

UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR

Sannolikhetssteori 1

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
September 12, 2022

CONTENTS

1. Repetition - (K2.1)	2
1.1. Mängdlära	2
1.2. Begrepp	2
2. Regler för sannolikheter - (K2.2)	3
2.1. Kolmogorovs Axiom	3
2.2. A^c	5
2.3. $B-A$	5
3. Tolkning av sannolikheter	6
3.1. Sannolikhetsmåttet P	6
4. Betingade sannolikheten $P(A B)$	8
4.1. Oberoende utsagor	9
5. Slumpvariabler	13
5.1. Viktiga slumpvariabler	16

1. REPETITION - (K2.1)

1.1. Mängdlära.

Tips för hela kursen! Rita venndiagram

1.2. Begrepp.

- Om A och B är disjunkta säger vi att de är **oförenliga**, dvs $A \cap B = \emptyset$
- A, B och C är disjunkta om $A \cap B = \emptyset$ och $A \cap C = \emptyset$ och $B \cap C = \emptyset$
- $\lambda \subseteq 2^\Omega$ är disjunkta om $A \cap B = \emptyset$ för alla $A, B \in \lambda$
- Sannolikhetsrum = (Ω, P)
- $x \in \Omega$: x är ett element/utfall i Ω
- $A \subseteq \Omega$: A är en delmängd/händelse till Ω
- $2^\Omega = \{A : A \subseteq \Omega\}$, kallas även för potensmängden
- Ω är vår grundmängd/utfallsrum

Definition/Sats 1.1: Utfall, händelser, utfallsrum

Resultatet av ett slumpförsök kallas ett *utfall*. Mängden av möjliga utfall från ett visst slumpförsök kallas *utfallsrum*. En viss specificerad mängd utfall kallas för en *händelse*. Från detta följer det att ett utfall även är en händelse, precis som hela utfallsrummet också är en händelse

Det är viktigt här att notera att vi arbetar med mängder, och element i mängder behöver nödvändigtvis inte vara tal.

Det som är även viktigare att inse är att i den klassiska definitionen man kanske sett på högstadiet/gymnasiet så hade alla utfall "samma vikt", det vill säga om vi har totalt 2 möjliga utfall så har varje utfall en sannolikhet på $\frac{1}{2}$ att inträffa. Det som är fuffigt med denna definition är att det blir enkelt att inse att sannolikheten för att hela utfallsrummet skall ske är 1 (vilket är något vi bevarar i vår definition), men verkligheten är lite annorlunda. Det kanske är så att sannolikheten för ett utfall faktiskt är $\frac{1}{6}$ men det andra är $\frac{5}{6}$.

Vi definierar följande:

Definition/Sats 1.2: Likformig sannolikhetsfördelning

Ett slumpexperiment med ändligt utfallsrum sägs ha *Likformig sannolikhetsfördelning* om alla utfall har samma sannolikhet.

Det vi noterar från definitionen ovan är att om vi har n :st utfall så kommer sannolikheten för varje utfall att vara $\frac{1}{n}$. Detta kallade vi för "klassiska" sannolikheten eftersom det är den man kanske klassiskt stött på, men faktum är att vi faktiskt definierar klassisk sannolikhet som just det:

Definition/Sats 1.3: Klassiska sannolikhetsdefinitionen

För ett slumpexperiment med ändligt utfallsrum och med likformig sannolikhetsfördelning gäller att sannolikheten för en händelse är lika med antalet utfall i händelsen dividerat med antalet utfall i utfallsrummet, dvs antalet gynnsamma utfall dividerat med antalet möjliga utfall.

Om händelsen A innehåller $n(A)$ utfall och utfallsrummet har $n(\Omega)$ utfall gäller alltså att:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

2. REGLER FÖR SANNOLIKHETER - (K2.2)

2.1. Kolmogorovs Axiom.

Ett **sannolikhetsmått** är en funktion $P : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in 2^\Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ om A_i är parvis disjunkta

Exempel:

Singla slant är det klassiska exemplet, där har vi 2 möjliga utfall (krona eller klave).

