

Skrivtid: 14.00-19.00. För betygen 3,4, resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna ska vara väl motiverade. Skriv endast på ena sidan, börja ny uppgift på ny sida och använd ej rödpenna. Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad!

Tillåtna hjälpmedel: Räknedosa. Formelsamling för Inferensteori 1.

1. Slumpvariabeln  $X$  kan anta värdena 0, 1, 2, 3 med sannolikheterna  $1 - 6\theta$ ,  $\theta$ ,  $2\theta$  och  $3\theta$ . Man har observationerna 3, 0, 1, 2, 3, 2, 2, 3. (5p)
  - (a) Beräkna momentskattningen av  $\theta$ . (1p)
  - (b) Beräkna minsta kvadratskattningen av  $\theta$ . (2p)
  - (c) Beräkna maximum likelihoodskattningen av  $\theta$ . (2p)
2. Man har ett slumpmässigt stickprov  $x_1, x_2, x_3, x_4$  från en slumpvariabel  $X$  med väntevärde  $\mu$  och varians  $\sigma^2$ , samt ett slumpmässigt stickprov  $y_1, y_2, \dots, y_8$  från en slumpvariabel  $Y$  med väntevärde  $2\mu$  och varians  $4\sigma^2$ . Vi antar vidare att  $X$  och  $Y$  är oberoende. (5p)

Man vill skatta  $\mu$ , och två skattningar är föreslagna:

$$\mu_1^* = \frac{2\bar{x} + \bar{y}}{4}, \quad \mu_2^* = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{3}.$$

- (a) Visa att båda skattningarna är väntevärdesriktiga. (1p)
  - (b) Vilken skattning är effektivast? (2p)
  - (c) Finns det någon effektivare skattning på formen  $a\bar{x} + b\bar{y}$ ? Motivera ditt svar! (2p)
3. Som en följd av den s.k. "Icings lag" kan tiden i dygn (måste ej vara ett heltal) efter den sista november fram till dess att isen lägger sig på sjön Fyrhörningen med god approximation betraktas som en slumpvariabel  $X$  med fördelningsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{\theta x^2}{10000}\right),$$

där  $x > 0$ , och annars är  $F(x) = 0$ . Parametern  $\theta$  är okänd. (5p)

- (a) Långfärdsskridskoåkaren Låffe tror att  $\theta = 9$ . En vinter lägger sig isen 60 dagar efter den sista november. Hjälp Låffe att avgöra om det är rimligt att  $\theta = 9$  genom att testa en lämplig hypotes. Använd signifikansnivån 5%. (2p)
  - (b) Vilken styrka har testet i (a) för  $\theta = 2$ ? (3p)

*v.g.v*

4. Butikskedjan Interspurst beställer slalomhjälm från två olika leverantörer, A och B. Från leverantör A beställer man 200 hjälm, av vilka 8 visar sig vara defekta. Antalet beställda hjälm från leverantör B var 400, och av dessa var 10 defekta. (5p)

(a) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för skillnaden mellan andelarna defekta hjälm för de två leverantörerna. (4p)

(b) Finns det belägg för att säga att andelarna defekta hjälm är olika för de två leverantörerna? (1p)

5. Jultomten vill välja ut renar till sin släde. Han har gett i uppdrag till tomtenissen Firpo och tomtenissan Firpelina att snabbhetsträna var sin kull med renar. Vid träningsperiodens slut väljer tomten slumpmässigt ut fem av Firpos och fem av Firpelinas renar och mäter upp deras toppfart i km/h. Resultaten ges i följande tabell.

Firpos kull	72.7	71.2	75.4	73.0	70.7
Firpelinas kull	77.2	73.4	75.3	78.0	79.1

Avgör om renar från olika kullar är lika eller olika snabba genom att genomföra ett lämpligt hypotestest. Var noga med att ange vilka förutsättningar du gör. (5p)

6. Läkaren Elina vill undersöka den febernedsättande effekten av tablett Cepofan för influensapatienter. Hon har en grupp av fyra patienter. På kvällen mäter hon deras kroppstemperatur (i grader Celcius), och ger dem sedan en tablett Cepofan. På morgonen mäter hon åter deras kroppstemperatur. Värdena anges i följande tabell.

(5p)

Patient nr	1	2	3	4
Temp. på kvällen	40.5	37.8	39.2	38.4
Temp. på morgonen	38.2	37.4	38.4	36.7

(a) Beräkna ett 90%-igt konfidensintervall för den febernedsättande effekten hos en tablett Cepofan i grader. Var noga med att ange vilka förutsättningar du gör. (3p)

(b) Elinas försök får ses som en förstudie till ett mycket större experiment. Ungefär hur många patienter skulle man behöva i detta experiment för att få ett 90%-igt konfidensintervall av längd högst 0.2 grader? (2p)

7. Antalet julklappar som ett barn i Norbyskolan får kan antas följa en Poissonfördelning med väntevärde  $\mu$ , lika från år till år. Johannes går i en klass i Norbyskolan med 30 barn. Förra året fick dessa barn sammanlagt 282 julklappar. (5p)

(a) Beräkna ett 99%-igt konfidensintervall för  $\mu$ . (2p)

