

UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR VT22

# Ordinära Differentialekvationer

*Rami Abou Zahra*

## CONTENTS

1. Föreläsning - Intro	2
1.1. Vad är en differentialekvation?	2
1.2. Exempel på ODE	2
1.3. Exempel på PDE	2
1.4. Newtons andra lag	2
1.5. Spridning av en sjukdom	3
1.6. Riktningsfält	3
1.7. Lösning av en ODE	3
1.8. Klassificering av ODE:er	4
1.9. Exempel	4
1.10. Exempel	5
1.11. Idén i den här kursen	5
2. Föreläsning - 1:a ordningens ODE och 3 typer	6
2.1. Linjära 1:a ordningens ODE	6
2.2. Motiverande exempel	6
2.3. Exempel	7
2.4. Separabla ekvationer	7
2.5. Exempel	7
2.6. Exempel 2	8
2.7. Exakta ekvationer	9
2.8. Enkelt exempel	9
2.9. Exempel	10
2.10. Exempel på differentialekvationer som ej linjär, exakt, eller separabel	10
3. Förtydligande - Föreläsning 2	11
3.1. Exempel	11
4. Föreläsning - Existens och unikheter	13
4.1. Exempel	14
5. Uppgifter - Klassificering av ODE	16
6. Andra ordningens linjära ODE:er	17
6.1. Exempel	17
6.2. Homogena ekvationer	18
7. Föreläsning - Homogena ekvationer	21
7.1. Reduktion av ordning	21
7.2. Homogena 2:a ordningens linj. ODE med konstanta koefficienter $p, q$	22
8. Föreläsning	25
8.1. Metoden med obestämda koefficienter	25
8.2. Variation av parameter-metoden	28
9. Uppgifter -	30
10. Potensserielösningar	31
10.1. Potensserier - Repetition	31
10.2. Potensserie-metoden	34
11. Potensserielösningar - Forts.	37
11.1. Cauchy-Eulers Ekvation	37
11.2. Reguljära singulära punkter	39
12. Egna anteckningar - Fundamental teori	41
12.1. Lösningsintervall	41
13. Frobenius metod	43
13.1. Exempel	44

## 1. FÖRELÄSNING - INTRO

**1.1. Vad är en differentialekvation?** En ekvation som innehåller derivator med avseende på en eller flera oberoende variabler.

Om det enbart är en variabel som är oberoendekallas det för en *ordinär* differentialekvation.

Fråga: Vad är poängen med att variablerna är oberoende? Svar: Man måste ha oberoende variabler som man löser för

**1.2. Exemepel på ODE.**

- $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$
- $y'' - y' + 6y = 0$
- $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$

I alla dessa fall hade vi *en* oberoende variabel, har vi flera så är det en *partiell differentialekvation* (PDE).

**1.3. Exemepel på PDE.**

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

**1.4. Newtons andra lag.**  $F = m \cdot a$  där  $F$  är kraften,  $m$  massan,  $a$  accelerationen. Säg att vi har en sten:

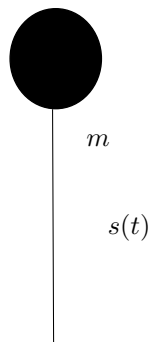


FIGURE 1. Figur

Då får vi följande samband

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} F = -mg - mg = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{d^2 s}{dt^2} = -g$$

**1.5. Spridning av en sjukdom.** Ett virus sprids genom en population. Spridning sker när folk som är infekterade kommer i kontakt med folk som inte är smittade.

Vad säger detta om spridningen? Antag att vid tid  $t$  så är  $x(t)$  personer infekterade och  $y(t)$  personer är inte infekterade. Spridning bör vara proportionell mot hur många från  $x, y$  som mötes, det vill säga ett rimligt antagande är:

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

Något man kan studera är vad som händer när en infekterad person introduceras till en grupp icke-infekterade. Detta betyder att  $x(0) = 1$ . Antal personer är  $x + y = n + 1$ . Stoppar vi in detta i ekvationen får vi:

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \cdot (n + 1 - x)$$

Ofta kan man inte lösa ODE:er med hand, då kan man lösa det grafiskt/m.h.a dator. Det finns flera verktyg som kan åstadkomma detta men ett av dessa verktyg är ett vektorfält/riktningsfält.

**1.6. Riktningsfält.** Grafiska verktyg är ofta väldigt kraftfulla för att förstå hur lösningen till en ODE ser ut.

Tänk oss att vi har följande ODE:

$$y' = \frac{y}{x^2}$$

De flesta ODE:er går inte att lösa exakt. Därför är grafiska verktyg/numeriska metoder väldigt användbara när man vil lösa ODE:er.

**1.7. Lösning av en ODE.**

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 450$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}(p - 900)$$

$$p = 900 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p(t) = 900 \text{ är en lösning}$$

$$p \neq 900 \Rightarrow \frac{\frac{dp}{dt}}{p - 900} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\log(|p - 900|)) = \frac{1}{2} \text{ vi kan nu integrera m.a.p } t$$

$$\log(|p - 900|) = \int \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2} + C$$

$$|p - 900| = e^{\frac{t}{2} + C} = e^C e^{\frac{t}{2}}$$

$$p = 900 \pm e^C e^{\frac{t}{2}} \text{ där } e^C \text{ är en positiv konstant}$$

Kom ihåg att  $p = 900$  är en lösning, alltså:

$$p = 900 + C e^{t/2}$$

ger alla lösningar. Vi kan få fram  $C$  genom att kolla på startpopulation:

$$p(0) = 1000 \Rightarrow C = 100 \quad p(t) = 900 + 100 e^{t/2}$$

Liknande beteende  $\forall p(0) > 900$

**1.8. Klassificering av ODE:er.** I funktionen  $y(t)$  är  $y$  en beroende variabel (beror på  $t$ ) och  $t$  en oberoende variabel. Detta är en reellvärd funktion på intervallet  $(a, b)$ :

$$y : (a - b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, y''' = \frac{d^3y}{dt^3}$$

Alternativt:

$$y^{(0)} = y, y^{(1)} = \frac{dy}{dt} \dots$$

#### Sats 1.1: ODE

En ordinär differentialekvation för funktionen  $y = y(t)$  är en ekvation på formen:

$$F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

#### Sats 1.2: Graden av en ODE

*Graden* av en ODE är ordningen på den högsta derivatan av  $y$  som förekommer. I sats 1.1 hade det då varit  $n$ .

#### Sats 1.3: Linjär ODE

En ODE kallas för *linjär* om den är på formen:

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) = g(t)$$

#### Sats 1.4: Icke-linjär ODE

Om en ODE inte är linjär kallas den *icke-linjär*

Hur definierar vi en lösning till en ODE?

En lösning till en ODE på ett intervall  $(a, b)$  är en funktion  $y(t)$  så att:

- $y$  och alla dess derivator är kontinuerliga  $\forall t \in (a, b)$
- $y$  löser ekvationen  $\forall t$

Om detta uppfylls kallas  $(a, b)$  *lösningsintervallet*.

#### 1.9. Exempel.

$$t^5 y^{(4)} - t^3 - y^{(2)} + 6y = 0$$

Denna ODE är linjär och av grad 4.

## 1.10. Exempel.

$$u'' = \sqrt{1 + (u')^2}$$

**Sats 1.5: Initialvärdesproblem**

Ett *initialvärdesproblem* (IVP) är en ODE tillsammans med ett startvärde för den oberoende variabeln. För en ODE av grad 1:

$$F(t, y, y') = 0 \text{ och } y(x_0) = y_0$$

Där  $y(x_0) = y_0$  kallas *initialvillkoret*

Ofta kommer vi ha:

$$y^{(n)}(t) = F(t, y^{(1)} \dots y^{(n-1)}(t))$$

## 1.11. Idén i den här kursen.

- Givet en ODE, finns det lösning?
- Om ja, hur många lösningar finns det? (Inget initialvärde kommer vi ha oändligt)
- Hitta explicita lösningar till enkla ODE:er
- Analysera och approximera lösningar till komplicerade ODE:er med serier (typ som Taylor-serier men med mer krut)
- Kvalitativa egenskaper (hur påverkar initialvillkoret lösningen?)
- Numeriska metoder

## 2. FÖRELÄSNING - 1:A ORDNINGENS ODE OCH 3 TYPER

Vi kommer kolla på 3 olika typer av 1:a ordningens ODE:

- Linjära
- Separabla
- Exakta

I alla dessa fall kommer vi kunna lösa dessa och få fram explicita lösningar - i allmänhet inte möjligt. Däremot är det viktigt att notera att det finns 1:a ordningens ODE som inte täcks av dessa fallen!

Vi kommer primärt undersöka ODE:er på formen  $y' = f(t, y)$

## 2.1. Linjära 1:a ordningens ODE.

Kan skrivas på formen:

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c(x) - b(x)y}{a(x)}$$

Här antas  $a(x) \neq 0$

## 2.2. Motiverande exempel.

Antag att vi har en ODE på formen:

$$\begin{aligned} xy' + y &= e^x \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Vi har  $xy' + y = (xy)' = e^x$  där vi nu kan integrera båda sidorna:

$$xy = \int e^x dx + C \Leftrightarrow xy = e^x + C \Leftrightarrow y = \frac{e^x + C}{x}$$

Här hade vi riktigt tur att vi kunde inse att derivatan av produkten var lika med ODE:n vi ville lösa. Givetvis går det inte alltid att göra så. Men vad vi kan göra är att vi kan multiplicera ekvationen med en *faktor* för att få ODE:n på den formen.

Denna faktor brukar betecknas  $\mu(x)$  och kallas för den *integrerande faktorn*. Låt oss kolla på den allmänna lösningsmetoden:

- Skriv på formen  $y' + p(x)y = f(x)$
- Beräkna integrerande faktorn  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$
- Tag integrerande faktor och multiplicera ekvationen med den:  $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)f(x)$
- Nu har vi  $(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$
- Vi kan skriva om ekvationen som  $(\mu(x)y)' = \mu(x)f(x) \Leftrightarrow \mu(x)y = \int \mu(x)f(x)dx$

Detta ger oss slutgiltigen lösningen  $y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)f(x)dx$

Notera att  $\mu(x) \neq 0$  ty  $e^x \neq 0$

Detta funkar "alltid", så länge vi kan integrera.

