

Uppgifter till Lektion 2.

1. (a) Betrakta den projektiva punkten $P = (1, 4, 2) \in \mathbb{R}P^2$. Ange dess koordinater (a, b) i de tre affina standardkartorna.
(b) Gör detsamma för punkten $Q = (0, 2, 2)$, om det är möjligt.
(c) I en av kartorna, kalla den $K \cong \mathbb{R}^2$, är det inte möjligt att lösa uppgiften i (b). Det betyder att $Q \in L_\infty$ för denna karta. Ange ekvationer för de affina linjer i K som är sådana att motsvarande projektiva linje innehåller Q .
2. (a) Punkterna $(0, -3)$ och $(1, 2)$ i xy -kartan är givna. Bestäm en ekvation $ax + by = c$ för linjen genom dem. Bestäm en homogen ekvation på formen $Ax + By + Cz = 0$ för motsvarande projektiva linje.
(b) Givet de två projektiva punkterna $(4, -1, 3)$ och $(2, 5, 1)$ bestäm en ekvation för den projektiva linjen genom dem.
(c) De två projektiva linjerna $x + 2y - 6z = 0$ och $3x + 4y - 15z = 0$ skär varandra i en entydig punkt. Beräkna denna.

3. (a) Ange ekvationen för kurvan

$$z^3 = x^2z - 2xy^2 + 3y^3$$

i var och en av de affina standardkartorna.

- (b) Bestäm homogena koordinater för alla skärningspunkter mellan kurvan i (a) och den projektiva linjen $y = 0$.
4. Beräkna hur många gånger nedanstående kurvor (som är givna i xy -kartan) skär linjen i oändligheten.
 - (a) $x^4 + 3x^2y = 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 2y - 6$.
 - (b) $y^2 = x^3 + 4x$.
 - (c) $x^3 - 3x^2y + 2xy - y = 10$

5. Beräkna skärningstalet mellan de projektiva kurvorna i den angivna punkten.

- (a) $xy = 2x^2 + z^2$ och $y^2 + yz = 4x^2$ i punkten $(1, 2, 0)$.
- (b) Beräkna skärningstalet mellan $x^3 + zy^2 = 4z^3$ och $x^3y + y^2z^2 = 4z^4$ i punkten $(0, 2, 1)$.