Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Axel Husin

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS M
2013-12-09

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 3 extra problem (max 4 poäng per extra problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.
Skrivtid: 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{e^{2x^2}-e^{-2x^2}}$.
2. Motivera varför funktionen
$$\frac{x}{(x-1)(x-4)}$$
måste anta ett största värde på det öppna intervallet $1 < x < 4$ samt bestäm detta värde.
3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ genom att t ex utnyttja substitutionen $e^x = u$.
4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x^2-x+1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1}.$$
Bestäm särskilt asymptoterna samt lokala extrempunkterna.
5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.
6. Lös differentialekvationen $y'' - y = -1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
7. Lös differentialekvationen $t^2\dfrac{dy}{dt} = y^2$. Ange särskilt de lösningar som är definierade för alla reella tal t.
8. Ange de x för vilka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x^2)^n}$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x.
9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,x^n}{n^{\frac{1}{3}}}$ har konvergensradien lika med $\dfrac{1}{3}$. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.
10. Motivera varför funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln^2 x}$ måste anta ett minsta och ett största värde på det slutna intervallet $1 \le x \le e$ samt bestäm dessa värden.

V.G.V!

PROBLEM

1. Bevisa att det finns precis en linje som är gemensam tangent till parablerna $y = x^2$ och $y^2 = x$ samt bestäm x-koordinaten för respektive tangeringspunkt.

2.
$$f(x) = \frac{\cos(2x) - \cos x}{x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

   a) Bevisa att $f(x)$ är kontinuerlig i origo.

   b) Bevisa att $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

   c) Bevisa att x-axeln är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.

EXTRA PROBLEM (Axel Husin)

1. Funktionen $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ har två asymptoter. Bestäm dessa.

2. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av tal så att $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existerar ändligt. Visa att då finns ett tal M så att $|a_n| < M$ för alla $n = 1, 2, \ldots$

3. Låt $f(x)$ vara en funktion. Avgör om följande påståenden är sanna.

   a) Om $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$ så är $f^2(x)$ deriverbar i $x = 0$.

   b) Om $f^2(x)$ är deriverbar i $x = 0$ så är $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$.

DIVERSE FORMLER OCH SATSER

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)
\end{aligned}$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}, \ |r| < 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$