UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Fourieranalys

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
November 9, 2022

Contents

1. TODO

- Next lecture is laplace transform (integral transform)
- Review ODE notes
- Lebesgue-integral
- Över-undertrappor bevis envariabelanalys
- Exercise 3
- Standardintegrals
- Sätt att skriva cos och sin på
- Trigonometriska substitutioner
- Texa publicerade föreläsningsanteckningar
- Se PDF 25
- Gör sista exemplet
- Se bevis för Sats 5.2 i föreläsningsanteckningar
- Uniform limits behave nicely with respecft to derivatives

2. Bakgrund

Låt oss betrakta $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ så att $f(0) = f(\pi) = 0$
När kan vi skriva denna funktion $f(x)$ som en analytisk funktion (potensserie), det vill säga:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n \cdot x) \tag{1}$$

Där $a_n \in \mathbb{R}$ är konstanter.

Inte alla funktioner tillfredställer att intervallet $[0, \pi]$ ger en konvergerande potensserie för f, frågan man kan ställa sig är *när kan vi skriva f som en serie av trigonometriska funktioner?*

Vi kommer inse att *om* f går att skriva som en potensserie av trigonometriska funktioner, så behöver vi hitta våra koefficienter. I fallet med MacLaurin serier så kom de (a_n) från derivatan.
I detta fall kommer det från:

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

I någon mening kommer analys-delen av denna kurs från att vi studerar funktioner utifrån integraler, såsom den ovan.
Integralen ovan är integral-transform.

Vi kan även skriva:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

Något mer vi kommer undersöka, är om vår fourierserie konvergerar, och om den konvergerar mot vår funktion (detta är inte alltid uppenbart)

2.1. Komplexa exponentialer.

Det finns en viktig eulerformel. Vi alla känner till e^x, men vad händer om $x = a + bi$?

Definition/Sats 2.1: Eulers formel

Vi får då $e^{a+bi} = \underbrace{e^a}_{\in \mathbb{R}} e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$ för varje $a, b \in \mathbb{R}$

Kom ihåg att vi kan representera komplexa tal med polära koordinater.
Vi har då att varje komplext tal $a + bi$ kan representeras som $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi får då $a + bi = re^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta}$

Övning:
Använd Eulers formel för att visa att $\cos(2x) = \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$ och $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Anmärkning:
Komplexa exponentialer är *inte* injektiva, alltså fungerar inte logaritmen.
Exempelvis kan vi betrakta $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$

Definition/Sats 2.2: Fourierpolynomial

Är på formen:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx}$$

Kallas för polynom för att vi har $e^{ikx} = (e^{ix})^k$ som är ett monom i e^{ix}

Vi kan uttrycka Fourierpolynom m.h.a sinus och cosinus enligt följande:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k})\cos(kx) + i(c_k - c_{-k})\sin(kx)$$

Anmärkning:
Detta är samma fourierpolynom som var på *exponential form* i *trigonometrisk form*

2.2. **Lebesgue integralen.**

Den vanliga definitionen av integralen som vi alla är vana vid är Riemann-integralen.

3. Laplace Transform

Vi kommer inte se många komplexa exponentialer, detta stöter vi på senare när vi ska kika på fourierserier och fouriertransformationer.

Precis som alla integraltranformationer, så är tanken bakom att de ska hjälpa att lösa en ODE/PDE. Vi kan tänka på den som en maskin som man stoppar in en funktion, och så spottar den ut en annan funktion:

$$f(t) \sim \mathcal{L}[f](s) = (\widetilde{f}\ (s))$$

Den nya funktionen har lite andra egenskaper. Notera att vi byter variabler från t till s.

Laplace transformationen har lite nice egenskaper:

- $f'(t) \sim \mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)$

Det finns såklart en "inverse-maskin", som tar en laplace transformation som input och ger ursprungliga funktionen:

$$\mathcal{L}[f](s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} f(t)$$

Genom att använda den nice egenskapen på en hel differentialekvation får vi istället en ekvation som består av $s\cdot$ gånger någon funktion, vilket är betydligt lättare att lösa.

Definition/Sats 3.1: Laplace Transformationen

Laplace Transformationen av en funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ är

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Anmärkning:
Laplace transformationen bryr sig inte om vad som händer på den negativa delen av domänen, den vill bara att den är definierad över $\mathbb{R}_+$, alltså:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[H(t) \cdot f(t)](s)$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Vi tappar alltså vad som händer med funktionen i dens negativa domän.

Anmärkning:
Enbart om integralen är definierad. Inte alla funktioner har Laplacetransformationer

Vi kan tänka oss att vi "integrerar" bort t, kvar får vi en funktion som beror på s.

