Taylorutveckling för BV

Taylorutveckling (TU) används bl.a som analysverktyg. Inom numerisk analys (eller Beräkningsvetenskap) används TU för att analysera och utveckla numeriska metoder och numeriska approximationer till matematiska modeller och operatorer.

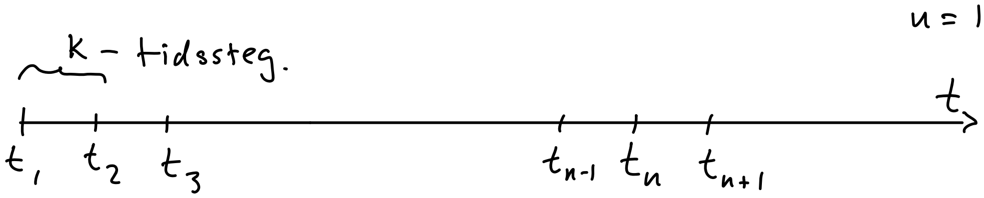
Betydelsefulla matematiska modeller/operatorer:

- Derivering
- Integrering
- Interpolation
- Ickelinjära ekvationer
- ODE
- PDE

Vid numeriska metoder för ODE är Finita Differens Approximationer (FDA) av derivator av central betydelse.

Vi ska först visa hur man med TU tar fram FDA till ett par olika derivator. Sedan studerar vi numeriska metoder för ett par olika ODE-modeller.

Vi inför diskreta tidpunkter $t_n = (n-1)\cdot k$, $n = 1, 2, \ldots$



Låt $u^n \approx u(t_n)$ beteckna en numerisk approximation vid $t = t_n$.

Studera följande FDA:

$$a\cdot u^{n+1} + b\cdot u^n + c\cdot u^{n-1} \qquad (1)$$

Uppgift 1: Bestäm a, b, c så att (1) är en FDA av $u_t(t_n)$ med Noggrannhets Ordning (NO) 2, dvs $N(k) \sim k^2$.

Trunkeringsfelet $N(k)$ definieras om

$$N(k) = \underbrace{a\cdot u(t_n + k) + b\cdot u(t_n) + c\cdot u(t_n - k)}_{\text{Instopp av } u(t) \text{ i } (1)} - u_t(t_n) \qquad (2)$$

tidpunkt?

Taylorutveckla $u(t_n+k)$ och $u(t_n-k)$ kring $u(t_n)$

$$\begin{cases} u(t_n+k) = u(t_n) + k\,u_t(t_n) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n) + \frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24}u_{tttt}(t_n) + \ldots \\ u(t_n-k) = u(t_n) - k\,u_t(t_n) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n) - \frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24}u_{tttt}(t_n) - \ldots \end{cases} \qquad (3)$$

Instopp av (3) i (2) ger:

$$a \cdot \left\{ u(t_n) + k\, u_t(t_n) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(t_n) + \frac{k^3}{6} u_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24} u_{tttt}(t_n) + \dots \right\}$$

$$+ \; b \cdot u(t_n)$$

$$c \cdot \left\{ u(t_n) - k\, u_t(t_n) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(t_n) - \frac{k^3}{6} u_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24} u_{tttt}(t_n) - \dots \right\}$$

$$- \; u_t(t_n) \; = \; N(k)$$

Villkor för NO 2:

$u(t_n)$: $\quad a + b + c = 0$

$u_t(t_n)$: $\quad a \cdot k - c \cdot k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a, c \sim \frac{1}{k}$

$u_{tt}(t_n)$: $\quad a \cdot \frac{k^2}{2} + c \cdot \frac{k^2}{2} = 0 \quad \leftarrow$ varför krävs detta för NO 2 ?

Detta kan skrivas:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - c = \frac{1}{k} \\ a + c = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2k}, \; b = 0, \; c = -\frac{1}{2k}$$

$\dfrac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2k}$ är alltså en FDA av $u_t(t_n)$ med NO 2 !

Uppgift 2: Bestäm a, b, c så att (1) är en FDA av $u_{tt}(t_n)$ med Noggrannhets Ordning (NO) 2, dvs $N(k) \sim k^2$.

