Logik och bevisteknik 2020-04-09
Svar/lösningsförslag

1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi \leftrightarrow (\varphi\wedge\chi)}{(\varphi\wedge\chi)\to\psi}(\leftrightarrow E) \qquad \dfrac{\cancel{\varphi}^1 \qquad \chi}{\varphi\wedge\chi}(\wedge I)}{\psi}(\to E)}{\varphi\to\psi}(\to I)^1$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^2 \qquad \varphi\to(\psi\leftrightarrow\neg\chi)}{\psi\leftrightarrow\neg\chi}(\to E)}{\psi\to\neg\chi}(\leftrightarrow E) \qquad \cancel{\psi}^1}{\neg\chi}(\to E) \qquad \chi}{\bot}(\neg E)}{\neg\psi}(\neg I)^1}{\varphi\to\neg\psi}(\to I)^2$$

2. Vi undersöker sanningsvärdestabellen för formeln:

p	q	r	$(p\to q)\to(q\wedge(p\vee r))$	formel som beskriver tilldelningen
s	s	s	s	
s	s	f	s	
f	s	s	s	
s	f	s	s	
f	f	s	f	$\neg p\wedge\neg q\wedge r$
s	f	f	s	
f	s	f	f	$\neg p\wedge q\wedge\neg r$
f	f	f	f	$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$

För att få en KNF tar vi konjunktionen av negationerna av formlerna i kolumnen längst till höger (som beskriver tilldelningarna där formeln blir falsk):

$(p \to q) \to (q \wedge (p \vee r))$ eq

$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge$
$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ eq

$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \vee$
$(p \vee q \vee r)$ där den sista formeln är en KNF.

3. $q \vee (p \wedge r)$ är en logisk konsekvens av $(p \to \neg q) \to (p \wedge r)$, men $(p \to \neg q) \to (p \wedge r)$ är <u>inte</u> en logisk konsekvens av $q \vee (p \wedge r)$. Detta kan inses tex. med sanningsvärdestabell vilken jag överlåter åt läsaren att göra.

4. (a) $\forall x(S(x) \to (T(x) \vee A(x)))$

eller $\neg \exists x(S(x) \wedge \neg T(x) \wedge \neg A(x))$.

(b) $\neg \exists x(S(x) \wedge T(x) \wedge A(x))$

eller $\forall x(S(x) \to \neg(T(x) \wedge A(x)))$.

(c) $\forall x(A(x) \to \exists y(T(y) \wedge M(x,y)))$

eller $\forall x \exists y(A(x) \to (T(y) \wedge M(x,y)))$

5. (a) Ett motexempel till

$\{\forall x(P(x) \to \neg Q(x)), \exists x Q(x)\} \models \exists x P(x)$

ges av strukturen

$\mathcal{A} = \langle A;\,;\,; P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$ där $A = \{0\}$,

$P^{\mathcal{A}} = \emptyset$ och $Q^{\mathcal{A}} = \{0\}$, som gör antagandena sanna men slutsatsen falsk. Därför stämmer inte ovanstående semantiska sekvent och enligt sundhetssatsen stämmer inte heller sekventen i uppgiften.

(b) Sekventen stämmer och detta kan inses genom att visa att varje modell av antagandena är en modell av slutsatsen och sedan använda adekvathetssatsen.

Alternativt så kan man ange en härledning i naturlig deduktion, vilket jag gör.

$$\dfrac{\exists x\, Q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x\, P(x)}^{1}}{P(y)}(\forall E) \quad \dfrac{\forall x\,(P(x)\to\neg Q(x))}{P(y)\to\neg Q(y)}(\forall E)}{\neg Q(y)}(\to E) \qquad \cancel{Q(y)}^{2}}{\bot}(\neg E)}{\neg\forall x\, P(x)}(\neg I)^{1}}{\neg\forall x\, P(x)}(\exists E)^{2}$$

6. $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall x \exists y Q(x,y)$ eq

$\exists x \forall y R(x,y) \to \forall u \exists v Q(u,v)$ eq

$\neg \exists x \forall y R(x,y) \vee \forall u \exists v Q(u,v)$ eq

$\forall x \neg \forall y R(x,y) \vee \forall u \exists v Q(u,v)$ eq

$\forall x \exists y \neg R(x,y) \vee \forall u \exists v Q(u,v)$ eq

$\forall x (\exists y \neg R(x,y) \vee \forall u \exists v Q(u,v))$ eq

$\forall x \exists y (\neg R(x,y) \vee \forall u \exists v Q(u,v))$ eq

$\forall x \exists y \forall u (\neg R(x,y) \vee \exists v Q(u,v))$ eq

$\forall x \exists y \forall u \exists v (\neg R(x,y) \vee Q(u,v))$

där den sista är en prenex normalform.

Obs! Variabelbytet till u och v är nödvändigt för att de fyra sista stegen ska vara giltiga.

7. Sekventerna i (a) och (b) är felaktiga vilket jag visar genom att hänvisa till sundhetssatsen och visa att $\{\alpha, \gamma\} \vDash \delta$ och $\{\alpha, \gamma\} \vDash \neg\delta$ är <u>felaktiga</u>.

