

UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR VT22

# Logik och Bevisteknik

*Rami Abou Zahra*

## CONTENTS

|   |    |
|---|----|
| 1. Föreläsning - Introduktion till Satslogik          | 3  |
| 1.1. Historia   | 3  |
| 1.2. Vad behövs för ett matematiskt bevis?            | 3  |
| 1.3. Exempel  | 3  |
| 1.4. Satslogik  | 4  |
| 1.5. Predikatlogik (1:a ordningens logik)             | 4  |
| 2. Satslogik (Propositional calculus)                 | 5  |
| 2.1. Språk (LP)                                       | 5  |
| 2.2. Exempel  | 5  |
| 3. Föreläsning - Naturlig deduktion (syntax)          | 6  |
| 3.1. Parantesers roll                                 | 6  |
| 3.2. Syntax   | 6  |
| 3.3. Naturlig deduktion                               | 7  |
| 4. Förtydligande                                      | 8  |
| 4.1. Sanningstabeller                                 | 9  |
| 5. Föreläsning - Naturlig deduktion forts.            | 10 |
| 5.1. Botten ( $\perp$ )                               | 10 |
| 6. Semantik för satslogik                             | 11 |
| 7. Logisk ekvivalens och konsekvens                   | 13 |
| 7.1. Logisk ekvivalens                                | 13 |
| 7.2. Exempel  | 13 |
| 7.3. Några viktiga ekvivalenser                       | 13 |
| 7.4. Logisk konsekvens                                | 14 |
| 7.5. Exempel  | 14 |
| 7.6. Exempel  | 14 |
| 7.7. Algoritm för att avgöra $\Gamma \models \varphi$ | 14 |
| 7.8. Exempel  | 14 |
| 7.9. Exempel  | 15 |
| 7.10. Kommentar                                       | 15 |
| 8. Substitution                                       | 16 |
| 8.1. Exempel  | 16 |
| 8.2. Normalformer                                     | 17 |
| 9. Funktionellt kompletta mängder av konnektiv        | 19 |
| 9.1. Användning av sundhetssatsen                     | 20 |
| 10. Dugga 2021-04-13                                  | 22 |
| 11. Sammanfattning - Kapitel 2-5                      | 23 |
| 11.1. Kapitel 2                                       | 23 |
| 11.2. Kapitel 3 - Semantik                            | 24 |
| 12. Predikatlogik - Första ordningens logik           | 25 |
| 12.1. Relationer                                      | 25 |
| 12.2. Funktioner                                      | 26 |
| 12.3. Strukturer                                      | 26 |
| 12.4. Språk för predikatlogik (1:a ordningens logik)  | 26 |
| 13. Predikatlogik - Forts.                            | 28 |
| 13.1. Fria och bundna förekomster av variabler        | 28 |
| 13.2. Variabelsubstitution                            | 28 |
| 14. Semantik för 1:a ordningens logik                 | 30 |
| 14.1. Tolkning av slutna termer i $\mathcal{A}$       | 30 |
| 14.2. Tolkning av slutna formler                      | 31 |
| 15. Föreläsning -                                     | 32 |
| 15.1. Logisk konsekvens                               | 32 |
| 16. 1:a ordningen semantik och Naturlig deduktion     | 34 |
| 16.1. Prenex Normalform                               | 35 |
| 17. 1:a ordningens naturlig deduktion                 | 37 |
| 18. Fullständighet i 1:a ordningens logikk            | 38 |
| 18.1. Repetition från satslogiken                     | 38 |
| 18.2. Sundhetssatsen                                  | 38 |

|       |                                  |    |
|-------|----------------------------------|----|
| 18.3. | Adekvathetssatsen                | 38 |
| 18.4. | Tillämpning av Kompakthetssatsen | 39 |

## 1. FÖRELÄSNING - INTRODUKTION TILL SATSLOGIK

1.1. **Historia.** Vad är ett matematiskt bevis?

Vad får användas i bevis?

Är matematiken motsägelsefri (Konsistent = motsägelsefritt)?

1.2. **Vad behövs för ett matematiskt bevis?**

- Ett påstående (även kallad utsaga) (ex.vis  $\sqrt{2}$  är irrationellt), dessa har sanningsvärde *sant* eller *falskt*
- (Giltigt) Argument (resonemang)

1.3. **Exempel.**

- Påstående: *Varje kvadrat är en rektangel*
- Påstående: *Det finns en fyrhörning som inte är en rektangel*

---

Alltså finns en fyrhörning som inte är kvadrat

Detta är syftet med kursen, låt oss nu göra det mer abstrakt. (Låt  $x$  vara form,  $K(x)$  kvadrat,  $R(x)$  rektangel,  $F(x)$  fyrhörning) Då blir påståenden:

- $\forall x(K(x) \Rightarrow R(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge \neg R(x))$

---

$\exists x(F(x) \wedge \neg(K(x)))$

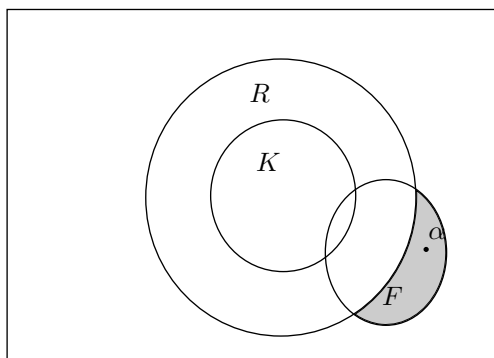


FIGURE 1. Grafisk tolkning

**Sats 1.1: Logiskt giltighet (Predikat-logik = 1:a ordningens logik)**

En följd av logiska steg kallas för *logiskt giltig* om det gäller  $\forall$  tolkningar av  $K, R, F$  (även vovvisar)

#### 1.4. Satslogik. Vi behöver:

- Ett skriftligt språk (mängd av teckensträngar som betyder utsagor/satser)
- Regler/Formella bevis (Hur får man dra slutsatser av nya teckensträngar), *syntax*
- Tolka teckensträngarna i en "verklighet" (sant eller falskt)

#### 1.5. Predikatlogik (1:a ordningens logik). Skiljer sig från satslogik i och med att vi inte hanterar satser utan predikaten.

- Språk behövs, liknande med teckenmängd men vi kan även hantera elementen
- Formella bevis består av teckensträngsmanipulation, relation mellan teckensträngar  
(Exvis  $A_1, A_2, A_3 \vdash B$  (A bevisar B))
- Vad betyder det att något är sant eller falskt? Om det går att visa B utan något så är det sant.

##### Sats 1.2: Definiera sanning i struktur

$\vdash B$  = Sant om det inte krävs något för att visa B:s sanningsvärde.

$A_1, A_2, A_3 \models B$  det vill säga om alla A krav är uppfyllda så gäller B

- Samband mellan  $\vdash$  (formell bevisbarhet) och  $\models$  (hur man tolkar något som sant eller falskt)

##### Sats 1.3: Sundhetssatsen

Detta säger att bevissystemet är sunt, allt man visar är sant

$A_1, A_2, A_3 \vdash B \Rightarrow A_1, A_2, A_3 \models B$

##### Sats 1.4: Adekvathet

Om det är så att B är sann så fort alla A är sanna så finns det ett bevis, vi kommer kunna påstå att det finns ett formellt bevis för samma sak.

$A_1, A_2, A_3 \models B \Rightarrow A_1, A_2, A_3 \vdash B$

##### Sats 1.5: Fullständighet

Slår vi ihop dessa 2 (Sundhetssatsen och Adekvathet) får vi fullständighet

$A_1, A_2, A_3 \vdash B \Leftrightarrow A_1, A_2, A_3 \models B$

## 2. SATSLOGIK (PROPOSITIONAL CALCULUS)

## 2.1. Språk (LP).

- Satssymboler:  $\sigma = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  (en *satslogisk signatur*, även kallas *språkets signatur*)

$LP(\sigma)$  kallas för en *dialekt* av LP

- Alfabet i  $LP(\sigma)$ :
  - Alla symboler i  $\sigma$
  - Konnektiver:  $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg, \perp$
  - Paranteser:  $(, )$

Viktigt att notera,  $\perp$  är konnektiv men även sats, så den skapar inga nya formler.

**Sats 2.1: Mängden av formler i  $LP(\sigma)$** 

Mängden definieras rekursivt (likt naturliga talen).

- Basfall:
  - Alla tecken i  $\sigma$  är en formel
  - $\perp$  är en formel
  - Dessa kallas för *Atomära* formler
- Induktion:
  - Om  $\varphi$  är en formel, så är  $(\neg\varphi)$  en formel
- Låt  $\Box$  vara konnektiv:
  - Induktion  $\Box$ :
    - \* Om  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  är formler, så är  $(\varphi_1\Box\varphi_2)$  en formel

2.2. Exempel. Några exempel på formler i  $LP(\sigma)$  där  $\sigma = \{p, q, r\}$ :

- $\perp, r, (p \Rightarrow (\neg r)), (p \vee (\neg p))$

Några som *inte* är formler:

- $(p \wedge, p \vee q \wedge r$  (inga paranteser!)

## 3. FÖRELÄSNING - NATURLIG DEDUKTION (SYNTAX)

## 3.1. Parantesers roll.

Exempel:  $p \rightarrow q \wedge r$ . Hur skall vi placera ut paranteser, och behåller det formelns sanningsvärde? Vad händer om vi skriver  $(q \wedge r)$  istället så att  $(p \rightarrow (q \wedge r))$ , eller motsatsen,  $(p \rightarrow q)$  så att  $((p \rightarrow q) \wedge r)$ .

Det finns en konvention som hjälper oss att hålla koll på var och när och hur många paranteser som behövs.

- Skriv inte ut yttersta paranteser
- $\neg$  binder starkare än  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 
  - $\neg p \wedge q$  betyder  $(\neg p) \wedge q$
- $\wedge, \vee$  binder starkare än pilarna  $\rightarrow, \leftrightarrow$ 
  - $p \wedge q \rightarrow r \vee s \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
- $\wedge, \vee$  binder lika hårt.
- $\rightarrow, \leftrightarrow$  binder lika hårt.
  - Ex:  $p \vee q \wedge r$  ej klart vad som menas, här måste paranteser placeras ut

Man kan formulera detta genom *parsingträd* där subnoderna *inte* får kommutera, detta kallas för att trädet är *ordnat*.

Ex:  $(p \wedge (\neg q))$

Ex:  $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow \perp))$ . Detta är en *pilformel* och då kallas det för ett *huvudkonnektiv*.

**Sats 3.1**

Det sist tillagda konnektivet i formeln (motsvarar högsta noden i trädet) kallas för *huvudkonnektiv*.

Varje formel har ett entydigt träd. Men också tvärtom, givet ett träd så kan vi "bygga upp" en entydig formel.

**Sats 3.2: Parsingträd**

Låt  $T$  stå för ett träd.  $T : LP(\sigma) \rightarrow \{\text{parsingträd}\}$ .

Vi definierar det induktivt, där basen är en  $p$  atom:  $T(p) = \bullet p$ . Sedan påbörjar induktionen:

- Om  $\varphi$  formel med träd  $T(\varphi)$ , så  $T((\neg\varphi)) = \text{fig}$ .
- Om  $\varphi$  och  $\phi$  formler med träd  $T(\varphi)$  resp  $T(\phi)$ , så  $T((\varphi \square \phi)) = \text{fig}$ .

**Sats 3.3: Delformel**

En *delformel* till en formel  $\varphi$  är en teckensträng från  $\varphi$  som själv är en formel, då är det en delformel. Den triviala delformeln är  $\varphi$  själv.

Exempel:  $\varphi = (p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \wedge p_4)$ . Då är exempelvis  $(p_2 \rightarrow p_3)$  en delformel eller  $\neg p_2$ . Däremot så är  $p_3) \wedge p_4$  *inte* en delformel. I parsingträdet så motsvarar varje nod en delformel.

## 3.2. Syntax.

Hur man kan dra slutsatser på ett syntaktiskt sett:

Om  $\Gamma$  är en mängd av formler och  $\varphi$  är en formel vill vi studera relationen mellan dessa. Följer  $\varphi$  av formlerna i  $\Gamma$ ?

Vi kommer studera denna frågan på 2 sätt, syntaktiskt och semantiskt.

- Syntax:
  - Formella bevisregler, tex.  $\frac{AB}{(a \wedge B)}$

- $\Gamma \vdash \varphi$ ,  $\Gamma$  bevisar  $\varphi$ , ”det finns ett bevis i naturlig deduktion som har slutsatsen  $\varphi$  vars premisser/antaganden kommer från  $\Gamma$ ”
- Teckensträngsmanipulation
- Naturlig deduktion
- Semantik:
  - Är  $\varphi$  sann om alla formler i  $\Gamma$  är sanna?
  - $\Gamma \models \varphi$

### 3.3. Naturlig deduktion.

För varje konnektiv som vi har kommer vi introducera 2 regler, en för att introducera konnektivet och en för att ta bort.

OBS! Reglerna i naturlig deduktion är *syntax*, det vill säga teckensträngsmanipulation. Alltså det spelar ingen roll vad som representeras, utan vilka regler som man får använda sig på dessa tecken. Eg.  $A \wedge B \neq B \wedge A$  eftersom den första har tecknet  $A$  på första platsen men det har inte den andra.

