UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Lösning till Omtentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
28 augusti 2020

1. a) Vi förlänger med $\sqrt{x+6}+2$ och får då uttrycket

$$\frac{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}{(2x+4)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{x+6-4}{(2x+4)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+6}+2}.$$

Därför får vi

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+6}+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

b) Vi studerar gränsvärdet av logaritmen av uttrycket, $\ln(2x)^{\frac{1}{x}} = \ln(2x)/x$. Vi har

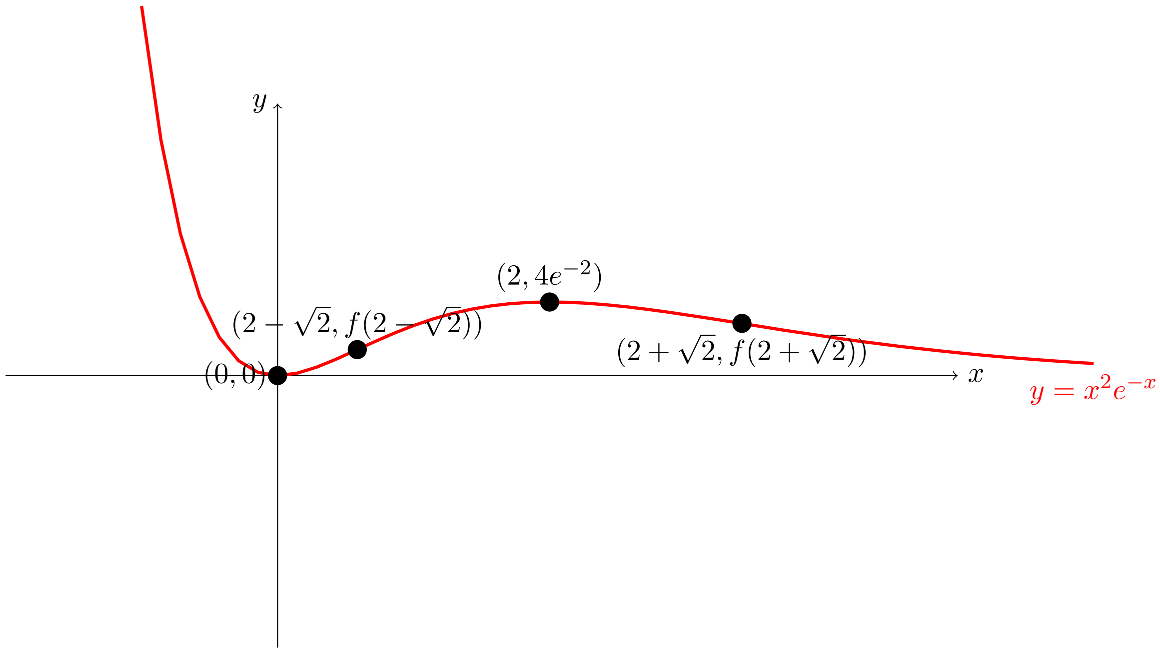
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2x}{x} = 0.$$

Eftersom gränsvärdet av logarimen av uttrycket är 0 så betyder detta att uttrycket går mot 1, eftersom $\ln 1 = 0$.

2. Med $f(x) = x^2 e^{-x}$ så har vi $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$. Vi ser då att f är strängt växande när $x \in (0,2)$ och strängt avtagande när $2 < x$ eller $x < 0$. Vidare har vi att $f(x) \geq 0$, $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ och $f(x) \to +\infty$ när $x \to -\infty$. Vi kan då sluta oss f har ett lokalt max i $x = 2$ och globalt min i $x = 0$, men att f saknar globalt max. Vidare har f en horisontell asymptot $y = 0$ då $x \to \infty$.

Vi tittar också på $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Vi ser då att $f'' \geq 0$ och därmed konvex om $x \geq 2 + \sqrt{2}$ eller $2 - \sqrt{2} \geq x$. Vi ser också att $f'' \leq 0$ och därmed konkav om $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$.

Vi kan då skissa grafen mha av detta ovan och punkterna $x = 2$, $x = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{2}$.



3. a) Vi använder variabelsubstitution

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx &= \{u = x^4+1, \quad du = 4x^3\} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \frac{2}{4}\sqrt{u} + C \\
&= \frac{\sqrt{x^4+1}}{2} + C
\end{aligned}$$

Gränserna $x = 1$ och $x = 0$ ger

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

b) Vi partialintegrerar

$$\begin{aligned}\int x \arctan x dx &= -\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx + \frac{x^2}{2}\arctan x\\ &= -\frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{x^2}{2}\arctan x\\ &= -\frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + \frac{x^2}{2}\arctan x + C\\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

4. a) Eftersom $e^x \leq e$ då $x \in [0,1]$ så har vi att integranden är begränsad ovanifrån av $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$. Eftersom integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = 3$$

är konvergent och integranden är positiv, så gäller det enligt jämförelsesatsen att även

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

är konvergent.

b) Eftersom

$$\left| \frac{x \sin x}{x^3 - x} \right| \leq \frac{1}{x^2 - 1}$$

och

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

och integralen

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{10}$$

är konvergent så gäller att integralen

$$\int_{10}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^3 - x} dx$$

är absolutkonvergent och därmed konvergent.

