Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Axel Husin

Tentamen
ENVARIABELANALYS
2011-12-09

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{e^{2x^2} - e^{-2x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x^2 + \ldots) - (1 - x^2 + \ldots)}{(1 + 2x^2 + \ldots) - (1 - 2x^2 + \ldots)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \ldots}{4x^2 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \ldots}{4 + \ldots} = \frac{1}{2}.$$

Även en beräkning som stöder sig på en metod uppkallad efter en viss fransk markis godtas.

En mycket smart metod är att observera att nämnaren går att faktorisera med konjugatregeln, nämligen $e^{2x^2} - e^{-2x^2} = (e^{x^2} + e^{-x^2})(e^{x^2} - e^{-x^2})$ och därefter kan man förkorta bråket.

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $0 \leq x < \infty$, $f(1) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt x där $f(x) > 0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0) = 0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt eller i intervallets ändpunkt $x_0 = 0$.
Några singulära punkter finns inte på intervallet.

$$f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x} + 2(x-1)e^{-x} = -(x-1)(x-3)e^{-x}.$$

De kritiska punkterna på intervallet är alltså $x_0 = 3$ samt $x_1 = 1$. Det minsta värdet erhålls i $x_1 = 1$ och är lika med 0. Ett lokalt största värde är $f(3) = \dfrac{4}{e^3} < \dfrac{1}{2}$ eftersom $e > 2$. Vi måste också jämföra med värdet i origo som är 1. Funktionens största värde är därför lika med 1.

3. Partiell integration ger resultatet 1.

4. Definitionsområdet är $x \neq 1$. Funktionen har det enkla nollstället $x = -1$.

Vertikal asymptot är $x = 1$ där både $\lim_{x\to 1+} y = +\infty$ och $\lim_{x\to 1-} y + \infty$.

Vidare är $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0\pm$ och det följer att $x-$axeln är horisontell asymptot.

$y' = -\dfrac{x+3}{(x-1)^3}$ har nollstället $x = -3$ som ger en lokal minimipunkt, t ex enligt derivatans teckenväxling.

5.
$$\int_1^e \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \left[\ln x = u,\ \frac{1}{x}\,dx = du\right] = \int_0^1 u^2\,du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Alternativt partiell integration

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x\,dx}{x} = \ln x \cdot \ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{2\ln^2 x\,dx}{x} = 1 - 2\int_1^e \frac{\ln^2 x\,dx}{x}.$$

Nu har vi fått tillbaka den ursprungliga integralen multiplicerad med -2. Vi flyttar över den till vänster led och får samma resultat som ovan.

6. Den homogena ekvationen $y'' + y = x$ har karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ med rötterna $r_1 = i$ och $r_2 = -i$ så lösningarna till homogena ekvationen är

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' + y = x$ ansättes $y_P = Ax + B$. Derivering och insättning ger $A = 1, B = 0$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x.$$

Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ ger $C_1 = 0$, $C_2 = -1$ så lösningen är $y = x - \sin x$.

7. En integrerande faktor är e^{x^2}. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(e^{x^2} y)' = 2xe^{x^2}$ som ger $e^{x^2} y = e^{x^2} + C$ så allmänna lösningen är $y = Ce^{-x^2} + 1$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger lösningen

$$y = 1 - e^{x^2}.$$

8. Serien är geometrisk med kvoten $r = -x^2$ och är därför konvergent då $-1 < x < 1$ och har summan $\dfrac{1}{1 - (-x^2)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

9. Då konvergensradien är lika med 2 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 2$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 2$. Då $x = 2$ har vi serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergerar (p-serie). För $x = -2$ har vi den alternerande serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ som konvergerar absolut.

10. Då $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0 = f(0)$ är $f(x)$ kontinuerlig på det slutna intervallet $0 \le x \le 1$ och har därför ett absolut minimum på detta intervall. Då $f(0) = f(1) = 0$ och $f(x)$ är deriverbar finns detta minimum i en kritisk punkt. Vi finner $f'(x) = \ln x + 1$ så derivatans nollställe $x = \dfrac{1}{e}$ ger det minsta värdet lika med $-\dfrac{1}{e}$.

PROBLEM

1. Tangenten genom $P = (a, a^2)$ och $Q = (b, b^3)$ på respektive kurva har lutningen

$$\frac{a^2 - b^3}{a - b}.$$

Derivatorna ger att lutningen också kan uttryckas som $2a$ och $3b^2$, dvs

$$2a = 3b^2.$$

Detta ger dels $a = b = 0$, som visar att $x-$axeln är gemensam tangent med tangeringspunkt endast i origo, dels $b = \frac{8}{9}$, $a = \frac{32}{27}$ som ger en sned tangent med två olika tangeringspunkter.

2. a) Det är lämpligt att göra substitutionen $x = \frac{1}{t}$. Vi finner då att

$$\lim_{x \to 0\pm} f(x) = \lim_{x \to 0\pm} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \to \pm\infty} e^{-t^2} = 0$$

enligt standardgränsvärdet $\lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^y} = 0$.

b)

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

med samma teknik som i a).

c) Funktionen är jämn. Den har nollställe i origo samt närmar sig den horisontella asymptoten $y = 1$ underifrån. Derivatan visar att funktionen är strikt växande för $x > 0$.

EXTRA PROBLEM (Axel Husin)

1. Låt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Då följer från produktregeln för gränsvärden att

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x} \cdot g(x) \right) = L \cdot 0 = 0.$$

2. Välj talen $a < b$ godtyckligt på det givna intervallet. Enligt medelvärdessatsen finns en punkt c i det inre av intervallet (a, b) sådan att

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c).$$

Eftersom $f'(c) \neq 0$ följer att $f(a) - f(b) \neq 0$, dvs $a < b$ medför att $f(a) \neq f(b)$. Detta innebär att $f(x)$ är ett-till-ett.

En annan metod är att använda att $f'(x)$ inte kan byta tecken på intervallet. Detta följer här av ”the Intermediate Value Property of Derivatives” (Se Adams) eftersom vi inte har antagit att derivatan är kontinuerlig. Därmed kan vi utnyttja att funktionen måste vara strikt växande eller avtagande på intervallet och alltså vara ett-till-ett.

3. a) Motexempel: $f(x) = \ln x$. Då gäller att $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{1}{x} = 0$ men $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

   b) Motexempel: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$. Då är

$$f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

   Vi har då att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ men $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existerar ej.