UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Tentamen i matematik, 5 hp
KandData, KandMa
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I
2020-06-01

Skrivtid: 08.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Endast papper och penna. För godkänd kurs krävs minst 20 poäng (inklusive ev bonuspoäng). För betyg 4 eller 5 krävs minst 25 resp minst 32 poäng. Lösningarna ska vara försedda med förklarande text och relevanta motiveringar.

Om inget annat sägs i uppgifterna, så används den satslogiska signaturen $\langle A, B, C\rangle$.

1. Låt $\sigma = \langle\ ; \overline{F} ; \overline{P}, \overline{Q}\,\rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ ;2\ ;1,\ 2\rangle$. Betrakta σ-strukturen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N},\ F,\ P,\ Q\,\rangle$, där $F(n,m) = n+m$, $P = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ är primtal}\}$ och $Q = \{(n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : n < m\,\}$. Översätt följande till predikatlogiska slutna formler i språket LR(σ).

(a) Summan av två primtal är aldrig ett primtal.

(b) Det finns inget största primtal. (4)

2. Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF). Förklara hur du kommit fram till ditt svar!

$$(A \vee \neg B) \longrightarrow (C \longrightarrow (A \wedge B)) \qquad (4)$$

3. Konstruera formella bevis i naturlig deduktion för följande påståenden. I (c) och (d) används $\sigma = \langle \overline{c},\ \overline{d};\ \overline{F}\,;\overline{P},\ \overline{Q},\ \overline{R}\rangle$ av ställighet $\langle 0,\ 0;\ 1\,;1,\ 1,\ 2\rangle$.

(a) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \longrightarrow B)$

(b) $\neg A \vee \neg\neg B \vdash\ A \longrightarrow B$

(c) $\forall x\big(\neg\overline{Q}(x) \longrightarrow \neg\overline{P}(\overline{c})\big),\ \forall x\, \overline{P}(x) \vdash \overline{Q}(\overline{d})$

(d) $\forall x\,\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{R}(x, \overline{F}(x))\big),\ \exists x\, \overline{Q}(x),\ \forall x\,\big(\overline{Q}(x) \longrightarrow \overline{P}(\overline{c})\big) \vdash\ \exists x\, \overline{R}(\overline{c}, x).$ (10)

4. Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. I (b) är $\overline{P}$, $\overline{Q}$ och $\overline{R}$ ett-ställiga relationssymboler. Motivera dina svar noggrant!

(a) $(A \longrightarrow C) \longrightarrow B),\ A \longrightarrow (\neg C \longrightarrow B) \models\ B$

(b) $\forall x\,\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big),\ \exists x\, \overline{R}(x),\ \neg\exists x\,\big(\overline{Q}(x) \wedge \overline{R}(x)\big) \models\ \exists x\, \neg\overline{R}(x).$ (4)

5. Avgör om följande påståenden på formen $\Gamma \vdash \tau$ gäller, dvs om τ är bevisbar i naturlig deduktion från premisserna i Γ. $\overline{P}$ och $\overline{Q}$ är ett-ställiga relationssymboler.

(a) $\exists x\, \overline{P}(x) \longrightarrow \forall x\, \overline{Q}(x) \vdash \forall x\,\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big)$

(b) $\forall x\,\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big) \vdash \exists x\, \overline{P}(x) \longrightarrow \forall x\, \overline{Q}(x).$

Motivera dina svar noggrant! (4)

6. Definiera ett två-ställigt konnektiv $\oplus$ genom att $\varphi \oplus \psi$ är sann om och endast om både φ och ψ är falska. Visa att $\{\oplus\}$ är funktionellt komplett.
Förklara alla dina påståenden! (4)

FLER UPPGIFTER PÅ NÄSTA SIDA !

7. Betrakta språket $\sigma = \langle\ ;\ ;\ \overline{P},\ \overline{Q}\ \rangle$ av ställighet $\langle\ ;\ ; 1,\ 1\ \rangle$.

(a) Visa genom att resonera med σ-strukturer att

$$\neg\exists x\, \overline{Q}(x),\ \exists x\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big) \models \exists x\, \neg\overline{P}(x).$$

(b) Konstruera bevis i naturlig deduktion som vittnar att

$$\neg\exists x\, \overline{Q}(x),\ \exists x\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big) \vdash \exists x\, \neg\overline{P}(x).$$ (4)

8. Låt $\sigma = \langle\ ; \overline{F}; \overline{R}\ \rangle$ av ställigheter $\langle\ ; 1; 2\ \rangle$. Låt $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, där

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & = & \forall x \neg\overline{R}(x,x) \\ \varphi_2 & = & \forall x \forall y \forall z(\overline{R}(x,y) \wedge \overline{R}(y,z) \longrightarrow \overline{R}(x,z)) \\ \varphi_3 & = & \forall x\, \overline{R}(x, \overline{F}(x)) \end{array}$$

(a) Visa att Γ är oberoende, dvs visa att ingen av formlerna i Γ kan bevisas i naturlig deduktion från de övriga två formlerna.

(b) Ange en modell för Γ.

(c) Visa att varje modell för Γ har oändligt många element i sitt universum, dvs Γ saknar ändliga modeller. (6)

LYCKA TILL !