där  $q(a) \neq 0$

Vi räknar:

$$\begin{aligned} I_{(a,0)}(y - p(x), y) &= I_{(a,0)}(p(x), y) = I_{(a,0)}((x - a)^k q(x), y) \\ &\Leftrightarrow I_{(a,0)}((x - a)^k, y) \quad (\text{Theorem 7.1}) \\ &= k I_{(a,0)}((x - a), y) = k I_{(0,0)}(x, y) = k \end{aligned}$$

□

#### Theorem 7.3

Antag att  $f$  är en faktor till  $g$  ( $g = f \cdot h$ ). Det betyder att  $f(p) \Rightarrow I_p(f, g) = \infty$ :

$$I_p(f, g) = I_p(f, fh) = I_p(f, 0) = I_p(f, 0^n) = n I_p(f, 0) \geq 1 \geq n$$

#### Övning:

Om  $h$  delar  $f$  och  $h$  delar  $g$  samt  $h(p) = 0$

**Exempel:**

Beräkna skärningstalet mellan  $y - x^2$  och  $y^3 + 2xy + x^6$  i origo:

$$\begin{aligned} I_{(0,0)}((y - x^2), (y^3 + 2xy + x^6)) &= I_{(0,0)}(y - x^2, 2xy + x^6 + x^2y^2) = I_{(0,0)}(y - x^2, 2xy + x^6 + yx^4) \\ &\Rightarrow I_{(0,0)}(y - x^2, (2x + x^4)y + x^6) = I_{(0,0)}(y - x^2, 2(x^3 + x^6)) \\ &\Rightarrow I_{(0,0)}(y - x^2, x^3 \underbrace{(2 + 2x^3)}_{\neq 0 \text{ i } (0,0)}) \\ &\Rightarrow I_{(0,0)}(y - x^2, x^3) = 3I_{(0,0)}(y - x^2, x) = 3I_{(0,0)}(y, x) = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Tricket är att reducera till ett envariabelfall. I vårt fall så hade vi tur att  $y$  inte var upphöjt till något och därmed lätt att multiplicera med polynom.

Detta påminner lite om polynomdivision. Det är stort sett det vi gjort, fast i två variabler (vilket man allmänt inte kan med polynomdivision).

**Theorem 7.4: Polynomdiv. av flervariabla funktioner i ringar**

$$p(x) \in k[x], \quad f(x, y) \in k[x, y]$$

Då finns entydiga polynom  $q(x, y)$  och  $r(x)$  så att:

$$f(x, y) = (y - p(x))q(x, y) + r(x)$$

Dessutom är  $r(x) = f(x, p(x))$

**Theorem 7.5**

Låt  $f = y - p(x)$   $g \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $f \nmid gh$ . Låt även  $k = \text{mult}_{x=0} g(x, p(x))$

Då är skärningsmultipliciteten av  $f$  med  $g$  i origo  $= k$ :

$$I_{(0,0)}(y - p(x), g(x, y)) = k$$

$$(p(0) = 0 \text{ och } g(0, 0) = 0)$$

**Exempel:**

$$\begin{aligned} &I_{(0,0)}(y - \underbrace{x^2}_{p(x)}, \underbrace{x^3 + 2xy + x^6}_{g(x, y)}) \\ g(x, p(x)) &= g(x, x^2) = x^6 + 2x^3 + x^6 = x^3(2 + 2x^3) \end{aligned}$$

Svar: 3

**Theorem 7.6: Generalisering av föregående sats**

Låt  $f = y - p(x)$  och  $g \in \mathbb{C}[x, y]$  och  $f$  inte delar  $g$ .

Om vi skriver:

$$g(x, p(x)) = r(x) = c(x - a_1)^{s_1} \cdots (x - a_n)^{s_n}$$

$$I_{(a_i, p(a_i))}(f, g) = s_i \text{ och } 0 \text{ annars}$$

## 8. VAD VI VET NU OM BEZOUTS SATS

Målet med denna kurs är i någon mening att studera denna sats, men för att göra detta behövde vi införa ett par saker såsom  $\mathbb{C}$ . Sen har vi infört  $I_p$  för att räkna antal, det som verkar fattas är den projektiva delen.

Vi ska fortsätta tala lite om  $I_p$ , där vi tidigare kunde finna lösningar till grafen av en funktion av  $x$  eftersom vi kunde dela bort  $f = y - p(x)$  från  $g$

Vi har en sats som vi skulle vilja ha till följd av våra axiom, om 2 kurvor skär varandra transversellt så borde skärningstalet vara 1. Nu ska vi visa att det är så:

**Theorem 8.1:  $I_p = 1$  för transversella skärningar**

Om  $f(p) = g(p) = 0$  där  $p = (a, b)$  och  $\nabla f(p) \neq 0 \neq 0 \nabla g(p)$

Om  $\nabla \neq 0$  vet vi från implicita funktionssatsen vet vi att de konvergerar mot glatta funktioner. Vi vet också att vi kan uttrycka  $f, g$  som en funktion av en variabel, men det följer.

Vi antar också att  $\nabla f(p) \neq \lambda \nabla g(p)$

Då är  $I_p(f, g) = 1$

Hur går vi till väga för att bevisa detta? I geometri ska vi inte bara betrakta punkter i ett plan, vi måste tänka att vi inte bara ska betrakta  $f, g$  eftersom vi lever nu i den affina världen, så kom alltid ihåg att vi kan alltid använda affina transformationer för att göra det lite lättare att räkna ut.

**Theorem 8.2: Följsats**

Om  $\nabla f(p) \neq 0$  och  $L$  är en linje genom  $p$  sådan att  $L \neq$  tangentlinjen till  $f$ , vilket betyder att linjen är transversell till  $f$ .

Då är skärningstalet mellan  $L$  och  $f = 1$

Om  $I_p(f, L) > 1$  så kan det vara så att gradienterna är parallella, dvs  $L$  är parallel med tangentlinjen enligt satsen.

**Standardexempel**

Skärning mellan  $y = x^2$  och  $y = c$  var noll i  $\mathbb{R}^2$ , detta löste vi med att införa  $\mathbb{C}$ . Här hittar vi då 2 lösningar,  $(\pm i\sqrt{|c|}, c) \in \mathbb{C}^2$

**Övning:** Visa att  $I_{(\pm i\sqrt{|c|}, c)}(y - x^2, c) = 1$



9. PROJEKTIV GEOMETRI ÖVER  $\mathbb{R}$ 

Vår "vanliga" synsätt på geometri är euklidisk geometri. De ser ut precis som vi mäter de.

En rektangel är bestämd av sina vinklar som är räta och längden av sina motstående sidor som är samma. Har vi 2st rektanglar där längder skiljer sig så är även rektanglarna sklida. Vi kan inte rotera och flytta den för att den ska bli den andra rektangeln, inga euklidiska transformationer åstadkommer detta. Skalarprodukten är inte bevarad, dvs längder och vinklar.

I euklidisk geometri finns det cirklar som inte är samma sak som ellipser exempelvis.

Vi kan säga att euklidisk geometri är "som geometri är i den verkliga världen", men det må vara så det är i den verkliga världen men det är inte så det ser ut med våra ögon. Exempelvis med tågräls som är parallella som enligt euklidisk geometri inte skär i  $\infty$ , men våra ögon säger att de gör de.

