UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

TENTAMEN
Logik och bevisteknik
2019-05-28

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: pennor, radergummi, linjal, papper (det sistnämnda tillhandahålles). ***Alla svar (utom till uppgift 4) måste motiveras på lämpligt sätt.*** Om man har fått minst 10, respektive minst 15, poäng på duggan (2019-04-26) så får man uppgifterna 1–2, respektive 1–3, tillgodoräknade (dvs man får full poäng på dem utan att behöva lösa dem). Maximalpoängen är 40. För att få betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 20, 26 respektive 32 poäng.

1. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (4p)

(a) $\{\varphi \wedge \psi,\ \varphi \rightarrow \chi,\ \psi \rightarrow \lambda\} \vdash \chi \wedge \lambda$.

(b) $\{\varphi \vee \psi,\ \varphi \rightarrow \chi,\ \psi \rightarrow \lambda\} \vdash \chi \vee \lambda$.

2. Vi antar att p, q och r till hör en satslogisk signatur. Finn en DNF som är ekvivalent med formeln $(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (r \leftrightarrow p)$ och glöm inte att visa hur du har kommit fram till din DNF. (2p)

3. (a) Som i föregående uppgift antar vi att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. Stämmer följande semantiska sekvent?

$$(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (r \leftrightarrow p) \models (p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$$

Notera att formeln i vänsterledet är samma formel som i uppgift 2.
(b) Är formeln $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)$ en tautologi? (3p)

4. Låt Sax, Påse och Vinner vara relationssymboler där Sax och Påse är 1-ställiga och Vinner är 2-ställig. Tänk er att Sax(x) uttrycker att "x är en sax" (och analogt för Påse) och Vinner(x, y) uttrycker att "x vinner över y". Översätt följande påståenden till satser i första ordningens logik med dessa relationssymboler. Det kan vara lämpligt att först omformulera påståendena så att de mer liknar första ordningens logik (men fortfarande uttrycker samma sak som de givna påståendena). (4p)

(a) Varje sax vinner över alla påsar.

(b) Det finns något som vinner över alla saxar.

5. Låt $\sigma_1 = \langle\ ;\ ; P, R\rangle$ vara en första ordningens signatur där P och R är relationssymboler med ställigheter 1 och 2, respektive. Låt $\mathcal{M} = \langle M;\ ;\ ; P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}\rangle$ vara en σ_1-struktur där $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{1, 3, 5\}$ och $R^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in M \times M : a \text{ är mindre än } b\}$. För var och en av satserna nedan avgör om den är sann i $\mathcal{M}$ (med andra ord om $\mathcal{M}$ är en modell till satsen)? (4p)

(a) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$.

(b) $\exists x \exists y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge R(x, y))$.

Fortsätter på nästa sida

6. Låt $\sigma_2 = \langle\ ;\ ; E, F, G\rangle$ vara en signatur där samtliga E, F och G är 1-ställiga. Besvara följande frågor och glöm inte att motivera dina svar. (6p)

(a) Stämmer följande sekvent?
$\{\forall x(E(x) \leftrightarrow (F(x) \vee G(x)))\} \vdash \forall x(G(x) \rightarrow E(x))$.

(b) Är satserna $\forall x(E(x) \leftrightarrow (F(x) \vee G(x)))$ och $\forall x(G(x) \rightarrow E(x))$ ekvivalenta?

(c) Stämmer följande sekvent?
$\{\forall x(E(x) \leftrightarrow \neg F(x)),\ \forall x(E(x) \rightarrow G(x))\} \vdash \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$.

7. I denna uppgift använder vi signaturen σ_1 från uppgift 5. Ge en härledning i naturlig deduktion för följande sekventer: (5p)

(a) $\{\forall x\forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow R(x,y))\} \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x,x))$.

(b) $\{\forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(y))),\ \exists x\exists y R(x,y)\} \vdash \exists x P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$.

8. Även i denna uppgift använder vi signaturen σ_1 från uppgift 5. Finn en prenex normalform som är ekvivalent med formeln (3p)

$$\neg\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y)).$$

9. Låt fortfarande σ_1 vara signaturen från uppgift 5. Låt (6p)

$$T_1 = \{\forall x\exists y(\neg(x=y) \wedge R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \rightarrow z=y)),\\ \forall x\neg\exists y\exists z(\neg(y=z) \wedge R(y,x) \wedge R(z,x)),\ \forall x(P(x) \leftrightarrow \neg\exists y R(y,x))\}.$$

(a) Beskriv alla ändliga modeller till T_1. (En modell kallas ändlig om dess domän/universum är en ändlig mängd.)
(b) Låt $T_2 = T_1 \cup \{\exists x P(x)\}$. Beskriv en modell till T_2. Har T_2 någon ändlig modell?