(b) Det finns bara ett sätt för ett Norbybarn att bli på dåligt julhumör, och det är att det får färre än tre julklappar. Beräkna ett 99%-igt konfidensintervall för sannolikheten att Johannes blir på dåligt julhumör i år. (3p)

8. Betrakta regressionsmodellen

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

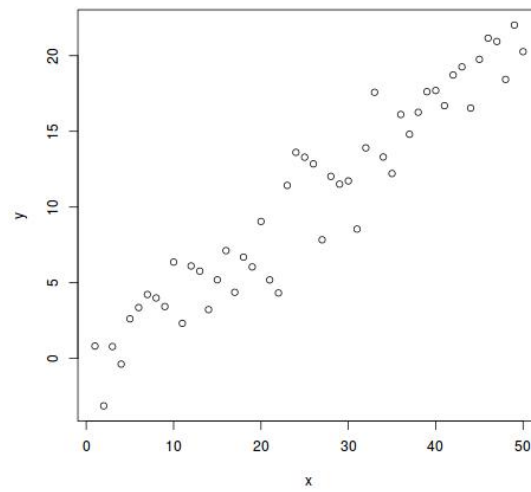
där  $i = 1, 2, \dots, n$  och alla  $\varepsilon_i$  är oberoende  $N(0, \sigma^2)$ .

Data har simulerats fyra gånger från denna modell, varje gång med olika värden på parametrarna  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\sigma^2$ . Antalet observationer har valts till  $n = 50$  och  $x_i = i$  för  $i = 1, 2, \dots, 50$ . Efter att simuleringarna har gjorts plottades data, parametrarna skattades och förklaringsgraden räknades ut. Plottar av data visas i figur 1-4 nedan.

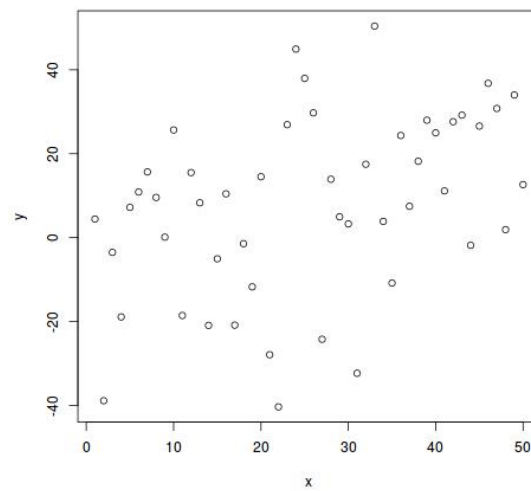
Para ihop figur 1-4 med de skattade modellerna och motsvarande förklaringsgrader i (a)-(d) nedan. Motivera din lösning. (5p)

$$\begin{aligned} y_i^* &= 20.75 - 0.48x_i, & R^2 &= 0.3\% & (a) \\ y_i^* &= -7.61 + 0.61x_i, & R^2 &= 17\% & (b) \\ y_i^* &= -0.38 + 0.52x_i, & R^2 &= 98\% & (c) \\ y_i^* &= 4.15 + 1.74x_i, & R^2 &= 53\% & (d) \end{aligned}$$

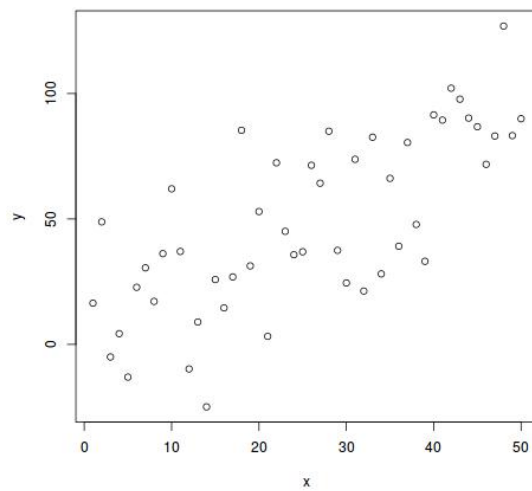
**LYCKA TILL!**



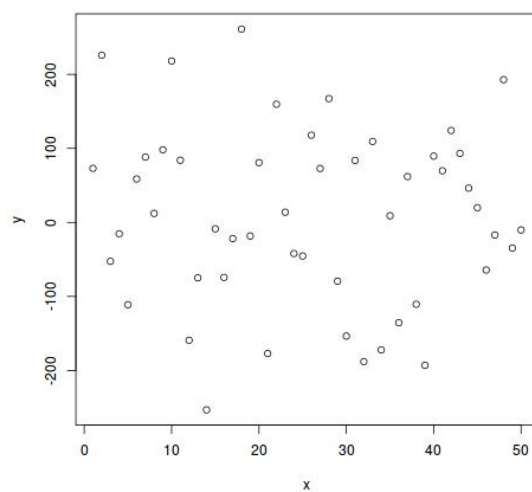
Figur 1: Plot för uppgift 8.



Figur 2: Plot för uppgift 8.



Figur 3: Plot för uppgift 8.



Figur 4: Plot för uppgift 8.