- $\wedge$  intro ( $\wedge I$ ). Om vi har teckensträng  $A$  och  $B$  så kan vi  $\frac{AB}{(A \wedge B)}$
- $\wedge$ -elimination.  $\frac{(A \wedge B)}{A}$  och  $\frac{(A \wedge B)}{B}$
- $\rightarrow$ -intro.  $A \cdots B$ , jag börjar med  $A$  och jobbar mig mot  $B$  S.T  $\frac{A:B}{(A \rightarrow B)}$ . Efter  $B$  får man dra vilken slutsats  $A \rightarrow B$  där  $A$  vilken formel som helst. Om  $A$  är en premiss ovanför  $B$  så får  $A$  strykas.
- $\rightarrow$ -elimination. Om  $A$  gäller och  $A \rightarrow B$  så vet vi att  $B$  gäller (Modus ponens). Vi får dra  $B$  som slutsats.
- $\vee$ -intro. Om jag vet  $A$ , då vet jag  $A$  eller  $B$ :  $\frac{A}{A \vee B}$
- $\vee$ -elimination. Om jag antar  $A$  skall jag kunna bevisa exakt teckensträng som om jag antar  $B$ .
- $\neg$ -intro. Antag  $A$  så att man kommer fram till formen  $\perp$  (botten kan tolkas som alltid falsk/motsägelse). Då får man dra slutsatsen  $\neg A$ . Här får man stryka premiss.
- $\neg$ -elimination. Om man har visat  $A$  och  $\neg A$  så får man dra slutsatsen  $\neg$  (ingen strykning).
- $\leftrightarrow$ -intro. Om  $A \rightarrow B$  och  $B \rightarrow A$  då kan vi skriva  $A \leftrightarrow B$ .
- $\leftrightarrow$ -elimination. Från  $A \leftrightarrow B$  får vi ”2 fall”,  $A \rightarrow B$  och  $B \rightarrow A$

Exempel: Vi vill göra ett bevisträd som har följande slutsats,  $(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$ . I detta träd kommer alla antaganden vara längst upp och slutsatser längst ner. Vi tittar på slutsatsen och märker att huvudkonnektivet är en pil, så vi kommer behöva använda pilintro. Då skall jag antag  $A$  och försöka härleda  $B \rightarrow (A \wedge B)$ , men då måste jag visa att  $B \rightarrow (A \wedge B)$  så vi måste anta  $B$  för att visa  $A \wedge B$  och nu kan jag visa det jag ville visa. Vi använder  $\wedge$ -intro. Per vårt antagande gäller  $A, B$  och därmed  $A \wedge B$ . Nu kan vi använda pil-elimination för att få bort pilen  $B \rightarrow (A \wedge B)$

#### Sats 3.4: Premiss

En *premiss* är en formel som ej är struken och förekommer högst upp i bevisträdet.

#### Sats 3.5: Slutsats

Formeln som står längst ner i bevisträdet.



## 4. FÖRTYDLIGANDE

**Sats 4.1: Disjunktion**

$A$  eller  $B$ . Uttrycker att minst en av  $A$  och  $B$  är fallet. Betecknas  $A \vee B$  där  $A, B$  kallas *disjunktionsled* eller *disjunkter*.

Det finns 2 typer av disjunktion, *uteslutande* och *icke-uteslutande*. Uteslutande disjunktion är helt enkelt  $A$  eller  $B$  (men inte båda) och icke-uteslutande är motsatt.

Disjunktionen är så kallad *inklusive*, det vill säga det är helt okej att både  $A$  och  $B$  är sann. Det finns en så kallad *exklusiv* disjunktion vilket kommer lite senare (kanske  $A \wedge B$ ?).

**Sats 4.2: Implikation**

Om  $A$  så  $B$  uttrycker att  $B$  är fallet givet att  $A$  är det. Detta betecknas  $A \rightarrow B$ . Här är  $A$  *antecedenten* eller även *förledet* och  $B$  är *konsekventen* eller *efterledet*. En implikation kallas också ivland en *materiell implikation*, *konditionalsats*, *villkorssats*.

Notera här att det kan bli lite klurigt med den näst sista raden i tabellen men! Antag att  $A$  är "jag bajsar" och  $B$  är "jag sitter ner". Om jag inte bajsar så implicerar det fortfarande att jag *kan* sitta ner, varpå implikationen fortfarande gäller.

**Sats 4.3: Ekvivalens**

$A$  omm  $B$  yttrycker konjunktionen av två implikationer, det vill säga om  $A$  så  $B$  oh om  $B$  så  $A$ . Skrivs  $A \leftrightarrow B$  och kallas även för *materiella ekvivalenser* eller *bikonditionalsatser*.

**Sats 4.4: Molekyler och Atomär**

En sats är *molekylär* om den är uppbyggd av en eller två andra satser med hjälp av ett konnektiv. I motsatt fall är satsen *atomär*. En molekylär sats innehåller minst ett konnektiv.

**Sats 4.5: n-ställig satsoperator**

En *n-ställig satsoperator* är en operator som "tar in"  $n$  variabler. Exempelvis är negationen  $\neg$  en 1-ställig operator, medan  $\wedge$  är en 2-ställig operator.

**Sats 4.6: Huvudoperator**

En *huvudoperator* är den operator som har tillämpats sist i uppbyggnaden av satsen. Exempelvis, i  $(A \rightarrow (B \vee \neg A))$  är  $\rightarrow$  huvudoperatoren. Däremot är  $\vee$  huvudoperatoren i delformen  $(B \vee \neg A)$ .

#### 4.1. Sanningstabeller.

För negation  $\neg$ :

$\neg A$  är sann  $\Leftrightarrow A$  är falsk  $\Leftrightarrow A$  inte är sann.

| A | $\neg A$ |
|---|----------|
| S | F        |
| F | S        |

För Konjunktion:

$A \wedge B$  är sann  $\Leftrightarrow A$  är sann och  $B$  är sann.

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| S | S | S            |
| S | F | F            |
| F | S | F            |
| F | F | F            |

För disjunktion:

$A \vee B$  är sann  $\Leftrightarrow A$  är sann eller  $B$  är sann  $\Leftrightarrow$  minst en av  $A$  och  $B$  är sann.

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| S | S | S          |
| S | F | S          |
| F | S | S          |
| F | F | F          |

För implikation:

$A \rightarrow B$  är sann  $\Leftrightarrow$  om  $A$  är sann så  $B$  är sann  $\Leftrightarrow A$  är falsk eller  $B$  är sann. (Tips, vad är sista sanningsvärdet, dvs sanningsvärdet på  $B$ ?)

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| S | S | S                 |
| S | F | F                 |
| F | S | S                 |
| F | F | S                 |

För ekvivalens:

$A \leftrightarrow B$  är sann  $\Leftrightarrow$  om  $A$  är sann så är  $B$  sann och om  $B$  är sann så är  $A$  sann.  $\Leftrightarrow A \rightarrow B$  är sann och  $B \rightarrow A$  är sann  $\Leftrightarrow A$  och  $B$  har samma sanningsvärde.

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| S | S | S                     |
| S | F | F                     |
| F | S | F                     |
| F | F | S                     |

#### Sats 4.7: Satsparametrar

Antalet satsparametrar är antalet "variabler" i vår utsaga. Exvis, i  $A \rightarrow (B \wedge C \leftrightarrow \neg A)$  har 3st satsparametrar.

## 5. FÖRELÄSNING - NATURLIG DEDUKTION FORTS.

Exempel: Visa att för alla heltal  $n$  gäller att  $n^2 + n$  är jämn.

**Bevis 5.1: Exempel**

Ett heltal är antingen jämn *eller* udda, så vi gör en falluppdelning:

- Fall 1 (jämn):
  - $n = 2k \Rightarrow (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$  alltså jämn
- Fall 2 (udda):
  - $n = 2k + 1 \Rightarrow (2k + 1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1)$  alltså jämn.

□

Exempel:  $A \vee B \vdash B \vee A$  (sanningstabellen för dessa är likadana). Vi skall producera ett bevissträd som har en premiss  $A \vee B$  där slutsatsen är  $B \vee A$

5.1. **Botten ( $\perp$ ).**

Reglerna här är inte riktigt "intro/elimination" utan det har med motsägelser osv att göra.

Antag att vi vill visa  $A$ , då har vi premissen  $\neg A$  så att vi kommer fram till  $\perp$ . Då kan vi dra slutsatsen  $A$ . Detta kallas för RAA = Reductio ad absurdum. Då får vi stryka  $\neg A$

**Bevis 5.2: Exempel: Det finns oändligt många primtal**

Vi antar motsatsen (att det finns ändligt många primtal) och försöker visa motsägelse.

Låt  $A$  = det finns oändligt många primtal. Då antar vi  $\neg A$  och visar  $\perp$ , och sen drar slutsatsen  $A$ . □

Bevissträd är inte entydiga.

## 6. SEMANTIK FÖR SATSLOGIK

**Sats 6.1**

En mängd av formler  $\Gamma$  kallas *konsistent* om  $\Gamma \not\vdash \perp$ . Det finns inget bevissträd som visar  $\varphi$  från premisser i  $\Gamma$ . Kallas *inkonsistent* om  $\Gamma \vdash \perp$ .

Exempel:  $\{p_0, \neg p_0\}$  är inkonsistent, eftersom vi kan visa botten genom en  $\neg$ -elimination.

Exempel:  $\{A \wedge B, \neg A \vee \neg B\}$  är inkonsistent.

Exempel:  $\{A, B, C\}$  är konsistent (kan ej visa botten). Detta visas senare i kursen.

Vi har fortfarande vår signatur  $\sigma$ . Vi vill ge ett värde till varje formel i  $LP(\sigma)$ . Detta värde är ett sant eller falskt värde (sanningsvärde). I predikatlogik har värdet "mer värde", det är lite rikare och beskriver mer vad det betyder att något är sant eller falskt gentemot i satslogik där det är binärt.

**Sats 6.2**

En  $\sigma$ -struktur är en funktion  $A : \sigma \rightarrow \{0, 1\}$  som tilldelar sanningsvärde till vare satssymbol där 0 betyder falsk och 1 sann.

Exempel:  $\sigma = \{p, q\}$ . Här finns det 4 olika  $\sigma$ -strukturer eftersom  $p$  kan antingen vara falsk eller sann, och samma för  $q$  alltså  $2 \cdot 2 = 4$ :

|       |   |   |
|-------|---|---|
| $A_1$ | 1 | 1 |
| $A_2$ | 1 | 0 |
| $A_3$ | 0 | 1 |
| $A_4$ | 0 | 0 |

Men vi vill ge sanningsvärden till *varje* formel i  $LP(\sigma)$ .

Antag att  $A$  är en  $\sigma$ -struktur. Vi definierar en funktion  $A^* : \{\text{formler i } LP(\sigma)\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Vi definierade formlerna i  $LP(\sigma)$  genom induktion, vi får göra liknande här:

- Bas:
  - $A^*(\perp) = 0$
  - $A^*(p) = A(p)$  om  $p \in \sigma$
- Induktion ( $\neg$ ):
  - $A^*(\neg\varphi) = 1 - A^*(\varphi)$
- Induktion ( $\wedge$ ):
  - $A^*(\varphi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow A^*(\varphi) = A^*(\psi) = 1$
- Induktion ( $\vee$ ):
  - $A^*(\varphi \vee \psi) = 1 \Leftrightarrow$  minst en av  $A^*(\varphi)$  och  $A^*(\psi) = 1$
- Induktion ( $\rightarrow$ ):
  - $A^*(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \Leftrightarrow A^*(\varphi) = 1$  och  $A^*(\psi) = 0$
- Induktion ( $\leftrightarrow$ ):
  - $A^*(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow A^*(\varphi) = A^*(\psi)$

OBS:  $A^*(\varphi)$  beror endast på  $A(p)$  för de satssymboler  $p$  som ingår i  $\varphi$ .

OBS: Olika värden på  $A^*$  fås från sanningsvärdestabeller.

Exempel:  $\sigma = \{p, q\}$ ,  $\sigma$ -strukturerna  $A_1, A_2, A_3, A_4$  från tabell. Vi låter  $\varphi = (\neg p) \wedge (p \rightarrow q)$ . Nu vill vi ta reda på vad  $\varphi$  får för värden på olika  $A^*$ :

|       | $p$ | $q$ | $(\neg p)$ | $\wedge$ | $(p \rightarrow q)$ |
|-------|-----|-----|------------|----------|---------------------|
| $A_1$ | 1   | 1   | 0          | 0        | 1                   |
| $A_2$ | 1   | 0   | 0          | 0        | 0                   |
| $A_3$ | 0   | 1   | 1          | 1        | 1                   |
| $A_4$ | 0   | 0   | 1          | 1        | 1                   |

Då blir sanningsvärdestabellen för  $A_n^*(\varphi)$  samma som kolonnen under  $\wedge$

### Sats 6.3: Modell av en formell

$\sigma$ -strukturen  $A$  kallas *modell* för  $\varphi$  om  $A^*(\varphi) = 1$ , alltså en modell för när  $\varphi$  är sann i  $A$ . Notation:

$$A \models \varphi$$

Satisfierbar är en egenskap som en formel kan ha, medan  $\sigma$ -strukturen kan vara en modell om den är sann.

Exempel: Från föregående exempel blev det sant för  $A_3$  och  $A_4$ , alltså  $A_3 \models \varphi$  och  $A_4 \models \varphi$ . Däremot, såg vi att  $A_1 \not\models \varphi$  och  $A_2 \not\models \varphi$  ( $\varphi$  inte sann i  $A_2$ )

### Sats 6.4: Tautologi

$\varphi$  kallas för *tautologi* om  $A \models \varphi$  för varje  $\sigma$ -struktur  $A$ . Alltså om sanningsvärdestabellen har värdet 1 i varje rad. Notation:

$$\models \varphi$$

### Sats 6.5: Satisfierbar

$\varphi$  kallas *satisfierbar* om  $A \models \varphi$  för minst en struktur  $A$ . I föregående exempel är  $\varphi$  satisfierbar.