Ibland får man ett svar som är definierad på negativa värden av t och *ibland* löser den DE:n, men absolut inte alltid och detta måste verifieras för hand och kan inte hänvisas till teori.

Exempel:
Beräkna $\mathcal{L}[t^n](s)$:

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt \overset{\text{parts}}{=} \left[t^n \cdot (-\frac{e^{-st}}{s}) \right]_0^\infty + \int_0^\infty n t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{s} dt$$

$$\text{Om } s > 0 \Rightarrow 0 + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt \overset{\text{parts}}{=} \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt$$

$$= \cdots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{n!}{s^n} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Anmärkning:
Eftersom integralen för $s < 0$ divergerar, så säger vi att Laplacetransformationen inte är definierad för $s < 0$

Exempel:
Beräkna $\mathcal{L}[e^{at}](s)$:

$$\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt = \left[\frac{e^{t(a-s)}}{a-s}\right]_0^\infty$$

$$\text{Om } s > a \quad \Rightarrow \frac{1}{s-a}$$

Definition/Sats 3.2

Om $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ är:

- Styckvis kontinuerlig (om i varje begränsat intervall $[0, b]$, så är f begränsad och har ändligt många punkter av diskontinuitet)
- Av exponential ordning, dvs det finns konstanter $M > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ för alla $t \geq 0$

Då kommer integralen $\mathcal{L}[f](s)$ konvergera $\forall\ s > \alpha$

Anmärkning:
Med exponential ordning menas att:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{Me^{\alpha t}} = 0$$

Anmärkning:
Om Laplacetransformationen konvergerar för s_0, så kommer den konvergera $\forall\ s > s_0$

Exempel:
Varje polynom $p(t)$ är av exponentiell ordning med $\alpha = \varepsilon$. Detta för att oavsett hur litet α är, så kommer en exponentialfunktion växa mycket snabbare än ett polynom tillslut.

Anmärkning:
Laplacetransformationen är linjär (följer från att integralen är linjär)

Exempel:
Funktionen $f(t) = e^{t^2}$ är *inte* av exponentiell ordning. t^2 växer snabbare än vilket α som helst. Denna funktion har inga Laplacetransformationer oavsett värde på s

Anmärkning:
Det finns funktioner som inte är styckvis kontinuerliga men som har konvergerande Laplacetransformation. Vi kommer i denna kurs bara bry oss om de som är styckvis kontinuerliga.

Även om man inte vet att lösningen till en DE uppfyller kriterierna kan man alltid testa!

Definition/Sats 3.3: Convolution

Convolution $*$ of $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is:

$$(f * g)(t) \int_0^t f(t-u) \cdot g(u)du$$

Anmärkning:
$f * g = g * f$

3.1. **Egenskaper hos Laplacetransformation.**

- Om Laplacetransformationen existerar vid s_0, då existerar Laplacetransformationen för samma funktion i s för alla $s > s_0$
- Laplacetransformationen är linjär
- $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$
- $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} \cdot \mathcal{L}[f](s) \quad a > 0$
  Vi vill döda vad som händer på negativa sidan när vi skiftar med a, för vi vet inte vad som händer där, varpå "heavyside" funktionen $H(t-a)$ kommer in
- $\mathcal{L}[f(at)](s) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\dfrac{s}{a}\right) \quad a > 0$
- $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$ (måste hålla koll på initialvärdena på DE:n)
- $\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f](s)\right)$ (missbildad spegling av föregående punkt)
- $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$

Exempel:
Vad är $\mathcal{L}[\sin(at)]$ och $\mathcal{L}[\cos(at)]$?

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(t)] &= \mathcal{L}[-\cos'(t)] = -\mathcal{L}[\cos'(t)] = -s \cdot \mathcal{L}[\cos(t)] + \cos(0) \\
&= -s \cdot \mathcal{L}[\cos(t)] + 1 \\
\mathcal{L}[\cos(t)] &= \mathcal{L}[\sin'(t)] = s\mathcal{L}[\sin(t)] - \sin(0) \\
&\Rightarrow \mathcal{L}[\sin(t)] = -s^2\mathcal{L}[\sin(t)] + 1 \\
\mathcal{L}[\sin(t)](1+s^2) = 1 &\Rightarrow \mathcal{L}[\sin(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} \\
&\Rightarrow \mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Vi påminner om att Laplarretransformationen är bara definierad över de positiva reella talen, så vi delar upp i fall då $a < 0$ och $a > 0$:

Fall $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}[\sin(t)]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{s^2+a^2} \\
\mathcal{L}[\cos(at)](s) &= \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}[\cos(t)]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{s/a}{(s/a)^2+1} = \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Fall $a < 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}[\sin(-(-a)t)](s) &= \mathcal{L}[-\sin(-at)](s) = -\mathcal{L}[\sin(-at)](s) \\
&\Rightarrow -\frac{-a}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2} \\
\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[\cos(-(-a)t)] &= \mathcal{L}[\cos(-at)](s) = \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Fall a=0:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \mathcal{L}[0](s) = 0 \\
\mathcal{L}[\cos(at)](s) &= \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Vi visar att Laplarre av en deriverad funktion (en gång!) är s gånger Laplarren:

Bevis 3.1

Vi skriver vad vi vet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f'(t)e^{-st}dt \\
&\overset{\text{parts}}{=} \lim_{A\to\infty}[f(t)e^{-st}]_0^A + s\int_0^A f(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{A\to\infty} f(A)e^{-sA} - f(0)\cdot 1 + \int_0^A f(t)e^{-st}dt \\
&= 0 - f(0) + s\mathcal{L}[f(t)](s) \Leftrightarrow s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)
\end{aligned}$$

$\square$

4. Tillämpningar på differentialekvationer

Innan vi börjar, ska vi notera unikheten av Laplacetransformationen:

Definition/Sats 4.1

Om Laplacetransformationen för 2 kontinuerliga funktioner sammanfaller, så måste funktionerna vara samma. Om de enbart är kontinuerliga i en punkt, så måste de sammanfalla i den punkten om Laplacetransformationen är densamma.

Då kan vi dra slutsatsen att det finns en invers $\mathcal{L}^{-1}$ (på grund av unikhet)

Exempel:
Lös följande linjära förstaordningens IVP med konstanta koefficienter med Laplace:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Det första vi gör är att köra Laplacetransformation på allt:

$$\mathcal{L}[y'(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[3]$$

$$s \cdot \mathcal{L}[y(t)] - \underbrace{y(0)}_{2} + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[3]$$

$$\mathcal{L}[y(t)](s+1) - 2 = \mathcal{L}[3] = \frac{3}{s}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\left(\frac{3}{s} + 2\right)}{s+1} = \frac{3+2s}{s(s+1)}$$

Nu ska vi finna inversen till denna Laplacetransformation, då får vi $y(t)$. Vi kan kika i formelbladet för att hitta detta:

$$\frac{3+2s}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = 3 - e^{-t} \quad t \geq 0$$

Anmärkning:
Lösningen till en ODE är kontinuerlig

Anmärkning:
Integralens värde ändras inte om funktionen är diskontinuerlig i ändligt många punkter.

Laplacetransformationer är hjälpsamma för att inte bara lösa differentialekvationer, men *integralekvationer*

4.1. Tillämpningar till integralekvationer.

Exempel:
Hitta en funktion $f(t)$ sådant att den löser följande ekvation:

$$\underbrace{2\int_0^t \cos(t-x) f(x)dx}_{\text{Konvolution av } \cos * f} = f(t) + 3$$

Lösning:
Börja med Laplacetransformation och använd egenskapen att Laplacetransformationen av konvolutio blir produkt:

$$2\frac{s}{s^2+1}\cdot\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}[f]+\frac{3}{s}$$
$$\mathcal{L}[f]\left(1-\frac{2s}{s^2+1}\right)=-\frac{3}{s}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[f]\left(\frac{s^2-2s+1}{s^2+1}\right)=\mathcal{L}[f]\frac{(s-1)^2}{s^2+1}=-\frac{3}{s}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[f]=-\frac{3s^2+3}{s(s-1)^2}$$

Nu kan vi hitta inversen till Laplacetransformationen, vilket vi kan göra med partialbråksuppdelning, vi får då: (**CHECK**)

$$\mathcal{L}^{-1}=f(t)=-3-6te^t$$

5. Series of functions

5.1. **Funktionsföljder.**

Vi påminner oss om hur det såg ut för talföljder $a_1, a_2, \cdots$,
Vi sade att talföljden *konvergerar* till ett $a \in \mathbb{R}$ om:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \quad |a - a_n| < \varepsilon$$

Vi vill nu undersöka vad som händer om vi tittar på en "funktionsföljd" och vad det betyder att de sekvenserna konvergerar.

Antag att vi har en följd av funktioner (som alla har samma domän), konvergens i funktionsföljder:

Definition/Sats 5.1

Låt $S \subset \mathbb{R}$ och låt $f_n : S \to \mathbb{C}$ (**FÖR ALGEBRAISK SLUTENHET (nej, för fourierserier är komplexvärda)**) vara en funktionsföljd där $n \geq 0$

Vi säger att funktionsföljden f_n *konvergerar*:

- **Punktvis**: Till en funktion $f : S \to \mathbb{C}$ om $\forall x \in S$ får vi en talföljd $f_1(x), f_2(x), \cdots$ som konvergerar till $f(x)$.

