Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Sebastian Pöder

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS M
2014-12-08

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 3 extra problem (max 4 poäng per extra problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.
Skrivtid: 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-3x^2}}{1-e^{-x^2}}$.

2. Motivera varför funktionen $\dfrac{\ln^2 x}{x}$ måste anta ett minsta och ett största värde på det **slutna** intervallet $1 \le x \le e$ samt bestäm dessa värden.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ genom att t ex utnyttja substitutionen $x^2 = u$.

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x^2+2x+1}{x-1} = x+3+\frac{4}{x-1}.$$
Bestäm särskilt asymptoterna samt lokala extrempunkterna.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\,dx$.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - y = x$ för vilken $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 3x^2 y = 3x^2$ för vilken $y(0) = 0$.

8. Ange de x för vilka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x^2)^n}$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x.

9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{2}{3}}\,3^n}$ har konvergensradien lika med 3. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.

10. Funktionen $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ har ett största värde på det **öppna** intervallet $-\infty < x < \infty$. Bestäm detta värde och motivera noggrant varför det angivna värdet är det största.
Ledning: $f'(x) = 2\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

V.G.V!

PROBLEM

1. Kurvorna $y = (x-1)^3$ och $y = (x+1)^3$ har gemensamma tangenter. Bestäm samtliga och ange tangeringspunkterna på respektive kurva.

2. $$f(x) = 2x^2(1 - \cos\frac{1}{x}),\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

   a) Bevisa att $f(x)$ är kontinuerlig i origo.
   b) Bevisa att $f'(0) = 0$.
   c) Bevisa att derivatan inte är kontinuerlig i origo.
   d) Bevisa att linjen $y = 1$ är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.
   e) Bevisa att $0 \leq f(x) < 1$ för $-\infty < x < \infty$.

EXTRA PROBLEM (Sebastian Põder)

1. Låt f vara en deriverbar funktion med ett lokalt maximum vid $x = c$. Visa att $f'(c) = 0$.

2. Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vara en serie och antag att $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerar. Visa att då konvergerar även $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. **Ledning:** studera serien $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + |a_n|)$.

3. Låt f vara kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och antag att för varje funktion g som är kontinuerlig på $[a, b]$ är $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Visa att då måste $f(x) = 0$ för alla $x \in [a, b]$. **Ledning:** antag motsatsen och välj ett lämpligt g.

DIVERSE FORMLER OCH SATSER

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}\,, \ |r| < 1$$