5. a) Eftersom termerna $k^{-1/2}(-1)^k$ är alternerande med avtagande absolutvärde så konvergerar serien enligt Lebniz test.

b) Eftersom $|(-1)^k \sin k e^{-k}| \leq e^{-k}$ och serien som består av termerna e^{-k} är konvergent så absolutkonvergerar serien i fråga, enligt jämförelsesatsen. Därför är den konvergent.

6. Från Taylors formel har vi för Taylorpolynomet kring a

$$f(t) - P_4(s) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(s)(t-a)^5$$

för något s mellan a och t. Låter vi $f(t) = \sin t$ och använder Taylorpolynomet kring origo, får vi för $t \in (0,1)$

$$\sin(t) - t + t^3/3! = \frac{t^5}{5!}\cos s.$$

för något $s \in (0,t)$. Eftersom $|\cos s| \leq 1$ så får vi

$$\big|\sin(t) - t + \frac{t^3}{3!}\big| \leq \frac{t^5}{5!}.$$

Ersätter vi t med t^2 får vi

$$\big|\sin(t^2) - t^2 + \frac{t^6}{6}\big| \leq \frac{t^{10}}{5!}.$$

Genom att integrera $t^2 - t^6/6$ får vi då en uppskattning på integralen där (absolutbeloppet av) felet är mindre än

$$\int_0^1 \frac{t^{10}}{5!}dt = \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < \frac{1}{1000}.$$

Vi integrerar då $t^2 - t^6/6$ och får

$$\int_0^1 t^2 - \frac{t^6}{6}\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{42}.$$

Detta är ett närmevärde på integralen med ett fel som är mindre än 1/1000 eller med andra ord

$$\Big|\int_0^1 \sin(t^2)\,dt - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{42}\right)\Big| < \frac{1}{1000}.$$

7. a) Vi säger att f är kontinuerlig i $x = a$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att $|x - a| < \delta$ implicerar att

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

b) Tag $\varepsilon > 0$, vi vill då visa att det finns $\delta > 0$ så att om $|x - 1| < \delta$ så har vi

$$|x^2 - 1| < \varepsilon.$$

Vi väljer δ så att $\delta < 1$ och $3\delta < \varepsilon$. Då med $|x - 1| < \delta \leq 1$ har vi att $x \in (0,2)$ så att $x + 1 \in (1,3)$. Därför får vi

$$|x^2 - 1| = |x + 1||x - 1| \leq 3|x - 1| < 3\delta \leq \varepsilon.$$

Alltså uppfyller det valda δ det vi ville visa.

8. Om det finns ett gränsvärde s så måste gränsvärdet uppfylla ekvationen

$$s = (1+s)/(2+s)$$

vilket medför

$$2s + s^2 = 1 + s$$

eller

$$s^2 + s - 1 = 0.$$

Denna ekvation har två rötter $s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}/2$. Vi argumenterar nu för att gränsvärdet existerar och för att det måste vara $-\frac{1}{2} + \sqrt{5}/2$.

Det är uppenbart att $a_n \geq 0$ eftersom $a_0 \geq 0$. Vi visar nu att a_n även är begränsad ovanifrån. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{1+x}{2+x} = 1 - \frac{1}{2+x}.$$

För $x \geq 0$ gäller $f(x) \leq 1$. Alltså har vi att $a_n = f(a_{n-1}) \leq 1$.

Vi visar nu att a_n är växande. Vi ser att $a_1 = \frac{1}{2}$. Alltså är $a_1 \geq a_0$. Antag nu att $a_n \geq a_{n-1}$. Eftersom f är en växande funktion på $[0, \infty)$ så har vi $f(a_n) \geq f(a_{n-1})$ och därmed

$$a_{n+1} = f(a_n) \geq f(a_{n-1}) = a_n.$$

Alltså är följden växande.

Vi har då en växande följd som är begränsad. Därför har den ett gränsvärde. Eftersom gränsvärdet måste vara icke-negativt så finns bara möjligheten $-\frac{1}{2} + \sqrt{5}/2$ kvar som gränsvärde.

9. a) T ex följden $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$
   b) T ex följden $-1, -10, -1000, \ldots$.
   c) T ex $f(x) = 1$ för alla $x \neq 0$ och $f(0) = 2$.
   d) T ex funktionen $f(x) = |x|$.
   e) T ex funktionen f så att $f(x) = 1$ för alla rationella tal x och $f(x) = -1$ för alla andra tal x.

10. Studera funktionen

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Vi vet att $g(0) = 0$ och $g(1) = 1$ enligt uppgiften. Medelvärdessatsen medför att det finns $s \in (0,1)$ så att

$$f(s) = g'(s) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 1.$$

Tillämpar vi medelvärdessasten igen på f med punkterna s och 1 får vi att det finns $t \in (s, 1)$ så att

$$f'(t) = \frac{f(1) - f(s)}{t - s} = 0.$$

Alltså finns en punkt där fs derivata är noll.