Vad projektiv geometri gör är att omvandla euklidisk geometri till vad vi faktiskt ser. Folk som tittar på saker i världen kallar vi konstnärer, särskilt om de försöker avbilda det. Det var så projektiv geometri uppkom (under renässansen i florens)

Vi vill i den här kursen göra plan geometri, men sättet vi kommer göra det på är inte genom ortonormala axlar, utan betrakta planet från  $z$ -axeln, vi vill "stå på"  $xy$ -planet och titta på vad som händer.

**Theorem 9.1: Rella projektiva planet**

Det reella projektiva planet  $\mathbb{R}P^2$  ( $= P^2(\mathbb{R}) = P_{\mathbb{R}}^2$ ) är en följande mängd av ekvivalensklasser:

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$$

där  $\sim$  är relationen.  $\bar{x} \sim \bar{y} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \bar{x} = \lambda \bar{y}$

Man kan säga att  $\mathbb{R}P^2 = \{\text{linjer genom origo i } \mathbb{R}^3\}$

Punkter i  $\mathbb{R}P^2$  representeras av en trippel av tal (3-dimensionell vektor) i  $\mathbb{R}^3$ , exempelvis på följande sätt  $(x, y, z)$  och skall alltså betraktas som lika med  $(tx, ty, tz)$ . Det enda villkoret vi har är att  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

Detta sätt att betrakta  $(x, y, z)$  kallas för *homogena koordinater*. Punkter i  $\mathbb{R}P^2$  kallas *projektiva punkter*.

**Anmärkning:**

Varje punkt  $(x, y, z)$  i  $\mathbb{R}P^2$  där  $z \neq 0$ , har en unik representant där  $z = 1$   $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ . Varje sådan punkt  $(x, y, z)$  motsvarar förstås också en projektiv punkt.

Vi har en injektiv funktion  $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$  vars bild täcker det mesta av  $\mathbb{R}P^2$ .

För att beskriva dessa punkter räcker det alltså med att ge 2 koordinater  $(x, y)$ . Precis som vi kan använda latitud och longitud och rita en bit av jordytan i en kartbok.

Denna del av  $\mathbb{R}P^2$  kallas för *den affina  $(x, y)$  kartan*

**Exempel:**

Punkten  $(2, 1, 3)$  har  $z \neq 0$  och har  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  som projektiv punkt i  $\mathbb{R}P^2$

**Exempel:**

Mängden av projektiva punkter som uppfyller  $zy = x^2 + z^2$  och dessutom har  $z \neq 0$  utgör kurvan  $y = x^2 + 1$  i  $xy$ -kartan eftersom vi sätter  $z = 1$ .

Men, om  $z = 0$  så får vi  $x = 0$ , medan  $y$  kan anta vilket värde som helst, det finns alltså en projektiv punkt kvar, nämligen  $(0, 1, 0)$  (egentligen  $(0, y, 0)$  men de är homogena koordinater för samma punkt). Det motsvarar "horisonten".

De andra affina kartorna  $xz$  och  $yz$  definieras analogt. Tänk på det som  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$

**Exempel:**

$(2, 1, 3)$  har koordinater  $(2, 3)$  i  $xz$ -kartan (dela med  $y$ , vilket är 1)

**Exempel:**

Den återstående punkten  $(0, 1, 0)$  syns bara i en karta, dvs i  $xz$ -kartan, där den är origo.

### Theorem 9.2

Givet säg,  $xy$ -kartan, så är linjen i oändligheten mängden:

$$L_{\infty}^{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{RP}^2 : z = 0\}$$

### Theorem 9.3: Homogent polynom

Ett polynom  $F(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  kallas *homogent* av grad  $d$  om alla termer har total grad  $d$ .

Exempelvis:

$$t^d F(x, y, z) = F(tx, ty, tz)$$

### Anmärkning:

Om  $F(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$  är homogent och  $F(a, b, c) = 0 \Rightarrow F(ta, tb, tc) = 0$

Detta betyder att  $V(F)$  i  $\mathbb{RP}^2$  är väldefinierad. Vi kallar  $V(F)$  för en *reell plan projektiv kurva*

### Exempel:

$x + y + z = 0$  är ett homogent polynom av grad 1. Detta beskriver ett plan, men vi ska tänka på det som en projektiv linje. Mer allmänt kan vi sätta vilka koefficienter som hels, dvs  $ax + by + cz = 0$ .

I kartan  $z = 1$  har linjen ekvationen  $ax + by + c = 0$  i  $xy$ -planet

### Exempel:

Om vi bygger vidare på föregående exempel, om  $a = b = 0$  och  $z = 0$  r linjen i  $\infty$   $xy$ -kartan

### Theorem 9.4

Givet två olika projektiva punkter, finns en entydig projektiv linje genom den (som i euklidisk geometri).

Givet två olika linjer i  $\mathbb{RP}^2$  finns en entydig projektiv punkt som ligger på båda

### Proof 9.1

Vå projektiva punkter är två olika linjer. En entydig projektiv linje är då ett plan, och detta plan spänns up av de två olika linjerna

Två olika linjer i det projektiva planet är två olika plan, och dessa plan skär varandra i en linje, som projektivt är en punkt  $\square$

### Theorem 9.5

Givet ett polynom  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  av grad  $d$ , definierar vi dess *homogenisering* som  $F(x, y, z) = z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$

### Exempel:

$$f(x, y) = y - x^2 - 1 \Rightarrow F(x, y, z) = z^2 \left( \frac{y}{z} - \left( \frac{x}{z} \right)^2 - 1 \right) = zy - x^2 - z^2$$

### Anmärkning:

Ger oss en projektiv kurva givet en affin kurva. Det omvända gäller om vi betraktar kartor till det projektiva planet.

### Exempel:

$f(y, z) = zy - z^2 - 1 \Rightarrow zy - z^2 - x^2 = F(x, y, z)$ . Vad är  $zy - z^2 = 1$ ? En hyperbel förstås!  
 Detta är ju det vi visat med våra klassificeringar som vi gjort, det vill säga en cirkel = parabel = hyperbel.

Med homogenisering kan vi tänka oss att vi kan gå från affina kurvor till projektiva kurvor med hjälp av homogenisering.

### Theorem 9.6: Projektiva tangentlinjen

Den projektiva tangentlinjen till  $F(x, y, z) = 0$  i punkten  $P = (a, b, c)$  ges av (vi antar  $\nabla F(a, b, c) \neq 0$ ):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)z = 0$$

## 9.1. Projektiva transformationer.

Kommer ersätta affina transformationer, är en större klass av avbildningar men kan vara lättare att hantera. För att begripa dessa är det bra att ha koll på linjära transformationer.

$\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  - en linjär avbildning med  $\ker \bar{F} = \{\bar{0}\}$ . Detta betyder att den är injektiv (men eftersom vi går från  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  så är den även bijektiv).

Eftersom det är en bijektiv homomorfi, är det även en isomorfi.

### Anmärkning:

Om  $L$  är en linje genom origo, så är  $\bar{F}(L)$  också det. Den här avbildning *inducerar* en avbildning  $F_P : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  på det projektiva planet.

Det händer nästan ingenting här, i homogena koordinater ges  $L = (x, y, z)$   $F_P(x, y, z)$  av  $F(x, y, z)$

### Exempel:

Betrakta följande linjär avbildning  $\bar{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ , då är  $F_P = id_{\mathbb{R}P^2}$  eftersom de projektivt är samma (kom ihåg ekvivalensrelationen)

### Exempel:

En allmän transformation  $\bar{F}$  ges av en matris  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Att beräkna  $\bar{F}_P$  är bara att betrakta  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  som homogena koordinater, och räkna som vanligt.

