Övningar 7: svar/lösningar till de flesta uppgifterna.

1.(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x) \land \forall x Q(x)}{\forall x P(x)}\,(\land E)}{P(y)}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x P(x) \land \forall x Q(x)}{\forall x Q(x)}\,(\land E)}{Q(y)}\,(\forall E)}{\dfrac{P(y) \land Q(y)}{\forall x (P(x) \land Q(x))}\,(\forall I)}\,(\land I)$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x (P(x) \land Q(x))}{P(u) \land Q(u)}\,(\forall E)}{P(u)}\,(\land E) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x (P(x) \land Q(x))}{P(u) \land Q(u)}\,(\forall E)}{Q(u)}\,(\land E) \qquad \dfrac{\forall y (Q(y) \to R(y))}{Q(u) \to R(u)}\,(\forall E)}{R(u)}\,(\to E)}{\dfrac{P(u) \land R(u)}{\forall z (P(z) \land R(z))}}\,(\land I)$$

Obs! u antas vara en ny variabel.

Vi behöver anta att u är substituerbar för i $P(x)$ och $Q(x)$ och substituerbar för y i $Q(y)$ och $R(y)$. Annars stämmer inte sekventen.

Dessa krav är uppfyllda om P, Q och R är relationssymboler.

(c)

$$\dfrac{\exists(P(x)\wedge Q(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P(y)\wedge Q(y)}^{1}}{P(y)}(\wedge E)}{\exists x P(x)}(\exists I) \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{P(y)\wedge Q(y)}^{1}}{Q(y)}(\wedge E)}{\exists x Q(x)}(\exists I)}{\exists x P(x)\wedge \exists x Q(x)}(\wedge I)}{\exists x P(x)\wedge\exists x Q(x)}(\exists E)^{1}$$

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{Q(y)}}{\exists x Q(x)}(\exists I) \qquad \neg\exists x Q(x)}{\bot}(\neg E)}{\neg Q(y)}(\neg I)^{1}}{\forall x \neg Q(x)}(\forall I)$$

(e)

$$\dfrac{\exists x \neg P(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\neg P(y)}^{2} \quad \dfrac{\cancel{\forall x P(x)}^{1}}{P(y)}(\forall E)}{\bot}(\neg E)}{\neg\forall x P(x)}(\neg I)^{1}}{\neg\forall x P(x)}(\exists E)^{2}$$

Obs! Vi kan anta att y inte förekommer i P, för annars väljer vi bara en ny variabel (det finns ju oändligt många).

(f)

$$\dfrac{\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)}{P(y)}(\forall E)}{P(y) \lor Q(y)}(\lor I)}{\forall x(P(x) \lor Q(x))}(\forall I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x Q(x)}{Q(y)}(\forall E)}{P(y) \lor Q(y)}(\lor I)}{\forall x(P(x) \lor Q(x))}(\forall I)}{\forall x(P(x) \lor Q(x))}(\lor E)$$

(h) Ledning: Visa först $\vdash P(y) \lor \neg P(y)$ på samma sätt som i satslogiken och använd sedan $(\forall I)$.

2.

$$\dfrac{\dfrac{P(c) \qquad \dfrac{\cancel{\forall x \neg P(x)}^{1}}{\neg P(c)}(\forall E)}{\bot}(\neg E)}{\neg \forall x \neg P(x)}(\neg I)^{1}$$

3. Ledning: Konstruera först ett bevis av $\neg \forall x \neg P(x) \vdash \exists x P(x)$.

Kalla beviset

$$\begin{array}{c} \neg \forall x \neg P(x) \\ H \\ \exists x P(x) \end{array}.$$

Låt

$$\begin{array}{c} P(c) \\ D \\ A \end{array}$$

vara som i uppgiftens formulering.

Då kan ett nytt bevis göras så här (4)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg\forall x\neg P(x)\\ H\\ \exists x P(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{P(c)}^{1}\\ D\\ A\end{array}}{A}\ (\exists E)^{1}$$

Detta visar att $\neg\forall x\neg P(x) \vdash A$.

4. Ledning: Man behöver bevisreglerna för '$=$'. (Det blir en lång härledning.)

5. (a) Eftersom φ är en sats (dvs. sluten formel så är φ antingen sann eller falsk i $\mathcal{A}$ (enligt Tarskis sanningsdefin.)

