Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Sebastian Pöder

Tentamen
ENVARIABELANALYS M
2014-12-08

SVAR OCH ANVISNINGAR

UPPGIFTER

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-3x^2}}{1-e^{-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-3x^2+\dots)}{1-(1-x^2+\dots)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+\dots}{x^2+\dots} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\dots}{1+\dots} = 3.$$

Även en beräkning som stöder sig på en metod uppkallad efter en viss fransk markis godtas.

Ytterligare en metod är att använda $1-a^3=(1-a)(1+a+a^2)$ för att faktorisera täljaren

$$1-e^{-3x^2} = (1-e^{-x^2})(1+e^{-x^2}+e^{-2x^2})$$

och därefter förkorta. Gränsvärdet blir då det enkla $\lim_{x\to 0}(1+e^{-x^2}+e^{-2x^2}) = 3$.

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $1 \le x \le e$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0)=0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar, dvs i en singulär punkt, eller i någon av intervallets ändpunkter. Några singulära punkter finns inte i detta fall.

$$f'(x) = \frac{x\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x} - \ln^2 x\cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x).$$

De kritiska punkterna är alltså $x_0=1$, som är intervallets ena ändpunkt, samt $x_0=e^2$ som dock ligger utanför intervallet. Funktionens största värde antas därför i någon av ändpunkterna. Eftersom $f(1)=0$ och $f(e)=\dfrac{1}{e}$ är alltså $\dfrac{1}{e}$ det största värdet.

3.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left[x^2=u,\ 2x\,dx=du\right] = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}u\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4. Definitionsområdet är $x \neq 1$. Eftersom täljaren är $(x+1)^2$ har funktionen det dubbla nollstället $x = -1$.

   Vertikal asymptot är $x = 1$ där $\lim_{x \to 1+} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 1-} y = -\infty$.

   Vidare är $\lim_{x \to \pm\infty} (y - (x+3)) = 0\pm$ och det följer att $y = x + 3$ är en sned asymptot.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\left(1 - \frac{2}{x-1}\right) = \frac{(x+1)(x-3)}{x-1}$$

   har nollstället $x = -1$, som ger en lokal maximipunkt, samt nollstället $x = 3$, som ger en lokal minimipunkt, t ex enligt derivatans teckenväxling. Kurvan tangerar x-axeln i $x = -1$.

5. **Partiell integration**

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx = \ln x \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \ln x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx = 1 - 2 \int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx.$$

   Detta ger att $3 \int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx = 1$, dvs

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx = \frac{1}{3}.$$

Substitution

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx = \left[\ln x = u, \ \frac{1}{x} \, dx = du \right] = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

6. Den homogena ekvationen $y'' - y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$ med rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = -1$ så lösningarna till homogena ekvationen är

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

   För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' - y = x$ ansättes $y_P = Ax + B$. Derivering och insättning ger $A = -1$, $B = 0$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x.$$

   Man finner slutligen att villkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ ger $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$ så lösningen är

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x = \sinh x - x.$$

7. **Integrerande faktor**

En integrerande faktor är e^{x^3} så ekvationen kan efter multiplikation med denna skrivas

$$\frac{d}{dx}(ye^{x^3}) = 3x^2e^{x^3}.$$

Integration ger $ye^{x^3} = C + e^{x^3}$ så den allmänna lösningen är $y = 1 + Ce^{-x^3}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $C = -1$ så lösningen är $y = 1 - e^{-x^3}$.

Separera

Ekvationen kan separeras om vi skriver den som $y' = 3x^2 - 3x^2y$. Detta ger

$$\frac{dy}{1-y} = 3x^2dx.$$

Integration ger $-\ln(1-y) = C_1 + x^3$, dvs $\ln(1-y) = C_2 - x^3$. Detta ger $1-y = e^{C_2-x^3} = e^{C_2}e^{-x^3} = C_3e^{-x^3}$. Slutligen får vi $y = 1 - C_3e^{-x^3} = 1 + Ce^{-x^3}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $C = -1$ så lösningen blir $y = 1 - e^{-x^3}$.

