SPECIALKURS I MATEMATIK HT2021

Lämnas in senast 8 november 2021

Skickas som **en** pdf-fil till thomas.kragh@math.uu.se eller lämnas i mitt postfack på Ångström (väljer du det sista av dessa två alternativ måste du också skicka ett mejl som talar om för mig att du har gjord detta).

Varje deluppgift är markerad med hur många poäng den maximalt kan ge. För godkänt krävs minst 11 poäng (ut av 24 möjliga).

Detta är en del av examinationen. Uppgifterna skall lösas individuellt. Det är dock tillåtet att:

- Läsa i anteckningarna (mina och dina), boken, andra böcker, eller googla för att läsa om definitioner och konventioner.
- Mejla frågor till mig.

Man får dock INTE i samband med detta hitta och kolla på svar på liknande uppgifter eller för den del fråga om dessa uppgifter online (t.ex. på math stack exchange).

Motivera alla dina svar för full poäng.

(1) Talteori och algebra. Primfaktorisera följande tal i ringen $\mathbb{G}$ av Gaussiska heltal:
  (a) 231.
  (b) 110.
  (c) $7+3i$.
  (d) $13+7i$

(1+1+1+1 poäng)

(2) Analys.
  (a) Visa att för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller att
$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-2} + \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{2}$$
  och använd detta till ett alternativt bevis för att
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$
  (b) I proposition 6 i anteckningarna antas
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ = \infty \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n^- = \infty.$$
  Visa att om t.ex. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^- = b^- \in \mathbb{R}$ då konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mot något entydigt (som kan vara ∞).

(2+4 poäng)

(3) Topologi. Vilka av följande samlingar av delmängder av $\mathbb{R}$ utgör en topologi på $\mathbb{R}$:
  (a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{Q} \subset U\}$.
  (b) $\mathcal{T}_2 = \{\mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid U \cap \mathbb{Q} = \emptyset\}$.
  (c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset\}$.

(2+2+2 poäng)

(4) Kombinatorik och grafteori: Låt $G = (V, E)$ vara en (simpel och oriktad) graf, så som definierats i kursen. En väg från $v \in V$ till $w \in V$ är en sekvens av noder $v = v_1, v_2, \ldots, v_n = w$ så att $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ för varje $i = 1, \ldots, n-1$ (alltså det finns en kant mellan v_i och v_{i+1} för varje i). Längden av en sådan väg är $n - 1$.
  (a) Visa att G har två noder med samma grad (antalet granner).
  (b) Låt avståndet $d(v, w) \in \mathbb{N}$ mellan $v, w \in V$ vara givet som längden av den kortaste vägen från v till w (och anta att detta är väldefinierat för varje v ovh w). Visa att detta avstånd uppfyller triangel-olikheten.
  (c) Visa att om $v \in V$ är en nod med udda grad så finns en väg från v till en **annan** nod w med udda grad.

(2+2+4 poäng)