

Skrivtid: 9-14. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, räknedosa. Poäng: Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För Godkänd krävs minst 18p, för betyget fyra minst 25p och för betyget fem minst 32p. Kom ihåg att helhetsintrycket spelar en roll, så SKRIV SNYGGT OCH TYDLIGT och motivera dina räkningar.

1. Visa följande formel med induktion:

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2.$$

2. Bestäm det positiva heltal m som uppfyller

$$(23)_m \cdot (32)_m = (706)_m.$$

3. Vad blir resten vid division av 13^{13} med 5?

4. Visa att talet $\log_3 2$ är irrationellt.

5. Lös fullständigt den diofantiska ekvationen $6x + 9y = 15$.

6. Beräkna en största gemensam delare till de båda polynomen $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5$ och $x^3 + x^2 - 7x - 15$. Bestäm därefter samtliga nollställen till *det första* polynomet..

7.

- a) Undersök med avseende på reflexivitet, symmetri och transitivitet, den definition R på \mathbf{Z} , som definieras av $mRn \Leftrightarrow 3 \nmid m \cdot n$.
- b) Beskriv på sluten form eller rekursivt en bijektion mellan \mathbf{N} och de naturliga tal som är delbara med 3.
- c) Beskriv på samma sätt en bijektion mellan \mathbf{N} och de naturliga tal som *ej* är delbara med 3.

8. Polynomet $x^3 + ax^2 + bx - 9$ har reella koefficienter. Dess tre nollställen bildar en liksidig triangel i det komplexa talplanet och två av dem ligger på den imaginära axeln. Bestäm samtliga nollställen.

LYCKA TILL!