UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

TENTAMEN
Logik och bevisteknik
2021-08-17

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: pennor, radergummi, linjal, papper (det sistnämnda tillhandahålles). ***Alla svar (utom till uppgift 4) måste motiveras på lämpligt sätt. Skriv svaren på endast en sida av varje inlämnat pappersark.*** Om man har fått minst 10, respektive minst 15, poäng på duggan som ägde rum i april 2021 så får man uppgifterna 1–2, respektive 1–3, tillgodoräknade (dvs man får full poäng på dem utan att behöva lösa dem). Maximalpoängen är 40. För att få betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 20, 26 respektive 32 poäng.

1. Vi antar att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. Låt φ och ψ beteckna två formler enligt följande (3p)

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad (r \wedge p) \vee (r \wedge \neg(p \vee q)) \\ \psi: &\quad (r \to (p \to q)) \to (\neg p \wedge \neg(r \to q)) \end{aligned}$$

(a) Är φ och ψ ekvivalenta?
(b) Är någon av formlerna en logisk konsekvens av den andra?

2. Finn en DNF (disjunktiv normalform) som är ekvivalent med ψ i uppgift 1. (2p)

3. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (4p)
(a) $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.
(b) $\{\varphi \to (\psi \vee \chi),\ \neg\chi\} \vdash \varphi \to \psi$.

4. Låt D, I, R och S vara relationssymboler där de tre första är 1-ställiga och den sista är 2-ställig. Vi tänker oss att $D(x)$, $I(x)$ och $R(x)$ uttrycker "x är ett däggdjur", "x är en insekt" och "x är ett ryggraddsdjur", respektive. Vi tänker oss också att $S(x, y)$ uttrycker att "x är större än y". Översätt följande påståenden till formler i första ordningens logik med dessa symboler. (6p)
(a) Alla däggdjur är ryggradsdjur.
(b) Ingen insekt är ett ryggradsdjur.
(c) Det finns ett ryggradsdjur som är större än varje insekt.

Anmärkning: I uppgifterna 5–7 så används signaturen $\sigma = \langle c;\ ; P, Q, R\rangle$ med ställigheter $\langle 0;\ ; 1, 1, 2\rangle$.

5. Låt $\mathcal{A} = \langle A;\ ;\ ; P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}\rangle$ vara en σ-struktur där $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{2, 3\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{3, 4\}$ och $R^{\mathcal{A}} = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 5), (3, 4)\}$. För var och en av satserna nedan avgör om den är sann i $\mathcal{A}$ (och glöm inte att motivera svaren)? (4p)
(a) $\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$.
(b) $\forall x(P(x) \to \exists y R(y, x))$.

Fortsätter på nästa sida

6. För var och en av följande semantiska sekventer, ange om den stämmer eller inte och motivera svaret på lämpligt sätt. (6p)

(a) $\{\forall x(P(x) \to R(x,c))\} \models R(c,c)$.

(b) $\{\exists x(P(x) \to R(x,c)),\ P(c)\} \models R(c,c)$.

(c) $\{\forall x R(x,c),\ \forall x \exists y R(x,y)\} \models \exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$.

7. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att båda sekventerna nedan stämmer. (6p)

(a) $\{\exists x \forall y (P(x) \wedge Q(y))\} \vdash \exists x P(x) \wedge \forall y Q(y)$.

(b) $\{\forall x \exists y (R(x,y) \to \neg R(y,x)),\ \exists x R(x,x)\} \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$.

8. Låt σ_2 vara en satslogisk signatur och låt $\sigma_3 = \langle\ ; f; \leq\rangle$ vara en första ordningens signatur med ställigheter $\langle\ ; 2; 2\rangle$. Låt vidare $\mathcal{M} = \langle M;\ ; f^{\mathcal{M}}; \leq^{\mathcal{M}}\rangle$ där $M = LP(\sigma_2)$ (så $\mathcal{M}$:s universum/domän är mängden av alla satslogiska formler i $LP(\sigma_2)$), $f^{\mathcal{M}}(\varphi,\psi) = \varphi \wedge \psi$ för alla $\varphi, \psi \in LP(\sigma)$ och $\leq^{\mathcal{M}} = \{(\varphi,\psi) \in M^2 :\ \varphi \to \psi$ är en tautologi$\}$. Vi skriver som vanligt '$x \leq y$' i stället för '$\leq(x,y)$'. (6p)

(a) Stämmer följande påståenden? Motivera svaren.

  (i) $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z \big((x \leq y \wedge y \leq z) \ \to\ x \leq z\big)$.

  (ii) $\mathcal{M} \models \forall x \forall z \big((x \leq y \wedge y \leq x) \ \to\ x = y\big)$.

(b) Konstruera en σ_3-formel $\chi(x)$ sådan att för varje $\varphi \in M$, $\mathcal{M} \models \chi(\varphi)$ om och endast om φ är osatisfierbar.

(c) Konstruera en σ_3-formel $\theta(x,y)$ sådan att för alla $\varphi, \psi \in M$, $\mathcal{M} \models \theta(\varphi,\psi)$ om och endast om ψ är ekvivalent med $\neg\varphi$.

9. Låt $\downarrow$ vara ett nytt konnektiv och vi tolkar $\varphi \downarrow \psi$ som sann om och endast om både φ och ψ är falska. Låt σ vara en satslogisk signatur (vilken som helst). Visa att för varje formel φ i $LP(\sigma)$ så finns en formel ψ som är ekvivalent med φ och sådan att inget annat konnektiv än (möjligen) $\downarrow$ förekommer i ψ. (3p)

Lycka till!