UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody

Prov i matematik
F2, IT2, W2, GyLärV1, KandDv3
Linjär algebra II
2022-01-12

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. Samtliga lösningar ska vara försedda med tydliga resonemang; ***ett svar utan resonemang kan inte ge full poäng****. Ett resultat på 18, 25 resp. 32 poäng garanterar betyg 3, 4 resp. 5. För dem som gick kursen under period 2 HT 2021 finns även ett alternativt sätt att räkna poäng, som står beskrivet i kursplaneringen.* ***An English version of the exam can be found below.*** *Lösningar på svenska eller engelska godtas. Lycka till!*

Notation: $\mathbb{P}_n$ *betecknar vektorrummet av alla reella polynom av grad högst* n.

1. Var och en av följande delfrågor ska besvaras med JA eller NEJ. Om svaret är JA måste ett exempel anges — inte en motivering. Om svaret är NEJ måste en kort motivering ges.

a) Finns det en diagonaliserbar 2×2-matris som inte är inverterbar?

b) Finns det en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ vars kärna har dimension 4 och vars bild har dimension 2?

c) Finns det tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$, sådana att ingen av dem är en multipel av någon av de andra två, men $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är linjärt beroende?

2. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ definieras av

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm matrisen till F med avseende på standardbaserna för $\mathbb{P}_2$ och $\mathbb{R}^2$. (Standardbasen för $\mathbb{P}_2$ är $(1, x, x^2)$.)

b) Ge, om möjligt, ett exempel på ett polynom $p(x)$ som inte är nollpolynomet och som ligger i kärnan av F. Avgör, utifrån det, om F är injektiv.

3. I vektorrummet $\mathbb{P}_3$ betraktar vi delmängden

$$\mathbb{U} = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p'(0) = K \text{ och } p'(1) = 0\}$$

där K är en reell konstant.

a) För vilket/vilka värden på K är $\mathbb{U}$ ett underrum? Motivera varför det är ett underrum i så fall, och varför det inte är ett underrum annars.

b) Välj K så att $\mathbb{U}$ är ett underrum, enligt ovan. Ange en bas för $\mathbb{U}$.

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm egenvärdena och de tillhörande egenvektorerna till F.

b) Är F diagonaliserbar? Motivera kort.

c) Finns det någon vektor i $\mathbb{R}^3$ som inte är en egenvektor till F? Ge i så fall ett exempel.

5. En kurva i planet ges av ekvationen

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + Kx_2^2 = 1,$$

där K är en reell konstant.

a) För vilka värden på K är kurvan en ellips?

b) Låt $K = 2$. Finn en ON-bas för planet så att ekvationen i de nya koordinaterna saknar blandade termer, dvs är på huvudaxelform/diagonalform. Ange även denna ekvation.

6. Denna uppgift handlar om vektorrummet $\mathbb{R}^3$ utrustat med standardskalärprodukten. Där betraktar vi linjen $\mathbb{L}$ genom origo, som spänns upp av vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm en ON-bas för det ortogonala komplementet till $\mathbb{L}$, dvs en ON-bas för $\mathbb{L}^\perp$.

b) Ange, i valfri bas, matrisen för den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av ortogonal projektion på $\mathbb{L}^\perp$. (Du bestämmer alltså själv vilken bas du vill använda.) Motivera kort.

7. Betrakta systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 10y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) &= 18y_1(t) - 11y_2(t) \end{cases}.$$

a) Finn den allmänna lösningen.

b) Finn den lösning som uppfyller $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 0$.

8. Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning, och låt A vara avbildningens matris med avseende på standardbasen. Antag dessutom att $A^2 = A$.

a) Visa att det för varje vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gäller att $v - F(v) \in N(F)$.

b) Visa att om en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ både uppfyller $\mathbf{v} \in N(F)$ och $\mathbf{v} \in V(F)$, så är $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(Kom ihåg att $N(F)$ betecknar kärnan, dvs nollrummet, av F, och $V(F)$ betecknar bilden, dvs värderummet, av F.)

