UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Affin & Projektiv Geometri

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
August 30, 2022

Contents

1. Plana algebraiska kurvor

Vi inleder med definition:

Theorem 1.1: Plan affin algebraisk kurva

En **plan affin algebraisk kurva** är nollställesmängden till ett icke-konstant polynom $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ där $\mathbb{R}[x, y]$ är mängden av alla polynom med 2 variabler med reella koefficienter.

Nollställesmängden kan betecknas $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

Theorem 1.2: Affin-avbildning

En linjär avbildning är på formen $x \mapsto ax$, medan en affin avbildning är ”ungefär linjär”, dvs $x \mapsto ax + b$

Ett sätt att betrakta polynom är att de är ett ändligt antal utförande av operatorer på kropp-element.

Exempel:
Betrakta följande polynom i $\mathbb{R}^2$, $ax + by + c = f(x, y)$. Polynomet är av grad 1, och är därför därmed ett linjärt polynom.

Exempel:
Vi kan även ha nollställesmängden som parabel med följande funktion $f(x, y) = y - x^2$

Bygger vi vidare på föregående exempel kommer vi fram till följande mer generella formel för att ”omvandla” ett endimensionellt polynom till en flerdimensionell:

$$f(x, y) = y - p(x)$$

Där $p(x)$ är ett godtyckligt polynom.

Exempel:
Om vi betraktar följande funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ (enhetscirkeln) så har den en nollställesmängd som är en punkt.

Exempel:
Om vi betraktar tomma-mängden som nollställesmängd (dvs exempelvis $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$) så är det absolut en valid nollställesmängd, men en obehaglig sådan ty det inte finns en intuitiv geometrisk bild, kan vi kalla den för en kurva? $f(x, y) = x^2 + 1$ har ju samma nollställesmängd!

Exempel:
Betrakta följande funktion $f(x, y) = xy$. Denna har unionen av x-axeln och y-axeln som lösningsmängd

En affin funktion från flervarren som vi kanske minns är faktiskt linjäriseringen av f:

$$f(\bar{r}) \approx f(\bar{r}_0)) + \nabla f(\bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

I den här kursen tillåter vi allmänna linjära basbyten, alltså ej bara isometriska avbildningar utan vi kan skala om ena axeln och krympa den/deformera den!