<u>Motexempel</u> till $\{\alpha, \gamma\} \vDash \delta$:

$\mathcal{A} = \langle A;;; P^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ där $A = \{a, b\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{a\}$ och $R^{\mathcal{A}} = \{(a, b)\}$.

<u>Motexempel</u> till $\{\alpha, \gamma\} \vDash \neg\delta$:

$\mathcal{B} = \langle B;;; P^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}} \rangle$ där $B = \{a, b\}$, $P^{\mathcal{B}} = \{a\}$ och $R^{\mathcal{B}} = \{(a, b), (b, a)\}$.

Sekventen i (c) stämmer, vilket kanske enklast inses genom att visa att varje modell av $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ är en modell av $\neg\delta$. Men eftersom också en härledning i naturlig deduktion ska ges så gör jag det direkt.

Härledning av $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vdash \neg\delta$:

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{R(u,v)}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))}{\forall y (R(u,y) \to (P(u) \land \neg P(y)))}(\forall E)}{R(u,v) \to (P(u) \land \neg P(v))}(\forall E)}{P(u) \land \neg P(v)}(\to E)}{}(\land E)$$

$$\dfrac{\exists x P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P(z)}^{4} \qquad \dfrac{\forall x (P(x) \to \exists y R(x,y))}{P(z) \to \exists y R(z,y)}(\forall E)}{\exists y R(z,y)}(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{R(z,u)}^{2} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))}{\forall y (R(z,y) \to (P(z) \land \neg P(y)))}(\forall E)}{R(z,u) \to (P(z) \land \neg P(u))}(\forall E)}{P(z) \land \neg P(u)}(\to E)}{\neg P(u)}(\land E) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x \exists y R(x,y)}^{3}}{\exists y R(u,y)}(\forall E) \qquad P(u)}{P(u)}(\exists E)^{1}}{\bot}(\neg E)}{\bot}(\exists E)^{2}}{\neg \forall x \exists y R(x,y)}(\neg I)^{3}}{\neg \forall x \exists y R(x,y)}(\exists E)^{4}$$

8. Satsen

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall y\,(y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3 \vee y = x_4)$$

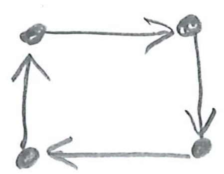
uttrycker att varje modell av T har <u>högst 4 element</u> i sin domän.

Låt oss visuellt tänka oss att $R(x,y)$ uttrycker att "det finns en pil från x till y".

Då säger $\forall x \forall y\,(R(x,y) \to \neg R(y,x))$ att om det finns en pil från x till y så finns ingen pil från y till x.

Satsen $\forall x \exists y\,(R(x,y) \wedge \forall z\,(R(x,z) \to y = z))$ uttrycker att för varje x finns exakt en pil <u>från</u> x. Satsen $\forall x \exists y\,(R(y,x) \to \exists z\,(R(z,x) \to y = z))$ uttrycker att för varje x finns exakt en pil <u>till</u> x.

Från detta följer att varje modell av T ser ut som en cykel av pilar av längd 3 eller 4, dvs som

 eller 

(Strukturerna  och  uppfyller <u>inte</u> det andra antagandet som beskrivs ovan.)

Mer formellt, om $\mathcal{M} \models T$ så måste $M = \{a,b,c\}$ och $R^{\mathcal{M}} = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ <u>eller</u> $M = \{a,b,c,d\}$ och

$R^{\mathcal{M}} = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$ för ett godtyckligt val av olika a,b,c,d.

9. För att vi ska kunna konstruera en formel som beskrivs i uppgiften räcker det att anta att σ innehåller minst två satsvariabler. Enligt sanningsvärdestabellen för '$\mapsto$' så gäller för alla formler φ och ψ att

(*) $\varphi \mapsto \psi$ eq ψ.

Påstående Om φ är uppbyggd av endast '$\neg$' och '$\mapsto$' och φ är satisfierbar men inte en tautologi så finns $p \in \sigma$ så att φ eq p eller φ eq $\neg p$.

Bevis, med induktion över formlers uppbyggnad.

Basfall: Antag att φ är atomär, dvs att $\varphi = p$ för något $p \in \sigma$. Då gäller förstås φ eq p.

Induktivt steg:

Fallet '$\neg$': Antag att φ eq p eller φ eq $\neg p$ där $p \in \sigma$. Då gäller $\neg\varphi$ eq $\neg p$ eller $\neg\varphi$ eq p.

<u>Fallet '$\mapsto$'</u>: Antag att ψ eq p eller ψ eq $\neg p$ där $p \in \sigma$. Enligt (*) får vi

$\varphi \mapsto \psi$ eq ψ eq p eller

$\varphi \mapsto \psi$ eq ψ eq $\neg p$.

Detta avslutar beviset av påståendet.

Låt nu φ vara $p \wedge q$ där $p, q \in \sigma$ och $p \neq q$. Då är φ <u>inte</u> ekvivalent med någon formel r eller $\neg r$ där $r \in \sigma$. Enligt påståendet så finns ingen formel som är ekvivalent med φ och som endast är uppbyggd med '$\neg$' och/eller '$\mapsto$'.