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Prov i matematik
F2, IT2, W2, GyLärV1, KandDv3
Linjär algebra II
2022-01-12

This is the English translation of the exam. Writing time: 8.00 - 13.00. Permitted aids: writing tools. Each problem is worth 5 points. All solutions must contain clear reasoning; ***an answer without reasoning cannot give full mark.*** *A total of 18, 25 and 32 points, respectively, guarantees the grade 3, 4 and 5, respectively. Those who took the course during Period 2 of the autumn semester of 2021 can also have their score calculated in an alternative way, as detailed in the course planning. Answers can be written in English or Swedish. Good luck!*
Den svenska versionen av tentamen finns på annat blad.

Notation: $\mathbb{P}_n$ *denotes the vector space of all real polynomials of degree at most* n*.*

1. Each of the following questions must be answered with YES or NO. If the answer is YES, an example must be given — not an explanation. If the answer is NO, a short explanation is needed.

a) Is there a diagonalisable 2×2-matrix that is not invertible?

b) Is there a linear map $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ whose kernel has dimension 4, and whose image has dimension 2?

c) Are there three vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$, such that none of them is a multiple of any of the other two, but $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is linearly dependent?

2. The linear map $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ is defined by

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

a) Find the matrix of F with respect to the standard bases in $\mathbb{P}_2$ and $\mathbb{R}^2$. (The standard basis in $\mathbb{P}_2$ is $(1, x, x^2)$.)

b) If possible, give an example of a polynomial $p(x)$ that is not the zero polynomial, and that is in the kernel of F. Using this, determine whether F is injective.

3. In the vector space $\mathbb{P}_3$ we consider the subset

$$\mathbb{U} = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p'(0) = K \text{ och } p'(1) = 0\}$$

where K is a real constant.

a) For which value/values of K is $\mathbb{U}$ a subspace? Explain why it is a subspace when it is, and why it is not otherwise.

b) Choose K so that $\mathbb{U}$ is a subspace, according to the above. Find a basis of $\mathbb{U}$.

4. The linear map $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is given, in the standard basis, by the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of F.

b) Is F diagonalisable? Give a short explanation.

c) Is there a vector in $\mathbb{R}^3$ that is not an eigenvector of F? If so, give an example.

5. A curve in the plane is given by the following equation

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + Kx_2^2 = 1,$$

where K is a real constant.

a) For which values of K is the curve an ellipse?

b) Let $K = 2$. Find an ON-basis in the plane, such that the equationen in the new coordinates has no mixed terms, i.e. is in diagonal (principal axis) form. Also write down this equation.

6. This problem is about the vector space $\mathbb{R}^3$ equipped with the standard scalar product. There, we consider the line $\mathbb{L}$ through the origin, that is spanned by the vector

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Find an ON-basis of the orthogonal complement of $\mathbb{L}$, i.e. an ON-basis of $\mathbb{L}^\perp$.

b) Determine, in a basis of your choice, the matrix of the linear map $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ that is given by orthogonal projection onto $\mathbb{L}^\perp$. (It is up to you to decide which basis to use.) Explain briefly.

7. Consider the system of differential equations

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 10y_1(t) - 6y_2(t) \\ y_2'(t) &= 18y_1(t) - 11y_2(t) \end{cases}.$$

a) Find the general solution.

b) Find the solution that satisfies $y_1(0) = 1$ and $y_2(0) = 0$.

8. Let $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a linear map and let A be the matrix of that linear map with respect to the standard basis. Assume moreover that $A^2 = A$.

a) Show that every vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ satisfies $v - F(v) \in N(F)$.

b) Show that if a vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ satisfies both $\mathbf{v} \in N(F)$ and $\mathbf{v} \in V(F)$, then $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(Remember that $N(F)$ denotes the kernel, i.e. the null space, of F, and $V(F)$ denotes the image, i.e. the range, of F.)