

Övningar 1, svar/lösningar ①

+ till vissa av uppgifterna.

1. Följande är påståenden:

a, c, e, f, i, j, k.

(Huruvida l är ett påstående är en tolkningsfråga.)

2. (a) Tåget går till Stockholm ✓
Tåget går till Gävle.

(b) Gustav Vasa var kung ^
Gustav Vasa levde på 1500-talet.

(c) Det regnar \rightarrow jag tar med paraplyet.

(d) Samma som (c).

(e) (Det regnar \vee Det är under fem grader)
 \rightarrow jag tar vinterrocken.

(g) $x^2 < 9 \rightarrow (x < 3 \wedge x > -3)$

(2)

$$(i) \quad x^2 - 3x + 3 = 0 \iff$$

$$(x = 3 \vee x = 1)$$

$$(j) \quad x^2 = 2 \iff (x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2})$$

$$(k) \quad (x \text{ är ett reellt tal} \wedge$$

$$y \text{ är ett reellt tal})$$

$$\rightarrow (x^2 + y^2 = 0 \iff (x = 0 \wedge y = 0)).$$

$$(l) \quad \neg (\text{Tåget går till Stockholm} \vee$$

$$\text{Tåget går till Gävle})$$

Eller: $(\neg \text{Tåget går till Stockholm}) \wedge$

$$(\neg \text{Tåget går till Gävle})$$

$$(p) \quad \neg x = 0$$

$$(q) \quad (\neg x^2 > 0) \rightarrow (x \leq 1 \wedge x \geq -1)$$

$$(r) \quad ((\neg x = 0) \wedge (\neg x = 1)) \rightarrow$$

$$(\neg x^2 - 3x + 3 = 0).$$

(g)

$$\frac{\frac{\frac{A \wedge \neg A}{A} (1E)}{\neg A} (1E)}{\perp} (1E)$$

$$\frac{\perp}{\neg(A \wedge \neg A)} (\neg I)^1$$

(9)

(h)

$$\frac{\frac{\frac{A}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)}{B} (\neg E)}{\perp} (\neg I)$$

$$\frac{\perp}{\neg A} (\neg I)$$

(j)

$$\frac{\frac{\frac{A \vee C}{A^1} (\neg E)}{A} (\neg E)}{\perp} (\neg I)$$

$$\frac{\perp}{A} (RAA)$$

$$\frac{A}{\neg A} (VE)^1$$

Man kan säga att alla antaganden '¬A' ovanför denna linje är avslutade, eftersom det inte fanns några sådana antaganden.

(l)

$$\frac{\frac{\frac{A^1}{A \vee B} (vI)}{\neg(A \vee B)} (\neg E)}{\perp} (\neg I)^1$$

$$\frac{\perp}{\neg A} (\neg I)^1$$

$$\frac{\frac{\frac{B^2}{A \vee B} (vI)}{\neg(A \vee B)} (\neg E)}{\perp} (\neg I)^2$$

$$\frac{\perp}{\neg B} (\neg I)^2$$

$$\neg A \wedge \neg B$$

(m) Vi ger först en härledning som visar att $\vdash B \vee \neg B$ är korrekt.

$$\frac{\frac{\frac{B^1}{B \vee \neg B} (vI)}{\neg(B \vee \neg B)} (\neg E)}{\perp} (\neg I)^1$$

$$\frac{\perp}{\neg B} (\neg I)^1$$

$$\frac{B \vee \neg B}{\neg(B \vee \neg B)} (\neg E)$$

$$\frac{\perp}{B \vee \neg B} (RAA)^2$$

Kalla härledningen av $B \vee \neg B$ för H .
Följande härledning bevisar $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$.

(5)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} H \\ B \vee \neg B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{B} \\ \neg A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A \rightarrow B \quad \cancel{A}^1}{B} (\rightarrow E) \\ \frac{\perp}{\neg A} (\neg I)^1 \\ \frac{\neg A \quad \neg A \vee B}{\neg A \vee B} (\vee I) \end{array} \\
 \hline
 \neg A \vee B \quad (VE)^2
 \end{array}$$

(4) Låt H vara en härledning som bevisar $\vdash A \vee \neg A$. Följande härledning bevisar $A \leftrightarrow B \vdash A \vee \neg B$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} H \\ A \vee \neg A \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A} (\leftrightarrow E) \\ \frac{\cancel{B}}{A} (\rightarrow E) \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{A}^2 \\ \neg A \end{array} \\
 \frac{\frac{\frac{\perp}{\neg B} (\neg I)^1}{A \vee \neg B} (\vee I)}{A \vee \neg B} (VE)^2
 \end{array}$$

Följande härledning bevisar $A \leftrightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{A \wedge \neg B}{A} (\wedge E) \quad \frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} (\leftrightarrow E)}{B} (\rightarrow E) \quad \frac{A \wedge \neg B}{\neg B} (\wedge E) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg(A \wedge \neg B)} (\neg I)
 \end{array}$$

Det lämnas som övning att visa hur de sista två härledningarna sätts ihop till en som bevisar $A \leftrightarrow B \vdash (A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge \neg B)$.