Tentamensskrivning i Reell analys, MMG600.
Tid: 2009-08-21, kl 8.30-13.30
MATEMATIK
Hjälpmedel: Inga
Göteborgs Universitet
Telefonvakt: tel 076 272 18 61

---

1. a) Definiera begreppet *kompakt mängd.*

   b) Visa att $f(K)$ är kompakt om f är en kontinuerlig funktion på ett kompakt metriskt rum K, in i ett metriskt rum M. (3p)

2. Formulera och bevisa Urysohns lemma. (3p)

3. a) Definiera begreppet *kontraktion.*

   b) Låt (M, d) vara ett fullständigt metriskt rum och låt $\phi : M \to M$ vara en kontraktion. Visa att ϕ har en entydigt bestämd fixpunkt. (3p)

4. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$.

   a) Definiera begreppen *öppen boll (omgivning)* och *öppen mängd* i M.

   b) Definiera begreppen *inre punkt i* och *hopningspunkt till* E.

   c) Låt $M = \mathcal{C}([0, 1])$, mängden av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ försedd med supremumnormen, och låt

   $$E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(x) > 0 \text{ för alla } x \in [0, 1]\}.$$

   Visa att E är öppen. (4p)

5. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara likformigt kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Definiera funktionsföljden $\{f_n\}$ genom $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Visa att f_n konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$. Ge också exempel på en kontinuerlig funktion f sådan att motsvarande följd $\{f_n\}$ inte konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$. (3p)

6. Låt $f(x, y) = (x \cos y, \sin y)$. Bestäm de punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vid vilka f är lokalt inverterbar. Om punkten $(1, \pi/4)$ ingår bland dessa, så låt g beteckna den lokala inversen till f vid $(1, \pi/4)$ och bestäm den linjära approximationen av g vid $f(1, \pi/4)$. (3p)

MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Telefonvakt: tel 076 272 18 61

7. Låt $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ vara definierad av

$$Tf(x) = x + \int_0^x tf(t)dt\ .$$

a) Visa att T är en kontraktion på $\mathcal{C}([0,1])$.

b) Använd detta för att visa att differentialekvationen

$$f'(x) = xf(x) + 1$$

har en lösning i $\mathcal{C}([0,1])$. (3p)

8. a) Låt $S = A \cup B$ där A och B är icke-tomma, sammanhängande mängder i ett metriskt rum M. Visa att A och B är separerade om S inte är sammanhängande.

b) Använd påståendet ovan för att visa att mängden

$$S = \{(x,y) : -1 \le x \le 0, y = 0\} \cup \{(x,y) : 0 < x \le 1, y = \sin(1/x)\}$$

är en sammanhängande delmängd av $\mathbb{R}^2$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 11 september. Ditt resultat meddelas via gu-mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut på expeditionen alla vardagar kl 8.30-13.00.