UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Affin & Projektiv Geometri

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
September 1, 2022

Contents

1. Plana algebraiska kurvor

Vi inleder med definition:

Theorem 1.1: Plan affin algebraisk kurva

En **plan affin algebraisk kurva** är nollställesmängden till ett icke-konstant polynom $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ där $\mathbb{R}[x, y]$ är mängden av alla polynom med 2 variabler med reella koefficienter.

Nollställesmängden kan betecknas $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

Theorem 1.2: Affin-avbildning

En linjär avbildning är på formen $x \mapsto ax$, medan en affin avbildning är "ungefär linjär", dvs $x \mapsto ax + b$

Ett sätt att betrakta polynom är att de är ett ändligt antal utförande av operatorer på kropp-element.

Exempel:
Betrakta följande polynom i $\mathbb{R}^2$, $ax + by + c = f(x, y)$. Polynomet är av grad 1, och är därför därmed ett linjärt polynom.

Exempel:
Vi kan även ha nollställesmängden som parabel med följande funktion $f(x, y) = y - x^2$

Bygger vi vidare på föregående exempel kommer vi fram till följande mer generella formel för att "omvandla" ett endimensionellt polynom till en flerdimensionell:

$$f(x, y) = y - p(x)$$

Där $p(x)$ är ett godtyckligt polynom.

Exempel:
Om vi betraktar följande funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ (enhetscirkeln) så har den en nollställesmängd som är en punkt.

Exempel:
Om vi betraktar tomma-mängden som nollställesmängd (dvs exempelvis $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$) så är det absolut en valid nollställesmängd, men en obehaglig sådan ty det inte finns en intuitiv geometrisk bild, kan vi kalla den för en kurva? $f(x, y) = x^2 + 1$ har ju samma nollställesmängd!

Exempel:
Betrakta följande funktion $f(x, y) = xy$. Denna har unionen av x-axeln och y-axeln som lösningsmängd

En affin funktion från flervarren som vi kanske minns är faktiskt linjäriseringen av f:

$$f(\bar{r}) \approx f(\bar{r}_0)) + \nabla f(\bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

I den här kursen tillåter vi allmänna linjära basbyten, alltså ej bara isometriska avbildningar utan vi kan skala om ena axeln och krympa den/deformera den!

Theorem 1.3: Singulära punkter

En punkt $\bar{r}_0$ sådant att $f(\bar{r}_0) = 0$ sådant att $\nabla f(\bar{r}_0 = (0, 0))$ kallas **singulär**. Singulära punkter bevaras under affin transformation.

Theorem 1.4: Transversell skärning

Två kurvor $f(\bar{r}) = 0$ och $g(\bar{r}) = 0$ sägs skära varandra transversellt i $\bar{[r]}_0$ om $f(\bar{r}_0) = 0 = g(\bar{r}_0)$ och $\nabla f(\bar{r}_0) \neq 0 \neq \nabla g(\bar{r}_0)$ och $\nabla f(\bar{r}_0)$ och $\nabla g(\bar{r}_0)$ är *inte* parallella (linjärkombinationer av varandra)

I linjär algebra 2 skiljde vi på t.ex ellipser med olika halvaxlar (och andra former) genom att undersöka egenvärden $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ i motsvarande kvadratiska form.
I linjär algebra använde vi ortonormala avbildningar som var isometriska, det ska vi strunta i här eftersom vi vill kunna deformera kurvor utan att bevara längd/vinklar

2. Affina avbildningar

En affin avbildning är *nästan* samma sak som en linjär avbildning, men inte riktigt! Den tillåter translationer (flytta saker axel-parallellt). Alltså, ej en isometri.

Theorem 2.1: Affin Avbildning

En avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ på formen $F(\bar{v}) = L(\bar{v}) + \bar{b}$
Där $\bar{b}$ är en konstant vektor och $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kallas för en **affin** avbildning

Anmärkning: I en linjär avbildning är den konstanta vektorn $\bar{b} = 0$, alltså är alla linjära avbildning affina.

