Uppgifter till Lektion 1.

1. (a) Finn alla skärningspunkter i $\mathbb{C}^2$ mellan de två komplexa kurvorna

$$x^2 + y^2 = 1$$

och

$$(x-a)^2 + y^2 = 1,$$

där $a \in \mathbb{R}$. Hur många finns det för olika värden på a? Hur många är reella?

(b) Bilda sammansättningen $F \circ G$ av de två affina transformationerna

$$F(x, y) = (x - iy, x + 3iy + 1)$$

och

$$G(x, y) = (x + 2i, ix + y + 3i).$$

(c) Finn inversen till den linjära avbildningen $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, given av

$$F(x, y) = (2ix + 3y, 3x + (1 + 2i)y).$$

2. Vilken ekvivalensklass av komplexa andragradspolynom tillhör följande polynom? Ange en explicit affin transformation $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ och ett tal $\lambda \in \mathbb{C}$ sådan att $\lambda T^*(f)$ är motsvarande standardform, listad i klassificeringssatsen.

(a) $f(x, y) = 2xy - y^2$

(b) $g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 2y - 2$

3. Finn eventuella singulära punkter på kurvan $(x^4 + y^4)^2 = x^2y^2$.

4. (Bix) Bestäm skärningstalet i origo av följande polynom.

(a) $y - x^3$ och $y^4 + 6x^3y + x^8$.

(b) $y - x^2 + 2x$ och $y^2 + 5y - 4x^3$.

(c) $y - x^2 - x$ och $y^2 - 3x^2y - x^2$.

(d) $y^2 + x^2y - x^3$ och $y^3 - 3x^2y - x^2$.

Följduppgifter

A. (Om komplexa kurvor.)

(a) En reell affin kurva kan vara kompakt. Vilka av de reella kurvorna i **2.** är kompakta.

(b) Visa att en *komplex* affin kurva aldrig är kompakt. (*Ledtråd:* Begrunda beviset för att en sådan kurva har oändligt många punkter.)

(c) Ge exempel på en följd av punkter (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$, på $x^2 + y^2 = 1$ så att, för varje $n \geq 1$, avståndet från (x_n, y_n) till $(0, 0)$ är $\geq n$.

B. Läs avsnittet om *generaliserade tangentlinjer* i 8.2. Red tillsammans ut beviset i satsen där och se till att alla i gruppen förstår vad definitionen säger och förstår exemplet. Vilka är de generaliserade tangentlinjerna i uppgift **3**?

C. (a) Om ni tillämpar en sats vid uträkningarna i **4.**, förklara noggrant för varandra varför satsen fungerar. Om ni bara har räknat med 'brute force', hade en användning av en lämplig sats kunnat underlätta era räkningar?

(b) Visa direkt (med flervariabelmetoder) att (de reella) kurvorna i (b) är glatta och skär varandra transversellt i origo.

(c) Skissa kurvorna i (c) i närheten av origo (med flervariabelmetoder) och förklara var skärningarna kommer ifrån "geometriskt".