UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar VT22

Ordinära Differentialekvationer

Rami Abou Zahra

Contents

1. Föreläsning - Intro

1.1. **Vad är en differentialekvation?** En ekvation som innehåller derivator med avseende på en eller flera oberoende variabler.

Om det enbart är en variabel som är oberoendekallas det för en *ordinär* differentialekvation.

Fråga: Vad är poängen med att variablerna är oberoende? Svar: Man måste ha oberoende variabler som man löser för

1.2. **Exemepel på ODE.**

- $\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^x$
- $y'' - y' + 6y = 0$
- $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2x + y$

I alla dessa fall hade vi *en* oberoende variabel, har vi flera så är det en *partiell differentialekvation* (PDE).

1.3. **Exemepel på PDE.**

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1.4. **Newtons andra lag.** $F = m \cdot a$ där F är kraften, m massan, a accelerationen. Säg att vi har en sten:

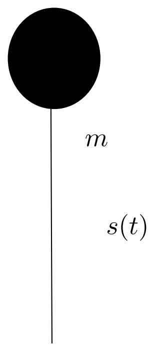

Figure 1. Figur

Då får vi följande samband

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} F = -mg - mg = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{d^2 s}{dt^2} = -g$$

1.5. **Spridning av en sjukdom.** Ett virus sprids genom en population. Spridning sker när folk som är infekterade kommer i kontakt med folk som inte är smittade.

Vad säger detta om spridningen? Antag att vid tid t så är $x(t)$ personer infekterade och $y(t)$ personer är inte infekterade. Spridning bör vara proportionell mot hur många från x, y som mötes, det vill säga ett rimligt antagande är:

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

Något man kan studera är vad som händer när en infekterad person introduceras till en grupp icke-infekterade. Detta betyder att $x(0) = 1$. Antal personer är $x + y = n + 1$. Stoppar vi in detta i ekvationen får vi:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot (n + 1 - x)$$

Ofta kan man inte lösa ODE:er med hand, då kan man lösa det grafiskt/m.h.a dator. Det finns flera verktyg som kan åstadkomma detta men ett av dessa verktyg är ett vektorfält/riktningsfält.

1.6. **Riktningsfält.** Grafiska verktyg är ofta väldigt kraftfulla för att förstå hur lösningen till en ODE ser ut.

Tänk oss att vi har följande ODE:

$$y' = \frac{y}{x^2}$$

De flesta ODE:er går inte att lösa exakt. Därför är grafiska verktyg/numreriska metoder väldigt användbara när man vil lösa ODE:er.

1.7. **Lösning av en ODE.**

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 450$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}(p - 450)$$

$$p = 900 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p(t) = 900 \text{är en lösning}$$

$$p \neq 900 \Rightarrow \frac{\frac{dp}{dt}}{p - 900} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\log(|p - 900|)) = \frac{1}{2} \text{vi kan nu integrera m.a.p t}$$

$$\log(|p - 900|) = \int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2} + C$$

$$|p - 900| = e^{\frac{t}{2} + C} = e^C e^{\frac{t}{2}}$$

$$p = 900 \pm e^C e^{\frac{t}{2}} \text{där } e^C \text{ är en positiv konstant}$$

Kom ihåg att $p = 900$ är en lösning, alltså:

$$p = 900 + Ce^{t/2}$$

ger alla lösningar. Vi kan få fram C genom att kolla på startpopulation:

$$p(0) = 1000 \Rightarrow C = 100 p(t) = 900 + 100e^{t/2}$$

Liknande beteende $\forall p(0) > 900$

1.8. **Klassificering av ODE:er.** I funktionen $y(t)$ är y en beroende variabel (beror på t) och t en oberoende variabel. Detta är en reellvärd funktion på intervallet (a, b):

$$y : (a - b) \to \mathbb{R}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2y}{dt}, y''' = \frac{d^3y}{dt}$$

Alternativt:

$$y^{(0)} = y, y^{(1)} = \frac{dy}{dt} \cdots$$

Sats 1.1: ODE

En ordinär differentialekvation för funktionen $y = y(t)$ är en ekvation på formen:

$$F(t, y, y^{(1)}, \cdots y^{(n)}) = 0$$

Sats 1.2: Graden av en ODE

Graden av en ODE är ordningen på den högsta derivatan av y som förekommer. I sats 1.1 hade det då varit n.