Utfallsrummet Ω är mängden $\{krona, klave\}$

Ett rimligt antagande är att sannolikheten att landa på krona är $\frac{1}{2}$ och samma för klave, dvs $P(\{krona\}) = \frac{1}{2}$ och $P(\{klave\}) = \frac{1}{2}$

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

Exempel:

Singla slant 2 gånger

Utfallsrummet bör rimligtvis vara kopplad till föregående exempel:

$$\Omega = \{kr, kl\} \times \{kr, kl\} = \{(kr, kr), (kr, kl), (kl, kr), (kl, kl)\}$$

$$P(\{x\}) = \frac{1}{4}, P(\text{minst en krona}) = P(\{(kr, kr), (kr, kl), (kl, kr)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Exempel:

Singla slant n gånger: $\Omega = \{kr, kl\}^n$

$$P(\{x\}) = \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \Omega, \quad P(A) = \sum_{x \in A} \frac{1}{2^n}$$

$$P(\text{exakt } k \text{ krona}) = \sum_{xx \text{ innehåller } k \text{ kronor}} \frac{1}{2^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Exempel:

Tärningskast är återigen ett klassiskt exempel, då är $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Är det en normal tärning så är sannolikheten för varje kast $\frac{1}{6}$, $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$

Antag att jag har en riggad tärning sådant att ettan är ombytt till en sexa. Då kommer följande gälla:
 $P(\{1\}) = 0$ och $P(\{6\}) = \frac{1}{3}$

Sannolikheter ska man tänka som proportioner, som associerar en vikt till varje delmängd

Exempel:

Låt $\Omega = \mathbb{N}_+$, $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ gäller det att $P(\Omega) = 1$

Kopplar vi detta exempel till verkligheten så kan detta vara "hur stor är sannolikheten att slinga krona n gånger" eller "sannolikheten att slinga krona för första gången på n :te slingan"

Exempel:

Vad är sannolikheten att tärningen hamnar på en sexa på n :te slingan?

Jo, $P(\{x\}) = \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}_{\text{alla andra siffror}} \cdot \frac{1}{6}$

Exempel:

Slumpa ett reellt tal mellan 0 och 1:

$\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, då är $P(A) = \text{längden på intervallet } A = 1$

Notera att det inte spelar roll om det är ett öppet eller slutet intervall

Vill man räkna ut unionen av sannolikheten summerar man sannolikheterna:

$$P\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Vad är då sannolikheten att vi slumpar ett rationellt tal mellan $(0, 1)$? Vi får inte glömma att \mathbb{Q} är uppräknelig:

$$P(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) = P\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)} \{q\}\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)} P(\{q\}) = 0$$

Hur ser $P(\text{irrationellt tal})$ ut?

$$\begin{aligned} & P(\mathbb{Q}^c \cap (0, 1)) \\ & \underbrace{(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) \cup (\mathbb{Q}^c \cap (0, 1))}_{\text{disjunkta}} = \Omega \\ 1 = P(\Omega) &= \underbrace{P(\mathbb{Q} \cap (0, 1))}_{=0} + P(\mathbb{Q}^c \cap (0, 1)) \Rightarrow P(\text{irrationellt tal}) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Exempel:

Ta en Riemann-integrerbar funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ så $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

Vi sätter $P(A) = \int_A f(x) dx$

Exempel:

Tag enhetskvadraten $\Omega = [0, 1]^2$, $P(A) = \text{arean}$. Slumpa ett tal i kvadraten

Definition/Sats 2.1: Diskreta Sannolikhetsrum

Sannolikhetsrummet (Ω, P) kallas för **diskret** om det finns en uppräknelig delmängd $A \subseteq \Omega$ så att:

$$P(B) = \sum_{x \in B \cap A} P(\{x\})$$

Alternativ beskrivning:

$$\begin{aligned} \exists A \subseteq \Omega : \\ \sum_{x \in A} P(\{x\}) = 1 \end{aligned}$$

Definition/Sats 2.2: Kontinuerliga Sannolikhetsrum

Icke-diskreta sannolikhetsrum (förutom blandade osv, men vi kommer inte arbeta med dessa ändå)

2.2. A^c .

Med komplementet menar vi $x \in A^c \Leftrightarrow x \in A$ där $(x \in \Omega, \quad A \subseteq \Omega)$

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

2.3. $B-A$.

$$x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \in A^c$$

$$x \in B \cap A^c$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3. TOLKNING AV SANNOLIKHETER

Om vi tar exemplet att singla slant. Vad betyder det att sannolikheten är $\frac{1}{2}$?

Man kan tolka det som att "det finns 2 fall, och båda har lika stor chans att inträffa"

Eller en mer data-inriktad tolkning, det vill säga om man singlar slant 100ggr, kommer ungefär hälften av kasten resultera i krona eller klave.

