Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Beräkningsvetenskap

Tentamen i Beräkningsvetenskap I/KF, 5.0 hp, 2018-05-29

Skrivtid: $14^{00} - 17^{00}$ (OBS! *Tre* timmars skrivtid!)
Hjälpmedel: Bifogat formelblad och miniräknare.

För att få godkänt på uppgifterna krävs fullständiga räkningar och utförliga resonemang samt motivering till alla svar.

Kursmål (förkortade), hur de täcks i uppgifterna och maximalt betyg (med reservation för modifieringar). För godkänt krävs att varje mål har minst en godkäntmarkering och att något mål har minst två godkäntmarkeringar.

Fråga nr	Nyckelbegrepp	Algoritmer	Analys	Programmering
1		3	3	
2		3		
3	3,3			
4		3	3	
5				3,3
6	4			
7	4, 5			

Del A

1. Den ickelinjära ekvationen $e^{2x} = 3(x+1)$ har en lösning mellan 0.7 och 1.

   (a) Hitta denna lösning med intervallhalveringsmetoden (bisektionsmetoden). Använd startintervallet [0.7, 1] och iterera tills felet är mindre än 0.05.

   (b) Hur många iterationer skulle krävas för att nå 12 decimalers noggrannhet, dvs ett absolut fel mindre än $0.5 \cdot 10^{-12}$? Du skall besvara frågan utan att utföra några ytterligare iterationer.

2. Följande temperaturer uppmättes under kvällen den 22 maj:

Klockslag (t)	16.00	18.00	22.00	24.00
Temperatur,°C (T)	23.4	21.9	18.0	16.9

   Minsta kvadratanpassa ett förstagradspolynom till samtliga mätdata och använd det för att uppskatta vad temperaturen var kl 23.00. Använd ansatsen $T(t) = a + b(t-20)$.

3. Nedan följer ett antal påståenden. Använd nyckelbegreppen därunder, och ange det begrepp som när det ersätter symbolen $\heartsuit$ gör påståendet så korrekt som möjligt. Samma nyckelbegrepp får, men behöver inte, förekomma flera gånger.

   Påståenden:

   (1) Newton–Raphsons metod är ett exempel på en $\heartsuit$.
   (2) Bisektionsmetoden (intervallhalvering) har $\heartsuit$ 1.
   (3) Vid addition av två mycket stora positiva flyttal finns det risk för $\heartsuit$.
   (4) Simpsons metod har högre $\heartsuit$ än trapetsmetoden.
   (5) $\heartsuit$ fenomen innebär att interpolation med polynom av hög grad leder till kraftiga svängningar mellan interpolationspunkterna.
   (6) Vid subtraktion av två jämnstora flyttal uppstår $\heartsuit$.

   Nyckelbegrepp:

(a) adaptiv metod	(b) numerisk kvadratur	(c) kancellation
(d) Richardsons	(e) konvergenshastighet	(f) noggrannhetsordning
(g) diskretiseringsfel	(h) konvergensordning	(i) overflow
(j) iterativ metod	(k) underflow	(l) Runges

   För att få en godkäntmarkering krävs tre korrekta svar.

4. Lotta åker bil i 24 minuter. Den tillryggalagda sträckan ges av integralen

   $$\int_0^{0.4} v(t)dt$$

   där $v(t)$ är hastigheten (km/h) efter t timmar. Hennes hastighet, uppmätt var sjätte minut, är given av

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$\tilde{v}(t)$	35	40	55	55	45

   där $\tilde{v}(t)$ är den uppmätta hastigheten given med en noggrannhet $|\tilde{v}(t) - v(t)| \leq 0.5$.

   (a) Uppskatta hur långt Lotta har kommit efter 24 minuter med hjälp av Simpsons sammansatta formel. Använd steglängden 0.1 h.

   (b) Uppskatta diskretiseringsfelet med hjälp av den korrektionsterm som används vid Richardsonextrapolation. Uppskatta också funktionsfelet. Vilken steglängd h och vilken noggrannhet i funktionsevalueringarna skulle krävas för att åstadkomma ett *totalt fel* mindre än 10^{-2}?

5. (a) Nedan följer en Matlabfunktion som utför någon beräkning:

```
function d = foo(x, n)
  i = 1;
  d = 3;
  while (i < n)
    if (x < i)
      i = n;
      d = d+x;
    else
      i = i+1;
      d = d-1;
    end
  end
end
```

Torrexekvera funktionen då den anropas med följande kommando

```
>> y = foo(3,2)
```

Med torrexekvering menas att du utför instruktionerna i funktionen för hand och skriver ned hur variablernas värden förändras.

(b) Om vi vill lösa ekvationen från uppgift 1 i Matlab kan vi använda Matlabkommandot `fzero(fun,interval)` där `fun` är en Matlabfunktion och `interval` är en vektor av två element med intervallgränserna som innesluter lösningen. Skriv de Matlabkommandon och funktioner som krävs för att lösa ekvationen $e^{2x} = 3(x + 1)$ som har en lösning mellan 0.7 och 1.

Del B

6. Du söker ett styckvis kvadratiskt polynom

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, & -1 \le x \le 0 \\ p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

som interpolerar följande tabellvärden

x	-1	0	1
y	1	0	2

Funktionen $p(x)$ skall dessutom ha kontinuerlig derivata i $x = 0$ samt uppfylla $p'(1) = 0$. Ställ upp det ekvationssystem vars lösning ger koefficienterna för $p(x)$. Lös systemet och skriv upp det styckvisa polynomet.

Tips: Verifiera i efterhand att din funktion uppfyller villkoren för interpolation och villkoren på derivatan.

7. Du har fått till uppgift att beräkna en kropps volym där volymen ges av integralen $V = \int_0^{0.2} \pi \cdot r(x)^2 dx$ men vi har inte $r(x)$ given utan r beror kontinuerligt av x enligt formeln $r^2 \sin(2\pi(x + 0.1)r) = 1$. Vidare har man givet att $r = 1.2061617$ för $x = 0$. Beskriv detaljerat med de algoritmer som ingår i kursen hur man kan lösa problemet. Beskriv också hur man kan göra en feluppskattning av resultatet.