Sats 1.3: Linjär ODE

En ODE kallas för *linjär* om den är på formen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) y^{(i)}(t) = g(t)$$

Sats 1.4: Icke-linjär ODE

Om en ODE inte är linjär kallas den *icke-linjär*

Hur definierar vi en lösning till en ODE?

En lösning till en ODE på ett intervall (a, b) är en funktion $y(t)$ så att:

- y och alla dess derivator är kontinuerliga $\forall t \in (a, b)$
- y löser ekvationen $\forall t$

Om detta uppfylls kallas (a, b) *lösningsintervallet.*

1.9. **Exemepel.**

$$t^5 y^{(4)} - t^3 - y^{(2)} + 6y = 0$$

Denna ODE är linjär och av grad 4.

1.10. **Exemepel.**

$$u'' = \sqrt{1 + (u')^2}$$

Sats 1.5: Initialvärdesproblem

Ett *initialvärdesproblem* (IVP) är en ODE tillsammans med ett startvärde för den oberoende variabeln. För en ODE av grad 1:

$$F(t, y, y') = 0 \text{och} y(x_0) = y_0$$

Där $y(x_0) = y_0$ kallas *initialvillkoret*

Ofta kommer vi ha:

$$y^{(n)}(t) = F(t, y^{(1)} \cdots y^{(n-1)}(t))$$

1.11. **Idén i den här kursen.**

- Givet en ODE, finns det lösning?
- Om ja, hur många lösningar finns det? (Inget initialvärde kommer vi ha oändligt)
- Hitta explicita lösningar till enkla ODE:er
- Analysera och approximera lösningar till komplicerade ODE:er med serier (typ som Taylor-serier men med mer krut)
- Kvalitativa egenskaper (hur påverkar initialvillkoret lösningen?)
- Numreriska metoder

2. Föreläsning - 1:a ordningens ODE och 3 typer

Vi kommer kolla på 3 olika typer av 1:a ordningens ODE:

- Linjära
- Separabla
- Exakta

I alla dessa fall kommer vi kunna lösa dessa och få fram explicita lösningar - i allmänhet inte möjligt. Däremot är det viktigt att notera att det finns 1:a ordningens ODE som inte täcks av dessa fallen!

Vi kommer primärt undersöka ODE:er på formen $y' = f(t, y)$

2.1. **Linjära 1:a ordningens ODE.**

Kan skrivas på formen:

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c(x) - b(x)y}{a(x)}$$

Här antas $a(x) \neq 0$

2.2. **Motiverande exmpel.**

Antag att vi har en ODE på formen:

$$xy' + y = e^x$$
$$x > 0$$

Vi har $xy' + y = (xy)' = e^x$ där vi nu kan integrera båda sidorna:

$$xy = \int e^x dx + C \Leftrightarrow xy = e^x + C \Leftrightarrow y = \frac{e^x + C}{x}$$

Här hade vi riktigt tur att vi kunde inse att derivatan av produkten var lika med ODE:n vi ville lösa. Givetvis går det inte alltid att göra så. Men vad vi kan göra är att vi kan multiplicera ekvationen med en *faktor* för att få ODE:n på den formen.

