Hemtentamen - Fourieranalys

Matematiska institutionen	5 högskolepoäng
Anders Israelsson	1MA211
2021-01-13	KandFy, KandMa, Fristående

Skrivtid: 08:00-13:00 (Obs: GMT + 1 Stockholm). Ytterligare 20 minuter ges för inlämningen. När du är klar scannar du dina svar och lämnar in **en** pdf-fil. Spara dina originallösningar, åtminstone tills tentamen är färdigrättad och resultatet rapporterat. Obs! Endast tentamenslösningar i pdf-format mottages. Ett sätt är att använda sig av en scanner-app på en telefon (det finns gratisversioner att ladda ned). Skriv anonymitetskod och sidnummer på varje sida. Eventuella frågor skickas till `anders.israelsson@math.uu.se`.

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon, innehållet i Studium och lärobok. **Observera att du inte får samarbeta med andra eller söka på internet efter andra källor!**

Tentamen består av 8 problem, där varje problem ger maximalt 5 poäng. Gränserna är 18, 25 och 37 för betyg 3, 4 respektive 5 (inklusive bonuspoäng). Du måste motivera varje steg i din lösning för att få full poäng på en uppgift. Under frågorna finns formelsamlingen.

1. Använd Laplacetransformen för att lösa ODE:n

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 16e^{-2x} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Lösning: Tag Laplacetransformen:

$$\begin{aligned}
&(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{16}{s+2} \\
&Y(s)(s^2 - s - 2) = \frac{16}{s+2} + 2s + 1 \\
&Y(s) = \frac{\frac{16}{s+2} + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{16 + (2s+1)(s+2)}{(s^2 - s - 2)(s+2)} = \frac{2s^2 + 5s + 18}{(s+1)(s-2)(s+2)} \\
&\quad = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}
\end{aligned}$$

Vi får med handpåläggingsmetoden

$$\begin{cases} A = \frac{2-5+18}{(-3)*1} = -\frac{15}{3} = -5 \\ B = \frac{8+10+18}{3*4} = 3 \\ C = \frac{8-10+18}{(-1)(-4)} = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}.$$

Därför har vi

$$Y(s) = \frac{-5}{s+1} + \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2}$$

och lösningen ges därmed av

$$y(x) = -5e^{-x} + 3e^{2x} + 4e^{-2x}$$

2. Låt f vara 2π-periodisk med

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2\pi < x < -\pi \\ 1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(a) Beräkna f:s Fourierserie på trigonometrisk form.
(b) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera!
(c) Använd resultatet i (a) för att beräkna serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Lösning: (a) Definitionen ger

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= [n \neq 0] = \left[\frac{\sin(nx)}{n\pi}\right]_{-\pi}^{0} = 0 \\ a_0 &= 1 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\cos(nx)}{-n\pi}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-(-1)^n}{-n\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & n \text{ udda} \\ 0, & n \neq 0 \text{ jämn} \end{cases}. \end{aligned}$$

För udda n, tag $n = 2k-1$ Vi får då

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

(b) **Nej,** eftersom Fourierseriens partialsummmor är kontinuerliga, men inte gränsvärdet.

(c) Tag t.ex. $x = \frac{\pi}{2}$. Av Dirichlets sats vet vi

$$\begin{aligned} 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. (a) Beräkna Fouriertransformen av $\chi_{[-1,1]}(x)(1-|x|)$.

   (b) Använd resultatet i (a) för att beräkna Fouriertransformen av $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$.

Lösning: (a)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x)(1-|x|)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 (1-x)\cos(x\xi)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\cancel{(1-x)\frac{\sin(x\xi)}{\xi}}\right]_0^{\cancel{1}} - 2\int_0^1 -1\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-2\frac{\cos(x\xi)}{\xi^2}\right]_0^1 = 2\frac{1-\cos(\xi)}{\xi^2} = \frac{4\sin^2(\frac{\xi}{2})}{\xi^2}
\end{aligned}$$

(b) Från resultatet i (a), inversionsformeln och skalningsformeln har vi

$$\begin{aligned}
\frac{4\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} &\overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} 2\pi\chi_{[-1,1]}(-x)(1-|-x|) = 2\pi\chi_{[-1,1]}(x)(1-|x|) \\
\frac{\sin^2(x)}{x^2} &= \frac{4\sin^2(\frac{2x}{2})}{(2x)^2} \overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}2\pi\chi_{[-1,1]}\left(\frac{\xi}{2}\right)\left(1-\left|\frac{\xi}{2}\right|\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\chi_{[-2,2]}(\xi)(2-|\xi|)
\end{aligned}$$

4. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

där $u(x,t)$ är begränsad och $\kappa > 0$ är en konstant.