Det finns däremot tolkningar via Kolmogorovs axiom, det vill säga:

- $P(A) = p$ betyder att A utgör p enheter av utfallsrummet Ω
- Om vi upprepat slumpar ett $x \in \Omega$ så kommer tillslut $x \in A$ inträffa med frekvens p (**stora talens lag**)

3.1. Sannolikhetsmättet P .

Uppfyller följande:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$
- A, B disjunkta gäller $P(A \cup B) = P(A \cup B \cup \emptyset \cdots)$ (ty axiomet säger att vi skall ha oändliga disjunkta par, vi kan därför fylla ut med oändligt många tomma mängder) $\Rightarrow P(A) + P(B)$
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
- Om $A \subseteq B$ så gäller $A \cap B = A$ och $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- Om $P(B \setminus A) \geq 0$ så $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0}$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (Booles olikhet)

Definition/Sats 3.1

Om $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq \Omega$ så gäller

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Kallas även för att sannolikhetsmättet är kontinuerligt ovanifrån

Bevis 3.1: Bevis av föregående sats

$$\underbrace{A_1}_{B_1}, \underbrace{A_2 \setminus A_1}_{B_2}, \underbrace{A_3 \setminus A_2}_{B_3} \cdots \underbrace{A_{n+1} \setminus A_n}_{B_{n+1}}$$

B_i är disjunkta, och följande gäller:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \\ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \cdots + P(B_n)) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) + (P(A_2) - P(A_1)) + (P(A_3) - P(A_2)) + \cdots + (P(A_n) - P(A_{n-1}))) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

□

Definition/Sats 3.2

Låt $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1 \cdots \subseteq \Omega$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Lemma 3.1: De morgans lagar

- $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$
- $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$

Bevis 3.2: Bevis av Lemma

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\ &\Leftrightarrow x \notin A_i \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow x \in A_i^c \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \end{aligned}$$

□

Bevis 3.3: Bevis av sats

Vi har $A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq A_3^c \subseteq \cdots$:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \\ &\Rightarrow 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(A_i^c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

□

4. BETINGADE SANNOLIKHETEN $P(A|B)$ **Definition/Sats 4.1: Betingade sannolikheten**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \text{Sannolikheten för } A \text{ givet } B \text{ förutsatt att } P(B) > 0 \text{ och } P(A) > 0$$

Detta är sannolikheten att $x \in A$ givet att $x \in B$

Exempel:

Låt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$

Detta sade vi kunde representera antalet slantsinglingar som krävs för att landa på krona (eller klave)
Säg nu att vi sätter det här $B =$ första försöket landar på klave $= \{1\}^c = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

Vi förväntar oss att $P(1|B) = 0$ (B gäller, alltså att vi har fått klave på första försöket, men då gäller det att det inte finns någon chans att vi får krona på första försöket)

Med motiveringen över gäller $P(2|B) = \frac{1}{2}$ och följande:

$$P(n|B) = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{P(\{n\} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{n\})}{1/2} = 2P(n) = 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Vi kan definiera ett sannolikhetsmått $Q : 2^B \rightarrow \mathbb{R}$ (för något $B \in \Omega$) och $Q(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$ = betingade sannolikheten

Mer generellt kan vi definiera $Q : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genom $Q(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (med andra ord, den betingade sannolikheten)

För att visa att Q är ett sannolikhetsmått måste vi visa att den uppfyller Kolmogorovs axiom:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in 2^\Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$ om A_i är parvis disjunkta

Detta kommer inte vara så svårt, om vi visar det för $Q : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ så har vi visat det för $Q : 2^B \rightarrow \mathbb{R}$.

Vi visar första axiomet:

$$Q(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \quad \forall A \in 2^\Omega$$

Andra axiomet:

$$Q(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Tredje axiomet:

Antag A_1, A_2, \dots disjunkta. Då är $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots$ också disjunkta.

Vi vill räkna följande:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \frac{P((\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \cap B)}{P(B)}$$

Notera:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cap B &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \text{ ty följande:} \\ x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \cap B &\Rightarrow x \in A_i \text{ för något } i \text{ och } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A_i \cap B \text{ för något } i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

Vi får då:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)}}_{Q(A_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Nu följer det till exempel att:

- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
- Om $A \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq \dots$ så gäller $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n|B)$

4.1. Oberoende utsagor.

Antag att $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$. Vi säger att A och B är **oberoende** om $P(A|B) = P(A)$ och $P(B|A) = P(B)$

Anmärkning:

$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$. Kan bevisas genom Bayes sats.

Ytterligare något att notera är att oberoende är ej en ekvivalensrelation ty den är ej transitiv.

Exempel:

Singla slant 2ggr, $\Omega = \{kr, kl\}^2$.

