UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren
Tel.: 070-5892942
E-post: `erik.lindgren@math.uu.se`

Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
10 juni 2021

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon.
Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5.

1. Betrakta gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{f(x)}.$$
   a) Ange ett polynom f så att gränsvärdet existerar och är lika med 0.
   b) Ange ett polynom f så att gränsvärdet existerar och är lika med 1.

2. Skissa grafen till kurvan $y = x^3e^{-x}$. Bestäm och klassificera lokala och globala extrempunkter samt bestäm funktionens max- och minvärden om de finns. Bestäm även eventuella asymptoter.

3. Bestäm följande integraler:
   a)
$$\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\,dx$$
   b)
$$\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$$

–Var god vänd–

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

   a)
$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

   b)
$$\int_2^\infty \frac{x^2 \sin x}{e^x}\,dx$$

5. Låt $g(x) = x + \ln x$. Visa att g är inverterbar på $[1, \infty)$ och bestäm

$$\int_1^{e+1} h(t)dt,$$

   där h är gs invers.

6. Använd Taylorpolynom för avgöra om

$$\Big|\int_0^1 \cos(t^3)\,dt - \left(1 - \frac{1}{14} + \frac{1}{13\cdot 24}\right)\Big| < \frac{1}{1000}.$$

7. Bestäm för vilka x potensserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k \ln k}$$

   konvergerar och för vilka x den divergerar.

–Var god vänd–

8. a) Låt f vara en funktion definierad i en omgivning till $x = a$. Definiera vad som menas med att f är deriverbar i $x = a$ och vad som menas med $f'(a)$.

   b) Låt
$$g(x) = \frac{f(2x)}{x},$$
   för $x \neq 0$ där f är en kontinuerlig funktion som är deriverbar i $x = 0$ sådan att $f(0) = 0$ och $f'(0) = 3$. Bestäm
$$\lim_{x \to 0} g(x).$$

9. I denna uppgift krävs endast svar och ingen motivering. Ge exempel på:

   a) En monotont avtagande talföljd som ej är begränsad.

   b) En konvergent talföljd som varken är växande eller avtagande.

   c) En kontinuerlig funktion på $(1, 2]$ som ej är begränsad på $(1, 2]$.

   d) En kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ som ej är deriverbar.

   e) En funktion f på $[-1, 1]$ som ej är kontinuerlig sådan att $|f|$ är kontinuerlig.

10. Antag att f är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $[0, 1]$ sådan att linjesegmentet mellan $(0, f(0))$ och $(1, f(1))$ skär fs graf vid (minst) en punkt (i tillägg till ändpunkterna $(0, f(0))$ och $(1, f(1))$). Visa att det finns en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f''(x) = 0$.

Lycka till!