### Exempel:

Om matrisen är exempelvis  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ z \end{pmatrix}$

Låt oss titta på den här i  $xy$ -kartan ( $z = 1$ ). Då ser den ut som  $(x, y) \mapsto (x, y, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{pmatrix}$

I  $xy$ -kartan ser alltså avbildningen ut på följande vis  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \end{pmatrix}$

Men notera! Detta är ju bara en affin avbildning! Med andra ord, projektiva avbildningar generaliserar affina avbildningar (en projektiv avbildning med  $z = 1$  visade vi nu var affin).

### Exempel:

Vilka avbildningar bevarar linjen  $z = 0$ ? Jo det måste vara en affin avbildning på följande form:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow (ax, ay, 0) = (x, y, 0)$$

**Exempel:**

Låt  $\bar{F}(x, y, z) = (x, z, y)$ . Detta är en spegling i  $y = z$ . Hur ser den ut i  $xy$ -kartan?

Vi gör följande:  $(x, y) \mapsto (x, y, 1) = (x, 1, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}, 1\right) \leftrightarrow \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$

Säg att vi har 4 punkter i planet (hörn i en rektangel), vad kan hända med dessa under en affin transformation? Under affin transformation får exempelvis vi parallelogram.

**Theorem 9.7**

Låt  $z_1, \dots, z_4$  och  $w_1, \dots, w_4$  vara punkter i det projektiva planet. De ska ha egenskaperna så att 3 av de ligger aldrig på en rät linje (se det som hörn i en fyrhörning)

Då finns en entydig projektiv transformation  $F$  så att  $F(z_i) = w_i \quad i = 1 \dots 4$

**Proof 9.2**

Representera  $z_i \in \mathbb{R}P^2$  med en vektor  $\bar{z}_i \in \mathbb{R}^3$  och samma med  $w_i$

Villkoret betyder att ingen deltrippel av  $\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_4\}$  är i samma plan (dvs linjärt beroende). De utgör alltså en bas för  $\mathbb{R}^3$ . Detsamma för  $\bar{w}_i$

Eftersom 3 nu utgör en bas så kan vi uttrycka den fjärde som en linjärkombination av de andra:

$$\begin{aligned}\bar{z}_4 &= \sum_{i=1}^3 a_i \bar{z}_i \\ \bar{w}_4 &= \sum_{i=1}^3 b_i \bar{w}_i\end{aligned}$$

Vi definierar nu en linjär avbildning  $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  genom:

$$\bar{F}(\bar{z}_i) = \frac{b_i}{a_i} \bar{w}_i \quad i = 1, 2, 3$$

Då får vi:

$$\bar{F}(\bar{z}_4) = \bar{F}\left(\sum_{i=1}^3 a_i \bar{z}_i\right) = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{F}(\bar{z}_i) = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{b_i}{a_i} \bar{w}_i = \sum_{i=1}^3 b_i \bar{w}_i = \bar{w}_4$$

Detta visar existens. Om  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  också har samma egenskap, dvs  $G(\bar{z}_i) = \lambda_i \bar{w}_i$

$$G(\bar{z}_4) = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^3 a_i G(\bar{z}_i) = \sum_{i=1}^3 a_i \lambda_i \bar{w}_i$$

$$\text{Å andra sidan } G(\bar{z}_4) = \lambda_4 \bar{w}_4 = \sum_{i=1}^3 \lambda_4 b_i \bar{w}_i$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_4 \frac{b_i}{a_i}$$

$$\text{Så } \bar{G}(\bar{z}_i) = \lambda_4 \frac{b_i}{a_i} \bar{w}_i = \lambda_4 \bar{F}(\bar{z}_i)$$

Från detta följer det att  $\bar{G} = \lambda_4 \bar{F}$  så  $\bar{G}_P = \bar{F}_P$

□

## 9.2. Ekvivalenta polynom upp till projektiv transformation.

Homogena polynom i 3 variabler betecknas som  $\mathbb{R}_h[x, y, z] \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$

Som vanligt, om vi har ett homogent polynom  $F(x, y, z)$  och en projektiv transformation  $G_p(\bar{G})$  kan vi sammansätta polynomet med transformationen och göra ett "variabelbyte" (detta är inverterbart). Då kan vi betrakta polynom som ekvivalenta om vi kan få vardera polynom med en sådan transformation, dvs  $F \circ \bar{G} = \bar{G}^*(F)$

Vår reella affina klassificeringar hade en hel klassificeringar av  $\mathbb{R}$ -kurvor:

- $x^2 + y^2 - 1$  (cirkel)
- $x^2 - y^2 - 1$  (hyperbel)
- $x^2 - y$  (parabel)
- $x^2 - y^2$  (linjekon)
- $x^2 + y^2$  (punkt)
- $x(x - 1)$  (två parallella linjer)
- $x^2$  ("dubbellinje")
- $x^2 + 1$  (tom)
- $x^2 + y^2 + 1$  (tom)

Vi påminner oss dock om att när vi hade parabeln  $y = x^2 + 1$  kunde vi få en cirkel, och en hyperbel genom en bijektiv affin transformation. Då kommer alltså följande ske:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y^2 - 1 \\ y - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 \text{ (kon)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 \\ x(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - y^2 \text{ (parallella linjer)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \\ x^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \text{ (punkt)}$$

$$x^2 \Rightarrow \text{(punkt)}$$

$$x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow$$

$$O$$

Projektivt sätt finns det bara ett icke-singulärt polynom.

## 9.3. Skärningstalet i $\mathbb{R}P^2$ .

Vi har ju bara satt upp axiom för det, men nu kommer vi definiera det genom att välja en affin karta där punkten vi vill räkna skärningstalet för ligger i, och sen använda axiomen som vanligt.

Det finns en risk med detta, och det är att det kan bero på vilken karta vi använder (kurvorna kanske tangerar istället). Vi ändrar detta genom att säga att det inte är så, det vill säga inför:

### Axiom 0:

Vi vill kunna titta på skärningen i vilket affint koordinatssystem som helst (bevaras under affin transformation): (Affint invariant)

$$I_p(f, g) = I_{F^{-1}(p)}(F^*f, F^*g) \quad \forall F \in \text{Aff}_{\mathbb{C}}(2)$$

### Axiom 1:

Säger att  $f$  och  $g$  skär varandra lika många gånger som  $g$  och  $f$  skär varandra:

$$I_p(f, g) = I_p(g, f)$$

### Axiom 2:

Skärningstalet mellan  $f$  och  $g$  skall vara nollskilt omm punkten  $p$  ligger på båda kurvorna:

$$I_p(f, g) \neq 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p) = 0$$

**Axiom 3:**

Koordinataxlarna (speciella kurvor) skär varandra i en enda punkt, alltså borde de ha skärningstalet 1:

$$I_0(x, y) = 1$$

**Axiom 4:**

$$I_p(f, gh) = I_p(f, g) + I_p(f, h)$$

**Axiom 5:**

Skärningstalet i  $p$  mellan  $f$  och  $g$  är detsamma som skärningstalet mellan  $f$  och  $g + fh$ :

$$I_p(f, g) = I_p(f, g + fh) \quad \forall h \in \mathbb{C}[x, y]$$

**Axiom 6:**  $I_p$  är invariant under projektiv transformation.

**Exempel:**

Finn de punkter i  $\mathbb{R}P^2$  där

$$C = x^3 - 3x^2y + 2xy - 4y - 10 = 0$$

Skär linjen  $L_\infty (z = 0)$

Beräkna också skärningstalet  $I_p(C, L_\infty)$  i dessa punkter.