Trunkeringsfelet $N(k)$ definieras om

$$N(k) = \underbrace{a \cdot u(t_n + k) + b \cdot u(t_n) + c \cdot u(t_n - k)}_{\text{Instopp av } u(t) \text{ i } (1)} - u_{tt}(t_n) \qquad (4)$$

Instopp av (3) i (4) ger:

$$a\cdot\left\{u(t_n)+k\,u_t(t_n)+\frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n)+\frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n)+\frac{k^4}{24}u_{tttt}(t_n)+\dots\right\}$$

$$+\ b\cdot u(t_n)$$

$$c\left\{u(t_n)-k\,u_t(t_n)+\frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n)-\frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n)+\frac{k^4}{24}u_{tttt}(t_n)-\dots\right\}$$

$$-\,u_{tt}(t_n)=N(k)$$

<u>Villkor för NO 2:</u>

$u(t_n)$: $\quad a+b+c=0$

$u_t(t_n)$: $\quad a\cdot k-c\cdot k=0 \Rightarrow a=c$

$u_{tt}(t_n)$: $\quad a\cdot\frac{k^2}{2}+c\cdot\frac{k^2}{2}-1=0 \Rightarrow a,c\sim\frac{1}{k^2}$

$\left(u_{ttt}(t_n)\text{:}\quad a\cdot\frac{k^3}{6}-c\cdot\frac{k^3}{6}=0 \text{ då } a=c\right)$

Detta kan skrivas

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ a+c=\frac{2}{k^2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{k^2},\ b=-\frac{2}{k^2},\ c=\frac{1}{k^2}$$

$$\frac{U^{n+1}-2U^n+U^{n-1}}{k^2}$$ är alltså en FDA av $u_{tt}(t_n)$ med NO 2!

Uppgift 3: Bestäm a, b, c så att (1) är en FDA av $u_t(t_n+k)$ med Noggrannhets Ordning (NO) 2, dvs $N(k) \sim k^2$.

$$N(k) = a \cdot u(t_n+k) + b\, u(t_n) + c \cdot u(t_n-k) - u_t(t_n+k)$$

Lösning: $a = \frac{3}{2k}$, $b = -\frac{2}{k}$, $c = \frac{1}{2k}$ Visa!

Uppgift 4: Bestäm a, b, c så att (1) är en FDA av $u_{tt}(t_n-k)$ med Noggrannhets Ordning (NO) 1, dvs $N(k) \sim k$.

$$N(k) = a \cdot u(t_n+k) + b\, u(t_n) + c \cdot u(t_n-k) - u_{tt}(t_n-k)$$

Lösning: $a = \frac{1}{k^2}$, $b = -\frac{2}{k^2}$, $c = \frac{1}{k^2}$ Visa!

Nu ska vi studera NO för några ODE-metoder, där vi utgår från

$$\begin{cases} u_t = F(t,u), & t \geq 0 \\ u = f, & t = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = M \cdot u, & t \geq 0 \\ u = f_1,\ u_t = 0, & t = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

M är här konstant koefficient matris

Uppgift 5 (Euler bakåt)

Visa att Har NO 1

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{k} = F(t_{n+1}, u^{n+1}) & (7) \\ u^1 = f \end{cases}$$

Instopp av $u(t)$ i (7) ger

$$\frac{u(t_n+k)-u(t_n)}{k} = F(t_n+k, u(t_n+k)) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trunkeringsfel}}}{N(k)}$$

utnyttja (5), dvs $F(t_n+k, u(t_n+k)) = u_t(t_n+k)$

$$\Rightarrow \quad N(k) = \frac{u(t_n+k)-u(t_n)}{k} - u_t(t_n+k) \qquad (*)$$

Taylorutveckla kring $u(t_n+k)$:

$$u(t_n) = u(t_n+k) - k\cdot u_t(t_n+k) + \frac{k^2}{2}\cdot u_{tt}(t_n+k) + \mathcal{O}(k^3) \quad (**)$$

Instopp av (**) i (*) ger slutligen

$$N(k) = \frac{\cancel{u(t_n+k)} - \{\cancel{u(t_n+k)} - k\cdot \cancel{u_t(t_n+k)} + \frac{k^2}{2}\cdot u_{tt}(t_n+k) + \mathcal{O}(k^3)\}}{k}$$

$$- \cancel{u_t(t_n+k)} = -\frac{k}{2}u_{tt}(t_n+k) + \mathcal{O}(k^2) = \mathcal{O}(k)$$

$\therefore$ (7) har NO 1.

