UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Reell Analys

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
October 31, 2022

Contents

1. Introduction

Before proving injectivity & surjectivity, first show it is a function

Give an example of:

- Abelian group (and non-abelian)
- Non-commutative ring
- Commutative ring which is not a field

1.1. **Sammanfattning Kap2.**

1.2. **Notation.**

Vi använder ett "+" för att beteckna om mängden innehåller positiva element. Om det är känt att mängden innehåller negativa element behöver vi tydliggöra om 0 finns i mängden, det finns olika notation.

Vi skriver "upphöjt i +" för att visa att mängden är helt positivt (innehåller ingen 0), och "nedsänkt i +" för att visa att mängden är positiv men innehåller 0.

Exempel:
De positiva reella talen: $\mathbb{R}^+$
Icke-negativa rella talen: $\mathbb{R}_+$

1.3. **Relationer.**

En relation R på en mängd M är:

$$R \subseteq M \times M$$

Vi har 5 "adjektiv" att beskriva våra relationer med:

- Reflexiv ($xRx \quad \forall x \in M$)
- Symmetrisk ($xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in M$)
- Antisymetrisk (xRy & $yRx \Rightarrow x = y$)
- Transitiv (xRy & $yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in M$)
- Connex (xRy eller $yRx \quad \forall x, y \in M$)

Som exempel på dessa kan man betrakta relationen $=$ eller relationen $<$ över R

Exempel:
Låt $A = \{a, b\}$ och potensmängden till A vara $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
Vilka av de 5 kraven uppfylls om relationen är $\subseteq$?

För att lösa detta så kommer vi ihåg att relationer är definierade på mängdens kartesiska produkt, så vi har i själva verket en relation $\subseteq$ över $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$
Vi kollar reflexivitet. Om vi tar ett element från $\mathcal{P}(A)$, är det då en delmängd till sig själv? **Ja, en mängd är alltid delmängd till sig själv**. Viktigt att notera att den inte är en äkta delmängd!

Är relationen symmetrisk? Tag $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ och $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$. Då gäller att $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ men $\{a, b\} \not\subseteq \{a\}$. Eftersom relationen skulle gälla $\forall$ element i relationsmängden, så gäller *inte* symmetri!

Är relationen antisymetrisk? Antisymetri gäller om xRy & $yRx \Rightarrow x = y$, vi undersöker negationen, vilket är xRy & $x \neq y \Rightarrow \neg yRx$. Detta säger i princip "om x är delmängd till y och x inte är lika med y så är y inte en delmängd till x", vilket vi vet gäller.

Är relationen transitiv? Ja, om x är en delmängd till y och y är en delmängd till z så gäller att x är en delmäng till z

Connex? Ja.

1.3.1. *Klassifikationer av relationer.*

Vi har 3st Klassifikationer för relationer:
- Ekvivalensrelation (reflexiv, symmetrisk, transitiv)
- Partiell ordning (reflexiv, antisymetrisk, transitiv)
- Total ordning (connex, reflexiv, antisymetrisk, transitiv)

Anmärkning:
En total ordning är en connex partiell ordning.

Exempel: (Ekvivalensrelation)
$=$ (likhet) är en ekvivalensrelation

Exempel: (Partiell ordning)
$\leq$ är en partiell ordning (men inte en ekvivalensrelation)

Exempel: (Total ordning)
$\leq$ är en total ordning

1.4. **Funktioner.**

1.4.1. *Domän, kodomän.*
En funktion (eller även kallad en avbildning) definierad från en *domän* A till en *kodomän* B, kan ses som en delmängd till $A \times B$.
Denna brukar även kallas för *grafen* till funktionen.
Om $f : A \to B$ så är alltså grafen$(f) \subseteq A \times B$

Anmärkning:
För varje $x \in A$ så finns det ett *unikt* $y \in B$ så att $f(x) = y$ (alternativ beteckning: $(x, y) \in \text{graf}(f)$)

1.4.2. *Bilden.*

Något som verkar lite förvirrande först är att kodomänen inte är bilden av funktionen. Om vi exempelvis betraktar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ x \mapsto x$ så ser vi att de värden som faktiskt "träffas" är hela $\mathbb{R}$, vilket är en delmängd till $\mathbb{C}$ men inte hela $\mathbb{C}$!