### 2.3. Exempel.

$$y' + 3x^2y = x^2$$

Vi noterar att vi är på rätt form, dvs  $p(x) = 3x^2$ ,  $f(x) = x^2$ . Då kan vi räkna den integrerande faktorn:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3} \\ \Leftrightarrow e^{x^3}y' + e^{x^3}3x^2y &= e^{x^3} \cdot x^2 \Leftrightarrow (e^{x^3} \cdot y)' = e^{x^3}x^2 \\ e^{x^3}y &= \int x^2 \cdot e^{x^3}dx \Leftrightarrow e^{x^3}y = \frac{e^{x^3}}{3} + C \\ y &= \frac{1}{3} + C \cdot e^{-x^3}\end{aligned}$$

### 2.4. Separabla ekvationer.

Namnet är ganska beskrivande i det här fallet, där är ekvationer där vi kan separera variablerna. Formellt menas det att ekvationer på denna form är separabla:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

En lösningsmetod ser ut på följande:

- Skriv som  $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$  (flyttat över allt med  $y$  på ena sidan och allt med  $x$  på andra)
- Integrera båda sidorna:  $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$

En rimlig fråga man kan ställa sig är ”varför funkar det att betrakta  $\frac{dy}{dx}$  som ett bråk?”:

$$\begin{aligned}y'(x) &= g(x)h(y(x)) \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \\ \int \frac{y'(x)}{h(y(x))}dx &= \int g(x)dx \text{ HL är ok, men VL, är den verkligen samma som vi kom fram till? Vi skriver om den} \\ \int \frac{y'(x)}{h(y(x))}dx &= \left[ u(x) = y(x), \frac{du}{dx} = y'(x) \right] = \int \frac{1}{h(u)}du \text{ Men } u \text{ kan lika gärna vara } y\end{aligned}$$

### 2.5. Exempel.



$$\begin{aligned}
k &= 1, n = 1000, x(0) = 1 \\
\frac{dx}{dt} &= kx(n+1-x), 0 < x < n+1 \\
\frac{dx}{dt} &= x(1001-x) \\
\frac{dx}{x(1001-x)} &= dt \\
\int \frac{dx}{x(1001-x)} dx &= \int 1 dt \\
\int \frac{dx}{x(1001-x)} dx &= \frac{1}{1001} \int \frac{1}{x} + \frac{1}{1001-x} dx \text{ vi använde PBU} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1001} \cdot (\log(x) - \log(1001-x)) = t + C \\
\log\left(\frac{x}{1001-x}\right) &= 1001 \cdot t + C \\
\frac{x}{1001-x} &= e^{1001t+C} \\
x(0) = 1 &\Rightarrow \frac{1}{1001-1} = e^{0+C} \Leftrightarrow e^C = \frac{1}{1000} \\
x &= \frac{1001e^{1001t}}{1000 + e^{1001t}}
\end{aligned}$$

## 2.6. Exempel 2.

$$(e^{2y} + y) \cdot \cos(x) \frac{dy}{dx} = e^y \sin(2x)$$

Här är det inte helt uppenbart att den är separabel, vi kan testa att flytta runt saker och se vad vi får:

$$\frac{e^{2y} + y}{e^y} dy = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} dx, (\cos(x) \neq 0)$$

Nu ser vi att den är separabel och vi kan köra på!

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2y} + y}{e^y} dy &= \int e^y + ye^{-y} dy = e^y - ye^{-y} - e^{-y} + C = \text{VL} \\
\int \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} dx &= \int \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\cos(x)} dx = 2 \int \sin(x) dx = -2 \cos(x) + D = \text{HL} \\
\text{VL} = \text{HL} &\Leftrightarrow e^y - ye^{-y} - e^{-y} = -2 \cos(x) + C
\end{aligned}$$

Detta är en lösning på implicit form, och det går inte att göra så mycket bättre än så ty inga startvärden. Detta är vanligt för separabla ekvationer.

Värt att notera, när vi delar på  $\cos(x)$  antar vi att den inte antar värdet 0, men sen i slutet spelar det ingen roll om vi har  $\cos(x) = 0$ . Detta gäller för att vi har kontinuitet och är okej och giltigt.

När  $\sin(x) = 0$  är  $\cos(x) = 0$  samtidigt (i bråket), vi får kolla på gränsvärdet då och vi ser att det finns ett G.V. utan problem. Det blir så kallat härbar singularitet.

## 2.7. Exakta ekvationer.

Diff. ekvationer på formen:

$$M(x, y) + N(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Detta betyder nödvändigtvis inte att den är exakt, så vi måste ställa krav på  $M, N$ . Därför ställer vi lite krav som de bör uppfylla.

### Sats 2.1: Exakt ekvation

Ekvationen är *exakt* om det finns en funktion  $F(x, y)$  så att  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$  och  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$

### Bevis 2.1: Beviskiss: exakt ekvation

$$\begin{aligned} M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0 \\ dF(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow F(x, y) = C \end{aligned}$$

□

## 2.8. Enkelt exempel.

$$\begin{aligned} ydx + xdy &= 0 \Leftrightarrow F(x, y) = xy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = y, \frac{\partial F}{\partial y} = x \\ &\Leftrightarrow F(x, y) = C \Rightarrow xy = C \Rightarrow y = \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Kuriosa: Varför kallas dessa för *exakta*? Inom differentialgeometri så kallas en differential på denna form  $ydx + xdy = 0$  för exakt. En viktigare fråga man törs fråga sig är kanske *när är en differentialekvation exakt?*

Vi har sagt att den är det om det finns ett  $F$ , men hur kan vi hitta det?

### Sats 2.2: När kan vi hitta $F$

åt  $M(x, y)$  och  $N(x, y)$  vara två kontinuerliga funktioner med kontinuerliga första ordningens partiella derivator (vi antar att det här gäller i någon rektangel  $a < x < b, c < y < d$ ). Då är  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  exakt om:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

**Bevis 2.2: När kan vi hitta  $F$** 

Vi börjar med ena hållet, om ekvationen är exakt vill vi visa att det här gäller.

Att den är exakt implicerar att  $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ .

Vi får:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \Leftrightarrow \text{De är lika}\end{aligned}$$

Eftersom  $M, N$  har kontinuerliga derivator så kommuterar dem (enligt flervariabelanalys)

Vissa ekvationer kan göras exakta genom att multiplicera med en integrerande faktor. Inte så allmänt

□

**2.9. Exempel.**

Betrakta följande differentialekvation:

$$2xydx + (x^2 - 1)dy$$

Här är  $2xy = M$  och  $(x^2 - 1) = N$ . Nu vill vi kolla om den här differentialekvation är exakt:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Nu vill vi hitta ett  $F$  så att  $\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2x$  och att  $\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^2 - 1$ .

Låt oss ta integralen på  $N$ :

$$F(x, y) = \int (x^2 - 1)dy = (x^2 - 1) \cdot y + h(x)$$

Viktigt att notera att vi får  $h(x)$  som konstant, ty vi vet inte om konstanten beror på  $x$  när vi integrerar med avseende på  $y$ .

Vi vill hitta  $h(x)$  så att den första partialen ( $M$ ) uppfylls:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} ((x^2 - 1)y + h(x)) &= 2xy \\ 2xy + h'(x) &= 2xy \Leftrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = C\end{aligned}$$

Vi behöver ett  $F$ , så vi kan ta  $C = 0$ :

$$\begin{aligned}F(x, y) &= (x^2 - 1)y \\ dF(x, y) &= 0 \Leftrightarrow F(x, y) = C \\ (x^2 - 1)y &= C \Leftrightarrow y = \frac{C}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

**2.10. Exempel på differentialekvationer som ej linjär, exakt, eller separabel.**

- $y' = \sin(xy)$
- $e^{y'} = x$

## 3. FÖRTYDLIGANDE - FÖRELÄSNING 2

Det kanske var lite otydligt just *vad* en exakt lösning/differentialkevation var och vad det innebär med just att den löses *implicit*.

**Sats 3.1: Implicit lösning**

En lösning kallas för *implicit* om den *implicerar* explicita lösningar.

**3.1. Exempel.**

Låt oss titta på ekvationen för en cirkel med radie 5 i planet:

$$25 = x^2 + y^2$$

Detta är en funktion som inte är *rent* definierad, det vill säga vi har inget VL som består av enbart *beroende* variabler från HL såsom  $y(x)$ . Däremot så *implicerar* den de explicita funktionerna:

- $y = \sqrt{25 - x^2}$
- $y = -\sqrt{25 - x^2}$

Nu har vi gått igenom definitionen, låt oss rigoröst gå igenom definitionen av en *exakt* differentialkevation. Vi kommer göra detta genom att gå igenom ett exempel och sedan se vad det är vi kommer behöva för att lösa den.

Antag att vi vill lösa följande:

$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 0$$

För förklaringens skull, antag att vi har en funktion  $\varphi(x, y) = y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3$ . Låt oss nu finna den partiella derivatan av denna funktion:

- $\frac{\partial}{\partial x} = 2xy - 9x^2$
- $\frac{\partial}{\partial y} = 2y + x^2 + 1$

Notera här att detta matchar precis differentialkevationen förutom att den saknar en  $\frac{dy}{dx}$  term. Men! Tricket kommer från flervarren. Vi vet att  $y$  är en *beroende* variabel som beror på  $x$ , alltså kommer vi enligt kedjeregeln få följande:

$$\frac{d}{dx}(\varphi(x, y(x))) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Detta på grund av att  $y(x)$  tekniskt sett har en inre derivata som vi måste ta hänsyn till. Vi ser nu att vi kan skriva om vår differentialkevation som  $\frac{d}{dx}\varphi(x, y(x)) = 0$ . Men om en ordinär derivata (dvs inte partiell, ty då måste vi betrakta alla partialer) är lika med noll så måste det vara så att vi differentierar en konstant! Alltså  $\varphi(x, y(x)) = C$ , men detta motsvarar i vårt exempel då att vi har:

$$\varphi(x, y) = y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 = C$$

Detta blir då en *implicit* lösning, eftersom den implicerar flera lösningar som vi får arbeta oss för. Det som nu återstår är att kolla hur vi kan hitta denna underbara  $\varphi$  funktion och under vilka villkor som den fungerar.

Vår sugardaddy/mommy funktion skall alltså uppfylla:

- $\varphi_x = M$
- $\varphi_y = N$

Givet att  $\varphi(x, y(x))$  och dess första derivator också är kontinuerliga vet vi från flervarren att vi kan kommutera partialerna på följande sätt:

$$\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$$

Men givet detta, och att  $\varphi_x = M$  osv så kan vi alltså busa lite!

$$\begin{aligned}\varphi_{xy} &= (\varphi_x)_y = (M)_y = M_y \\ \varphi_{yx} &= (\varphi_y)_x = (N)_x = N_x\end{aligned}$$

Men eftersom  $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$  så vet vi alltså att  $M_y = N_x$ , fiffigt sätt att kontrollera att man har gjort rätt!

Hur kan vi hitta denna funktion då? Vi skulle kunna använda  $M_y = N_x$  sambandet och se om vi kommer någon vart:

$$\varphi = \int M dx \Leftrightarrow \int N dy$$

Detta är fördelaktigt att vi kan byta runt och integrera lite som vi vill, ty förhoppningsvis är en utav dem lättare än den andra. Låt oss antag att  $dx$  integralen är den vi vill integrera:

$$\int M dx = \varphi + h(y)$$

Detta eftersom  $\varphi$  är en funktion av 2 variabler och vi integrerar med avseende på en, alltså vet vi inte om konstanten kanske beror på den andra variabeln. Därför skriver vi  $h(x)$  istället för  $C$  som vi kanske är vana med.

Hur kan vi hitta denna mystiska funktion  $h(x)$ ? Vi vet att om vi deriverar  $\varphi$  med avseende på  $y$  så bör vi få  $N$ , vi använder detta till vår fördel:

$$\begin{aligned}\varphi_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M dx \right) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi + h'(y) = N \\ h'(y) &= N - \frac{\partial}{\partial y} \varphi\end{aligned}$$

Nu är det bara en fråga om att integrera  $h'(y)$ :

$$\begin{aligned}h(y) &= \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \varphi \right) dy \\ &\Leftrightarrow \varphi + D\end{aligned}$$

Vi kan strunda i konstanten  $D$  eftersom i vår implicita lösning så kommer vi ha  $\varphi + D = C$  där vi nu kan slå ihop  $D$  och  $C$  till en enda konstant. Nu har vi hittat en metod för att lösa dessa differentialkevationer! För definitionen, se Sats 2.1.

## 4. FÖRELÄSNING - EXISTENS OCH UNIKHET

Antag att vi har en ODE på formen:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

I allmänhet kan vi inte lösa den här explicit. Vi kommer under denna föreläsning kika på IVP. Vi kommer studera 3 frågor:

- Lokal existens: finns det en lösning  $y(x)$  def. i närheten av  $x_0$ ?
- Existens i stort: Hur stort intervall kan den vara definierad på som innehåller  $x_0$  där  $y(x)$  är def.?
- Unikhet: Finns det flera lösningar eller bara en? Detta är viktigt att veta om man studerar en ODE eftersom man behöver ha koll på att den lösningen man får som kanske löser ett system så behöver vi veta vad den andra lösningen betyder.