Exempel:
Betrakta följande avbildning: $\bar{F}(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$ $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$
Det är $+e$ och $+f$ som gör avbildningen affin

Anmärkning:
I exemplet är det e, f som är "translationerna" (translationsfaktor). Det enda de gör är att flytta saker, de bevarar längder och vinklar Alternativ notation:

$$\bar{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{L(\bar{v})} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

Theorem 2.2: Affin Transformation

Om $det(\bar{L}) \neq 0$ så kallas $\bar{F}$ för en **affin transformation**. En affin transformation är en bijektion.

Theorem 2.3: Euklidisk Transformation

En transformation som bevarar längd och vinklar, även kallad för ortonormal transformation

Notation: Mängden affina avbildningar noteras $Aff(n) = \{\text{affina transformationer} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$

Egenskaper:
- $F, G \in Aff(n) \Rightarrow F \circ G \in Aff(n)$
- Om $det(\bar{L}) \neq 0$ så är $\bar{F}$ inverterbar ($\bar{L}$ är inverterbar)
- id_{R^n} är affin

Proof 2.1: Egenskap 1

$$F(\bar{v}) = L(\bar{v}) + \bar{b} \qquad G(\bar{w}) = M(\bar{w}) + \bar{c}$$
$$F(\bar{G}(\bar{w})) = F(\bar{M}(\bar{w}) + \bar{c}) = L(\bar{M}(\bar{w}) + \bar{c}) + \bar{b} = L(\bar{M}(\bar{w})) + L(\bar{c}) + \bar{b}$$

□

Proof 2.2: Egenskap 2

$$\bar{y} = \bar{F}(\bar{x}) = \bar{L}(\bar{x}) + \bar{b}$$
$$\bar{F}^{-1}(\bar{y}) = \bar{L}^{-1}(\bar{y} - \bar{b})$$

□

Anmärkning:
Man kan betrakta Aff(n) som en grupp, där identiteten är identitetsavbildningen ($\bar{b} = 0$, linjär identitet = enhetsmatrisen)

Geometriska egenskaper hos Aff(n)

- Om l är en linjne, $\bar{F} \in AffA(n) \Rightarrow \bar{F}(l)$ är en linje
- Om l, l' är paralella linjer så är $\bar{F}(l) = \bar{F}(l')$
- Om två kurvor skär varandra transversellt så gäller detsamma bilderna av kurvorna
- Säg att vi har 4 punkter på en linje, så bevarar $\bar{F}$ längdförhållandet mellan dem:

$$\frac{|\bar{AB}|}{|\bar{CD}|} = \frac{|F(\bar{A})F(\bar{B})|}{|F(\bar{C})F(\bar{D})|}$$

Anmärkning:
Affina avbildningar bevarade nödvändigtvis inte längder och vinklar, men 4:e egenskapen här verkar tyda på att någonting bevaras.

Theorem 2.4

Säg att vi har en affin transformation $\bar{F} \in Aff(n)$, vi inducerar en avbildning:

$$\mathbb{R}[x_1, x_2 \cdots, x_n] \underbrace{\rightarrow}_{F^*} \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \underbrace{\rightarrow}_{F} \mathbb{R}^n \underbrace{\rightarrow}_{f} \mathbb{R}}_{f \circ F} \qquad f \mapsto f \circ \bar{F}$$

Exempel:
Betrakta följande avbildning: $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sådant att $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
$f \in \mathbb{R}[x, y] = x^2 + y^2$ ger följande:

$$F^*(f)(x, y) = f \circ \bar{F}(x, y)$$
$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Theorem 2.5

Om $deg(f) = k$ så $deg(F^*(f)) = k$

Anmärkning:
Det här $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ är en ring med 1:a (identitet). Det är också en $\mathbb{R}$-algebra (ett vektorrum över $\mathbb{R}$ så att multiplikation med $\lambda \in \mathbb{R}$ beter sig civiliserat m.a.p ringstruktur).

