UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Tentamen i matematik, 5 hp
KandData, KandMa
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I
2018-08-27

Skrivtid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). För godkänd kurs krävs att alla explicita kursmål är godkända samt att tentamenspoängen är minst 18 (inklusive ev bonuspoäng). För betyg 4 eller 5 krävs dessutom att tentamenspoängen är minst 25 resp minst 32. För varje uppgift anges vilket/vilka explicita kursmål som uppgiften berör.

Uppgifterna 1-5 behandlar satslogik. I dessa uppgifter används den satslogiska signaturen $\sigma = \{A, B, C\}$.

1. [Mål 1, 3, 4.] Låt $\sigma = \{A,\ B,\ C\}$ vara en satslogisk signatur.

(a) Redogör för hur formler i LP(σ) byggs upp.

(b) Förklara vad som menas med en σ-struktur.

(c) Låt φ vara en formel i LP(σ). Vad menas med att φ är satisfierbar?

(d) Låt $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ vara en mängd av formler och låt φ vara en formel i LP(σ). Vad menas med att $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$? (4)

2. [Mål 5.] Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF). Förklara hur du kommit fram till ditt svar!

$$((A \longrightarrow (A \wedge \neg B)) \wedge (B \longrightarrow (B \wedge \neg A)) \qquad (4)$$

3. [Mål 2.] Konstruera formella bevis i naturlig deduktion för följande påståenden.

(a) $A \vdash \neg(\neg A \wedge B)$

(b) $(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (4)

4. [Mål 4.] Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange en σ-struktur som är motexempel. För varje slutledning som är giltig, konstruera att bevis i naturlig deduktion som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $A \longrightarrow (B \longrightarrow C) \models (A \longrightarrow B) \longrightarrow C$

(b) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow C \models A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$ (4)

5. [Mål 6.] Avgör om följande påståenden på formen $\Gamma \vdash \tau$ gäller, dvs om τ är bevisbar i naturlig deduktion från premisserna i Γ.

(a) $A \wedge B \longrightarrow C \vdash A \longrightarrow B \vee C$.

(b) $A \vee (B \longrightarrow C), \neg C, B \vdash A$.

Motivera dina svar noggrant! (4)

FLER UPPGIFTER PÅ NÄSTA SIDA !

Uppgifterna 6-11 behandlar predikatlogik, dvs första ordningens logik.

6. [Mål 7, 9, 10.] Låt $\sigma = \langle\, \overline{c}; \overline{F}; \overline{P} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\, 0\,; 1\,;\, 2 \rangle$.

(a) Ange alla termer i språket LR(σ).

(b) Ange alla atomära formler i språket LR(σ).

(c) Låt τ vara formeln $\neg\overline{F}(\overline{c}) \doteq \overline{c} \wedge \forall x \forall y(\overline{P}(x,y) \longrightarrow \overline{P}(\overline{F}(x), \overline{F}(y)))$.
Ange två σ-strukturer $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ sådana att $\mathcal{A} \models \tau$ och $\mathcal{B} \not\models \tau$. (4)

7. [Mål 8.] Låt $\sigma = \langle\ ; \overline{F}\,; \overline{P}, \overline{D}\, \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ ; 2\ ; 1,\ 2 \rangle$. Betrakta σ-strukturen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N},\ F,\ P,\ D\, \rangle$, där $F(n,m) = n+m$, $P(n) \iff n$ är ett primtal, och $D(n,m) \iff n$ är delbar med m. Översätt följande till predikatlogiska slutna formler i språket LR(σ).

(a) Summan av två primtal är aldrig ett primtal.

(b) Varje naturligt tal som inte är ett primtal är delbart med ett primtal. (2)

8. [Mål 12.] Låt $\sigma = \langle \overline{c};\ ; \overline{P}, \overline{Q} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle 0;\ ; 1,\ 1 \rangle$. Konstruera bevis i naturlig deduktion för följande påståenden.

(a) $\forall x\big(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x)\big),\ \neg\overline{P}(\overline{c}) \vdash \overline{Q}(\overline{c})$

(b) $\forall x\big(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)\big),\ \exists x \neg\overline{Q}(x) \vdash \exists x \neg\overline{P}(x)$ (4)

9. [Mål 11, 12.] Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; \overline{P}, \overline{Q} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ 0;\ ; 1,\ 1 \rangle$. Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange en σ-struktur som är motexempel. För varje slutledning som är giltig, konstruera att bevis i naturlig deduktion som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $\forall x\big(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x)\big) \models \forall x \overline{P}(x) \vee \forall x \overline{Q}(x)$

(b) $\forall x \overline{P}(x) \vee \forall x \overline{Q}(x) \models \forall x\big(\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x)\big)$ (4)

10. [Mål 9, 14.] Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; \overline{R}\, \rangle$ av ställigheter $\langle\ ;\ ; 2 \rangle$. Låt $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, där

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \forall y \forall z(\overline{R}(x,y) \wedge \overline{R}(y,z) \longrightarrow \overline{R}(x,z)) \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y\big(\overline{R}(x,y) \wedge \overline{R}(y,x) \longrightarrow x \doteq y\big) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y\big(\overline{R}(x,y) \vee \overline{R}(y,x)\big)
\end{aligned}$$

(a) Ange en modell för Γ.

(b) Visa att Γ är oberoende, dvs visa att ingen av formlerna i Γ kan bevisas i naturlig deduktion från de övriga två formlerna. Du ska alltså visa att $\varphi_1, \varphi_2 \nvdash \varphi_3$ och $\varphi_1, \varphi_3 \nvdash \varphi_2$ och $\varphi_2, \varphi_3 \nvdash \varphi_1$. (4)

11. [Mål 13.] Formulera sundhetssatsen och fullständighetssatsen för första ordningens logik samt förklara i ord vad de innebär. Ange exempel på var i tentauppgifterna du har använt dig av någon av satserna, eller hur man skulle kunna använda dem. (2)

LYCKA TILL !