8. Serien är geometrisk med kvoten $r = -\frac{1}{x^2}$ och är därför konvergent då $-1 < -\frac{1}{x^2} < 1$, dvs då $|x| > 1$ och har summan $\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{x^2})} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

9. Då konvergensradien är lika med 3 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 3$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 3$. Då $x = 3$ har vi serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ som divergerar (p-serie). För $x = -3$ har vi den alternerande serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ som är konvergent enligt alternerande serietestet. Serien är dock endast villkorligt konvergent.

10. Då

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$f(-1) = 2 > 1$ samt då $f(x)$ är kontinuerlig på det öppna intervallet $-\infty < x < \infty$ har funktionen ett absolut maximum enligt en sats i Adams (Adams Gift). Då funktionen saknar singulära punkter finner vi detta största värde i en av de kritiska punkterna $x = 1, x = -1$. Då $f(1) = 0$ och $f(-1) = 2$ är det största värdet lika med 2.

PROBLEM

1. Låt tangeringspunkterna vara $P = (a, (a+1)^3)$ respektive $Q = (b, (b-1)^3)$. Definitionen av en linjes lutning och derivatans betydelse som lutning ger då sambanden

$$\frac{(a+1)^3 - (b-1)^3}{a-b} = 3(a+1)^2 = 3(b-1)^2 \qquad (*)$$

$3(a+1)^2 = 3(b-1)^2$, dvs $(a+1)^2 = (b-1)^2$ ger

$$a + 1 = \pm(b-1) \qquad (**).$$

Insättning av fallet $a+1 = b-1$ i vänstra ledet i (*) ger $0 = 3(a+1)^2 = 3(b-1)^2$, dvs $a = -1, b = 1$ vilket ger att x-axeln är gemensam tangent med tangeringspunkterna $(-1, 0), (1, 0)$.

Det andra fallet i (**), dvs

$$a + 1 = -(b-1) \qquad (***)$$

ger efter insättning i (*)

$$\frac{-(b-1)^3 - (b-1)^3}{a-b} = 3(b-1)^2$$

som efter förkortning med $(b-1)^2$ ger

$$\frac{-2(b-1)}{a-b} = 3 \qquad (****).$$

Men från (***) följer att $a = -b$, som efter insättning i (****) ger $b = -\frac{1}{2}$. Tangeringspunkternas x-koordinater är alltså i det andra fallet $a = \frac{1}{2}$ respektive $b = -\frac{1}{2}$.

2. a) Eftersom $|\cos\frac{1}{x}| \leq 1$ för alla $x \neq 0$ följer att

$$|2x^2(1 - \cos\frac{1}{x})| \leq 2x^2 \cdot 2 \to 0$$

då $x \to 0$. Av detta följer att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, dvs $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$.

b) Med samma argument som i a) följer att

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

c) För värden på $x \neq 0$ kan vi derivera som vanligt och vi finner att

$$f'(x) = 4x(1 - \cos\frac{1}{x}) + 2x^2(-1) \cdot (-\sin\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 4x(1 - \cos\frac{1}{x}) - 2\sin\frac{1}{x}.$$

Då $x \to 0$ kommer första termen att gå mot 0 men $2\sin\frac{1}{x}$ kommer att oscillera mellan -2 och $+2$ så $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existerar inte och därför är inte derivatan kontinuerlig i $x = 0$.

d) Genom att Maclaurinutveckla

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{x^2} + \dots$$

finner vi att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} [1 + \dots] = 1,$$

vilket betyder att $y = 1$ är en horisontell asymptot till $f(x)$ då $x \to \pm\infty$.

e) Den välkända formeln för dubbla vinkeln

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

ger att vi kan skriva vår funktion som

$$f(x) = 4x^2\sin^2\frac{1}{2x}.$$

Vi kan nu använda den elementära olikheten $|\sin\theta| \leq |\theta|$, med likhet om och endast om $\theta = 0$. Denna olikhet återges med bevis i Adams Chapter 2.5, Exercise 62, samt för $\theta > 0$ i Chapter 2.8, EXAMPLE 2. Från denna olikhet följer att vår jämna funktion $f(x)$ uppfyller den i uppgiften angivna olikheten.