Då är $F^* : \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ en $\mathbb{R}$-algebraringhomomorfi, det vill säga:

- $F^*(f + g) = F * (f) + F * (g)$
- $F^*(fg) = F^*(f)F^*(g)$
- $F^*(1) = 1$
- $F^*(\lambda f) = \lambda F^*(f)$

Notation:
Mängden av alla $\mathbb{R}$-algebraringhomomorfi betecknas för $Auf(\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]) = \{\mathbb{R}\text{-algebraringhomomorfi}\}$

Theorem 2.6

Avbildningen $\text{Aff}(n) \underbrace{\rightarrow}_{*} Auf(\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n])$ $F \mapsto F^*$ har egenskapen $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

Proof 2.3: Bevis av föregående sats

$$(F \circ G)^*(f) = f \circ (F \circ G) = (f \circ F) \circ G = G^*(F^*(f)) = (G^* \circ F^*)(f)$$

□

Theorem 2.7: Affint ekvivalens

Låt $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$. Vi säger att f och g är **affint ekvivalenta** om det finns en affin transformation $\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ och ett tal $(\lambda \neq 0)$ så att:

$$F^*(f) = \lambda g$$

Detta är en ekvivalensrelation på $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ $\qquad (f \sim g)$

3. Klassificering av andragradspolynom i två variabler

Vi vill veta hur många ”andragradskurvor” det finns och vilka. Det är planen.
Vi kikar på det allmänna fallet $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.
Vi försöker förenkla $f(x,y)$ (som är ett allmänt polynom) m.h.a affina transformationer och multiplikation med konstanter $\lambda \neq 0$

Vi noterar från $f(x,y)$ att vi har en bit som är en rent kvadratisk form $(ax^2 + bxy + cy^2)$, och vi vet att vi alltid kan diagnolisera kvadratiska former, m.h.a variabelbyte. Vi ser vad som händer om vi gör detta:

$$f(x,y) \Rightarrow x^2 + \lambda y^2 + Dx + Ey + f$$

Där $\lambda \in \{0, 1, -1\}$. Vi falluppdelar:

- $\lambda = \pm 1 \Rightarrow$ Vi kan kvadratkomplettera och vi får $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4} + \lambda\left(y + \frac{E}{2\lambda}\right)^2 - \frac{E^2}{4\lambda} + f$

  Vi samlar alla konstanter till en och gör ett variabelbyte på $x, y \Rightarrow x^2 + \lambda y^2 + F$

Theorem 3.1: Signaturen av en kvadratisk form

Hur många positiva resp. negativa egenvärden = signaturen. Betecknas som koordinater (x,y) där $x =$ hur många positiva och $y =$ hur många negativa.

Notera! Signaturen är oförändrad under affina transformationer (invariant)

Theorem 3.2

Om $f(x,y) = f_1(x,y) \cdot f_2(x,y)$, så är nollställesmängden unionen:

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$$

Ur detta följer det att alla polynomringar $k[x_1, \cdots, x_n]$ är *faktoriella ringar* (varje polynom har en entydig faktorisering i irreducibla polynom). Detta är inte så lätt att visa om vi har fler variabler än 1.

Theorem 3.3: Irreducibla komponenter

Det faktoriserade polynomet kommer ha bitar (faktorer) som korresponderar till element i nollställesmängden. Dessa kallar vi för **irreducibla komponenter**

Theorem 3.4

Två irreducibla kurvor f och g sammafaller (skär varandra) i högst *ändligt* många punkter

4. Övningsuppgifter

Vi påminner att om $f(x,y) = a^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ så är $f(x,y)$ affint ekvivalent med exakt en av följande:

- $x^2 + y^2 - 1$ (cirkel)
- $x^2 - y^2 - 1$ (hyperbel)
- $x^2 - y$ (parabel)
- $x^2 - y^2$ (linjekon)
- $x^2 + y^2$ (punkt)
- $x(x-1)$ (två parallella linjer)
- x^2 ("dubbellinje")
- $x^2 + 1$ (tom)
- $x^2 + y^2 + 1$ (tom)

Man skulle kunna säga att målet med första halvan av kurvan är att bevisa följande sats:

Theorem 4.1: Bezoutes Pseudosats

Om f, g är algebraiska kurvor så skär de varandra precis $(\deg f)(\deg g)$ gånger

I nuläget är det här väldigt fel, vi kan hitta motexempel, men det ska inte stoppa oss! Vi vill gärna att den ska vara sann, för den är så elegant, så vi skapar en miljö där detta stämmer (eskapism i matematisk form).
Det finns 3 huvudsakliga skäl till varför den är falsk:

- Betrakta $f(x,y) = y - x^2$ och $g(x,y) = y + 1$ (har inga reella lösningar)
- Betrakta $f(x,y) = y - x^2$ och $g(x,y) = y$ (ej transversell skärning)
- Betrakta 2 parallella linjer $f(x,y) = x$ oh $g(x,y) = x - 1$ (måste införa projektiv geometi, från affina planet till det projektiva)

5. Komplexa planet $\mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\text{x}\mathbb{C}$, består alltå av ordnade par $(a+ib, c+id)$. Man kan tänka på det som $\mathbb{R}^4 \Rightarrow (a,b,c,d)$.
Naturligtvis kan vi generalisera, upp till $\mathbb{C}^n = \{x_1, \cdots, x_n : x_i \in \mathbb{C}\}$.
Man kan addera dessa vektorer precis som vanligt, multiplicera med $\lambda \in \mathbb{C}$ osv, hela den grundläggande teorin bakom vektorrum bevaras. Vi har alltså bara vektorrum över $\mathbb{C}$ istället för över $\mathbb{R}$

Vi kan exempelvis definiera en parametriserad linje på samma sätt som i $\mathbb{R}^2$:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + t\bar{v} \qquad t \in \mathbb{C}$$

Kuriosa:
Detta är en linje:

$$\mathbb{C}\text{x}\{0\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

Theorem 5.1

Genom två olika punkter i $\mathbb{C}^n$ går endast en linje

Theorem 5.2

$\mathbb{C}^2$, om två linjer inte är parallella (skiljer sig åt med en komplex faktor) så skär de varandra i en entydig punkt

Nu kan vi prata om $V(f)$ till polynom $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Det är vad vi menar med plana affina algebraiska kurvor (nu har vi någonstans där de kan bo).

Vi definierar singularitet på samma sätt, det vill säga om Taylorutvecklingen inte har en linjär faktor så är den singulär i den punkten.

Vi kan nu tala om linjära & affina avbildningar över $\mathbb{C}^n$, dvs $\text{Aff}_{\mathbb{C}}(n)$. De definieras på samma sätt:

$$\bar{F}(\bar{v}) = \bar{L}(\bar{v}) + \bar{b} \qquad \bar{L} \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

Där $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ = mängden av alla inverterbara nxn-matriser

Vi kan även här på samma sätt definiera $F^* : \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$

Återigen, på samma sätt kan vi definiera ekvivalens mellan polynom samt att det bara finns en linje i $\mathbb{C}^2$ precis som i $\mathbb{R}$

En kvadratisk form över $\mathbb{C}^n$ är ekvivalent med en diagonalform med bara ettor och nollor
I $\mathbb{C}^2$ har vi alltså följande kvadratiska former:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorem 5.3: Klassificering av andragradskurvor i $\mathbb{C}^2$

- $x^2 + y^2 - 1$ (cirkel)
- $x^2 - y$ (parabel) (här kan vi använda $T(x,y) = (x, iy)$ för att få cirkel)
- x^2y^2 (linjekors)
- $x(x-1)$ (parallell linje)
- x^2 ("dubbellinje")