Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Cecila Karlsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS
2009-12-09

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x+\ldots)-(1-2x+\ldots)}{1+x+\ldots-(1-x+\ldots)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x+\ldots}{2x+\ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{4+\ldots}{2+\ldots} = \frac{4}{2} = 2.$$

Alternativt kan man utnyttja att

$$e^{2x}-e^{-2x} = (e^x)^2-(e^{-x})^2 = (e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})$$

i täljaren och därefter förkorta, dvs

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}) = 2.$$

Även en beräkning som stöder sig på en metod uppkallad efter en viss fransk markis godtas.

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $-\infty < x < \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt x där $f(x) > 0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0) = 0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt. Några singulära punkter finns inte på intervallet.

$$f'(x) = \frac{(1+e^{2x})e^x - e^x\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = e^x\frac{1-e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}.$$

Den enda kritiska punkten på intervallet är alltså $x_0 = 0$ och det största värdet är

$$2\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} = [e^x = u,\ e^x\,dx = du] = \int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Vi undersöker först intervallet $1 < x < \infty$. Eftersom $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt där $f(x) > 0$ har den kontinuerliga funktionen $f(x)$ ett största värde på intervallet enligt en sats i Adams Calculus. Detta återfinns antingen i en kritisk punkt x_0, dvs där $f'(x_0) = 0$ eller i en singulär punkt. Vi har inga singulära punkter.

$$f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2e^{-x} = e^{-x}(x-1)(3-x).$$

Den enda kritiska punkten på intervallet är därför $x_0 = 3$ och det största värdet på $1 < x < \infty$ är alltså $\dfrac{4}{e^3}$.

Vi undersöker nu $f(x)$ på det slutna intervallet $0 \le x \le 1$ på vilket det finns ett största värde då $f(x)$ är kontinuerlig. Eftersom funktionen inte har någon kritisk eller singulär punkt i det inre av intervallet har funktionen sitt största värde i en ändpunkt, dvs $f(0) = 1$ måste vara det största värdet på $0 \le x \le 1$. Om vi nu jämför de största värdena på intervallen $0 \le x \le 1$ samt $1 < x < \infty$ finner vi att funktionens största värde är lika med 1 eftersom

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{4}{e^3}.$$

5. Partiell integration ger

$$\int_0^\infty (x-1)^2e^{-x}\,dx = (x-1)^2(-e^{-x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2(x-1)(-e^{-x})\,dx = 1+2\int_0^\infty (x-1)e^{-x}\,dx =$$

$$= 1 + 2(x-1)(-e^{-x})\big|_0^\infty - 2\int_0^\infty (-e^{-x})\,dx = 1 - 2 - 2e^{-x}\big|_0^\infty = 1 - 2 + 2 = 1.$$

6. Definitionsområdet är $x \neq 0$. Funktionens nollställe är $x = 1$.

Vertikal asymptot är $x = 0$ ty $\lim_{x\to 0+} y = -\infty$ och $\lim_{x\to 0-} -\infty$.

$\lim_{x\to\pm\infty}(y(x) - x) = 0-$. Linjen $y = x$ är alltså sned asymptot.

$y' = 1 + \dfrac{2}{x^3}$ som har nollstället $x = -\sqrt{2}$. Eftersom $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ är detta en lokal extrempunkt enligt en sats i Adams Calculus.

7. Den homogena ekvationen $y'' - 2y' - 3y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 3 = 0$ med rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = 3$ så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' - 2y' - 3y = 12$ ansättes $y_P = A$. Derivering och insättning ger $A = -4$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - 4.$$

Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ ger $C_1 = 3,\ C_2 = 1$ så lösningen är $y = 3e^{-x} + e^{3x} - 4$.

8. En integrerande faktor är $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(x^2\,y)' = 3x^2$ som ger $x^2\,y = x^3 + C$ så allmänna lösningen är $y = x + \dfrac{C}{x^2}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger lösningen

$$y = x + \frac{1}{x^2}.$$

9. Serien är geometrisk med kvoten $r = -\dfrac{2}{3}$. Summan är därför $\dfrac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \dfrac{3}{5}$.

10. Då konvergensradien är lika med 3 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 3$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 3$. Då $x = 3$ har vi serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ som konvergerar (p-serie). För $x = -3$ har vi den alternerande serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ som givetvis konvergerar eftersom den ju till och med är absolutkonvergent.

PROBLEM

1. Tangenten genom $P = (a, (a+1)^2 + 1)$ och $Q = (b, (b-1)^2 - 1)$ på respektive parabel har lutningen
$$\frac{((a+1)^2+1) - ((b-1)^2-1))}{a-b}.$$
Derivatorna ger att lutningen också kan uttryckas som $2(a+1)$ och $2(b-1)$, dvs
$$2(a+1) = 2(b-1) \text{ eller } a - b = -2.$$
Vi utnyttjar att $b = a + 2$ samt att
$$\frac{((a+1)^2+1) - ((b-1)^2-1))}{a-b} = 2(a+1).$$
Detta ger $a = -\frac{3}{2}$ och $b = \frac{1}{2}$ som ger tangeringspunkterna
$$P = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}) \text{ respektive } Q = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}).$$

2. a)
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} - x = 0,$$
ty $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ för alla $x \neq 0$.

b)
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} - 1 = -1.$$

c) Vi använder Maclaurinserien för $\sin\frac{1}{x}$.
$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2\sin\frac{1}{x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{3!x^3} + \ldots) - x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x + \ldots - x) = \lim_{x\to\pm\infty}(\ldots) = 0,$$
där $\ldots$ givetvis betyder termer av formen $\frac{1}{x^n}$, $n \geq 1$.