UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sigstam

Prov i matematik
KandData, KandMa
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I
2021-03-27

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Dina lösningar ska vara uppladdade på Studium senast kl 13:20. Tillåtna hjälpmedel: Endast papper och penna. För betyget 3/4/5 krävs minst 18/25/32 poäng. Glöm ej att motivera dina påståenden. Formella bevis skall göras i det system för naturlig deduktion som har använts i kursen Vt 2020.

1. Översätt följande utsagor till första ordningens logik (FOL).
Använd de ett-ställiga relationssymbolerna *Prim* och *Jämn*, den två-ställiga relationssymbolen $\leq$ och den två-ställiga funktionssymbolen F för att formulera följande utsagor.

(a) Varje jämnt tal kan skrivas som en summa av ett primtal och ett udda tal.

(b) För varje par av primtal, om det ena är jämnt och det andra udda, så är det jämna mindre än det udda.

(c) Det finns inget största primtal. (5)

(*Anm:* Udda tal är heltal som inte är jämna.)

2. Låt $*$ vara ett konnektiv som uppfyller följande:

$$p * q \text{ är sann } \iff \text{ både } p \text{ och } q \text{ är falska.}$$

(a) Skriv upp sanningsvärdestabellen för $*$.

(b) Visa att $\{*\}$ är funktionellt komplett.

(c) Skriv en formel som endast innehåller konnektivet $*$, parenteser och satssymbolerna A och B, som är ekvivalent med $\neg A \vee B$.

Motivera dina svar med sanningsvärdestabeller. (5)

3. Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF). Förklara hur du har fått fram dina svar.

$$\neg(A \vee \neg(B \vee \neg(A \longrightarrow \neg(B \vee A)))) \qquad (4)$$

4. Ange formella bevis för följande påståenden i satslogik.

(a) $\neg(A \longrightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$

(b) $\neg\neg A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee \neg\neg B) \wedge (A \vee C)$ (5)

5. Ange formella bevis för följande påståenden i första ordningens logik.

(a) $\forall x\,(M(x) \longrightarrow Q(x))\,,\ \forall x\,(M(x) \longrightarrow \neg P(x))\,,\ \exists x\, M(x) \vdash \exists x\ (Q(x) \wedge \neg P(x))$

(b) $\vdash \neg\exists x\, P(x) \longleftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$ (6)

6. Avgör med hjälp av sanningsvärdestabeller om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange ett motexempel med hjälp av sanningsvärden. För varje slutledning som är giltig, motivera!

(a) $A \vee (B \longrightarrow \neg C) \models (A \vee B) \longrightarrow \neg C$

(b) $\models ((A \wedge B) \longrightarrow C) \longleftrightarrow (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$ (4) Var god vänd!

7. Avgör för var och en mängderna Γ_1 och Γ_2 om den är (a) konsistent, (b) satisfierbar.

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{\neg\,((A \wedge B) \longrightarrow (C \vee D))\,,\ \neg B \vee D\,\}\\ \Gamma_2 &= \{\forall x \forall y \forall z\,(\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,z) \longrightarrow \mathbf{R}(x,z))\,,\ \exists x \forall y\ (\mathbf{R}(y,x) \vee x = y)\,,\\ &\qquad \forall x \forall y\,(\mathbf{R}(x,y) \longrightarrow \exists z\,(\mathbf{R}(x,z) \wedge \mathbf{R}(z,y)))\,,\ \neg \exists x \mathbf{R}(x,x)\,\}\end{aligned}$$

Motivera dina svar noga! (4)

8. Betrakta språket $\langle c, d; F; M, P, Q\rangle$ av typ $\langle 0, 0; 1; 1, 1, 1\rangle$. För var och en av följande påståenden i första ordningens logik på formen $\Gamma \vdash \sigma$, avgör om det gäller. För påstående som gäller, konstruera även ett formellt bevis som vittnar om det. För påstående som inte gäller, motivera mycket noga varför!

(a) $\forall x\,(M(x) \longrightarrow Q(x))\,,\ \exists x\,(\neg P(x) \wedge M(x)) \ \vdash\ \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$

(b) $\vdash\ \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \longleftrightarrow \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$

(c) $d \doteq F(c), \forall x \neg(F(x) \doteq c),\ \forall x \forall y \big(F(x) \doteq F(y) \longrightarrow x \doteq y\big)\ \vdash\ \neg(d \doteq F(d))$ (7)

LYCKA TILL !