Denna faktor brukar betecknas $\mu(x)$ och kallas för den *integrerande faktorn.* Låt oss kolla på den allmänna lösningsmetoden:

- Skriv på formen $y\prime + p(x)y = f(x)$
- Beräkna integrerande faktorn $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$
- Tag integrerande faktor och multiplicera ekvationen med den: $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)f(x)$
- Nu har vi $(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$
- Vi kan skriva om ekvationen som $(\mu(x)y)' = \mu(x)f(x) \Leftrightarrow \mu(x)y = \int \mu(x)f(x)dx$

Detta ger oss slutgiltigen lösningen $y = \dfrac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)f(x)dx$

Notera att $\mu(x) \neq 0$ ty $e^x \neq 0$

Detta funkar "alltid", så länge vi kan integrera.

2.3. **Exempel.**

$$y' + 3x^2y = x^2$$

Vi noterar att vi är på rätt form, dvs $p(x) = 3x^2, f(x) = x^2$. Då kan vi räkna den integrerande faktorn:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$$
$$\Leftrightarrow e^{x^3}y' + e^{x^3}3x^2y = e^{x^3} \cdot x^2 \Leftrightarrow (e^{x^3} \cdot y)' = e^{x^3}x^2$$
$$e^{x^3}y = \int x^2 \cdot e^{x^3}dx \Leftrightarrow e^{x^3}y = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$
$$y = \frac{1}{3} + C \cdot e^{-x^3}$$

2.4. **Separabla ekvationer.**

Namnet är ganska beskrivande i det här fallet, där är ekvationer där vi kan separera variablerna. Formellt menas det att ekvationer på denna form är separabla:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

En lösningsmetod ser ut på följande:

- Skriv som $\dfrac{dy}{h(y)} = g(x)dx$ (flyttat över allt med y på ena sidan och allt med x på andra)
- Integrera båda sidorna: $\int \dfrac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$

En rimlig fråga man kan ställa sig är ”varför funkar det att betrakta $\dfrac{dy}{dx}$ som ett bråk?”:

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

$\displaystyle\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}dx = \int g(x)dx$HL är ok, men VL, är den verkligen samma som vi kom fram till? Vi skriver om den

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}dx = \left[u(x) = y(x), \frac{du}{dx} = y'(x)\right] = \int \frac{1}{h(u)}du \text{Men } u \text{ kan lika gärna vara } y$$

2.5. **Exempel.**

$$k = 1, n = 1000, x(0) = 1$$
$$\frac{dx}{dt} = kx(n+1-x), 0 < x < n+1$$
$$\frac{dx}{dt} = x(1001-x)$$
$$\frac{dx}{x(1001-x)} = dt$$
$$\int \frac{dx}{x(1001-x)} dx = \int 1 dt$$
$$\int \frac{dx}{x(1001-x)} dx = \frac{1}{1001} \int \frac{1}{x} + \frac{1}{1001-x} dx \text{vi använde PBU}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1001} \cdot (\log(x) - \log(1001-x)) = t + C$$
$$\log\left(\frac{x}{1001-x}\right) = 1001 \cdot t + C$$
$$\frac{x}{1001-x} = e^{1001t+C}$$
$$x(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{1001-1} = e^{0+C} \Leftrightarrow e^C = \frac{1}{1000}$$
$$x = \frac{1001e^{1001t}}{1000 + e^{1001t}}$$

2.6. **Exempel 2.**

$$(e^{2y} + y) \cdot \cos(x) \frac{dy}{dx} = e^y \sin(2x)$$

Här är det inte helt uppenbart att den är separabel, vi kan testa att flytta runt saker och se vad vi får:

$$\frac{e^{2y} + y}{e^y} dy = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} dx, (\cos(x) \neq 0)$$

Nu ser vi att den är separabel och vi kan köra på!

$$\int \frac{e^{2y} + y}{e^y} dy = \int e^y + ye^{-y} dy = e^y - ye^{-y} - e^{-y} + C = \text{VL}$$
$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)} dx = 2\int \sin(x) dx = -2\cos(x) + D = \text{HL}$$
$$\text{VL} = \text{HL} \Leftrightarrow e^y - ye^-y - e^{-y} = -2\cos(x) + C$$

Detta är en lösning på implicit form, och det går inte att göra så mycket bättre än så ty inga startvärden. Detta är vanligt för separabla ekvationer.