10. Vi introducerar två nya konnektiv, '$\circ$' och '$\backslash$', som tolkas enligt tabellen nedan (där s of f står för sant och falskt). Låt σ vara en godtycklig satslogisk signatur. Visa att för varje formel $\chi \in LP(\sigma)$ så finns en formel θ som endast använder konnektiv från mängden $\{\circ, \backslash\}$ och som är ekvivalent med χ. (3p)

φ	ψ	$\varphi \circ \psi$	$\varphi \backslash \psi$
s	s	f	f
s	f	f	s
f	s	f	f
f	f	s	f

Lycka till!

Logik och bevisteknik 2019-05-28 ①

Lösningsförslag

1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\,(\wedge E) \qquad \varphi\to\chi}{\chi}\,(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\,(\wedge E) \qquad \psi\to\lambda}{\lambda}\,(\to E)}{\chi\wedge\lambda}\,(\wedge I)$$

(b)

$$\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{1} \qquad \varphi\to\chi}{\chi}\,(\to E)}{\chi\vee\lambda}\,(\vee I) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\psi}^{1} \qquad \psi\to\lambda}{\lambda}\,(\to E)}{\chi\vee\lambda}\,(\vee I)}{\chi\vee\lambda}\,(\vee E)^{1}$$

2. Låt φ beteckna $(p\to(q\vee\neg r))\leftrightarrow(r\leftrightarrow p)$.
Sanningsvärdestabell för φ:

p	q	r	$(p\to$	$(q\vee\neg r))$	$\leftrightarrow$	$(r\leftrightarrow p)$	formler som "kodar" raderna där φ är sann
s	s	s	s	s	s	s	$p\wedge q\wedge r$
s	s	f	s	s	f	f	
s	f	s	f		f	s	
f	s	s	s		f	f	
s	f	f	s	s	f	f	
f	s	f	s		s	s	$\neg p\wedge q\wedge\neg r$
f	f	s	s		f	f	
f	f	f	s		s	s	$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$

φ är ekvivalent med

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

som är en DNF.

3. (a) Låt φ vara formeln i uppgift 2 och låt ψ vara $(p \vee q) \wedge (p \to r)$.

Sanningsvärdestabell för ψ:

p	q	r	$(p \vee q)$	$\wedge$	$(p \to r)$
s	s	s		s	
s	s	f		f	f
s	f	s		s	
f	s	s		s	
s	f	f		f	f
f	s	f		s	
f	f	s	f	f	
f	f	f	f	f	

Om vi jämför tabellerna för φ och ψ så ser vi att om p, q, r är falska så är φ sann men ψ falsk. Därför stämmer <u>inte</u> $\varphi \models \psi$.

(b) Eftersom ψ kan vara falsk så är ψ <u>inte</u> en tautologi.

4. (a) $\forall x \forall y ((Sax(x) \wedge Påse(y)) \to Vinner(x,y))$

eller $\forall x (Sax(x) \to \forall y (Påse(y) \to Vinner(x,y)))$

eller $\neg \exists x \exists y (Sax(x) \wedge Påse(y) \wedge \neg Vinner(x,y))$.

(b) $\exists x \forall y (Sax(y) \to Vinner(x,y))$.

5. (a) $\forall x (P(x) \to \exists y R(x,y))$ är falsk i $\mathcal{M}$ för $\mathcal{M} \nvDash P(5) \to \exists y R(5,y)$, eftersom $\mathcal{M} \vDash P(5)$ (för $5 \in P^{\mathcal{M}}$) och $\mathcal{M} \nvDash \exists y R(5,y)$ (för det finns inget $b \in M$ så att $\mathcal{M} \vDash R(5,b)$).

(b) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge R(x,y))$ är sann i $\mathcal{M}$ för om (exempelvis) $x = 1$ och $y = 2$ så $\mathcal{M} \vDash P(1) \wedge \neg P(2) \wedge R(1,2)$.