Lösning: Vi beräknar Fouriertransformen av $e^{-x^2} = e^{-(\sqrt{2}x)^2/2}$. Den ges av

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^2/2} = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

Låt $H_{2\kappa t}(x)$. beteckna värmekärnan. Lösningen ges, på Fouriertransformsidan, av

$$\hat{u}(\xi,t) = \widehat{e^{-(\cdot)^2}}\hat{H}_{2\kappa t}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}e^{-2\kappa t\xi^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}e^{-\left(\xi\sqrt{\frac{1}{2}+2\kappa t}\right)^2/2}$$

Alltså

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2(\frac{1}{2}+2\kappa t)}}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}+2\kappa t}}\right)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{1+4\kappa t}}e^{-x^2/(1+4\kappa t)}$$

5. Lös integralekvationen

$$-4\int_0^x \cos\left(\sqrt{3}y\right) f(x-y)\,\mathrm{d}y = f(x) + 2\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x\right).$$

Lösning: Detta är en faltning associerad med Laplacetransformen. Därför har vi

$$\begin{aligned} -4\frac{s}{s^2+3}F(s) &= F(s) + \frac{6}{s^2+3} \\ F(s)\left(\frac{-4s}{s^2+3} - 1\right) &= \frac{6}{s^2+3} \end{aligned}$$

$$F(s) = -\frac{\frac{6}{s^2+3}}{\frac{4s}{s^2+3}+1} = -\frac{6}{4s+s^2+3} = -\frac{6}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

Handpåläggningsmetoden ger

$$\begin{cases} A = -3 \\ B = 3 \end{cases}$$

Därför har vi

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3}{s+3} - \frac{3}{s+1} \\ f(x) &= 3e^{-3x} - 3e^{-x} \end{aligned}$$

6. Tillämpa Gram-Schmidtalgoritmen på $\left\{1-x, x^2-2\right\}$ för att hitta en ortonormal mängd i rummet $L^2\left((0,\infty), e^{-x}\right)$.

Lösning: Den inre produkten ges av

$$\langle f, g\rangle := \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Set $v_1(x) = 1-x$, $v_2(x) = x^2-2$, $v_3 = x - 2x^2$. Then

$$\begin{aligned} u_1(x) = v_1(x) = 1- \text{ and } \|u_1\|^2 &= \int_{\mathbb{R}}(1-x)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}(x^2-2x+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2-2+1 = 1 \Rightarrow e_1(x) = 1-x. \end{aligned}$$

$$u_2(x) = v_2(x) - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\|u_1\|^2}u_1(x) = x^2 - x - \left\langle 1-x, x^2-2\right\rangle(1-x)$$

Inre produkten beräknas till

$$\left\langle 1-x, x^2-2\right\rangle = \int_{\mathbb{R}}(-x^3+x^2+2x-2)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -3! + 2! + 2*1! - 2 = -4.$$

Därför har vi

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= x^2 - x - 4(1-x) = x^2 + 3x - 4 \text{ and} \\
\|u_2\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (x^2+3x-4)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 4! + 6*3! + 2! - 24 + 16 = 54 \\
&\Rightarrow e_2(x) = \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{54}}
\end{aligned}
$$

7. Låt $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ definieras genom

$$T(\varphi) := \left(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{x}\right)'(\varphi)$$

(a) **Visa att** $xT' = CT$ **för något tal** $C \in \mathbb{R}$. **Beräkna även detta tal** C.

(b) **Beräkna** $\hat{T}$.

Lösning: (a) Kalla $S := \mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{x}$. Vi har

$$
\begin{aligned}
xT'(\varphi) = xS''(\varphi) = S((x\varphi)'') = S(2\varphi' + x\varphi'') = S(2\varphi') + S(2x\varphi'') =: (1) + (2) \\
(1) = -2S'(\varphi) = -2T \quad (\text{så } C = -2)
\end{aligned}
$$

$$(2) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x\varphi''(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \big[\varphi'(x)\big]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

(Observera att $\varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ går mot 0 i $\pm\infty$)

(b) Vi har

$$\hat{T} = \widehat{S'} = i\xi\hat{S} = i\xi(-i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)) = \pi\,|\xi|\,.$$

8. I nedanstående uppgift kan du anta att alla involverade integraler är konvergenta.

(a) För en funktion g, **beräkna**

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

(b) Definiera operatorn $T_a^{\varphi} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ genom

$$T_a^{\varphi} f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + i\varphi(\xi)} a(x,\xi) \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

där a och φ är "lämpliga" funktioner (dvs så att allt blir konvergent). **Visa att** $T_a^{\varphi} = T_a^0 T_1^{\varphi}$. Ledtråd: lösningen kräver (minst) tre integraler.

