UPPSALA UNIVERSITET | TENTAMEN

Matematiska institutionen | **Logik och bevisteknik**

Vera Koponen | 2022-04-11

Skrivtid: 8 – 13 . *Tillåtna hjälpmedel:* pennor, radergummi, linjal, papper (det sistnämnda tillhandahålles). ***Alla svar (utom till uppgift 4) måste motiveras på lämpligt sätt. Skriv svaren på endast en sida av varje inlämnat pappersark.*** Om man har fått minst 10, respektive minst 15, poäng på duggan som ägde rum i april 2021 så får man uppgifterna 1–2, respektive 1–3, tillgodoräknade (dvs man får full poäng på dem utan att behöva lösa dem). Maximalpoängen är 40. För att få betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 20, 26 respektive 32 poäng.

1. Antag att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. (3p)

(a) Stämmer det att $\{\neg(q \to r)\} \models (q \to p) \vee \neg r$?

(b) Stämmer det att $\{(q \to p) \vee \neg r\} \models \neg(q \to r)$?

2. Konstruera en KNF (konjunktiv normalform) som är ekvivalent med $(q \to p) \vee \neg r$. (2p)

3. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (4p)

(a) $\{\varphi \wedge \neg\psi,\ \chi \to \psi\} \vdash \neg\chi$.

(b) $\{\varphi \vee \psi,\ \varphi \to \chi,\ \psi \to \theta\} \vdash \chi \vee \theta$.

4. Låt *Huggorm, Svamp* och *Flugsvamp* vara 1-ställiga relationssymboler och *GiftigareÄn* en 2-ställig relationssymbol. Översätt följande påståenden till första ordningens logik med dessa symboler: (4p)

(a) Flugsvampen är den giftigaste svampen.

(b) Huggormar är giftigare än flugsvampar.

5 Låt $\sigma_1 = \langle\ ;\ ; R\rangle$ vara en första ordningens signatur där relationssymbolen R har ställighet 2. Låt $\mathcal{A} = \langle\{0,1,2,3,4\};\ ;\ ;\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}\rangle$ vara en σ_1-struktur. Vilka av följande satser är sanna i $\mathcal{A}$? (5p)

(a) $\exists x \forall y R(x,y)$

(b) $\forall x \exists y R(x,y)$

(c) $\exists x \exists y \exists z \big(R(y,x) \wedge R(z,x) \wedge \neg(y = z)\big)$.

6. Avgör om följande sekventer stämmer, där R är en 2-ställig relationssymbol: (5p)

(a) $\neg\exists x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)) \ \vdash\ \forall x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

(b) $\forall x \forall y \exists z \Big((R(x,z) \wedge R(z,y) \wedge R(y,z) \wedge R(z,x))\Big) \ \vdash\ \exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

Fortsätter på nästa sida

7. Låt c vara en konstantsymbol och P och Q vara 1-ställiga relationssymboler. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (5p)

(a) $\{\exists x P(x) \to \forall x Q(x)\} \vdash P(c) \to Q(c)$.

(b) $\big\{\forall x(P(x) \lor Q(x)),\ \exists x \neg P(x)\big\} \vdash \exists x Q(x)$.

8. Låt $\sigma_2 = \langle a; f; P \rangle$ där f of P är 1-ställiga, $\mathcal{M} = \langle M; a^{\mathcal{M}}; f^{\mathcal{M}}; P^{\mathcal{M}} \rangle$, där $M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $a^{\mathcal{M}} = 3$, $f^{\mathcal{M}}(x) = 5 \cdot x$ och $P^{\mathcal{M}} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (dvs de jämna talen).
(a) Beskriv en formel $\varphi(x)$ sådan att $\mathcal{M} \models \varphi(1) \land \neg\varphi(3) \land \neg\varphi(8)$.
(b) Gäller det att $\mathcal{M} \models \forall x\Big(\neg P(x) \lor \neg P(f(x))\Big)$?
(c) Beskriv en formel $\psi(x)$ så att det enda elementet i M som satisfierar denna formel är $x = 75$. (6p)

9. Låt $\mapsto$ vara ett konnektiv (också kallad sanningsvärdesfunktion) som tolkas på så vis att $A \mapsto B$ är sann om B är sann och $A \mapsto B$ är falsk om B är falsk. (Så sanningsvärdet för $A \mapsto B$ beror bara på B.)
(a) Hitta en (satslogisk) formel ψ sådan att ψ innehåller '$\to$' och om vi byter alla förekomster av '$\to$' i ψ mot '$\mapsto$' så blir resultatet en formel χ som är ekvivalent med ψ.
(b) Visa att om φ är en formel som endast är uppbyggd med hjälp av konnektiven $\neg$ och/eller $\mapsto$ så finns en *atomär* formel (också kallad satslogisk variabel) p sådan att φ är ekvivalent med p eller med $\neg p$.
(c) Visa att det finns en formel θ, uppbyggd med de vanliga konnektiven $\neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$ (man behöver inte nödvändigtvis använda alla), sådan att det *inte* finns någon formel som som är uppbyggd endast med $\neg$ och $\mapsto$ och som är ekvivalent med θ. (6p)

Lycka till!