UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

TENTAMEN
Logik och bevisteknik
2019-04-09

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: pennor, radergummi, linjal, papper, kursbok. ***Alla svar (utom till uppgift 4) måste motiveras på lämpligt sätt.*** Om man har fått minst 10, respektive minst 15, poäng på duggan den 2019-04-26 så får man uppgifterna 1–2, respektive 1–3, tillgodoräknade (dvs man får full poäng på dem utan att behöva lösa dem). Maximalpoängen är 40. För att få betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 20, 26 respektive 32 poäng.

1. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (4p)

(a) $\{\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \chi),\ \chi\} \ \vdash\ \varphi \rightarrow \psi.$

(b) $\{\varphi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \neg\chi),\ \chi\} \ \vdash\ \varphi \rightarrow \neg\psi.$

2. Vi antar att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. Finn en KNF, alltså en konjunktiv normalform, som är ekvivalent med formeln $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge (p \vee r))$ och glöm inte att visa hur du har kommit fram till din KNF. (2p)

3. Som i föregående uppgift antar vi att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. För var och en av följande två formler, avgör om den är en logisk konsekvens av den andra. (3p)

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \wedge r) \qquad\qquad q \vee (p \wedge r)$$

4. Låt S, T och A vara 1-ställiga relationssymboler där $S(x)$, $T(x)$ och $A(x)$ uttrycker att "x är en Storskogsbo", "x är ett troll" och "x är en alv", respektive. Låt M vara en 2-ställig relationssymbol där $M(x, y)$ uttrycker att "x är mindre än y". Ange, med de angivna relationssymbolerna, satser i första ordningens logik som uttrycker samma sak som följande påståenden: (6p)

(a) Varenda Storskogsbo är troll eller alv.

(b) Ingen Storskogsbo är både troll och alv.

(c) Varje alv är mindre än något troll.

5. För var och en av följande sekventer avgör om den stämmer eller inte och motivera på lämpligt sätt. P och Q antas vara 1-ställiga relationssymboler. (5p)

(a) $\{\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)),\ \exists x Q(x)\} \ \vdash\ \exists x P(x).$

(b) $\{\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)),\ \exists x Q(x)\} \ \vdash\ \neg\forall x P(x).$

6. Antag att R och Q är 2-ställiga relationssymboler. Finn en prenex normalform som är som är ekvivalent med formeln (4p)

$$\exists x \forall y R(x, y) \ \rightarrow\ \forall x \exists y Q(x, y).$$

Fortsätter på nästa sida

7. Låt P vara en 1-ställig relationssymbol och R en 2-ställig relationsymbol. Låt

$$\begin{aligned}
&\alpha \text{ vara } \forall x(P(x) \to \exists y R(x,y)),\\
&\beta \text{ vara } \forall x \forall y(R(x,y) \to (P(x) \wedge \neg P(y))),\\
&\gamma \text{ vara } \exists x P(x), \quad \text{och}\\
&\delta \text{ vara } \forall x \exists y R(x,y).
\end{aligned}$$

För var och en av sekventerna nedan, bestäm om den är korrekt. *Om den är korrekt ska en härledning i naturlig deduktion anges för den, i annat fall ska ett motexempel anges.* (7p)

(a) $\{\alpha, \gamma\} \vdash \delta$.

(b) $\{\alpha, \gamma\} \vdash \neg\delta$.

(c) $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vdash \neg\delta$.

8. Låt R vara en 2-ställig relationssymbol. Beskriv alla modeller till nedanstående teori T och motivera varför modellerna ser ut som de gör. (5p)

$$\begin{aligned}
T = \{&\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x)),\\
&\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall y(y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3 \vee y = x_4),\\
&\forall x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \to y = z)),\\
&\forall x \exists y(R(y,x) \wedge \forall z(R(z,x) \to y = z))\}.
\end{aligned}$$

9. Vi introducerar ett nytt konnektiv, '$\mapsto$' som tolkas enligt tabellen nedan (där s of f står för sant och falskt).

φ	ψ	$\varphi \mapsto \psi$
s	s	s
s	f	f
f	s	s
f	f	f

Låt $\sigma = \{p, q, r, s, t, u, v\}$ vara en godtycklig satslogisk signatur. Konstruera en formel $\varphi \in LP(\sigma)$ sådan att det *inte* finns någon formel ψ som endast använder konnektiv bland $\{\neg, \mapsto\}$ och som är logiskt ekvivalent med φ. (4p)

Lycka till!