UPPSALA UNIVERSITET **Automatateori**
Matematiska institutionen
Vera Koponen

Lektion 3

Kommentar: I uppgifterna som handlar om att avgöra om ett språk är reguljärt eller inte så kan man försöka tänka så här: Finns det en annan ("enklare") beskrivning av språket med vilken man kan se att språket är reguljärt? Eller verkar det vara så att en maskin som kan avgöra om en godtycklig sträng (över det givna alfabetet) tillhör språket behöver ha obegränsat minne (tex komma ihåg antalet a:n och b:n i e godtyckligt lång sträng)? I det senare fallet kan man försöka visa att språket inte är reguljärt (finita automater har begränsat minne).

1. För var och en av de tre DFA:erna i Figur 1 i slutet av dokumentet, använd särskiljandealgoritmen för att finna en *minimal* DFA som accepterar samma språk.

2. Från kursboken: Test 2.7 (det räcker att använda särskiljandealgoritmen), Övn, 2.2 c, 2.3 b, Övn 2.5, Övn 2.7.

3. (a) Visa att följande språk inte är reguljärt:

   $$L = \{w \in \{a,b\}^* : \ w \text{ innehåller minst tre gånger så många } b \text{ som } a\}.$$

   (b) Är $\overline{L}$ reguljärt? (Komplementet tas med avseende på alla strängar över $\{a,b\}$.)

4. (För studenter som har läst logik) Låt p tillhöra en satslogisk signatur och låt $\Sigma = \{p, \neg, \wedge, (,)\}$. Låt vidare L vara mängden av alla strängar över Σ som representerar (syntaktiskt korrekt uppbyggda) satslogiska formler. Visa att L inte är reguljär.

5. Bestäm för vart och ett av följande språk om det är reguljärt eller inte. Om det är reguljärt så skall ett reguljärt uttryck eller en NFA för språket anges, alternativt för något relaterat språk så att slutenhetsegenskaper för reguljära språk kan användas. Om det inte är reguljärt

så ska ett bevis för detta ges med med pump- eller särskiljandesatsen.

$$
\begin{aligned}
L_1 =& \{uvu^{rev} : u, v \in \{a, b\}^* \text{ och } |u| = 2\} \\
L_2 =& \{uvu^{rev} : u, v \in \{a, b\}^* \text{ och } |v| = 2\} \\
L_3 =& \{w \in \{a, b\}^* : \; w \text{ har ingen förekomst av delsträngen } aabb\} \\
L_4 =& \{w \in \{a, b\}^* : \; w \text{ har lika många förekomster av delsträngen } aa \\
& \quad \text{som av delsträngen } bb\}
\end{aligned}
$$

6. Från kursboken: Test 2.8, Övn 2.8 – 2.14.

7. I delarna (a)-(c) nedan ska du avgöra om språket som beskrivs är reguljärt eller inte. (En krona var värd 100 öre på den tiden då öresmynt användes.)

   (a) Vi tänker oss en växelautomat i vilken man kan mata in 25- och 50-öringar och om antalet ören är jämnt delbart med 100 så får man tillbaka (efter att man tryckt på knappen 'klar') det antal enkronor som motsvarar det insatta beloppet. I annat fall får man bara tillbaka de insatta pengarna. Låt 50-öresmynt kodas av symbolen 'a' och 25-öresmynt av symbolen 'b'.[1] Beskriv *med ord* språket (över alfabetet $\{a, b\}$) av de sålunda kodade myntföljderna som motsvarar strängar som kan växlas till (enbart) enkronorsmynt. Är detta språk reguljärt?

   (b) Nu är tanken att växelautomaten bara ska växla belopp på högst 100 kronor, så de strängar av mynt (a:n och b:n) som ska accepteras är de vars belopp är ett antal ören som är jämnt delbart med 100 och som inte överstiger 100 kronor. Dessutom behöver man kolla att det finns minst 100 enkronor i automaten. Låt enkronorsmynt kodas av symbolen 'c'. Strängarna som ska accepteras är (precis) de som har formen xy där $x \in \{a, b\}^*$, $y \in \{c\}^*$, antalet ören som x motsvarar är ≤ 10000 och jämnt delbart med 100, och $|y| \geq 100$. Är detta språk reguljärt? [2]

   (c) I denna sista del av uppgiften tänker vi oss att växelautomaten kan växla hur stora belopp som helst förutsatt att det finns tillräckligt många enkronor i förrådet (och att det insatta beloppet av ören är jämnt delbart med 100). Strängarna som ska accepteras är då

[1] Så en krona motsvaras av två a, eller av fyra b, eller av ett a och två b.

[2] y-delen matas förstås inte in av den som vill växla, utan motsvarar förrådet av enkronor i växelautomaten, men vi kan på detta sätt formulera problemet i termer av strängar som accepteras eller ej.

på formen xy där $x \in \{a, b\}^*$, $y \in \{c\}^*$, antalet ören som x motsvarar, säg $ö$, är jämnt delbart med 100 och $ö$ dividerat med 100 är högst $|y|$ (= antalet enkronor i automatens förråd). Är detta språk reguljärt?

8. Antag att L_1 och L_2 är reguljära och att L_3 inte är reguljärt. Vilka av följande slutsatser kan vi då säkert dra? Om du anser att svaret är ja så motivera med slutenhetsegenskaper hos reguljära språk. Om du anser att svaret är nej så ange motexempel. (Motexempel kan vara svåra att komma på i vissa fall.)

   (a) $L_1 L_2$ är reguljär.
   (b) $L_1 L_3$ är reguljär.
   (c) $L_1 L_3$ är inte reguljär.
   (d) $\overline{L_1}$ är reguljär.
   (e) $\overline{L_3}$ är reguljär.
   (f) $\overline{L_3}$ är inte reguljär.
   (g) $L_1 \cup L_2$ är reguljär.
   (h) $L_1 \cap L_3$ är reguljär.
   (i) $L_1 \cup L_3$ är inte reguljär.
   (j) $L_1 \setminus L_2$ är reguljär.[3]
   (k) $L_1 \setminus L_3$ är reguljär.

[3]Ledning: $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$.

Figur 1: