UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

TENTAMEN
Logik och bevisteknik
2019-08-22

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: pennor, radergummi, linjal, papper (det sistnämnda tillhandahålles). ***Alla svar (utom till uppgift 6) måste motiveras på lämpligt sätt.*** Om man har fått minst 10, respektive minst 15, poäng på duggan (2019-04-26) så får man uppgifterna 1–2, respektive 1–3, tillgodoräknade (dvs man får full poäng på dem utan att behöva lösa dem). Maximalpoängen är 40. För att få betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 20, 26 respektive 32 poäng.

1. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (4p)

(a) $\{\varphi,\ (\varphi \wedge \psi) \to \chi\} \ \vdash\ \psi \to \chi$.

(b) $\{\varphi,\ (\varphi \wedge \psi) \to \chi,\ \neg\chi\} \ \vdash\ \neg\psi$.

2. Vi antar att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. Finn en KNF, alltså en *konjunktiv* normalform, som är ekvivalent med formeln $(p \to q) \to (q \wedge (p \vee r))$ och glöm inte att visa hur du har kommit fram till din KNF. (2p)

3. Som i föregående uppgift antar vi att p, q och r tillhör en satslogisk signatur.

(a) Är $p \vee (q \wedge r)$ en logisk konsekvens av $(p \to q) \to (q \wedge (p \vee r))$?

(b) Är $p \vee (q \wedge r)$ och $(p \to q) \to (q \wedge (p \vee r))$ ekvivalenta?

Notera att ena formeln är samma som i uppgift 2 (detta kan spara lite arbete). (3p)

4. Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; R\rangle$ vara en första ordningens signatur där R är en relationssymbol med ställighet 2. Låt $\mathcal{A} = \langle D;\ ;\ ; R^{\mathcal{A}}\rangle$ och $\mathcal{B} = \langle D;\ ;\ ; R^{\mathcal{B}}\rangle$ vara σ-strukturer där

$$D = \{1,2,3,4\},$$
$$R^{\mathcal{A}} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(4,3)\}, \quad \text{och}$$
$$R^{\mathcal{B}} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,4),(3,3)\}.$$

Besvara följande frågor och motivera dina svar: (4p)

(a) Är satsen $\exists x\big(R(x,x) \wedge \exists y \exists z\big(\neg(y = x) \wedge \neg(z = x) \wedge R(y,x) \wedge R(x,z)\big)\big)$ sann i $\mathcal{A}$?

(b) Är satsen $\exists x\big(R(x,x) \wedge \exists y \exists z\big(\neg(y = x) \wedge \neg(z = x) \wedge R(y,x) \wedge R(x,z)\big)\big)$ sann i $\mathcal{B}$?

5. Låt A och B vara 1-ställiga relationssymboler. (5p)

(a) Ge en härledning i naturlig deduktion för följande sekvent:

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \neg\forall x(A(x) \to \neg B(x)).$$

(b) Är $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ och $\neg\forall x(A(x) \to \neg B(x))$ ekvivalenta? Motivera svaret.

6. Låt S och L vara 1-ställiga relationssymboler och låt D vara en 2-ställig relationssymbol. Vi tänker oss i denna uppgift att objekten som vi pratar om är städer, att $S(x)$ uttrycker att "x är (en) stor (stad)", att $L(x)$ uttrycker att "x är (en) liten (stad)", och att $D(x,y)$ uttrycker att "det finns ett direktflyg från x till y". (Med "direktflyg från x till y" menar jag att man kan flyga från x till y utan att byta flygplan.) Ange, med de angivna relationssymbolerna, satser i första ordningens logik som uttrycker samma sak som följande påståenden: (6p)

Fortsätter på nästa sida

(a) Ingen stad är både stor och liten.

(b) Från varje stor stad finns direktflyg till alla andra stora städer.

(c) Från varje liten stad kan man flyga till alla andra små städer med högst två byten av flygplan.

7. Låt R vara en 2-ställig relationssymbol och låt

$$\begin{aligned}
&\alpha \text{ vara } \forall x \forall y \forall z\big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\big),\\
&\beta \text{ vara } \forall x \forall y \exists z\big(R(x,z) \wedge R(y,z)\big),\\
&\gamma \text{ vara } \forall x \neg R(x,x),\\
&\delta \text{ vara } \exists x \forall y\big(\neg(x=y) \rightarrow R(y,x)\big), \text{ och}\\
&\varepsilon \text{ vara } \neg \exists x \exists y\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big).
\end{aligned}$$

För var och en av sekventerna nedan avgör om den stämmer. Om den stämmer så ska du, för full poäng, ange en härledning i naturlig deduktion för den. Om den inte stämmer så ska det motiveras med resultat och/eller metoder från kursen. (6p)

(a) $\{\alpha, \beta\} \vdash \delta$.