När det gäller första punkten, det visar sig att lokal existens endast kräver att  $f$  är kontinuerlig:

**Sats 4.1**

Om  $f$  är *kontinuerlig* så finns det en lösning definierad i närheten av en punkt.

Detta räcker *inte* för att lösningen ska vara unik! Exempelvis:

$$y' = xy^{1/3}, y(0) = 0$$

$$y(x) = 0, y(x) = \frac{x^3}{\sqrt{27}}$$

Vi kommer kolla på ett intressant bevis om när lösningen är unik, ty beviset ger information om hur man kan approximera en lösning.

**Sats 4.2**

Antag att  $f$  och  $\frac{\partial f}{\partial y}$  är kontinuerliga i någon rektangel  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  som innehåller  $(x_0, y_0)$  i dess inre (kan ej ligga på randen).

Då existerar det något intervall  $I = (x_0 - h, x_0 + h)$  för  $h > 0$  och en *unik* funktion  $y = y(x)$  definierad på  $I$  så att  $y' = f(x, y)$  på  $I$  och  $y(x_0) = y_0$

Kommentar:  $y' = xy^{1/3} = f(x, y)$  ger oss  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{3y^{2/3}}$  som inte är kontinuerlig ty  $y \neq 0$  ger bus.

Kommentar: Bara för att funktionen är definierad i en rektangel betyder det inte att samma rektangel är intervallet för lösningen. I allmänhet är intervallet mindre än rektangel.

$$y' = y^2, y(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x, y) = y^2 \text{ är kont.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \text{ är kont.}$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

Så satsen gäller  $\forall$  rektanglar. Notera att lösningen inte är def. i  $x = 1$ , men den är definierad för  $x < 1$ .

### Bevis 4.1: Sketch av bevis för unikhets av unikhetsssats

Idén är att använda metoden med successiva approximationer. Vi kommer börja med en funktion som inte är en lösning men som ger oss lite info och så fortsätter vi tills vi når ett "gränsvärde" som är vår lösning:

- Skriv om som integralekvation:  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt \Leftrightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$
- Det härliga här är att vi kan förkasta initialvärdet, ty det blir lätt att stoppa in och lösa.
- Nu definierar vi en sekvens av funktioner som är våra "successiva approximation":  $\varphi_0(x) = y_0$ . Denna uppfyller IV men i allmänhet inte funktionen. Sedan definierar vi  $\varphi_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t))dt$  (i allmänhet inte en lösning till ekvationen), men vi fortsätter såhär  $\dots \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t))dt$
- Vi vill få en känsla för att den här sekvensen av funktioner i gränsvärdet när  $y \rightarrow \infty$  ger oss en lösning.
- Notera,  $\varphi_n(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt = y_0$  men i allmänhet inte  $\varphi'_n = f(x, \varphi_n)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t))dt$
- Om vi låter  $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  får vi:
- $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))dt \rightarrow \varphi$  är en lösning!
- Detta är ett informellt bevis ty vi vet inte när vi kan flytta in gränsvärdet innanför integralen, går det att få in det så löser det sig.

Vi får inte glömma att vi använder oss av att  $f$  är kontinuerlig och definierad i rektangeln. Vi måste alltså se till att  $\varphi$  hamnar inom denna rektangeln. Vi måste därför begränsa  $\varphi$  så att den aldrig lämnar rektangeln.

□

#### 4.1. Exempel.

Vi kommer ta en explicit ekvation och kolla vad som händer med  $\varphi$

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{y}{2} + t, y(0) = 0 \\
 y(t) &= 0 + \int_0^t \frac{y(s)}{2} + s ds \\
 \varphi_0(t) &= 0 \\
 \varphi_1(t) &= 0 + \int_0^t \frac{0}{2} + s ds = \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2} \\
 \varphi_2(t) &= \int_0^t \frac{s^2}{2} + s ds = \int_0^t \frac{s^2}{4} + s ds = \left[ \frac{s^3}{2 \cdot 3!} + \frac{s^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{2} \\
 &\vdots \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{2^{n-1} (n+1)!} \text{ ser ut som Taylor för } e^x
 \end{aligned}$$

Vi kan kolla att den konvergerar genom kriterier för serier. I detta fall kan vi försöka få en explicit lösning. Vi noterar att den liknar Taylor, låt oss undersöka:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{2^{k-2} k!} = 4 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{2^k k!} = 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{-t}{2}\right)^k}{k!} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-t}{2}\right)^k}{k!} - 4 + 2t = 4e^{\left(\frac{-t}{2}\right)} - 4 + 2t$$

### Bevis 4.2: Bevis av unikhhet

Antag att vi har 2 lösningar,  $y_1$  och  $y_2$ . Det vi gjorde var att vi skrev om den på integralform:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt$$

Om de är unika så borde  $y_1 - y_2 = 0$

$$y_1 - y_2 = \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \right) - \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right)$$

$$y_1 - y_2 = \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt$$

MVS ger  $g(y_1) - g(y_2) = g'(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)(y_1 - y_2)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)(y_1 - y_2)$$

Eftersom  $\frac{\partial f}{\partial y}$  är kont. i  $R$  finns det en övre gräns:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} < C \right| \text{ för någon konstant } C$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \right| \leq C$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C |y_1 - y_2|$$

Går vi tillbaka till där vi skrev "för någon konstant  $C$ " får vi:

$$|y_1 - y_2| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \leq C \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt$$

$$\text{Låt } u(x) = |y_1(x) - y_2(x)|:$$

$$u'(x) \leq C \cdot u(x) \Leftrightarrow u'(x) - Cu(x) \leq 0$$

Detta är en linjär differentialolikhet som vi löser på följande sätt:

Integrerande faktor:  $\mu(x) = e^{\int -C dx} = e^{-Cx} > 0$  så ändrar inte olikheten:

$$e^{-Cx} u'(x) - C e^{-Cx} u(x) \leq 0 \Leftrightarrow (e^{-Cx} u(x))' \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^x (e^{-Ct} u(t))' dt \leq 0 \Leftrightarrow e^{-Cx} u(x) - e^{-Cx_0} u(x_0) \leq 0$$

Då är frågan, vad är  $u(x_0)$ ?

$$u(x_0) = |y_1(x_0) - y_2(x_0)| = |y_0 - y_0| = 0$$

$e^{-Cx} u(x) \leq 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$  men eftersom  $u(x)$  är absolutbelopp så kan ej vara negativ, alltså

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow y_1(x) - y_2(x) = 0 \Leftrightarrow y_1(x) = y_2(x)$$

□



## 5. UPPGIFTER - KLASSIFICERING AV ODE

Avgör om följande är linjära:

- $\sin(x)y' + \cos(x)y = 0$
- $y' = e^x$
- $y' + y = \sin(y)$
- $\frac{y'}{y} = \log(x)$
- $yy' = \cos(x)$
- $y' + y = x$

Påminnelse:  $a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$  är en linjär 1:a ordningens

Avgör om följande är separabla:

- $yy' = x$
- $xy' = y$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{y(x+5)}$
- $y' + y = x$
- $\sin(y') = x + 5$
- $y' = x \sin(y) + x$

Avgör om följande är exakta (tips, dela på  $dx$ ):

- $x dx + y dy = 0$
- $\sin(y) dx + \sin(x) dy = 0$
- $3yx^3 dx + x^3 dy = 0$

Anmärkning: Att avgöra om en ekvation är exakt innebär att man avgör om formen som den är skriven är exakt. Det går oftast att manipulera den så att den blir exakt annars. Exempelvis:

$$\begin{aligned} & (3xy + xy) + (x^2 + xy)y' = 0 \\ \Leftrightarrow & x(3xy + xy) + x(x^2 + xy)y' = 0 \\ \Leftrightarrow & (3x^2 + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \end{aligned}$$

## 6. ANDRA ORDNINGENS LINJÄRA ODE:ER

Vi kommer introducera dessa och tala om *homogena ekvationer*.

**Sats 6.1: Andra ordningens ODE**

En allmän andra ordningens ODE är:

$$G(x, y, y', y'') = 0$$

Om vi kan isolera  $y''$  får vi:

$$y'' = F(x, y, y')$$

Vi kommer fokusera främst på linjära ODE:er.

**Sats 6.2: Linjär ODE**

En ODE som kan skrivas på formen:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

Vi kommer anta att  $A, B, C, F$  är kontinuerliga

**6.1. Exempel.**

Exempel på en linjär ODE (Bessel-ekvationen)

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y &= 0 \\ y'' &= (y+1)^2 y' + y^2 \end{aligned}$$

Exempel på en icke-linjär 2:a ordningens ODE:

$$y'' = (y+1)^2 y' + y^2$$

**Sats 6.3: Homogen ekvation**

Om  $F(x) = 0$  kallas ekvationen för *homogen*. Annars kallas den *inhomogen*.

Den *associerade homogena* ekvationen är en ODE där vi ansätter  $F(x) = 0$ , det vill säga om vi tar ekvationen från sats 6.2 och sätter  $F(x) = 0$  så är det vår associerade homogena ekvationen.

Exempel:

$$3y'' + (2+x)y' + y = \cos(x)$$

har den associerade homogena ekvationen:

$$3y'' + (2+x)y' + y = 0$$

Notera här att vi kan multiplicera vår associerade ekvation med vad som, detta kommer inte ändra vår lösningsmängd.

IVP existerar för andra ordningens ODE:er. För en fullständig lösning kommer vi kräva 2 initialvillkor, men vi kan få en *parametriserad* lösningsmängd om vi har 1.

**Sats 6.4: Existens**

Betrakta

$$\left. \begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= f(x) \\ y(a) = b_0, \quad y'(a) &= b_1 \end{aligned} \right\}$$

Om  $p, q$  är kontinuerliga på ett intervall  $I$  som innehåller  $a$  (vår startpunkt), då finns exakt en lösning  $y = y(x)$  och den är definierad på hela intervallet  $I$ .

Kommentar: Första ord. ODE:er har endast en lösning som går igenom en punkt  $(x_0, y_0)$ . För andra ordningen har vi en lösning för varje lutning också!

Kommentar: Det visar sig att vi kommer stöta på en massa linjär algebra. Kanske inte för 2:a ordningens, men för första är det användbart. För 3:e ordningen och  $n$ :e ordningen går det m.h.a linjär algebra att generalisera ganska enkelt, vi kommer bara få större matriser.

Kommentar: Vissa lösningar kommer vi se blir system av mindre ordningens ODE:er, detta går också att definiera och lösa m.h.a linjär algebra.

**6.2. Homogena ekvationer.**

För att förstå inhomogena måste vi först förstå homogena. Detta kanske inte är tydligt varför, men det kommer vi se senare när vi diskuterar andra ekvationer. Vi påminner oss om att en homogen ekvation är på formen:

$$A(x)y'' + B(x)y' + y = 0$$

**Sats 6.5**

Om  $y_1$  och  $y_2$  löser den homogena ekvationen på ett intervall  $I$ , då löser även  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  ekvationen för alla konstanter  $C_1, C_2$  på  $I$

Notera här att det i princip blir en linjärkombination, varpå namnet "linjär ODE" kommer ifrån. Beviset lämnas som övning till läsaren.

Exempel:

$$y_1 = e^x \text{ och } y_2 = xe^x \text{ är lösningar till}$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\text{Då är } y = C_1e^x + C_2xe^x = (C_1 + C_2x)e^x \text{ också en lösning}$$

Varför vill man ha detta? Om vi har ett IVP så vill vi att lösningen skall ha ett specifikt värde. Då kan vi kombinera lösningar för att få det svaret vi söker.

