

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar*. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5

Skrivtid: 14.00-19.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x \ln(1 + x^2)}.$$

2. Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}, \quad x > 0.$$

Finns det någon lösning som är definierad för alla $x > 0$?

3. Beräkna integralerna

$$\text{a) } \int_{1/e}^1 \frac{\ln^2 x}{x} dx. \qquad \text{b) } \int_0^1 x^2 \ln^2 x dx.$$

4. Skissera kurvan

$$y = \frac{(x-1)^3}{x^2} = x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Undersök särskilt definitionsområdet, nollställen samt eventuella lokala extrempunkter, vertikala, horisontella och sneda asymptoter samt inflexionspunkter.

Ledning: $y' = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}, \quad y'' = \frac{6(x-1)}{x^4}.$

5. Bestäm det största värdet av funktionen

$$f(x) = x^2 \ln^2 x, \quad 0 < x \leq 1.$$

Motivera noggrant.

6. Parablerna

$$y = (x-1)^2 + 1 \quad \text{och} \quad y = -(x+1)^2 - 5$$

har två gemensamma tangenter. Bestäm tangeringspunkterna på parablerna för respektive tangent.

V.G.V!

7. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}. \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$$

8. Antag att funktionen f är deriverbar för $x > 0$ och att gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = B$$

båda existerar (och är ändliga). Visa att $B = 0$.

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$