(b) $\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\} \vdash \neg\delta$.

8. Låt p, q, r, s, t tillhöra en satslogisk signatur. Låt

$$T = \{(\neg q \wedge r) \rightarrow s,\ (r \wedge s) \rightarrow \neg t,\ (p \wedge q) \rightarrow t,\ (s \wedge q) \rightarrow p\}.$$

Vilka av följande semantiska sekventer stämmer? Svaren måste motiveras med resultat och/eller metoder från kursen. Det går att lösa uppgiften utan att skriva upp hela sanningsvärdestabellen för de inblandade formlerna (denna tabell har $2^5 = 32$ rader) och det är det som är själva poängen, för om ni försöker skriva upp hela tabellen så kommer ni sannolikt att göra fel någonstans (och dessutom ha väldigt långtråkigt). (4p)

(a) $T \cup \{s, q\} \models p \wedge t \wedge \neg r$.

(b) $T \cup \{\neg q, r\} \models s \wedge q$.

Kommentar: Mängden T påminner om ett logikprogram skrivet i exempelvis programmeringsspråket Prolog, och i respektive del ((a) och (b)) så motsvarar s, q, respektive $\neg q, r$, "input" som logikprogrammet får och som det ska dra slutsatser ifrån.

9. Låt $*$ vara en 2-ställig funktionssymbol och låt e vara en konstantsymbol. Jag kommer att beteckna termen $*(x,y)$ med $x * y$ (i likhet med att man brukar skriva $x + y$ i stället för $+(x,y)$). Betrakta följande tre satser:

$$\begin{aligned}
\forall x \forall y \forall z\big(x * (y * z) = (x * y) * z\big),\\
\forall x\big((x * e = x)\ \wedge\ (e * x = x)\big),\\
\forall x\big(\exists y(x * y = e)\ \wedge\ \exists z(z * x = e)\big).
\end{aligned}$$

Visa att ingen av de tre satserna är en logisk konsekvens av de två andra satserna. (6p)

Lycka till!

Logik och bevisteknik, 2019-08-22 (1)

Lösningsförslag.

1. (a)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi \quad \cancel{\psi}^{1}}{\varphi\wedge\psi}\,(\wedge I) \qquad (\varphi\wedge\psi)\to\chi}{\chi}\,(\to E)}{\psi\to\chi}\,(\to I)^{1}$$

(b)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi \quad \cancel{\psi}^{1}}{\varphi\wedge\psi}\,(\wedge I) \qquad (\varphi\wedge\psi)\to\chi}{\chi}\,(\to E) \qquad \neg\chi}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\psi}\,(\neg I)^{1}$$

2. Sanningsvärdestabell (där jag inte fyllt i alla kolumner).

p	q	r	$(p\to q)$	$\to$	$(q\wedge(p\vee r))$	formel som beskriver sann.värdestilldeln.
s	s	s	s	s	s	
f	s	s	s	s	s	
s	f	s	f	s	f	
s	s	f	s	s	s	
f	f	s	s	f	f	$\neg p\wedge\neg q\wedge r$
f	s	f	s	f	f	$\neg p\wedge q\wedge\neg r$
s	f	f	f	s	f	
f	f	f	s	f	f	$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$

Eftersom vi söker en KNF så väljer vi de rader där formeln är falsk och bildar konjunktionen av negationerna av formlerna som beskriver dessa raders sanningsvärden för p, q, r:

$$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad \text{eq}$$

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

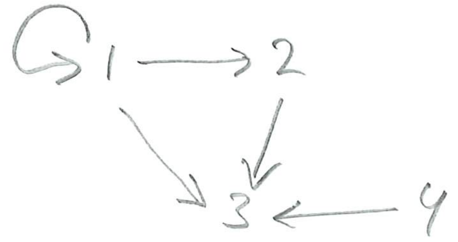
$$\wedge (p \vee q \vee r).$$

Den sista formeln är en KNF som är ekvivalent med den ursprungliga formeln.

