Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi

Tentamen
Beräkningsvetenskap I och KF 5.0 hp, 2020-01-13

Skrivtid: $14^{00} - 17^{00}$
Hjälpmedel: Bifogat formelblad och miniräknare.

En komplett lösning ska innehålla utförliga resonemang och motivering till svaren.

Kursmål, hur de täcks i uppgifterna och maximalt betyg.
För godkänt (betyg 3) krävs att varje mål har minst en godkäntmarkering och att något mål har minst två godkäntmarkeringar. För högre betyg krävs betyg 3 samt att respektive uppgift för betyg 4 och/eller 5 är löst.

Fråga nr	Nyckelbegrepp	Algoritmer	Analys	Programmering
1		3 (a)	3 (b)	
2	3 (a) 3 (b)			
3		3		
4			3	
5				3 3
6	4			
7	4, 5			

Del A

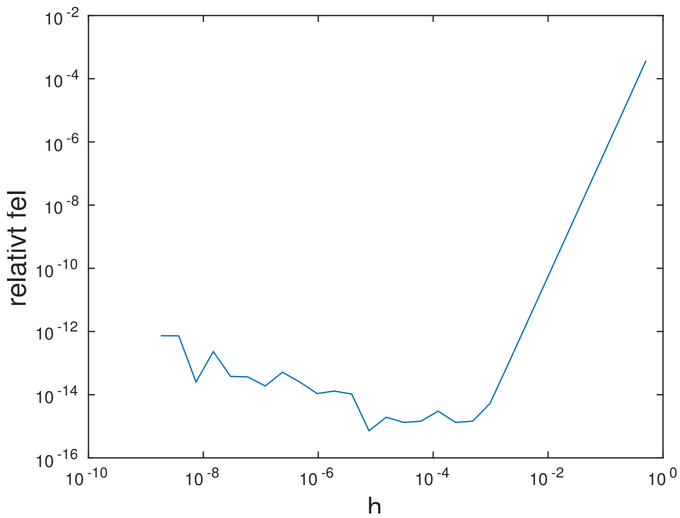
1. (a) Använd Simpsons metod med steglängd $h = 0.25$ för att beräkna integralen

$$\int_1^2 \frac{1}{1 + 0.5x^3}\, dx.$$

Uppskatta även diskretiseringsfelet i beräkningen med med feluppskattning baserad på Richardsonextrapolation.

(b) Antag att det krävs att diskretiseringsfelet behöver förbättras med minst en faktor 16. Utför en enkel analys och visa vad som behöver ändras (och hur mycket) i beräkningen ovan.

2. Bilden nedan visar felet för olika val av steglängd h vid numerisk beräkning av en integral. Metoden som använts är Simpsons metod med ekvidistant indelning av integrationsintervallet (dvs metoden är inte adaptiv).



(a) Uppenbarligen finns det en brytpunkt vid ungefär $h = 10^{-3}$, felet beter sig annorlunda då $h < 10^{-3}$ än då $h > 10^{-3}$. Detta beror på att två olika typer av fel påverkar beräkningarna. Ange vilken typ av fel som dominerar för (i) $h > 10^{-3}$ respektive för (ii) $h < 10^{-3}$ (två begrepp).

(b) Utgående från figuren, förklara begreppet *noggrannhetsordning*. För godkänt måste det framgå var i figuren, och på vilket sätt, man kan "se" noggrannhetsordningen.

3. Tabellen nedan visar årsmedelstemperatur i Uppsala under åren 1960, 1970, ..., 2010 (källa: SMHI):

y (år)	1960	1970	1980	1990	2000	2010
t (medeltemperatur, °C)	5.3	4.1	4.6	7.0	7.3	4.8

Nu är man intresserad av att studera vilken trend som temperaturen uppvisar genom att göra en Minsta kvadratanpassning av temperaturdata. Använd ansatsen $t = a + b \cdot (y - \hat{y})$, där $\hat{y}$ är medelvärdet över åren, och gör en sådan anpassning.
(Anm: År 2018, vilket är senaste publicerade året på SMHI:s web var medeltemperaturen 7.8 °C).

