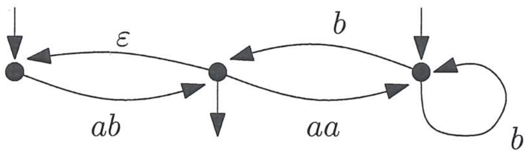
UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

DUGGA
**Automatateori**
2021-09-28

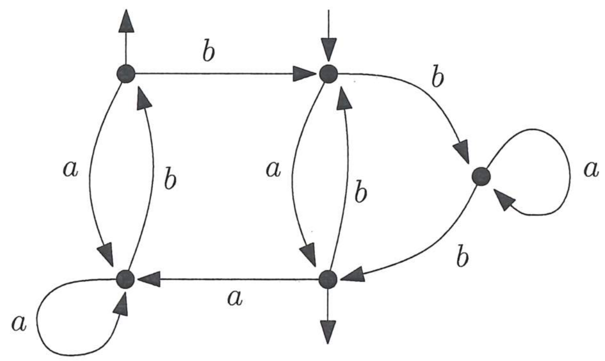
*Skrivtid: 14:00 – 16:00. Tillåtna hjälpmedel:* Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). Varje uppgift 1–4 ger maximalt 5 poäng.

**1.** Konstruera, med delmängdsalgoritmen, en DFA som accepterar samma språk som följande NFA:




**2.** Konstruera, med tillståndselimination, ett reguljärt uttryck för språket som accepteras av NFA:n i uppgift 1.

**3.** Konstruera, med särskiljandealgoritmen, en minimal DFA som accepterar samma språk som följande DFA. Om DFA:n redan är minimal så måste detta ändå motiveras med särskiljandealgoritmen.



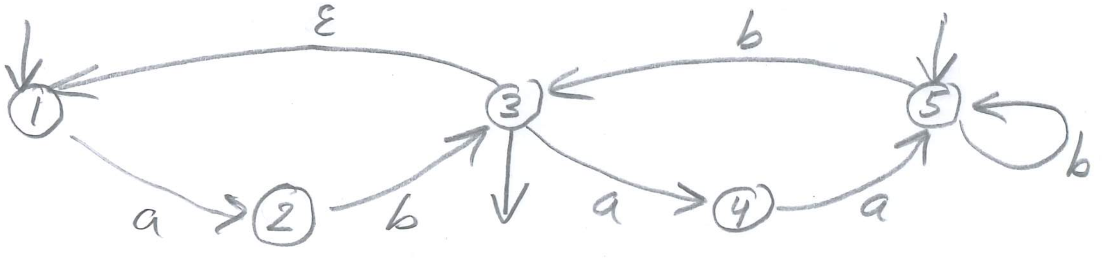

**4.** Bestäm för vart och ett av språken om det är reguljärt eller inte. Om det är reguljärt så ska det visas med hjälp av en NFA, DFA, reguljärt uttryck och/eller slutenhetsegenskaper; om det inte är reguljärt ska det visas med särskiljandesatsen eller pumpsatsen.

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : \ w$ börjar med prefixet $ab$ och har ett udda antal $b\}$
$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* : \ w$ börjar med prefixet $ab$ och har minst dubbelt så många $b$ som $a\}$

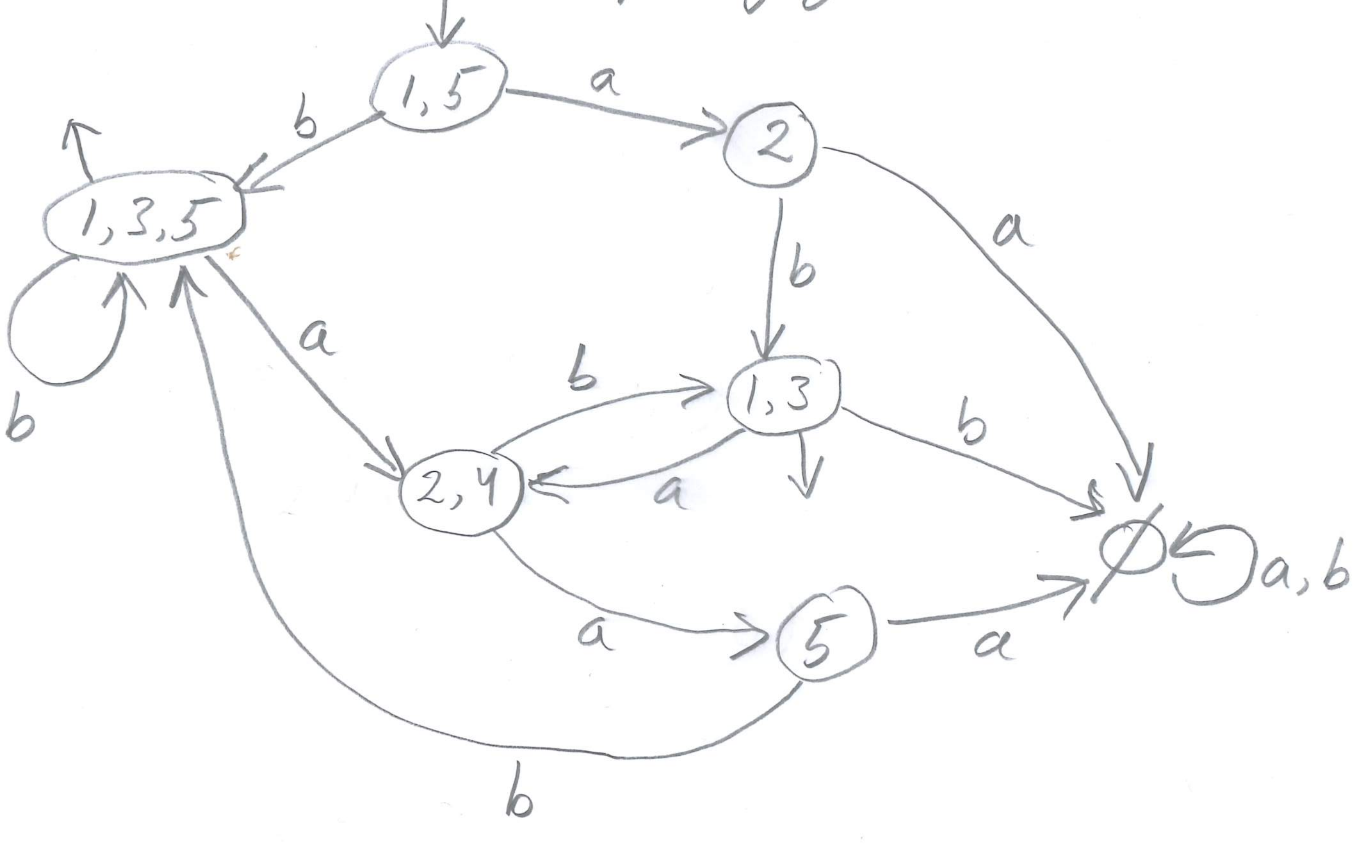
***Lycka till!***

# Dugga 2021-09-28
## Lösningsförslag

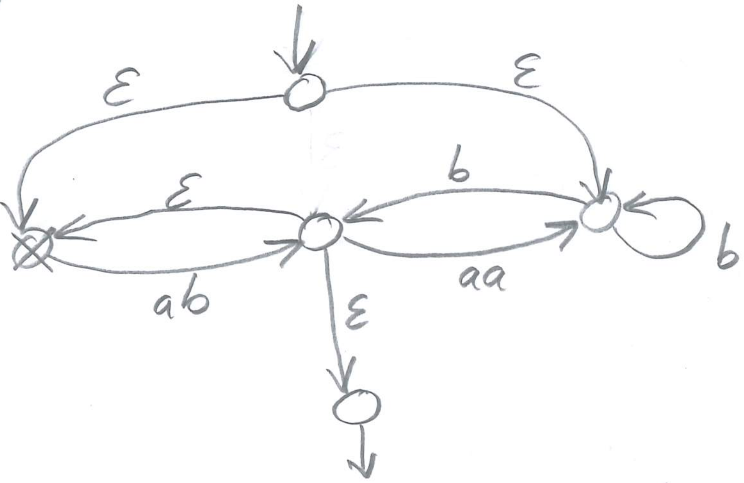
1. Först görs NFA:n icke-glupsk och tillstånden namnges:



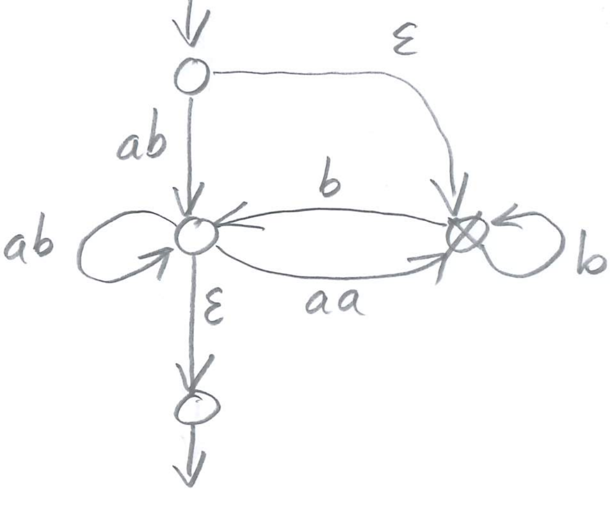

Sedan tillämpas delmängdskonstruktionen, vilket ger en DFA som accepterar samma språk som den ursprungliga NFA:n.

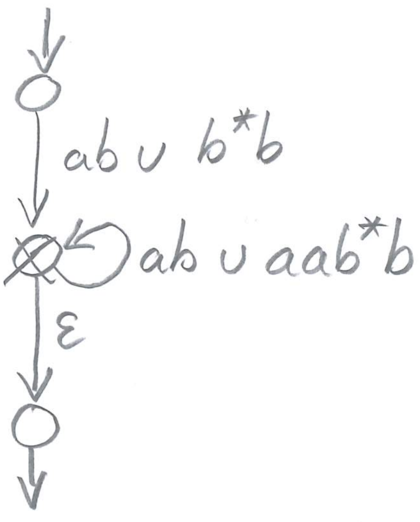


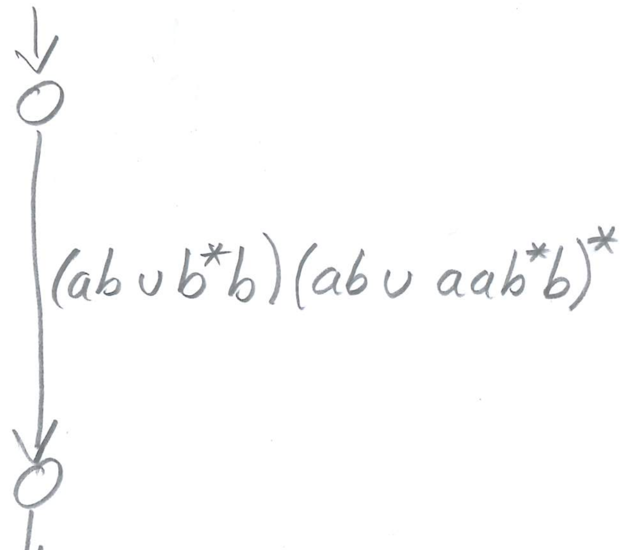
2. Först läggs ett nytt starttillstånd och nytt accepterande tillstånd till.




Sedan elimineras de gamla tillstånden, ett efter ett, och förenklingar görs när möjligt.

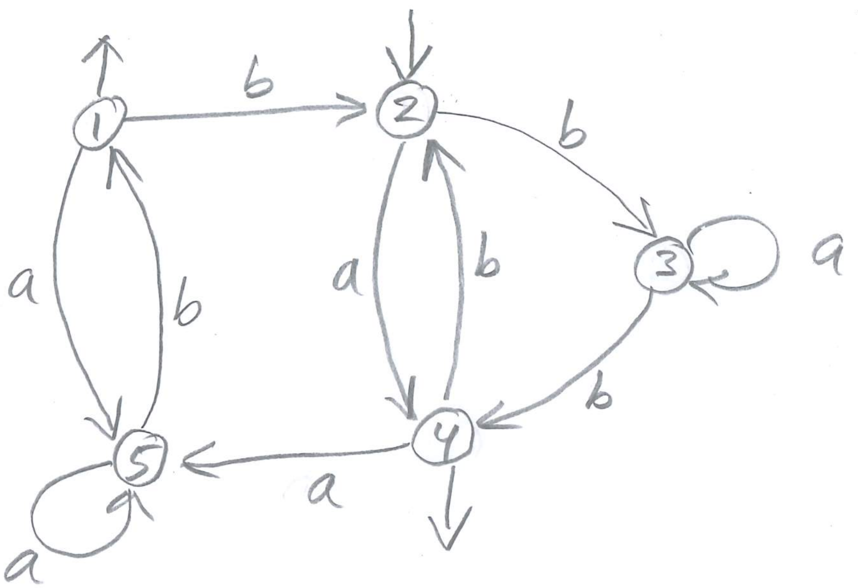



Det sista uttrycket $(ab \cup b^*b)(ab \cup aab^*b)^*$ beskriver språket som NFA:n accepterar.

3. Jag numrerar först tillstånden för att sedan göra en tabell av tillståndsövergångarna.

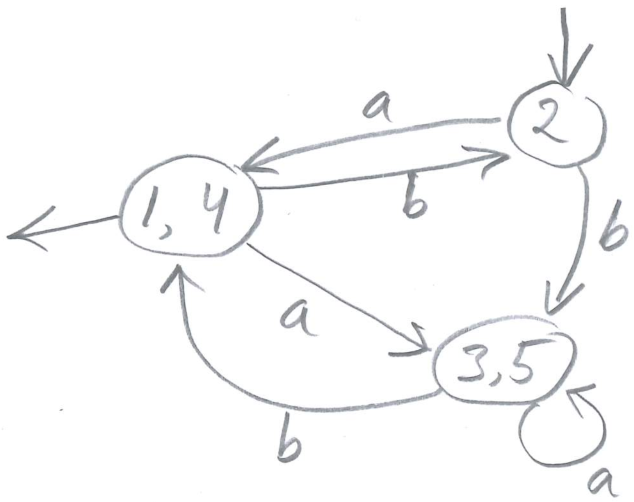


| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 5 | 4 | 3 | 5 | 5 |
| b | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 |

Sedan används särskiljandekonstruktionen på tillstånden.

| nivå | uppdelning | |
|---|---|---|
| 1 | {1, 4} {2, 3, 5} | uppdelning i accept. och icke-accept. |
| 2 | {1, 4} {2} {3, 5} | a driver DFA:n från 2 till 4 och från 3 till 3, där 3 och 4 tillhör olika delar på nivå 1. |
| 3 | {1, 4} {2} {3, 5} | Det går inte att dela upp mängderna mer enligt konstruktionens kriterier. |

Eftersom nivå 2 och 3 är likadana så är vi klara med uppdelningen av tillståndsmängden och kan konstruera en minimal DFA med samma språk.




4. $L_1 = A \cap B$ där

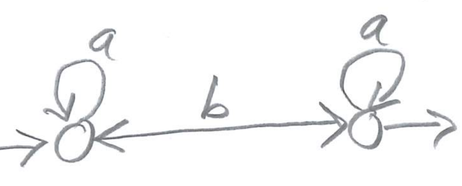
$A = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ börjar med } ab\}$ och

$B = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ har udda antal } b\}$.

Jag påstår att $L_1$ är reguljärt och eftersom reguljära språk är slutna under operationen '$\cap$' så räcker det att visa att språken $A$ och $B$ är reguljära.

Ett reguljärt uttryck för $A$ är $ab(a \vee b)^*$.

En DFA som accepterar $B$ är



Alltså är $A$ och $B$ reguljära.

$L_2$ är <u>inte</u> reguljärt.

<u>Bevis med särskiljandesatsen.</u>

Låt $A = \{ab^{2(n+1)} : n \in \mathbb{N}\}$

så $A$ är <u>oändlig</u>. Vi visar att $L_2$ särskiljer $A$. Då följer från särskiljandesatsen att $L_2$ inte är reguljärt.

Så antag att $x, y \in A$ är olika. Då finns $i, j \in \mathbb{N}$ så att $i \neq j$, $x = ab^{2(i+1)}$ och $y = ab^{2(j+1)}$. Om $i > j$ så väljer vi $z = a^i$ och då följer att $xz = ab^{2(i+1)}a^i \in L_2$ men $yz = ab^{2(j+1)}a^i \notin L_2$.

Om $i < j$ så väljer vi $z = a^j$ och då följer att $xz = ab^{2(i+1)}a^j \notin L_2$ men $yz = ab^{2(j+1)}a^j \in L_2$.

<u>Bevis med pumpsatsen.</u>

1. $ab^{2(n+1)}a^n \in L_2$ för alla $n \in \mathbb{N}$ så $L_2$ är oändlig.

2. Antag att $L_2$ är reguljär.
3. Låt $N$ vara talet som anges för $L_2$ av den reguljära pumpsatsen.
4. Låt $u = ab^{2(N+1)}$, $w = a^N$, $v = \varepsilon$, så $uwv = ab^{2(N+1)}a^N \in L_2$ och $|w| \geq N$.
5. Antag att $w = xyz$ och $y \neq \varepsilon$. Eftersom $w$ bara innehåller a:n så $xy^2z = a^k$ för något $k > N$ och därmed $uxy^2zv = ab^{2(N+1)}a^k \notin L_2$ eftersom strängen innehåller $k+1$ a:n och $2(N+1)$ b:n (och $k+1 > N+1$).

6. Slutsatsen i punkt 5 motsäger den reguljära pumpsatsen så $L_2$ kan <u>inte</u> vara reguljär.