Hemtentamen - Fourieranalys

Matematiska institutionen
Anders Israelsson
2021-01-13

5 högskolepoäng
1MA211
KandFy, KandMa, Fristående

Skrivtid: 08:00-13:00 (Obs: GMT + 1 Stockholm). Ytterligare 20 minuter ges för inlämningen. När du är klar scannar du dina svar och lämnar in **en** pdf-fil. Spara dina originallösningar, åtminstone tills tentamen är färdigrättad och resultatet rapporterat. Obs! Endast tentamenslösningar i pdf-format mottages. Ett sätt är att använda sig av en scanner-app på en telefon (det finns gratisversioner att ladda ned). Skriv anonymitetskod och sidnummer på varje sida. Eventuella frågor skickas till `anders.israelsson@math.uu.se`.

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon, innehållet i Studium och lärobok. **Observera att du inte får samarbeta med andra eller söka på internet efter andra källor!**

Tentamen består av 8 problem, där varje problem ger maximalt 5 poäng. Gränserna är 18, 25 och 37 för betyg 3, 4 respektive 5 (inklusive bonuspoäng). Du måste motivera varje steg i din lösning för att få full poäng på en uppgift. Under frågorna finns formelsamlingen.

1. Använd Laplacetransformen för att lösa ODE:n

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 16e^{-2x} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

2. Låt f vara 2π-periodisk med

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2\pi < x < -\pi \\ 1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

   (a) Beräkna f:s Fourierserie på trigonometrisk form.
   (b) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera!
   (c) Använd resultatet i (a) för att beräkna serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

3. (a) Beräkna Fouriertransformen av $\chi_{[-1,1]}(x)(1-|x|)$.
   (b) Använd resultatet i (a) för att beräkna Fouriertransformen av $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$.

4. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   där $u(x,t)$ är begränsad och $\kappa > 0$ är en konstant.

5. Lös integralekvationen

$$-4\int_0^x \cos\left(\sqrt{3}y\right) f(x-y)\,\mathrm{d}y = f(x) + 2\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x\right).$$

6. Tillämpa Gram-Schmidtalgoritmen på $\left\{1-x, x^2-2\right\}$ för att hitta en ortonormal mängd i rummet $L^2\left((0,\infty), e^{-x}\right)$.

7. Låt $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ definieras genom

$$T(\varphi) := \left(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{x}\right)'(\varphi)$$

   (a) **Visa att** $xT' = CT$ **för något tal** $C \in \mathbb{R}$**. Beräkna även detta tal** C**.**

   (b) **Beräkna** $\hat{T}$.

8. I nedanstående uppgift kan du anta att alla involverade integraler är konvergenta.

   (a) För en funktion g, **beräkna**

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

   (b) Definiera operatorn $T_a^\varphi : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ genom

$$T_a^\varphi f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i\varphi(\xi)} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

   där a och φ är ”lämpliga” funktioner (dvs så att allt blir konvergent). **Visa att** $T_a^\varphi = T_a^0 T_1^\varphi$. Ledtråd: lösningen kräver (minst) tre integraler.

Lycka till!

Table of Formulæ

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ below.

Triangle inequalities
Let $x, y \in \mathbb{R}$ and f, g be functions. Then

- $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $\big|\,\|f\| - \|g\|\,\big| \leq \|f \pm g\| \leq \|f\| + \|g\|$
- $\left|\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
- $\left\|\int_\Omega f(\cdot, y)\,\mathrm{d}y\right\| \leq \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|\,\mathrm{d}y$, where the norm is taken in the first variable of f (Minkowski's integral inequality).

Useful Integrals

- $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$
- $\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(n-1)(n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1, & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$

Lebesgue Dominated Convergence Theorem
Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions with $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for almost every x and let $g \in L^1(\Omega)$, such that $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ for almost every x. Then

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Gram-Schmidt orthogonalisation
Let V be an inner product space and $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ be a linearly independent set of vectors. Then the Gram-Schmidt orthogonalisation is given by

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1, & e_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1, & e_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle u_1, v_3\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2, & e_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j, v_k\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} u_j, & e_k &= \frac{u_k}{\|u_k\|}.
\end{aligned}$$

Laplacetransformen

$f(t)$	$\tilde{f}(s) = F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$	
Allmänna regler		
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	(L.1)
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	(L.2)
$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$	(L.3)
$f(t-a)H(t-a), \quad a > 0$	$e^{-as} F(s)$	(L.4)
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	(L.5)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(L.6)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	(L.7)
$\int_0^t f(u)\,du$	$s^{-1} F(s)$	(L.8)
$f * g(t) = \int_0^t f(u) g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$	(L.9)
Speciella funktioner		
$\delta(t)$	1	(L.10)
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	(L.11)
$t^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(L.12)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(L.13)
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(L.14)
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	(L.15)
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	(L.16)
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	(L.17)
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	(L.18)

Fouriertransformen

$f(t)$	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$	
Allmänna regler		
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$	(F.1)
$e^{i\alpha t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \alpha)$	(F.2)
$f(t - t_0)$	$e^{-it_0\omega}\hat{f}(\omega)$	(F.3)
$f(-t)$	$\hat{f}(-\omega)$	(F.4)
$f(at) \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$	(F.5)
$tf(t)$	$i\,\frac{d\hat{f}}{d\omega}$	(F.6)
$f'(t)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$	(F.7)
$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$	(F.8)
$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$	(F.9)
Speciella funktioner		
$\chi_{[-a,a]}$	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$	(F.10)
$e^{-\lvert t\rvert}$	$\frac{2}{1+\omega^2}$	(F.11)
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{-\lvert\omega\rvert}$	(F.12)
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$	(F.13)

Plancherels formler:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$$

Fourierserier

Funktioner med period 2π

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Funktioner med period T

Sätt $\Omega = 2\pi/T$

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\Omega t}\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\Omega t\, dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\Omega t\, dt.$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Några trigonometriska formler

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t, \qquad 2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t$$