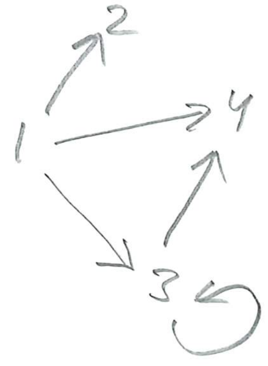
3. Svaret är 'ja' på både a- och b-delen. Genom att skriva upp sanningsvärdestabellen för $p \vee (q \wedge r)$ ser man att formeln satisfieras av exakt samma sanningsvärdestilldelningar som formeln i uppgift 2.

4. Strukturerna $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ kan illustreras så här:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Satsen uttrycker att det finns en "konfiguration" som ser ut så här:

I $\mathcal{B}$ finns en sådan konfiguration för vi kan välja $x = 3$, $y = 1$ och $z = 4$.

I $\mathcal{A}$ finns ingen sådan konfiguration. (För i $\mathcal{A}$ är 1 det enda elementet med en "loop" och från 1 finns ingen pil till något annat element.)

Alltså är svaret 'nej' till a-delen och 'ja' till b-delen.

5. (a)

$$\dfrac{\exists x(A(x)\land B(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A(y)\land B(y)}^{2}}{A(y)}(\land E) \quad \dfrac{\cancel{\forall x(A(x)\to\neg B(x))}^{1}}{A(y)\to\neg B(y)}(\forall E)}{\neg B(y)}(\to E) \quad \dfrac{\cancel{A(y)\land B(y)}^{2}}{B(y)}(\land E)}{\bot}(\neg E)}{\neg\forall x(A(x)\to\neg B(x))}(\neg I)^{1}}{\neg\forall x(A(x)\to\neg B(x))}(\exists E)^{2}$$

(b) Ja, $\exists x(A(x)\land B(x))$ och $\neg\forall x(A(x)\to\neg B(x))$ är ekvivalenta. Från a-delen och sundhetssatsen följer att den senare formeln är en logisk konsekvens av den första. Vi kan resonera så här för att visa att $\exists x(A(x)\land B(x))$ är en logisk konsekvens av $\neg\forall x(A(x)\to\neg B(x))$. Antag att $\mathcal{M}\models\neg\forall x(A(x)\to\neg B(x))$, så $\forall x(A(x)\to\neg B(x))$ är falsk i $\mathcal{M}$. Då finns något m i domänen till $\mathcal{M}$ så att $\mathcal{M}\not\models A(m)\to\neg B(m)$ vilket betyder att $\mathcal{M}\models A(m)\land B(m)$. Men då följer att $\mathcal{M}\models\exists x(A(x)\land B(x))$.

6. (a) $\neg \exists x (S(x) \wedge L(x))$ eller

$\forall x \neg (S(x) \wedge L(x))$ eller

$\forall x (S(x) \to \neg L(x))$ eller

$\forall x (L(x) \to \neg S(x))$.

(b) $\forall x (S(x) \to \forall y ((S(y) \wedge \neg(x=y)) \to D(x,y)))$

eller $\forall x \forall y ((S(x) \wedge S(y) \wedge \neg(x=y)) \to D(x,y))$

eller $\neg \exists x \exists y (S(x) \wedge S(y) \wedge \neg(x=y) \wedge \neg D(x,y))$.

(c) Även här finns olika varianter men jag skriver bara upp en:

$$\forall x \forall y ((L(x) \wedge L(y) \wedge \neg(x=y)) \to$$
$$(D(x,y) \vee$$
$$\exists z (D(x,z) \wedge D(z,y)) \vee$$
$$\exists z \exists u (D(x,z) \wedge D(z,u) \wedge D(u,y)))).$$

7.(a) $\{\alpha, \beta\} \vdash \delta$ stämmer <u>inte</u>. Enligt sundhetssatsen räcker det att visa att $\{\alpha, \beta\} \not\models \delta$. Som motexempel (till $\{\alpha, \beta\} \models \delta$) kan man ta $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; R^{\mathcal{N}} \rangle$ där $R^{\mathcal{N}} = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N} \text{ och } n < m\}$. Då gäller $\mathcal{N} \models \{\alpha, \beta\}$ men $\mathcal{N} \not\models \delta$.

7. (b) $\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\} \vdash \neg\delta$ stämmer.
Jag skriver '$x \neq y$' i stället för '$\neg(x=y)$'.

