Övningar 8. Svar/lösningar till de flesta uppgifterna.

När jag anger ett motexempel (dvs. motmodell) så beskriver jag endast tolkningen av de symboler som har betydelse för motexemplet. Dvs. övriga symboler kan tolkas hur som helst och vi har ändå ett motexempel. I de fall då härledning ges, så följer från sundhetssatsen att påståendet om '$\models$' stämmer.

1. Motexempel:

$$\mathcal{M} = \langle \{1,2\};\,;\, f^{\mathcal{M}};\, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$$

där $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ och $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

2.

$$\dfrac{\exists x(P(x)\vee Q(x)) \qquad \dfrac{\cancel{P(y)\vee Q(y)}^{\,2} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{P(y)}^{\,1}}{\exists x P(x)}(\exists I)}{\exists x P(x)\vee \exists x Q(x)}(\vee I) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{Q(y)}^{\,1}}{\exists x Q(x)}(\exists I)}{\exists x P(x)\vee \exists x Q(x)}(\vee I)}{\exists x P(x)\vee \exists x Q(x)}(\vee E)^1}{\exists x P(x)\vee \exists x Q(x)}(\exists E)^2$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)\wedge \forall x Q(x)}{\forall x P(x)}(\wedge E)}{P(y)}(\forall E) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x P(x)\wedge \forall x Q(x)}{\forall x Q(x)}(\wedge E)}{Q(y)}(\forall E)}{P(y)\wedge Q(y)}(\wedge I)}{\forall x(P(x)\wedge Q(x))}(\forall I)$$

4. Strukturen i lösningen till uppg. 1 funkar som motexempel.

5.

$$\dfrac{\exists x P(f(x)) \qquad \dfrac{P(f(y))}{\exists x P(x)}\,(\exists I)}{\exists x P(x)}\,(\exists E)$$

6. Motexempel:

$\mathcal{M} = \langle \{1, 2\} ; ; f^{\mathcal{M}} ; P^{\mathcal{M}} ; Q^{\mathcal{M}} ; R^{\mathcal{M}} \rangle$

där $f^{\mathcal{M}}(1) = 1$, $f^{\mathcal{M}}(2) = 1$ och $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$.

7. Strukturen från lösn. till uppg. 1 funkar som motexempel.

8.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)}{P(f(y))}\,(\forall E)}{\forall x P(f(x))}\,(\forall I)$$

9. Motexempel:

$\mathcal{M} = \langle \{1,2\};\, ;\, f^{\mathcal{M}};\, P^{\mathcal{M}};\, Q^{\mathcal{M}};\, \{(1,1)\} \rangle$,

så $(1,1)$ är det enda ordnade paret som satisfierar R i $\mathcal{M}$.

10. Motexempel:

$\mathcal{M} = \langle \{1,2\};\, ;\, f^{\mathcal{M}};\, P^{\mathcal{M}};\, Q^{\mathcal{M}};\, R^{\mathcal{M}} \rangle$ där $R^{\mathcal{M}} = \{(1,1),(1,2)\}$.

(Notera att $\mathcal{M} \not\models R(2,2)$.)

11. Motexempel:

$\mathcal{M} = \langle \{1,2\};\, ;\, f^{\mathcal{M}};\, P^{\mathcal{M}};\, Q^{\mathcal{M}};\, R^{\mathcal{M}} \rangle$ där $P^{\mathcal{M}} = \{1,2\}$ och $R^{\mathcal{M}} = \{(1,2)\}$.

Då är $\exists x R(x,x)$ falsk i $\mathcal{M}$, och $\forall x P(x)$ är sann i $\mathcal{M}$. Eftersom alla $a \in \{1,2\}$ satisfierar $P(x)$ i $\mathcal{M}$ så följer att $R(x,y) \to P(x)$ satisfieras i $\mathcal{M}$ av varje $(a,b) \in \{1,2\}^2$. Därmed är $\exists y \forall x (R(x,y) \to P(x))$ sann i $\mathcal{M}$.

12. Motexempel:

$\mathcal{M} = \langle \{1,2\} ;\, ; f^{\mathcal{M}} ; P^{\mathcal{M}} ; Q^{\mathcal{M}} ; R^{\mathcal{M}} \rangle$ där

$P^{\mathcal{M}} = \emptyset$ och $R^{\mathcal{M}} = \{(1,1),(2,2)\}$.

Eftersom $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$ så är $\forall x \neg P(x)$ sann i $\mathcal{M}$.
Eftersom $(1,1)$ satisfierar $R(x,x)$ i $\mathcal{M}$ så är $\exists x R(x,x)$ sann (och $\neg \exists x R(x,x)$ falsk) i $\mathcal{M}$. För varje $a \in \{1,2\}$ så välj $b \in \{1,2\}$ så att $b \neq a$, och då gäller

$\mathcal{M} \not\models R(a,b)$ och därmed

$\mathcal{M} \models R(a,b) \to P(a)$.

Det följer att $\forall x \exists y (R(x,y) \to P(x))$ är sann i $\mathcal{M}$.

