UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Automatateori
Vera Koponen

Lektion 1

1. Låt $L_1 = \{ab, aaa, baa\}$ och $L_2 = \{ba, baa\}$ och $L_3 = \{bba\}$.
   (a) Gör en lista med alla strängar i $L_1 \cap L_2$.
   (b) Gör en lista med alla strängar i $L_1 \cup L_2$.
   (c) Gör en lista med alla strängar i L_2L_3.
   (d) Gör en lista med alla strängar i L_3L_2.
   (e) Gör en lista med de 5 kortaste strängarna i $(L_3)^*$ och sedan de 5 kortaste strängarna i $(L_2)^*$.
   (f) Beskriv med ord alla strängar i $\{a, b\}^* \setminus L_1$.

2. (a) Konstruera reguljära uttryck för vart och ett av språken $L_1, L_2, L_3, L_1 \cup L_2, L_2L_3$ och $(L_3)^*$ i föregående uppgift.
   (b) Enligt definitionen så är $\alpha \cup \beta$ ett reguljärt uttryck om α och β är reguljära uttryck. Men är $\alpha \cap \beta$ ett reguljärt uttryck?

3. Konstruera ett *reguljärt uttryck* och en *DFA* för följande språk[1]:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{w \in \{a, b\}^* : \ w \text{ innehåller minst ett } a\},\\
L_2 &= \{w \in \{a, b\}^* : \ w \text{ börjar med } b \text{ eller med } ab\},\\
L_3 &= \{w \in \{a, b\}^* : \ w \text{ slutar med } aa\},\\
L_4 &= \{w \in \{a, b\}^* : \ \text{inget } a \text{ kommer efter något } b \text{ i } w\}.
\end{aligned}$$

4. Låt $\Sigma = \{0, 1, a, b\}$,

   $L_1 = \{w \in \Sigma^* : \ w \text{ innehåller inga bokstäver och slutar med en etta}\}$ och
   $L_2 = \{w \in \Sigma^* : \ w \text{ börjar med 0 och slutar med en etta}\}$.

   (a) Beskriv *med ord* (så enkelt som du kan) följande språk:

$$L_1 \cup L_2, \quad L_1 \cap L_2, \quad L_1 \setminus L_2, \quad \overline{L_1}, \quad \overline{L_2}, \quad L_1L_2, \quad L_1^*.$$

[1] Om jag säger "DFA för ett språk" så menar jag en DFA som accepterar språket ifråga.

(b) Ange ett reguljärt uttryck för L_1, L_2 och för vart och ett av språken i del (a).

5. (a) Vilka av följande språk över alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$, givna av sina reguljära uttryck, innehåller oändligt många strängar?

   $abab \cup bb \cup \emptyset$,

   a^*,

   $a(bb)^+a \cup ab$,

   $bbbaaa \cup ababab \cup a \cup b \cup abaaabbbbbbabbbbaaabbbaabababababaab \cup ab \cup ba$,

   ε^*.

   (b) Hur många strängar innehåller språken $\emptyset ab$ och $\emptyset^*$?
   (c) Finns det någon sträng $w \in \Sigma^*$ så att $ww = w$? Om ja, beskriv alla sådana strängar.

6. Ange en NFA för vart och ett av språken över $\{a, b\}$ nedan. Kom ihåg att varje DFA är en NFA, men inte omvänt, så det går bra att ange en DFA. Men ibland kan det vara (betydligt) enklare att hitta en NFA för ett språk:

   (a) Mängden av strängar med högst tre stycken a.

   (b) Mängden av strängar där antalet a är jämnt delbart med 3.

   (c) Mängden av strängar som har precis en förekomst av (delsträngen) aaa.

7. (a) En fruktautomat ska fungera på så sätt att varje frukt kostar 2 kronor och den tar endast emot enkronorsmynt. Tanken är att om man sätter in x kronor och $x = 2y$ där $y > 0$ är ett heltal så får man tillbaka y frukter. Om x inte är jämnt delbart med 2 (eller $x = 0$) så returneras pengarna och man får ingen frukt. Vi kan tänka oss mynten som stoppas in i automaten som strängar över ett alfabet med bara en symbol. (Välj symbol själv.) Beskriv, med ord eller med ett reguljärt uttryck, språket L som består av de strängar som resulterar i att automaten returnerar *minst en* frukt. Konstruera en DFA som accepterar detta språk.
   (b) Samma uppgift som i (a)-delen *men* nu ska automaten klara av att ta emot såväl enkronorsmynt som 50-öresmynt (vi låtsas att de senare fortfarande är giltiga). Vi behöver sålunda ett alfabet med två olika symboler, en för vardera sortens mynt.

8. Uppgifter ur kursboken: Test 2.1 a-f, Test 2.2 b, c, Test 2.3 a, b.

9. Ange ett reguljärt uttryck som beskriver samma språk som uttrycket nedan och som innehåller *färre än hälften så många symboler*. Beskriv också *med ord* vilka strängar språket innehåller.

$$(a^* \cup b^*)^*(a(b \cup a^*)^*)^*$$