Lösningsmetod (idé):

- Hitta 2 lösningar  $y_1$  och  $y_2$
- Ta deras linjärkombination  $y = C_1y_1 + C_2y_2$
- Använd initialvillkor för att bestämma  $C_1, C_2$

Funkar sista punkten verkligen alltid? Svaret är ja, om man väljer  $y_1$  och  $y_2$  på rätt sätt. Men detta implicerar att det finns ett fel sätt också. Om vi exempelvis får att  $y = y'$  så kan vi inte bestämma  $C_1, C_2$

**Sats 6.6: Linjärt oberoende**

Två funktioner  $f, g$  är linjärt oberoende om vi *inte* har:

$$f = kg \text{ eller } g = kf \text{ för någon konstant } k \in \mathbb{R}$$

Det som är viktigt är att ingen av de ( $k$  eller funktionerna) är noll, ty annars kan vi dela på noll.

Exempel:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(x) \text{ och } \cos(x) \text{ är linjärt oberoende} \\ e^x \text{ och } xe^x \\ x + 1 \text{ och } x^2 \end{array} \right\} \text{ Linjärt oberoende}$$

Man kan verifiera om de är linj. ober. genom att ta  $\frac{f}{g}$ , om de inte är lika med en konstant så är de oberoende. Exempelvis är då  $e^{x+1}$  och  $e^x$  linjärt beroende. Det är inte alltid lätt att se, exempelvis:

$$\begin{aligned} \sin(2x) \text{ och } \sin(x) \cos(x) \text{ är linjärt beroende ty:} \\ \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

Ett verktyg som är användbart när man studerar dessa typer av ODE:er är *Wronskianen*.

**Sats 6.7: Wronskianen**

Wronskianen av 2 deriverbara funktioner  $f, g$  är:

$$W(f, g) = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = fg' - f'g$$

**Lemma 6.1**

Om  $f, g$  är deriverbara på intervallet  $I$  och är linjärt beroende på  $I$ , då är  $W(f, g) = 0 \forall x \in I$ . Om vi får oberoende ekvationer, då kan vi hitta en lösning m.h.a lösningsidén.

**Bevis 6.1: Wronskianen**

Om  $f, g$  är linjärt beroende så är  $f = kg$  eller  $g = kf$ . Vi stoppar in det i uttrycket för Wronskianen:

$$W(f, g) = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} kg & g \\ kg' & g' \end{pmatrix} = kgg' - kg'g = 0$$

Det funkar tyvärr inte åt andra hållet, det vill säga om determinanten är noll så är de inte alltid linjärt beroende.  $\square$

Motexempel:

$$f = x^2, g = |x|x$$

Dessa är linjärt oberoende men har noll-determinant.

Hur vet vi att det ens finns 2 linjärt oberoende lösningar så att vi kan få vårt coola svar? Det visar sig att det inte är jättekrångligt att visa! Vi kan använda satsen om existens och unikheter:

$$y'' + p(x)y' + g(x) = 0$$

$y(a) = 0, y'(a) = 1 \Rightarrow$  det finns en lösning  $y_1$  enligt existens och unikhetsatsen

$y(a) = 1, y'(a) = 0$  det finns en lösning  $y_2$  enligt existens och unikhetsatsen

Då måste vi kolla så att  $y_1, y_2$  är linjärt oberoende (Wronskianen nollskild):

$$W(y_1, y_2)(a) = \det \begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} = y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Alltså linjärt oberoende

### Sats 6.8

åt  $y_1$  och  $y_2$  vara linjärt oberoende lösningar till:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \text{ där } p, q \text{ är kontinuerliga på intervallet } I$$

Då är alla lösningar på formen  $y = C_1y_1 + C_2y_2$

### Sats 6.9: Fundamental lösningsmängd

Två linjärt oberoende lösningar kallas för en fundamental lösningsmängd

### Bevis 6.2

Antag att vi har en lösning  $y$ . Vi vill hitta  $C_1, C_2$ . Tag en punkt  $a \in I$  och lös systemet:

$$\begin{cases} C_1y_1(a) + C_2y_2(a) = y(a) \\ C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) = y'(a) \end{cases}$$

Skriv som:

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

Har en lösning om matrisens determinant är nollskild. Gäller om  $W(y_1, y_2)(a) \neq 0$ . Detta går att visa! Så systemet har en lösning.

Vi kan definiera en lösning  $g = C_1y_1 + C_2y_2$  (linjär kombination av lösningar är en lösning på samma initialvillkor), men vi har unikhhet, alltså måste lösningen vara samma, dvs  $y = g$   $\square$

### Sats 6.10: Abels sats

Om  $y_1$  och  $y_2$  är lösningar till  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  där  $p, q$  är kontinuerliga på  $I$ . Då är deras Wronskian  $W(y_1, y_2)(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$  där  $C$  är en konstant som ej beror på  $x$ . Antingen är  $W(y_1, y_2)(x) = 0 \forall x \in I$  eller  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0 \forall x \in I$

### Bevis 6.3: Bevisidé för Abels sats

Derivera  $W(y_1, y_2)$  med avseende på  $x$ . Då får man ett uttryck som innehåller  $y_1, y_2$  och dess derivator. Använder man ODE:n så kan man visa att även  $W$  uppfyller en linjär första ordningens ODE och den kan man lösa explicit.  $\square$

## 7. FÖRELÄSNING - HOMOGENA EKVATIONER

Vi vill hitta dessa linjärt oberoende funktionerna, det är syftet med dagens föreläsning. Vi kommer börja med att undersöka följande:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Alla lösningar är på formen  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  där  $\{y_1, y_2\}$  är en *fundamental lösningsmängd*, dvs linjärt oberoende.

Hur ska vi hitta  $y_1, y_2$ ? Vi kommer använda 2 olika metoder:

- Reduction of order (reduction av ordning, om vi har  $y_1$  så kan vi hitta  $y_2$ )
- $p, q$  är konstanter så finns det en annan metod

## 7.1. Reduktion av ordning.

Antag att vi har en lösning  $y_1$  till  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ .

Denna metod kan användas för att hitta en till (linjärt oberoende) lösning  $y_2$ . Idén:

- Hitta  $y_2$  som ej är beroende av  $y_1$
- Vi sätter  $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$ , om linj. ber. så är  $u(x)$  en konstant så vi vill hitta  $u(x)$

Vi kan börja med att se att:

$$\begin{aligned} y_2' &= u' \cdot y_1 + uy_1' \\ y_2'' &= u'' \cdot y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \\ \text{Insättning av } y_2, y_2', y_2'' \text{ i ekvationen ger:} \\ (u'' \cdot y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u' \cdot y_1 + uy_1') + quy_1 \\ &= u \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{\text{Ekvationen!} = 0} + u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) \end{aligned}$$

Det som står framför  $u$  är lika med noll ty det är precis det vi börjar med:

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0$$

Låt  $w = u'$  :

$$y_1w' + w(2y_1' + py_1) = 0 \text{ Detta är en linjär första ordningens ODE}$$

Exempel: Givet att  $x^4$  är en lösning till  $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ , hitta en annan lösning. Det vi kommer se är att metoden vi precis gick igenom funkar ävenom vi har något framför  $y''$

Ansätt  $y_2 = uy_1$  där  $y_1 = x^4$ :

$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = 0$$

$$u(x^2y_1'' + py_1' + qy_1) + x^2u''y_1 + u'(2x^2y_1' + py_1) = 0$$

$$0 + x^2u''y_1 + u'(2x^2y_1' + py_1) = 0$$

Låt  $w = u'$  och sätt in  $y_1 = x^4$ :

$$x^2 \cdot x^4 \cdot w' + w(2x^2 \cdot 4x^3 - 7x \cdot x^4) = 0 \text{ OBS: } q \text{ finns inte med}$$

$$x^6w' + w(8x^5 - 7x^5) = 0$$

$$x^6w' + x^5w = 0$$

$$xw' + w = 0$$

$$(xw)' = 0$$

$$xw = C$$

$$w = \frac{C}{x}$$

$$u' = \frac{C}{x} \Leftrightarrow u = C \log(|x|) + D$$

$y_2 = u \cdot y_1 = (C \log(|x|) + D)x^4$  men vi vill få *en* lösning, detta är en familj av lösning

Oftast väljer man  $D = 0$ .  $C$  får helst inte vara noll, annars får vi att  $y_2 = Cy_1$ , alltså linjärt beroende

Väljer vi  $C = 1$ ,  $D = 0$  får vi:

$$y_2 = x^4 \log(|x|)$$

Alla lösningar är på formen:

$$C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x^4 + C_2x^4 \log(|x|) = x^4(C_2 \log(|x|) + C_1)$$

Kommentar: Detta fungerar bara om vi har en lösning redan. Påminner lite om polynom, där om man redan har en lösning så kan vi dela bort den och få ett polynom med lägre grad.

## 7.2. Homogena 2:a ordningens linj. ODE med konstanta koefficienter $p, q$ .

Vi kommer betrakta  $y'' + py' + qy = 0$  för  $p, q \in \mathbb{R}$ . Det visar sig att det alltid finns en lösning på formen  $y(x) = e^{rx}$  där  $r$  beror på  $p, q$ . Insättning ger:

$$r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0e^{rx} \text{ är aldrig noll, alltså } r^2 + pr + q = 0$$

För att det skall vara lika med noll, så måste  $r$  vara en rot, alltså har vi en lösning enbart då.

### Sats 7.1: Karaktäristiska polynom

Polynomet  $r^2 + pr + q$  kallas för det *karaktäristiska* polynomet till  $y'' + py' + qy = 0$

Vi får 3 olika fall när vi hanterar rötter:

- Fall 1: 2 distinkta reela rötter
- Fall 2: Dubbelrot
- Fall 3: Icke-reela rötter

Fall 1: När  $r_1 \neq r_2$ . Vi får 2 lösningar, en för  $r_1$  och en för  $r_2$ :  $y_1 = e^{r_1x}$  och  $y_2 = e^{r_2x}$ . Dessa är linjärt oberoende eftersom  $\frac{e^{r_1x}}{e^{r_2x}} = e^{(r_1-r_2)x}$ , om de är beroende hade vi fått en konstant det vill säga  $e^0$ , men eftersom  $r_1 \neq r_2$  får vi inte det. Alltså är  $\{y_1, y_2\}$  en fundamental lösningsmängd. Vi vet att alla lösningar ges på foren  $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

Fall 2: När  $r_1 = r_2$ . Vi får *en* lösning  $y_1 = e^{rx}$  men vi behöver 2 lösningar. Använd reduktion av ordning för att hitta  $y_2$ ,  $y_2 = u(x)y_1 = u(x)(e^{rx})$ , derivera 2 gånger och stoppa in så får vi  $u''y_1 + 2u'y_1' + u_1'' +$

$p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 = 0$ . Då försvinner vissa termer och vi får kvar  $y_1 u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0$ . Vi har  $y_1 = e^{r_1 x}$  med  $r_1 = -\frac{p}{2}$ . Insättning ger  $e^{-\frac{p}{2}x} u'' + (2(-\frac{p}{2})e^{-\frac{p}{2}x} + pe^{-\frac{p}{2}x})u' = 0$ :

$$e^{-\frac{p}{2}x} u'' = 0$$

$$u'' = 0$$

$$u = Cx + D$$

Vi har alltså  $y_2 = (Cx + D)e^{-\frac{p}{2}x}$ . Sätt  $D = 0$  och  $C = 1 \rightarrow y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x} = xe^{rx} = xy_1$

Alltså  $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$  där  $C_1 \neq C_2$

Fall 3: Komplexa rötter:

$$y_1 = e^{(a+bi)x} \text{ och } y_2 = e^{(a-bi)x}$$

Dessa är linjärt oberoende. I denna kurs håller vi enbart på med reella ting, så det är fördelaktigt att skriva om så att det blir tydligt att vi arbetar med reella former. Vi kan använda oss av eulers formel  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Vi får:

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)x} &= e^{ax} e^{bix} = e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) \\ e^{(a-bi)x} &= e^{ax} e^{-bix} = e^{ax} (\cos(-bx) + i \sin(-bx)) = e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx)) \end{aligned}$$

Alla lösningar är på formen

$$y = C_1 e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) + C_2 e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx)) = (C_1 + C_2) e^{ax} \cos(bx) + i(C_1 - C_2) e^{ax} \sin(bx)$$

vi har real del och imaginär del

$$\text{Tag } C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \quad y = e^{ax} \cos(bx)$$

$$\text{Tag } C_1 = -C_2 = -\frac{i}{2} = i(-\frac{i}{2} - \frac{i}{2}) e^{ax} \sin(bx) = e^{ax} \sin(bx)$$

Dessa är linjärt oberoende, om vi delar dem på varandra får vi  $\frac{\cos(bx)}{\sin(bx)}$  vilket inte är en konstant.