*Lösning:* Börja med att homogenisera:

$$x^3 - 3x^2y + 2xyz - 4yz^2 - 10z^3 = 0$$

Var skär denna kurva linjen  $z = 0$ ? Sätt  $z = 0$  och vi får då:

$$x^3 - 3x^2y = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3y) = 0$$

Vi har alltså lösningar  $x = 0, z = 0$  och  $x = 3y, z = 0$ , dvs  $(0, 1, 0), (3, 1, 0)$

Nu ska vi hitta skärningstalet i dessa punkter. Då bör vi hitta en lämplig affin karta att räkna i, vi väljer  $xz$ -kartan eftersom båda punkter ligger där.

Våra punkter blir då  $(0, 0)$  resp.  $(3, 0)$ , men hur ser ekvationerna ut här? Sätt  $y = 1$ :

$$\begin{cases} \overbrace{x^3 - 3x^2 + 2xz - 4z^2 - 10z^3}^{g(x, z)} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Här är  $z = 0$ , vilket är grafet till ett polynom ( $p(x) = 0$ ), men det är inte  $g(x, z)$  (det är inte en graf till ett envariabelpolynom)

Notera, enligt Theorem 7.1 får vi skärningstalet som multipliciteten till motsvarande nollstället till  $g(x, p(x)) = g(x, 0) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$ . Detta ger att  $x = 0, x = 3$  är en lösning, och multipliciteten av  $x = 0$  är 2, alltså är skärningstalet i origo = 2 och i  $x = 3 = 1$

**9.4. Generalisering av  $\mathbb{R}P^2$ .**

Projektiva rum existerar i varje dimension, låt oss betrakta reella projektiva *linjen*  $\mathbb{R}P^1$ .

Istället för att börja med  $\mathbb{R}^3$  börjar vi med  $\mathbb{R}^2$  där alla linjer genom origo är ekvivalenta. Homogena koordinater blir bara en dimension mindre  $(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

10. KOMPLEXA PROJEKTIVA PLANET  $\mathbb{CP}^2$ 

Allt vi behöver göra här har vi nästan redan gjort när vi betraktade  $\mathbb{C}^n$ . Exempelvis, i  $\mathbb{C}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{C}\}$  Vi vet redan vad komplexa linjer är (i allmänhet, t.o.m affina linjer). Komplexa linjer är, speciellt genom origo, linjära underrum av dimension 1.

$\mathbb{CP}^2 = \{\text{komplexa linjer genom } \bar{0} \text{ i } \mathbb{C}^3\}$ . Givetvis behåller vi ekvivalensrelationen men  $\lambda \in \mathbb{C}$

Vi inför affina kartor på ordagrant samma sätt.

**Exempel:**

$xy$ -kartan =  $\{(x, y, z) \in \mathbb{CP}^2 : z \neq 0\}$ . Vi kan följa att identifiera denna med  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$

Vi kan även här betrakta homogena polynom i 3 variabler,  $\mathbb{C}_h[x, y, z] \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ . Dessa bestämmer *plana projektiva komplexa kurvor* i  $\mathbb{CP}^2$

## 11. MER OM ANDRAGRADSKURVOR

Den projektiva klassificeringen över  $\mathbb{C}$  såg ut på följande:

- $x^2 + y^2 - z^2$
- $x^2 + y^2$
- $x^2$

Ett annat sätt att se det på är kvadratiska former i 3 dimensioner i  $\mathbb{C}^3$

Vi har egentligen allting som vi tycks behövs inför Bezouts Sats (vi har  $\mathbb{C}, I_p, \mathbb{CP}^2$ ). Nedan följer definitioner innan vi kan börja definiera satsen:

**Theorem 11.1**

$F, G \in \mathbb{C}_h[x, y, z]$ :

$$I(F, G) = \sum_{p \in V(F) \cap V(G) \in \mathbb{CP}^2} I_p(F, G) = \text{totala skärningstalet} = \deg(F) \cdot \deg(G)$$

**Theorem 11.2: Bezouts sats**

Låt  $F, G \in \mathbb{C}_h[x, y, z]$

Antag att  $F, G$  inte har gemensamma faktorer (gemensamma icke-konstanta faktorer)

Då gäller:

$$I(F, G) = \deg(F) \cdot \deg(G)$$

För att visa den här satsen behöver vi ha god koll på följande sats som vi diskuterat tidigare:

**Påminnelse:**

Om  $f = y - p(x), g(x, y)$  godtycklig och  $f$  inte delar  $g$ . Då fås skärningstalen mellan  $f, g$  som multipliteterna till nollställena till polynomet  $g(x, p(x))$

**Lemma 11.1: 1**

Låt  $F = L$  vara av grad 1 (förstgradspolynom av grad 1, linje) och  $G$  ett allmänt homogent polynom  $\in \mathbb{C}_h[x, y, z]$  (och  $L$  inte delar  $G$ )

Då gäller:

$$I(G, L) = \deg(G) \cdot 1 = \deg(G) = n$$



**Proof 11.1**

Beviset är en direkt räkning, men för att få maximal konkression, man vill ha så lite allmänna kurvor (helst konkreta) kurvor. Linjer är linjer, vi kan välja en lämplig linje  $L$  och använda oss av affina transformationer.

Vi väljer  $L = y = 0$ , detta kan fås genom en projektiv transformation som flyttar  $L$  till  $y = 0$ . Men då kommer vår kurva  $G$  också förändras som vi kallar för  $G'$ , men det blir lättare att studera skärningstalen nu. Vi kallar den nya  $G$  för  $G$  och inte  $G'$  (vi är lata).

Hur hittar vi då  $I(G, y)$ ?:

- Finn alla skärningspunkter, välj en karta och beräkna alla lokala skärningstal  $I_p(G, y)$  där
- Undersök vad som händer i  $L_\infty$ , finns det skärningar där? Max en punkt kan vara aktuell eftersom  $L \cap L_\infty = \{\text{punkten}\}$
- Skriv  $G(x, y, z) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j z^{n-i-j}$
- Väljer att räkna i  $xy$ -kartan, där är  $y = 0$  och  $g(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j z^{n-i-j}$
- Vi undersöker graden av  $g(x, 0) = \sum_i c_{i0} x^i$ , notera,  $\deg(g) = d = \max \{i : c_{i0} \neq 0\}$
- Vi måste nu undersöka vad som händer i oändligheten, den enda punkten i  $L_\infty$  som är intressant har homogena koordinater  $(1, 0, 0)$ . Nu är det lämpligt att använda  $yz$ -kartan ty punkten vi är intresserad av då är origo:

$$g'(y, z) = \sum_{i,j} c_{ij} y^j z^{n-i}$$

$$\Rightarrow I_{(0,0)}(g', y) = \text{mult}_{y=0}(g'(0, z)) = \text{mult}_{z=0}\left(\sum_i c_{i0} z^{n-1}\right)$$

Detta borde vara  $n - i$ , men vilket  $i$  då? Jo, största  $i$  så att termen fortfarande är nollskild.