Obs! Jag har inte angivit vilka regler som används annat än i de "stora stegen". (Övning att lägga till det som fattas.)

$$\dfrac{\cancel{R(u,v)\wedge R(u,v)}^{2}}{R(u,v)} \qquad \dfrac{R(u,v) \quad \cancel{u=v}^{1}}{R(u,u)}\,(=E)$$

$$\dfrac{\dfrac{R(u,u)}{\exists x R(x,x)} \quad \neg\exists x R(x,x)}{\dfrac{\bot}{u \neq v}\,(\neg I)^{1}} \qquad \dfrac{\cancel{\forall y(u\neq y \to R(y,u))}^{3}}{u \neq v \to R(v,u)}$$

$$\dfrac{u \neq v \quad u \neq v \to R(v,u)}{R(v,u)} \qquad \dfrac{\cancel{R(u,v)\wedge R(u,v)}^{2}}{R(u,v)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(u,v) \quad R(v,u)}{R(u,v)\wedge R(v,u)}}{\exists y(R(u,y)\wedge R(y,u))}}{\exists x\exists y(R(x,y)\wedge R(y,x))} \qquad \dfrac{\neg\exists x\exists y(R(x,y)\wedge R(y,x)) \quad \exists x\exists y(R(x,y)\wedge R(y,x))}{\bot}$$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y\exists z(R(x,z)\wedge R(y,z))}{\forall y\exists z(R(u,z)\wedge R(y,z))}}{\exists z(R(u,z)\wedge R(u,z))}$$

$$\dfrac{\exists z(R(u,z)\wedge R(u,z)) \quad \bot}{\bot}\,(\exists E)^{2}$$

$$\dfrac{\cancel{\exists x\forall y(x\neq y \to R(y,x))}^{4} \quad \bot}{\bot}\,(\exists E)^{3}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg\exists x\forall y(x\neq y \to R(y,x))}\,(\neg I)^{4}$$

8. (a) $T \cup \{s, q\} \models p \wedge t \wedge \neg r$ stämmer. (7)

Motivation: Från $\{(s \wedge q) \to p, s, q\}$ får vi konsekvensen p.

Från $\{(p \wedge q) \to t, s, q, p\}$ får vi konsekvensen t.

Från $\{(r \wedge s) \to \neg t, s, q, p, t\}$ får vi konsekvensen $\neg r$, för om $(r \wedge s) \to \neg t$, s och t är sanna så måste r vara falsk.

Det följer att $T \cup \{s, q\} \models p \wedge t \wedge \neg r$.

(b) Om alla formler i $T \cup \{\neg q, r\}$ är sanna så måste q vara falsk och då är även $s \wedge q$ falsk.

Så $T \cup \{\neg q, r\} \models s \wedge q$ stämmer <u>inte</u>.

9. Jag namnger satserna så här: (8)

φ : $\forall x \forall y \forall z (x * (y * z) = (x * y) * z)$,

ψ : $\forall x ((x * e = x) \wedge (e * x = x))$,

χ : $\forall x (\exists y (x * y = e) \wedge \exists z (z * x = e))$.

Påstående: $\{\varphi, \psi\} \not\models \chi$.

Motivation: Låt $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} ; e^{\mathcal{A}} ; *^{\mathcal{A}} \rangle$ där $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $e^{\mathcal{A}} = 0$ och $n *^{\mathcal{A}} m = n + m$ där '+' är addition. Då gäller $\mathcal{A} \models \{\varphi, \psi\}$ men $\mathcal{A} \not\models \chi$.

Påstående: $\{\varphi, \chi\} \not\models \psi$.

Motivation: Låt $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z} ; e^{\mathcal{B}} ; *^{\mathcal{B}} \rangle$ där $\mathbb{Z}$ är mängden av alla heltal, $e^{\mathcal{B}} = 1$ och $n *^{\mathcal{B}} m = n + m$ där '+' är addition. Då gäller $\mathcal{B} \models \{\varphi, \chi\}$ men $\mathcal{B} \not\models \psi$.

9

Påstående: $\{\psi, \chi\} \nvDash \varphi$.

Motivation: Låt $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z} ; e^{\mathcal{C}} ; *^{\mathcal{C}} \rangle$
där $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $e^{\mathcal{C}} = 0$
och $m *^{\mathcal{C}} n = |m - n|$ = absolutbeloppet
av $m - n$ där '$-$' är subtraktion.
Då gäller $\mathcal{C} \vDash \{\psi, \chi\}$ men $\mathcal{C} \nvDash \varphi$.