Vi ansätter A = första försöket ger krona = $\{(kr, kr), (kr, kl)\}$

Vi ansätter B = andra försöket ger krona = $\{(kl, kr), (kr, kr)\}$

Vi får då följande:

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) \quad P(A \cap B) = P(kr, kr) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(B)$$

$\Rightarrow A$ och B är oberoende

Exempel:

Låt Ω = Uppsalas vuxna befolkning.

Låt $A = \{\text{Man}\}$ $B = \{\text{Bruna ögon}\}$ $C = \{\text{Över 170cm}\}$

Avgör vilka som är oberoende

Definition/Sats 4.2: Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Bevis 4.1: Bays sats

$$\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

□

Definition/Sats 4.3

Om $A \& B$ är oberoende så $\Leftrightarrow A^c \& B$ oberoende $\Leftrightarrow A \& B^c$ oberoende $\Leftrightarrow A^c \& B^c$ oberoende

Bevis 4.2

Antag $A \& B$ är oberoende. Antag även att $P(A) > 0, P(B) > 0, P(A^c) > 0, P(B^c) > 0$. $Q(A) = P(A|B)$ är ett sannolikhetsmått, då gäller:

$$Q(A^c) = 1 - Q(A)$$

Det vill säga:

$$P(A^c|B) = 1 - \underbrace{P(A|B)}_{P(A)} = 1 - P(A) = P(A^c) \Rightarrow A^c \& B \text{ är oberoende}$$

Alla andra riktningar/implikationer följer på samma vis.

□

Definition/Sats 4.4: Enkel liten sats

$A \& B$ är oberoende $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Bevis 4.3: Enkel liten sats

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

□

Definition/Sats 4.5: Oberoende (part 2)

Detta är definitionen av oberoende vi i princip alltid kommer använda:
 A och B är oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Anmärkning:

Vad händer om $P(A)$ eller $P(B)$ är 0?

Antag att $P(A) = 0$, eftersom $A \cap B \subseteq A \Rightarrow 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$

Detta ger då att $P(A \cap B) = 0 = P(A \cap B) = 0 \cdot P(B)$

Men då betyder det att A och B alltid är oberoende om $P(A) = 0$

Anmärkning:

Vad händer om $P(A) = 1$?

Rimligtvis borde $P(A \cap B) = 1 \cdot P(B) = P(B)$. Detta sker:

$$\begin{aligned} A \subseteq A \cup B &\Rightarrow 1 = P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 \\ P(A \cup B) &= \underbrace{P(A)}_1 + \underbrace{P(B)}_1 - P(A \cap B) \\ P(B) - P(A \cap B) &= 0 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) = P(B)P(A) \end{aligned}$$

Om $P(A) = 1$ så är A och B alltid oberoende, alltså kan vi utöka Sats 4.3 till godtyckliga händelser A och B

Definition/Sats 4.6: Oberoende i flera variabler

$S \subseteq 2^\Omega$ är oberoende om $A_1, \dots, A_n \in S \Rightarrow P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$

Exempel:

Säg att vi har en mängd $\{A, B, C\}$, mängden är oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ samt $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ samt $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ och $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Sista likheten är viktig, ty om vi antar de 3 andra likheterna (parvis oberoende) är helt annat än full oberoende.

Exempel:

Låt $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(n) = \frac{1}{4}$ samt $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$

Först och främst, $P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(A \cap C) \Rightarrow$ parvis oberoende

Om vi kollar sista grejen man måste kolla för oberoende, $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$, men $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8} \neq 0$, alltså ej oberoende i alla variabler.

Anmärkning:

Om A, B, C är parvis oberoende så är inte A, B, C nödvändigtvis oberoende, men om vi lägger till att A och $B \cap C$ är oberoende, så är A, B, C oberoende.

Detta gäller eftersom $P(A \cap (B \cap C)) = P(A)P(B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Exempel:

Det är 22 personer i klassrummet, vad är sannolikheten att alla i klassrummet har olika födelsedagar? Vi kommer behöva göra några antaganden för att göra det här lite lättare för oss.

Vi betecknar $A_n =$ person $1, \dots, n$ har olika födelsedagar. Det vi söker är A_{22} (22 är en speciell siffra för det här problemet).