Lägstegradstermen motsvarar  $i = d$ , vi får då att  $I_{(0,0)}(g', y) = n - d$

- $I(G, L) = d + n - d = n = \deg(G)$

□

**Lemma 11.2: 2**

Låt  $F, G, H$  homogena polynom av grad  $m, n, p$ .

Låt  $H = H(x, z)$  oberoende av  $y$

Antag att  $G, H$  saknar gemensamma faktorer

Låt  $\text{Bez}(F, G)$  betyda " $I(F, G) = \deg(F) \cdot \deg(G)$ " (att Bezouts sats gäller)

Då gäller:

$$\text{Bez}(FH, G) \Leftrightarrow \text{Bez}(F, G)$$

**Proof 11.2**

Betrakta först:

$$I(H, G) \quad H = \underbrace{L_1 \cdots L_p}_{\text{linjära faktorer}}$$

$$= I(L_1 \cdots L_p, G) = \underbrace{I(L_1, G)}_{L_1 \text{ linje, } = \deg(G)} + \cdots + I(L_p, G) = np$$

Nu tittar vi på:

$$I(FH, G) = I(F, G) + \underbrace{I(H, G)}_{np}$$

$$I(FH, G) = I(F, G) + np$$

För att visa högerpilen så antar vi VL:

$$(m+p)n = \underbrace{I(F, G)}_{mn} + np$$

Vänsterpilen görs på precis samma sätt □

**Lemma 11.3: 3**

Iden är att successivt reducera  $y$ -graden så långt vi kan tills dess att vi inte har något beroende av  $y$ .

Låt  $F, G$  som i Bezouts sats och låt  $\deg_y(G) = t \leq \deg_y(F) = s$

Då finns  $F_1, G_1$  också som i Bezouts sats, sådan att  $\deg_y(F_1) < \deg_y(F)$  och  $\deg_y(G_1) = \deg_y(G)$   
Bezouts sats är sann för  $\text{Bez}(F, G) \Leftrightarrow \text{Bez}(F_1, G_1)$

**Proof 11.3**

Börja med att definiera  $G_1$ , skriv  $G = \underbrace{H(x, z)}_{\text{max } y\text{-oberoende fakt. i } G} \underbrace{G_1(x, y, z)}_{\text{inga } y \text{ oberoende fakt.}}$

Notera att  $G_1$  inte har några gemensamma faktorer med  $F$  eftersom  $F$  och  $G$  antogs inte ha några faktorer enligt Bezouts sats.

Notera även att  $\deg_y(G_1) = \deg_y(G) = t$

Vi definierar nu  $F_1$ , skriv:

$$F = y^s P(x, z) + \text{termer av lägre ordning i } y \cdots$$

$$G_1 = y^t Q(x, z) + \text{termer av lägre ordning i } y \cdots$$

$$QF - y^{s-t} P G_1 = F_1$$

Notera att  $\deg_y(F_1) < \deg_y(F)$  (per konstruktion)

$F_1, G_1$  har inte gemensamma faktorer, om det finns en så är det en irreducibel faktor  $K$ . Om  $K|F_1$  och  $K|G_1$  vilket innebär att  $K$  är en faktor i antingen  $Q$  eller  $F$ . Om  $K|Q$  har vi en gemensamm faktor i båda termerna i  $F_1$ , men detta betyder att  $K(x, z)$  och  $K|G_1$  vilket är en motsägelse. Däremot, om  $K|F$  så motsäger det att  $G_1$  inte har gemensamma faktorer med  $F$

$$\text{Bez}(F, G) \Leftrightarrow \text{Bez}(F, G_1 H) \stackrel{\text{Lem2}}{\Leftrightarrow} \text{Bez}(F, G_1) \stackrel{\text{Lem2}}{\Leftrightarrow} \text{Bez}(QF, G_1) \stackrel{\text{ax.5}}{\Leftrightarrow} \text{Bez}(QF - y^{s-t} P G_1, G_1)$$

□

**Proof 11.4: Bezouts Sats**

Tag  $F, G$  som i satsen, och upprepa Lemma 3 tills ett av polynomen har  $y$ -grad  $= 0$ .

Dvs, vi vill visa  $Bez(F(x, y, z), G(x, z))$

Då kan vi faktorisera  $G = L_1 \cdots L_{deg(G)}$  i linjära faktorer

Då får vi att  $I(F, G) = I(F, L_1 \cdots L_{deg(G)}) = \sum_{1 \leq i \leq deg(G)} I(F, L_i) = deg(G) \cdot deg(F)$  □

För att bestämma en linje i 3 variabler entydigt, behöver vi typiskt sett 3 villkor:

- Säga att vi kräver att linjen  $L$  går igenom punkten  $P_1 = (x_0, y_0, z_0)$ :

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = 0$$

Det finns färre linjer nu som vi behöver sälla ut

- Vi kan specificera en till punkt:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

Man kan tänka att det här är allt som krävs, eftersom vi nu har en 1-parameterfamilj av förstegrads polynom

- Denna linje är givetvis linjärkombination av en unik förstegrads polynom

**Diskussionsfråga:**

Hur många punkter bör jag specificera för att det ska gå en entydig andragsgradskurva genom den?

Ett allmänt andragsgradspolynom med två variabler:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + g = 0 \in \mathbb{R}^6$$

Vi behöver då 5 st ekvationer för att bestämma kurvan, vilket vi kan få genom 5st villkor exvis att 5st punkter ligger på kurvan.

**Theorem 11.3**

Givet 5 punkter  $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{CP}^2$  sådant att inte 4 av de ligger på samma linje (linjärt oberoende), så finns en entydig andragsgradskurva  $C$  så att  $P_1, \dots, P_5 \in C$

Om inte ens tre av  $P_i$  ligger på en rät linje, så är  $C$  irreducibel

Vad kan vi säga om vad Bezouts sats säger om entydighet? Kan det finnas 2 sådana kurvor och vad skulle det innebära?

Däklart att det inte gäller! Kurvan  $C$  är en andragsgradare, det är även  $C'$ , då borde deras skärningstal vara 4, men om de skär varandra i 5 punkter så motsäger detta satsen.

Vad händer om 3 av punkterna ligger på en rät linje?

Givet 4 punkter  $P_1, \dots, P_4$  och  $L_{ij}$  är linjen genom  $P_i$  och  $P_j$ .

Bilda andragsgradspolynomen  $L_{12}L_{34}$  och  $L_{13}L_{24}$ . Vi har även en punkt  $P_5$  utanför där  $L_{12}L_{34}(P_5) \neq 0 \neq L_{13}L_{24}$ , det vill säga punkten  $P_5$  ligger inte på någon av linjerna.

Vi kan definiera ett nytt andragsgradspolynom  $L_{12}L_{34} - rL_{13}L_{24}$  där  $r = \frac{L_{12}L_{34}(P_5)}{L_{13}L_{24}(P_5)}$

Då är  $Q(P_5) = 0$  samt  $Q(P_i) = 0$  för  $i = 1, \dots, 4$

**Viktigt att öva på:** Dimensionsräkningsprincipen och "pencil" (1-parameterfamilj av kurvor) i algebraisk geometri

## 12. SINGULÄRA KURVOR

Vi definierar en **glatt kurva** som en kurva utan singulära punkter. Vi börjar med att visa en enkel sats om kurvor med singulariteter:

**Theorem 12.1**

Varje glatt kurva är irreducibel, dvs varje reducibel kurva har en singulär punkt.

