UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Affin & Projektiv Geometri

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
August 31, 2022

Contents

1. Plana algebraiska kurvor

Vi inleder med definition:

Theorem 1.1: Plan affin algebraisk kurva

En **plan affin algebraisk kurva** är nollställesmängden till ett icke-konstant polynom $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ där $\mathbb{R}[x, y]$ är mängden av alla polynom med 2 variabler med reella koefficienter.

Nollställesmängden kan betecknas $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

Theorem 1.2: Affin-avbildning

En linjär avbildning är på formen $x \mapsto ax$, medan en affin avbildning är ”ungefär linjär”, dvs $x \mapsto ax + b$

Ett sätt att betrakta polynom är att de är ett ändligt antal utförande av operatorer på kropp-element.

Exempel:
Betrakta följande polynom i $\mathbb{R}^2$, $ax + by + c = f(x, y)$. Polynomet är av grad 1, och är därför därmed ett linjärt polynom.

Exempel:
Vi kan även ha nollställesmängden som parabel med följande funktion $f(x, y) = y - x^2$

Bygger vi vidare på föregående exempel kommer vi fram till följande mer generella formel för att ”omvandla” ett endimensionellt polynom till en flerdimensionell:

$$f(x, y) = y - p(x)$$

Där $p(x)$ är ett godtyckligt polynom.

Exempel:
Om vi betraktar följande funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ (enhetscirkeln) så har den en nollställesmängd som är en punkt.

Exempel:
Om vi betraktar tomma-mängden som nollställesmängd (dvs exempelvis $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$) så är det absolut en valid nollställesmängd, men en obehaglig sådan ty det inte finns en intuitiv geometrisk bild, kan vi kalla den för en kurva? $f(x, y) = x^2 + 1$ har ju samma nollställesmängd!

Exempel:
Betrakta följande funktion $f(x, y) = xy$. Denna har unionen av x-axeln och y-axeln som lösningsmängd

En affin funktion från flervarren som vi kanske minns är faktiskt linjäriseringen av f:

$$f(\bar{r}) \approx f(\bar{r}_0)) + \nabla f(\bar{r}_0) \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0)$$

I den här kursen tillåter vi allmänna linjära basbyten, alltså ej bara isometriska avbildningar utan vi kan skala om ena axeln och krympa den/deformera den!

Theorem 1.3: Singulära punkter

En punkt $\bar{r}_0$ sådant att $f(\bar{r}_0) = 0$ sådant att $\nabla f(\bar{r}_0 = (0, 0))$ kallas **singulär**

Theorem 1.4: Transversell skärning

Två kurvor $f(\bar{r}) = 0$ och $g(\bar{r}) = 0$ sägs skära varandra transversellt i $\bar{[r]}_0$ om $f(\bar{r}_0) = 0 = g(\bar{r}_0)$ och $\nabla f(\bar{r}_0) \neq 0 \neq \nabla g(\bar{r}_0)$ och $\nabla f(\bar{r}_0)$ och $\nabla g(\bar{r}_0)$ är *inte* parallella (linjärkombinationer av varandra)

I linjär algebra 2 skiljde vi på t.ex ellipser med olika halvaxlar (och andra former) genom att undersöka egenvärden $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ i motsvarande kvadratiska form.
I linjär algebra använde vi ortonormala avbildningar som var isometriska, det ska vi strunta i här eftersom vi vill kunna deformera kurvor utan att bevara längd/vinklar

2. Affina avbildningar

En affin avbildning är *nästan* samma sak som en linjär avbildning, men inte riktigt! Den tillåter translationer (flytta saker axel-parallellt). Alltså, ej en isometri.

Theorem 2.1: Avbildning

En avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ på formen $F(\bar{v}) = L(\bar{v}) + \bar{b}$
Där $\bar{b}$ är en konstant vektor och $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kallas för en **affin** avbildning

Anmärkning: I en linjär avbildning är den konstanta vektorn $\bar{b} = 0$, alltså är alla linjära avbildning affina.

Exempel:
Betrakta följande avbildning: $\bar{F}(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$ $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$
Det är $+e$ och $+f$ som gör avbildningen affin

Anmärkning:
I exemplet är det e, f som är "translationerna" (translationsfaktor). Det enda de gör är att flytta saker, de bevarar längder och vinklar Alternativ notation:

$$\bar{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$$

Theorem 2.2: Affin Transformation

Om $det(\bar{L}) \neq 0$ så kallas $\bar{F}$ för en **affin transformation**

Theorem 2.3: Euklidisk Transformation

En transformation som bevarar längd och vinklar, även kallad för ortonormal transformation

Notation: Mängden affina avbildningar noteras $Aff(n) = \{\text{affina transformationer} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$

Egenskaper:

- $F, G \in Aff(n) \Rightarrow F \circ G \in Aff(n)$
- Om $det(\bar{L}) \neq 0$ så är $\bar{F}$ inverterbar ($\bar{L}$ är inverterbar)
- id_{R^n} är affin

