Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Beräkningsvetenskap

Tentamen i *Beräkningsvetenskap I* 5.0 hp, 2019-05-29

Skrivtid: $14^{00} - 17^{00}$
Hjälpmedel: Bifogat formelblad och miniräknare.

En komplett lösning ska innehålla utförliga resonemang samt motivering till alla svar.

Kursmål (förkortade), hur de täcks i uppgifterna och maximalt betyg (med reservation för modifieringar). För godkänt (betyg 3) krävs att varje mål har minst en godkäntmarkering och att något mål har minst två godkäntmarkeringar.

Fråga nr	Nyckelbegrepp	Algoritmer	Analys	Programmering
1		3		
2		3		
3			3, 3	
4	3, 3			
5				3, 3
6	4			
7	4, 5			

Del A

1. Den ickelineära ekvationen $0.5e^x = 1 + 0.5x^2$ har en lösning i intervallet $(1.2, 1.4)$. Använd Newton-Raphsons metod med startgissning 1.3 på detta problem och svara med det närmevärde till lösningen som du fått efter två iterationer.

2. I avloppskanalen från en kemisk-teknisk fabrik har man placerat mätutrustning för att mäta hur mycket av ett visst miljöfarligt ämne som läcker ut från fabriken. Mätvärdena, koncentrationen c av det aktuella ämnet, i lämplig enhet, för fem successiva mättillfällen anges nedan:

t	0	1	2	3	4
c	1.0	1.3	1.6	2.1	2.7

Mätningarna görs med jämna mellanrum och tidsskalan har satts så att tidpunkterna blir jämna heltal. Det ackumulerade utsläppet under perioden från $t = 0$ till $t = 4$ ges av $\int_0^4 c(t)\mathrm{dt}$. Använd de uppmätta värdena och trapetsformeln med steglängd $h = 1$ för att beräkna ett approximativt värde på denna integral.

3. I följande deluppgifter ska svaren motiveras med formler, men du behöver inte härleda formlerna.

   (a) Om ekvationen i uppgift 1 löses med Newton-Raphsons metod och startgissning $x_0 = 1.2$, så ger de två första iterationerna resultaten $x_1 = 1.3303$ och $x_2 = 1.3192$. Ungefär hur många ytterligare iterationer skulle man behöva göra om toleransen var 10^{-6}?

   (OBS! Frågan ska besvaras *utan* att du genomför några ytterligare iterationer.)

   (b) I den kemisk-tekniska fabriken i uppgift 2 tänker man fortsätta att regelbundet beräkna $\int_0^4 c(t)\mathrm{dt}$, men varje gång med nya mätdata, för en ny tidsperiod från 0 till 4. Om man då vill ha noggrannare resultat än vi fick i uppgift 2 kan man mäta oftare, så att det blir flera punkter och alltså tätare mellan punkterna. Man kan också mäta noggrannare, så att det blir flera korrekta decimaler i mätvärdena (antag att mätvärdena i uppgift 2 är givna med en korrekt decimal). Vilken av dessa åtgärder är viktigast för att vi ska få bättre noggrannhet än i uppgift 2? Motivera svaret med uppskattning av funktionsfelet och diskretiseringsfelet.

4. I såväl deluppgift 4a som deluppgift 4b krävs minst två rätta svar för godkänt på deluppgiften.

   (a) Här nedanför finner du förklaringar av fyra begrepp som har ingått i kursen. Ange för varje förklaring vilket begrepp den avser.

      i. Förlust av signifikanta siffror vid subtraktion mellan jämnstora flyttal

      ii. Numerisk integration där integrationsalgoritmen automatiskt ställer in lämplig steglängd

      iii. Variabler som bara är tillgängliga i den programkomponent där de definieras (t ex i den funktion eller i det script där de definieras)

      iv. Det ekvationssystem, med lika många ekvationer som obekanta, som vid minstakvadratanpassning med polynom behöver lösas för att man ska få fram värden på det ansatta polynomets koefficienter

(b) Här nedanför finns fyra påståenden. Ange för varje påstående vilket av följande begrepp som gör påståendet så korrekt som möjligt när det ersätter symbolen ♡. ***Begrepp***: stabil; diskretiseringsfelet; divergens; kubiska splines; interpolation; relativa felet; normaliserad; kvadratisk konvergens.

  i. Om startgissningen är tillräckligt nära en lösning uppvisar Newton-Raphsons metod ♡
  ii. Vid kurvanpassning med ♡ erhålls en visuellt tilltalande, mjuk kurva.
  iii. Maskinepsilon är en övre gräns för relativa felet i ♡ flyttalsrepresentation
  iv. Vid numerisk integrering är det totala felet summan av ♡ och funktionsfelet.

