2018-08-27

2.

A	B	$(A$	$\to$	$(A\wedge\neg B))$	$\wedge$	$(B$	$\to$	$(B\wedge\neg A))$
1	1	1	0	0	$\boxed{0}$	1	0	0
1	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	1	
0	1		1		$\boxed{1}$	1	1	1
0	0		1		$\boxed{1}$	0	1	

DNF : $(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

eq $(A\wedge\neg B)\vee\neg A$

eq $(A\vee\neg A)\wedge(\neg B\vee\neg A)$ KNF

eq $\neg B\vee\neg A$ Båda DNF och KNF

3. Bevis i nat ded. a) $A\vdash\neg(\neg A\wedge B)$

b) $(A\wedge B)\vee C\vdash(A\vee C)\wedge(B\vee C)$

a)

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad \dfrac{\cancel{\neg A\wedge B}^{\,1}}{\neg A}\,\wedge E}{\bot}\,\neg E}{\neg(\neg A\wedge B)}\,\neg I\,1$$

b)

$$\dfrac{(A\wedge B)\vee C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A\wedge B}^{\,1}}{A}}{A\vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{A\wedge B}^{\,1}}{B}}{B\vee C}}{(A\vee C)\wedge(B\vee C)}\,\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{C}^{\,2}}{A\vee C}\,\vee I \qquad \dfrac{\cancel{C}^{\,2}}{B\vee C}\,\vee I}{(A\vee C)\wedge(B\vee C)}\,\wedge I}{(A\vee C)\wedge(B\vee C)}\,\vee E\,1\,2$$

④ Avgör $\Gamma \models \sigma$ Motex, eller nat. ded.

d) $A \to (B \to C) \models (A \to B) \to C$

	$A \to$	$(B \to C)$	$(A \to B)$	$\to$	C	A	B	C
	1		1	1	1	1	1	1
1	$\boxed{0}$	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1		1	0	1
	1		0	1		1	0	0
	1		1	1		0	1	1
	1		1	0	0	0	1	0 ←
	1		1	1		0	0	1
	1		1	0		0	0	0 ←

Ej giltig

Motexempel: A, C falska, B sann. ellr A, B, C falska

b) $(A \to B) \to C \models A \to (B \to C)$

Stämmer ty när hö-led falskt, så är ävenvä-falskt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B^{(1)}}{A \to B}\ \to I \text{ utan strykning} \qquad (A \to B) \to C}{C}\ \to E}{B \to C}\ (1) \to I}{A \to (B \to C)}\ \to I \text{ utan strykning}$$

5. Avgör $\vdash$

a) $A \land B \to C \vdash A \to B \lor C$

b) $A \lor (B \to C), \neg C, B \vdash A$

a) A sann, B, C falsk. Då är $A \land B \to C$ sann och $A \to B \lor C$ falsk.
Alltså $A \land B \to C \not\models A \to B \lor C$.
Sundhetssatsen ger $A \land B \to C \nvdash A \to B \lor C$.

b) $A \lor (B \to C), \neg C, B$. Om A falsk, så $B \to C$ sann
Men B sann, så då är C sann
Motsäger att $\neg C$ sann.
Alltså A kan inte vara falsk.
Alltså: $A \lor (B \to C), \neg C, B \models A$
Enl fullst.satsen följer $A \lor (B \to C), \neg C, B \vdash A$.

$$\dfrac{A \lor (B \to C) \qquad A^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \quad B \to C^{(2)}}{C} \quad \neg C}{\bot}}{A}}{A}\ \lor E\ (1)(2)$$

6. $\bar{c}$, $\bar{F}$ 1-ställig funssymbol
$\bar{P}$ 2-ställig relsymb.

a) Termer: $x, y, z, \ldots$ $\bar{c}$, $F(\bar{c})$, $F(x)$, $F(y)$
$F(F(\bar{c}))\ldots$

b) Formler $t \doteq s$ t, s termer
$\bar{P}(t,s)$ t, s termer

c) $\tau = \neg \bar{F}(\bar{c}) = \bar{c} \wedge \forall x \forall y (\bar{P}(x,y) \to \bar{P}(\bar{F}(x), \bar{F}(y)))$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, 0, S, < \rangle$
$S(n) = n+1$
$\mathcal{A} \models F(\bar{c}) = \bar{c} \iff 0+1=0$ ∴ $\mathcal{A} \models \neg F(c) \doteq \bar{c}$
Antag $n<m$, då är $n+1<m+1$
så ~~$\mathcal{A}$~~ $\models \tau$.

$\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, 0, F, < \rangle$
där $F(n) = 0$ (konst. funktion)
Då är $\mathcal{B} \models F(\bar{c}) \doteq \bar{c}$ så $\mathcal{B} \not\models \tau$.

8

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \vee Q(x))}{P(c) \vee Q(c)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{P(c)}^{1} \quad \neg P(c)}{\bot}}{Q(c)} \qquad \cancel{Q(c)}^{2}}{Q(c)} \ \vee E (1)(2)$$

b)

$$\dfrac{\exists x \neg Q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P(x)}^{1} \quad \dfrac{\forall x(P(x) \to Q(x))}{P(x) \to Q(x)}}{Q(x)} \quad \cancel{\neg Q(x)}^{2}}{\bot}}{\neg P(x)} \ (1)}{\exists x \neg P(x)} \ \exists \text{Intro}}{\exists x \neg P(x)} \ \exists \text{Elim} (2)$$

⑦ a) $\forall x \forall y \left(P(x) \wedge P(y) \rightarrow \neg P(F(x,y)) \right)$

b) $\forall x \left(\neg P(x) \rightarrow \exists y \left(P(y) \wedge D(x,y) \right) \right)$

9) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ gäller ej

Motex $\mathbb{N}$ $P =$ jämna

$Q =$ udda

b) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$ gäller:

$$\dfrac{\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x P(x)}\ ①}{P(x)}}{P(x) \vee Q(x)}}{\forall x (P(x) \vee Q(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x Q(x)}\ ②}{Q(x)}}{P(x) \vee Q(x)}}{\forall x (P(x) \vee Q(x))}}{\forall x (P(x) \vee Q(x))} \ \vee E\ ①②$$

10a) $\mathbb{N}$ mod $\leq$

φ_1: transitiv

φ_2 $x \leq y$ ~~och~~ $y \leq x \Rightarrow x = y$

φ_3 $x \leq y$ eller $y \leq x$.

b) φ_3 falsk Univ: $\{0,1,2\}$

$P: \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ ∴ ej φ_3

Men φ_1 och φ_2 sanna.

φ_2 falsk $\{(0,1),(1,0),(0,0),(1,1)\}$

Univ. $\{0,1\}$ φ_1 trans, $(0,1),(1,0)$ men $0 \neq 1$

∴ φ_2 falsk

φ_3 sann

φ_1 falsk $(0,1),(1,2),(2,0)$ ej transitiv ∴ φ_1 falsk

$(0,0),(1,1),(2,2)$ φ_2 sann

φ_3 sann.

∴ Sundhetssatsen ger att $\varphi_1, \varphi_2 \nvdash \varphi_3$, $\varphi_1, \varphi_3 \nvdash \varphi_2$, $\varphi_2, \varphi_3 \nvdash \varphi_1$.