13. Låt H vara en härledning (utan oavslutade antaganden) med slutsatsen $P(f(y)) \vee \neg P(f(y))$. En sådan kan göras på samma sätt som i satslogiken. Då kan vi konstruera en ny härledning på följande sätt

$$
\dfrac{
\begin{matrix} H \\ P(f(y)) \vee \neg P(f(y)) \end{matrix}
\qquad
\dfrac{\cancel{P(f(y))}^{2}}{\exists x\, P(f(x))}\,(\exists I)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\forall x\,(P(x) \vee P(f(x)))}{P(f(y)) \vee P(f(f(y)))}\,(\forall E)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\cancel{P(f(y))}^{1} \quad \cancel{\neg P(f(y))}^{2}}{\bot}\,(\neg E)}{\exists x\, P(f(x))}\,(RAA)
\qquad
\dfrac{\cancel{P(f(f(y)))}^{1}}{\exists x\, P(f(x))}\,(\exists I)
}{\exists x\, P(f(x))}\,(\vee E)^{1}
}{\exists x\, P(f(x))}\,(\vee E)^{2}
$$

14. Motexempel: (6)

$\mathcal{M} = \langle \{1,2\};\, ;\, f^{\mathcal{M}};\, P^{\mathcal{M}};\, Q^{\mathcal{M}};\, R^{\mathcal{M}} \rangle$ där

$f^{\mathcal{M}}(1) = 2$, $f^{\mathcal{M}}(2) = 1$ och $P^{\mathcal{M}} = \{1,2\}$.

Då är $\exists y \neg P(y)$ falsk i $\mathcal{M}$ och $\forall x (f(x) \neq x)$ är sann i $\mathcal{M}$ (där '$f(x) \neq x$' betyder '$\neg f(x) = x$').

Så slutsatsen $\forall x (f(x) \neq x) \to \exists y \neg P(y)$ är falsk. Eftersom (exempelvis) 1 satisfierar $P(y)$ i $\mathcal{M}$ så följer att 1 satisfierar $\forall x (f(x) = y \to P(y))$ och det följer att $\exists y \forall x (f(x) = y \to P(y))$ är sann i $\mathcal{M}$.

Obs! I alla mina motexempel har det räckt med att ha en domän med bara två element. Så behöver det inte alltid vara.

15. Den stämmer. För om $R(z,y)$ och $R(z,x)$ är satisfierade (i en struktur) så följer från antagandet att $y = f(z)$ och $x = f(z)$, och eftersom '$=$' är transitiv så $x = y$. Jag överlåter dock härledningen i naturlig deduktion som en trevlig (och lite knepig) utmaning.

16. (a) Låt P och Q vara 1-ställiga relationssymboler. I uppg. 3 gav vi en härledning av

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x)).$$

Från denna får man enkelt en härledning för

$$\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \to \forall x (P(x) \wedge Q(x)).$$

Tag φ till att vara denna sats, så $\vdash \varphi$. Men om '$\forall x$' tolkas som '$\exists x$' så gäller $\mathcal{M} \nvDash \varphi$ om $\mathcal{M}$ är strukturen från uppg. 4.

(b) Sundhetssatsen har som specialfall att om φ är en σ-formel och $\vdash_\sigma \varphi$ så $\models_\sigma \varphi$. Men detta gäller inte för vårat val av φ, så sundhetssatsen gäller inte längre.
(Vi kan anta att σ är samma signatur som i uppg. 1–15.)

17. Låt signaturen σ_1 innehålla en konstantsymbol c och en 1-ställig relationsymbol P. Med den modifierade $\exists$-eliminationsregeln får vi härledningen

$$\dfrac{\dfrac{\exists x P(x)}{P(c)}\ (\text{modifierad } \exists E)}{\forall x P(x)}\ (\forall I)$$

så sekventen $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$ är härledbar. Men man kan lätt hitta en σ_1-struktur $\mathcal{M}$ sådan att $\mathcal{M} \models \exists x P(x)$ och $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x)$. (Gör det själv.)
Det följer att $\exists x P(x) \not\models \forall x P(x)$ och därmed fallerar sundhetssatsen om $\exists$-eliminationsregeln modifieras som i uppgiften.

18. (a) Låt $\varphi(x)$ vara $P(x)$ där P är en 1-ställig relationsymbol. Låt $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N};;;P^{\mathcal{N}}\rangle$ där $P^{\mathcal{N}}$ är mängden av alla jämna tal i $\mathbb{N}$. Då gäller $\mathcal{N} \models \exists^{\infty} x P(x) \wedge \exists^{\infty} x \neg P(x)$.

(c) Om '$\exists^{\infty}$' har samma bevisregler som '$\exists$' så är följande en härledning av sekventen $\exists x P(x) \vdash \exists^{\infty} x P(x)$:

$$\dfrac{\exists x P(x) \qquad \dfrac{P(y)}{\exists^{\infty} x P(x)}\,(\exists^{\infty} I)}{\exists^{\infty} x P(x)}\,(\exists E)$$

Om $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N};;;P^{\mathcal{M}}\rangle$ där $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$, så $\mathcal{M} \models \exists x P(x)$ och $\mathcal{M} \not\models \exists^{\infty} x P(x)$ och därmed $\exists x P(x) \not\models \exists^{\infty} x P(x)$, så sundhetssatsen fallerar.