4. Vid lösning av icke-linjära ekvationer används (som regel) iterativa metoder, t ex Newton-Raphsons metod. Nedan ser du en sekvens av beräknade lösningar x_k från Newton-Raphsons metod och från en annan metod (det spelar här ingen roll vilken metod). Tyvärr vet vi inte vilken sekvens som tillhör vilken metod. Analysera metodernas konvergensordning och avgör med hjälp av detta vilken sekvens som är Newton-Raphsons metod.

```
x0 = 1.9000000          x0 = 1.9000000
x1 = -2.4845756         x1 = 1.9455591
x2 = 2.2971761          x2 = 1.9293465
x3 = 1.9818160          x3 = 1.9353621
x4 = 1.9359357          x4 = 1.9331618
x5 = 1.9337545          x5 = 1.9339709
x6 = 1.9337544          x6 = 1.9336740
x7 = 1.9337544          x7 = 1.9337831
```

5. (a) Givet matlabfunktionen `counter` nedan, torrexekvera koden och ange värdena på `s`, `g` och `e` då funktionen anropas med följande kommandon

```
>> v = [1; -1; 0; 2; -3];
>> a = 1;
>> [s, g, e] = counter(v, a);
```

Funktionen `counter`:

```
function [smaller, greater, equal]  = counter(vec, a)
equal = 0; smaller = 0; greater= 0;
k = 1;
len_vec = length(vec);
while k <= len_vec
  if vec(k) > a
    greater = greater + 1;
  elseif vec(k) < a
    smaller = smaller + 1;
  else
    equal = equal + 1;
  end
  k = k + 1;
end
```

Med torrexekvering menas att du utför instruktionerna i koden för hand och skriver ned hur variablernas värden förändras. Det är viktigt att det går att följa vad du gjort så det är tydligt att du förstår flödet i koden.

(b) Skriv den Matlab-kod (exekverbar, var noggrann med syntax) som behövs för att beräkna integralen i uppgift 1a, genom användning av Matlab-kommandot `integral`. Matlabs hjälptext ger följande information:

```
Q = integral(FUN,A,B) approximates the integral of function
FUN from A to B using global adaptive quadrature and default
error tolerances. FUN must be a function handle. A and B can
be -Inf or Inf. For scalar-valued problems the function Y = FUN(X)
must accept a vector argument X and return a vector result Y.
```

Del B

6. ”Aj aj aj, det finns ju inte en funktion för tredjeroten”, säger person A, i desperat behov av en lösning till $y = \sqrt[3]{a}$, där a är ett positivt tal. ”Ja, men det finns ju de fyra räknesätten, så det kan man enkelt fixa”, säger person B. Vad menar person B? Hur skulle man kunna beräkna tredjeroten ur ett reellt tal med enbart de fyra räknesätten $(+, -, \cdot, /)$. Beskriv hur man gör detta genom att välja korrekt numerisk metod och formulera metoden för det här problemet. Övertyga sedan person A att det fungerar, genom att lösa problemet för $a = 3$, med två decimalers noggrannhet (dvs fel $\leq 0.5 \cdot 10^{-2}$).

7. Båglängden av $y(x)$ för $x \in [a, b]$ ges av

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

men vi har inte $y(x)$ given explicit. Sambandet mellan x och y ges istället av ekvationen

$$y \sin(x) - x^3 - \cos(y) = 0.$$

För betyg 4, beskriv detaljerat med de algoritmer som ingår i kursen hur man kan lösa problemet.
För betyg 5, beskriv också vilka fel vi har i de olika beräkningarna. Du behöver inte uppskatta felen utan bara ange vilka fel vi har och var de uppkommer.