UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

TENTAMEN
Logik och bevisteknik
2021-05-31

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: pennor, radergummi, linjal, papper (det sistnämnda tillhandahålles). ***Alla svar (utom till uppgift 4) måste motiveras på lämpligt sätt.*** Om man har fått minst 10, respektive minst 15, poäng på duggan som ägde rum i april 2021 så får man uppgifterna 1–2, respektive 1–3, tillgodoräknade (dvs man får full poäng på dem utan att behöva lösa dem). Maximalpoängen är 40. För att få betyg 3, 4 respektive 5 krävs minst 20, 26 respektive 32 poäng.

1. Vi antar att p, q och r tillhör en satslogisk signatur. Låt φ och ψ beteckna två formler enligt följande (3p)

$$\begin{aligned} \varphi : &\quad (p \leftrightarrow \neg r) \to \neg(p \to q) \\ \psi : &\quad q \to \neg(p \vee \neg(q \wedge \neg r)) \end{aligned}$$

(a) Är φ en logisk konsekvens av ψ?
(b) Är ψ en logisk konsekvens av φ?
(c) Är någon av φ eller ψ en tautologi (valid formel)?

2. Finn en KNF (konjunktiv normalform) som är ekvivalent med φ i uppgift 1. (2p)

3. Gör härledningar i naturlig deduktion som visar att följande sekventer är korrekta: (4p)
(a) $\{\varphi \wedge \neg\psi,\ \varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi$.
(b) $\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.

4. Låt 'Känner' vara en 2-ställig relationssymbol och låt 'Anna' vara en konstantsymbol. Översätt följande påståenden till formler i första ordningens logik med dessa symboler. (6p)
(a) Alla utom Anna känner någon.
(b) Någon känner Anna, men inte alla känner Anna.
(c) Alla som känner Anna känner någon som Anna känner.

5. Låt $\sigma = \langle\ ;\ ;P, Q, R\rangle$ vara en första ordingens signatur med ställigheter $\langle\ ;\ ;1, 1, 2\rangle$. Låt $\mathcal{A} = \langle A;\ ;\ ;P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}\rangle$ vara en σ-struktur där $A =$, $P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$ och $R^{\mathcal{A}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$. För var och en av satserna nedan avgör om den är sann i $\mathcal{A}$ (och glöm inte att motivera svaren)? (4p)
(a) $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \to R(x, y))$.
(b) $\forall x \exists y R(x, y)$.

6. Låt P och R vara relationssymboler med ställigheter 1 och 2, respektive. Finn en prenex normalform som är ekvivalent med följande formel, och visa hur du har kommit fram till att formlerna är ekvivalenta: (3p)

$$(\forall x P(x)\ \to\ \neg\forall x R(x, y))\ \wedge\ \forall y R(z, y).$$

Fortsätter på nästa sida

7. Låt σ vara samma signatur som in uppgift 5. För var och en av följande sekventer ange om den stämmer eller inte och motivera svaret på lämpligt sätt. (8p)

(a) $\{\exists x P(x),\ \forall x(\neg P(x) \to Q(x))\} \ \vdash\ \forall x(Q(x) \vee \neg P(x))$.

(b) $\big\{\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ \exists x \neg P(x)\big\} \ \vdash\ \forall x Q(x)$.

(c) $\forall x \forall y\big(R(x,y) \ \to\ \big(P(x) \wedge Q(y)\big)\big) \ \vdash\ \forall x \forall y\big(R(x,y) \to \neg R(y,x)\big)$.

(d) $\big\{\forall x \forall y\big(R(x,y) \ \to\ \big(P(x) \wedge Q(y)\big)\big),\ \forall x\big(P(x) \to \neg Q(x)\big) \ \vdash$
$\forall x \forall y\big(R(x,y) \to \neg R(y,x)\big)$.

8. Med en *binär sträng* menar vi en ändlig följd av nollor och ettor, tex 010001101. Med en *tom (binär) sträng* menar vi en binär "sträng" som inte innehåller någon nolla eller etta alls, och den betecknar vi med ε. Vi säger att en binär sträng v är ett *prefix* till en binär sträng w om man genom att ta bort noll eller flera tecken i slutet på w kan få v. Tex är 0100 ett prefix till 0100011100 och till 0100, men 0100 är inte ett prefix till 011011. Den tomma strängen är ett prefix till alla binära strängar. Låt $\sigma_2 = \langle\ ;\ ; R\rangle$ vara en första ordningens signatur där R är en 2-ställig relationssymbol. Låt $\mathcal{B} = \langle B;\ ;\ ; R^{\mathcal{B}}\rangle$ där B är mängden av alla binära strängar och $R^{\mathcal{B}} = \{(a,b) \in B^2 :\ a \text{ är ett prefix till } b\}$.

(a) Konstruera en formel $\varphi(x,y,z)$ i $LR(\sigma_2)$ sådan att för alla $(a,b,c) \in B^3$, $\mathcal{B} \models \varphi(a,b,c)$ om och endast om c är den längsta binära strängen som är ett prefix till både a och b (2p)

(b) Konstruera en formel $\psi(x)$ i $LR(\sigma_2)$ sådan att för alla $a \in B$, $\mathcal{B} \models \psi(a)$ om och endast om $a = \varepsilon$. (1)

(c) Låt $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N};\ ;\ ; R^{\mathcal{N}}\rangle$ där $\mathbb{N}$ är mängden av alla ickenegativa heltal och $R^{\mathcal{N}} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a \leq b\}$. Låt $T_{\mathcal{B}}$ vara mängden av alla satser i $LR(\sigma_2)$ som är sanna i $\mathcal{B}$ och låt $T_{\mathcal{N}}$ vara mängden av alla satser i $LR(\sigma_2)$ som är sanna i $\mathcal{N}$. Är det så att varje $\varphi \in T_{\mathcal{N}}$ är en logisk konsekvens av $T_{\mathcal{B}}$? Är det så att varje $\psi \in T_{\mathcal{B}}$ är en logisk konsekvens av $T_{\mathcal{N}}$. Motivera svaren. (3p)

9. Betraka en ny härledningsregel som tillåter oss att dra slutsatsen φ om vi har härlett $\varphi \to \psi$ och ψ tidigare, dvs antag att vi har följande nya regel:

$$\frac{\underset{\varphi \to \psi}{H_1} \qquad \underset{\psi}{H_2}}{\varphi}$$

där H_1 och H_2 är härledningar med slutsatser $\varphi \to \psi$ och ψ, respektive. Visa att om vi lägger till denna regel till de övriga reglerna för naturlig deduktion så kommer inte längre sundhetssatsen att gälla. (4p)

Lycka till!