Antaganden:

- Antag att $P(A_1) = 1$ (uppenbart att en person har samma födelsedag som en person)
- $P(A_{n+1}|A_n) = \frac{365-n}{365}$ lika stor sannolikhet att födas på alla dagar (inga skottår i vår miljö)

Notera, $A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow A_n \cap A_{n+1} = A_{n+1}$ samt $P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}$

Vi har då $P(A_{22}) = P(A_{22}|A_{21})P(A_{21}) = P(A_{22}|A_{21})P(A_{21}|A_{20})P(A_{20})$
 $= \dots = \underbrace{P(A_{22}|A_{21})}_{\frac{344}{365}} \dots = \frac{364!}{343!365^{21}} \approx 0.52$

Detta var för $P(A_{22})$, för $P(A_n) = \frac{364!}{(365-n)!365^{n-1}}$

Vi sade även att 22 var ett speciellt tal, detta ty $P(A_{23}) \approx 0.49$, alltså där vi bryter 50 procent steget.

Exempel:

Antag att 80 procent av klassen gjorde inlämningsuppgifterna. Av de som gjorde inlämningsuppgifterna, så klarade 90 procent tentamen. Av de som inte gjorde inlämningsuppgifterna klarade 70 procent tentamen.

- Hur stor andel klarade tentamen?
- Hur stor andel av de som klarade tentamen hade gjort inlämningsuppgifterna?

Strategin här går ut på att skriva om uppgiften i matte-termer.

Ω = klassen, A = de som gjorde inlämningsuppgifterna

B = de som inte gjorde inlämningsuppgifterna = A^c

C = de som klarade tentamen

Det vi har givet är att $P(A) = 0.8$, samt att $P(B) = P(A^c) = 0.2$, $P(C|A) = 0.9$, $P(C^c|B) = 0.7 = P(C|B)$

Vi söker $P(C)$. Vi vet även att $A \cup B$ samt att $A \cap B = \emptyset$ (disjunkta).

Vi får då att $(A \cap C) \cup (B \cap C) = C$ samt $(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$

Vi skriver om $P(C) = P((C \cap A) \cup (C \cap B)) = \underbrace{P(A \cap C)}_{P(C|A)P(A)} + \underbrace{P(B \cap C)}_{P(C|B)P(B)}$

$$\Rightarrow 0.9 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.86 = P(C)$$

Nästa uppgift söker efter $P(A|C)$. Här kan vi använda Bayes sats:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{0.9 \cdot 0.8}{0.86} \approx 0.837$$

Man kan tänka på det på följande sätt:

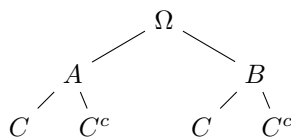


FIGURE 1.

Från högstadiet kanske vi minns att om vi vill veta sannolikheten att $C - A - C$ och $C - B - C$ inträffar så multiplicerar vi $P(C)P(A)P(C)$ och adderar produkten $P(C)P(B)P(C)$, men detta är ju precis det vi har ägnat föreläsningen åt!

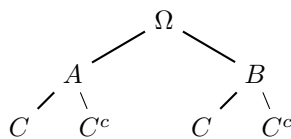


FIGURE 2.

Definition/Sats 4.7: Lagen om total sannolikhet

Antag att A_1, \dots, A_n är disjunkta och $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Då är:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

Specialfall: $A \cap A^c \Rightarrow P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$

5. SLUMPVARIABLER

Definition/Sats 5.1: Slumpvariabel

En *slumpvariabel* är en funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Till varje utfall $\omega \in \Omega$ associeras en *observation* $X(\omega) \in \mathbb{R}$

Exempel:

Vi tar vårt favoritexempel där $\Omega = \{\text{Uppsalas befolkning}\}$

Vi kan då låta $X = \text{längd}$, och ta en annan slumpvariabel $Y = \text{skostorlek}$, och sist men inte minst $Z = \text{ålder}$

Då hade $X(\text{Markus}) = 173$ och $Y(\text{Markus}) = 40$ och $Z(\text{Markus}) = 25$

Exempel:

Vi kan ta vår andra favorit, singla slant n gånger. Istället för krona klave, skriver vi $\{H, T\}$ för heads och tails.

Då är $\Omega = \{H, T\}^n$. Detta är ett exempel på en klassisk sannolikhet, det vill säga $P(\omega) = \frac{1}{2^n} \quad \forall \omega \in \Omega$

Vi kan då definiera en slumpvariabel $X = \text{antalet krona (heads)}$, då kanske det hade sett ut på följande sätt om $n = 3$ och funktionen på följden hade sett ut på följande:

$$X(H, T, H) = 2 \quad X(T, T, T) = 0$$

En annan slumpvariabel vi kan skapa är $Y = \text{antalet klave} = n - X$

En annan slumpvariabel vi kan skapa är följande:

$$X_1 = \left. \begin{array}{l} 1, \text{ första slanten hamnar på krona} \\ 0, \text{ annars} \end{array} \right\}$$

$$X_i = \left. \begin{array}{l} 1, \omega_i = H \\ 0, \omega_i = T \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^n X_i$$

En grej slumpvariabler är bra till är att beskriva händelser.

