

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren
Tel.: 070-5892942
E-post: erik.lindgren@math.uu.se

Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
28 augusti 2020

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon.

Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv ditt namn och personnummer på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5.

1. Bestäm följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{2x+4}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{1}{x}}$$

2. Skissa grafen till kurvan $y = x^2 e^{-x}$. Bestäm och klassificera lokala och globala extrempunkter samt bestäm funktionens max- och minvärden. Bestäm även eventuella asymptoter.

–Var god vänd–

3. Bestäm följande integraler:

a)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

b)

$$\int x \arctan x dx$$

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

a)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

b)

$$\int_{10}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^3 - x} dx$$

5. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

a)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\frac{1}{2}}}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{e^k}$$

6. Använd Taylorpolynom för avgöra om

$$\left| \int_0^1 \sin(t^2) dt - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{42} \right) \right| < \frac{1}{1000}.$$

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i $x = a$.
b) Visa att funktionen $f(x) = x^2$ är kontinuerlig i $x = 1$ med hjälp av definitionen.

8. Låt a_n vara följderna som ges av $a_0 = 0$ och

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{2 + a_{n-1}}, \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \dots$$

Visa att följderna är konvergent och bestäm dess gränsvärde.

9. I denna uppgift krävs endast svar och ingen motivering. Ge exempel på:

- a) En konvergent talföljd som är monotont avtagande.
- b) En monotont avtagande följd som ej är konvergent.
- c) En begränsad funktion på $[-1, 1]$ som ej är kontinuerlig på $[-1, 1]$.
- d) En kontinuerlig funktion som ej är deriverbar.
- e) En funktion $f(x)$ på $[-1, 1]$ som ej är integrerbar men $|f(x)|$ är integrerbar.

10. Antag att f är en kontinuerligt deriverbar funktion på $[0, 1]$ sådan att $f(1) = 1$ och

$$\int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Visa att det finns ett $x \in [0, 1]$ så att $f'(x) = 0$.

Lycka till!