Varje faktor i en reducibel kurva svarar mot en irreducibel kurva. Skärningar mellan dessa är de singulära punkterna.

**Proof 12.1**

Vi kallar en reducibel kurva  $F = GH$  (i  $\mathbb{CP}^2$ ) där varken  $G$  eller  $H$  är konstant.

Om de ej är konstanta, har de en grad som inte är 0, och då är enligt Bezouts sats så är totala skärningstalet mellan  $H$  och  $G = \deg(G) \cdot \deg(H) \geq 1$ .

Detta betyder att det finns en punkt  $P$  så att  $H(P) = G(P) = 0$

Hur visar vi nu att  $P$  är en singulär punkt? Jo, med gradienten:

$$\nabla(GH)(P) = G(P)\nabla H(P) + H(P)\nabla G(P) = 0$$

□

Givet 5 punkter i  $\mathbb{CP}^2$  så finns en entydig andragsgradskurva genom den. (Detta är inte helt sant, det krävs att 4 av de inte ligger på en linje). Den allmänna idén är att man kan räkna dimensionen genom de fria parametrarna.

Vi ska göra en ny version av en gammal sats:

**Theorem 12.2**

Låt  $f, g$  polynom och  $f(p) = g(p) = 0$ .

Då gäller att  $I_p(f, g) = 1 \Leftrightarrow$  transversella i punkten  $p$

**Proof 12.2**

Vi har två fall:

- Fallet då en av kurvorna har en faktor (irreducibel komponent som är  $x$ -axeln) ( $g = yh$ ).

Vi vet lite mer om  $g$  och gör variabelbyte så att  $p$  = origo, så skärningstalet blir då

$$I_p(f, g) = I_p(f, yh) = I_p(f, h) + \underbrace{I_p(f, y)}_{\geq 1}$$

$$I_p(f, g) = 1 \Leftrightarrow I_p(f, y) = 1 \wedge \underbrace{I_p(f, h)}_{h(p) \neq 0} = 0$$

Detta är ekvivalent med att säga att  $f, g$  är transversella i  $(0, 0)$  och  $g$  har tangentlinje i  $x$ -axeln

- Antag att varken  $f$  eller  $g$  har en faktor  $y$ . Då finns det termer i  $g$  som bara innehåller  $x$ . Då kan vi skriva (vi antar att polynomen är moniska):

$$f = x^m + r(x, y)$$

$$g = x^n + s(x, y)$$

Där  $r, s$  inte innehåller:

$$ax^k, k > m \wedge k > n$$

Vi antar att  $n \geq m$  utan förlust av allmänngiltighet. Då kan vi titta på:

$$I_p(f, g) = I_p(f, \underbrace{g - x^{n-m}f}_{= k \text{ har lägre } x \text{ monom än } g})$$

Att nu istället titta på  $f, k$  istället för  $f, g$  ändrar inte skärningstalet. Det ändrar inte heller transverselitetetsvillkoret enligt axiom 5.

Iterera processen tills ett polynom har faktor  $y$  och då kan vi gå till föregående punkt

□

Vi har även visat att om två kurvor har en singulär punkt så kommer skärningstalet vara större än 1. Det kommer till och med vara större än 4. I en singulär punkt så blir bidraget minst två för varje kurva om den är singulär.

### 12.1. Hur många singulära punkter kan en kurva ha? (i $\mathbb{CP}^2$ ).

Först och främst beror det på graden. Låt oss anta att kurvan är irreducibel.

Vad händer om kurvan är av grad 1 (en irreducibel kurva av grad 1). Detta är en linje, och linjer har inga singulära punkter. När vi säger linje menar vi ett förstegradspolynom.

Vad händer om kurvan är av grad 2 (en irreducibel andragsgradskurva). Vi har klassificerat alla andragsgradskurvor, och den enda irreducibla av de klassificeringarna är cirkeln, som inte har någon singulär punkt, alltså har en irreducibel andragsgradskurva ingen singulär punkt.

Om vi låter  $d$  = graden av kurvan betar sig antalet singulära punkter på följande sätt:

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Om vi stoppar in  $d = 3$  ser vi att vi har max 1 singulär punkt.

Betrakta följande tredjegradskurva  $y^2 = x^3$ . Denna har bara singularitet i origo (inte ens någon annanstans även i  $\mathbb{CP}^2$ ). Ytterligare exempel är  $y^2 = x^2(1-x)$

Detta är i  $xy$ -kartan. Singulära punkter är på något sätt ett lokalt fenomen till  $2D$ -kartor

Varför gäller det att vi har max en singulär punkt? Vad skulle hända om vi har 2 singulära punkter? Knepet är att använda Bezouts sats.

Har vi 2 punkter (våra singulära punkter) är det naturligt att dra en linje emellan de.

Det som är konstigt här är att vi letar efter skärningstal 3, men detta går inte eftersom ena punkten måste ha samma skärningstal som den andra (de är linjer trotsallt).

Däremot har vi "visat" ovan att  $I_{p_1}(C, L) + I_{p_2}(C, L)$  (där  $p_i$  är singulära punkter)  $\geq 2 + 2 = 4$  vilket är en motsägelse.

Vad händer i grad 4? Jo vi bör få 3 singulära punkter och försöker använda samma trick som vi gjorde när vi hade tredjegradskurva. Vi antar att vi har 4 singulära punkter på kurvan.

Låt oss hitta en kurva som går igenom de 4 singulära punkterna. En linje blir svår att hitta som uppfyller detta, men en andragradskurva blir enkelt (vi vet att det finns t.o.m genom 5 punkter.) Vi döper denna andragradskurva till  $C'$ .

Vi vet även att dimensionen av (det komplexa) rummet till andragradspolynom är 6 och 4 punkter = fyra homogena villkor vilket ger en icke-trivial lösning.

Vi kan använda Bezouts sats, vilket ger det totala skärningstalet mellan  $C$  och  $C' = 2 \cdot 4 = 8$

Samma approach som för grad 3 ger ingen motsägelse då. Vad vi kan göra är att vi kan kräva mer av  $C'$ . Vi kan nämligen kräva att den går igenom 5 punkter (kom ihåg, dimension 6). Så, välj en till punkt på  $C$ . Den behöver inte var singulär. Kurvan  $C'$  kommer ju skära  $C$  i den 5te punkten, vilket ger 9 skärningspunkter medan Bezouts sats säger 8 vilket är en motsägelse.

## 12.2. Tredjegradskurvor.

Kurvor av grad 1 och 2 har vi "löst", vi har klassificerat de osv. Tredjegradskurvor däremot, är mer intressanta. Det finns tredjegradskurvor som är irreducibla men har singularitet exempelvis (max 1st per irreducibel kurva).

Vi kommer att visa en "normalform" för icke-singulära kurvor (mer än bara de geometriska formerna)

Vi kommer göra samma sak, fast med singulära kurvor.

