Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Axel Husin,
Sebastian Póder

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS M
2012-12-10

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 6 extra problem (max 4 poäng per extra problem). Till både uppgifterna, problemen och extra problemen fordras fullständiga lösningar.
18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 64 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x(e^x - e^{-x})}$.
2. Bestäm det **största värdet** av $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ på intervallet $0 \le x < \infty$.
3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$.
   Ledning: Utnyttja t ex substitutionen $u = x^2$.
4. Skissera kurvan
   $$y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2} = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
   Bestäm särskilt asymptoterna, lokala extrempunkterna samt inflexionspunkterna.
   Ledning: $y' = \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$, $y'' = -\dfrac{2(x-3)}{x^4}$.
5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$.
6. Lös differentialekvationen $y'' + y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
7. Lös differentialekvationen $y' = x(y+1)^2,\ y(0) = 0$.
8. Ange de x för vilka $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^n}$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x.
9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ har konvergensradien lika med 1. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.
10. Motivera varför $f(x) = -x^2 \ln x,\ 0 < x \le 1,\ f(0) = 0$ antar ett **största värde** på intervallet $0 \le x \le 1$ samt bestäm detta värde.

V.G.V!

PROBLEM

1. Genom punkten $(1,0)$ går två skilda linjer som tangerar kurvan
$$y = (x-1)^2(x+1)^2.$$
Bestäm koordinaterna för samtliga tangeringspunkter. Skissera kurvan och tangenterna genom $(1,0)$.

2.
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$
   a) Bevisa att $f(x)$ är kontinuerlig i origo.
   b) Bevisa att $f'(0) = 0$.
   c) Bevisa att linjen $y = x$ är sned asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \pm\infty$.

EXTRA PROBLEM

Axel Husin

1. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion med $f(0) = 0$. Bevisa att $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x}$ existerar.

2. Bevisa att $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ är konvergent.
Ledning: Använd partiell integration.

3. Ge bevis eller motexempel till följande.
   a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent så är $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
   b) Om $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Sebastian Pöder

1. Lös differentialekvationen $xy'' - y' = x$, $y(1) = y'(1) = 0$.

2. Låt $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ för $x > 0$ och $f(x) = 0$ annars.
   a) Visa med induktion att för $x > 0$ har f derivator av alla ordningar på formen
$$f^{(n)}(x) = P(x)\frac{1}{x^k}e^{-\frac{1}{x}}$$
där P är ett polynom och $k > 0$ ett heltal.
   b) Visa att f har derivator av alla ordningar.

3. Finn, med hjälp av resultaten i föregående problem, en funktion med derivator av alla ordningar, som är positiv på det öppna intervallet $(0,1)$ och lika med 0 utanför det slutna intervallet $[0,1]$.

DIVERSE FORMLER

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

Geometriska seriens summa

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}\,,\ \ |r| < 1$$

Några standardgränsvärden

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tan^{-1} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$