Exempel: Samma sannolikhetsrum och $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Då är $\{\omega : X(\omega) = 2\} = \text{Antalet krona är exakt } 2$ är exakt $P(\{\omega : X(\omega) = 2\}) = \frac{\binom{n}{2}}{2^n}$

Ett annat exempel vi kan ta är $\{\omega : X(\omega) \geq 2\} = \text{Minst 2 krona}$. Vi vill nu hitta $P(X \geq 2)$.

Om vi lägger på följande: $P(\{X \geq 2\} \cup \{X < 2\})$ som är disjunkta och vi kan därmed summera utfallen $= P(X \geq 2) + P(X < 2) = 1$

Vi kan skriva om $P(X < 2) = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n}$

Vi får då $\Rightarrow P(X \geq 2) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n}$

Inga konstigheter, bara lite kombinatorik, hävdar föreläsaren.

Vi kan generalisera begreppet slumpvariabler:

Definition/Sats 5.2

En n -dimensionell slumpvariabel är en funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Isåfall kan vi skriva $X = (X_1, \dots, X_n)$ där X_i är slumpvariabel

Vi kommer inte använda flerdimensionella slumpvariabler så mycket, men de kommer behövas för att uttrycka vissa händelser när vi har flera samtidigt.

Exempel:

Samma sannolikhetsrum och samma definition av X_i . Då är X_1, \dots, X_n en n -dimensionell slumpvariabel

Det är viktigt att komma ihåg att dessa slumpvariabler måste vara definierade på samma sannolikhetsrum.

Vi skriver till exempel $P(X = a)$ för $P(\{\omega : X(\omega) = a\})$.

Vi skriver även till exempel $P(a < X \leq b) = P(\{\omega : X(\omega) \in (a, b]\})$

Om vi skriver $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$ menar vi att vi tar sannolikheten för snittet av alla, dvs $P(\{\omega : X_1(\omega) \in A_1\} \cap \dots \cap \{\omega : X_n(\omega) \in A_n\})$

Skriver vi $X^{-1}(A)$ ($A \in \mathbb{R}$) definierar vi detta genom $\omega \in X^{-1}(A) \Leftrightarrow X(\omega) \in A$. Kallas även för Urbilden av A under X . Vi skriver $P(X \in A)$ för $P(X^{-1}(A))$

$P \circ X^{-1}$ definierar ett sannolikhetsmått på \mathbb{R} . Med andra ord $(P \circ X^{-1})(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X \in A)$
Om det är ett sannolikhetsmått så ska Kolmogorovs axiom gälla, detta måste vi verifiera vilket vi gör enligt följande:

- $P(X^{-1}(A)) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$ (detta gäller eftersom $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$)
- $P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$
- Först notera att $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$. Detta följer eftersom om vi tar ett element $\omega \in X^{-1}(A \cap B)$ så betyder det att $X(\omega) \in A$ och $X(\omega) \in B$
Att säga det är samma sak som att säga $\omega \in X^{-1}(A)$ och $\omega \in X^{-1}(B) \Leftrightarrow \omega \in X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$

Så om $A \cap B = \emptyset$ så kommer $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Vi kan nu relatera disjunkta händelser i \mathbb{R} till disjunkta händelser i Ω

Tag nu en oändlig följd av händelser $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}$. Då gäller

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i)$$

Så om A_1, A_2, \dots är disjunkta, så måste vi kolla att följande gäller:

$$P \circ X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(A_i)}_{\text{disjunkta}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P \circ X^{-1}(A_i)$$

Definition/Sats 5.3: Diskreta slumpvariabler

Vi säger att en slumpvariabel $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en diskret slumpvariabel om sannolikhetsmättet $P \circ X^{-1}$ är diskret.

Alternativt, X kallas diskret om det finns en Sannolikhetsfunktion $P_x(x)$ så att $P(X \in A) = \sum P_x(x)$

Vad betyder det att måttet var diskret? Jo, det betyder att det finns en uppräknelig mängd $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}^n$ så att $P(x \in \{x_1, x_2, \dots\}) = 1$

Från tidigare föreläsningar vet vi att vissa av dessa utfall måste ha positiv sannolikhet.

