UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Reell Analys

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
November 7, 2022

Contents

1. TODO

- Kolla att $\mathbb{R}_+$ definierad från snitt gäller att addition och multiplikation gäller
- Konstruera hela $\mathbb{R}$
- Få intuition av täthet

2. Introduction

Before proving injectivity & surjectivity, first show it is a function

3. Sammanfattning Kap2

3.1. Notation.

Vi använder ett "+" för att beteckna om mängden innehåller positiva element. Om det är känt att mängden innehåller negativa element behöver vi tydliggöra om 0 finns i mängden, det finns olika notation.

Vi skriver "upphöjt i +" för att visa att mängden är helt positivt (innehåller ingen 0), och "nedsänkt i +" för att visa att mängden är positiv men innehåller 0.

Exempel:
De positiva reella talen: $\mathbb{R}^+$
Icke-negativa rella talen: $\mathbb{R}_+$

3.2. Relationer.

En relation R på en mängd M är:

$$R \subseteq M \times M$$

Vi har 5 "adjektiv" att beskriva våra relationer med:

- Reflexiv ($xRx \quad \forall x \in M$)
- Symmetrisk ($xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in M$)
- Antisymetrisk (xRy & $yRx \Rightarrow x = y$)
- Transitiv (xRy & $yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in M$)
- Connex (xRy eller $yRx \quad \forall x, y \in M$)

Som exempel på dessa kan man betrakta relationen $=$ eller relationen $<$ över R

Exempel:
Låt $A = \{a, b\}$ och potensmängden till A vara $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
Vilka av de 5 kraven uppfylls om relationen är $\subseteq$?

För att lösa detta så kommer vi ihåg att relationer är definierade på mängdens kartesiska produkt, så vi har i själva verket en relation $\subseteq$ över $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$
Vi kollar reflexivitet. Om vi tar ett element från $\mathcal{P}(A)$, är det då en delmängd till sig själv? **Ja, en mängd är alltid delmängd till sig själv**. Viktigt att notera att den inte är en äkta delmängd!

Är relationen symmetrisk? Tag $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ och $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$. Då gäller att $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ men $\{a, b\} \not\subseteq \{a\}$. Eftersom relationen skulle gälla $\forall$ element i relationsmängden, så gäller *inte* symmetri!

Är relationen antisymetrisk? Antisymetri gäller om xRy & $yRx \Rightarrow x = y$, vi undersöker negationen, vilket är xRy & $x \neq y \Rightarrow \neg yRx$. Detta säger i princip "om x är delmängd till y och x inte är lika med y så är y inte en delmängd till x", vilket vi vet gäller.

Är relationen transitiv? Ja, om x är en delmängd till y och y är en delmängd till z så gäller att x är en delmäng till z

Connex? Nej, tag $x = \{a\}$ och $y = \{b\}$, då är $x \not\subseteq y$ och $y \not\subseteq x$

3.2.1. *Klassifikationer av relationer.*

Vi har 3st Klassifikationer för relationer:

- Ekvivalensrelation (reflexiv, symmetrisk, transitiv)
- Partiell ordning (reflexiv, antisymetrisk, transitiv)
- Total ordning (connex, reflexiv, antisymetrisk, transitiv)

Anmärkning:
En total ordning är en connex partiell ordning.

Exempel: (Ekvivalensrelation)
$=$ (likhet) är en ekvivalensrelation

Exempel: (Partiell ordning)
$\leq$ är en partiell ordning (men inte en ekvivalensrelation)

Exempel: (Total ordning)
$\leq$ är en total ordning

3.3. **Funktioner.**

3.3.1. *Domän, kodomän.*

En funktion (eller även kallad en avbildning) definierad från en *domän* A till en *kodomän* B, kan ses som en delmängd till $A \times B$.
Denna brukar även kallas för *grafen* till funktionen.
Om $f : A \to B$ så är alltså grafen$(f) \subseteq A \times B$

Anmärkning:
För varje $x \in A$ så finns det ett *unikt* $y \in B$ så att $f(x) = y$ (alternativ beteckning: $(x, y) \in \text{graf}(f)$)

3.3.2. *Bilden.*

Något som verkar lite förvirrande först är att kodomänen inte är bilden av funktionen. Om vi exempelvis betraktar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $x \mapsto x$ så ser vi att de värden som faktiskt ”träffas” är hela $\mathbb{R}$, vilket är en delmängd till $\mathbb{C}$ men inte hela $\mathbb{C}$!

