Laktion 4

Def (Bråkkropp):

Låt R et integritetsområdet. Bråkkroppen $K = Q(R)$ til R konstrueras via

i) $R \times R^*$ "en bråk består av två tall"

ii) $(a,b) \sim (c,d)$ om $ad = bc$ "olika par kan gi oss lika bråk"

iii) $R \times R/_\sim =: K$ behöver $+, \cdot$

$(a,b)_\sim + (c,d)_\sim = (ad+bc, bd)_\sim$

$(a,b)_\sim \cdot (c,d)_\sim = (ac, bd)_\sim$

Motivation: $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$

i) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ T.e.: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = 1$

$\Leftrightarrow ad = bc$

iii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Den jobbiga delen: Visa att $Q(R)$ är en kropp, att alt är definerad och att $R \subset Q(R)$ och alla $r \neq 0$ i R har en invers i $Q(R)$.

Def: (Karaktäristik)

Låt R vara en ring. Om det finnes $n > 0$ med $\sum_{i=1}^{n} 1_R = 0$ så är $\text{char}(R) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} 1_R = 0\}$ och $\text{char}(R) = 0$ annars.

Ex: $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. $1+1+1 = 0$, $1+1 \neq 0$, $1 \neq 0$ $\Rightarrow \text{char}(R) = 3$.

68 Bestäm bråkkroppen (om det finnes)

a) $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Obs! Ringen måste vara et integritetsområdet.

$(0,1) \cdot (1,0) = (0,0) \Rightarrow R$ är inte et int. om.

c) $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Kom ihåg: Alla $r \in R^*$ ska ha en invers i $Q(R)$. $Q(R)$ är den minste kropp som oppfyller det.

$\mathbb{Z}_3$ är redan en kropp, altså är $Q(\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3$.

d) $\mathbb{R}$, samma sak: $\mathbb{R}$ är en kropp, $Q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

e) $\mathbb{Z}_{57}$. $57 = 3 \cdot 19 \Rightarrow \bar{3} \cdot \overline{19} = \overline{57} = \bar{0}$ i $\mathbb{Z}_{57}$

$\Rightarrow$ Inte et int. omr.

f) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \supseteq \mathbb{Z} \Rightarrow Q(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \supseteq Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

$\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \Rightarrow Q(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \supseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Strategi: Tillegger inverser til alt är inv.

$\sqrt{2}^{-1}$ i $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$?

$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2}^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

$(a + b\sqrt{2})^{-1}$? $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$

$a \neq 0$ eller $b \neq 0$ $\Rightarrow (a - b\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{a^2 - 2b^2} = (a + b\sqrt{2})^{-1}$

$\Rightarrow Q(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

70 | Bestäm karaktäristiken

a) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = R$. $1_R = (1,1)$

$(1,1)+(1,1) = (2,2) \neq 0$. $(1,1)+(2,2) = (3,3) = (0,0) = 0_R$

$\Rightarrow char(R) = 3$

b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 = R$. $1_R = (1,1)$

$(1,1)+(1,1)+(1,1) = (3,3) = (0,3) \neq (0,0)$

$(0,3)+(1,1) = (1,4) = (1,0) \neq (0,0)$

$(12,12) = (0,0)$, $char(R) = 12$, siden $mgm(3,4) = 12$

c) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15} = R$. $6 \cdot 15 = 90$

$(90,90) = (0,0)$ men 90 är <u>inte</u> det minste tall som fungerar!

$mgm(6,15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$(30,30) = (0,0)$, $char(R) = 30$

Idé:
$char(R \times S) = mgm(char(R), char(S))$
stemmer, men behöver en bevis!

72 | Sant eller falskt?

a) Varje kropp är et int. omr. Ja?

Låt $a,b \in K$, K kropp. Anta att $a \cdot b = 0$, men $a \neq 0$.

$a \neq 0$, K kropp $\Rightarrow \exists\, a^{-1} \in K$: $a^{-1}a = 1$. $\Rightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$
$\Leftrightarrow 1 \cdot b = b = 0$

$\Rightarrow K$ är et int. omr.

b) Varje kropp K med <u>$char(K) = 0$</u> har uendelig många element.

$\Downarrow$

Låt $n \in \mathbb{N}$. $\underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{n \text{ ganger}} \neq 0$

Idé: Varje $\sum_{i=1}^{n} 1_K$ gir et nytt element i K — Men kan två av dissa vara lika?

Testa: $\sum_{i=1}^{n} 1_K = \sum_{i=1}^{m} 1_K$ $(n \neq m)$ (Kan anta $n > m$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 1_K - \sum_{i=1}^{m} 1_K = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-m} 1_K = 0$ $\lightning$ $char(K) = 0$.

$\Rightarrow$ Alla $\sum_{i=1}^{n} 1_K$ är olika $\Rightarrow K$ har uendelig många element.

c) Det kart. prod. av två int. omr. är et int. omr. Vi så det där flere ganger!

Låt R, S vara int. omr. I $R \times S$ (f.eks. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) gäller

$\underset{\neq 0}{(0_R, 1_S)} \cdot \underset{\neq 0}{(1_R, 0_S)} = (0_R, 0_S)$. $\Rightarrow R \times S$ är <u>inte</u> et int. omr. (aldrig!)

d) En nolldelare i en komm. ring kan inte ha en multiplikativ invers.

Låt $r \in R$ vara en nolldelare: $\exists\, s \in R$, $s \neq 0$: $r \cdot s = 0$

Anta att r har en invers r^{-1}: $r^{-1} \cdot r \cdot s = r^{-1} \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot s = s = 0$ $\lightning$

$\Rightarrow r$ har ingen invers!

e) $\mathbb{Z}$ är en delkropp till $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}$ är inte en kropp $\Rightarrow \mathbb{Z}$ är inte en delkropp till vad som helst!