### Sats 6.6: Falsifierbar

$\varphi$  kallas *falsifierbar* om det är möjligt att göra den falsk.  $A \not\models \varphi$  för minst en struktur falsk. I föregående exempel är  $\varphi$  falsifierbar

### Sats 6.7: Osatisfierbar

$\varphi$  kallas *osatisfierbar* om formen är falsk i alla strukturer, det vill säga  $A \not\models \varphi$  i alla strukturer.

## 7. LOGISK EKVIVALENS OCH KONSEKVENNS

## 7.1. Logisk ekvivalens.

**Sats 7.1: Logisk ekvivalens**

En relation som 2 formler har till varandra, de kan kallas för *logiskt ekvivalenta*.

Låt  $\sigma$  vara en struktur,  $\varphi$  och  $\psi$  i  $LP(\sigma)$ .  $\varphi$  och  $\psi$  kallas *logiskt ekvivalenta* om  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Notation:  $\varphi \text{ eq } \psi$ , alltså samma sanningsvärde.

## 7.2. Exempel.

$p \rightarrow q \text{ eq } \neg p \vee q$ . Här får man rita upp sanningstabellen:

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $\neg p \vee q$ |
|-----|-----|-------------------|-----------------|
| 1   | 1   | 1                 | 1               |
| 1   | 0   | 0                 | 0               |
| 0   | 1   | 1                 | 1               |
| 0   | 0   | 1                 | 1               |

**Sats 7.2: Eq**

Eq är en ekvivalensrelation

**Bevis 7.1: Eq**

- Reflexiv ( $\varphi \text{ eq } \varphi$ )
- Symetrisk ( $\varphi \text{ eq } \psi \Leftrightarrow \psi \text{ eq } \varphi$ )
- Transitiv ( $\varphi \text{ eq } \psi$  och  $\psi \text{ eq } \xi \Rightarrow \varphi \text{ eq } \xi$ )

□

## 7.3. Några viktiga ekvivalenser.

$$\left. \begin{array}{l} p \vee (q \wedge r) \text{ eq } (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \text{ eq } (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{array} \right\} = \text{Distributiva lagar}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \vee (q \vee r) \text{ eq } (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \text{ eq } (p \wedge q) \wedge r \end{array} \right\} = \text{Associativa lagar}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \vee q \text{ eq } q \vee p \\ p \wedge q \text{ eq } q \wedge p \end{array} \right\} = \text{Kommutativa lagar}$$

$$\left. \begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \text{ eq } \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \text{ eq } \neg(p) \wedge \neg(q) \end{array} \right\} = \text{de Morgans lagar}$$

$$\left. \begin{array}{l} p \vee p \text{ eq } p \\ p \wedge p \text{ eq } p \end{array} \right\} = \text{Idempotenslagar}$$

$$\neg\neg p \text{ eq } p \} = \text{Lagen om dubbel-negation}$$

#### 7.4. Logisk konsekvens.

##### Sats 7.3: Logisk konsekvens

Låt  $\Gamma$  vara en mängd av formler i  $LP(\sigma)$  och låt  $\varphi$  en formel i  $\Gamma$ .  $\varphi$  är en *logisk konsekvens* av  $\Gamma$ , skrivet  $\Gamma \models \varphi$ , om  $\varphi$  är sann i varje modell för  $\Gamma$ .

Dvs, för varje  $\sigma$ -struktur gäller: Om  $A \models \gamma$  för varje  $\gamma \in \Gamma$ , så kräver vi att  $\varphi$  (den logiska konsekvensen) också ska vara sann. Här betyder  $\models$  "när helst varje struktur i  $\Gamma$ ".

#### 7.5. Exempel.

Visa att  $\{p_1 \rightarrow p_2, p_1\} \models p_2$  (visa att  $p_2$  är en logisk konsekvens av mängden).

Vi visar detta genom att låta  $A$  vara en modell för  $p_1 \rightarrow p_2$  och  $p_1$ , alltså  $A$  är en struktur där de två är sanna. Detta betyder att  $A$  är en  $\sigma$ -struktur, dvs  $A^*(p_1 \rightarrow p_2) = 1$  och  $A^*(p_1) = 1$ . Det vi måste visa är att  $A^*(p_2) = 1$ . Detta kan vi göra genom att anta att  $A^*(p_2) = 0$ , vi vill få en motsägelse. Då blir  $A^*(p_1 \rightarrow p_2) = 0$ , men detta motäger antagandet att  $A^*(p_1 \rightarrow p_2) = 1$ , alltså  $A^*(p_2) = 1$ .

Om inte  $\Gamma \models \varphi$  gäller, så skriver man  $\Gamma \not\models \varphi$ , dvs "  $\varphi$  är inte en logisk konsekvens av  $\Gamma$  "  $\Leftrightarrow \neg(\varphi$  sann i varje modell för  $\Gamma) \Leftrightarrow$  det finns någon (minst 1) modell för  $\Gamma$  i vilken  $\varphi$  är falsk.

#### 7.6. Exempel.

$\{p_1 \rightarrow p_2, p_2\} \not\models p_1$ . Vi måste ge en motexempelstruktur  $A$ , så att  $A^*(p_1 \rightarrow p_2) = A^*(p_2) = 1$  och  $A^*(p_1) = 0$ . Kom ihåg att struktur betyder tilldelning av sanningsvärde till satssymbolerna.

Ta tex följande:

- $A(p_1) = 0$
- $A(p_2) = 1$

Nu har vi hittat en struktur som gör VL sann och HL falsk.

#### 7.7. Algoritm för att avgöra $\Gamma \models \varphi$ .

Använd sanningsvärdestabeller för alla formler i  $\Gamma$  och för  $\varphi$ . För de rader där alla i  $\Gamma$  är sanna, kolla om  $\varphi$  är sann.

#### 7.8. Exempel.

Avgör om följande gäller  $\neg A \vee \neg B, B \vee C \models (A \wedge C) \rightarrow B$ :

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A \vee \neg B$ | $B \vee C$ | $A \wedge C \rightarrow B$ |
|-----|-----|-----|----------------------|------------|----------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 1                    | 0          | 1                          |
| 0   | 0   | 1   | 1                    | 1          | 1                          |
| 0   | 1   | 0   | 1                    | 1          | 1                          |
| 0   | 1   | 1   | 1                    | 1          | 1                          |
| 1   | 0   | 0   | 1                    | 0          | 1                          |
| 1   | 0   | 1   | 1                    | 1          | 0                          |
| 1   | 1   | 0   | 1                    | 1          | 1                          |
| 1   | 1   | 1   | 0                    | 1          | 1                          |

Rad 6 säger ju att VL = 1 men HL = 0, alltså finns modell för  $\Gamma$  så att  $(A \wedge C) \rightarrow B$  är falsk, alltså  $\Gamma \not\models (A \wedge C) \rightarrow B$ .

### 7.9. Exempel.

Avgör om följande gäller:  $\neg(A \rightarrow B) \models A \wedge \neg B$ . OBS, ekvivalent omformulering:  $\neg(A \rightarrow B) \text{ eq } \neg(\neg A \vee B)$

Vi kan använda de Morgans lagar och arbeta in icke-tecknet:

$$\neg(\neg A \vee B) \text{ eq } (\neg\neg A \wedge \neg B) \text{ eq } A \wedge \neg B$$

Vi skulle dock visa om den var logiskt konsekvent men vi visade att den var logiskt ekvivalent, då är den alltid sann! Dvs, om den är logiskt ekvivalent så är den automatiskt logiskt konsekvent.

Vi kan resonera på följande sätt: Anta att  $S$  är en  $\sigma$ -struktur där  $\neg(A \rightarrow B)$  är sann.

Dvs,  $S^*(\neg(A \rightarrow B)) = 1$ . Då följer att  $S^*(A \rightarrow B) = 0$ . Stjärna av en pil är bara falsk om förledet är sant men efterledet är falskt, dvs  $S^*(A) = 1$  och  $S^*(B) = 0$ . Nu vet vi vad atomerna måste ha för värde i  $S$ .

Alltså  $S^*(\neg(B)) = 1$  och sedan  $S^*(A \wedge \neg B) = 1$ , då har vi visat att  $\neg(A \rightarrow B) \models A \wedge \neg B$

### 7.10. Kommentar.

Det är inte alltid självklart att hela formeln kan substitueras om det är eq.



## 8. SUBSTITUTION

**Sats 8.1: Substitution**

Syftet är att byta ut en delformel i en formel, med en annan formel. Vi börjar med att byta ut satssymboler dock.

Låt  $\varphi$  vara en formel,  $p$  en satssymbol, och  $\psi$  en formel. Notation:  $\varphi[\psi/p]$ . Utläses ” $\varphi$  med  $\psi$  för  $p$ ”, eller alt ”i formeln  $\varphi$ , byt ut  $\psi$  mot  $p$ ”. Definieras med induktion över hur formeln  $\varphi$  är uppbyggd ty vi vet att  $\varphi$  är konstruerad mha induktion.

För att definiera med induktion:

- Bas:
  - $\varphi$  atom:  $\varphi = q$ :
    - \*  $\varphi[\psi/p] = q[\psi/p]$ :
    - $\psi$  om  $q = p$
    - Annars  $q$
  - $\varphi$  atom:  $\varphi = \perp$ :
    - \*  $\varphi[\psi/p] = \perp$   $[\psi/p] = \perp$
- Induktion  $\neg$ :
  - $\varphi$  är  $(\neg\varphi_1)$ :
    - \*  $\varphi[\psi/p] = (\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg(\varphi_1[\psi/p])$
- Induktion  $\Box$ :
  - $\varphi$  är  $(\varphi_1\Box\varphi_2)$ ,  $\varphi[\psi/p] = (\varphi_1\Box\varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1[\psi/p]\Box\varphi_2[\psi/p])$

**8.1. Exempel.**

$$(p_q \rightarrow p_2)[p_7 \wedge p_8/p_2] = (p_1 \rightarrow (p_7 \wedge p_8))$$

Här behöver vi 2 satser:

**Sats 8.2**

Anta  $\varphi_1 \text{ eq } \varphi_2$ . Då gäller  $\varphi_1[\psi/p] \text{ eq } \varphi_2[\psi/p]$

Exempel på sats 8.2, tag  $\varphi_1 = p_1 \rightarrow p_2$  och  $\varphi_2 = \neg p_1 \vee p_2$ . Vi vet att  $p_1 \rightarrow p_2 \text{ eq } \neg p_1 \vee p_2$  från tidigare. Sats 8.2 ger  $(p_1 \rightarrow p_2)[p_7 \wedge p_8/p_2] \text{ eq } (\neg p_1 \vee p_2)[p_7 \wedge p_8/p_2]$ , det vill säga  $p_1 \rightarrow (p_7 \wedge p_8) \text{ eq } \neg p_1 \vee (p_7 \wedge p_8)$

**Sats 8.3**

ntag  $\psi_1 \text{ eq } \psi_2$  och  $\varphi$  en formel,  $p$  en satssymbol. Då gäller:  $\varphi[\psi_1/p]$  eller om vi gör  $\varphi[\psi_2/p]$  så är de eq. Det vill säga  $\varphi[\psi_1/p] \text{ eq } \varphi[\psi_2/p]$

Exempel på sats 8.3, visa att  $\neg(A \rightarrow B) \text{ eq } \neg(\neg A \vee B)$ . Låt  $\psi_1 = A \rightarrow B$  och  $\psi_2 = \neg A \vee B$ . Här har vi  $\psi_1 \text{ eq } \psi_2$ .

Låt  $\varphi = \neg p$ , då ger sats 8.3 att  $\varphi[\psi_1/p] \text{ eq } \varphi[\psi_2/p]$ , det vill säga  $(\neg p)[\psi_1/p] \text{ eq } (\neg p)[\psi_2/p]$ . Nu byter vi ut  $p$  mot  $\psi_1$ , dvs  $\neg\psi_1 \text{ eq } \neg\psi_2$ , dvs  $\neg(A \rightarrow B) \text{ eq } \neg(\neg A \vee B)$

## 8.2. Normalformer.

### Sats 8.4: DNF

En formel är på *disjunktiv normalform* (DNF) om den är på formen:

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

Där varje  $\varphi_i$  är en konjunktion av atomer och/eller negerade atomer.

Exempel,  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_8 \wedge p_7) \vee (\neg p_8)$  är på DNF. Samma sak med  $p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$  (här är  $n = 1$ ). Ett exempel på något som inte är på DNF är  $\neg(p_1 \wedge p_2)$  eftersom negationen sker inte framför en atom. Däremot är  $\neg p_1 \vee \neg p_2$  som är på DNF, och enligt de Morgans lag är de eq.

Exempel, skriv  $p \leftrightarrow q$  på DNF. Då vill vi helt enkelt hitta en eq formel som vi kan substituera och som är på DNF.

Vi får  $p \leftrightarrow q$  eq  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  eq  $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ . Här kan vi använda distributiva lagar så vi får att det är eq  $((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$ . Men här har vi tyvärr ”eller”, vi vill ha och! Vi kör distributiva lagar så vi får

eq  $((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p))$  eq  $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$  är på DNF.

### Sats 8.5: Varje formel kan skrivas på DNF

Låt  $\varphi$  vara en formel. Då finns formel  $\psi$  på DNF så att  $\varphi$  eq  $\psi$ . Detta gäller även för KNF. Generellt, varje formel  $\varphi$  i  $LP(\sigma)$  har formel  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  så att:

- $\varphi$  eq  $\varphi_1$  eq  $\varphi_2$
- $\varphi_1$  på DNF
- $\varphi_2$  på KNF

Detta visas med ett exempel som ger en algoritm.

### Bevis 8.1: Varje formel kan skrivas på DNF

$\varphi = ((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow q$ . Skriv på DNF. Skriv sanningstabellen:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \leftrightarrow q)$ | $\rightarrow r$ | $\rightarrow$ | $q$ |
|-----|-----|-----|-------------------------|-----------------|---------------|-----|
| 1   | 1   | 1   |                         |                 | 1             |     |
| 1   | 1   | 0   |                         |                 | 1             |     |
| 1   | 0   | 1   |                         |                 | 0             |     |
| 1   | 0   | 0   |                         |                 | 0             |     |
| 0   | 1   | 1   |                         |                 | 1             |     |
| 0   | 1   | 0   |                         |                 | 1             |     |
| 0   | 0   | 1   |                         |                 | 0             |     |
| 0   | 0   | 0   |                         |                 | 1             |     |

Markera raderna där huvudkonnektivet är 1. (Fyll i tabellen)

Vi ser av tabellen att  $\varphi$  eq  $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$  där varje parentes motsvarar varje rad där huvudkonnektivet är 1 enligt tabellen.

Notering,  $\perp$  är på DNF

□

**Sats 8.6: KNF**

*Konjunktiv normalform.* Då är det helt enkelt som DNF men med och istället:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

Där  $\varphi_i$  = disjunktion av atom/ $\neg$ atom

**Lemma 8.1: Följdsats av KNF**

Låt  $\varphi$  vara en formel. Då finns  $\psi$  på KNF så att  $\varphi \text{ eq } \psi$

Kan vi använda en liknande algoritm som i beviset för DNF? Om vi vänder på algoritmen, det vill säga vi markerar raderna med 0 och för varje rad med noll tar vi tvärtom så där det är 1 skriver vi exempelvis  $\neg p$ . Detta funkar eftersom det vi har gjort är använt de Morgans lagar och vänt på lite saker.

## 9. FUNKTIONELLT KOMPLETTA MÄNGDER AV KONNEKTIV

Vi har observerat att varje formel kan skrivas på DNF. Vi har samtidigt visat att varje formel har en annan formel som endast skrivs med  $\wedge, \vee, \neg$ . Detta kallas för en *funktionellt komplett mängd av konnektiv*.

**Sats 9.1: Funktionellt komplett mängd av konnektiv**

En mängd av konnektiver kallas *funktionellt komplett* om varje formel i  $LP(\sigma)$  kan skrivas ekvivalent med en formel som endast innehåller konnektiver från mängden. "De räcker till för att säga allt som går att säga".

Exempel:

Mängden  $\{\vee, \wedge, \neg\}$  är funktionellt komplett.

Vi påstår även att  $\{\wedge, \neg\}$  är också funktionellt komplett. För att visa detta påstående behöver vi att varje formel i  $LP(\sigma)$  är ekvivalent med att bara använda dessa konnektiv.

**Bevis 9.1: Föregående mängd är funk. komp**

$\varphi$  i  $LP(\sigma)$ . Låt  $\varphi_1 \text{ eq } \varphi$  och  $\varphi_1$  på KNF (eller DNF, spelar ej roll). Men i KNF kanske det finns eller tecken, men vi vill inte ha det i vårt bevis. Vi måste göra något för att få bort eventuella eller tecken. OBS, varje gång vi använder "eller" så kan vi använda de Morgans lag och skriva om den med "och" och "icke":

$$A \vee B \text{ eq } \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Använder vi andra varianten av de Morgans lag så kan vi göra samma sak med DNF och därmed visa att mängden  $\{\wedge, \neg\}$  är funktionellt komplett.  $\square$

Exempel på en mängd som *inte* är funktionellt komplett:

Mängden  $\{\vee, \wedge\}$  är *inte* funktionellt komplett. Det räcker med att visa att en formel inte går att skriva med hjälp av dessa konnektiv. Vi låter mängden  $A$  vara mängden av alla formler som går att skriva med konnektiven  $\vee, \wedge$ . Vi vill definiera den konkret, så vi härmar definitionen av formler:

- Bas
  - $p \in A$  om  $p$  satssymbol ( $p \in \sigma$ )
- Induktion
  - Om  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  tillhör  $A$ , så  $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in A$  och  $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in A$

Betrakta följande  $\sigma$ -strukturen  $A$ :  $a(p) = 1 \forall p \in \sigma$

Om  $\varphi \in A$ , så gäller  $A^*(\varphi) = 1$ . (Beviset ges av induktion på  $A$ ). Men då kan vi betrakta  $\psi = \perp \in LP(\sigma)$ . Per definition så är  $A^* \perp = 0$ , men vi har ju definierat  $\sigma$ -strukturen att alltid vara sann, och då kan vi inte skriva alla formler med hjälp av enbart  $\wedge, \vee$ . Alltså är mängden inte funktionellt komplett.

Exempel: Konnektivet  $|$  (sheffers streck) har följande sanningstabell:

| $p$ | $q$ | $p q$ |
|-----|-----|-------|
| 1   | 1   | 0     |
| 1   | 0   | 1     |
| 0   | 1   | 1     |
| 0   | 0   | 1     |

Vi påstår att mängden  $\{| \}$  är funktionellt komplett. Idé, skriv något vi vet är funktionellt komplett med hjälp av strecket och använd *eq*.

Vi vill knyta ihop detta med semantiken och syntax i satslogiken:

| Syntax  | Semantik  |
|---|---|
| $\Gamma \vdash \varphi$ (det finns ett bevissträd i naturlig deduktion som visar $\varphi$ med premisser i $\Gamma$ ) | $\Gamma \models \varphi$ ( $\varphi$ sann i varje modell för $\Gamma$ ) |
| $\vdash \varphi$  | $\models \varphi$ dvs $\varphi$ tautologi                               |
| $\Gamma$ konsistent   | $\Gamma$ satisfierbar   |

### Sats 9.2: Sundhetssatsen

Om  $\Gamma \vdash \varphi$  så  $\Gamma \models \varphi$ .  
Specialfall,  $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$

Man kan även vända på pilen, dvs ekvivalent med  $\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Gamma \not\vdash \varphi$

Beviset nämns kort:

### Bevis 9.2: Sundhetssatsen

Detta görs egentligen av induktion på alla bevissträd. Det innebär att i basfallet har man korta bevis som bara har en formel. Bevissträdet  $\varphi$  bevisar att  $\varphi \vdash \varphi$ . Om vi försöker baka ihop till ett induktionsbevis får vi  $\varphi$  som bas och induktionssteg som  $\wedge$ -intro. Kortfattat, bevisreglerna "bevarar sanning".  $\square$

## 9.1. Användning av sundhetssatsen.

När vi pratade om logisk konsekvens så fanns det en formel vi kunde använda för att avgöra om saker var sant eller ej genom att skriva upp sanningsvärdestabeller. En användning av denna sats är för att visa att något inte är bevisbart i naturlig deduktion.

Exempel: Visa att  $\not\vdash \underbrace{(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \neg q)}_{\varphi}$ . Det hela går ut på att negebra sundhetssatsen i någon mening,

om vi kan visa att något inte är logiskt konsekvent så är det inte heller bevisbart, dvs om  $\Gamma \not\models \varphi$  så  $\Gamma \not\vdash \varphi$ . Vi visar  $\not\models \varphi$ , dvs  $\not\models (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \neg q)$ , alltså inte en tautologi. Om  $p = 0, q = 1$  så är påståendet falskt, dvs vi har hittat en struktur så att den inte är en tautologi, alltså kan vi mha sundhetssatsen dra slutsatsen att  $\not\vdash \varphi$  eftersom om det inte är en tautologi så är  $\not\models \varphi$  men det är den inte.

Påminnelse, en mängd kallas *konsistent* om  $\Gamma \not\vdash \perp$ . Nu har vi en metod för detta!

Exempel: Visa att  $\Gamma = \{p_1, p_2, p_3\}$  är konsistent. Vi vill visa att vi inte kan använda dessa premisser för att komma fram till botten. Vi börjar med att visa på semantik sidan att  $\Gamma$  inte är en logisk konsekvens av  $\perp$  dvs  $\Gamma \not\models \perp$ . Låt  $A$  vara en  $\sigma$ -struktur så att  $A(p_1) = A(p_2) = A(p_3) = 1$ , då bör  $A^* \models \Gamma$  men  $A^* \not\models \perp$ . Sundhetssatsen säger då att  $\Gamma \not\vdash \perp$ .

Sundhetssatsen kan man säga är "pilen från syntax till semantik". Pilen från andra hållet kallas för adekvathetssatsen:

### Sats 9.3: Adekvathetssatsen

Om man vet att något är en logisk konsekvens så får man dra slutsatsen i naturlig deduktion, mer formellt, om  $\Gamma \models \varphi$  så  $\Gamma \vdash \varphi$ .

Man kan även vända på pilen och få ekvivalent med  $\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$

Vi får slutgiltigen att Sundhetssatsen + Adekvathetssatsen = Fullständighetssatsen När vi pratade om logisk konsekvens så fanns det en formel vi kunde använda för att avgöra om saker var sant eller ej genom att skriva upp sanningsvärdestabeller. En användning av denna sats är för att visa att något inte är bevisbart i naturlig deduktion.

$$\text{Fullständighetssatsen} = \underbrace{\Gamma \vdash \varphi}_{\text{Syntax}} \Leftrightarrow \underbrace{\Gamma \models \varphi}_{\text{Semantik}}$$

$\Gamma$  konsistent  $\Rightarrow \Gamma$  har modell/ $\Gamma$  är satisfierbar.

Påstående: Varje konsistent mängd av formler i  $LP(\sigma)$  har en modell. Här ger ”konsistent” en lettråd om att den befinner sig på semantik-sidan. Om man vill visa adekvathetssatsen så vill vi visa påståendet och att det är ekvivalent med adekvathetssatsen.

#### Sats 9.4

$\Gamma$  är konsistent  $\Leftrightarrow \Gamma$  är satisfierbar

#### Bevis 9.3: Föregående sats

Vi har redan visat  $\Rightarrow$ . Vi skall visa  $\Leftarrow$ :

Antag  $\Gamma$  satisfierbar, säg att  $A$  är en modell för  $\Gamma$ .

Vi vill visa att  $\Gamma$  är konsistent, dvs  $\Gamma \not\vdash \perp$

Antag att  $\Gamma \vdash \perp$ , enligt sundhetssatsen ger det att  $\Gamma \models \perp$

Eftersom  $A$  är en modell för  $\Gamma$  så följer att  $\perp$  sann i  $A$ , men detta är en motsägelse, ty  $\perp$  är falsk i alla strukturer

Från detta följer det att  $\Gamma \not\vdash \perp$ , dvs  $\Gamma$  är konsistent. □

## 10. DUGGA 2021-04-13

I hela duggan har vi  $\sigma = \{p, q, r\}$

- (1) Gör härledning i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta där  $\varphi, \psi, x \in LP(\sigma)$ 
  - (a) Tänk lite semantiskt först. Antag  $\neg\varphi$  och visa  $x$  är målet. Vi har en eller formel i VL, så antag  $\varphi \wedge \psi$ . Då är  $\varphi$  sann och motsäger  $\neg\varphi$  och vi får  $x$ . I den andra delen av eller tecknet antar vi  $x$  och kommit fram till  $x$ . Nu kan vi ta  $\vee$ -elm så vi får  $x$
  - (b) Här vill vi återigen visa en implikation. vad vi vill göra är:
    - Antag  $\varphi$ , försök visa  $\neg\psi$ . Vi får fram  $\neg\psi$  genom att få botten från att ha antagit  $\psi$ , så vi antar  $\psi$ . Detta är givet från första premissen ( $\varphi \wedge \psi$ )
    - Men första premissen motsäger andra premissen, vi får  $\perp$  och vi får därmed  $\neg\psi$
- (2) Börja med att göra sanningsvärdestabell. Detta kommer även hjälpa oss i fråga 3:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \leftrightarrow r)$ | $\rightarrow$ | $(q \vee \neg r)$ |
|-----|-----|-----|-------------------------|---------------|-------------------|
| 1   | 1   | 1   | x                       | 1             | x                 |
| 1   | 1   | 0   | x                       | 1             | x                 |
| 1   | 0   | 1   | x                       | 0             | x                 |
| 1   | 0   | 0   | x                       | 1             | x                 |
| 0   | 1   | 1   | x                       | 1             | x                 |
| 0   | 1   | 0   | x                       | 1             | x                 |
| 0   | 0   | 1   | x                       | 1             | x                 |
| 0   | 0   | 0   | x                       | 1             | x                 |

För **KNF**, läs från 0-raderna. Vi har bara en 0-rad, vi får  $\neg p \vee q \vee \neg r$ . Notera att den även är på DNF!

- (3)
  - (a) Ja. Det finns minst en 1-rad
  - (b) Valid betyder tautologi, så nej ty vi har en 0-rad
  - (c) Frågan är om  $\psi \models \varphi$  där  $\psi$  är  $\neg((p \rightarrow q) \vee r)$  och  $\varphi$  är formeln ovan. Men detta betyder att  $\varphi$  är sann i varje struktur av  $\psi$ , så vi skriver upp sanningsvärdestabellen för  $\psi$  och jämför raderna:

| $\psi = \neg((p \rightarrow q) \vee r)$ |
|---|
| 0                                       |
| 0                                       |
| 0                                       |
| 1                                       |
| 0                                       |
| 0                                       |
| 0                                       |
| 0                                       |

Är  $\varphi$  sann då  $\psi$  är sann? Svar ja, alltså gäller  $\psi \models \varphi$

- (d) Per definition betyder det att  $\varphi \leftrightarrow \psi$  är en tautologi, dvs  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ . Detta kan vi få genom att jämföra tabellerna och vi ser att de *inte* är samma, alltså inte eq.

(Sekvent = Påstående)

- (a) Frågan är om det finns ett bevissträd i naturlig deduktion som har den slutsatsen med de premisserna. Strategin här går ut på att kolla om det snabbt går att göra ett träd i naturligt deduktion. I detta fall är det lite klurigt, så vi kan istället kika på den semantiska sidan och använda oss av adekvathetssatsen för att "översätta" den tillbaka till den syntaxiska världen. Detta gör man genom att rita upp sanningsvärdestabell för båda sidorna av  $\vdash$  tecknet och jämför. Vi vill veta om den är logisk konsekvens och vi ser att det inte är det, vi hittar alltså en motexempelstruktur.

## 11. SAMMANFATTNING - KAPITEL 2-5

Sammanfattning inför Dugga. Vi har hitills gått igenom Semantik och Syntax, vilket motsvarar Kapitel 2 till Kapitel 5 i boken "Grundläggande Logik". Nedan följer sammanfattning och viktiga begrepp från varje kapitel:

## 11.1. Kapitel 2.

*Satslogik* är en del av *predikatlogik*. I Satslogik behandlas *påståendesatser*, det vill säga satser med ett *sanningsvärde*, exempelvis:

- $7+5=12$
- Klocka är tjugo över fem

Istället för att skriva ut hela satser, använder vi istället *satssymboler* såsom exempelvis  $\varphi, p$

Mängden satssymboler kallas för *satslogisk signatur* och betecknas oftast med  $\sigma$ . En byggsten för att koppla samman logik i satser är *konnektiv*, som består av  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow$  och kallas även för *logiska symboler*. Dessa konnektiv har alltid samma tolkning, oavsett vilken satslogisk signatur som används.

Konnektiv och satser kan kombineras för att bygga *formler*, detta görs induktivt på följande sätt:

- Basfallet: alla symboler i  $\sigma$  är en formel
- Induktionssteg 1: Om  $\varphi$  är en formel, så är  $\neg\varphi$  en formel
- Induktionssteg 2: Låt  $\square$  vara ett konnektiv och  $\varphi_1, \varphi_2$  formler, då är även  $\varphi_1 \square \varphi_2$  en formel.
- Före start av en ny formel bör en startparantes ( tillsätts, och i slutet av formeln en slutparantes ) tillsättas

Mängden formler givet den satslogiska signaturen  $\sigma$  kallas för  $LP(\sigma)$ .

Det är inte alla kombinationer av satser och konnektiv som ger en formel, exempelvis kanske man har fel antal parenteser. Då är det ett *uttryck* och inte en formel. Varje formel är ett uttryck, men inte alla uttryck är formler.

Notera att vi har Induktionssteg 1 och 2, detta eftersom  $\neg$  kan ses som enenvariabelfunktion, medan i steg 2 har vi konnektiv som är 2variabelfunktioner. Mer formellt kallas dessa för *1-ställig resp. 2-ställig konnektiv*.

Det går att visualisera bygget av en formel genom ett så kallat *parsingträd* eller även kallat *konstruktionsträd*. Varje nod i ett sådant träd är en godtycklig formel. Slutnoden/roten kommer från det sista konnektivet som används. Detta konnektiv kallas för *huvudkonnektivet*.

Varje formel som innehåller minst ett konnektiv kallas för *molekylär* formel, men finns denna molekylära formel med som nod i konstruktionsträdet kallas den för *delformel*.

Paranteserna har tagits upp som en pelare i formler, men i vissa fall går det att strunta i dem. Reglerna som bestämmer dessa kallas för *paranteskonventionerna*. Vill man vara på den säkra sidan kan det vara värt att minnas att det är aldrig fel att skriva ut alla parenteser. Reglerna lyder:

- I en formel  $\varphi$  sådant att  $\varphi$  inte står som en delformel i en annan formel och  $\varphi$  har en 2-ställig operator som huvudkonnektiv kan de yttre parenteser slopas
- Led av konjunktion eller led av disjunktion kräver inga parenteser
- Paranteser kring en konjunktion eller en disjunktion som är för eller efterled i en implikation eller ekvivalens kan elimineras

Sammanfattning av sanningstabeller för konjektiven:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \leftarrow B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|------------------|-----------------------|
| S   | S   | F        | S            | S          | S                | S                     |
| S   | F   | F        | F            | S          | F                | F                     |
| F   | S   | S        | F            | S          | S                | F                     |
| F   | F   | S        | F            | F          | S                | S                     |



## 11.2. Kapitel 3 - Semantik.

I syntaxen kollar vi på hur vi kan formulera formler genom att koppla samman konnektiv och satser. I semantiken är målet att kunna dra slutsatser från detta, vi vill på något sätt ge mening till att något implicerar något annat.

I semantiken finns det 2 grundprinciper:

- Varje atomär sats har exakt 1 sanningsvärde, sant eller falskt (betecknas S, F eller 1,0)
- De vanliga konnektiven ( $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow$ ) går att översätta till språk (och, eller, inte) och kan tolkas sanningsfunktionellt

Det sista ordet, sanningsfunktionellt, kan vara lite svårt att förstå, men vad vi menar är att "inte" kan tolkas som en syntaktisk negation och som byter sanningsvärdet på en formel.

Notera ordet "funktion". En  $n$ -ställig sanningsfunktion är en funktion  $A$  som tillordnat ett sanningsvärde till varje satssymbol. Ja, satssymbol, för formler behöver vi lite mer definitioner.

En  $\sigma$ -struktur är en funktion  $A : \sigma \rightarrow \{S, F\}$  som tilldelar sanningsvärde till varje satssymbol.

För att kunna utvidga denna struktur så att den täcker mängden av formler ( $LP(\sigma)$ ) definierar vi funktionen  $A^*$  precis på samma sätt som vi utvidgade satser till formler, induktivt. Då utökas strukturen sådant att  $A^* : LP(\sigma) \rightarrow \{S, F\}$ :

- Basfallet:  $A^*(\perp) = 0$  och  $A^*(\varphi) = A(\varphi)$  om  $\varphi \in \sigma$
- Induktionssteg  $\neg$ :  $A^*(\neg\varphi) = S \Leftrightarrow A^*(\varphi) = F$
- Induktionssteg  $\wedge$ :  $A^*(\varphi \wedge \psi) = S \Leftrightarrow A^*(\varphi) = A^*(\psi) = S$
- Induktionssteg  $\vee$ :  $A^*(\varphi \vee \psi) = S \Leftrightarrow A^*(\varphi) = S$  eller  $A^*(\psi) = S$
- Induktionssteg  $\rightarrow$ :  $A^*(\varphi \rightarrow \psi) = S \Leftrightarrow A^*(\varphi) = F$  eller  $A^*(\psi) = S$
- Induktionssteg  $\leftrightarrow$ :  $A^*(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow A^*(\varphi) = A^*(\psi)$

## 12. PREDIKATLOGIK - FÖRSTA ORDNINGENS LOGIK

Predikat kan ses som en slags relation, *mindre än relation*, *delbarhet* osv. Ett annat ord för relation är predikat, så predikatlogik är alltså logik som har tillgång till relationer. Syftet med predikatlogik är att skapa bättre språk. Det satslogiska språket är logiskt "fattigt".

Exempel:

- Alla rationella tal är reella ( $\forall x(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R})$ )
- $2/3$  är ett rationellt tal ( $2/3 \in \mathbb{Q}$ )
- Alltså följer att  $2/3$  är ett reellt tal ( $2/3 \in \mathbb{R}$ )

Detta går inte att uttrycka i satslogik m.h.a konnektiven, alltså är uttrycket "Alla rationella tal är reella tal" en atomär sats. Men det är även " $2/3$  är ett rationellt tal", då blir det otydligt vilken relation satserna har till varandra.

Vi har 2 sorters tillåtna teckensträngar i språket (vi har inte kommit till språket än):

- *Termer*: Namn på element exvis  $2/3$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $x + 3$
- *Formler*: Har sanningsvärde

Bland termerna finns det variabler som kan dyka upp i formler på lite olika sätt. De förekommer ibland *bundet* och ibland *fritt*.

Tag exempelvis  $\forall x(x > 3)$ , här spelar det ingen roll vad variabeln heter. Samma sak i  $\int 2x dx$ , här är  $x$  *bunden*.

Däremot är termen  $x + 3$  inte bunden, den är *fri* ty den ger en egenskap till just  $x$ . Det går att ha både och, exempelvis  $\underbrace{\forall x(x > 3)}_{\text{bunden}} \wedge \underbrace{x}_{\text{fri}} = 7$

## 12.1. Relationer.

Det finns  $n$ -ställiga relationer (exempelvis är " $>$ " 2-ställig ty den tar 2 variabler/termer). En relation är alltid på en mängd och relationen ger en delmängd av ordnade par.

En två-ställig relation på mängden  $A$  är en delmängd  $A \times A$ , dvs en mängd av ordnade par.  $R \subseteq A \times A$

Exempel:

$D$  på  $\mathbb{Z}$ .  $D = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a|b\}$ , här är  $(2, 6) \in D$  men  $(2, 7) \notin D$ . Det är vanligt att skriva symbolen mellan  $a$  och  $b$ , så istället för  $(a, b)$  skriver vi i detta fall  $a|b$ .

Ett-ställig relation på  $A$ .  $R \subseteq A$

Exempel:

$P = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ är primtal}\}$ . Här är  $P(3)$  ty 3 primtal. Brukar skrivas  $3 \in P$

En tre-ställig relation på  $\mathbb{Z}$  är en mängd  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Exempel:

$M(a, b, c) \Leftrightarrow b$  är strikt mellan  $a$  och  $c$ .  $(1, 2, 4) \in M$  men  $(1, 0, 4) \notin M$

## 12.2. Funktioner.

Relationer är alltså något som vi vill ha i vårt språk. Ytterligare något som vi vill ha i språket är *funktioner*.

Låt  $A$  vara en mängd. En  $n$ -ställig *funktion* (kommer också vara  $n$ -ställig) på mängden  $A$  är en funktion  $F : AxAx \cdots xA \rightarrow A$  ( $n$ -stycken  $A$ ).

Observera:  $F$  är definierad  $\forall n$ -tupler  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Exempel: En 1-ställig funktion från  $A \rightarrow A$  är  $F : A \rightarrow A$  är en regel som till varje  $a \in A$  tilldelar precis ett element,  $F(a)$  i  $A$ .

Exempel på en 2-ställig funktion är  $+$ .

## 12.3. Strukturer.

Vi talar ofta om en struktur, men vad är det? Jo, det är en icke-tom mängd  $A$  som är utrustad med konstanter, relationer, och funktioner:

- $\mathfrak{A} = \langle A, \{c_i : i \in I\}, F_n, R_n \rangle$ 
  - där  $c_i$  är en konstant, dvs  $c_i \in A$
  - där  $F_i$  är en funktion  $F_i : AxAx \cdots xA \rightarrow A$  där ställigheten av funktionen betecknas  $s_i$
  - där  $R_i$  är en relation av ställighet  $r_i$ . Dvs  $R_i \subseteq AxAx \cdots xA$
  - Där  $A$  kallas strukturens *universum*.

Man kan ha 0st konstanter, funktioner, eller relationer.

Exempel:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \{0\}, S, < \rangle$$

Där  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $n \mapsto n + 1$  och  $<$  är den vanliga mindre-än relationen.

Notera att vi har mängdklammrar runt 0. Det behöver vi inte för ändliga mängder som vi kan räkna upp. Se följande exempel.

Exempel:

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot \rangle$$

Exempel:

$$\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \leftarrow \text{här kommer vi inte kunna namnge talen eftersom de alla är 0.}$$

Exempel:

$$\mathfrak{Z}_5 = \langle \mathbb{Z}_5, 0, \oplus \rangle \text{ (addition modulo 5).}$$

## 12.4. Språk för predikatlogik (1:a ordningens logik).

Bakgrunden är att vi tänker oss att vi vill jobba i strukturen  $\mathfrak{N}$ . Vi vill hitta på ett språk som passar att resonera i strukturen. Vi vill ha en symbol i alfabetet för konstanter. För varje funktion lägga till en funktionssymbol, för varje relation lägga till en relationssymbol. Vi börjar på följande sätt:

Låt  $\mathfrak{A} = \langle A, \{c_i : i \in I\}, F_n, R_n \rangle$  vara en struktur.

Vi vill generalisera detta men vi vill inte prata om en struktur, utan alla strukturer med samma typ (där typ är antalet funktioner, konstanter, relationer samt deras ställighet). Därför önskar vi att införa ett alfabet i språket:

Inför alfabetet  $\langle \{\bar{c}_i : i \in I\}, \{\bar{F}_n\}, \{\bar{R}_m\} \rangle$  där:

- $\bar{c}_i$  är en konstantsymbol
- $\bar{F}_n$  är en funktionssymbol av ställighet  $s_i$
- $\bar{R}_m$  är en relationssymbol med ställighet  $r_i$

Här är ett alfabet med frivilliga symboler (frivilliga ty vi kan välja vilka symboler som helst, till skillnad från konnektiv).

Säg att det är ändlig många konstanter  $kst$ . Vi vill konstruera tuppeln  $\sigma$ .

$\sigma = \langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k, \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_m \rangle$  kallas för en *signatur*. För att få generaliteten behöver vi tala om att signaturen är av en viss *typ*.

*Typen* av  $\sigma$  är  $\langle 0, 0, \dots, 0; s_1, \dots, s_n; r_1, \dots, r_m \rangle$  (dvs räkna upp ställigheterna):

- Konstanterna betraktas som 0-ställiga (varpå nollorna)

Nu kan vi generalisera språket till varje typ  $\sigma$ .

Språket betecknas  $LR(\sigma)$  (relationslogik istället för propositionell logik) för signaturen  $\sigma$  av given typ (ovan). Vad behöver vi?:

- Alfabet:
  - Alla symboler i  $\sigma$  och konnektiven och paranteser och kvantorererna ( $\exists, \forall$ ) samt en radda av uppräkningsbara många variabler  $x_1, x_2, \dots$ , (skrivs vanligtvis  $x, y, z$ ),  $\doteq$  (2 element är lika) och kommatecken.
  - Alla föregående förutom symbolerna i  $\sigma$  kallas för *logiska* symboler, medan de andra kallas för *icke-logiska*.

Vi skall definiera *termer* och *formler*:

*Termer*  $LR(\sigma)$  definieras induktivt och ska peka på element:

- Bas:
  - $x$  variabel  $\Rightarrow x$  är en term
  - $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k$  är termer
- Induktionssteg:
  - Om  $\bar{F}$  är en  $k$ -ställig funktionssymbol, och  $t_1, \dots, t_k$  är termer, då är  $\bar{F}(t_1, \dots, t_k)$  en term.

Formler i  $LR(\sigma)$  definieras induktivt:

- Bas (atomära formler):
  - $\perp$  är en formel
  - Om  $t_1$  och  $t_2$  är termer, så är  $t_1 \doteq t_2$  en formel
  - Om  $\bar{R}$  är en  $k$ -ställig relationssymbol, och  $t_1, \dots, t_k$  är termer, så är  $\bar{R}(t_1, \dots, t_k)$  en formel
- Induktionssteg (genom konnektiv och kvantorer):
  - Om  $\varphi$  en formel, så är  $(\neg \varphi)$  en formel
  - Om  $\varphi$  och  $\psi$  är formler, så är  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$  och  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$  formler
  - Om  $\varphi$  är en formel och  $x$  en variabel, så är  $\exists x \varphi$  och  $\forall x \varphi$  formler

Vad vi har gjort är inte så konstigt, vi har härmat definitionen av formler i satslogik men vi har ändrat bassteget och kör lite extra induktionssteg. De liknar varandra för att vi vill fortfarande ha tillgång till satslogiken i vår predikatlogik.

Exempel:

Vilka formler i  $LR(\sigma)$  för  $\sigma = \langle \bar{0}, \bar{s}, \bar{<} \rangle$ ?

Några formler i språket är:

- $\perp$        $\bar{S}(\bar{0}) \doteq x$        $\bar{S}(\bar{0} \doteq \bar{0})$
- $(\bar{<}(\bar{S}(\bar{0}), x) \wedge \bar{0} \doteq \bar{S}(\bar{0}))$
- $\forall \bar{S}(\bar{0}) \doteq x \quad \exists (\bar{S}(\bar{0}) \bar{<} \bar{0} \wedge x \doteq \bar{S}(\bar{S}(\bar{0})))$       (notera paranteserna)

Observera: Om  $\bar{R}$  är en 2-ställig relationssymbol, och  $t_1, t_2$  är termer, så skriver vi oftast  $t_1 \bar{R} t_2$  när vi menar  $\bar{R}(t_1, t_2)$

## 13.1. Fria och bundna förekomster av variabler.

Intuitivt skall en bunden variabel inlindas i kvantorer, vi definierar:

**Sats 13.1**

Alla förekomster av variabler i termer kallas *fria*

En förekomst av variabler  $x$  är *fri* (i formeln) om den inte förekommer inom en existens-kvantor med  $x$  efter  $(\exists x)$  eller  $\forall x$ .

Annars kallas den för *bunden*

Exempel:

$\forall x (\bar{R}(x, \bar{c}) \vee y \dot{=} \bar{c})$ . Här ser vi att det finns 2 variabler som förekommer,  $x, y$ .  $x$  förekommer vid en all-kvantor och i en relation.  $x$  i relationen samt kvantorn är en s.k *bunden förekomst* av  $x$ . Vi tittar på  $y$ , finns det någon kvantor? Nej, så den är fri. Med bundna variabler skall vi kunna uttala formeln utan att säga variabelns namn, vi kan byta ut den mot "något".

En formel kallas för *sluten* om den saknar fria variabel-förekomster. Exempel i  $LR(\sigma)$  för  $\mathfrak{u}$ :

$$\bar{S}(\bar{0}) \dot{=} \bar{S}(\bar{S}(\bar{0})) \quad \forall x (\bar{0} \dot{<} \bar{S}(x)) \quad (\text{alla variabler förekommer bara i en kvantor}) \quad \exists (x \dot{=} \wedge \bar{S}(x) \dot{<} x)$$

En sluten formel kallas för *sats*.

Vi vill göra lite som vi gjorde i satslogiken, införa begreppet *semantik* och naturlig deduktion (syntax).

## 13.2. Variabelsubstitution.

Vi vill definiera detta dels i termer och i formler. Vi börjar med att försöka definiera det intuitivt för termer:

Låt  $T, t$  vara termer och  $x$  variabler. Vi skriver  $T[t/x]$ , varje  $x$  vi ser ersätts med  $t$  i termen  $T$ . Definieras vidare med induktion av uppbyggnaden av  $T$

- Bas:
  - Om  $T$  är en variabel eller konstantssymbol:
 
$$* \left. \begin{array}{l} t \text{ om } y = x \\ y \text{ om } y \neq x \end{array} \right\} y[t/x]$$
- Induktion:
  - Om  $T = \bar{F}(t_1, \dots, t_k)$ , så  $T[t/x] = \bar{F}(t_1[t/x], \dots, t_k[t/x])$

Variabelsubstitution i formler sker på samma sätt men istället för  $T$  har vi  $\varphi$  och vi vill fortfarande byta ut en variabel. Betecknas  $\varphi[t/x]$  där  $\varphi$  är en formel,  $t$  är en term, och  $x$  är en variabel. Detta görs även induktivt:

- Bas:
  - $\perp[t/x] = \perp$
  - $t_1 = t_2[t/x] = t_1[t/x] \dot{=} t_2[t/x]$
  - $\bar{R}(t_1, \dots, t_k)[t/x] = \bar{R}(t_1[t/x], \dots, t_k[t/x])$
- Induktion:
  - $(\neg\psi)[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
  - $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$  där  $\Box$  är godtyckligt konnektiv
  - $(\forall y \psi)[t/x] = \forall y(\psi[t/])$  om  $y \neq x$ , annars  $\forall x \psi$  (vi gör ingenting).
  - $(\exists y \psi)[t/x] = \exists y(\psi[t/x])$  om  $y \neq x$ , annars  $\exists x \psi$

Anmärkning: Vi byter alltså **inte** bundna variabler

En variabel substitution kallas för *tillåten* om ingen tidigare fri förekomst av en variabler efter substitutionen blir bunden.

Exempel:

$\exists x(y < x)$  är en formel som har en fri variabel förekomst ( $y$ ). Om vi gör substitutionen  $[x/y]$  får vi  $\exists x(x < x)$ . Detta är en "korrekt" substitution, den följer reglerna, men vi vill inte tillåta detta ty om vi "översätter" så står det "det finns någonting som är mindre än sig självt" medan innan vi gjorde substitutionen sa vi "det finns någonting som är större än  $y$ ". Vi har tappat betydelsen i substitutionen, vilket vi inte kan tillåta.

Alla substitutioner som vi gör framöver skall vara tillåtna.

## 14. SEMANTIK FÖR 1:A ORDNINGENS LOGIK

Idag skall vi tolka slutna termer som ett element i strukturen. Vi ska även betrakta slutna formler och tolka dessa i strukturen.

Vi skall titta på en särskild signatur  $\sigma = \langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n; \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m; \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k \rangle$  av typ  $\langle 0, \dots, 0; s_1, \dots, s_m; r_1, \dots, r_k \rangle$ . Har vi signaturen samt typen så har vi "språket", vi vet i någon mening vad vi kan göra vi vet hur alla symboler får användas. Då kan vi bygga upp våra termer och formler (induktivt).

Vill vi tolka dessa måste vi välja en struktur som passar till detta språk. Låt därför  $\mathfrak{A}$  vara en  $\sigma$ -struktur:

$$\mathfrak{A} = \langle A; c_1, \dots, c_n; F_1, \dots, F_m; R_1, \dots, R_k \rangle \quad (A \text{ är strukturens universum})$$

Se på det som att  $\sigma$  är definitionen av en ring, medan  $\mathfrak{A}$  är en ring exempelvis  $\mathbb{Z}$

Vi skall tolka **slutna termer** som element i  $A$  och **slutna formler** som sanna eller falska i strukturen  $\mathfrak{A}$ . Notera, enbart slutna, alltså om det existerar en fri variabel gör vi ingenting.

*Vad behöver vi?*

- Namn på varenda element (för att tolka kvantorer)
  - Ett namn kommer representera ett element i struktorens universum. Från definitionen av de naturliga talen är det behändigt att kunna säga "10" istället för "9 iterationer av  $S(0)$ "

Vi utvecklar därmed *det utvidgade språket*  $L(\mathfrak{A})$  med signatur  $\sigma_{\mathfrak{A}}$ .

Det språket har nya konstantsymboler, vilket betyder att för varje element  $a \in A$  finns det en symbol  $\bar{a}$ .

Exempel:  $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, < \rangle$  med  $\sigma = \langle \bar{0}, \bar{S}, \bar{<} \rangle$  av typ  $\langle 0; 1; 2 \rangle$ . Utvidgade språket  $\sigma_{\mathfrak{N}} = \sigma \cup \{\bar{n} : n \in \mathbb{N}\}$

14.1. Tolkning av slutna termer i  $\mathfrak{A}$ .

Om  $t$  är en sluten term, så ska vi definiera elementet  $t^{\mathfrak{A}} \in A$ . Man kan säga att vi ska göra en funktion "slutna-termer  $\rightarrow A$ " så att  $t \mapsto t^{\mathfrak{A}}$

- Bas:
  - $(\bar{c}_i)^{\mathfrak{A}} = c_i$
  - $a \in A \quad (\bar{a})^{\mathfrak{A}} = a$
- Induktionssteg:
  - Om  $\bar{F}$  är  $k$ -ställig funktionssymbol, och  $t_1, \dots, t_k$  är slutna termer så:
 
$$* \quad (F(t_1, \dots, t_k))^{\mathfrak{A}} = F(t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_k^{\mathfrak{A}}) \in A \quad \{t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_k^{\mathfrak{A}}\} \in A$$

Exempel: Betrakta  $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, < \rangle$  med  $\sigma = \langle \bar{0}, \bar{S}, \bar{<} \rangle$  av typ  $\langle 0; 1; 2 \rangle$   
 $\sigma_{\mathfrak{N}} = \{\bar{n} : n \in \mathbb{N}\}$ :

- $(\bar{0})^{\mathfrak{N}} = 0$
- $(\bar{3})^{\mathfrak{N}} = 3$
- $\bar{S}(\bar{S}(\bar{0}))^{\mathfrak{N}} = S((\bar{S}(\bar{0}))^{\mathfrak{N}}) = S(S(\bar{0})^{\mathfrak{N}}) = S(0) + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$

Man kan ha en symbol som pekar på samma sak.  $2+3$  pekar på 5, men det gör även 5.

## 14.2. Tolkning av slutna formler.

Från tidigare har vi även sagt att det kallas för sats. I vanlig matematik kan det betyda en sann sak, exempelvis "enligt sats 69", men det kallas egentligen teorem.

Slutna formler ( $\tau$ ) skall vi tolka som sanna eller falska i strukturen ( $\mathfrak{A}$ ).

Notation:  $\mathfrak{A} \models \tau$ , utläses som " $\mathfrak{A}$  är en modell för  $\tau$ " eller " $\tau$  är sann i  $\mathfrak{A}$ ".

Vi kan även skriva  $\mathfrak{A} \not\models \tau$  som uttalas " $\tau$  är falsk i  $\mathfrak{A}$ " eller även  $\mathfrak{A}$  är inte en modell för  $\tau$ .

Observera: Vi tolkar endast *slutna formler*. Vi kan konstruera en slags funktion, som vi gjorde tidigare, "slutna-formler  $\rightarrow$  {sann i  $\mathfrak{A}$ , falsk i  $\mathfrak{A}$ }"

Detta gör vi induktivt:

- Bas:
  - $\mathfrak{A} \not\models \perp$
  - $t_1, t_2$  slutna termer.  $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}}$
  - $\bar{R}$  är en  $k$ -ställigt relationssymbol,  $t_1, \dots, t_k$  slutna termer:  $\mathfrak{A} \models \bar{R}(t_1, \dots, t_k) \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_k^{\mathfrak{A}}) \in R$
- Induktionssteg (konnektiv):
  - För  $\neg\varphi$ :  $\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi$
  - För  $\varphi \vee \psi$ :  $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$  eller  $\mathfrak{A} \models \psi$
  - För  $\varphi \wedge \psi$ :  $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$  och  $\mathfrak{A} \models \psi$
  - $\varphi \rightarrow \psi$ :  $\mathfrak{A} \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$  och  $\mathfrak{A} \models \psi$
  - För  $\varphi \leftrightarrow \psi$ :  $\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi \text{ och } \mathfrak{A} \models \psi)$  eller  $(\mathfrak{A} \not\models \varphi \text{ och } \mathfrak{A} \not\models \psi)$
- Induktionssteg (kvantorer):
  - $\tau$  är  $\exists x\varphi$ .  $\tau$  sluten  $\Rightarrow$  den enda variabeln som kan förekomma fritt i  $\varphi$  är  $x$ . Skriver  $\varphi(x)$ .
  - $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi(x) \Leftrightarrow$  det finns element  $a \in A$  så att  $\mathfrak{A} \models \underbrace{\varphi[\bar{a}/x]}_{\text{sluten formel}}$
  - $\mathfrak{A} \models \underbrace{\forall x\varphi(x)}_{\text{sluten}} \Leftrightarrow$  för varje element  $a \in A$  gäller  $\mathfrak{A} \models \underbrace{\varphi[\bar{a}/x]}_{\text{sluten}}$

Anmärkning: Skriver ofta  $\varphi(\bar{a})$  när vi menar  $\varphi[\bar{a}/x]$

Exempel: Betrakta  $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, < \rangle$  med  $\sigma = \langle \bar{0}, \bar{s}, \bar{<} \rangle$  av typ  $\langle 0; 1; 2 \rangle$  där  $S(n) = n + 1$  och  $\bar{<}$  är mindre än.

Vi påstår att  $\mathfrak{N} \models \underbrace{\bar{<}(\bar{0}, \bar{S}(\bar{0}))}_{\tau}$ . Notera att det är en sluten formel med en relationssymbol. Kolla på den

induktiva definitionen så får vi att det betyder:

$$\begin{aligned} \bar{0}^{\mathfrak{N}} &< (\bar{S}(\bar{0}))^{\mathfrak{N}} \\ \Leftrightarrow 0 < S(0) &\Leftrightarrow 0 < 0 + 1 \Rightarrow 0 < 1 \text{ (sant)} \end{aligned}$$

Alltså gäller att  $\mathfrak{N} \models \tau$

Exempel: Samma struktur och signatur från tidigare exempel. Vi påstår att  $\mathfrak{N} \models \exists x \bar{<}(x, \bar{S}(\bar{0}))$ .

Detta gäller om det finns element  $n \in \mathbb{N}$  så att  $\mathfrak{N} \models \bar{<}(\bar{n}, \bar{S}(\bar{0}))$  (vi gjorde substitutionen direkt utan att skriva in substitutionsoperatorn). Vi kan tolka det som:

Det finns ett element  $n \in \mathbb{N}$  så att  $(\bar{n})^{\mathfrak{N}} < (\bar{S}(\bar{0}))^{\mathfrak{N}} \Leftrightarrow n < 1$ . Detta påstående stämmer, tag  $n = 0$ . Alltså  $\mathfrak{N} \models \tau$



## 15. FÖRELÄSNING -

Vi skall skriva lite om vad det innebär att något är en modell.

**Sats 15.1: Modell**

Låt  $\tau$  vara en sluten formel och  $\mathfrak{A}$  vara en struktur som passar språket.  $\mathfrak{A}$  kallas *modell för*  $\tau$  om  $\mathfrak{A} \models \tau$

Låt  $\Gamma$  vara en mängd av slutna formler.  $\mathfrak{A}$  kallas *modell för*  $\Gamma$  om  $\mathfrak{A} \models \gamma$  för varje  $\gamma \in \Gamma$

Exempelvis, om  $\Gamma$  är teorin/definitionen av en grupp, så är  $\mathfrak{A}$  en grupp som uppfyller gruppaxiomen.

**15.1. Logisk konsekvens.**

Påminn dig själv om logisk konsekvens från satslogiken på sida 14. Vi vill generalisera den metoden i 1:a ordningens logik.

Låt  $\Gamma$  vara en mängd slutna formler och  $\varphi$  en sluten formel (i ett språk  $\sigma$ ). Då definierar vi:

**Sats 15.2: Logisk konsekvens i 1:a ordningens logik**

$\Gamma \models \varphi$  ( $\varphi$  är en logisk konsekvens av  $\Gamma$ ) om  $(\Leftrightarrow)$   $\varphi$  är sann i varje modell för  $\Gamma$

Annars skriver vi  $\Gamma \not\models \varphi$

Ta en godtycklig struktur och visa att  $\varphi$  är sann i varje modell.

Negationen till att  $\varphi$  är sann i varje modell av  $\Gamma$  är helt enkelt att det finns en motexempelstruktur ( $\varphi$  är inte sann i varje modell av  $\Gamma$ ).

**Exempel:**

Givet att  $\sigma = \langle \bar{P}, \bar{Q} \rangle$  av typ  $\langle ; ; 1; 1 \rangle$  (inga konstantsymboler, inga funktionssymboler,  $\bar{P}$  är 1-ställig relationssymbol,  $\bar{Q}$  är 1-ställig relationssymbol).

Vi ska betrakta några formler som är slutna och undersöka.

Låt  $\varphi_1 = \forall x (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x))$ ,  $\varphi_2 = \exists x (\neg \bar{Q}(x))$ . Båda dessa är slutna formler på grund av kvantorerna.

Låt även  $\tau = \exists x (\neg \bar{P}(x))$

Visa att  $\varphi_1, \varphi_2 \models \tau$ , med andra ord, visa att  $\tau$  är en logisk konsekvens av  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$ .

För varje struktur som passar till det här språket måste vi visa att om  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  så måste även  $\tau$  vara sann. För att göra detta måste vi träna oss att visa detta i en godtycklig struktur.

**Lösning:**

Låt  $\mathfrak{A} = \langle A, P, Q \rangle$  vara en  $\sigma$ -struktur (godtycklig). Vi vet ytterst få saker:

- $A$  är inte tom, detta är ett grundaxiom, att universumet aldrig är tom
- $P \subseteq A$
- $Q \subseteq A$

Om vi ritar ett mängddiagram så vill vi helt enkelt försöka förfina bilden genom att hitta så mycket som möjligt om  $\varphi$ .

Vi börjar med  $\varphi_1$ . Vi noterar att vi har en all-kvantor. Den säger att om vi substituerar  $a$  för  $x$  så skall pilformeln fortfarande vara sann där  $a$  är ett namn på  $x$ .

Det kanske är lite oklart om  $P \subseteq A$ .  $P$  tar ordnade par av element i  $A$ , men eftersom den är 1-ställig så är den bara  $A$ . Hade däremot  $P$  varit 2-ställig så hade  $P \not\subseteq A$  men istället  $A \times A$ .

Eftersom vi vill undersöka de fallen då  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  är sanna, så antar vi att de är sanna, dvs  $\mathfrak{A} \models \varphi_1$  och  $\mathfrak{A} \models \varphi_2$ . Vi behöver visa att  $\mathfrak{A} \models \tau$ . Observera att detta är väldigt generellt.

Om  $\varphi_1$  är sann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi_1 &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x(\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{För varje element } a \in A \text{ gäller } \mathfrak{A} \models \bar{P}[\bar{a}/x] \rightarrow \bar{Q}[\bar{a}/x] \\
&\Leftrightarrow \text{För varje element } a \in A \text{ gäller att om } \mathfrak{A} \models \bar{P}[\bar{a}/x], \text{ så } \mathfrak{A} \models \bar{Q}[\bar{a}/x] \\
&\Leftrightarrow \text{För varje element } a \in A \text{ gäller att om } a \in P, \text{ så } a \in Q \\
&\Leftrightarrow P \subseteq Q
\end{aligned}$$

Om  $\varphi_2$  är sann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi_2 &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x(\neg \bar{Q}(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{Det finns } a \in A \text{ så att } \mathfrak{A} \models \neg \bar{Q}(\bar{a}) \\
&\Leftrightarrow \text{Det finns } a \in A \text{ så att } \mathfrak{A} \not\models \bar{Q}(\bar{a}) \\
&\Leftrightarrow \text{Det finns } a \in A \text{ så att } a \notin Q
\end{aligned}$$

Nu har vi förstått premisserna. Nu kan vi undersöka vad  $\tau$  betyder för att försöka se om det blir sant:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \tau &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x(\neg \bar{P}(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{Det finns ett element } b \in A \text{ så att } b \notin P
\end{aligned}$$

Vi vill undersöka om det är det sant? Alltid?

Ja, ty låt  $a$  vara så att  $a \notin Q$  (enligt  $\varphi_2$  finns det ett sådant  $a$ ). Då följer det att  $a \notin P$  (eftersom  $P \subseteq Q$  enligt  $\varphi_1$ ), alltså  $\mathfrak{A} \models \tau$ . Vi har visat att  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  semantiskt medför  $\tau$ .

## 16. 1:A ORDNINGEN SEMANTIK OCH NATURLIG DEDUKTION

Vi påminner oss om satslogikens semantik. Givet  $\Gamma$  är en mängd satser och  $\varphi$  en sats, så gäller följande:

$$\begin{aligned} \Gamma \models \varphi &\Leftrightarrow \varphi \text{ sann i varje modell för } \Gamma \\ &\Leftrightarrow \text{För varje } \sigma\text{-struktur } \mathfrak{A}, \text{ om } \mathfrak{A} \models \gamma \text{ för varje } \gamma \in \Gamma, \text{ så } \mathfrak{A} \models \varphi \end{aligned}$$

I satslogik är detta enkelt att visa eftersom det finns ändligt antal ”rader” i vår tabell. Detta gäller inte här, vilket kan göra saker lite svårare.

Vi ska kika på motsvarigheten till en tautologi (sanningsvärdestabellen gav en 1:a i varje rad, sann i varje struktur). Detta kallas för en *valid formel*. Vi definierar:

**Sats 16.1: Valid formel**

En sluten formel  $\varphi$  kallas *valid* (alt. *allmänggiltig*) om  $\varphi$  är sann i varje  $\sigma$ -struktur (som passar för språket).

Notationen är densamma som den för satslogik, dvs  $\models \varphi$ .

**Sats 16.2: Logisk ekvivalens**

$\varphi_1$  och  $\varphi_2$  kallas för *logiskt ekvivalenta*. Notationen är densamma som den för satslogik, dvs  $\varphi_1 \text{ eq } \varphi_2$  omm  $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$

**Exempel:**  $\neg \exists x \varphi(x) \text{ eq } \forall x \neg \varphi(x)$  där  $\varphi$  är en formel som bara har  $x$  som en fri variabel. Visa att  $\models \neg \exists x \varphi(x) \leftrightarrow \forall x \neg \varphi(x)$ .

**Bevis:** Notera att vi inte har ett konkret språk, vi kommer strunta i detta och resonera som om vi har en.

Låt  $\mathfrak{A}$  vara en  $\sigma$ -struktur. Ska visa att  $\leftrightarrow$  är sann, så vi vill visa att  $\mathfrak{A} \models \neg \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x \neg \varphi(x)$ .

Vi börjar i ena änden och försöker översätta till ren svenska i strukturen.

Vi har:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \neg \exists x \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \exists x \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow \text{Det är inte så att } \mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow \text{Det är inte så att det finns } a \in A \text{ så att } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \\ &\quad \Leftrightarrow \text{För varje element } b \in A \text{ gäller att } \mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{b}) \\ &\quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Resonemang som görs i metaspråket } \mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow \text{För varje } b \in A \text{ gäller } \mathfrak{A} \models \neg \varphi(\bar{b}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x \neg \varphi(x) \quad \square \end{aligned}$$

Detta var ett exempel på en valid formel. Det finns många sådana, såsom:

- $\neg \forall x \varphi(x) \text{ eq } \exists x \neg \varphi(x)$
- $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \text{ eq } \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x \psi(x)$
- $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \text{ eq } \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$
- Om  $x$  inte förekommer fritt i  $\psi$ , så gäller:
  - $\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \text{ eq } \forall x \varphi(x) \vee \psi$
  - $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \text{ eq } \exists x \varphi(x) \wedge \psi$

Man måste se upp! Om vi byter konnektiv vid kvantorerna, så kan det bli busigt, man måste vara försiktig.

Låt oss kika på en invalid formel. Vi definierar  $\sigma = <;; \bar{P} >$  av typ  $<;; 2 >$

Visa att följande inte är en valid formel:

$$\not\models \forall x \exists y \bar{P}(x, y) \leftrightarrow \exists y \forall x \bar{P}(x, y)$$

Övningen går helt enkelt ut på att visa att det spelar roll vilken ordning man ställer kvantorerna. Hade man kunnat göra detta betyder det att de har samma sanningsvärden i alla strukturer. För att visa att detta inte gäller räcker det alltså med att finna en motexempelstruktur. Vi döper VL till  $\varphi_1$  och HL till  $\varphi_2$ .

För att ange en struktur behöver vi ge ett universum och en tolkning på den 2-ställiga relationen. Om man inte kommer på ett universum så kan man ta något man arbetat mycket med, såsom  $\mathbb{N}$  och relationen  $\bar{P} = <$  (mindre än).

Vi kan nu undersöka  $\varphi_1$  och  $\varphi_2$  vidare i vår struktur. I detta fall säger vi alltså:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi_1 &\Leftrightarrow \text{för varje } n \in \mathbb{N} \text{ finns } m \in \mathbb{N} \text{ så att } n < m \\ \mathfrak{A} \models \varphi_2 &\Leftrightarrow \text{det finns } a \in \mathbb{N} \text{ så att för varje } b \in \mathbb{N} \text{ gäller } b < a \end{aligned}$$

$\mathfrak{A} \not\models \varphi_2$  ty det finns inget största naturligt tal, men  $\mathfrak{A} \models \varphi_1$ . Alltså  $\mathfrak{A} \not\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ .

Precis som det fanns olika normalformer i satslogik så finns de här i predikatlogik.