Definition/Sats 3.1: Bilden till en avbildning

$$f : A \to B$$
$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ s.t } y = f(x)\}$$

Anmärkning:

- Om f, g är injektiva, så är $g \circ f$ injektiv
- Om f, g är surjektiva, så är $g \circ f$ surjektiv
- Om f, g är bijektiv, så är $g \circ f$ bijektiv

3.4. **Pullback & Pushforward.**

Antag att vi har en avbildning $f : X \to Y$, då gäller följande:

Definition/Sats 3.2: Pullback

Inte hela kodomänen träffas av en avbildning/funktion. Det beror på vad domänen är (och hur funktionen ser ut).
Vi kan däremot korta ner domänen och undersöka hur det påverkar bilden av avbildningen, detta är *pullback*:

$$f_*(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\} = f(A) \qquad A \subseteq \mathcal{P}(X)$$

Anmärkning:
$A \subseteq X \Rightarrow X \subseteq \mathcal{P}(X)$, samt att $f_* \subseteq Y \Leftrightarrow f_* \subseteq \mathcal{P}(Y)$
Vi har då $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$

Definition/Sats 3.3: Pushforward

Liknande/Motsatsen gäller för *pushforward*. Här vill vi undersöka vad som händer med domänen om vi betraktar en delmängd till kodomänen:

$$f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \qquad B \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

Anmärkning:
Pushforward är invariant under union **och** snitt
Pullback är **enbart** invariant under union (annars, låt $f(x) = x^2$ och visa vad som händer med $f_*(\{-1\})$ resp. $f_*(\{1\})$)

Detta följer från definitionen och påminner lite om lagen om total sannolikhet från kursen Sannolikhetsteori 1.

3.5. **Abstrakt algebra.**

Definition/Sats 3.4: Ordnad kropp

Låt $\mathbb{F} = (F, +, *, <)$ vara en kropp med en strikt ordning $<$ så att:
- $x, y, z \in \mathbb{F}$ och $y < z$ så är även $x + y < x + z$
- $x, y \in \mathbb{F}$ och $x, y > 0$ så är även $xy > 0$

Definition/Sats 3.5: Vektorrum över kropp

En mängd V är ett vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$ om vi har följande 2 avbildningar:

$$V \times V \xrightarrow{+} V \qquad \mathbb{F} \times V \xrightarrow{\cdot} V$$
$$(v, w) \mapsto v + w \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

Anmärkning:
$(V, +)$ är en abelsk grupp

Definition/Sats 3.6: Stödet till en avbildning

Låt $f : M \to \mathbb{F}$ där $\mathbb{F}$ är en kropp. Vi definierar
$$\text{supp}(f) = \{m \in M \mid f(m) \neq 0\}$$
Vi kan generalisera detta till avbildningar över vektorrum V och definiera:
$$V_{\text{fin}} = \{f \in V \mid \text{supp}(f) \text{ ändlig}\}$$

Vi har i andra kurser kikat på hur vi kan kvota mängder med ideal. Vi kan även kvota med ekvivalensrelationer enligt följande:
$$M/_{\sim} \quad = \{[x] \in \mathcal{P}(M) \mid x \in M\}$$

Givet en binär komposition $*$ över M och en ekvivalensrelation $\sim$ säger vi att $\sim$ **respekterar** $*$ om:
$$x \sim x' \quad \& y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y' \qquad \forall x, y \in M$$

Vi kan då defniera den *inducerade binära kompositionen* $\overline{*}$ på $M/_{\sim}$ genom:
$$M/_{\sim} \times M/_{\sim} \xrightarrow{\overline{*}} M/_{\sim}$$
$$([x], [y]) \mapsto [x * y]$$

3.6. **Kardinalitet.**

Två mängder har samma kardinalitet om det finns en bijektion mellan de.

Om $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ så finns det injektiva avbildningar från X till Y
Om $\text{card}(X) \geq \text{card}(Y)$ så finns det surjektiva avbildningar från X till Y

Vi säger att en mängd A är uppräknelig om det finns en bijektion mellan A och $\mathbb{N}$.
Om det inte finns en bijektion säger vi att A är överuppräknelig.

Anmärkning:
Om $A_1, A_2, \cdots$, är uppräkneliga så är deras union uppräkneliga.

Definition/Sats 3.7: Cantors sats

Låt X vara en mängd. Det finns **ingen** surjektion från X till $\mathcal{P}(X)$

Definition/Sats 3.8: Schröder-Bernsteins sats

Betrakta följande:
$$X \xrightarrow{f} Y \quad Y \xrightarrow{g} X$$
Om f, g är injektiva så finns en bijektion $X \xrightarrow{h} Y$

För att visa detta krävs följande sats:

Definition/Sats 3.9: Tarskis fixpunktssats

Antag att $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ är monotont växande, dvs
$$A \subseteq B \Rightarrow F(A) \subseteq F(B)$$
Då finns det $M \subseteq X$ så att $F(M) = M$

Definition/Sats 3.10: Index-mängd

Låt I, X vara mängder och det finns en avbildning mellan de så att $I \xrightarrow{f} \mathcal{P}(x)$ så att $i \mapsto f(i) = A_i$
Denna mängd kallas för *indexmängden*

4. Definition och egenskaper av tal

4.1. Definition av $\mathbb{Z}$.

Här ska $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vara $x - y \in \mathbb{Z}$
Då är $(x, x) \Leftrightarrow 0$ och om $x > y$ så $(x, y) \Leftrightarrow x - y > 0$ och $y > x$ så $(x, y) \Leftrightarrow x - y < 0$

Vi vill däremot vara mer träffsäkra i våra definitioner. Därför definierar vi följande binära kompositioner:

