UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Tentamen i matematik, 5 hp
KandData, KandMa
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I
2018-05-25

Skrivtid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). För godkänd kurs krävs att alla explicita kursmål är godkända samt att tentamenspoängen är minst 18 (inklusive ev bonuspoäng). För betyg 4 eller 5 krävs dessutom att tentamenspoängen är minst 25 resp minst 32.

Uppgifterna 1-5 behandlar satslogik. I dessa uppgifter används den satslogiska signaturen $\sigma = \{A, B, C\}$.

1. Låt $\sigma = \{A,\ B,\ C\}$ vara en satslogisk signatur.

(a) Redogör för hur formler i LP(σ) byggs upp.

(b) Förklara vad som menas med en σ-struktur.

(c) Låt φ vara en formel i LP(σ). Vad menas med att φ är en tautologi?

(d) Låt Γ vara en mängd av formler och låt φ vara en formel i LP(σ). Vad menas med att $\Gamma \models \varphi$? (4)

2. Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF). Förklara hur du kommit fram till ditt svar!

$$((A \longrightarrow B) \longrightarrow (C \wedge A)) \qquad (4)$$

3. Konstruera formella bevis i naturlig deduktion för följande påståenden.

(a) $\neg A \vee B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$

(b) $A \longrightarrow (B \vee C),\ A,\ \neg C \vdash B \wedge A$ (4)

4. Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange en σ-struktur som är motexempel. För varje slutledning som är giltig, konstruera att bevis i naturlig deduktion som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $A \longrightarrow (B \wedge C) \models (A \longrightarrow B) \wedge C$

(b) $(A \longrightarrow B) \wedge C \models A \longrightarrow (B \wedge C)$ (4)

5. Avgör om följande påståenden på formen $\Gamma \vdash \tau$ gäller, dvs om τ är bevisbar i naturlig deduktion från premisserna i Γ.

(a) $A \vee B, \neg A \vee \neg C,\ C \longrightarrow \neg B \vdash C.$

(b) $A,\ B \vdash C \vee \neg C.$

Motivera dina svar noggrant! (4)

FLER UPPGIFTER PÅ NÄSTA SIDA !

Uppgifterna 6-11 behandlar predikatlogik, dvs första ordningens logik.

6. Låt $\sigma = \langle\, \overline{c}; \overline{F}; \overline{P}\rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ 0\ ;1\ ;\ 2\rangle$.

(a) Ange alla slutna termer i språket LR(σ).

(b) Ange alla slutna atomära formler i språket LR(σ).

(c) Låt τ vara formeln $\overline{P}(\overline{c}, \overline{c}) \wedge \forall x \exists y \overline{P}(x, y)$. Ange två σ-strukturer $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \tau$ och $\mathcal{B} \not\models \tau$. (4)

7. Låt $\sigma = \langle\ ; \overline{F}\, ; \overline{P}, \overline{Q}\,\rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ ;2\ ;1,\ 2\rangle$. Betrakta σ-strukturen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N},\ F,\ P,\ Q\,\rangle$, där $F(n, m) = n + m$, $P(n) \iff n$ är ett primtal, och $Q(n, m) \iff n < m$. Översätt följande till predikatlogiska slutna formler i språket LR(σ).

(a) Varje naturligt tal är summan av två primtal.

(b) För varje primtal finns ett annat primtal som är större än det första primtalet. (2)

8. Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; \overline{P}, \overline{Q},\ \overline{R}\rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ ;\ ;1,\ 1,\ 1\rangle$. Konstruera formella bevis i naturlig deduktion för följande påståenden.

(a) $\forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \neg\overline{Q}(x)), \forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{R}(x)), \exists x\, \overline{P}(x)\ \vdash\ \exists x(\overline{R}(x) \wedge \neg\overline{Q}(x))$

(b) $\vdash\ \exists x \neg\overline{P}(x) \longrightarrow \neg\forall x \overline{P}(x)$ (4)

9. Låt $\sigma = \langle\ \overline{c}\,;\ ; \overline{P}, \overline{Q},\ \overline{R}\rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ 0;\ ;1,\ 1,\ 2\rangle$. Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange en σ-struktur som är motexempel. För varje slutledning som är giltig, konstruera att bevis i naturlig deduktion som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $\forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(\overline{c})), \forall x(\overline{Q}(x) \longrightarrow \overline{R}(x, \overline{c}))\ \models \forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{R}(x, \overline{c}))$

(b) $\exists x \forall y \overline{R}(x, y)\ \models\ \forall y \exists x \overline{R}(x, y)$ (4)

10. Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; \overline{R}\,\rangle$ av ställigheter $\langle\ ;\ ;2\,\rangle$. Låt $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, där

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_1 & = & \forall x \neg\overline{R}(x, x) \\
\varphi_2 & = & \forall x \forall y \forall z(\overline{R}(x, y) \wedge \overline{R}(y, z) \longrightarrow \overline{R}(x, z)) \\
\varphi_3 & = & \forall x \exists y \overline{R}(x, y)
\end{array}
$$

(a) Ange en modell för Γ.

(b) Visa att Γ är oberoende, dvs visa att ingen av formlerna i Γ kan bevisas i naturlig deduktion från de övriga två formlerna. (4)

11. Formulera sundhetssatsen och fullständighetssatsen för första ordningens logik samt förklara i ord vad de innebär. Ange gärna exempel på var i tentauppgifterna du har använt dig av någon av satserna, eller hur man skulle kunna använda dem. (2)

LYCKA TILL !