Uppgift 6 ("Leap frog")

Visa att Har NO 2
$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}-u^{n-1}}{2K} = F(t_n, u^n) \\ u^1 = f \end{cases} \quad (8)$$

$$N(k) = \frac{u(t_n+k)-u(t_n-k)}{2k} - \underbrace{u_t(t_n)}_{\overset{(5)}{=} F(t_n, u(t_n))} \quad (\ast\ast)$$

(Observation: Det här $(\ast\ast)$ påminner om uppgift 1, då $a=\frac{1}{2k}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{2k}$)

Taylorutveckla $u(t_n \pm k)$ kring $u(t_n)$

$$u(t_n \pm k) = u(t_n) \pm k \cdot u_t(t_n) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n) \pm \frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^4) \quad (\ast)$$

Instopp av $(\ast)$ i $(\ast\ast)$ ger

$$N(k) = \Big(\Big\{\cancel{u(t_n)} + \cancel{k \cdot u_t(t_n)} + \cancel{\frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n)} + \frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^4)\Big\}$$
$$- \Big\{\cancel{u(t_n)} - \cancel{k \cdot u_t(t_n)} + \cancel{\frac{k^2}{2}u_{tt}(t_n)} - \frac{k^3}{6}u_{ttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^4)\Big\}\Big) \Big/ 2k$$
$$- \cancel{u_t(t_n)} = \frac{k^2}{6} \cdot u_{ttt} + \mathcal{O}(k^4) = \mathcal{O}(k^2)$$

varför inte $\mathcal{O}(k^3)$?

$\therefore$ NO 2

Uppgift 7 (CD_2)

Visa att har NO 2 (Bortsett begynnelse-villkoret)
$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{k^2} = Mu^n \\ u' = f, \quad , \quad \dfrac{u^2-u^1}{k} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

(**Observation**: Det här (9) påminner om uppgift 2, där $a=\frac{1}{k^2}$, $b=-\frac{2}{k^2}$, $c=\frac{1}{k^2}$)

$$N(k) = \frac{u(t_n+k) - 2u(t_n) + u(t_n-k)}{k^2} - \overbrace{u_{tt}(t_n)}^{\overset{(6)}{=} M u(t_n)} \qquad (**)$$

$$u(t_n \pm k) = u(t_n) \pm k \cdot u_t(t_n) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(t_n) \pm \frac{k^3}{6} u_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24} u_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^5) \qquad (*)$$

Instopp av (*) i (**)

$$N(k) = \Big(\Big\{ \cancel{u(t_n)} + \cancel{k \cdot u_t(t_n)} + \frac{k^2}{2} \cancel{u_{tt}(t_n)} + \cancel{\frac{k^3}{6} u_{ttt}(t_n)} + \frac{k^4}{24} u_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^5) \Big\}$$

$$- 2 \cancel{u(t_n)}$$

$$\Big\{ \cancel{u(t_n)} - \cancel{k \cdot u_t(t_n)} + \frac{k^2}{2} u_{tt}(t_n) - \cancel{\frac{k^3}{6} u_{ttt}(t_n)} + \frac{k^4}{24} u_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^5) \Big\} \Big) \Big/ k^2$$

$$- \cancel{u_{tt}(t_n)} = \frac{k^2}{12} \cdot u_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^4)$$

varför inte $\mathcal{O}(k^3)$?

$\therefore$ NO 2

Kan vi från $N(k)$ ta fram ett modifierat HL som ger NO 4?

Utgå från (6): $u_{tt} = Mu \Rightarrow u_{tttt} = M u_{tt} \overset{(6)}{=} M \cdot M \cdot u$

dvs $N(k) = \frac{k^2}{12} u_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^4) = \frac{k^2}{12} M^2 \cdot u(t_n) + \mathcal{O}(k^4)$

$$\therefore \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{k^2} = M u^n + \frac{k^2}{12} \cdot M^2 u^n = M \cdot \left(1 + \frac{k^2}{12} \cdot M\right) u^n \qquad (10)$$

har NO 4.

(Dock måste vi förbättra NO för begynnelsevillkoret!)

Uppgift 8

Visa att har NO 2

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3}{2}u^{n+1} - 2u^{n} + \frac{1}{2}u^{n-1}}{k} = F(t_{n+1}, u^{n+1}) \\ u' = f \end{cases} \quad (11)$$

Tips: studera uppgift 3

Är denna metod (11) Explicit eller Implicit?
(I litteraturen kallas (10) BDF2)

Uppgift 9

En numerisk metod till (5) skrivs:

$$\begin{cases} \dfrac{a \cdot u^{n+1} - a \cdot u^{n-1}}{k} = b \cdot F(t_{n+1}, u^{n+1}) + F(t_n, u^n) + b \cdot F(t_{n-1}, u^{n-1}) \\ u' = f \end{cases} \quad (12)$$

Bestäm a, b så att (12) har NO 4.
Är detta en Implicit eller explicit metod?