Svar/lösningar till Övningar 2

1. Följande är formler (enl. Def. 3.1.2):

   a, c, f, i, j, k, n.

2. (a) $((p_3 \to p_2) \to (\neg p_3))$

   (b) $((\neg(p_3 \to p_2)) \to (\neg\bot))$

   (c) $(\neg((\neg(\bot \vee (\neg p_1))) \wedge (\neg((\neg p_1) \to p_3))))$

3. (a) Endast (c).

   (b) Både (a) och (b), inte (c).

   (c) Endast (b)

   (d) Ingen av dem.

4. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}\,(\wedge E)}{p_0 \vee p_2}\,(\vee I) \qquad \dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_1}\,(\wedge E)}{(p_0 \vee p_2) \wedge p_1}\,(\wedge I)$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_4 \wedge \neg p_4}^{1}}{p_4}(\wedge E) \qquad \dfrac{\cancel{p_4 \wedge \neg p_4}^{1}}{\neg p_4}(\wedge E)}{\bot}(\neg E)}{\neg(p_4 \wedge \neg p_4)}(\neg I)^{1}$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1 \vee p_2}^{1} \qquad (p_1 \vee p_2) \to p_3}{p_3}(\to E) \qquad \neg p_3}{\bot}}{\neg(p_1 \vee p_2)}(\neg I)^{1}$$

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1 \vee p_2}^{2} \qquad \dfrac{\cancel{p_1}^{1} \qquad \dfrac{\neg p_1 \wedge \neg p_2}{\neg p_1}(\wedge E)}{\bot}(\neg E) \qquad \dfrac{\cancel{p_2}^{1} \qquad \dfrac{\neg p_1 \wedge \neg p_2}{\neg p_2}(\wedge E)}{\bot}(\neg E)}{\bot}(\vee E)^{1}}{\neg(p_1 \vee p_2)}(\neg I)^{2}$$

5. Se kursboken for definitioner.

6 (a) tautologi
(b) satisfierbar, ej tautologi.
(c) tautologi.
(d) satisfierbar, ej tautologi.
(e) satisfierbar, ej tautologi.
(f) satisfierbar, ej tautologi.
(g) osatisfierbar.

7. Ingen av ekvivalenserna stämmer.

8. (a) Ja, välj t.ex. ψ som $p \vee \neg p$.
Då spelar det ingen roll vad φ är.

(b) Ja, välj t.ex. både φ och ψ till att vara $p \wedge \neg p$.

(c) Ja, välj t.ex. både φ och ψ till att vara $p \vee \neg p$.

(d) Nej, för hur vi än tilldelar sanningsvärden till φ och ψ så blir $\neg(\neg\varphi \vee \psi) \wedge \psi$ falsk.

(e) Nej, för $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ är sann oavsett vilka sanningsvärden som φ och ψ tilldelas (dvs. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ är en tautologi oavsett vad φ och ψ är).

9. (a) Låt t.ex. φ vara $p_0 \to p_1$.

(b) Bevis med induktion över formlers uppbyggnad/komplexitet.

Basfall: Om φ är atomär, dvs om φ är p_i för något i, så $V^*(\varphi) = F$ enligt antagandet om V.

Induktionssteg: Låt $\varphi \in LP(\sigma)$ vara icke-atomär och sådan att endast konnektiven $\wedge$ och/eller $\vee$ förekommer i φ. Induktionsantagandet är att $V^*(\psi) = F$ gäller för alla $\psi \in LP(\sigma)$ som är enklare (har lägre komplexitet) än ψ, dvs (mer precist) vars parsingträd har lägre höjd än parsingträdet för φ.

Fall 1. Antag att φ är $\psi \wedge \chi$. Enligt induktionsantagandet så $V^*(\psi) = F$ och $V^*(\chi) = F$ vilket ger $V^*(\varphi) = F$.

Fall 2. Antag att φ är $\psi \vee \chi$. Enligt induktionsantagandet så $V^*(\psi) = F$ och $V^*(\chi) = F$ så $V^*(\varphi) = F$.

Detta avslutar beviset.

(c) Antag att $\varphi \in LP(\sigma)$ endast innehåller konnektiven $\wedge$ och/eller $\vee$ (eller inga konnektiv alls). Enligt del (b) så $V^*(\varphi) = F$. Därmed kan φ inte vara en tautologi. Så alla tautologier måste innehålla minst ett av konnektiven $\neg$, $\to$ eller $\leftrightarrow$.