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$((a, b), (c, d)) \overset{+}{\mapsto} (a + c, b + d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Leftrightarrow (a + c - (b + d)) \in \mathbb{Z}$$

$$((a, b), (c, d)) \overset{*}{\mapsto} (ac + bd - (ad + bc)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad (ac + bd, ad + bc) \in \mathbb{Z}$$

Vi definierar en ekvivalensrelation på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ genom:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$$

Detta ger oss ett hum om hur vi kan definiera $\mathbb{Z}$, på något följande vis:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}$$

Vi kollar om ekvivalensrelationen *respekterar* våra binära operationer:

$$\left.\begin{aligned} (a, b) \sim (a', b') \\ (c, d) \sim (c', d') \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} (a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

$$\Leftrightarrow (ac + bd, ad + bc) \sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$$

Alternativ definition:
Ett annat sätt vi kan definiera $\mathbb{Z}$ på är:

$$x \in \mathbb{N} \mapsto [(x, 0) \in \mathbb{Z}]$$

$$x - y := [(x, y)] \in \mathbb{Z} \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

Definition/Sats 4.1: Total order on $\mathbb{Z}$

A total order on $\mathbb{Z}$ is given by:

$$[(x, y)] \leq [(x', y')] \Leftrightarrow x + y' \leq x' + y$$

4.2. Definition av $\mathbb{Q}$.

Vi använder en liknande teknik:

$$(p/q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$$

Bör korrespondera till $\dfrac{p}{2} \in \mathbb{Q}$.

Anmärkning:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q$$

Vi vill nu "härma" det vi gjorde när vi definierade $\mathbb{Z}$:

$$(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})) \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$$

$$((a, b), (c, d)) \overset{+}{\mapsto} (ad + cb, bd)$$

$$((a, b), (c, d)) \overset{*}{\mapsto} (ac, bd)$$

Vi definierar en ekvivalensrelation $\sim$ på $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

$$(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$$

Då får vi $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/_\sim$$

Vi har en inducerad binär komposition $(+, *)$ som respekterar $+ . *$

Just nu har vi:

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

4.3. **Definition av $\mathbb{R}$.**

Vi kommer börja med att definiera de positiva reella talen, och sedan överföra konstruktionen till de negativa.

Vi kommer använda *Dedekinds* konstruktion.

Låt $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p, q \in \mathbb{N}, \quad q \neq 0 \right\}$
Givet $\mathbb{Q}_+$ med den naturliga totala ordningen (går att använda $<$ istället för $\leq$) från:

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' \leq p'q$$

Definition/Sats 4.2: Cut

En äkta delmängd $S \subsetneq \mathbb{Q}_+$ kallas för en *cut* om:

$$\forall x \in S \; \forall y \in \mathbb{Q}_+ \quad (y \leq x \Rightarrow y \in S)$$
$$\forall x \in S \; \exists y \in S \quad x < y$$

Med snittet (cut) betyder det i princip $[0, r + \varepsilon)$, men änden behöver inte vara rationell! (**CHECK**)

Exempel:
$\forall r \in \mathbb{Q}_+$ kan vi definiera $r' = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x < r\}$
Notera, om $r = 0$ så är $r' = \emptyset$

Definition/Sats 4.3

Mängden av *alla* icke-negativa reella tal definieras som följande:

$$\mathbb{R}_+ = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}_+) \mid S \text{ är en cut}\}$$

4.4. **Sup & Inf.**

- Upper bound
- Lower bound
- Smallest upper bound (not always in set, see $[1, 3)$)
- Biggest lower bound (not always in set, see $(1, 3]$)
- Theorem 3.7
- Sats 1.20, 1.27 i Rudin, Sats 3.9 i Douglas

Bevisskiss av sats 3.7:
M (eller S i Douglas) $\neq \mathbb{Q}_+$. $\forall s \in T, \quad S \subseteq B (:= S \leq B)$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subseteq B$
$B \neq \mathbb{Q}_+ \Rightarrow M \neq \mathbb{Q}_+$
Måste visa att $\forall S \in T \quad , S \subseteq M$.
Måste visa att Supremum är unik, en bra teknik för att visa unikhet är motsägelsebevis. Antag att det finns M_1. $\forall S \in T \quad S \subseteq M_1 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \subseteq M_1$, men då är $M \subseteq M_1$, alltså är M den minsta, och därmed Supremum.

4.5. **Sequence.**

Det som är av intresse är det som händer i ∞

- Varje a_i kan ses som en evaluering av en funktion i i, dvs $a_i = f(i)$
- Följd kallas för bounded $\cdots$
- Lokalt monoton, typ $\left\{ \dfrac{\sin(x)}{x} \right\}_{x=0}^{\infty}$
- Cauchy sekvens (jämför med definitionen av konvergens)
- Konvergens implicerar Cauchy, men inte motsats
- För att "döda" Cauchy, låt sekvensen vara bounded
- Bevis 3.6 i Douglas, där det står $\varepsilon + \varepsilon$ kan man tänka att det står $\varepsilon/2 + \varepsilon/2$

Vi kom till Corollary 3.14