Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Teknisk databehandling
Per Wahlund, tel. 471 2986, 0702-634722

Tentamen i Beräkningsvetenskap II, 5.0 hp, 2011-06-01

Skrivtid: $14^{00} - 17^{00}$ (OBS! *Tre* timmars skrivtid!)
Hjälpmedel: Bifogat formelblad, miniräknare. Det är också tillåtet att använda Mathematics Handbook eller Physics Handbook. *För fullt uppfyllda mål och kriterier på uppgifterna krävs fullständiga räkningar och utförliga resonemang samt motivering till alla svar.*

Kursmål (förkortade), hur de täcks i uppgifterna och maximalt betyg

Fråga nr	Nyckelbegrepp	Algoritmer	Analys	Argumentation
1		3		3
2	3	3	3	
3			3	
4	3	3	3	
5	3			3
6	4		5	5
7		5	4	
8		5		5

Del A

1. På en ort hade man mätt temperaturen under dagen vid olika klockslag, och fått följande resultat

tid	6	8	10	12	14	16	18
$temp$	10.3	14.2	17.5	19.6	20.3	19.4	17.3

   Välj ut några lämpliga tidpunkter och använd dessa för att med interpolation bestämma vad temperaturen var kl. 13. Använd Newtons interpolationsmetod. Ge argument för att de utvalda punkterna och det gradtal du valt på polynomet är lämpliga.

2. Gör ett steg med Eulers explicita metod, (Euler framåt), på problemet

$$\begin{cases} y' = \cos y \cdot \sin t & \qquad 1 \leq t \\ y(1) = 0.6 \end{cases}$$

Använd steglängd $h = 0.2$.

Om man fick veta felet i det värde man fick för y(1.2) var högst 0.004, uppskatta med hjälp av detta hur många steg man skulle behöva göra på intervallet $[1, 1.2]$ för att med Eulers explicita metod få ett värde på y(1.2) som har 5 korrekta decimaler.

3. Antag att vi har differentialekvationen

$$y' = \lambda y.$$

(a) Visa att Heuns metod ger differensapproximationen

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n + \frac{h^2\lambda^2}{2} y_n.$$

(b) Ställ med hjälp av ovanstående upp det villkor som ska gälla för att Heuns metod ska vara stabil för differentialekvationen $y' = \lambda y$. Du behöver inte lösa ut explicit vad kvantiteten λh ska uppfylla.

4. En komplicerad integral i fyra dimensioner hade beräknats med en Monte Carlo-metod genom att man upprepade gånger hade slumpat ut 1000 punkter i integrationsområdet och på ett korrekt sätt tagit medelvärdet av de funktionsvärden man fått. De 6 försöken hade gett följande approximationer till integralen:

```
0.6617
0.6588
0.6552
0.6583
0.6568
0.6590
```

Vilket värde kan man anse att integralen skulle ha, baserat på dessa försök?

Genom att tillämpa statistisk analys på ovanstående data, kan man konstatera att felet troligen är högst 0.0018. Uppskatta hur litet felet hade varit om man hade använt 1000000 (en miljon) punkter i varje försök.

5. (a) Ge ett exempel på när en Monte-Carlo metod kan vara att föredra framför en deterministisk metod, och förklara också varför.

   (b) Förklara kortfattat begreppet *adaptiv metod* för lösning av en ordinär differentialekvation.

Del B

6. Man vill lösa en differentialekvation $y' = f(x, y)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Man har tillgång till två lösare:

   i) En explicit lösare med egenskaperna: Totalfelet är högst $(b - a)C_1h^3$, (där $(b - a)$ motsvarar den intervallängd man löser över), stabilitetsvillkoret är $|\lambda h| < 2$, och varje steg tar 10^{-6} sek. att utföra.

   ii) En implicit lösare med egenskaperna: Totalfel högst $(b-a)C_2h^2$, stabilitetsvillkor $|\lambda h| < 50$, och varje steg tar 10^{-5} sek. att utföra.

   Nu vill man lösa en diff.ekvation, som har sådana egenskaper att konstanterna i fel- och stabilitetsgränserna är $C_1 = 60$, $C_2 = 3$ och $\lambda = 1000$. Man vill ha en lösning så att totalfelet för $x = 1$ är högst ε. Utred för vilka värden på ε som noggrannhets- resp. stabilitetskraven sätter gränsen för hur stora steg man kan ta. Ange också för vilka noggrannhetskrav, som det tidsmässigt kan vara fördelaktigt att använda den explicita lösaren, trots dess sämre stabilitetsegenskaper.

7. Man vill simulera en partikel som hoppar på ett rutnät i 3 dimensioner. Partikeln kan i varje hopp endast gå ett steg i positiv led i *en* av riktningarna och sannolikheten för att göra ett steg i riktning j, $1 \leq j \leq 3$, ges av $P(j, p_0)$ där p_0 är nuvarande position. Detta betyder att $\sum_{j=1}^{3} P(j, p_0) = 1$ gäller för alla p_0 .

   (a) Skissa en algoritm, t.ex. formulerad i Matlabkod, som med en Monte Carlometod uppskattar hur många hopp man i genomsnitt gör innan man första gången är S steg från startpositionen P_0 i någon riktning.

   (b) Antag att man gör 10^3 simuleringar av ovanstående och får ett konfidensintervall
   $[\tilde{m} - e_1, \tilde{m} + e_1]$ kring medelvärdet $\tilde{m}$. Ungefär hur många simuleringar får man göra för att få ett konfidensintervall $[\tilde{m} - e_2, \tilde{m} + e_2]$?

8. Antag att man har N stycken x-värden $x_1, \ldots x_N$ och motsvarande y-värden $y_1, \ldots y_N$, och att dessa y förväntas beskriva en exponentiellt avtagande funktion av x .

   Betrakta problemet att minstakvadratanpassa en funktion innehållande en exponentialfunktion till dessa värden, (vi tänker oss att N är ett stort tal). Redogör för hur man genomför detta i nedanstående fall, och jämför hur pass arbetsamt det skulle vara jämfört med ”vanlig” minstakvadratanpassning med polynom.

   (a) Approximation där exponentialfunktionen är känd, dvs.

   $$y \sim a + b \cdot e^{Cx}$$

   där a och b söks, men C är känd, t.ex. $C = -0.1$.

   (b) Approximation där konstanten är känd, dvs.

   $$y \sim A + b \cdot e^{cx}$$

   där b och c söks, men A är känd, t.ex. $A = 0.2$.

   (c) Kan man använda metoderna i de två ovanstående fallen för att ställa upp någon algoritm för att lösa det generellare fallet

   $$y \sim a + b \cdot e^{cx}$$

   där alla tre a, b och c skall beräknas?