Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS M
2012-12-10

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x(e^x-e^{-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2+\ldots)-(1-x^2+\ldots)}{x[(1+x+\ldots)-(1-x+\ldots)]}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\ldots}{2x^2+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\ldots}{2+\ldots}=1.$$

Även en beräkning som stöder sig på en metod uppkallad efter en viss fransk markis godtas.

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $0\le x<\infty$, $f(0)=0=\lim_{x\to\infty}f(x)$ och det finns en punkt x där $f(x)>0$ så har funktionen ett största värde på det inre av intervallet enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0)=0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar, dvs i en singulär punkt.
Några singulära punkter finns dock inte på intervallet.

$$f'(x)=\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}.$$

Den enda kritiska punkten på intervallet är $x_0=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$ Funktionens största värde är därför lika med $\dfrac{\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}}{1+\frac{1}{3}}$.

3.
$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{1+x^4}=\left[x^2=u,\,2x\,dx=du\right]=\int_0^\infty\frac{1}{2}\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}u\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

4. Definitionsområdet är $x\neq 0$. Funktionen har det dubbla nollstället $x=1$ och det enkla nollstället $x=-1$.

Vertikal asymptot är $x=0$ där både $\lim_{x\to 0+}y=+\infty$ och $\lim_{x\to 0-}y=+\infty$.

Vidare är $\lim_{x\to\pm\infty}(y-(x-1))=0\mp$ och det följer att $y=x-1$ är en sned asymptot och kurvan skär denna i $x=1$. Kurvan ligger under sin sneda asymptot för $x>1$ och har inflextionspunkt i $x=3$. $f'(x)$ har nollstället $x=1$ som ger en lokal minimipunkt, t ex enligt derivatans teckenväxling. Kurvan tangerar x-axeln i $x=1$.

5. **Partiell integration**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot x\,dx = -\cos x \cdot x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\,dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

6. Den homogena ekvationen $y'' + y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ med rötterna $r_1 = i$ och $r_2 = -i$ så lösningarna till homogena ekvationen är

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' + y = 1$ ansättes $y_P = A$. Derivering och insättning ger $A = 1$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1.$$

Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ger $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ så lösningen är $y = 1$.

Ännu enklare lösning fås genom att utnyttja att begynnelsevllkoren bestämmer en entydig lösning. Eftersom vi genast kan konstatera att $y = 1$ är en lösning som satisfierar ekvationen och begynnelsevillkoren så är därmed $y = 1$ den sökta lösningen.

7. Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dy}{1+y^2} = xdx.$$

Integration ger $\tan^{-1} y = \frac{1}{2}x^2 + C$, dvs $y = \tan(\frac{1}{2}x^2 + C)$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $C = 0$ så lösningen blir

$$y = \tan \frac{1}{2}x^2.$$

8. Serien är geometrisk med kvoten $r = -\frac{1}{x}$ och är därför konvergent då $-1 < \frac{1}{x} < 1$, dvs då $|x| > 1$ och har summan $\frac{1}{1-(-\frac{1}{x})} = \frac{x}{1+x}$.

9. Då konvergensradien är lika med 2 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 2$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 2$. Då $x = 2$ har vi serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ som divergerar (p-serie). För $x = -2$ har vi den alternerande serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ som är villkorligt konvergent enligt alternerande serietestet.

10. Då $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$ är $f(x)$ kontinuerlig på det slutna intervallet $0 \leq x \leq 1$ och har därför ett absolut maximum på det inre av detta intervall. Då $f(0) = f(1) = 0$ och $f(x)$ är deriverbar finns detta maximum i en kritisk punkt. Vi finner $f'(x) = -x(2\ln x + 1)$ så derivatans nollställe $x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$ ger det största värdet lika med $\frac{1}{2e}$.

PROBLEM

1. Produktregeln för derivering ger

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^2 + 2(x-1)^2(x+1) = 2(x-1)(x+1)[(x+1)+(x-1)] = 4x(x-1)(x+1) =$$
$$= 4x(x^2-1).$$

Ett annat sätt är att observera att

$$f(x) = [(x-1)(x+1)]^2 = (x^2-1)^2$$

och då följer direkt att

$$f'(x) = 4x(x^2-1).$$

Tangenterna genom $(1,0)$ tangerar kurvan i $P = (a, (a^2-1)^2)$ och har lutningen

$$\frac{(a^2-1)^2}{a-1}.$$

Enligt uttrycket för derivatan kan vi också skriva lutningen som

$$4a(a^2-1).$$

Ekvationen

$$\frac{(a^2-1)^2}{a-1} = 4a(a^2-1)$$

har dels lösningen $a^2-1=0$ och även lösningen $a^2-1 = 4a(a-1)$. Den första ekvationen har lösningarna $a = \pm 1$ och den andra har lösningarna $a = 1$ och $a = \frac{1}{3}$. Lösningarna $a = \pm 1$ svarar mot att x-axeln tangerar kurvan i $x = \pm 1$, vilket beror på att vi har dubbla nollställen till kurvan där. Att vi dessutom har en tangeringspunkt på kurvan med x-koordinaten $\frac{1}{3}$ beror på att kurvan har en inflexionspunkt med x-koordinaten$=\frac{1}{\sqrt{3}}$ som ligger mellan $(\frac{1}{3}, 0)$ och $(1,0)$.

2. a) Eftersom $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$ för alla $x \neq 0$ följer att

$$|x^2 \sin\frac{1}{x}| = x^2|\sin\frac{1}{x}| \leq x^2 \to 0$$

då $x \to 0$. Därav följer att $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$. Av detta följer att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, dvs $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$.

b) Med samma argument som i a) följer att

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

c) Genom att Maclaurinutveckla

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3!}\frac{1}{x^3} + \ldots$$

finner vi att

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2 \sin\frac{1}{x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty}[(x - \frac{1}{3!}\frac{1}{x} + \ldots) - x] =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[-\frac{1}{3!}\frac{1}{x} + \ldots] = 0,$$

vilket betyder att $y = x$ är en sned asymptot till $x^2 \sin\frac{1}{x}$ då $x \to \pm\infty$.

EXTRA PROBLEM

På omtentorna efter påsk och i augusti förekommer inga extra problem. Vi ger därför inga lösningar till dessa förrän kursen återkommer till höstterminen.