5. (a) Skriv den rad eller de rader Matlab-kod som behövs för att lösa ekvationen i uppgift 1 genom användning av Matlab-kommandot `fzero`. [*Påminnelse*: `fzero` har två inparametrar: dels ett funktionshandtag, dels en startgissning.]

(b) Nedan visas en Matlab-funktion `exptaylor(x, n)` där vissa rader saknas. Om de saknade raderna läggs till i *rätt* ordning blir funktionsresultatet y summan av de n första termerna i taylorutvecklingen av e^x, det vill säga

$$y = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + \ldots + x^{n-1}/(n-1)!$$

Värdet $n = 1$ ger alltså $y = 1$, med $n = 2$ blir $y = 1 + x$, etc. Om $n < 1$ så kan funktionen inte returnera något meningsfullt resultat och för att markera detta sätts i så fall värdet på y till ”not-a-number”, som i IEEE flyttalsrepresentation betecknas med `NaN`.

De platser i `exptaylor` där rader ska läggas till är markerade med (a)–(d). De saknade raderna är numrerade 1–4. Din uppgift är att para ihop rätt bokstav med rätt siffra, så att raderna kommer i den ordning som krävs för att funktionen ska ge det ovan beskrivna resultatet.

```
function y = exptaylor(x,n)
   if n < 1
     (a)
```

```
    else
      term = 1;
      (b)
      for i = 1:n-1
        (c)
        (d)
      end
    end
end
```

```
1. y = y + term;
2. y = NaN;
3. y = 1;
4. term = term*(x/i);
```

Del B: Uppgifter som testar måluppfyllelse för högre betyg

6. Efter examen anställs du i ett konsultföretag. Där får du arbetsuppgifter inte bara inom ditt specialområde. Nu ska du för en kund som bygger segelbåtar beräkna den totala kraft som verkar på en segelbåtsmast som är H meter hög (mätt från båtens däck). I din gamla lärobok i beräkningsvetenskap hittar du följande formel (Chapra, övning 19.10):

$$f(z) = 200\left(\frac{z}{5+z}\right)e^{-2z/H}.$$

Formeln beskriver den kraft $f(z)$ som verkar på masten vid en punkt z meter över båtens däck. Du drar slutsatsen att den totala kraft F som verkar på masten ges av:

$$F = \int_0^H f(z)\mathrm{dz}.$$

Använd en metod från kursen för att beräkna F för fallet då $H = 12$. Absolutbeloppet av det ***relativa*** felet i det beräknade närmevärdet till F ska vara högst ungefär 0.01.

[*Fotnot*: Enligt Wikipedia har skärgårdskryssaren S 30 den masthöjd vi använder i denna uppgift, alltså 12 meter.]

7. I Trapetsformeln och Simpsons formel använder man punkter som är jämnt utplacerade över integrationsintervallet, med en konstant steglängd h mellan punkterna. Ett alternativt angreppssätt, som kallas Monte Carlo, är att sprida beräkningspunkterna slumpmässigt. Det är användbart när man ska integrera över flerdimensionella områden.

   Om vi beräknar samma integral upprepade gånger med Monte Carlo med 100 punkter, så får vi olika resultat varje gång, eftersom beräkningspunkterna slumpas och blir olika från gång till gång. Det innebär också att felet i Monte Carlo-beräkning med 100 punkter kommer att variera från gång till gång. Men i genomsnitt blir felet med 100 punkter större än det genomsnittliga fel som erhålls vid Monte Carlo-beräkning med 200 punkter.

   I nedanstående tabell visas resultatet av ett experiment, där Monte Carlo har använts för att beräkna en integral med känd lösning. Eftersom lösningen är känd har man efter varje Monte Carlo-beräkning kunnat fastställa hur stort felet i det beräknade närmevärdet till integralen blev. I experimentet använde man olika antal beräkningspunkter (N i tabellen). För varje värde på N gjorde man ett stort antal upprepade Monte Carlo-beräkningar av integralen och fastställde felet i varje beräkning. Slutligen beräknade man felets medelvärde för alla körningar med samma antal punkter (err(N) i tabellen).

N	10000	20000	40000	80000
$err(N)$	0.0023	0.0017	0.0012	0.00085

   Nu vill vi ta reda på hur medelfelet err(N) beror på N. Man vet på teoretiska grunder att $\text{err}(N) \approx a(\frac{1}{N})^b$ för några konstanter a och b. Talet b, som är metodens noggrannhetsordning, är särskilt intressant att känna till.

   Din uppgift för betyg 5 är att med lämplig metod bestämma noggrannhetsordningen hos Monte Carlo-angreppssättet för beräkning av integraler. För att lösningen ska godkännas ska du dels använda en av de metoder som har ingått i den här kursen, dels motivera lösningen genom att bifoga en beskrivning/förklaring av lösningsidén.

   (OBS! Rätt lösningsidé kan ge betyg 4 även om du inte helt skulle lyckas genomföra räkningarna för betyg 5.)