Tentamensskrivning i Reell analys, MMG600.
Tid: 2010-01-14, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga (språklexikon är tillåtet)
Telefonvakt: 0703-088304

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. a) Definiera begreppen *uppräknelig mängd* och *överuppräknelig mängd*.
   b) Visa att $\mathbb{R}$ är överuppräknelig. (3p)

2. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$.
   a) Definiera begreppen *inre punkt i* och *hopningspunkt till* E.
   b) Definiera begreppen *öppen* respektive *sluten mängd* i M.
   c) Låt $M = \mathcal{C}([0,1])$, mängden av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0,1]$ försedd med supremumnormen, och låt
   $$E = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(x) \geq 0 \text{ för alla } x \in [0,1]\}.$$
   Visa att E är sluten. (4p)

3. a) Definiera begreppen *kompakt mängd* och *Cauchyföljd*.
   b) Låt X vara ett kompakt metriskt rum. Visa att varje Cauchyföljd i X har en konvergent delföljd. (3p)

4. a) Definiera begreppet *likformig konvergens*.
   b) Undersök om funktionsföljden
   $$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$
   konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$. (3p)

5. Låt $M = \{(\sin xy, \cos xy, \tan xy, x + y) \in \mathbb{R}^4\,;\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Avgör om M är kompakt och/eller sammanhängande i $\mathbb{R}^4$. (3p)

6. Visa att ekvationssystemet
   $$\begin{cases} x \ln y + uv &= zy + 6 \\ x^2 v + uz &= vy + 9 \end{cases}$$
   definierar (u, v) som en funktion g av (x, y, z) i en omgivning av punkten $(u, v, x, y, z) = (2, 3, 2, 1, 0)$. Bestäm den linjära approximationen av g vid $(2, 1, 0)$. (3p)

7. Låt k vara ett reellt tal och definera $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ enligt

$$Tf(x) = k\int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy \ .$$

Avgör för vilka värden på k som T är en kontraktion på $\mathcal{C}([0,1])$. (3p)

8. Låt A och B vara täta delmängder i ett metriskt rum M, och antag att minst en av mängderna är öppen. Visa att då är även $A \cap B$ tät i M. Ge exempel som visar att man inte kan ta bort antagandet att någon av mängderna ska vara öppen. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger