Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Beräkningsvetenskap

Lösningar Tentamen i Beräkningsvetenskap I, 2018-05-29

Del A

1. (a) Skriv om ekvationen till $f(x) = 0$, dvs $f(x) = e^{2x} - 3(x+1)$. Kolla ändintervallen, $f(0.7) = -1.0448$ och $f(1.0) = 1.3891$. Iterera med bisektionsmetoden:

```
I0=[0.7 1.0],    x0=0.85,   f(x0)=-0.0761
I1=[0.85 1.0],   x1=0.925,  f(x1)=0.5848
I2=[0.85 0.925], x2=0.8875, |x2-x1|=0.0375<0.05 OK!
```

   (b) Den övre feluppskattningen halveras i varje iteration (felet är mindre än halva intervallet). Vi får då att $\frac{(1.0-0.7)}{2^k} < 0.5 \cdot 10^{-12}$ där k är antalet iterationer. Detta ger att $k > log(\frac{0.3}{0.5 \cdot 10^{-12}})/log(2) = 39.1262$, dvs 40 iterationer krävs.

② GIVET

t	16	18	22	24
T	23,4	21,9	18,0	16,9

- ANSATS: $T(t) = a + b(t-20)$
- SÄTT IN PUNKTER I ANSATSEN:

$$\begin{cases} a + b(16-20) = 23.4 \\ a + b(18-20) = 21.9 \\ a + b(22-20) = 18.0 \\ a + b(24-20) = 16.9 \end{cases}$$ ⇐ ÖVERBESTÄMT SYSTEM!

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 23.4 \\ 21.9 \\ 18.0 \\ 16.9 \end{bmatrix}}_{y}$$

- MULTIPLICERA MED A^T FRÅN VÄNSTER
⇒ NORMALEKVATIONERNA $A^TAx = A^Ty$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23.4 \\ 21.9 \\ 18.0 \\ 16.9 \end{bmatrix}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.2 \\ -33.8 \end{bmatrix}$$

- LÖS SYSTEMET:

$$a = \frac{80.2}{4} = 20.05$$

$$b = \frac{-33.8}{40} = -0.845$$

- INSÄTTES I ANSATS:

$$T(t) = 20.05 - 0.845(t-20)$$

- EVALUERA I $t = 23$:

$$T(23) = 20.05 - 0.845(23-20) = 17.515$$

TEMPERATUREN VAR CA 17.5 °C KL 23.00.

3

(1) Newton-Raphsons metod är ett exempel på en iterativ metod.

(2) Bisektionsmetoden har konvergensordning 1.

(3) Vid addition av två mycket stora flyttal finns det risk för overflow.

(4) Simpsons metod har högre noggrannhetsordning än trapetsmetoden

(5) Runges fenomen innebär att interpolation med polynom av hög grad leder till kraftiga svängningar mellan interpolationspunkterna.

(6) Vid subtraktion av två jämnstora flyttal uppstår kancellation.

4. (a) Simpsons formel ger: $I_s(0.1) = \frac{0.1}{3}(35 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 55 + 4 \cdot 55 + 45) = 19$

   (b) Beräkna integralen med dubbla steglängden $I_s(0.2) = \frac{0.2}{3}(35 + 4 \cdot 55 + 45) = 20$
   Diskretiseringfelet ges då av $R_s(0.1) = \frac{I_s(0.1) - I_s(0.2)}{15} = -1/15$.
   Funktionsfelet pga fel i mätvärdena blir $E_f \leq \varepsilon \cdot (b - a) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$

   För att få ett totalt fel mindre än 10^{-2} måste både funktionsfelet och diskretiseringsfelet minskas. Om vi halverar steglängden minskar diskretiseringsfelet med en faktor 16 vilket ger $|R_s(0.05)| \approx (1/15)/16 = 0.0042$. Om vi mäter med 2 decimalers noggrannhet, dvs med en noggrannhet $|\tilde{v}(t) - v(t)| \leq 0.005$ får vi ett funktionsfel $E_f \leq 0.005 \cdot 0.4 = 0.002$ och ett totalt fel $\leq 0.0042 + 0.002 = 0.0062 < 0.01$.

5 a $y = foo(3,2)$

IN I FUNKTIONEN MED $x=3$ OCH $n=2$

$i=1$

$d=3$

WHILE-LOOP:

$1<2$ SANT $\Rightarrow$ IN I LOOPEN

IF-SATS:

$3<1$ FALSKT $\Rightarrow$ VIDARE TILL ELSE-GREN

$i = i+1 = 1+1 = 2$

$d = d-1 = 3-1 = 2$

$2<2$ FALSKT $\Rightarrow$ AVBRYT LOOPEN

SLUT PÅ FUNKTIONEN SOM RETURNERAR $d=2$

$\Rightarrow y = 2$

b SKRIV PÅ FORMEN $f(x)=0$:

$f(x) = e^{2x} - 3(x+1)$

MATLABSKRIPT MED LOKAL FUNKTION FÖR $f(x)$:

```
x = fzero(@fun,[0.7 1])

function f = fun(x)
   f = exp(2*x) - 3*(x+1);
end
```

⑥ GIVET

x	-1	0	1
y	1	0	2

SÖKER $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ SÅ ATT

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & -1 \le x \le 0 \\ p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

INTERPOLERAR PUNKTERNA, $p_1'(0) = p_2'(0)$, $p'(1) = p_2'(1) = 0$

INTERPOLATIONSVILLKOR:

$$\begin{cases} p_1(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ p_1(0) = a_0 = 0 \\ p_2(0) = b_0 = 0 \\ p_2(1) = b_0 + b_1 + b_2 = 2 \end{cases}$$

NOTERA ATT $p_1'(x) = a_1 + 2a_2 x$ OCH $p_2'(x) = b_1 + 2b_2 x$

VILLKOR PÅ DERIVATAN:

$$\begin{cases} p_1'(0) = p_2'(0) \Rightarrow a_1 = b_1 \\ p_2'(1) = b_1 + 2b_2 = 0 \end{cases}$$

ANVÄND VILLKOREN $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ OCH $a_1 = b_1$ GER EKVATIONSYSTEM

$$\begin{cases} -b_1 + a_2 = 1 & (A) \\ b_1 + b_2 = 2 & (B) \\ b_1 + 2b_2 = 0 & (C) \end{cases}$$

$(C) - (B) \Rightarrow b_2 = -2$

$(B) \Rightarrow b_1 = 4$

$(A) \Rightarrow a_2 = 5$

$$\Rightarrow p(x) = \begin{cases} 4x + 5x^2 & -1 \le x \le 0 \\ 4x - 2x^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

VERIFIKATION:

$p(-1) = -4 + 5 = 1$ OK!

$p(0) = 0$ OK!

$p(1) = 4 - 2 = 2$ OK!

$p_1'(0) = 4 = p_2'(0)$ OK!

$p'(1) = p_2'(1) = 4 - 4 \cdot 1 = 0$ OK!

7. För att kunna beräkna integralen $V = \int_0^{0.2} \pi \cdot r(x)^2 dx$ måste vi först lösa ut r för ett antal diskreta punkter x_i ur ekvationen $r^2 \sin(2\pi(x + 0.1r) = 1$. Det kan vi göra med Newton-Raphsons metod. För $x_0 = 0$ har vi givet vad lösningen är och vi kan då använda det som en startgissning för att hitta nästa r, dvs $r(x_1)$, vilket sedan används som startgissning för att hitta $r(x_2)$, osv. Det är viktigt att vi väljer en bra startgissning till Newton-Raphson så att vi plötsligt inte får en annan lösning till ekvationen och får en diskontinuitet i r. När vi har alla $r(x_i)$ kan vi beräkna integralen med Simpsons metod. Algoritmen kan sammanfattas i följande Matlabkod:

```
dx=0.001; x=0:dx:0.2;
f=@(r,x)(r^2*sin(2*pi*(x+0.1)*r)-1);
r0=1.2061617; tol=1e-6;
for i=1:length(x)
   r(i)=Newton_Raphson(@(r)f(r,x(i)),r0,tol);
   r0=r(i);
end
y=pi*r.^2;
V=dx/3*(y(1)+4*sum(y(2:2:end-1))+2*sum(y(3:2:end-2))+y(end));

Lösning ger att volymen blir V=0.6962.
```

Feluppskattningen får man genom att man vet att Newton-Raphson konvergerar till en noggrannhet mindre än feltoleransen, dvs felet $|x^* - x_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \leq tol$. Då vet vi att felet i varje beräkning av r är mindre än den givna toleransen. Vi kan skriva $r = \bar{r} + \varepsilon$ där $\bar{r}$ är det exakta värdet och ε felet i r. Insatt i integralen får vi $\int_0^{0.2} \pi(\bar{r} + \varepsilon)^2 dx = \int_0^{0.2} \pi\bar{r}^2 dx + \int_0^{0.2} 2\varepsilon\pi\bar{r} dx + \int_0^{0.2} \pi\varepsilon^2 dx$. Vilket ger att funktionsfelet blir (försumma ε^2-termen): $E_f \approx \int_0^{0.2} 2\varepsilon\pi r dx \leq \int_0^{0.2} tol \cdot 2\pi r dx$. Integralen kan bestämmas numeriskt med Simpsons metod. Diskretiseringsfelet får man genom att beräkna integralen med dubbla steglängden och därefter beräkna $R_s(dx) = \frac{I_s(dx) - I_s(2dx)}{15}$. Totala felet blir slutligen $E_{tot} \leq |R_s(dx)| + |E_f|$.