Värt att notera, när vi delar på $\cos(x)$ antar vi att den inte antar värdet 0, men sen i slutet spelar det ingen roll om vi har $\cos(x) = 0$. Detta gäller för att vi har kontinuitet och är okej och giltigt.

När $\sin(x) = 0$ är $\cos(x) = 0$ samtidigt (i bråket), vi får kolla på gränsvärdet då och vi ser att det finns ett G.V. utan problem. Det blir så kallat härbar singularitet.

2.7. Exakta ekvationer.

Diff. ekvationer på formen:

$$M(x, y) + N(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Detta betyder nödvändigtvis inte att den är exakt, så vi måste ställa krav på M, N. Därför ställer vi lite krav som de bör uppfylla.

Sats 2.1: Exakt ekvation

Ekvationen är *exkakt* om det finns en funktion $F(x, y)$ så att $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$ och $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$

Bevis 2.1: Bevisskiss: exakt ekvation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$
$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y) = 0$$
$$\Leftrightarrow F(x, y) = C$$

□

2.8. Enkelt exempel.

$$ydx + xdy = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = xy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = y, \frac{\partial F}{\partial y} = x$$
$$\Leftrightarrow F(x, y) = C \Rightarrow xy = C \Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

Kuriosa: Varför kallas dessa för *exakta*? Inom differentialgeometri så kallas en differential på denna form $ydx + xdy = 0$ för exakt. En viktigare fråga man törs fråga sig är kanske *när är en differentialekvation exakt?*.

Vi har sagt att den är det om det finns ett F, men hur kan vi hitta det?

Sats 2.2: När kan vi hitta F

åt $M(x, y)$ och $N(x, y)$ vara två kontinuerliga funktioner med kontinuerliga första ordningens partiella derivator (vi antar att det här gäller i någon rektangel $a < x < b, c < y < d$). Då är $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ exakt omm:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Bevis 2.2: När kan vi hitta F

Vi börjar med ena hållet, om ekvationen är exakt vill vi visa att det här gäller.

Att den är exakt implicerar att $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$.

Vi får:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}$$
$$\Leftrightarrow \text{De är lika}$$

Eftersom M, N har kontinuerliga derivator så kommuterar dem (enligt flervariabelanalys)

Vissa ekvationer kan göras exakta genom att multiplicera med en integrerande faktor. Inte så allmänt

□

2.9. **Exempel.**
Betrakta följande differentialekvation:

$$2xydx + (x^2 - 1)dy$$

Här är $2xy = M$ och $(x^2 - 1) = N$. Nu vill vi kolla om den här differentialekvation är exakt:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Nu vill vi hitta ett F så att $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M = 2x$ och att $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N = x^2 - 1$.

Låt oss ta integralen på N:

$$F(x, y) = \int (x^2 - 1)dy = (x^2 - 1) \cdot y + h(x)$$

Viktigt att notera att vi får $h(x)$ som konstant, ty vi vet inte om konstanten beror på x när vi integrerar med avseende på y.

Vi vill hitta $h(x)$ så att den första partialen (M) uppfylls:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big((x^2 - 1)y + h(x)\big) = 2xy$$
$$2xy + h'(x) = 2xy \Leftrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = C$$

Vi behöver *ett* F, så vi kan ta $C = 0$:

$$F(x, y) = (x^2 - 1)y$$
$$dF(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = C$$
$$(x^2 - 1)y = C \Leftrightarrow y = \frac{C}{x^2 - 1}$$

2.10. **Exempel på differentialekvationer som ej linjär, exakt, eller separabel.**

- $y' = \sin(xy)$
- $e^{y'} = x$

3. Förtydligande - Föreläsning 2

Det kanske var lite otydligt just *vad* en exakt lösning/differentialkevation var och vad det innebär med just att den löses *implicit*.