Alltså är  $\{e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)\}$  en annan fundamental lösningsmängd. Vi använder oftast denna.

Exempel: Hitta den allmänna lösningen till:

- $2y'' - 5y' - 3y = 0$
- $y'' - 10y' + 25y = 0$
- $y'' + 4y' + 7y = 0$

Vi kan konstatera att alla dessa är linjära, andra ordningen, konstanta koefficienter. Vi börjar att betrakta första punkten:

$$y'' - \frac{5}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0$$

$$\text{Karaktäristiska polynomet: } r^2 - \frac{5}{2}r - \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{Rötterna blir: } r_1 = 3, r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{3x} \text{ (notera, inget } x \text{ framför } C_2 \text{ ty ingen dubbelrot)}$$

Nästa:



Karaktäristiska polynomet:  $r^2 - 10r + 25$ , rötterna är  $r_1 = 5, r_2 = 5$

Dubbelrotation, allmänna lösningen ges av:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$$

Sista:

Karaktäristiska polynomet:  $r^2 + 4r + 7$ , rötterna ges av  $r_1 = -2 + i\sqrt{3}, r_2 = -2 - i\sqrt{3}$

Två komplexa rötter, vi får:

$$y = C_1 e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x) + C_2 e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$$

## 8. FÖRELÄSNING

Idag kommer vi lösa ekvationer på formen  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ . Tidigare har vi kollat på det homogena fallet, det vill säga när  $f(x) = 0$ , nu ska vi hantera det inhomogena fallet.

**Sats 8.1: Generell lösning**

Den generella lösningen till  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  kan skrivas på formen:

$$y(x) = y_h + y_p(x)$$

Där  $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  är den allmänna lösningen till den associerade homogena ekvationen, och  $y_p$  är *någon* lösning till  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  (kallas för *partikulär* lösning). Partikulärlösningen är alltid oberoende.

Vi ser då att lösningen är summan av lösningen till den associerade homogena ekvationen och *en* lösning till ekvationen.

**Bevis 8.1: Generell lösning**

Låt  $y$  vara en lösning till  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ . Vi vill visa att  $y$  går att skriva på formen:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p$$

Vi har  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ , men vi har också antagit att  $y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = f(x)$ . Om vi subtraherar båda från varandra får vi:

$$(y - y_p)'' + p(x)(y - y_p)' + q(x)(y - y_p) = 0$$

Denna ekvation är homogen! Det ger oss:

$$\begin{aligned} y - y_p &= C_1y_1 + C_2y_2 \\ \Leftrightarrow y &= C_1y_1 + C_2y_2 + y_p \end{aligned}$$

□

Hur ska vi hitta  $y_p$ ? Detta är föreläsningens premiss. Partikulärlösningen är *inte* unik, även om vi hänvisar till den som "partikulärlösningen". Oftast får man den på en specifik form, men den är givetvis inte entydig.

Kommentar: Om vi har 2 olika partikulärlösningar  $y_{p_1}, y_{p_2}$  så förhåller de sig till varandra:  $y_{p_2} = C_1y_1 + C_2y_2 + y_{p_1}$ , men vi skulle kunna vända på det och skriva  $y_{p_1} = D_1y_1 + D_2y_2 + y_{p_2}$

Vi kommer gå igenom 2 olika metoder för att hitta partikulärlösningen:

- Metoden med obestämda koefficienter (ansatsmetoden) (mer gissning)
- Variation av parameter-metoden (mer allmän, mer räkna)

**8.1. Metoden med obestämda koefficienter.**

Idén går ut på att gissa en lösning och verifiera den.

Exempel: Hitta en partikulärlösning till:

- $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$
- $y'' - y = 2e^{3x}$
- $3y'' + y' - 2y = 2\cos(x)$

Anmärkning: De har alla konstanta koefficienter.

Vi börjar med att kolla på första. Vi söker ett  $y$  så att vi får  $3x + 2$  på HL. Det låter rimligt att det vi söker är ett polynom, så vi tar ett allmänt polynom och stoppar in och ser vad som händer.

Graden av polynomet på HL är av grad 1, så rimligtvis borde  $y$  vara ett förstgradspolynom. Det generella förstgradspolynomet är  $y = Ax + B$ . Vi stoppar in och ser vad som händer:

$$\left. \begin{aligned} y'_p &= A \\ y''_p &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 0 + 3A + 4(Ax + B) = 3x + 2$$

$$4Ax + (3A + 4B) = 3x + 2$$

Här kan man jämföra vad som står framför  $x$  och vilka som är konstanter. Vi får:

$$\left. \begin{aligned} 4A &= 3 \\ 3A + 4B &= 2 \end{aligned} \right\} = A = \frac{3}{4}, B = \frac{-1}{16}$$

En partikulärlösning är  $y_p = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}$

Nästa kommer vara att inse att vi har en exponentialfunktion. Vi gissar:

$$\left. \begin{aligned} y_p &= Ae^{3x} \\ y'_p &= 3Ae^{3x} \\ y''_p &= 9Ae^{3x} \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 9Ae^{3x} - Ae^{3x} = 2e^{3x} = 8Ae^{3x}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{3x}$$

Ibland får man en gissning som ger 0 på VL, då har man gissat fel. Vissa folk på tentor har gissat fel och börjar lösa för  $x$  men det är inte riktigt det vi vill, vi vill hitta för alla  $x$ .

Vi kör sista (men inte minsta!). Vi ska testa vad som händer om man gissar fel. Vi gissar  $y_p = A \cos(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} y'_p &= -A \sin(x) \\ y''_p &= -A \cos(x) \end{aligned} \right\}$$

Första anmärkningen på att något har gått snett är att vi har fått  $\sin(x)$ , vi forts.

$$-3A \cos(x) - A \sin(x) - 2A \cos(x) = 2 \cos(x)$$

$$-5A \cos(x) - A \sin(x) = 2 \cos(x)$$

För att detta skall gälla bör vi ha:

$$-5A = 2 \Rightarrow A = \frac{-2}{5} \text{ men vi har ingen sinus term i HL!}$$

Vad vi skulle kunna göra är att vi gör en ny gissning, eftersom vi vet att vid derivering får vi motsatt funktion kan vi ansätta  $y_p = A \cos(x) + B \sin(x)$ . Vi får:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} y_p' &= -A \sin(x) + B \cos(x) \\ y_p'' &= -A \cos(x) - B \sin(x) \end{aligned} \right\} \\
& 3(-A \cos(x) - B \sin(x)) + (-A \sin(x) + B \cos(x)) - 2(A \cos(x) + B \sin(x)) = 2 \cos(x) \\
& (-5A + B) \cos(x) + (-A - 5B) \sin(x) = 2 \cos(x) \\
& \left. \begin{aligned} -5A + B &= 2 \\ -A - 5B &= 0 \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} A &= \frac{-5}{13} \\ B &= \frac{1}{13} \end{aligned} \right\} \\
& y_p = \frac{-5}{13} \cos(x) + \frac{1}{13} \sin(x)
\end{aligned}$$

Denna metod fungerade bra i dessa exempel. Vi ska kika på ett exempel där den första gissningen inte riktigt skulle funka och tänka på "vad kan vi göra då?".

Exempel: Hitta en partikulärlösning till  $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$  (ganska lik ett tidigare exempel). Rimlig gissning är  $y_p = Ae^x$ :

$$\begin{aligned}
& Ae^x - 5Ae^x + 4Ae^x = 8e^x \\
& 0Ae^x = 8e^x \Rightarrow \text{Bus! Kan ej välja } A \text{ så att vi får en lösning.}
\end{aligned}$$

Varför hände detta och varför funkar det inte? Jo, för att om vi kollar på den associerade homogena ekvationen  $y'' - 5y' + 4y = 0$  så har den den allmänna lösningen  $y_h = C_1e^x + C_2e^{4x}$ . Så  $y_p = Ae^x$  löser den homogena ekvationen, löser den den homogena kan den inte rimligtvis lösa den inhomogena.

En smidig lösning på detta är att man tar det man gissade på, och multiplicerar med  $x$ . Detta funkar i allmänhet, får man noll så multiplicera med  $x$ .  $y_p = Axe^x$ . Vi kollar:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} y_p' &= Ae^x + Axe^x \\ y_p'' &= Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x \end{aligned} \right\} \\
& \Leftrightarrow 2Ae^x + Axe^x - 5(Ae^x + Axe^x) + 4Axe^x = 8e^x \\
& -3Ae^x + 0Axe^x = 8e^x \\
& A = \frac{-8}{3} \Rightarrow y_p = \frac{-8}{3}xe^x
\end{aligned}$$

När vi säger "multipliera med  $x$ " kommer det betecknas  $x^s$  senare, detta för att ibland så kan det hända att man måste multiplicera med  $x$  flera gånger så man låter helt enkelt  $s$  beteckna hur många gånger man behöver multiplicera gissningen med  $x$  för att inte få en linjärt beroende lösning (0).

Nedan följer en (ej fullständig) tabell kring vilka de generella formerna på visa typer av uttryck ser ut:

Om $f(x)$ är	Gissa $y_p$
$P_n$ (polynom av grad $n$ )	$x^s \text{Polynom}$ (där $s$ oftast är noll men om vi får 0, öka)
$a \cos(kx) + b \sin(kx)$	$x^s (A \cos(kx) + B \sin(kx))$
$e^{rx} (a \cos(kx) + b \sin(kx))$	$x^s e^{rx} (A \cos(kx) + B \sin(kx))$
$P_n e^{rx}$	$x^s (P_n) e^{rx}$
$P_n (a \cos(kx) + b \sin(kx))$	$x^s (P_n) (A \cos(kx) + B \sin(kx))$

Vad händer om  $f(x)$  inte är på en form liknande ovan? Då kan vi troligen inte gissa lösningen. Men, om den är en summa av saker i tabellen, då kan vi använda att den är linjär och därmed dela upp i fall.

## 8.2. Variation av parameter-metoden.

Mer allmän, men kräver mer beräkning. Risken är därmed större att man räknar fel.

Den ger oss en lösning till  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  om vi har en fundamental lösningsmängd  $\{y_1, y_2\}$  till den associerade homogena ekvationen.

En partikulärlösning ges då på formen  $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ . Hade  $u_1, u_2$  varit konstanter hade vi fått en homogen ekvation.

