Övningar till lektion 2

Satslogik, formellt

1. Låt $\sigma = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ vara en *satslogisk signatur* (*propositional signature*).[1] Vilka av följande *uttryck/strängar* (*expressions/strings*) är *formler* (*formulas*) i $LP(\sigma)$ enligt Definition 3.1.2 i boken?

   (a) p_2
   (b) p_7
   (c) $(p_1 \to p_4)$
   (d) $(p_0 \wedge p_3) \leftrightarrow p_4$
   (e) $(p_0 \wedge p_3) \leftrightarrow p_4)$
   (f) $((p_0 \wedge p_3) \leftrightarrow p_4)$
   (g) $((p_0 \wedge p_3) \leftrightarrow p_5)$
   (h) $\neg p_2 \vee p_1$
   (i) $((\neg p_2) \vee p_1)$
   (j) $\bot$
   (k) $(p_0 \vee \bot)$
   (l) $(\wedge p_2)$
   (m) $(p_0 \to \neg p_2)$
   (n) $(p_0 \to (\neg p_0))$

2. För att göra aritmetiska uttryck lättare att läsa så har man vissa prioritetskonventioner för operationerna $+, \cdot$ och "upphöjt", nämligen att "upphöjt" går före $\cdot$ vilket i sin tur går före $+$. Så $x \cdot y + z^y$ betyder samma sak som $((x \cdot y) + (z^y))$. På liknande sätt förenklar man ofta satslogiska formler genom att inte skriva ut de yttersta paranteserna, så vi kan skriva $(p_0 \wedge p_3) \leftrightarrow p_4$ i stället för $((p_0 \wedge p_3) \leftrightarrow p_4)$. Dessutom har man prioritetskonventionen att $\neg$ går före $\wedge, \vee, \to$ och $\leftrightarrow$, men mellan de fyra sista konnektiven inför vi inga prioritetskonventioner, så paranteser behövs för att ange ordningen mellan dessa. Låt σ vara som i föregående uppgift. Vilka formler syftar följande uttryck på enligt den strikta definitionen 3.1.2 i boken? Med andra ord skriv ut de saknade paranteserna.

   (a) $(p_3 \to p_2) \to \neg p_3$
   (b) $\neg(p_3 \to p_2) \to \neg \bot$
   (c) $\neg(\neg(\bot \vee \neg p_1) \wedge \neg(\neg p_1 \to p_3))$

3. Till vilka av formlerna i föregående uppgift är (med våra paranteskonventioner)

   (a) $\neg p_1$ en *delformel* (*subformula*)?
   (b) $p_3 \to p_2$ en delformel?
   (c) $\neg(p_3 \to p_2)$ en delformel?
   (d) $\neg p_3 \to p_2$ en delformel?

4. Låt σ vara som i första uppgiften. När signaturen σ är klar från sammanhanget (eller irrelevant för resonemanget) förkortar vi ofta '$\vdash_\sigma$' med '$\vdash$'. Bevisa följande sekventer med naturlig deduktion:

[1] Vi kommer ofta bara att säga *signatur*.

(a) $p_0 \wedge p_1 \vdash (p_0 \vee p_2) \wedge p_1$.

(b) $\vdash \neg(p_4 \wedge \neg p_4)$.

(c) $\{(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3,\ \neg p_3\} \vdash \neg(p_1 \vee p_2)$.

(d) $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \vdash \neg(p_1 \vee p_2)$

5. Låt σ vara en signatur och låt $\varphi \in LP(\sigma)$.

   (a) Vad menas med att $\models_\sigma \varphi$, eller med ord att φ är en *tautologi* (alternativt *valid* formel)?

   (b) Vad menas med att φ är *satisfierbar*?

   (c) Vad menas med att φ är *osatisfierbar* (*"contradiction" eller "inconsistent"* med bokens terminologi)?

6. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$. Avgör med sanningsvärdestabell vilka formler som är tautologier, satisfierbara, respektive osatisfierbara:

   (a) $\neg(p \wedge \neg p)$

   (b) $\neg p \ \wedge \ (q \rightarrow (p \wedge q))$

   (c) $\bot \rightarrow p$

   (d) $((p \rightarrow q) \ \rightarrow \ (\neg(q \wedge r) \rightarrow \neg(p \wedge q)))$

   (e) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)) \ \leftrightarrow \ (p \vee (r \rightarrow q))$

   (f) $((((p \rightarrow q) \rightarrow r) \ \rightarrow \ ((r \rightarrow p) \rightarrow q)) \ \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow p))$

   (g) $(p \wedge \neg(\neg q \vee r)) \wedge (r \vee \neg p)$

7. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$. Kom ihåg att om $\varphi, \psi \in LP(\sigma)$ så betyder 'φ eq ψ' att φ och ψ är (logiskt) *ekvivalenta*. Vilka av följande påståenden om ekvivalenser stämmer?

   (a) $\neg(p \leftrightarrow q) \quad \text{eq} \quad \neg(p \rightarrow \neg q) \ \vee \ (q \vee \neg p)$

   (b) $(r \rightarrow p) \ \wedge \ (q \rightarrow \neg r) \quad \text{eq} \quad \neg p \vee (r \rightarrow q)$.

   (c) $(\neg p \wedge q) \ \wedge \ (r \vee q) \quad \text{eq} \quad ((\neg p \wedge q) \wedge r) \vee (\neg(p \wedge \neg q) \wedge q)$

8. Låt $\sigma = \{p, q, r\}$. Kan $\varphi, \psi \in LP(\sigma)$ väljas så att

   (a) $\neg\varphi \longrightarrow \psi$ är satisfierbar?

   (b) $\neg\varphi \longrightarrow \psi$ är osatisfierbar?

   (c) $\neg\varphi \longrightarrow \psi$ är en tautologi?

   (d) $\neg(\neg\varphi \vee \psi) \wedge \psi$ är satisfierbar?

   (e) $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$ *inte* är en tautologi?

9. Låt $\sigma = \{p_0, p_1, p_2, \ldots,\}$ och låt $V : \sigma \rightarrow \{S, F\}$ (där S och F står för 'sant' och 'falskt'). Så V är en σ-värderingsfunktion (eller σ-*structure* enligt bokens terminologi). Som vi har lärt oss kan V på ett unikt sätt utvidgas till en funktion $V^* : LP(\sigma) \rightarrow \{S, F\}$ som ger ett sanningsvärde till varje formel i $LP(\sigma)$. *Antag att $V(p_i) = F$ för alla $i = 0, 1, 2, \ldots$.*

   (a) Visa att det finns en formel $\varphi \in LP(\sigma)$ sådan att φ inte innehåller $\neg$ och $V(\varphi) = S$.

   (b) Visa att om $\varphi \in LP(\sigma)$ endast innehåller konnektiven $\wedge$ och/eller $\vee$ så $V(\varphi) = F$.

   (c) Visa att varje tautologi i $LP(\sigma)$ innehåller minst ett av konnektiven $\neg$, $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$.