Sats 3.1: Implicit lösning

En lösning kallas för *implicit* om den *implicerar* explicita lösningar.

3.1. Exempel.

Låt oss titta på ekvationen för en cirkel med radie 5 i planet:

$$25 = x^2 + y^2$$

Detta är en funktion som inte är *rent* definierad, det vill säga vi har inget VL som består av enbart *beroende* variabler från HL såsom $y(x)$. Däremot så *implicerar* den de explicita funktionerna:

- $y = \sqrt{25 - x^2}$
- $y = -\sqrt{25 - x^2}$

Nu har vi gått igenom definitionen, låt oss rigoröst gå igenom definitionen av en *exakt* differentialkevation. Vi kommer göra detta genom att gå igenom ett exempel och sedan se vad det är vi kommer behöva för att lösa den.

Antag att vi vill lösa följande:

$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

För förklaringens skull, antag att vi har en funktion $\varphi(x, y) = y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3$. Låt oss nu finna den partiella derivatan av denna funktion:

- $\dfrac{\partial}{\partial x} = 2xy - 9x^2$
- $\dfrac{\partial}{\partial y} = 2y + x^2 + 1$

Notera här att detta matchar precis differentialkevationen förutom att den saknar en $\dfrac{dy}{dx}$ term. Men! Tricket kommer från flervarren. Vi vet att y är en *beroende* variabel som beror på x, alltså kommer vi enligt kedjeregeln få följande:

$$\frac{d}{dx}(\varphi(x, y(x))) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Detta på grund av att $y(x)$ tekniskt sett har en inre derivata som vi måste ta hänsyn till. Vi ser nu att vi kan skriva om vår differentialkevation som $\dfrac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) = 0$. Men om en ordinär derivata (dvs inte partiell, ty då måste vi betrakta alla partialer) är lika med noll så måste det vara så att vi differentierar en konstant! Alltså $\varphi(x, y(x)) = C$, men detta motsvarar i vårat exempel då att vi har:

$$\varphi(x, y) = y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 = C$$

Detta blir då en *implicit* lösning, eftersom den implicerar flera lösningar som vi får arbeta oss för. Det som nu återstår är att kolla hur vi kan hitta denna underbara φ funktion och under vilka villkor som den fungerar.

Vår sugardaddy/mommy funktion skall alltså uppfylla:

- $\varphi_x = M$
- $\varphi_y = N$

Givet att $\varphi(x, y(x))$ och dess första derivator också är kontinuerliga vet vi från flervarren att vi kan kommutera partialerna på följande sätt:

$$\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$$

Men givet detta, och att $\varphi_x = M$ osv så kan vi alltså busa lite!

$$\varphi_{xy} = (\varphi_x)_y = (M)_y = M_y$$
$$\varphi_{yx} = (\varphi_y)_x = (N)_x = N_x$$

Men eftersom $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ så vet vi alltså att $M_y = N_x$, fiffigt sätt att kontrollera att man har gjort rätt!

Hur kan vi hitta denna funktion då? Vi skulle kunna använda $M_y = N_x$ sambandet och se om vi kommer någon vart:

$$\varphi = \int M dx \Leftrightarrow \int N dy$$

Detta är fördelaktigt att vi kan byta runt och integrera lite som vi vill, ty förhoppningsvis är en utav dem lättare än den andra. Låt oss antag att dx integralen är den vi vill integrera:

$$\int M dx = \varphi + h(y)$$

Detta eftersom φ är en funktion av 2 variabler och vi integrerar med avseende på en, alltså vet vi inte om konstanten kanske beror på den andra variabeln. Därför skriver vi $h(x)$ istället för C som vi kanske är vana med.