Definition/Sats 1.1: Bilden till en avbildning

$$f : A \to B$$
$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ s.t } y = f(x)\}$$

Anmärkning:
- Om f, g är injektiva, så är $g \circ f$ injektiv
- Om f, g är surjektiva, så är $g \circ f$ surjektiv
- Om f, g är bijektiv, så är $g \circ f$ bijektiv

1.5. **Pullback & Pushforward.**

Antag att vi har en avbildning $f : X \to Y$, då gäller följande:

Definition/Sats 1.2: Pullback

Inte hela kodomänen träffas av en avbildning/funktion. Det beror på vad domänen är (och hur funktionen ser ut).
Vi kan däremot korta ner domänen och undersöka hur det påverkar bilden av avbildningen, detta är *pullback*:

$$f_*(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\} = f(A) \qquad A \subseteq \mathcal{P}(X)$$

Anmärkning:
$A \subseteq X \Rightarrow X \subseteq \mathcal{P}(X)$, samt att $f_* \subseteq Y \Leftrightarrow f_* \subseteq \mathcal{P}(Y)$
Vi har då $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$

Definition/Sats 1.3: Pushforward

Liknande/Motsatsen gäller för *pushforward*. Här vill vi undersöka vad som händer med domänen om vi betraktar en delmängd till kodomänen:

$$f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \qquad B \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

Anmärkning:
Pushforward är invariant under union **och** snitt
Pullback är **enbart** invariant under union (annars, låt $f(x) = x^2$ och visa vad som händer med $f_*(\{-1\})$ resp. $f_*(\{1\})$)

Detta följer från definitionen och påminner lite om lagen om total sannolikhet från kursen Sannolikhetsteori 1.

1.6. **Abstrakt algebra.**

Definition/Sats 1.4: Ordnad kropp

Låt $\mathbb{F}$ vara en kropp med en strikt ordning $<$ så att:
- $x, y, z \in \mathbb{F}$ och $y < z$ så är även $x + y < x + z$
- $x, y \in \mathbb{F}$ och $x, y > 0$ så är även $xy > 0$

Definition/Sats 1.5: Vektorrum över kropp

En mängd V är ett vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$ om vi har följande 2 avbildningar:

$$V \times V \xrightarrow{+} V \qquad \mathbb{F} \times V \xrightarrow{\cdot} V$$
$$(v, w) \mapsto v + w \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

Definition/Sats 1.6: Stödet till en avbildning

Låt $f : M \to \mathbb{F}$ där $\mathbb{F}$ är en kropp. Vi definierar

$$\mathrm{supp}(f) = \{m \in M \mid f(m) \neq 0\}$$

Vi kan generalisera detta till avbildningar över vektorrum V och definiera:

$$V_{\text{fin}} = \{f \in V \mid \mathrm{supp}(f) \text{ ändlig}\}$$

Vi har i andra kurser kikat på hur vi kan kvota mängder med ideal. Vi kan även kvota med ekvivalensrelationer enligt följande:

$$M/_\sim \quad = \{[x] \in \mathcal{P}(M) \mid x \in M\}$$

Givet en binär komposition $*$ över M och en ekvivalensrelation $\sim$ säger vi att $\sim$ **respekterar** $*$ om:

$$x \sim x' \quad \& y \sim y' \Rightarrow x * y \sim x' * y' \qquad \forall x, y \in M$$

Vi kan då defniera den *inducerade binära kompositionen* $\overline{*}$ på $M/_\sim$ genom:

$$M/_\sim \times M/_\sim \xrightarrow{\overline{*}} M/_\sim$$
$$([x], [y]) \mapsto [x * y]$$

1.7. **Kardinalitet.**

Två mängder har samma kardinalitet om det finns en bijektion mellan de.

Vi säger att en mängd A är uppräknelig om det finns en bijektion mellan A och $\mathbb{N}$.
Om det inte finns en bijektion säger vi att A är överuppräknelig.

Anmärkning:
Om $A_1, A_2, \cdots$, är uppräkneliga så är deras union uppräkneliga.

Definition/Sats 1.7: Cantors sats

Låt X vara en mängd. Det finns **ingen** surjektion från X till $\mathcal{P}(X)$

Definition/Sats 1.8: Schröder-Bernsteins sats

Betrakta följande:

$$X \xrightarrow{f} Y \quad Y \xrightarrow{g} X$$

Om f, g är injektiva så finns en bijektion $X \xrightarrow{h} Y$

För att visa detta krävs följande sats:

Definition/Sats 1.9: Tarskis fixpunktssats

Antag att $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ är monotont växande, dvs

$$A \subseteq B \Rightarrow F(A) \subseteq F(B)$$

Då finns det $M \subseteq X$ så att $F(M) = M$