Lösningsförslag 2021-01-08

1a) JA, t ex $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, som är diagonaliserbar (ty diagonal) med egenvärdena 1 och 2.

b) NEJ. Om $f(1)=g(1)$, så gäller $f(2)=2\cdot f(1)=2\cdot g(1)=g(2)$.

c) JA, t ex $\langle p(x),q(x)\rangle = 6\int_0^1 p(x)q(x)\,dx$,

$$\text{Då är } |x| = \sqrt{6\int_0^1 x\cdot x\,dx} = \sqrt{6\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{2}.$$

2a) Ej underrum, då delmängden innehåller $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ men ej $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

b) Underrum. En diagonal (2×2)-matris har formen $\begin{pmatrix}x_1 & 0\\0 & x_2\end{pmatrix}$. Vi har

$$* \begin{pmatrix}x_1 & 0\\0 & x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1 & 0\\0 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1 & 0\\0 & x_2+y_2\end{pmatrix}$$

$$* \lambda\begin{pmatrix}x_1 & 0\\0 & x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1 & 0\\0 & \lambda x_2\end{pmatrix} \quad \text{för alla } \lambda\in\mathbb{R}$$

Därmed är delmängden sluten under addition och skalning, och icketom då $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ tillhör den. En bas är $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$

c) Ej underrum, då den tex innehåller $1+x$ men ej $-(1+x)=-1-x$.

3a) Matrisen med avseende på standardbaserna fås genom att uttrycka $F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i standardbasen för $\mathbb{P}_2$:

$F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1-x^2$, som i std. basen har koordinatvektorn $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=F\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=x-x^2-(1-x^2)=-1+x$, som har koordinatvektorn $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Därför är matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.   [Alternativ metod: basbyte i $\mathbb{R}^2$ mellan basen $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ och $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$]

b) F är injektiv $\iff \operatorname{Ker} F = 0$, så vi undersöker nollrummet till A:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

två ledande ettor $\Rightarrow$ endast trivial lösning $\Rightarrow F$ är injektiv.

Svar: Ja, ty $\operatorname{Ker} F$ är trivial.

[Alternativt resonemang: basen $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ skickas på $\left(x - x^2 \quad 1 - x^2 \right)$, som är lin. ober. i $\mathbb{P}_2$.

c) $\mathbb{R}^2$ har dimension 2 och $\mathbb{P}_2$ har dimension 3. Eftersom

$$\dim(\operatorname{Im} F) + \dim(\operatorname{Ker} F) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^2)}_{2}$$

så är $\dim(\operatorname{Im} F) \leq 2$, dvs F är inte surjektiv.

Svar: Nej.

4a) Vi kontrollerar att $(A - \lambda I)x = 0$ har icke-triviala lösningar för $\lambda = 1, 0$ och -1.

$\underline{\lambda = 1}$: $(A - 1I \mid \bar{0}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$

pga nollraden kan denna matris ej ha 4 ledande ettor, så det finns icke-triviala lösningar.

$\underline{\lambda = 0}$: $(A \mid \bar{0}) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$ icke-triviala lösn. enligt samma resonemang.

$\underline{\lambda=-1}$

$$(A+I\,|\,\bar{0}) \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{icke-trivial lösn..}$$

Detta visar att 1, 0 och -1 är egenvärden.

b) Vi löser $(A-I)\bar{x}=\bar{0}$ fullständigt:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

fri $= s$ fri $= t$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$s, t \in \mathbb{R}$

Svar: En bas är $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ och dimensionen är 2.

c) Ja, eftersom en bas av egenvektorer ges av $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}, \bar{v}\right)$

där $\bar{u}$ är valfri egenvektor till egenvärdet 0 och

$\bar{v}$ " " " " " -1.

5a) Först måste $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$, dvs $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 4-b-2=0 \Leftrightarrow b=2$$

Sedan måste $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 = 1$, dvs $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ -2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ -2a \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 9a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$a > 0$

(Att $\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = 1$ kan kontrolleras: $\frac{1}{18}(4^2+(-1)^2+1^2)=1$). Svar: $\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 2 \end{cases}$

b) Projektionen är lika med $(\bar{v}\cdot\bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{v}\cdot\bar{u}_2)\bar{u}_2$

Vi har $\bar{v}\cdot\bar{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix} = 1$ och $\bar{v}\cdot\bar{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4/\sqrt{18}\\-1/\sqrt{18}\\1/\sqrt{18}\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{18}}$

Så projektionen blir $1\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{18}}\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}}_{=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4/6\\-1/6\\1/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

Svar: $\begin{pmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

6a) Kurvan ges av $\bar{x}^T A\bar{x} = 1$, med $A = \begin{pmatrix}5 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix}$. Egenvärdena är beräknas:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -1\\-1 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lambda = 4}_{>0} \text{ eller } \underbrace{\lambda = 6}_{>0}$$

Svar: Kurvan är en ellips, då båda egenvärden är positiva.

b) Basen utgörs av egenvektorerna: $\left(A = PDP^T,\ D = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}\right.$

$\lambda = 4$: $\left(\begin{array}{cc|c}5-4 & -1 & 0\\-1 & 5-4 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{array}\right)$ har lösning $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t$, $t\in\mathbb{R}$

$\lambda = 6$: $\left(\begin{array}{cc|c}5-6 & -1 & 0\\-1 & 5-6 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}-1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\end{array}\right)$ " " $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}s$, $s\in\mathbb{R}$

Svar: En ON-bas är $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

och ekvationen är $4y_1^2 + 6y_2^2 = 1$.

7. Vi har $\bar{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix}-6 & -8\\4 & 6\end{pmatrix}}_{A}\bar{y}$ så vi diagonaliserar A:

Egenvärden: $\begin{vmatrix}-6-\lambda & -8\\4 & 6-\lambda\end{vmatrix} = (-6-\lambda)(6-\lambda) + 32 = -36 + \lambda^2 + 32 = \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$.

Egenvektorer: $\underline{\lambda = 2}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -8 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$

$s, t \in \mathbb{R}$

$\underline{\lambda = -2}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} s$

dvs $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Variabelbytet $\bar{y} = P\bar{z}$ ger att systemet är ekvivalent med

$$\bar{z}' = D\bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = 2z_1 \\ z_2' = -2z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} z_1 = c_1 e^{2t} \\ z_2 = c_2 e^{-2t} \end{array}$$

vilket ger $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-2t} \\ -c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$.

Villkoren $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 2$ ger $\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 1 \\ -c_1 - c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -5 \\ c_2 = 3 \end{cases}$

Svar: $\begin{cases} y_1 = -5e^{2t} + 6e^{-2t} \\ y_2 = 5e^{2t} - 3e^{-2t} \end{cases}$

8a) Vi måste visa att $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$

och $f(\lambda x) = \lambda \circ f(x)$

Vi har $f(x+y) = 2^{x+y}$

$f(x) \oplus f(y) = f(x)f(y) = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$ enligt potenslagar

och $f(\lambda x) = 2^{\lambda x}$

$\lambda \circ f(x) = f(x)^{\lambda} = (2^x)^{\lambda} = 2^{\lambda x}$ " "

Därmed är f linjär.

b) $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$, och eftersom varje $y > 0$ har $y = 2^{\log_2 y}$. 2^x kan anta alla reella tal $y > 0$

Därmed är f bijektiv, dvs en isomorfi.