Hur kan vi hitta denna mystiska funktion $h(x)$? Vi vet att om vi deriverar φ med avseende på y så bör vi få N, vi använder detta till vår fördel:

$$\varphi_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi + h'(y) = N$$
$$h'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\varphi$$

Nu är det bara en fråga om att integrera $h'(y)$:

$$h(y) = \int (N - \frac{\partial}{\partial}\varphi) dy$$
$$\Leftrightarrow \varphi + D$$

Vi kan strunda i konstanten D eftersom i vår implicita lösning så kommer vi ha $\varphi + D = C$ där vi nu kan slå ihop D och C till en enda konstant. Nu har vi hittat en metod för att lösa dessa differentialkevationer! För definitionen, se Sats 2.1.

4. Föreläsning - Existens och unikhet

Antag att vi har en ODE på formen:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

I allmänhet kan vi inte lösa den här explicit. Vi kommer under denna föreläsning kika på IVP. Vi kommer studera 3 frågor:

- Lokal existens: finns det en lösning $y(x)$ def. i närheten av x_0?
- Existens i stort: Hur stort intervall kan den vara definierad på som innehåller x_0 där $y(x)$ är def.?
- Unikhet: Finns det flera lösningar eller bara en? Detta är viktigt att veta om man studerar en ODE eftersom man behöver ha koll på att den lösningen man får som kanske löser ett system så behöver vi veta vad den andra lösningen betyder.

När det gäller första punkten, det visar sig att lokal existens endast kräver att f är kontinuerlig:

Sats 4.1

Om f är *kontinuerlig* så finns det en lösning definierad i närheten av en punkt.

Detta räcker *inte* för att lösningen ska vara unik! Exempelvis:

$$y' = xy^{1/3}, y(0) = 0$$
$$y((x)) = 0, y(x) = \frac{x^3}{\sqrt{27}}$$

Vi kommer kolla på ett intressant bevis om när lösnignen är unik, ty beviset ger information om hur man kan approximera en lösning.

Sats 4.2

Antag att f och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i någon rektangel $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ som innehåller (x_0, y_0) i dess inre (kan ej ligga på randen).

Då existerar det något intervall $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ för $h > 0$ och en *unik* funktion $y = y(x)$ definierad på I så att $y' = f(x, y)$ på I och $y(x_0) = y_0$

Kommentar: $y' = xy^{1/3} = f(x, y)$ ger oss $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{3y^{2/3}}$ som inte är kontinuerlig ty $y \neq 0$ ger bus.

Kommentar: Bara för att funktionen är definierad i en rektangel betyder det inte att samma rektangel är intervallet för lösningen. I allmänhet är intervallet mindre än rektangel.

$$y' = y^2, y(0) = 1$$
$$\Leftrightarrow f(x, y) = y^2 \text{ är kont.}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \text{ är kont.}$$
$$y(x) = \frac{1}{1 - x}$$

Så satsen gäller $\forall$ rektanglar. Notera att lösningen inte är def. i $x = 1$, men den är definierad för $x < 1$.

Bevis 4.1: Sketch av bevis för unikhet av unikhetssats

Idén är att använda metoden med successiva approximationer. Vi kommer börja med en funktion som inte är en lösning men som ger oss lite info och så fortsätter vi tills vi når ett "gränsvärde" som är vår lösning:

- Skriv om som integralekvation: $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0} x f(t, y(t))dt \Leftrightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$
- Det härliga här är att vi kan förkasta initalvärdet, ty det blir lätt att stoppa in och lösa.
- Nu definierar vi en sekvens av funktioner som är våra "successiva approximation": $\varphi_0(x) = y_0$. Denna uppfyller IV men i allmänhet inte funktionen. Sedan definierar vi $\varphi_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt$ (i allmänhet inte en lösning til ekvationen), men vi fortsätter såhär $\cdots \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))dt$
- Vi vill få en känsla för att den här sekvensen av funktioner i gränsvärdet när $y \to \infty$ ger oss en lösning.
- Notera, $\varphi_n(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt = y_0$ men i allmänhet *inte* $\varphi_n' = f(x, \varphi_n)$
- $\lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))dt$
- Om vi låter $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ får vi:
- $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \to \varphi$ är en lösning!
- Detta är ett informellt bevis ty vi vet inte när vi kan flytta in gränsvärdet innanför integralen, går det att få in det så löser det sig.

