Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Avd. för beräkningsvetenskap

Blandade formler i Beräkningsvetenskap I och II

1. Flyttal och avrundningsfel

Ett flyttal $fl(x)$ representeras enligt

$$fl(x) = \hat{m} \cdot \beta^e, \quad \hat{m} = \pm(d_0.d_1 d_2, \ldots, d_{p-1}), \quad 0 \le d_i < \beta, \quad d_0 \ne 0, \quad L \le e \le U,$$

där β betecknar bas och p precision.
Ett flyttalssystem defineras $FP(\beta, p, L, U)$.
Maskinepsilon (avrundningsenheten) $\epsilon_M = \frac{1}{2}\beta^{1-p}$ och kan defineras som det minsta tal ϵ sådant att $fl(1+\epsilon) > 1$.

2. Linjära och ickelinjära ekvationer

Newton-Raphsons metod: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
För system: $x_{k+1} = x_k - [F']^{-1}F(x_k)$, där x_k och $F(x_k)$ är vektorer och F' är Jacobianen.

Fixpunktsiteration för $x = g(x)$: $x_{k+1} = g(x_k)$

Konvergenskvot, konvergenshastighet

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|^r} = C,$$

där C är en konstant, och r anger konvergenshastigheten ($r = 1$ betyder t ex linjär konvergens).

Allmän feluppskattning

$$|x_k - x^\star| \le \frac{|f(x_k)|}{\min |f'(x)|}$$

Konditionstalet $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mäter känsligheten för störningar hos ekvationssystemet $Ax = b$. Det gäller att

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \text{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

där $\Delta x = x - \hat{x}$ och $\Delta b = b - \hat{b}$.

Normer (vektor- respektive matrisnorm)

$$\| x \|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \qquad \| x \|_1 = \sum_i |x_i| \qquad \| x \|_\infty = \max_i\{|x_i|\}$$
$$\| A \|_1 = max_j(\sum_i |a_{ij}|) \qquad \| A \|_\infty = max_i(\sum_j |a_{ij}|)$$

3. Approximation

Newtons interpolationspolynom $p(x)$ då vi har n punkter $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ bygger på ansatsen

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Minstakvadratapproximationen till punktmängden $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_m, y_m)$ med ett n:egradspolynom $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ kan formuleras som ett överbestämt ekvationssystem $Ax = b$, där A är $m \times n$, $m > n$. Minstakvadratlösningen kan fås ur normalekvationerna

$$A^T A x = A^T b$$

4. Ordinära differentialekvationer

Eulers metod (explicit Euler): $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, n.o. 1
Implicit Euler (Euler bakåt): $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$, n.o. 1
Trapetsmetoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$, n.o. = 2
Heuns metod (tillhör gruppen Runge-Kuttametoder):

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_{k+1}, y_k + hK_1) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

n.o. = 2
Klassisk Runge-Kutta:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_{k+1}, y_k + hK_3) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

n.o. = 4

5. Numerisk integration

Trapetsformeln
Beräkning på ett delintervall med steglängd $h_k = x_{k+1} - x_k$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \frac{h_k}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

Sammansatt formel på helt intervall $[a\ b]$, då ekvidistant steglängd $h = h_k$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Diskretiseringsfelet R på helt intervall $[a\ \ b]$, dvs $\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + R$ är

$$R = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi).$$

Funktionsfelet (övre gräns): $(b - a) \cdot \epsilon$, där ϵ är en övre gräns för absoluta felet i varje funktionsberäkning.

Simpsons formel

Beräkning på ett dubbelintervall med steglängd h

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})]$$

Sammansatt formel på helt intervall $[a\ b]$, då ekvidistant steglängd $h = h_k$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Diskretiseringsfelet R på helt intervall $[a\ \ b]$, dvs $\int_a^b f(x)\,dx = S(h) + R$ är

$$R = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f''''(\xi).$$

Funktionsfelet: Samma som för trapetsformeln, se ovan.

6. Richardsonextrapolation

Om $F_1(h)$ och $F_1(2h)$ är två beräkningar (t ex ett steg i en beräkning av en integral eller en ODE) med en metod av noggrannhetsordning p med steglängd h respektive dubbel steglängd $2h$ så är

$$R(h) = \frac{F_1(h) - F_1(2h)}{2^p - 1}$$

en uppskattning av den ledande termen i trunkeringsfelet i $F_1(h)$. Kan även användas för att förbättra noggrannheten i $F_1(h)$ genom

$$F(h) = F_1(h) + \frac{F_1(h) - F_1(2h)}{2^p - 1}.$$

7. Numerisk derivering

För numerisk derivering används s k differensformler

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \quad \text{centraldifferens}$$
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{framåtdifferens}$$
$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad \text{bakåtdifferens}$$
$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

8. Monte Carlometoder

Den övergripande strukturen för Monte Carlosimuleringar är

```
Indata N (antal försök)
for i = 1:N
    Utför en stokastisk simulering
    resultat(i) = resultatet av simuleringen
end
slutresultat genom någon statistisk beräkning, t ex medelvärdet mean(resultat)
```

Noggrannhetsordning för Monte carlometoder är $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$, där N är antal samplingar.
Kumultativ fördelningsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$
Normalfördelning

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aritmetiskt medelvärde baserat på N realisationer x_i av slumpvariablen X: $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.

9. Taylorutveckling

Taylorutveckling av $y(x_k + h)$ kring x_k:

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_k) + \mathcal{O}(h^4)$$