Uppsala universitet Institutionen för informationsteknologi Avd. för beräkningsvetenskap

Blandade formler i Beräkningsvetenskap I och II

1. Flyttal och avrundningsfel

Ett flyttal fl(x) representeras enligt

$$fl(x) = \hat{m} \cdot \beta^e$$
, $\hat{m} = \pm (d_0.d_1d_2, \dots, d_{p-1})$, $0 < d_i < \beta$, $d_0 \neq 0$, $L < e < U$,

där β betecknar bas och p precision.

Ett flyttalssystem defineras $FP(\beta, p, L, U)$.

Maskinepsilon (avrundningsenheten) $\epsilon_M=\frac{1}{2}\beta^{1-p}$ och kan defineras som det minsta tal ϵ sådant att $fl(1+\epsilon) > 1$.

Linjära och ickelinjära ekvationer 2.

Newton-Raphsons metod: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ För system: $x_{k+1} = x_k - [F']^{-1}F(x_k)$, där x_k och $F(x_k)$ är vektorer och F' är Jacobianen.

Fixpunktsiteration för x = g(x): $x_{k+1} = g(x_k)$

Konvergenskvot, konvergenshastighet

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|^r} = C,$$

där C är en konstant, och r anger konvergenshastigheten (r=1 betyder t ex linjär konvergens).

Allmän feluppskattning

$$|x_k - x^*| \le \frac{|f(x_k)|}{\min|f'(x)|}$$

 $Konditionstalet \ cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ mäter känsligheten för störningar hos ekvationssystemet Ax = b. Det gäller att

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \operatorname{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

 $\operatorname{d\ddot{a}r} \Delta x = x - \hat{x} \text{ och } \Delta b = b - \hat{b}.$

Normer (vektor- respektive matrisnorm)

$$\| x \|_{2} = \sqrt{|x_{1}|^{2} + \ldots + |x_{n}|^{2}} \quad \| x \|_{1} = \sum_{i} |x_{i}|$$

$$\| A \|_{1} = max_{j}(\sum_{i} |a_{ij}|) \qquad \| A \|_{\infty} = max_{i}(\sum_{j} |a_{ij}|)$$

$$\| x \|_{\infty} = max_{i}\{|x_{i}|\}$$

3. Approximation

Newtons interpolationspolynom p(x) då vi har n punkter $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ bygger på ansatsen

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_{n-1}(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Minstakvadratapproximationen till punktmängden $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_m, y_m)$ med ett n:egradspolynom $p(x) = a_0\cdot 1 + a_1\cdot x + \ldots + a_n\cdot x^n$ kan formuleras som ett överbestämt ekvationssystem Ax = b, där A är $m \times n$, m > n. Minstakvadratlösningen kan fås ur normalekvationerna

$$A^T A x = A^T b$$

4. Ordinära differentialekvationer

Eulers metod (explicit Euler): $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, n.o. 1 Implicit Euler (Euler bakåt): $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$, n.o. 1 Trapetsmetoden: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$, n.o. = 2 Heuns metod (tillhör gruppen Runge-Kuttametoder):

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_{k+1}, y_k + hK_1) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

n.o. = 2

Klassisk Runge-Kutta:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_{k+1}, y_k + hK_3) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

n.o. = 4

5. Numerisk integration

Trapets formeln

Beräkning på ett delintervall med steglängd $h_k = x_{k+1} - x_k$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \, dx = \frac{h_k}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

Sammansatt formel på helt intervall [a b], då ekvidistant steglängd $h = h_k$:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Diskretiseringsfelet R på helt intervall $[a\ b]$, dvs $\int_a^b f(x)\ dx = T(h) + R$ är

$$R = -\frac{(b-a)}{12}h^2f''(\xi).$$

Funktionsfelet (övre gräns): $(b-a) \cdot \epsilon$, där ϵ är en övre gräns för absoluta felet i varje funktionsberäkning.

Simpsons formel

Beräkning på ett dubbelintervall med steglängd h

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) \, dx = \frac{h}{3} [f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})]$$

Sammansatt formel på helt intervall [a b], då ekvidistant steglängd $h = h_k$:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

Diskretiseringsfelet R på helt intervall $[a\ b]$, dvs $\int_a^b f(x)\ dx = S(h) + R$ är

$$R = -\frac{(b-a)}{180}h^4f''''(\xi).$$

Funktionsfelet: Samma som för trapetsformeln, se ovan.

6. Richardsonextrapolation

Om $F_1(h)$ och $F_1(2h)$ är två beräkningar (t ex ett steg i en beräkning av en integral eller en ODE) med en metod av noggrannhetsordning p med steglängd h respektive dubbel steglängd 2h så är

$$R(h) = \frac{F_1(h) - F_1(2h)}{2^p - 1}$$

en uppskattning av den ledande termen i trunkeringsfelet i $F_1(h)$. Kan även användas för att förbättra noggrannheten i $F_1(h)$ genom

$$F(h) = F_1(h) + \frac{F_1(h) - F_1(2h)}{2p - 1}.$$

7. Numerisk derivering

För numerisk derivering används s k differensformler

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \text{ central differens}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ fram åt differens}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \text{ bak åt differens}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

8. Monte Carlometoder

Den övergripande strukturen för Monte Carlosimuleringar är

```
Indata N (antal försök)
for i = 1:N
    Utför en stokastisk simulering
    resultat(i) = resultatet av simuleringen
end
slutresultat genom någon statistisk beräkning, t ex medelvärdet mean(resultat)
```

Noggrannhetsordning för Monte carlometoder är $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$, där N är antal samplingar.

Kumultativ fördelningsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy$

Normalfördelning

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Aritmetiskt medelvärde baserat på N realisationer x_i av slumpvariablen $X: \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$.

9. Taylorutveckling

Taylorutveckling av $y(x_k + h)$ kring x_k :

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_k) + \mathcal{O}(h^4)$$