6. (a) Sekventen stämmer. Pga fullständighetssatsen så räcker det att visa att motsvarande semantiska sekvent stämmer:

$$\{\forall x (E(x) \leftrightarrow (F(x) \vee G(x)))\} \vDash \forall x (G(x) \to E(x)).$$

Antag att $\mathcal{A} \vDash \forall x (E(x) \leftrightarrow (F(x) \vee G(x)))$. Antag vidare att $a \in A$ är godtycklig där A är $\mathcal{A}$:s domän. Antag att $\mathcal{A} \vDash G(a)$. Enligt det första antagandet så $\mathcal{A} \vDash E(a)$ och det följer att $\mathcal{A} \vDash G(a) \to E(a)$. Eftersom a var godtyckligt så $\mathcal{A} \vDash \forall x (G(x) \to E(x))$.
Vi har visat att varje modell av vänsterledet måste vara en modell av högerledet.

<u>Alternativt</u> kan man ge en härledning i naturlig deduktion för att visa att sekventen stämmer:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(E(x)\leftrightarrow(F(x)\vee G(x)))}{E(y)\leftrightarrow(F(y)\vee G(y))}\,(\forall E)}{(F(y)\vee G(y))\to E(y)}\,(\leftrightarrow E) \qquad \dfrac{\cancel{G(y)}^{\,1}}{F(y)\vee G(y)}\,(\vee I)}{E(y)}\,(\to E)}{G(y)\to E(y)}\,(\to I)^{1}}{\forall x\,(G(x)\to E(x))}\,(\forall I)$$

(b) Nej, satserna är <u>inte</u> ekvivalenta. Jag beskriver en struktur $\mathfrak{B}$ sådan att

$\mathfrak{B} \models \forall x\,(G(x)\to E(x))$ och

$\mathfrak{B} \not\models \forall x\,(E(x)\leftrightarrow(F(x)\vee G(x)))$.

Låt (t.ex.) $\mathfrak{B} = \langle B;\,;\,;\,E^{\mathfrak{B}}, F^{\mathfrak{B}}, G^{\mathfrak{B}}\rangle$

där $B = \{1, 2\}$, $E^{\mathfrak{B}} = G^{\mathfrak{B}} = \{1\}$ och

$F = \{2\}$.

(Det finns många andra strukturer som gör $\forall x\,(G(x)\to E(x))$ sann och den andra satsen falsk.)

(c) Sekventen stämmer <u>inte</u> och enligt sundhetssatsen räcker det att visa att motsvarande semantiska sekvent <u>inte</u> stämmer.

5

Här följer ett (av många möjliga) motexempel till

$$\{\forall x(E(x)\leftrightarrow\neg F(x)),\ \forall x(E(x)\rightarrow G(x))\}\vDash \exists x(F(x)\wedge\neg G(x)).$$

Låt $\mathcal{C} = \langle C\ ;\ ;\ ;\ E^{\mathcal{C}}, F^{\mathcal{C}}, G^{\mathcal{C}}\rangle$ där

C = mängden av alla djur som är antingen kaniner eller hästar.

$G^{\mathcal{C}} = C$,

$E^{\mathcal{C}}$ = mängden av alla kaniner.

$F^{\mathcal{C}}$ = mängden av alla hästar.

Då är $\mathcal{C}$ en modell av samtliga antaganden men inte av slutsatsen.

7.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x\forall y((P(x)\wedge P(y))\rightarrow R(x,y))$}
\RightLabel{$(\forall E)$}
\UnaryInfC{$\forall y((P(z)\wedge P(y))\rightarrow R(z,y))$}
\RightLabel{$(\forall E)$}
\UnaryInfC{$(P(z)\wedge P(z))\rightarrow R(z,z)$}
\AxiomC{$\cancel{P(z)}^{1}$}
\AxiomC{$\cancel{P(z)}^{1}$}
\RightLabel{$(\wedge I)$}
\BinaryInfC{$P(z)\wedge P(z)$}
\RightLabel{$(\rightarrow E)$}
\BinaryInfC{$R(z,z)$}
\RightLabel{$(\rightarrow I)^{1}$}
\UnaryInfC{$P(z)\rightarrow R(z,z)$}
\RightLabel{$(\forall I)$}
\UnaryInfC{$\forall x(P(x)\rightarrow R(x,x))$}
\end{prooftree}
$$