Vi får inte glömma att vi använder oss av att f är kontinuerlig och definierad i rektangeln. Vi måste alltså se till att φ hamnar inom denna rektangeln. Vi måste därför begränsa φ så att den aldrig lämnar rektangeln.

□

4.1. **Exempel.**

Vi kommer ta en explicit ekvation och kolla vad som händer med φ

$$y' = -\frac{y}{2} + t, y(0) = 0$$
$$y(t) = 0 + \int_0^x \frac{y(s)}{2} + sds$$
$$\varphi_0(t) = 0$$
$$\varphi_1(t) = 0 + \int_0^t \frac{0}{2} + sds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$
$$\varphi_2(t) = \int_0^t \frac{\frac{s^2}{2}}{2} + sds = \int_0^t \frac{s^2}{4} + sds = \left[\frac{s^3}{2\cdot 3!} + \frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{2}$$
$$\vdots$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{2^{n-1}(n+1)!} \text{ ser ut som taylor för } e^x$$

Vi kan kolla att den konvergerar genom kriterier för serier. I detta fall kan vi försöka få en explicit lösning. Vi noterar att den liknar taylor, låt oss undersöka:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \to \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{2^{k-2}k!} = 4\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{2^k k!} = 4\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{-t}{2}\right)^k}{k!} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-t}{2}\right)^k}{k!} - 4 + 2t = 4e^{\left(\frac{-t}{2}\right)} - 4 + 2t$$

Bevis 4.2: Bevis av unikhet

Antag att vi har 2 lösningar, y_1 och y_2. Det vi gjorde var att vi skrev om den på integralform:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt$$

Om de är unika så borde $y_1 - y_2 = 0$

$$y_1 - y_2 = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt\right) - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt\right)$$

$$y_1 - y_2 = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt$$

MVS ger $g(y_1) - g(y_2) = g'(\alpha y_1 + (1 - \alpha y_2))(y_1 - y_2), \alpha \in [0, 1]$

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)(y_1 - y_2)$$

Eftersom $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kont. i R finns det en övre gräns:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y} < C\right| \text{ för någon konstant } C$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha y_1 - (1 - \alpha)y_2)\right| \leq C$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C\,|y_1 - y_2|$$

Går vi tillbaka till där vi skrev ”för någon konstant C” får vi:

$$|y_1 - y_2| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\,dt \leq C\int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\,dt$$

Låt $u(x) = |y_1(x) - y_2(2)|$:

$$u'(x) \leq C \cdot u(x) \Leftrightarrow u'(x) - Cu(x) \leq 0$$

Detta är en linjär differentialolikhet som vi löser på följande sätt:

Integrerande faktor: $\mu(x) = e^{\int -Cdx} = e^{-Cx} > 0$ så ändrar inte olikheten:

$$e^{-Cx}u'(x) - Ce^{-Cx}u(x) \leq 0 \Leftrightarrow (e^{-Cx}u(x))' \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} (e^{-Ct}u(t))'dt \leq 0 \Leftrightarrow e^{-Cx}u(x) - e^{Cx_0}u(x_0) \leq 0$$

Då är frågan, vad är $u(x_0)$?

$$u(x_0) = |y_1(x_0) - y_2(x_0)| = |y_0 - y_0| = 0$$

$e^{-Cx}u(x) \leq 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$ men eftersom $u(x)$ är absolutbelopp så kan ej vara negativ, alltså

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow y_1(x) - y_2(x) = 0 \Leftrightarrow y_1(x) = y_2(x)$$

□