UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Martin Herschend,
Thomas Kragh

Prov i matematik

K1, STS1, W1, X1, Frist,
KandKe1, Gylärarma1

Linjär algebra
och geometri I
2013–12–19

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (**Obs:** denna uppgift löses **inte** om man har klarat duggan!)

Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + (a-2)x_4 = -2 \\ 4x_1 + 12x_2 + (a+4)x_3 + 9x_4 = 8 \end{cases}$$

för alla värden på $a \in \mathbb{R}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn alla matriser X som uppfyller ekvationen

$$AXC + BXC = I.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2x & 1 \\ x & 2x & x & 3x \\ 1 & 2x & 1 & x \\ 2 & x & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Låt punkterna

$$A\colon (1,2,2), \quad B\colon (2,2,3), \quad C\colon (3,4,3) \quad \text{och} \quad D\colon (2,4,2)$$

vara givna.

(a) Visa att punkterna är hörnen i en parallellogram där vektorn $\overrightarrow{AC}$ utgör ena diagonalen.

(b) Bestäm arean av denna parallellogram.

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som

- avbilder vektorn $(1,0,0,0)$ på $(2,-1)$,
- avbilder vektorn $(0,1,0,0)$ på $(2,-1)$,
- avbilder vektorn $(0,0,3,1)$ på $(1,2)$ och
- avbilder vektorn $(0,0,2,2)$ på $(1,1)$.

(a) Hitta standardmatrisen $[T]$ för T.

(b) Hitta bilden av vektorerna $(1,-3,6,2)$ och $(2,1,2,2)$ under T.

6. Låt $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara speglingen i planet $\pi\colon 2x+y-z=0$.

(a) Hitta S:s standardmatris $[S]$.

(b) Hitta två egenvärden för $[S]$.

(**Obs:** man kan lösa (b) utan att lösa (a))

7. (a) Ge definitionen av spannet (det linjära höljet) av vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Låt

$$\vec{u}_1 = (1,1,1), \quad \vec{u}_2 = (1,2,0), \quad \vec{u}_3 = (3,5,1) \quad \text{och} \quad \vec{u}_4 = (4,7,1).$$

(b) Avgör om spannet av vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ och $\vec{u}_4$ är hela $\mathbb{R}^3$.

(c) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1,1,a)$ spannet $\text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$?

8. Hitta ekvationen för planet genom origo som skär båda planen

$$\pi_1: y + 2z = 23 \quad \text{och} \quad \pi_2: x - y + z = 27$$

vinkelrätt.

Lycka till!
God jul och gott nytt år.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra och geometri I 2013–12–19

Lösning till problem 1. Totalmatrisen är:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & a-2 & -2 \\ 4 & 12 & a+4 & 9 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \quad -4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -a \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{1-a^2} \\ \\ \\ \end{array} \sim^{\text{om } a \neq \pm 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ -a \quad -2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Lösningar: } (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t, t, 0, 0), t \in \mathbb{R}.$$

Om $a = 1$ är totalmatrisen ekvivalent med:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och alla lösningar är: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t-s, t, -s, s), t \in \mathbb{R}$.
Om $a = -1$ är totalmatrisen ekvivalent med:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och alla lösningar är: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2-3t-3s, t, s, s), t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 2.

$$AXC + BXC = I \quad \Leftrightarrow \quad (A+B)XC = I \quad \Leftrightarrow \quad X = (A+B)^{-1}C^{-1} = (C(A+B))^{-1}$$

om $C(A+B)$ är inverterbar (observera att detta också medför att C och $A+B$ är inverterbara). Vi ser att

$$C(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna inverteras:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

So omskrivningen gäller och

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{också:} \left((A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = C \right)$$

Lösning till problem 3.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2x & 1 \\ x & 2x & x & 3x \\ 1 & 2x & 1 & x \\ 2 & x & 2 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 1 & 2x & x \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \quad -3 \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} -1 \end{matrix}$$

$$x^3 \begin{vmatrix} x-6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = x^3(x-7).$$

Så lösningarna är $x \in \{0, 7\}$.

Lösning till problem 4.

(a) Vi ser att $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,2,0)$ och

$$\overrightarrow{AC} = (2,2,1) = (1,0,1) + (1,2,0) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Därför är punkten C mittemot A i parallellogrammen med sidorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$.

Alternativ: $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$ och $\overrightarrow{DC} = (1,0,1)$ är lika. Så därför är $\overrightarrow{AD}$ och $\overrightarrow{BC}$ också lika och punkterna är hörnen i en parallellogram.

(b) Vi har formeln:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\diamond ABCD) &= \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \\ &= \left\| \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \right\| = \\ &= \|(-2, 1, 2)\| = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Lösning till problem 5. (a) Från uppgiften får vi ekvationen

$$[T] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi inverterar 4×4 matrisen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{1}{4} \quad -2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

och vi får att

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem 6. (a) normalvektorn $(2, 1, -1)$ avbildas på $(-2, -1, 1)$ och vektorerna $(1, -2, 0)$ och $(1, -1, 1)$ (som är parallell med planet) bevaras av S. Så vi får ekvationen:

$$[S] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi inverterar matrisen precis till höger om $[S]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{0}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Så vi får

$$[S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ beräkna $[S]$:s (eller dennas kolonner) direkt genom att använda

$$S(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,\mathrm{proj}_{(2,1,-1)}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot (2, 1, -1)}{3}(2, 1, -1)$$

(b) Då S är en spegling är $S(\vec{n}) = -\vec{n}$ och $S(\vec{v}) = \vec{v}$ för $\vec{n}$ normalvektor till planet och $\vec{v}$ parallell med planet. Så båda -1 och 1 är egenvärden (och där finns inte andra). Alternativt hitta rötterna i

$$\frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-3\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-3\lambda & 1 \\ 0 & 3-3\lambda & 3-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{3^2} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-3\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\lambda}{3^2} \begin{vmatrix} -1-3\lambda & -4 \\ -2 & 1-3\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-\lambda}{3^2}((1+3\lambda)(-1+3\lambda) - 8) = \frac{1-\lambda}{3^2}(9\lambda^2 - 9) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Lösning till problem 7.

(a) Spannet av vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ är mängden av alla linjära kombinationer av vektorerna. Alternativt $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \{c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k \mid c_i \in \mathbb{R}\}$.

(b+c) Vi sätter vektorerna in som kolonner i en matris och kollar om rangen är lika med antalet rader och vi sätter vektorn $(1, 1, a)$ som augmentering för att se när den faktisk kan skrivas som en linjär kombination av $\vec{u}$:na.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & a-1 \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Vi är nu på trappstegsform, och då koefficientmatrisen har rang $2 < 3$ är spannet inte lika med hela $\mathbb{R}^3$. Yttermera, ser vi att $(1, 1, a)$ tillhör spannet om och endast om $a = 1$ (precis då har vi lösningar).

Lösning till problem 8. Vi söker ett plan som är parallellt med de två normalvektorerna

$$\vec{n}_1 = (0, 1, 2) \qquad \text{och} \qquad \vec{n}_2 = (1, -1, 1).$$

Till normalvektor kan vi ta

$$(0, 1, 2) \times (1, -1, 1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3, 2, -1)$$

Då planet går genom origo är ekvationen

$$3x + 2y - z = 0.$$