Definition/Sats 5.4: Sannolikhetsfunktionen

$$P_X(x) = P(X = x)$$

Definition/Sats 5.5: Kontinuerlig/absolutkontinuerlig slumpvariabel

En *Kontinuerlig/absolutkontinuerlig slumpvariabel* X har en Riemann-integrerbar funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ så att:

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Fördelningen (måttet Q) till en diskret slumpvariabel X bestäms unikt av Sannolikhetsfunktionen $P(X)$. Om X är kontinuerlig, så $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, dvs inte definierad unikt. X bestäms unikt av fördelningsfunktionen $F_X(x) = P(X \leq x)$

Exempel:

Låt $\Omega = \{H, T\}^n$ och slumpvariabeln X_i som den är definierad ovan.

Vi vill nu hitta $P(X = 1)$, vilket gäller om singlingen är krona $= \frac{1}{2}$ som är samma sak som $P(X = 0)$, alltså gäller följande:

$$P_{X_i}(X) = \begin{cases} 1/2, & x = 0 \text{ eller } x = 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Tar vi X till att vara antalet krona (som tidigare), så letar vi efter $P(X = k)$. Vi kan börja med att undersöka vad $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{1}{2^n} \quad P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{x}}{2^n}, & x = 0, \dots, n \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

För en diskret slumpvariabel så bestäms *fördelningen* till X (sannolikhetsmåttet $P \circ X^{-1}$) unikt genom Sannolikhetsfunktionen.

Exempel:

Tag X_i från tidigare. Vad är då Sannolikhetsfunktionen för den flerdimensionella slumpvariabeln?

Vi söker alltså:

$$P_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Vi antar att $\{x_1, \dots, x_n\} \in \{0, 1\}$.

Men vad betyder det att någon av inputen är 0? Det som är viktigt att notera är att alla händelser i detta fall är oberoende, då kan vi göra

$$P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n) = \frac{1}{2^n}, \quad P_{\bar{X}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1/2^n, & x_i \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad \forall i$$

Definition/Sats 5.6: Oberoende slumpvariabler

X_1, \dots, X_n är oberoende om för varje $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ så är $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ oberoende.

Med andra ord, så är sannolikheten (1) $P(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in A_{i_m}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_m} \in A_{i_m})$. Detta går att skriva om:

$$P(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in A_{i_m}, X_{j_1} \in \mathbb{R}, \dots, X_{j_{n-m}} \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_m} \in A_{i_m}) \underbrace{P(X_{j_1} \in \mathbb{R})}_{=1} \cdots \underbrace{P(X_{j_{n-m}} \in \mathbb{R})}_{=1}$$

$$\text{Antag } P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n) \quad (2)$$

Då gäller (1) \Leftrightarrow (2)

Det räcker alltså att kolla $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$ för att visa oberoende.

Definition/Sats 5.7

För diskreta slumpvariabler X_1, \dots, X_n , har vi oberoende omm:

$$P_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P_{X_1}(x_1) \cdots P_{X_n}(x_n) \\ \Leftrightarrow \{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\} \text{ är oberoende för varje } A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$$

Bevis 5.1: Bevis av föregående sats

Riktningen \Rightarrow är självklar (sätt $A_1 = \{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$)

Andra håller är mindre självklar. Vi vill visa $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$ för alla delmängder A_1, \dots, A_n \square

Exempel:

Låt $\Omega = \{\text{Uppsalas befolkning}\}$, $X = \text{längd}$, $Y = \text{vikt}$, $Z = \text{antal syskon}$

I detta exempel så är X, Y beroende, men X, Z är oberoende samtidigt är Y, Z beroende

Vi tänker oss att X_1, \dots, X_n är oberoende om de värden de antar inte "påverkar varandra"

5.1. Viktiga slumpvariabler.

Definition/Sats 5.8: Bernoulli-fördelning

Vi säger att X är Bernoulli-fördelad om:

$$P_x(1) = P \quad P_x(0) = 1 - P \quad P \in [0, 1]$$

Exempel:

Gamla goda exemplet med singla slant är Bernoulli-Fördelad med $P = \frac{1}{2}$

Vi skriver $X \sim Be(P)$ eller $X \in Be(P)$

Exempel:

Singla slant exempel, fast $P(\omega) = P(\omega_1, \dots, \omega_n) = P^k(1-p)^{n-k}$ för något $P \in [0, 1]$ där k är antalet krona.

Om vi definierar X_i som 1 om krona och 0 om klave, så blir X_1, \dots, X_n oberoende och $Be(P)$ -fördelade.

Observation:

Lika fördelad är inte samma sak som lika! $P_X = P_Y$ medför inte att $X = Y$

Definition/Sats 5.9: Existens

Om X är diskret med Sannolikhetsfunktion P_X , så finns det oberoende slumpvariabler X_1, \dots, X_n med samma fördelning som X .