Proof 2.1: Egenskap 1

$$F(\bar{v}) = L(\bar{v}) + \bar{b} \qquad G(\bar{w}) = M(\bar{w}) + \bar{c}$$
$$F(\bar{G}(\bar{w})) = F(\bar{M}(\bar{w}) + \bar{c}) = L(\bar{M}(\bar{w}) + \bar{c}) + \bar{b} = L(\bar{M}(\bar{w})) + L(\bar{c}) + \bar{b}$$

□

Proof 2.2: Egenskap 2

$$\bar{y} = \bar{F}(\bar{x}) = \bar{L}(\bar{x}) + \bar{b}$$
$$\bar{F}^{-1}(\bar{y}) = \bar{L}^{-1}(\bar{y} - \bar{b})$$

$\square$

Anmärkning:
Man kan betrakta Aff(n) som en grupp, där identiteten är identitetsavbildningen ($\bar{b} = 0$, linjär identitet = enhetsmatrisen)

Geometriska egenskaper hos Aff(n)

- Om l är en linjne, $\bar{F} \in AffA(n) \Rightarrow \bar{F}(l)$ är en linje
- Om l, l' är paralella linjer så är $\bar{F}(l) = \bar{F}(l')$
- Om två kurvor skär varandra transversellt så gäller detsamma bilderna av kurvorna
- Säg att vi har 4 punkter på en linje, så bevarar $\bar{F}$ längdförhållandet mellan dem:

$$\frac{|\bar{AB}|}{|\bar{CD}|} = \frac{|F(\bar{A})F(\bar{B})|}{|F(\bar{C})F(\bar{D})|}$$

Anmärkning:
Affina avbildningar bevarade nödvändigtvis inte längder och vinklar, men 4:e egenskapen här verkar tyda på att någonting bevaras.

Theorem 2.4

Säg att vi har en affin transformation $\bar{F} \in Aff(n)$, vi inducerar en avbildning:

$$\mathbb{R}[x_1, x_2 \cdots, x_n] \underbrace{\rightarrow}_{F^*} \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \underbrace{\rightarrow}_{F} \mathbb{R}^n \underbrace{\rightarrow}_{f} \mathbb{R}}_{f \circ F} \qquad f \mapsto f \circ \bar{F}$$

Exempel:
Betrakta följande avbildning: $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sådant att $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.
$f \in \mathbb{R}[x, y] = x^2 + y^2$ ger följande:

$$F^*(f)(x, y) = f \circ \bar{F}(x, y)$$
$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Theorem 2.5

Om $deg(f) = k$ så $deg(F^*(f)) = k$

Anmärkning:
Det här $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ är en ring med 1:a (identitet). Det är också en $\mathbb{R}$-algebra (ett vektorrum över $\mathbb{R}$ så att multiplikation med $\lambda \in \mathbb{R}$ beter sig civiliserat m.a.p ringstruktur).

Då är $F^* : \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ en $\mathbb{R}$-algebraringhomomorfi, det vill säga:

- $F^*(f + g) = F * (f) + F * (g)$
- $F^*(fg) = F^*(f)F^*(g)$
- $F^*(1) = 1$
- $F^*(\lambda f) = \lambda F^*(f)$

Notation:
Mängden av alla $\mathbb{R}$-algebraringhomomorfi betecknas för $Auf(\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]) = \{\mathbb{R}\text{-algebraringhomomorfi}\}$

Theorem 2.6

Avbildningen $\mathrm{Aff}(n) \underbrace{\rightarrow}_{*} Auf(\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n])$ $F \mapsto F^*$ har egenskapen $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

Proof 2.3: Bevis av föregående sats

$$(F \circ G)^*(f) = f \circ (F \circ G) = (f \circ F) \circ G = G^*(F^*(f)) = (G^* \circ F^*)(f)$$

□

Theorem 2.7: Affint ekvivalens

Låt $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$. Vi säger att f och g är **affint ekvivalenta** om det finns en affin transformation $\bar{F} : R^n \to \mathbb{R}^n$ och ett tal $(\lambda \neq 0)$ så att:

$$F^*(f) = \lambda g$$

Detta är en ekvivalensrelation på $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ $\quad (f \sim g)$

3. Klassificering av andragradspolynom i två variabler

Vi vill veta hur många "andragradskurvor" det finns och vilka. Det är planen.
Vi kikar på det allmänna fallet $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.
Vi försöker förenkla $f(x, y)$ (som är ett allmänt polynom) m.h.a affina transformationer och multiplikation med konstanter $\lambda \neq 0$

Vi noterar från $f(x, y)$ att vi har en bit som är en rent kvadratisk form $(ax^2 + bxy + cy^2)$, och vi vet att vi alltid kan diagnolisera kvadratiska former, m.h.a variabelbyte. Vi ser vad som händer om vi gör detta:

$$f(x, y) \Rightarrow x^2 + \lambda y^2 + Dx + Ey + f$$

Där $\lambda \in \{0, 1, -1\}$. Vi falluppdelar:

- $\lambda = \pm 1 \Rightarrow$ Vi kan kvadratkomplettera och vi får $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4} + \lambda\left(y + \frac{E}{2\lambda}\right)^2 - \frac{E^2}{4\lambda} + f$

  Vi samlar alla konstanter till en och gör ett variabelbyte på $x, y \Rightarrow x^2 + \lambda y^2 + F$