  Mer matematiskt uttryckt: $\forall x \in S \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  Anmärkning:
  Eftersom vi kollar efter punktvis konvergens, så behöver inte f (funktionen som följden konvergerar till) vara kontinuerlig.

- **Likformig konvergens**: Vi säger att f_n konvergerar *likformigt* om vi kan fixera ett $\varepsilon > 0$ och att det för alla x gäller att konvergensen sker.

  Mer matematiskt uttryckt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall x \in S \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  Notera här att vi fixerar både ε och n_0 och då måste detta n_0 funka *för alla* $x \in S$.
  Då ska alla funktioner med $n > n_0$ hamna inom $f \pm \varepsilon$ för alla $x \in S$ så att *hela* funktionen hamna inom $f \pm \varepsilon$

Anmärkning:
Likformig konvergens $\Rightarrow$ punktvis konvergens

Hela iden mellan varför man definierar 2 olika konvergenser är att punktvis konvergens är "det första man tänker på" när man tänker på konvergens. Men, man vill gärna att följden ska kunna säga något om funktionen och vice versa.

Definition/Sats 5.2

Om $f_n \to f$ likformigt och alla f_n är kontinuerliga, då måste f vara kontinuerlig

Exempel:
Antag att jag har följande:

$$f_n : [1,2] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

Om $x = 1$ så är $f_n(1) = \dfrac{1}{1^n} \to 1$
Om $x > 1$ så är $f_n(x)\dfrac{1}{x^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

Alltså, $f_n \to f$ punktvis konvergens där

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Från Sats 5.2 gäller då att f är diskontinuerlig.

Anmärkning:
Om f är likformigt kontinuerlig, så gäller **inte** att f_n är kontinuerliga.

Om vi modifierar föregående exempel så att $f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} & x > 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ får vi att f är likformigt kontinuerlig ($f = 0$) men f_n är diskontinuerlig.

Definition/Sats 5.3

Om $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ är en funktionsföljd av integrerbara funktioner och om $f_n \to f$ konvergerar likformigt, då är f också integrerbar och

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \overset{?}{=} \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Exempel:
Låt $f_n = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \text{ eller } x = 0 \end{cases}$

Här gäller att $f_n \overset{\text{punktvis}}{\to} f$ och $f(x) = 0$ för alla x
Det som är lite ointuitivt är att $\int_0^1 f(x)dx = 0$ men $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$

Från Sats 5.3 gäller att vi *inte* har likformig konvergens.

5.2. **Funktionsserier.**

Definition/Sats 5.4: Konvergens av funktionsserier

Låt $S \subseteq \mathbb{R}$ och $f_k : S \to \mathbb{C}$ vara en funktionsföljd där $k \geq 0$.

Låt:

$$s_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$$

vara följd av partiella summor där $N \geq 0$

Serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

konvergerar:

- **Punktvis**: Om $s_N \overset{\text{punktvis}}{\to} F$, det vill säga:

$$\forall x \in S \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \qquad \left| \sum_{k=0}^{N} f_k(x) - F(x) \right| < \varepsilon$$

- **Likformigt:** Om $s_N \overset{\text{likformigt}}{\to} F$, det vill säga:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; \forall x \in S \qquad \left| \sum_{k=0}^{N} f_k(x) - F(x) \right| < \varepsilon$$

- **Absolutkonvergens:** Om:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$$

  konvergerar punktvis

- **Absolutlikformigt**: För många adjektiv :p

Anmärkning:
Om $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till någon funktion $F(x)$, så konvergerar serien punktvis till samma $F(x)$

Anmärkning:
Om $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent, så är den punktvis konvergerande.

Anmärkning:
Om f_k är kontinuerliga och serien $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till $F(x)$, så är $F(x)$ kontinuerlig

Anmärkning:
Om f_k är integrerbara i ett intervall $[a, b]$ och serien $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till $F(x)$, så är:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Definition/Sats 5.5: Weirstrass M-test

Låt $f_k : [a,b] \to \mathbb{C}$ vara en funktionsföljd sådant att det finns tal $M_k \geq 0$ som uppfyller följande:

- $\forall x \in [a,b] \quad |f_k(x)| \leq M_k \quad$ (bounds the whole function f_k)
- Serien $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ konvergerar

Då gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent och likformigt och punktvis