(b) Tag t.ex. ψ att vara

$\exists x \exists y (\neg x = y)$.

Då gäller $\nvDash \psi$ (dvs. ψ är <u>inte</u> valid) för om strukturen $\mathcal{A}$ bara har ett element i sin domän så $\mathcal{A} \nvDash \psi$.

Och $\nvDash \neg\psi$ för om strukturen $\mathcal{B}$ har minst två element i sin domän så $\mathcal{B} \nvDash \neg\psi$.

(c) Nej, om $\nvdash \psi$ så kan man <u>inte</u> (i allmänhet) dra slutsatsen att $\vdash \neg\psi$.
Låt t.ex. ψ vara som i del (b).
Då gäller $\nvDash \psi$ och $\nvDash \neg\psi$.
Om vi skulle ha $\vdash \psi$ så skulle det följa, pga sundhetssatsen, att $\vDash \psi$.
Men vi vet att $\nvDash \psi$ så vi måste ha $\nvdash \psi$. På samma sätt följer att $\nvdash \neg\psi$.

6. (a) $\neg(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$ eq

$\neg \forall x (P(x) \wedge \forall y Q(y))$ eq

$\neg \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$ eq

$\exists x \neg \forall y (P(x) \wedge Q(y))$ eq

$\exists x \exists \neg (P(x) \wedge Q(y))$, en prenex normalform.

(b) $\exists z \neg \forall x (R(x,z) \to \exists y R(y,z))$ eq

$\exists z \exists x \neg (R(x,z) \to \exists y R(y,z))$ eq

$\exists z \exists x (R(x,z) \wedge \neg \exists y R(y,z))$ eq

$\exists z \exists x (R(x,z) \wedge \forall y \neg R(y,z))$ eq

$\exists z \exists x \forall y (R(x,z) \wedge \neg R(y,z))$,

en prenex normalform.

(c) $\forall x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x)) \to R(a,a)$ eq

$\neg \forall x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x)) \vee R(a,a)$ eq

$\exists x \neg \exists y (R(x,y) \vee R(y,x)) \vee R(a,a)$ eq

$\exists x \forall y \neg (R(x,y) \vee R(y,x)) \vee R(a,a)$ eq

$\exists x (\forall y \neg (R(x,y) \vee R(y,x)) \vee R(a,a))$ eq

$\exists x \forall y (\neg (R(x,y) \vee R(y,x)) \vee R(a,a))$,

en prenex normalform.

7. (a) Välj t.ex. φ som $\neg \exists x P(x,x)$.

(b) Välj t.ex. τ som

$$\forall x \exists y (\neg x = y \wedge P(x,y) \wedge \neg \exists z (\neg x = z \wedge \neg y = z \wedge P(x,z) \wedge P(y,z))).$$

τ "säger" att för alla x så finns y som är "större" än x och det finns inget z "mittemellan" x och y.

(c) Välj t.ex. ξ som

$$\forall x \exists y (P(y,x) \wedge \neg(x = y)).$$

9 Låt oss kalla två element a och b från domänen till en partiell ordning $\mathcal{A}$ för ojämförbara om

$$\mathcal{A} \models (\neg a \leq b \wedge \neg b \leq a).$$

(a) Låt t.ex. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} ;;; \leq^{\mathbb{N}} \rangle$ där $\leq^{\mathbb{N}}$ är den vanliga ordningen på $\mathbb{N}$. Då gäller $\mathcal{A} \models \varphi$.

Men om $\mathcal{B}$ är en partiell ordning med (minst) två ojämförbara element, tex $\mathcal{B} \models \langle \{1,2\};;;\emptyset \rangle$, så $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

(b) Om $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ är som i del (a) så $\mathcal{A} \models \psi$ och $\mathcal{B} \models \neg\psi$.

<u>Obs!</u> Det finns många andra val av $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \varphi$ och $\mathcal{B} \models \neg\varphi$, och samma sak för ψ.

(c) Vi har sett att φ är sann i någon struktur och falsk i någon annan struktur. Alltså är φ inte en logisk sanning. På samma sätt följer att inte heller $\neg\varphi$, ψ eller $\neg\psi$ är en logisk sanning.