Bevis 5.2: Existens av oberoende slumpvariabler

Låt $A = \{x : P_X(x) > 0\}$, $\Omega = A^n$, $X_i(\omega) = X_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i$.

Definiera $P(\omega) = P_{X_1}(\omega_1)P_{X_2}(\omega_2) \cdots P_{X_n}(\omega_n)$

Då följer $P(X_i = \omega_i) = P_X(\omega_i)$ \square

Definition/Sats 5.10: Binomialt fördelat

Vi säger att X är binomialfördelat om $P_X(k) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$ för $k = 0, 1, \dots, n$

Vi skriver $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Detta kommer från att summan av Bernoulli-fördelade variabler blir precis binomialt fördelade.

Definition/Sats 5.11

Om $X_1, \dots, X_n \sim \text{Be}(P)$ och oberoende så är $X = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, P)$

$$\begin{aligned} \text{Detta följer ur } P(X_1 + \dots + X_n = k) &= P(X_i = 1 \text{ för } k \text{ st } i \text{ och } X_i = 0 \text{ för } n - k \text{ st } i) \\ &= \binom{n}{k} \underbrace{P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0)}_{\substack{P(X_1 = 1) \cdots P(X_k = 1) \cdots P(X_n = 0) \\ P^k \quad (1-P)^{n-k}}} = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} \end{aligned}$$

Vi tänker på $\text{Bin}(n, P)$ som följande:

Upprepade slumpförsök n gånger. Vinst med sannolikhet $P \in [0, 1]$ och förlust med sannolikhet $1-P = q$. $X \sim \text{Bin}(n, p)$ räknar antalet vinster.

Exempel:

$$\{H, T\}^n, X = \text{antal } H = X_1 + \dots + X_n, X_i = \begin{cases} 1, \omega_i = H \\ 0, \omega_i = T \end{cases} \Rightarrow X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Exempel:

Dra 10 lotter. Varje lott har vinstchans på 10%. $X = \text{antal vinster} \sim \text{Bin}(10, 0.1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9^{10} \approx 65\%$$

Kom ihåg! Säg att vi vill räkna sannolikheten att vi har minst 5 vinster ($P(X \geq 5)$). Se sida 474 i boken. Där finns tabell över binomialfördelningar.

Notera!

Säg att $X \sim \text{Bin}(n, P)$ så är $n - X \sim \text{Bin}(n, 1 - P)$

$$P(n - X = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} P^{n-k} (1-P)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k} (1-P)^k P^{n-k}$$

Definition/Sats 5.12

Om $X \sim \text{Bin}(n_1, P)$ och $Y \sim \text{Bin}(n_2, P)$ är oberoende, så är $X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, P)$

Bevis 5.3

Vi vill hitta $P(X + Y = k)$:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^k P(X = j, Y = k - j) = \sum_{j=0}^k P(X = j)P(Y = k - j) \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{n_1}{j} P^j (1 - P)^{n_1 - j} \binom{n_2}{k - j} P^{k - j} (1 - P)^{n_2 - (k - j)} \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{n_1}{j} \binom{n_2}{k - j} P^k (1 - P)^{n_1 + n_2 - k} \\
 &= \left(\sum_{j=0}^k \binom{n_1}{j} \binom{n_2}{k - j} \right) P^k (1 - P)^{n_1 + n_2 - k} \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{n_1}{j} \binom{n_2}{k - j} = \binom{n_1 + n_2}{k} \\
 &\Rightarrow X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, P)
 \end{aligned}$$

Det följer att $P(j) = \frac{\binom{n_1}{j} \binom{n_2}{k - j}}{\binom{n_1 + n_2}{k}} \quad j = 0, \dots, k$ är en sannolikhetsfunktion

□

Om X har fördelning P så skriver vi $X \sim \text{Hyp}(n_1, n_2, k)$, eller
 $X \sim \text{Hyp}(n_1 + n_2, k, n_1)$, eller $X \sim \text{Hyp}(n_1 + n_2, k, \underbrace{\frac{n_1}{n_1 + n_2}}_{\text{vinstchans}})$.

Kallas för *Hypergeometrisk fördelning*

Intuition: Tänk n_1 som vinstlotter, och n_2 som lotter utan vinst. Dra k lotter. Då är X = antal vinstlotter, så kommer $\text{Hyp}(\underbrace{n_1 + n_2}_{\text{antalet lotter}}, \underbrace{k}_{\text{dragningar}}, \underbrace{n_1}_{\text{vinstlotter}})$ -fördelad