Här är  $u'_1 = \frac{W_1}{W(y_1, y_2)}$  och  $u'_2 = \frac{W_2}{W(y_1, y_2)}$  där  $W$  är Wronskianen som inte är något annat än en determinant av en 2x2 matris:

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{pmatrix} = -f(x)y_2$$

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{pmatrix} = f(x)y_1$$

Exempel: Lös  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

Om vi vill använda denna metod, så behöver vi den homogena ekvationen, så steg 1, lös homogen:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Karaktäristiska polynomet  $r^2 + 3r + 2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{array} \right\}$$

Lösningen är  $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Där  $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x}$

Vi söker  $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

$$W_1 = \frac{-1}{1+e^x} e^{-2x}$$

$$W_2 = \frac{1}{1+e^x} e^{-x}$$

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{-2x}}{1+e^x} \cdot \frac{1}{-e^{-3x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$u'_2 = \frac{e^{-x}}{1+e^x} \cdot \frac{1}{-e^{-3x}} = \frac{-e^{2x}}{1+e^x}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = [u = e^x, du = e^x dx] = \int \frac{1}{1+u} du \\ &= \ln|1+u| \text{ (vi struntar i } +C \text{ ty partikulärlösning är en)} = \ln|1+e^x| \end{aligned}$$

$$u_2 = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} = - \int \frac{e^x(1+e^x) - e^x}{1+e^x} dx = - \int e^x dx + \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = -e^x + \ln|1+e^x|$$

Vi får  $y_p = \ln|1+e^x| \cdot e^{-x} + (-e^x + \ln|1+e^x| \cdot e^{-2x}) = \ln|1+e^x| (e^{-x} + e^{-2x}) - e^{-x}$

Allmänna lösningen ges av:

$$y = y_p + y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \ln |1 + e^x| (e^{-x} + e^{-2x}) - e^{-x}$$

Varför funkar det här? Om vi stoppar in så löser det, men *varför*? Sätter vi in  $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$  i ekvationen och förenklar, får vi:

$$(y_1 u_1' + y_2 u_2')' + p(x)(y_1 u_1' + y_2 u_2') + y_1' u_1 + y_2' u_2 = f(x)$$

Notera att vi har  $(y_1 u_1' + y_2 u_2')'$  2 gånger. Vi kan då kräva

$$\left. \begin{array}{l} (y_1 u_1' + y_2 u_2')' = 0 \\ y_1' u_1 + y_2' u_2 = t(x) \end{array} \right\}$$

Detta är en linjärt system! Vi har slutna formler. Vi kan alltså kolla om systemet är lösbart genom Cramers regel.

## 9. UPPGIFTER -

Vilka metoder är applicerbara på följande ODE:er?

- $y'' + 5y' - 2y = 0$
- $y'' + 5y' - 2y = 5 + x^2$
- $y'' + 5y' - 2y = \tan(x)$
- $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$  om vi har lösn.  $y_1 = x^4$
- $x^2y'' - 7xy' + 16y = x$  om vi vet homo lösn.
- $x^2y'' - 7xy' + 16y = \sin(x)$  om vi vet homo lösn.
- $2y'' - y' = 0$

Alla lösningar som slutar på  $= 0$  kommer givetvis vara homogena, alltså kommer antingen ”konstanta koefficienter” metoden eller ”reduktion av ordning” metoden beroende på konstanter.

## 10. POTENSSERIELÖSNINGAR

På samma sätt som föregående kapitel kommer även detta gälla för linjära ODE:er. Denna metod fungerar för  $n$ :te ordningens linjära ODE:er men det blir snabbt mycket räkning så vi kommer begränsa oss till 2:a ordningen.

Kommer i allmänhet inte ge oss lösningar på slutet form utan vi får lösningar i termer av en potensserie, därför är det bra att ha grund i potensserier så vi kommer ägna lite tid åt det.

De flesta ODE:er har inte lösning på slutet form utan måste beskrivas mha potensserier. Exempel på ekvationer:

- Bessel-ekvationerna  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$
- Legendreekvationen  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(1 + \lambda)y = 0$

## 10.1. Potensserier - Repetition.

För att göra allt på ett snyggt sätt kommer vi kräva lite fler verktyg än vi har tillgång till men det betyder inte att vi inte kan göra saker (- Albert Einstein eller nåt). Nog med banter!

En potensserie är en serie på följande form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

Detta är en potensserie med *center* i  $a$ . Om center är i  $a = 0$  får vi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Oftast kommer vi arbeta med  $a = 0$  (det blir lättast). Men! Med variabelsubstitution är det lätt att byta mellan fallen.

Den viktigaste egenskapen en potensserie har är om den konvergerar eller ej inom ett intervall  $I$ .

**Sats 10.1: Potensserie**

Potensserien konvergerar om:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n (x - a)^n$$

existerar för alla  $x \in I$ . Då är summan:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

definierad på  $I$  och serien kallas för en *potensserierepresentation* av  $f(x)$

Exempel: Vi har:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$



Dessa konvergerar  $\forall x$ . En som är värd att nämna:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Dessa konvergerar  $|x| < 1$  och divergerar då  $|x| > 1$ .

Alla dessa går att beskriva i termer av taylorserier:

### Sats 10.2: Taylorserie för funktion

Taylorserien för en funktion  $f$  centrerad i  $x = a$  är:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \dots$$

Om  $a = 0$  är det MacLaurin serier

Om  $x = a$  konvergerar serien alltid till  $f(a)$ .

Kommer serien konvergera för  $x$  utanför de punkterna?

### Sats 10.3: Konvergensradie

Konvergensradien  $r$  av en potensserie är det värde  $r \geq 0$  så att:

- Serien absolutkonvergerar för  $|x-a| < r$  (notera, strikt mindre)
- Serien divergerar för  $|x-a| > r$

Serien konvergerar i ett intervall med radie  $r$  centrerat kring  $a$ . Utanför intervallet divergerar den. Notera att vi inte betraktar ändpunkterna i konvergensintervallet; ibland konvergerar den där och ibland inte.

### Sats 10.4: Konvergensradiens existens

Betrakta gränsvärdet:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Om gränsvärdet existerar (och är ändligt) så är  $r$  konvergensradien för serien.

Om gränsvärdet  $\infty$  så är konvergensradien  $\infty$

### Bevis 10.1: Konvergensradie

Använd kvottest på  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  där  $a_n = c_n(x-a)^n$  där kvottestet för en serie  $\sum a_n$  görs genom att beräkna:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Om  $L < 1$  har vi absolutkonvergens, om  $L > 1$  divergerar serien, om  $L = 1$  eller om gränsvärdet inte existerar så får vi inte heller någon info.

□

Om Taylorserien för  $f(x)$  konvergerar till  $f(x)$  för alla  $x \in I$  där  $a \in I$ . Då säger vi att  $f$  är *analytisk* på  $I$  och  $f$  är analytisk i  $a$ .

Kommentar: Begreppet analytisk (även kallat holomorf) kommer från komplex analys. Det är ett **väldigt** starkt begrepp. Vi kommer använda lite verktyg från komplex analys utan att bevisa dem. De flesta funktioner vi har stött på är analytiska.

Exempel på analytiska funktioner som är analytiska överallt:  $\sin(x), \cos(x), e^x$ . Exempel på analytiska funktioner som är analytisk nästan överallt är  $\frac{1}{x}$  för alla  $x \neq 0$ . Exempel på en icke-analytisk funktion är  $|x|$  i  $\mathbb{C}$

Om  $f, g$  är analytiska så är  $f + g$  och  $f \cdot g$  analytisk och  $\frac{f}{g}$  om  $g \neq 0$ . Den kan dock vara analytisk även om  $g = 0$ :

**Lemma 10.1: När  $g = 0$  ger analytisk funktion**

Om  $f, g$  är analytiska funktioner i  $x = a$  då är  $\frac{f(x)}{g(x)}$  analytisk i  $x = a$  omm  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  existerar (är ändligt).

Exempelvis  $\frac{\sin(x)}{x}$  är analytisk för alla  $x$ . Om  $x \neq 0$  är det enkelt att se ty det är ett standardgränsvärde som är lika med 1.

Hur kan vi använda dessa potensserier för ODE:er? Vi måste derivera givetvis! Vi kan begga följande sats:

**Sats 10.5**

Om serierepresentationen  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  konvergerar på ett öppet intervall  $I$  (som innehåller  $a$ ), då är  $f$  glatt (oändligt differentierbar) och derivatan ges av att differentiera termvis, dvs:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

Derivatornas potensserie konvergerar på *samma* intervall  $I$ .

En annan sats som kanske känns lite löjlig men som behövs:

**Sats 10.6: Identitetsprincipen**

Om:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ för } x \in I$$

Då är  $a_n = b_n$ .

Om:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Så är  $a_n = 0$  för alla  $n$

### 10.2. Potensserie-metoden.

Allt tidigare var bara setup, so let's kick it!

Idé: Ansätt  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  i ekvationen och försök bestämma  $c_n$

Exempel:

$$y' + 2y = 0$$

Denna går att lösa på andra sätt men för sakens skull, låt oss visa hur vi gör med potensserier:

$$\begin{aligned} \text{Ansätt } y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \end{aligned}$$

Nu vill vi skriva om för att få båda serier med  $x^n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} &= 1 \cdot c_1 \cdot x^0 + 2c_2 x^1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \\ &\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) c_{n+1} + 2c_n) x^n = 0 \end{aligned}$$

Nu kan vi använda identitetsprincipen som säger att alla termer måste var lika med noll, alltså:

$$(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0$$

Från det här får vi en *rekursiv relation*:

$$c_{n+1} = \frac{-2c_n}{n+1}$$

Om vi har något  $c_0$  så kan vi få  $c_n$  för alla  $n \geq 1$ . Notera att  $c_0$  är vår parameter, den kan exempelvis bestämmas av initialvillkoret. I vårt enkla exempel så kan vi få en explicit formel för att räkna  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-2c_0}{1} \\ c_2 &= \frac{2^2 c_0}{2!} \\ c_3 &= \frac{-2^3 c_0}{3!} \\ &\rightarrow c_n = \frac{(-1)^n 2^n c_0}{n!} \end{aligned}$$

Så:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n c_0}{n!} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = c_0 e^{-2x}$$

Då är frågan var denna serie konvergerar. I detta fall konvergerar den överallt ty vi hittade en taylorrekivalens men i andra fall får man kika närmare på konvergensradien. Alternativt skulle vi kunna räkna ut konvergensradien direkt från  $c_{n+1} = \frac{-2c_n}{n+1}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{\frac{-2c_n}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \rightarrow \infty$$

Denna metod fungerar för linjära ekvationer men är relevant för grad  $\geq 2$

Vi fokuserar på grad 2 och homogena ekvationer (den funkar bra för inhomogena, men det blir lite mer räkningar), alltså:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

För att detta skall funka kommer vi behöva anta att  $A, B, C$  är analytiska runt en punkt vi vill lösa ekvationen. I många fall kommer de vara polynom vilket är analytiska funktioner. I många fall kommer vi dela bort  $A$ , så vi får:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$$

$$q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$$

Detta funkar när  $A \neq 0$  men det kan fungera ändå, så länge  $p, q$  är analytiska.

### Sats 10.7

Om  $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$  och  $q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$  är analytiska i punkten  $x = a$ , då kallas punkten för en ordinär punkt. Annars kallas punkten för en *singulär punkt* (eller buspunkt som kidsen säger).

De flesta fall vi kommer jobba med kommer handla om singulära punkter.

Exempel:  $xy'' + y' + xy = 0$ , vi vill kolla var den är singulär resp. ordinär:

$$\rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = 1$$

Här är  $x = 0$  en singulär punkt ty  $p(x) = \frac{1}{x}$  inte är analytisk. Alla andra punkter däremot är ordinära.

Exempel:  $xy'' + \sin(x)y' + x^2y = 0$ :

$$\rightarrow y'' + \frac{\sin(x)}{x}y' + xy = 0$$

$$p(x) = \frac{\sin(x)}{x}, q(x) = x$$

Här är det uppenbart att  $q(x)$  är analytisk, men  $p(x)$  är inte lika uppenbar. Kikar vi närmare inser vi att man skulle kunna tro att  $x = 0$  är en singularitet men det är bara ett standardgränsvärde, alltså inga singularitetspunkter, alltså alla punkter är ordinära.

Notera: Även om vi har singulära punkter så finns det lösningar, lösningarna kommer i allmänhet inte vara analytiska.

**Sats 10.8**

Om  $a$  är en ordinär punkt till  $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ , då har ODE:n 2 linjärt oberoende lösningar på formen:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

Konvergensradien är åtminstone lika stor som avståndet till närmsta singulära punkt. Man måste dock även ta hänsyn till komplexa singulära punkter.