Lösning: (a) Definitionen av Fouriertransformen och inverstransformen ger

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi g(x).$$

(b) Vi har

$$\begin{aligned}
T_a^0 T_1^\varphi f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ix\xi} a(x,\xi) \int e^{-iy\xi} \int e^{iy\eta + i\varphi(\eta)} \hat{f}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\iiint e^{ix\xi} a(x,\xi) e^{iy(\eta-\xi)} e^{i\varphi(\eta)} \hat{f}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi \\
&= \begin{bmatrix}\text{Applicera (a) på } y\text{-} \\ \text{och } \eta\text{-integralen}\end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} a(x,\xi) e^{i\varphi(\xi)} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = T_a^\varphi f(x).
\end{aligned}$$

Lycka till!

Table of Formulæ

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ below.

Triangle inequalities
Let $x, y \in \mathbb{R}$ and f, g be functions. Then

- $\big|\, |x| - |y| \,\big| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$
- $\big|\, \|f\| - \|g\| \,\big| \le \|f \pm g\| \le \|f\| + \|g\|$
- $\left|\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x.$
- $\left\|\int_\Omega f(\cdot, y)\,\mathrm{d}y\right\| \le \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|\,\mathrm{d}y$, where the norm is taken in the first variable of f (Minkowski's integral inequality).

Useful Integrals

- $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$
- $\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(n-1)(n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1, & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$

Lebesgue Dominated Convergence Theorem
Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions with $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for almost every x and let $g \in L^1(\Omega)$, such that $|f_n(x)| \le |g(x)|$ for almost every x. Then

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Gram-Schmidt orthogonalisation
Let V be an inner product space and $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ be a linearly independent set of vectors. Then the Gram-Schmidt orthogonalisation is given by

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1, & e_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1, & e_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle u_1, v_3\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2, & e_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j, v_k\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} u_j, & e_k &= \frac{u_k}{\|u_k\|}.
\end{aligned}$$

Laplacetransformen

$f(t)$	$\tilde{f}(s) = F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$	
Allmänna regler		
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	(L.1)
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	(L.2)
$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$	(L.3)
$f(t-a)H(t-a), \quad a > 0$	$e^{-as} F(s)$	(L.4)
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	(L.5)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(L.6)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	(L.7)
$\int_0^t f(u)\,du$	$s^{-1} F(s)$	(L.8)
$f * g(t) = \int_0^t f(u) g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$	(L.9)
Speciella funktioner		
$\delta(t)$	1	(L.10)
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	(L.11)
$t^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(L.12)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(L.13)
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(L.14)
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	(L.15)
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	(L.16)
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	(L.17)
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	(L.18)

Fouriertransformen

$f(t)$	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$	
Allmänna regler		
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$	(F.1)
$e^{i\alpha t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \alpha)$	(F.2)
$f(t - t_0)$	$e^{-it_0\omega} \hat{f}(\omega)$	(F.3)
$f(-t)$	$\hat{f}(-\omega)$	(F.4)
$f(at) \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \hat{f}(\frac{\omega}{a})$	(F.5)
$t f(t)$	$i \frac{d\hat{f}}{d\omega}$	(F.6)
$f'(t)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$	(F.7)
$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$	(F.8)
$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u)\, du$	$\hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$	(F.9)
Speciella funktioner		
$\chi_{[-a,a]}$	$\frac{2 \sin a\omega}{\omega}$	(F.10)
$e^{-\lvert t \rvert}$	$\frac{2}{1 + \omega^2}$	(F.11)
$\frac{1}{1 + t^2}$	$\pi e^{-\lvert \omega \rvert}$	(F.12)
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$	(F.13)

Plancherels formler:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, \overline{\hat{g}(\omega)}\, d\omega$$

Fourierserier

Funktioner med period 2π

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Funktioner med period T

Sätt $\Omega = 2\pi/T$

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\Omega t}\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t\,dt.$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Några trigonometriska formler

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$2\sin^2 t = 1 - \cos 2t, \qquad 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$$