Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Cecilia Karlsson

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS
2009-12-09

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 3 extra problem (max 4 poäng per extra problem). Till både uppgifterna, problemen och extra problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{x} - e^{-x}}$.

2. Bestäm **största värdet** av $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$ på intervallet $-\infty < x < \infty$. Motivera noggrant.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$ genom att t ex utnyttja substitutionen $u = e^x$.

4. Bestäm **största värdet** av $f(x) = (x-1)^2\, e^{-x}$ på intervallet $0 \leq x < \infty$. Motivera noggrant och var uppmärksam på funktionen på hela intervallet.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{0}^{\infty} (x-1)^2\, e^{-x}\, dx$.

6. Skissera kurvan
$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2} = x - \frac{1}{x^2}.$$
Bestäm särskilt nollställena samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' - 2y' - 3y = 12$$
för vilken $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + \dfrac{2}{x}\, y = 3$ för vilken $y(1) = 2$.

9. Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

10. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 \cdot 3^n}$ har konvergensradien lika med 3. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.

PROBLEM

1. Parablerna
$$y = (x+1)^2 + 1 \text{ och } y = (x-1)^2 - 1$$
har precis en gemensam tangent. Bestäm tangeringspunkten på respektive parabel.

2.
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} - x,\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

   a) Bevisa att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, dvs att funktionen är kontinuerlig i origo.

   b) Bevisa att $f'(0) = -1$.

   c) Bevisa att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, dvs att linjen $y = x$ är en sned asymptot till $x^2 \sin\frac{1}{x}$.

EXTRA PROBLEM

1. Ge bevis eller motexempel till följande påståenden:

   a) Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet (a, b) så är den deriverbar där.

   b) Om funktionen $f(x)$ är deriverbar på intervallet (a, b) så är den kontinuerlig där.

2. Låt $g(x)$ vara en deriverbar funktion på ett intervall och antag att den har begränsad derivata, dvs $|g'(x)| < M$ för något positivt tal M. Låt $a > 0$ vara ett fixt tal. Bevisa att funktionen
$$f(x) = x + ag(x)$$
är $1 - 1$ om $a > 0$ är tillräckligt litet.

3. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig samt att $f(x) \geq 0$ på det slutna intervallet $[a, b]$. Bevisa att om dessutom $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ så måste $f(x) = 0$ för alla x på $[a, b]$.

   Ledning: Antag att det finns en punkt x_0 på $[a, b]$ där $f(x_0) > 0$ och härled en motsägelse.

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Geometriska seriens summa

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}\,, \quad |r| < 1$$