Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Lars-Åke Lindahl

Tentamen
ENVARIABELANALYS
2010-04-08

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x\ln(1+x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{3}+\ldots)-(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots)}{x(x^2-\frac{(x^2)^2}{2}+\ldots)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\ldots}{x^3+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}+\ldots}{1+\ldots}=-\frac{1}{6}.$$

2.
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x},\ x>0$$
är separabel och kan skrivas på formen
$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x},\ x>0.$$
Integrering ger
$$-\frac{1}{y}=\ln x+C,\ x>0,$$
dvs lösningarna är
$$y=-\frac{1}{\ln x+C},\ x>0.$$
Eftersom $\ln x$ kan anta alla reella värden måste nämnaren bli lika med noll då $\ln x=-C$. Vi kan alltså inte finna någon lösning som är definierad för alla $x>0$.

3. Integralen i a) löses med hjälp av substitutionen $u=\ln x, du=\frac{1}{x}\,dx$. Då får vi
$$\int_{1/e}^{1}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_{1/e}^{1}=\frac{1}{3}.$$
Det är möjligt att beräkna integralen med partiell integration. Då får man tillbaka den givna integralen men multiplicerad med -2. Därefter kan man lösa ut integralen.

Integralen i b) löses med partiell integration. Integralen är en s k oegentlig (improper) eller generaliserad integral, dvs
$$\int_0^1 x^2\ln^2 x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}x^2\ln^2 x\,dx.$$

Vi utnyttjar standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0,\ a > 0$.

$$\int_0^1 x^2 \ln^2 x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}\, 2 \ln x \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= -\int_0^1 2\frac{x^2}{3} \ln x\, dx = -\,2\frac{x^3}{9} \ln x \Big|_0^1 + \int_0^1 2\frac{x^3}{9}\, \frac{1}{x}\, dx =$$

$$\int_0^1 2\frac{x^2}{9}\, dx = 2\frac{x^3}{27}\Big|_0^1 = \frac{2}{27}$$

4. Definitionsområdet är $x \neq 0$. Vertikal asymptot är $x = 0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y - (x-3)) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0$$

så $y = x - 3$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

$$y' = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}, \qquad y'' = \frac{6(x-1)}{x^4}.$$

$y'(-2) = 0$ ger ett lokalt maximum $= -\dfrac{27}{4}$. $y'(1) = 0$ ger en inflexionspunkt i $x = 1$ eftersom y'' växlar tecken där. Detta är den enda inflexionspunkten eftersom y'' endast växlar tecken i $x = 1$.

5. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $0 < x < 1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 1-} = 0 = f(1)$ och det finns en punkt x där $f(x) > 0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0) = 0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt. Några singulära punkter finns inte i detta fall. Vi bestämmer de kritiska punkterna på $0 < x < 1$.

$$f'(x) = 2x \ln^2 x + x^2\, 2 \ln x\, \frac{1}{x} = 2x \ln x(\ln x + 1).$$

Den enda kritiska punkten på $0 < x < 1$ är alltså $x_0 = \dfrac{1}{e}$ och där erhålls det största värdet $= \dfrac{1}{e^2}$.

6. Tangenten genom $P = (a, (a-1)^2 + 1)$ och $Q = (b, -(b+1)^2 - 5)$ på respektive parabel har lutningen

$$\frac{((a+1)^2 + 1) + ((b+1)^2 + 5)}{a - b}.$$

Derivatorna ger att lutningen också kan uttryckas som $2(a-1)$ och $-2(b+1)$, dvs

$$2(a-1) = -2(b+1) \text{ eller } a = -b.$$

Vi utnyttjar att $b = -a$ samt att

$$\frac{((a-1)^2+1)+((b+1)^2+5))}{a-b} = 2(a-1).$$

Detta ger $a = \pm 2$ och $b = \mp 2$ som ger tangeringspunkterna

$$P_1 = (2,2) \text{ och } Q_1 = (-2,-6)$$

respektive

$$P_2 = (-2,10) \text{ och } Q_2 = (2,-14).$$

7. Den första serien $\sum a_n$ är positiv och här testar vi med kvotkriteriet.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = (1+\frac{1}{n})^4 \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

då $n \to \infty$. Serien är alltså konvergent.

Den andra serien $\sum b_n$ är också positiv. Genom att Maclaurinutveckla $1 - \cos \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + \ldots$ leds vi till att jämföra med $\sum c_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ som är konvergent. Vi använder "limit convergence theorem".

$$\frac{b_n}{c_n} = \sqrt{n}(\frac{1}{n^2} + \ldots)n^{3/2} = 1 + \ldots \to 1 < \infty \text{ då } x \to \infty.$$

Det följer att den givna serien är konvergent.

8. $\lim_{x\to\infty} f'(x) = B$ betyder att till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal N så att $|f'(x) - B| < \varepsilon$ för alla x för vilka $x > N$. Antag att $B \neq 0$. Välj $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$. Då finns ett N så att $-\frac{B}{2} < f'(x) - B < \frac{B}{2}$ för alla $x > N$, dvs speciellt gäller

$$|f'(x)| > \frac{|B|}{2} \text{ för } x > N \qquad (*)$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ betyder att till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal M så att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla x för vilka $x > M$. Välj $\varepsilon = \frac{|B|}{4}$. Låt $|x_1 - x_2| = 1$ och välj M så stort att $M \geq N$ och så att $|f(x) - A| < \frac{|B|}{4}$ för alla $x > M$. Om $x_1 > M$ och $x_2 > M$ blir

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |(f(x_1)-A)-(f(x_2)-A)| \leq |(f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|) < \frac{|B|}{4}+\frac{|B|}{4} = \frac{|B|}{2}.$$

Eftersom $|x_1 - x_2| = 1$ har vi alltså olikheterna

$$-\frac{|B|}{2} < \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < \frac{|B|}{2} \text{ för alla } x_1 > M > N, x_2 > M > N \qquad (**)$$

Enligt medelvärdessatsen finns en punkt a på det inre av intervallet (x_1, x_2) sådan att

$$f'(a) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Av (**) följer då att

$$|f'(a)| < \frac{|B|}{2} \text{ där } a > M \text{ och } a > N \qquad (***)$$

Olikheterna (*) och (***) motsäger varandra. Därför är det omöjligt att $B \neq 0$ och vi har därmed visat att $B = 0$.