Vi kommer betrakta elliptiska kurvor som glatta tredjegradskurvor med en viss abelsk gruppstruktur (en viss additionslag)

### Theorem 12.3: Hessian

Vi arbetar mestadels med homogena polynom. Låt  $f \in \mathbb{C}_h[x, y]$  av grad  $d$

Vi definierar Hessianen som:

$$H(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$$

Graden av  $H$  är uppenbarligen  $3(d-2)$  OM  $H \neq 0$

### Theorem 12.4: Inflexionspunkt

En punkt  $P$  så att  $F(P) = 0$  kallas *inflexionspunkt* eller *flex* om  $H(P) = 0$

Vi kan tänkna det som mängden av skärningspunkter till  $F$ . De skär varandra precis i inflexionspunkterna till  $F$

**Lemma 12.1: Eulers lemma om homogena funktioner**

En funktion  $f$  kallas *homogen* av grad  $d$  om  $F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_1, \dots, x_n)$   
 För homogena funktioner gäller:

$$dF = d\lambda^{n-1} F(x_1, \dots, x_n) = x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \quad F_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

Låt  $F \in \mathbb{C}_n[x, y, z]$  av grad  $d > 1$

Då gäller:

$$\frac{z^2 H(x, y, z)}{(d-1)^2} = \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & \frac{d}{d-1} F \end{pmatrix}$$

Att Hessianen är 0 kommer vi se är ekvivalent med att andraderivatan i någon karta är 0.

Om vi betraktar en kurva  $f$  i  $xy$ -kartan:

$$F(x, y, 1) = 0 \quad P \text{ inflexionspunkt}$$

Låt oss anta att i inflexionspunkten så är  $F_y(P) \neq 0$ . Kurvna är alltså av formen  $y = y(x)$  lokal kring  $P$  (följer från implicita funktionssatsen).

Då kan vi derivera  $F$  implicit med avseende på  $x$  2 gånger och få:

$$H(P) = 0 \Leftrightarrow y'' = 0$$

**Theorem 12.5**

Låt  $\text{Flex}(C) = \{\text{inflexionspunkter på } C\}$

Låt  $C \subseteq \mathbb{CP}^2$  vara en irreducibel kurva av grad  $d$  och  $C = V(F)$ . Då gäller:

$$\text{Flex}(C) = V(F) \cap V(H)$$

$$1 \leq \#\text{Flex}(C) \leq 3d(d-2)$$

Beviset faller omedelbart från Bezouts sats, om kurvorna  $F, H$  inte har gemensamma faktorer, eftersom enligt Bezouts sats har kurvorna exakt  $3d(d-2)$  skärningspunkter räknat med multiplacitet. Då är  $H(Q) = 0 \quad \forall Q \in V(F)$ , alltså alla punkter på  $F$  är inflexionspunkter.

Om alla punkter på kurvan är inflexionspunkter, det kan inte vara så många kurvor som har den egenskapen. Vi hävdar att  $F$  måste vara en linje, ( $y = kx + m$ , derivera 2 gånger, få 0 överallt), ty åtminstone lokalt löser  $y'' = 0$  så  $y = kx + m$  i någon öppen omgivning i planet.

Kom ihåg att tangentlinjen  $T_P(F)$  kan karakteriseras som den linje genom  $P$  som uppfyller  $I_P(T_P(F), F) \geq 2$

Alla linjer utom tangentlinjen skär  $F$  transversellt.

**Theorem 12.6**

Vi kan karakterisera inflexionspunkter. En punkt  $P$  är en flex om och endast om:

$$I_P(T_P(F), F) \geq 3$$

Detta har varit för allmänna kurvor, men vi ska specificera oss i tredjegradskurvor

**12.3. Tredjegradskurvor.**

Enligt Sats 12.5 bör antal inflexionspunkter ligga mellan 1 och 9, vi ska visa att det är exakt 9 t.o.m

**Theorem 12.7**

En irreducibel glatt tredjegradskurva kurva  $F = 0$  (utan singulära punkter) i  $\mathbb{CP}^2$  är projektivt ekvivalent med en på formen ( $C = V(F)$ ):

- $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$  där  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

Varför är det inte en fullständig klassificering? Vi har inte sagt att de är olika för olika värden på  $\lambda$ .

**Strategi:**

Utnyttja att det finns en inflexionspunkt  $P$ , i en inflexionspunkt har vi mer information än en annan (vi vet exvis saker om Hessianen) och placera  $P$  lämpligt. Använd dina projektiva transformationer maximalt (de kan förenkla).

**Anmärkning:**

Projektiva transformationer bevarar inflexionspunkter

**Anmärkning:**

Projektiva tangentlinjen:

$$F_x x + F_y y + F_z z$$

**Anmärkning:**

Inflexionspunkter ej singulära (?). De är viktiga, de hjälper till för att visa att gvarje glatt tredjegradskurva ges på formen:

$$C = y^2z = x(x-z)(x-\lambda z) \quad \lambda \notin \{0, 1\}$$

**Exempel:**

Betrakta  $y^2z = x(x-z)(x-2z)$  i  $xy$ -kartan, så  $z = 1 \Rightarrow y^2 = x(x-1)(x-2)$

I  $xy$ -kartan ser vi att vi har en punkt i oändligheten, så vi betraktar  $z = 0$  fallet:

$$0 = x^3 \Rightarrow (0, 1, 0) \text{ är punkten i } \infty$$

Det är bara en punkt i oändligheten, så linjen i oändligheten skär  $C$  i en punkt:

$$L_\infty \cap C = \{(0, 1, 0)\} \Rightarrow I_{(0,1,0)}(L_\infty, C) = 3$$

Vi ser då att  $L_\infty = T_{(0,1,0)}C$  och  $(0, 1, 0)$  är en inflexionspunkt till  $C$ .

(Om skärningstalet större än eller lika med 3, så flexpunkt).

Om vi vill titta på en karta där denna punkt syns, kan vi välja  $xz$ -kartan, och vi får då

$$z = x(x-z)(x-2z)$$

**Anmärkning:**

Asymptoters riktning definierar linjen i oändligheten för den kurvan.

**Anmärkning:**

Varje affin kurva av grad  $d$  har ” $d$  punkter i  $\infty$  som ligger till där vi homogeniserar. Man kan därmed visa att  $\mathbb{CP}^2$  är kompakt och varje projektiv plan kurva är också en kompakt delmängd av  $\mathbb{CP}^2$

Vi har redan sett att icke-singulära (glatta) kurvor (komplexa) är väluppfotstrade ytor, de ser ut som 2-dimensionella ytor, men sådana ytor kan klassificeras upp till diffeomorfi.

Antingen är ytan orienterbar (sfär, torus, dubbeltorus, osv), eller icke-orienterbar (Möbius, Kleinflaska)

**Anmärkning:**

Orientbar betyder att det går att hitta ett sätt att välja moturs.

Genus på sfären är kopplat till graden på följande sätt:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$



**Theorem 12.8**

Varje irreducibel glatt tredjegradskurva har exakt 9 inflexionspunkter

Betrakta Sats 12.5. Om vi kan visa att  $F, H$  skär varandra transversellt överallt så är vi klara (skärningstalet aldrig större än 1).

En inflexionspunkt kan flyttas till  $(0, 1, 0)$  så att kurvan har formen

$$y^2z = x(x - z)(x - \lambda z)$$

Beräkna  $\nabla F(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ , beräknar vi Hessianen  $\nabla^2 F(0, 1, 0) = (24, 0, 8(\lambda - 1))$ , alltså ej parallella

Hur många *singulära* tredjegradskurvor finns de? Det visar sig att det finns 2. Exakt 2.