### 16.1. Prenex Normalform.

När alla kvantorerna står allra först i en sluten formel så kallas det för *prenex normalform* om formeln  $\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n}_{\text{Kvantorer}} \underbrace{\psi(x_1, \dots, x_n)}_{\psi \text{ har inga andra fria variabler än } x_1, \dots, x_n \text{ och inga kvantorer}}$

**Exempel:**  $\forall x \exists y (\bar{P}(x, y) \wedge \neg x = y)$  (på prenex normalform)

**Exempel:**  $\forall x \bar{P}(x) \wedge \exists x \bar{Q}(x)$  (inte på prenex normalform ty kvantorer kommer ej först)

**Exempel:**  $\forall x \bar{P}(x) \wedge \bar{Q}(y)$  (inte på prenex normalform ty ej sluten (har en fri variabel  $y$ ))

Vi minns från tidigare att vi alltid kunde skriva om till KNF eller DNF. Vi vill göra samma här, m.h.a följande sats:

#### Sats 16.3

ill varje sluten formel  $\tau$  finns en sluten formel  $\tau'$  på prenex normalform så att  $\tau \text{ eq } \tau'$ . Varje formel kan alltså skrivas om till prenex normalform

Vi kommer ej bevisa denna formel, men vi kör ett exempel så man vet hur man ska använda sig av den.

**Exempel:** Låt  $\tau = \exists x \bar{P}(x) \rightarrow \forall x \bar{Q}(x)$ . Finn någon  $\tau'$  på prenex normalform så att  $\tau \text{ eq } \tau'$

Det finns lite algoritmliknande metoder man kan utgå ifrån. Man skall börja med att ta bort alla pilar m.h.a satslogisk omskrivning. Sedan skall man försöka dra ut alla kvantorer. Då kommer det väl till pass att vi har lite standard valida formler.

Vi börjar med  $\exists x \bar{P}(x) \rightarrow \forall x \bar{Q}(x)$ . Ta bort alla pilar genom att byta ut ekvivalenta saker mot andra saker som är ekvivalenta. Detta kan vi alltså byta ut mot:

$$\begin{aligned} & \neg \exists x \bar{P}(x) \vee \forall x \bar{Q}(x) \\ & \forall x \neg \bar{P}(x) \vee \forall x \bar{Q}(x) \text{ här måste vi byta namn på den bundna variabeln} \\ & \forall x \neg \bar{P}(x) \vee \forall y \bar{Q}(y) \\ & \forall x (\neg \bar{P}(x) \vee \forall y \bar{Q}(y)) \\ & \forall x (\forall y (\bar{Q}(y) \vee \neg \bar{P}(x))) \\ & \forall x \forall y (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{Q}(y)) \end{aligned}$$

Vi hoppar lite till ett sidospår, men låt oss betrakta lite exempel på olika språk:

- Språket för likhet,  $\sigma = <; ; >$ 
  - $\doteq$  är den enda relationssymbolen
  - Formler i basen är inget annat än  $\perp, x \doteq y$
- Språk för partiella ordningar,  $\sigma = <; ; \bar{P} >$ , exempelvis  $\bar{P} = \leq$ 
  - En *partiell ordning* är en struktur  $\mathfrak{P} = \langle X, \leq \rangle$  så att  $\mathfrak{P} \models \tau_1 \wedge \tau_2$  där:
    - \*  $\tau_1 = \forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$  (transitivitet)
    - \*  $\tau_2 = \forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x \doteq y)$
  - Språket för aritmetik:
    - \*  $\sigma = \langle \bar{0}, \oplus, \odot, \bar{S} \rangle$  av typ  $\langle 0; 2, 2, 1; >$
    - \* Peano-axiom:
      - Syftet var att hitta axiom så att varje gång något var en modell för axiomat så skulle det vara isomorft med ursprungsstrukturen
      - Det visade sig att det går inte att karaktärisera de naturliga tal
      - Axiom 1:  $\forall x \quad \bar{0} \neq \bar{S}(x)$
      - Axiom 2:  $\forall x \forall y (\bar{S}(x) \doteq \bar{y} \rightarrow x \doteq y)$
      - Axiom 3:  $\forall x x \oplus \bar{0} \doteq x$
      - Axiom 4:  $\forall x \forall y (x \oplus \bar{S}(y) \doteq \bar{S}(x + y))$
      - Axiom 5  $\forall x x \odot \bar{0} \doteq \bar{0}$
      - Axiom 6:  $\forall x \forall y (x \odot \bar{S}(y) \doteq (x \odot y) \oplus x)$
      - Axiom 7 (Induktionsschema):  $A(\bar{0}) \wedge \forall x (A(x) \rightarrow A(\bar{S}(x))) \rightarrow \forall x A(x)$
    - \* Standardmodellen för aritmetik:  $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot, S \rangle$ 
      - Inför som förkortning  $1 = \bar{S}(\bar{0})$  osv...
      - Litet lemma, för varje  $n \in \mathbb{N}$  gäller  $(n)^{\mathfrak{N}} = n \in \mathbb{N}$

Partiella ordningar kan vara lite kluriga. Som vi såg så är  $\leq$  en sådan, men även  $\subseteq$ .

## 17. 1:A ORDNINGENS NATURLIG DEDUKTION

Det första vi har observerat är att 1:a ordningens logik är en utvidgning av satslogiken. Detta betyder att vi har kvar alla regler och konnektiv (även bevisregler).

Vad är det vi har lagt till? Jo,  $\doteq$ .

Som vanligt finns det en introduktions regel samt en eliminations intro:

- Om  $t$  är en term i språket får man dra sträck (och inte skriva något över sträcket) och dra slutsatsen  $t \doteq t$
- Om vi ha 2 termer med likhetstecken,  $s \doteq t$  och så har vi en formel  $\varphi$  som har en fri variabel  $x$  sådan att  $\varphi[s/x]$ . Då säger likhetselimination att vi kan dra slutsatsen  $\varphi[t/x]$
- Härledda regler:
  - $s \doteq t \Leftrightarrow t \doteq s$  (symmetri)
  - $s \doteq t \wedge t \doteq u \Leftrightarrow s \doteq u$  (transitivitet)
  - $s \doteq t \quad r[s/x] \doteq r[t/x]$  (term)

Vi har även infört kvantorer, dessa måste behandlas! Vi börjar med  $\forall$

- $\forall$ -intro  $\vdash \varphi(x)$  där  $x$  inte förekommer fritt i någon premiss som  $\varphi(x)$  beror på, dvs ovanför  $\varphi(x)$
- $\forall$ -elimination  $\varphi[t/x]$  där  $t$  är en term (tillåten att substituera för  $x$  i  $\varphi$ )

Givetvis får vi inte glömma  $\exists$  kvatorn!

- $\exists$ -intro  $\varphi[t/x]$  får vi införa  $\exists$  och dra slutsatsen  $\exists x \varphi(x)$
- $\exists$ -elimination  $\exists x \varphi(x)$ . Låt  $\varphi(x)$  vara en premiss och vi vill bevisa en formel  $\psi$  där  $x$  inte får förekomma fritt i  $\psi$  eller i annan premiss. Då får vi dra slutsatsen  $\psi$  och stryka  $\varphi(x)$  via  $\exists$ -elimination

## 18. FULLSTÄNDIGHET I 1:A ORDNINGENS LOGIKK

## 18.1. Repetition från satslogiken.

Vi påminner oss om att given en mängd av satser  $\Gamma$  så kallas den *konsistent* om  $\Gamma \not\vdash \perp$  och inkonsistent om  $\Gamma \vdash \perp$ .

För att visa detta i predikatlogiken så behöver vi visa att det inte finns ett bevissträd för detta. För att kunna göra detta behöver vi ha *Fullständighetssatsen*

## 18.2. Sundhetssatsen.

Låt  $\sigma$  vara en signatur och  $\Gamma$  en mängd satser i  $\text{LR}(\sigma)$  och  $\varphi$  en sats i  $\text{LR}(\sigma)$

Då gäller  $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

Dvs om det finns bevis i naturlig deduktion av  $\varphi$  från  $\Gamma$ , så är  $\varphi$  en logisk konsekvens av  $\Gamma$

**Bevis 18.1: Sundhetssatsen**

Detta är bara en skiss.

Visa att alla regler är sunda (bevarar sanning)

Exempelvis, betrakta  $\forall$ -intro regeln som säger att givet ett  $\varphi(x)$  får vi skriva  $\forall \varphi(x)$  förutsatt att  $x$  ej förekommer fritt i premisser ovanför  $\varphi(x)$ . Vi vill visa att  $\Gamma \vdash \forall x \varphi(x)$ , låt  $\mathcal{A}$  vara en modell för  $\Gamma$ , detta följer från att  $\Gamma \models \varphi(x)$  □

## 18.3. Adekvathetssatsen.

Låt  $\sigma$  vara en signatur och  $\Gamma$  en mängd satser i  $\text{LR}(\sigma)$  och  $\varphi$  en sats i  $\text{LR}(\sigma)$

Då gäller att  $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Dvs, om  $\varphi$  är logisk konsekvens av  $\Gamma$  så finns bevissträd i naturlig deduktion av  $\varphi$  från premisser i  $\Gamma$

Varje gång vi har en logisk konsekvens måste vi visa att det går att visa med naturlig deduktion.

**Bevis 18.2: Adekvathetssatsen**

Vi kommer skissa detta genom en så kallad sökmetod för att försöka avgöra om  $\Gamma \models \varphi$

Att leta efter ett motexempel i logisk konsekvens handlar om att hitta att allting i  $\Gamma$  sann men  $\varphi$  falsk. Detta gör man genom att stycka upp formlerna och det kommer bli som ett träd.

Om  $\Gamma \not\models \varphi$  så kommer metoden hjälpa att hitta motexempel. Däremot, om  $\Gamma \models \varphi$  så kommer metoden hjälpa oss att förstå att motexempel saknas samt hjälpa att inse naturlig deduktionsbevis finns

Antag  $\Gamma \models \varphi$ , gör ett sökträd (även kallat sekventträd). Alla vägar kommer få  $X$ . Man visar sedan att träd där alla vägar får  $X$  kan omvandla till bevissträd i naturlig deduktion för  $\Gamma \vdash \varphi$  □

**Sats 18.1: Följsats från Fullständighetssatsen i predikatlogiken**

Låt  $\Gamma$  vara en mängd satser.

$\underbrace{\Gamma \text{ konsistent}}_{\Gamma \not\vdash \perp} \Rightarrow \underbrace{\Gamma \text{ satisfierbar}}_{\Gamma \text{ har en modell}}$

**Bevis 18.3:**  $\Rightarrow$ 

$$\Gamma \not\models \perp \Leftrightarrow \text{inte } (\Gamma \vdash \perp) \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Fullständighetssatsen}} \quad \text{inte } (\Gamma \models \perp)$$

$$\Leftrightarrow \text{det finns struktur } \mathfrak{A} \text{ så att } \mathfrak{A} \models \Gamma \text{ och } \underbrace{\mathfrak{A} \not\models \perp}_{\text{gäller alltid}}$$

$\Gamma$  har en modell □

**Sats 18.2: Kompakthetssatsen**

Låt  $\Gamma$  vara en mängd av satser. Då gäller:

- $\Gamma$  har en modell  $\Leftrightarrow$  varje ändlig delmängd av  $\Gamma$  har en modell

**Bevis 18.4:**  $\Rightarrow$ 

Varje modell för  $\Gamma$  är också en modell för dess delmängder □

**Bevis 18.5:**  $\Leftarrow$ 

Bevisas kontrapositivt. Antag att  $\Gamma$  saknar modell, visa att då gäller inte denna sida av pilen.

Från Sats 18.1 vet vi då att  $\Gamma$  är inkonsistent, dvs  $\Gamma \vdash \perp$

Låt  $D$  vara ett bevissträd som visar  $\perp$ . Vi vet att dessa inte är entydiga, så låt därför  $\Gamma_0$  vara infimum av  $\Gamma$  sådant att bevisträdet är så litet som möjligt.

Då vet vi att  $\Gamma_0 \vdash \perp$  och  $\Gamma_0$  är ändlig och  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ .

Från detta vet vi även att  $\Gamma_0 \models \perp$ , men  $\perp$  är inte sann i någon modell (per definition), alltså saknar  $\Gamma_0$  modell

Alltså finns ändlig delmängd av  $\Gamma$  så att  $\Gamma_0$  saknar modell. □

**18.4. Tillämpning av Kompakthetssatsen.**

Antag  $\Gamma$  har godtyckligt stora ändliga modeller.

Då har  $\Gamma$  en oändlig modell (från Kompakthetssatsen)

**Bevisskiss**

$\lambda_n$ : det finns minst  $n$  element (detta får vi skriva så fort vi har tillgång till likhetsstecknet).

Ansätt  $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\lambda_n : n \geq 1\}$  Observera, varje modell för  $\Gamma^*$  måste vara oändlig

Låt  $\Gamma_0$  vara ändlig delmängd av  $\Gamma^*$ .  $\Gamma_0$  innehåller ändligt många av  $\lambda$  formlerna.

Låt  $k$  så att  $\lambda_n \in \Gamma_0 \Rightarrow n < k$   $k$  anger supremum

Enligt antagande finns det modell för  $\Gamma$  som har minst  $k$  element.

Säg  $\mathfrak{A}$  är en modell. Då är  $\mathfrak{A} \models \Gamma$  och  $\mathfrak{A}$  har minst  $k$  element. Detta medför att  $\mathfrak{A}$  är en modell för  $\Gamma_0$  (från Kompakthetssatsen), alltså varje ändlig delmängd av  $\Gamma^*$  har en modell, och från Kompakthetssatsen har  $\Gamma^*$  har en modell, säg  $\mathfrak{A}^* \Rightarrow \mathfrak{A}^*$  är en modell för  $\Gamma$  och  $\mathfrak{A}^*$  är oändlig