

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift) samt 2 problem (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.

18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.

**Skrivtid:** 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

#### UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - e^{-3x^2}}{e^{x^2} - e^{-x^2}}$ .
2. Motivera varför funktionen  $\frac{\ln^3 x}{x}$  måste anta ett minsta och ett största värde på det **slutna** intervallet  $1 \leq x \leq e$  samt bestäm dessa värden.
3. Beräkna integralen  $\int_0^\infty \frac{2x dx}{1+x^4}$  genom att t ex utnyttja substitutionen  $x^2 = u$ .
4. Skissera kurvan

$$y = \frac{(x-1)^2}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}.$$

Bestäm särskilt asymptoterna samt lokala extrempunkterna.

5. Beräkna integralen  $\int_0^\infty x e^{-x} dx$ .
6. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y'' + y = x$  för vilken  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .
7. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y' - 3x^2 y = 3x^2$  för vilken  $y(0) = 0$ .
8. Ange de  $x$  för vilka  $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{x^2}\right)^n$  konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa  $x$ .
9. Potensserien  $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2 3^n}$  har konvergensradien lika med 3. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka  $x$  serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.
10. Funktionen  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$  har ett största värde på det **öppna** intervallet  $-\infty < x < \infty$ . Bestäm detta värde och motivera noggrant varför det angivna värdet är det största.  
**Ledning:**  $f'(x) = 2 \frac{(1-x)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

V.G.V!

## PROBLEM

1. Kurvorna  $y = x^4$  och  $y = x^2$  har gemensamma tangenter. Bestäm samtliga och ange tangeringspunkterna på respektive kurva.

2.

$$f(x) = \frac{\sin(2x^2) - \sin(x^2)}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att  $f(x)$  är kontinuerlig i origo.

b) Bevisa att  $f'(0) = 1$ .

c) Bevisa att  $x$ -axeln är asymptot då  $x \rightarrow \pm\infty$ .

## DIVERSE FORMLER OCH SATSER

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$