7. (b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{R(u,v)}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))}{\forall y (R(u,y) \to (P(u) \land \neg P(y)))}\,(\forall E)}{R(u,v) \to (P(u) \land \neg P(v))}\,(\forall E)}{P(u) \land \neg P(v)}\,(\to E)}{P(u)}\,(\land E)}{\exists x P(x)}\,(\exists I)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{R(u,v)}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))}{\forall y (R(u,y) \to (P(u) \land \neg P(y)))}\,(\forall E)}{R(u,v) \to (P(u) \land \neg P(v))}\,(\forall E)}{P(u) \land \neg P(v)}\,(\to E)}{\neg P(v)}\,(\land E)}{\exists y \neg P(y)}\,(\exists I)$$

$$\dfrac{\exists x P(x) \qquad \exists y \neg P(y)}{\exists x P(x) \land \exists y \neg P(y)}\,(\land I)$$

$$\dfrac{\cancel{\exists y R(u,y)}^{2} \qquad \exists x P(x) \land \exists y \neg P(y)}{\exists x P(x) \land \exists y \neg P(y)}\,(\exists E)^{1}$$

$$\dfrac{\exists x \exists y R(x,y) \qquad \exists x P(x) \land \exists y \neg P(y)}{\exists x P(x) \land \exists y \neg P(y)}\,(\exists E)^{2}$$

8. Jag använder välkända ekvivalenser för att omvandla formeln till en prenex normalform.

$$\neg\forall x\,(P(x)\to\exists y R(x,y))\quad \text{eq}$$

$$\exists x\,\neg(P(x)\to\exists y R(x,y))\quad \text{eq}$$

$$\exists x\,\neg(\neg P(x)\vee\exists y R(x,y))\quad \text{eq}$$

$$\exists x\,(P(x)\wedge\neg\exists y R(x,y))\quad \text{eq}$$

$$\exists x\,(P(x)\wedge\forall y\neg R(x,y))\quad \text{eq}$$

$$\exists x\forall y\,(P(x)\wedge\neg R(x,y)).$$

Den sista formeln är en prenex normalform.

9. För att visualisera vad T_1 säger så kan vi tänka oss att $R(x,y)$ uttrycker att "det finns en pil från x till y", med figur "$x\to y$." Den första satsen i T_1 uttrycker att "från varje x finns exakt en utgående pil (till något y)".
Den andra satsen i T_1 uttrycker att "till varje x finns högst en ingående pil (från något y)". Den tredje satsen i T_1 uttrycker att "P(x) om och endast om x inte har någon ingående pil."

Det följer att om $\mathcal{M} = \langle M;;;P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ och $R^{\mathcal{M}}$ är en "riktad cykel" domänen $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, med figur,

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

och $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$, så är $\mathcal{M}$ en ändlig modell av T_1. Om $\mathcal{M}$ består av flera riktade cykler, dvs. om

$$\mathcal{M} = \langle M;;;P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle \quad \text{där } P^{\mathcal{M}} = \emptyset,$$

$M = \{a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1}, \ldots, a_{m,1}, \ldots, a_{m,k_m}\}$ och $R^{\mathcal{M}}$ beskrivs av figuren

$$\begin{tikzcd} a_{1,1} \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{1,k_1} \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\vdots$$

$$\begin{tikzcd} a_{m,1} \arrow[r] & a_{m,2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{m,k_m} \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

så är $\mathcal{M}$ också en modell av T_1.

Innan vi löser (a)-delen så tittar vi på modeller av $T_2 = T_1 \cup \{\exists x P(x)\}$.

Om $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N};;; P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ där
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$ och
$R^{\mathcal{M}} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$, dvs. $R^{\mathcal{M}}$ beskrivs
av grafen/figuren $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots\ldots$,
så är <u>$\mathcal{M}$ en modell av T_2</u>.

$\mathcal{M}$ är en oändlig modell, för $\mathbb{N}$ är oändlig.
Har T_2 någon ändlig modell?