Exempel: Betrakta ekvationen  $(x^2 + 9)y'' + xy' + x^2y = 0$ :

$$\rightarrow y'' + \frac{x}{x^2 + 9}y' + \frac{x^2}{x^2 + 9}y = 0$$

Denna har inga reella singularitetspunkter, men den har 2 komplexa, närmare bestämt  $x = \pm 3i$ . En serie lösning på formen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Kommer den ha konvergensradie  $\geq 3$ . I en annan punkt exempelvis  $\sum c_n (x - 4)^n$  får vi  $r \geq d(4, \pm 3i) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

## 11. POTENSSERIELÖSNINGAR - FORTS.

Dagens föreläsning kommer handla om ett specialfall som kallas för *Eulers ekvation* samt *reguljära singulara punkter*. Oftast är det de singulara punkterna som är mest intressanta

## 11.1. Cauchy-Eulers Ekvation.

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

Punkten vi är intresserade av är  $x = 0$  ty det är en singular punkt eftersom:

$$p(x) = \frac{\alpha x}{x^2} = \frac{\alpha}{x}$$

$$q(x) = \frac{\beta}{x^2}$$

är analytiska i alla punkter förutom  $x = 0$ . Vi vill undersöka vad som händer när vi närmar oss  $x = 0$ , så vi delar upp i 2 fall, då  $x < 0$  och  $x > 0$ . Vi kollar på  $x > 0$  ty  $x < 0$  fås genom  $t = -x$ .

Det visar sig att denna ekvation påminner om konstanta koefficienter metoden. Vi undersöker vidare. Ansätt  $y = x^r$ :

$$\left. \begin{aligned} y' &= r x^{r-1} \\ y'' &= r(r-1)x^{r-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2(r(r-1)x^{r-2}) + \alpha r x^{r-1} + \beta x^r = 0$$

Multipluera in  $x^2$  och förenkla:

$$((r(r-1) + \alpha r + \beta)) x^r = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha - 1)^2}{4} - \beta}$$

Här får vi 3 fall:

- $r_1 \neq r_2$  reella
- $r_1 = r_2$
- $r_1 = \bar{r}_2$

Fall 1:

Vi får direkt 2 linjärt oberoende lösningar  $y_1 = x^{r_1}$  och  $y_2 = x^{r_2}$  så den allmänna lösningen ges av  $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$

Exempel:  $x^2 y'' + \underbrace{4}_{\alpha} x y' + \underbrace{2}_{\beta} y = 0$ .

Den karakteristiska ekvationen blir då  $r^2 + (4 - 1)r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -2$ .

Den generella lösningen blir då  $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$

Fall 2:

Vi får *en* lösning,  $y_1 = x^{r_1}$  och vi vill hitta en till, så vi kan använda reduktion av ordning ty vi har en lösning. Räkningarna är lite långa, så Dahne skriver upp resultaten:

$$y_2 = x^{r_1} \cdot \log(x)$$

Logaritmen är bara definierad för  $x > 0$ , men notera antagandet i början, dvs att  $x > 0$ . Den allmänna lösningen blir:

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_1} \log(x) = (C_1 + C_2 \log(x)) x^{r_1}$$

Exempel:  $x^2 y'' + \underbrace{-3}_{\alpha} x y' + \underbrace{4}_{\beta} y = 0$

Karakteristiska ekvationen blir  $r^2 + (-3 - 1)r + 4 = 0$  där lösningen blir  $r_1 = r_2 = 2$ , vi får då  $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \log(x)$ .

Fall 3:

Antag att  $r_1 = \lambda + i\mu$ ,  $r_2 = \lambda - i\mu$ . Vi får den generella lösningen  $y = C_1 x^{\lambda+i\mu} + C_2 x^{\lambda-i\mu}$ . Vi skriver på mer "reell" form:

Vi kommer ihåg att  $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$ . Detta ger då:

$$\begin{aligned} x^{\lambda+i\mu} &= \left(e^{\log(x)}\right)^{\lambda+i\mu} = e^{\lambda \log(x) + i\mu \log(x)} = e^{\lambda \log(x)} (\cos(\pm\mu \log(x)) + i \sin(\pm\mu \log(x))) \\ &= x^\lambda (\cos(\mu \log(x)) \pm i \sin(\mu \log(x))) \end{aligned}$$

Vi kan då ta  $y_1 = x^\lambda \cos(\mu \log(x))$  och  $y_2 = x^\lambda \sin(\mu \log(x))$ . Den allmänna lösningen ges av en linjärkomb av dessa:

$$y = C_1 x^\lambda \cos(\mu \log(x)) + C_2 x^\lambda \sin(\mu \log(x))$$

Exempel:  $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

Vi får en karaktäristisk ekvation vilket ger oss  $r^2 + (3-1)r + 5 = 0$  vilket ger oss  $r_1, r_2 = -1 \pm 2i$ . Den allmänna lösningen ges då av:

$$y = C_1 x^{-1} \cos(2 \log(x)) + C_2 x^{-1} \sin(2 \log(x))$$

Nu har vi bara kikat på när  $x > 0$ , men vi sa tidigare att vi kunde substituera  $t = -x$  för att vänta på schteken som kidsen säger. Gör vi denna substitution ser vi att vi kan byta ut  $x$  mot  $|x|$  i lösningarna.

### Sats 11.1

ör alla intervall som inte innehåller  $x = 0$ , har Cauchy-Euler ekvationen

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

lösningar enligt följande:

Låt  $r_1, r_2$  vara rötter till  $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$

- Om  $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$  har vi  $y = C_1 |x|^{r_1} + C_2 |x|^{r_2}$
- Om  $r_1 = r_2$  har vi  $y = C_1 |x|^{r_1} + C_2 |x|^{r_1} \log(|x|)$
- Om  $r_1, 2 = \lambda + i\mu$  har vi  $y = C_1 |x|^\lambda \cos(\mu \log(|x|)) + C_2 |x|^\lambda \sin(\mu \log(|x|))$

Notera att vi inte vad som händer då  $x = 0$ , men om vi gör variabelbytet  $t = x - a$  kan vi få lösningar till ekvatioen på formen:

$$(x - a)^2 y'' + \alpha(x - a)y' + \beta y = 0$$

genom att byta ut  $x$  mot  $x - a$  i lösningarna i Sats 11.1. Lösningen är då definierad på intervall som inte innehåller  $a$ .

Exempel:  $(x + 1)^2 y'' + 3(x + 1)y' + \frac{3}{4}y = 0$

Låt  $t = x + 1$  så får vi ekvationen  $r^2 + (3-1)r + \frac{3}{4} = 0$  som har rötterna  $r_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $r_2 = -\frac{3}{2}$ . Detta är punkt 1 i Sats 11.1 och ger därmed den generella lösningen:

$$y = C_1 |x + 1|^{-1/2} + C_2 |x + 1|^{-3/2}$$

## 11.2. Reguljära singulära punkter.

Vi påminner om ursprungsekvationen  $A(x)y'' + B(x)y' + C(x) = 0$ . En punkt  $x = x_0$  är singulär om  $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$  eller  $q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$  inte är analytisk.

En reguljär singulär punkt är en inte-så-hemsk singulär punkt, vi ska gå igenom i mer detalj. Från Lemma 10.1 (sida 34) sa vi att  $p, q$  är analytiska i  $x_0$  om:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} p(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \end{array} \right\} \text{är ändliga}$$

Exempel:

För att visa att  $x = 0$  är den *enda* singulära punkten till

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

Räcker det att notera att  $p(x) = \frac{1}{x}$  och  $q(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{x^2}$  är ändliga precis då  $x \neq 0$

När  $x = x_0$  är en singulär punkt har ekvationen i allmänhet inte en analytisk lösning, det vill säga en lösning som skrivs som en potensserie:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Däremot, om punkten inte är *för* singulär, kan vi ändå hitta en lösning. Exempelvis Cauchy-Euler ekvationen. Då återkommer vi till det där med "för singulär", det betyder i princip att den inte ska vara mer singulär än Cauchy-Euler ekvationerna.

### Sats 11.2: Reguljär punkt

Den singulära punkten  $x = x_0$  är en *reguljär* singulär punkt till  $A(x)y'' + B(x)y' + C(x) = 0$  om:

$$(x - x_0)p(x) = (x - x_0)\frac{B(x)}{A(x)} \text{ och}$$

$$(x - x_0)^2 q(x) = (x - x_0)^2 \frac{C(x)}{A(x)}$$

är analytiska. Annars kallas den för irreguljär.

Exempel:

För Cauchy-Euler ekvationen  $x^2 y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$  är  $x = 0$  en reguljär singulär punkt! Detta eftersom vi har:

$$xp(x) = x \cdot \frac{\alpha x}{x^2} = \alpha$$

$$x^2 q(x) = x^2 \cdot \frac{\beta}{x^2} = \beta$$

Konstanter är analytiska funktioner.

Vi kommer senare se att lösningar vid reguljära punkter beter sig likt lösningar för Cauchy-Euler ekvationen.

Exempel:

Bestäm de singulära punkterna och klassificera de som reguljära och irreguljära för:

$$x^2(1+x)^2 y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0$$

Det vi behöver göra är att kolla på  $p, q$ , så vi bestämmer de:



$$p(x) = \frac{x(4-x^2)}{x^2(1+x)^2} = \frac{4-x^2}{x(1+x)^2}$$

$$q(x) = \frac{2+3x}{x^2(1+x)^2}$$

De singulära punkterna är då vi får division med noll, vilket alltså ger oss att de singulära punkterna ges av  $x = \{0, -1\}$ . Nu vill vi kolla om de är reguljära eller irreguljära:

För  $x = 0$  får vi:

$$xp(x) = \frac{4-x^2}{(1+x)^2}$$

$$x^2q(x) = \frac{2+3x}{(1+x)^2}$$

Båda är analytiska i punkten  $x = 0$ , i punkten  $x = -1$  får vi:

$$(x+1)p(x) = \frac{4-x^2}{x(1+x)} \leftarrow \text{Ej analytisk}$$

$$(x+1)^2q(x) = \frac{2+3x}{x^2} \leftarrow \text{Analytisk i } x = -1$$

Det räcker med att en ej är analytisk för att punkten skall vara irreguljär

Det kan vara lite klurigt att kontrollera detta, och eftersom det är många beräkningar är det lätt att slarva. Vad man kan göra är att man räknar fram några koefficienter och använder en dator för att plotta. Om man ser att det går mot noll så har man troligtvis gjort rätt.

## 12. EGNA ANTECKNINGAR - FUNDAMENTAL TEORI

## 12.1. Lösningsintervall.

Lösningsintervall innefattar de intervall där en eller fler lösningar existerar för en ODE. Det kanske känns lite onaturligt att en lösning bara är definierad i ett intervall, men antag att  $y = \frac{1}{x}$  är en lösning, denna funktion vet vi är ej definierad i  $x = 0$ , därmed om den är en lösning kommer vi kräva att  $x \neq 0$ . I någon mening bygger detta koncept på det. Vi ska kika närmare på ett exempel.

Följande exponentialekvation

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

förekommer ofta när tillväxten av något är proportionell till dess nuvarande storlek. Lösningen ges av

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

är definierad för alla värden på  $t$ . Funktionen är till och med väldefinierad. Vi kan säga mer om lösningen, nämligen att:

- $\forall t$  är  $x(t)$  en väldefinierad och kontinuerlig och deriverbar funktion där  $x(t) \neq 0$  aldrig antar 0 om inte  $x_0 = 0$
- Om  $k > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ . Om  $k < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Det vi tar med oss är att lösningen är "snäll" i någon mening, vi får kontinuitet, saker beter sig som de ska (en variabel går mot  $\infty$  ger antingen 0 eller  $\infty$ ).

