Tentamensskrivning i Reell analys, MMG600.
Tid: 2009-10-23, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga (språklexikon är tillåtet)
Telefonvakt: David Witt Nyström, 0703-088304

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. a) Definiera begreppet *metriskt rum*.

   b) Låt $M$ vara mängden av alla reellvärda talföljder $\mathbf{x} = (\mathbf{x_k})_{\mathbf{1}}^{\infty}$ sådana att $\sup_{k\geq 1} |x_k| < \infty$.
   Visa att $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{k}\geq\mathbf{1}} |\mathbf{x_k} - \mathbf{y_k}|$ definierar en metrik på $M$. (3p)

2. Låt $f$ vara en funktion från ett metriskt rum $X$ in i ett metriskt rum $Y$.

   a) Definiera vad som menas med att $f$ är *likformigt kontinuerlig* på $X$.

   b) Visa att, om $f$ är kontinuerlig på $X$ och $X$ är kompakt så är $f$ likformigt kontinuerlig på $X$. (3p)

3. För ett givet metriskt rum $X$, betecknar $\mathcal{C}(X)$ det metriska rum som består av mängden av alla kontinuerliga och begränsade reellvärda funktioner på $X$, försedd med supremumnormen. Visa att $\mathcal{C}(X)$ är fullständigt. (3p)

4. a) Definiera begreppet *hopningspunkt*.

   b) Ge exempel på en uppräknelig delmängd till $\mathbb{R}$ som har (åtminstone) alla tal $1/n$, $n$ ett positivt heltal, som hopningspunkter. Du behöver inte motivera.

   c) Finns det en uppräknelig delmängd till $\mathbb{R}$ vars hopningspunkter är *precis* talen $1/n$, $n$ ett positivt heltal? Motivera! (4p)

5. Låt $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ för $x \in [1, 2]$. Avgör om $f$ är en kontraktion på $[1, 2]$ och bestäm alla eventuella fixpunkter till $f$. (3p)

6. Låt $f(x, y) = (\cos xy, y^2 + \sin x)$. Visa att $f$ är lokalt inverterbar vid punkten $(\pi/2, 1)$ men inte vid $(0, 0)$. Låt $g$ beteckna den lokala inversen till $f$ vid $(\pi/2, 1)$ och bestäm den linjära approximationen av $g$ vid $f(\pi/2, 1)$. (3p)

7. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $f^{-1}(B)$ är begränsad för varje begränsad delmängd $B$ av $\mathbb{R}^m$. Antag att $S$ är en sluten delmängd av $\mathbb{R}^n$. Visa att $f(S)$ är sluten i $\mathbb{R}^m$. (3p)

8. Ett metriskt rum sägs vara *separabelt* om det har en uppräknelig tät delmängd. Visa att $\mathcal{C}([0, 1])$ är separabelt. (3p)

Tentamensskrivning i Reell analys, MMG600.
Tid: 2009-10-23, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga (språklexikon är tillåtet)
Telefonvakt: David Witt Nyström, 0703-088304

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 13 november. Ditt resultat meddelas via gu-mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut på expeditionen alla vardagar kl 8.30-13.00.