**Theorem 12.9**

$C$  är en singulär irreducibel tredjegradskurva. Då är  $C$  projektivt ekvivalent med antingen:

- $y^2z = x^2(x + z)$
- $y^2z = x^3$

## 13. ELLIPTISKA KURVOR

**Theorem 13.1: Elliptisk kurva**

En glatt plan projektiv tredjegradskurva  $C$  med en punkt  $O \in C$  och en additionslag enligt nedan, kallas för en *elliptisk kurva*

Vi visar konstruktionen. Säg att vi har en tredjegradskurva  $C$  och vi har valt en punkt på den. Vi definierar en binär operation  $*$  först:

$$\begin{aligned} * : C \times C &\rightarrow C \\ (P, Q) &\mapsto P * Q \end{aligned}$$

Har vi två punkter geometriskt så kan vi bara dra en linje mellan. Drar vi den linjen så har vi enligt Bezouts sats en tredje punkt som också skär linjen.

Då kanske man undrar vad som händer om vi har skärningstal  $> 1$  i en av punkterna  $P, Q$ ? Säg att  $P$  har skärningstal 2, då är  $P * Q = P$

Vi definierar  $P + Q$  genom att dra linjen genom origo till  $P * Q$ , den punkten där linjen skär kurvan är  $P + Q$ :

$$\begin{aligned} + : C \times C &\rightarrow C \\ (P, Q) &\mapsto (P * Q) * O = P + Q \end{aligned}$$

**Anmärkning:**

$*$  är kommutativ.

**Theorem 13.2: Är en abelsk grupp**

$C$  med  $+$  och  $O$  är en abelsk grupp, alltså uppfyller följande:

- $O + P = P = P + O \quad \forall P \in C$
- $\forall P \exists -P : P + (-P) = O = (-P) + P$
- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
- $P + Q = Q + P$

Vi visar andra axiomet:

Konstruktionen av  $-P$ :

Betrakta  $S = O * O$  (linjen mellan  $O$  och  $O$ ), det finns bara en linje som går genom en punkt på en kurva, nämligen tangentlinjen. Givet  $P$  definierar vi  $-P$  som  $S * P$ . Notera att linjen  $S * P$  är ortogonal mot  $O * O$

Associativiteten är lite klurig och behöver förberedelser i form av följande 2 lemmor:

**Lemma 13.1: 1**

Låt  $P_1, \dots, P_8$  vara 8 distinkta punkter givna i  $\mathbb{CP}^2$

Betrakta följande rum  $V_3(P_1, \dots, P_8)$  (rummet av homogena polynom i 3 variabler som har nollställe i dessa 8 punkter)  $= \{F \in \mathbb{C}_h[x, y, z] \mid F(P_i) = 0\}$

$F$  har grad 3

Vi vet från linjär-algebra att dimensionen på det här rummet är större än 2, 8 obekanta, 10 ekvationer.

Om:

- Inte 4 av punkterna är kolinjära
- Inte 7 av punkterna på samma irreducibla andragsgradskurva (konik)

Så gäller  $\dim V_3(P_1, \dots, P_8) = 2$

**Anmärkning:**

Antal koefficienter för ett polynom av grad  $d$  är  $\binom{d+2}{2}$

**Proof 13.1: Lemma 1**

## • Fall 1:

Antag att inte ens 3 punkter är kolinjära och att inte ens 6 av de ligger på samma konik  
Vi gör ett motsägelsebevis och antar för motsägelse att  $\dim V_3 \geq 3$

Betrakta linjen  $L$  genom  $P_7$  och  $P_8$

Välj två punkter till på  $L$  (vi kan göra detta eftersom dimensionen är större än eller lika med 3)  $P_9, P_{10}$ . Då kan vi betrakta  $V_3(P_1, \dots, P_{10})$ .

Tag  $0 \neq F \in V_3$ . Vi vill visa att det bara finns ett sätt att välja  $F$  (upp till konstant).

$F$  är en tredjegradskurva som går genom alla 10 punkter. Om  $L$  och  $F$  saknar gemensamma faktorer så är totala skärningstalet mellan de 3, men om  $F$  är reducibel ( $L$  ej reducibel ty projektiv linje)  $F$  skär  $L$  4 gånger och  $F = G \cdot L$ . Detta motsäger Bezouts sats.

$L(P_i) \neq 0$  i de 6 första punkterna, men då måste  $G(P_i) = 0$  i dessa punkter (annars hade inte  $F$  legat i  $V$ )

Detta är en motsägelse, alltså dimensionen  $\leq 2 \Rightarrow 2$

## • Fall 2:

Antag att 3 av punkterna är kolinjära, säg  $P_6, P_7, P_8$ , och dra en linje mellan de.

Specifera ny punkt  $P_9$  på linjen. Tag tredjegradarn  $F \neq 0 \in V_3(P_1, \dots, P_9)$  som har egenskapen att den går genom alla punkter. Detta börjar likna situationen för Fall 1.

På samma sätt som Fall 1, Bezouts visar att  $F = L \cdot G$ , men  $G$  är unikt bestämd genom att den går igenom de 5 punkter som inte är de 4 andra nämnda. Vi har visat att för 5 punkter finns det en entydig andragsgradskurva som går genom de, alltså är  $G$  entydig, men det är även  $L$

$\dim_{\mathbb{C}} V_3(P_1, \dots, P_9) = 1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V_3(P_1, \dots, P_8) = 2$

□

**Lemma 13.2: 2**

Låt  $P_1, \dots, P_9 \in \mathbb{C}P^2$  vara nio distinkta punkter.

Låt  $F, F_1, F_2$  vara homogena tredjegradsgradspolynom

Antag att  $F_1(P_i) = F_2(P_i) = 0$  (skär varandra i de nio punkterna och inte har andra skärningspunkter)  
 $= V(F_1) \cap V(F_2) = \{P_1, \dots, P_9\}$

Antag även att  $F(P_i) = 0$  för  $i = 1, \dots, 8$  (ja, 8).

Då gäller även att  $F(P_9)$

För att visa detta kommer vi försöka använda Lemma 13.1, så vi måste visa att dessa kurvor uppfyller de villkoren.

**Proof 13.2: Lemma 2**

Bezout  $\Rightarrow$  villkoren i Lemma 1 är uppfyllda

Detta innebär att  $\dim_{\mathbb{C}} V_3(P_1, \dots, P_8) = 2$ . Vi har alltså 3 ekvationer, i ett vektorrum med dimension 2, alltså måste en av de vara linjärt beroende:

$$aF_1 + bF_2 + cF = 0 \quad (\text{inte alla } a, b, c = 0)$$

Faktum är  $c \neq 0$ , ty annars  $V(F_1) = V(F_2)$

Vi räknar  $\oplus$  i  $P_9 \Rightarrow cF(P_9) = 0 \Rightarrow F(P_9) = 0$

□

Vi påminner oss om att vi vill visa associativiteten  $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ , vilket vi kan göra genom att betrakta konstruktionen av  $(P + Q)$  samt  $(Q + R)$ .

Det första vi gör är att bygga  $P * Q$  som bildar en linje. Sedan drar vi linjen genom origo till  $P * Q$  vilket ger oss  $P + Q$ . Sedan bildar vi  $R * (P + Q)$  och får en punkt som ger os VL. Vi gör samma konstruktion för HL