Om $\mathcal{N} \models T_2$ så $\mathcal{N} \models \exists x P(x)$. Då finns $a_0 \in N$, där N är domänen till $\mathcal{N}$, så att $\mathcal{N} \models P(a_0)$. Eftersom $\mathcal{N} \models T_1$ så måste det finnas $a_1 \in N$ så att $a_1 \neq a_0$ och $\mathcal{N} \models R(a_0, a_1)$. Eftersom $\mathcal{N} \models T_2$ så måste det finnas $a_2 \in N$ så att $a_2 \neq a_0$, $a_2 \neq a_1$ och $\mathcal{N} \models R(a_1, a_2)$. Och så vidare. Så N måste innehålla en <u>oändlig</u> "riktad kedja"

$$a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots\ldots$$

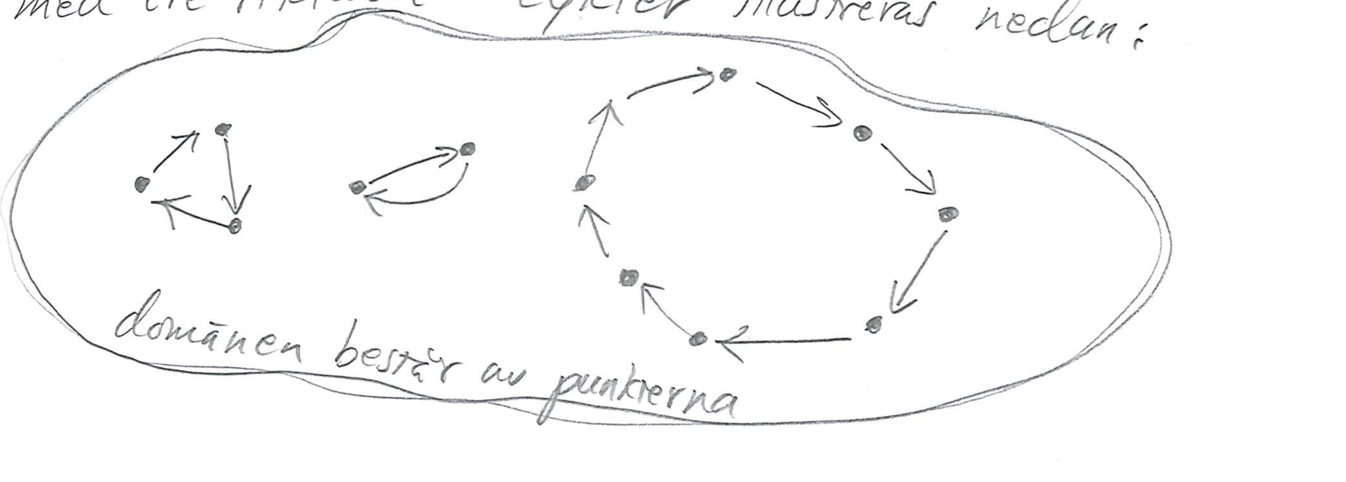
och då kan N inte vara ändlig.

Alltså har T_2 ingen ändlig modell.

Nu är vi redo att lösa (a)-delen.

Antag att $\mathcal{M} \models T_1$. Om $\mathcal{M} \models \exists x P(x)$, måste $\mathcal{M}$ vara oändlig enligt resonemanget ovan. Så om $\mathcal{M} \models T_1$ och $\mathcal{M}$ är ändlig så $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$. Eftersom $\mathcal{M} \models T_1$ så betyder det att varje element i domänen till $\mathcal{M}$ har exakt en utgående pil och exakt en ingående pil. Detta innebär att $R^{\mathcal{M}}$ måste vara en eller flera (men bara ändligt många) riktade cykler som inte har något gemensamt element.

Så de ändliga modellerna till T_1 är de σ_1-strukturer $\mathcal{M}$ där $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$ och $R^{\mathcal{M}}$ är ändligt många (dock minst en) riktade cykler utan något gemensamt element. Ett exempel med tre riktade cykler illustreras nedan:



10. Vi vet att varje satslogisk formel φ är ekvivalent med en DNF ψ. och ψ använder bara konnektiv bland $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Enligt ekvivalensen

$$\chi \vee \lambda \quad eq \quad \neg(\neg\chi \wedge \neg\lambda)$$

så kan varje '$\vee$' i ψ ersättas med en kombination av '$\neg$' och '$\wedge$', så ψ är ekvivalent med något ψ' som endast använder konnektiv bland $\{\neg, \wedge\}$. Nu räcker det att visa att '$\neg$' och '$\wedge$' kan ersättas med kombinationer av '$\circ$' och '$\smile$'. Detta följer från följande ekvivalenser:

$$\neg\chi \quad eq \quad \chi \circ \chi,$$

$$\lambda \wedge \chi \quad eq \quad \lambda \smile (\neg\chi) \quad eq \quad \lambda \smile (\chi \circ \chi).$$

(Dessa ekvivalenser kan verifieras med sanningsvärdestabeller.)