Övningar till lektion 3 och 4

Normalformer, logisk konsekvens, sundhet och fullständighet inom satslogiken

1. Låt signaturen vara $\sigma = \{p, q, r\}$. För var och en av formlerna nedan, finn en *disjunktiv normalform* (DNF) samt en *konjunktiv normalform* (KNF) som är ekvivalent med formeln. för var och en av följande formler i $LP(\sigma)$ där $\sigma = \{p, q, r\}$:

   (a) $p \vee \neg(q \vee \neg r)$

   (b) $\neg(p \leftrightarrow q)$

   (c) $((p \to q) \to q) \to q)$

   (d) $\perp$

   (e) $(p \leftrightarrow (\neg q \to r)) \;\to\; \neg((\neg q \vee r) \vee \neg p)$

2. Låt σ vara vilken signatur som helst. Visa att för varje $\varphi \in LP(\sigma)$ så finns formler $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in LP(\sigma)$ sådana att var och en av ψ_1, ψ_2 och ψ_3 är ekvivalent med φ och

   (a) ψ_1 innehåller endast konnektiven $\neg$ och eller $\wedge$.

   (b) ψ_2 innehåller endast konnektiven $\neg$ och eller $\vee$.

   (c) ψ_3 innehåller endast konnektiven $\neg$ och eller $\to$.

   Du kan använda faktumet att för varje $\varphi \in LP(\sigma)$ så finns en DNF (alternativt KNF) som är ekvivalent med φ, samt kända ekvivalenser (som du finner i boken) som anger hur vissa konnektiv kan uttryckas med hjälp av andra.

3. Låt σ vara vilken icketom signatur som helst. Beskriv en formel $\varphi \in LP(\sigma)$ sådan att ingen formel som är uppbygd endast med konnektiven $\vee$ och/eller $\wedge$ är ekvivalent med φ. Förklara varför din formel har denna egenskap.

4. Låt σ vara vilken signatur som helst och låt $\star$ vara ett konnektiv med följande sanningsvärdestabell.

p	q	$(p \star q)$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	S

   Är följande sant? För varje $\varphi \in LP(\sigma)$ så finns en formel som är ekvivalent med φ och uppbyggd endast med konnektivet $\star$. Bevisa påståendet eller ge ett motexempel.

5. Låt σ vara en signatur, $\Gamma \subseteq LP(\sigma)$ och $\varphi \in LP(\sigma)$.

   (a) Förklara vad som menas med att φ är en (logisk) konsekvens av Γ.

   (b) Förklara vad som menas med $\Gamma \models_\sigma \varphi$.

   (c) Förklara vad som menas med $\models_\sigma \varphi$.

   Om signaturen σ är given av sammanhanget eller irrelevant för resonemanget så skriver vi ofta $\models$ i stället för $\models_\sigma$. Om $\Gamma = \{\psi\}$ (dvs om Γ bara innehåller formeln ψ) så kan vi skriva $\psi \models \varphi$ i stället för $\{\psi\} \models \varphi$.

6. Formulera sundhetssatsen för satslogik.

7. Formulera fullständighetssatsen för satslogik.

   Antag att $A, B, C \in LP(\sigma)$ för någon signatur σ. Antag också att både A, B och C kan anta båda sanningsvärdena (sant/falskt) oberoende av varandra. Avgör om följande stämmer. (Tips: sundhetssatsen/fullständighetssatsen.)

8. $\neg A \vee \neg B \vdash \neg A \to B$

9. $\neg A \wedge B \vdash \neg A \to \neg B$

10. $\{A,\ \neg A \leftrightarrow B\} \vdash B \vee C$

11. $\{A \vee \neg C,\ C \vee \neg B\} \vdash A \vee \neg B$

12. Vilka av de fyra sista sekventerna stämmer om vi antar att A är en tautologi, men inte B?

13. Vilka av de fyra sista sekventerna stämmer om vi antar att B är en tautologi, men inte A?

    Antag att $\varphi, \psi, \gamma, \delta \in LP(\sigma)$ för någon signatur σ. Antag också att φ, ψ, γ och δ kan anta båda sanningsvärdena oberoende av varandra. Avgör om följande stämmer. Om det stämmer, så utför beviset i naturlig deduktion. Om det inte stämmer, så motivera varför. (Tips: sundhetssatsen/fullständighetssatsen.)

14. $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \gamma$

15. $(\varphi \vee \psi) \wedge \gamma \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$

16. $\varphi \vee \psi \vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow \psi$

17. $\varphi \longrightarrow (\psi \wedge \sigma) \vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \wedge \sigma$

18. $\varphi \longrightarrow (\psi \vee \sigma) \vdash (\varphi \longrightarrow \psi) \vee \sigma$

19. $\{(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow \gamma,\ \neg\gamma,\ (\varphi \longrightarrow \delta) \vee \psi\} \vdash \delta$

20. (Svår) Visa sundhetssatsen i fallet då vi har endast formler med konnektiven $\neg$ och $\to$ (och därmed endast bevisregler för dessa två konnektiv).

21. Översätt följande till satslogiska formler, och avgör sedan om resonemanget är logiskt giltigt. Dvs är slutsatsen en logisk konsekvens av premisserna? Du får själv välja en lämplig signatur σ.

    (a) Om jag är i Paris så är jag i Frankrike, och om jag är i Geneve så är jag i Schweiz.
    Härav följer att om jag är i Paris så är jag i Schweiz eller att om jag är i Geneve så är jag i Frankrike.

    (b) Om 2 är ett primtal så är det det minsta primtalet.
    Om 2 är det minsta primtalet så är 1 inte ett primtal.
    Talet 1 är inte ett primtal.
    Härav följer att 2 är ett primtal.