Låt oss istället kika på ett IVP fall som inte är så snällt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

Denna har lösningen

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Vad kan vi säga om denna lösning?

- $x(t)$  är inte definierad för  $t = 1$
- $\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = \infty$ . Detta sker i "ändlig" tid, ty  $1 < \infty$

Beroende på vilket håll man angriper  $x(t) = 1$  får vi antingen  $+\infty$  eller  $-\infty$ . Punkten  $t = 1$  kallas för *singularitetspunkt*.

**Sats 12.1: Singularitet**

Låt  $x(t)$  vara en lösning till  $x' = f(t, x)$ . Vi säger att  $x$  har en singularitet i punkten  $s$  om:

- $x(t)$  är odefinierad eller icke-kontinuerlig i punkten  $t = s$ , eller
- $\lim_{t \rightarrow s} |x(t)| = \infty$

Återgår vi till föregående exempel med singularitet noterar vi att punkten  $(0,1)$  som är givet som IVP begränsar lösningsmängden till det öppna intervallet  $(-\infty, 1)$  ty det går inte på något sätt att "korsa över" till höger om  $t = 1$  kontinuerligt. Eftersom IVP är angivet vet vi även att lösningen är definierad till vänster om  $t = 1$ . Detta sammanfattas i följande sats:

**Sats 12.2: Existensintervall**

Låt  $x(t)$  vara en lösning till

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

som uppfyller IVP  $x(t_0) = x_0$ . *Existensintervallet* för  $x(t)$  är det största intervallet som innehåller punkten  $t_0$  så att lösningen  $x(t)$  är kontinuerlig **och** differentierbar.

Exempel:

Lösningen till följande IVP

$$x' = x^2 \quad x(2) = -1$$

har lösningen

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

I detta fall är initialvärdet specificerat på  $t = 2$ , alltså punkten  $(2, -1)$ , detta är till höger om singularitetspunkten  $t = 1$  vilket då gör att lösningsintervallet är det öppna intervallet  $(1, \infty)$ .

En sak att notera är att i exemplen som vi tagit upp är  $x(t)$  godtyckligt definierad utöver de intervall som vi hittat men vi har valt att enbart inkludera det största som inkluderar och löser IVP. Detta för att det helt enkelt är orelevant att veta att funktionen är definierad efter  $t = 1$  eftersom vi inte kan nå den domänen av funktionen.

## 13. FROBENIUS METOD

Vi utgår från samma ekvation som alltid

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

Dagens fokus handlar om reguljära singulära punkter, dvs när vi får problem med att dela bort  $A(x)$ . Idag kommer vi inte hantera irreguljära singulära punkter. Man kan ha vilka reguljära singulära punkter som helst, men idag kommer vi anta att de ligger i origo (man kan alternativt bara substituera/flytta origo i andra fall).

**Påminnelse:** En *reguljär* singulär punkt kring  $x_0 = 0$  ger:

- $x \cdot p(x) = x \frac{B(x)}{A(x)}$
- $x^2 q(x) = x^2 \frac{C(x)}{A(x)}$

där båda dessa är *analytiska* (dvs deras potensserie konvergerar till funktionen). Vi kan därför skriva om dessa på deras respektive potensserier:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Vi kan nu skriva om  $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$  till:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 y'' + x^2 p(x)y' + x^2 q(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 y'' + x(xp(x))y' + (x^2 q(x))y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 y'' + x \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) y' + \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) y = 0$$

Om  $p_n = q_n = 0$  för  $n \geq 1$  får vi

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0$$

Detta är en Eulerekvation!

Förra föreläsningen såg vi att Eulerekvationen har lösningar på formen  $y = x^r$ . Vi provar nu att hitta lösningar på formen

$$y = x^r \cdot f(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Om  $c_0 = 0$  blir den första termen som dyker upp  $x$  vilket vi kan bryta ut så att vi får  $x^{r+1}$ , vi vill inte ha saker som vi kan bryta ut. Eftersom  $c_1 \cdot y$  också är en lösning kan vi ta  $c_0 = 1$ .

Att hitta lösningar på den formen kallas för *Frobenius metod*. Den kräver ganska mycket räkning, så vi kommer gå igenom ett långt exempel och senare gå igenom satser och definitioner.

## 13.1. Exempel.

Betrakta

$$2x^2y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0$$

Notera här att om ekvationen hade sett ut på följande  $2x^2y'' + 3xy' - (1)y = 0$  så hade det varit en Eulerekvation.

Vi börjar med att kontrollera att origo är en reguljär singulär punkt. Vi har:

$$p(x) = \frac{3x}{2x^2} = \frac{3}{2x} \quad q(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

Vi ser att  $x = 0$  är en singulär punkt ty  $p$  och  $q$  ej är analytiska. vidare skall vi betrakta  $x \cdot p(x)$ :

$$xp(x) = \frac{3}{2} \quad x^2q(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Båda dessa är analytiska, vi har alltså en reguljär singulär punkt, då kan vi använda Frobenius metod och se vad som händer.

Det vi vill göra är att ta en ansats som är på formen  $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . Vi deriverar  $y$  och gör det lite enklare genom att multiplicera in  $x^r$ . Då blir det inte en potensserie ty vi kräver att  $n \in \mathbb{N}$  och med  $r$  som spökar kan vi inte garantera det, men det spelar ingen roll. Vi får:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

Insättning ger:

$$2x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} - (x^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Vi vill skriva om summorna så att exponenten blir samma för alla. Skriv som den lägsta! (Ej strikt nödvändigt, men gör räkning lättare). I detta fall är det  $n+r$ . I detta exempel betraktar vi även  $x > 0$ . Den enda summan vi behöver skriva om i det här fallet är den med  $x^{n+r+2}$ , vi vill skriva om den så att den får exponenten  $x^{n+r}$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} = c_0 x^{r+2} + c_1 x^{r+3} + c_2 x^{r+4} \dots$$

Vi noterar att om vi istället börjar på  $n = 2$  så får vi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r}$$

Insättning ger:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Allt är nästan nice här förutom att vi har en summa som börjar på  $n = 2$ . Notera att den gemensamma summationen börjar vid  $n = 2$  isåfall. Vi kan "bryta ut" de första 2 termer från de övriga summorna:

$$(2r(r-1))c_0 + 3(rc_0 - c_0)x^r + (2(1+r)(1+r-1))c_1 + 3(1+r)c_1 - c_1 x^{r+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (2(n+r)(n+r-1)c_n + 3(n+r)c_n - c_{n-2} - c_n) x^{n+r}$$

Dela med  $x^r$  och förenkla:

$$\begin{aligned}
& (2r(r-1) + 3r - 1)c_0 + (2(1+r)r + 3(1+r) - 1)c_1x \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} ((2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1)c_n - c_{n-2})x^n = 0 \\
\Leftrightarrow (2r(r-1) + 3r - 1)c_0 = 0 \Rightarrow 2r(r-1) + 3r - 1 = 0 & \quad \text{Karaktäristiska ekvation, lös för } r: \\
r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = -1
\end{aligned}$$

Nu har vi kommit fram till vad  $r$  måste vara, nu behöver vi hitta  $c_n$ . Betraktar vi andra termen har vi:

$$(2(1+r)r + 3(1+r) - 1)c_1 \neq 0 \text{ för } r_1 \text{ eller } r_2, \text{ alltså } c_1 = 0$$

Nu vill vi kolla för summan, vi får:

$$(2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1)c_n - c_{n-2} = 0$$

Det vi vill göra är att få fram en differensekvation för  $c_n$ . Om  $(2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1) \neq 0$ . Då kan vi dela bort den så att vi får:

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{(2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1)}$$

Hur vet vi att vi kan dela bort den? Jo för att  $\underbrace{(2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1)}_{\text{karaktäristiska ekvationen med } n+r \text{ istället för } r}$  och vi vet att  $n \geq 2$  (se täljare). Det vi vill göra nu är att hitta 2 linjärt oberoende lösningar. Vi har 2 rötter  $r_1$  och  $r_2$ , så vi delar upp det i 2 fall:

**Fall 1:**  $r = r_1 = \frac{1}{2}$

Sätt in  $r_1$  i differensekvationen för  $c_n$ . För att inte förvirra oss så kommer vi kalla koefficienterna för  $a_n$ . Vi får:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{2n^2 + 3n} \quad n \geq 2$$

Vi har då:

- $a_0$
- $a_1 = 0$
- $a_n = \frac{a_{n-2}}{2n^2 + 3n}$

Vi kan räkna ut några  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \text{ för alla udda } n \\
a_2 &= \frac{a_0}{14}, \quad a_4 = \frac{a_2}{44} = \frac{a_0}{616}
\end{aligned}$$

Vi har alltså att serien

$$y_1 = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

är en lösning!

**Fall 2:**  $r = r_2 = -1$

Vi kallar koefficienterna här för  $b_n$ . Vi får

$$b_n = \frac{b_{n-2}}{2n^2 - 3n} \quad n \geq 2$$

Återigen har vi  $b_1 = 0$  och  $b_0 =$  fri konstant. Vi får:

$$y_2 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Sammanfogar vi fallen får vi att den generella lösningen är:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Här funkade allt väldigt bra och smidigt, men det kan uppstå problem. Vi kan få 2 problem:

- Dubbelrot - löses likt Eulerekvation
- Vi kan få division med noll i differensekvationen. Händer om  $r_1 = r_2 + N \quad N \in \mathbb{Z}$

### Sats 13.1

Betrakta ODE:n

$$x^2 y'' + x(xp(x))y' + x^2 q(x)y = 0$$

Antag att  $x = 0$  är en reguljär singular punkt. Då ges  $xp(x)$  och  $x^2 q(x)$  av potensserier:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

för  $|x| < \rho$  där  $\rho$  är  $\leq$  konvergensradien för de två serierna.

Låt  $r_1, r_2$  vara rötter till indikalekvationen  $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$  (notera, samma som för Eulerekvation).

Antag att  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  och  $r_1 \leq r_2$ .

Då har vi i intervallen  $(-\rho, 0)$  och  $(0, \rho)$  en lösning på formen

$$y_1 = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0$$

För den andra (linjärt oberoende lösning) får vi 3 fall:

- $r_1 \neq r_2 \quad r_1 \neq r_2 + N$  för  $N \in \mathbb{N}$

Då är  $y_2$ :

$$|x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad b_0 \neq 0$$

- $r_1 = r_2$  ger:

$$y_2 = y_1 \log(|x|) + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

- $r_1 = r_2 + N \quad N \in \mathbb{N}$  ger:

$$y_2 = a y_1 \log(|x|) + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

där  $a$  är konstant som kan vara 0.

Kommentar: alla serier konvergerar för  $|x| < \rho$  och mängden  $\{y_1, y_2\}$  ger en fundamental lösningsmängd

Satsen säger inte mycket om hur man hittar  $a_n$  eller  $b_n$ , men de går att bestämma genom insättning vilket kan vara mer eller mindre krångligt.

Beviset liknar metoden för det introducerande exemplet för metoden men mer generellt.

### Bevis 13.1: Beviskiss - Frobenius metod

För att visa att  $y_1$  är en lösning gör man som i exemplet.

För  $y_2$  kan man göra samma ansats, men man stöter på problem om  $r_1 = r_2$  eller  $r_1 = r_2 + N$ . Hur gör man i de fallen? Man kan använda reduktion av ordning.

Kommentar: Om  $r_1, r_2$  är komplexa så fungerar samma ansats, men du får komplexa koefficienter. Man kan få fram reella lösningar på samma sätt som vi gjorde för Eulerekvationerna, men detta kommer inte diskuteras vidare □

Ett problem är att kontrollera sin lösning eftersom man får en potensserielösning. Detta gör att Dahne inte är lika **hård** om man missar tecken. Denna metod är även väldigt mekanisk så en dator kan göra det. Det finns några program/paket för att göra det vilket ger en taylorlösning.