Svar/lösningar till Övningar 3-4

1. För varje formel så finns många DNF:er och KNF:er som är ekvivalenta med formeln, så detta är bara förslag:

(a) DNF : $p \vee (\neg q \wedge r)$

KNF : $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$

(b) DNF : $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

KNF : $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

(c) DNF och KNF : $\neg p \vee q$

(d) DNF och KNF : $\perp$ (eller $p \wedge \neg p$)

(e) DNF :

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

KNF : $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$.

2. Låt $\varphi \in LP(\sigma)$. Vi vet att det finns en DNF ψ som är ekvivalent med φ, och ψ innehåller bara konnektiv bland $\neg$, $\wedge$ samt $\vee$.

(a) Det räcker att visa att varje delformel av ψ på formen $\chi_1 \vee \chi_2$ kan ersättas med en ekvivalent formel utan $\vee$ (och utan $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$).
Detta kan göras eftersom $\chi_1 \vee \chi$ är ekvivalent med $\neg(\neg\chi_1 \wedge \neg\chi_2)$.
(Strikt taget så använder vi substitutionssatsen 3.7.6 (b) i boken.)

(b) Samma argument som i (a), men vi använder att $\chi_1 \wedge \chi_2 \text{ eq } \neg(\neg\chi_1 \vee \neg\chi_2)$.

(c) Enligt (b) så finns $\theta \in LP(\sigma)$ som är ekvivalent med φ och bara innehåller konnektiven $\neg$ och/eller $\vee$.
Samma resonemang som i (a) tillsammans med ekvivalensen

$$\chi_1 \vee \chi_2 \text{ eq } \neg\chi_1 \rightarrow \chi_2$$

visar att ψ_3 som i uppgiftsformuleringen existerar.

3. Låt $A(p) = f$ för alla $p \in \sigma$. Då gäller, enligt uppg. 9 från Övning 2 att, för varje $\psi \in LP(\sigma)$ med endast konnektiv bland $\{\wedge, \vee\}$ så $A^*(\psi) = f$. Men om φ är $\neg p$, för något $p \in \sigma$, så $A^*(\varphi) = s$. Det följer att φ och ψ inte är ekvivalenta om ψ endast innehåller konnektiv bland $\{\wedge, \vee\}$.

4. Påståendet är sant. Enligt uppg. 2 (eller en sats i boken) så är varje formel ekvivalent med en formel som bara har konnektiv bland $\{\neg, \wedge\}$. Alltså räcker det att visa att om φ endast innehåller konnektiv bland $\{\neg, \wedge\}$ så är φ ekvivalent med något ψ som endast innehåller konnektiv bland $\{*\}$.

Strikt taget bevisar man detta med hjälp av (en generalisering) av substitutionssatsen i boken, eller med induktion över formlers uppbyggnad/komplexitet. Men kärnan i beviset är att vi har följande ekvivalenser, som du kan verifiera själv:

$$\neg\varphi \quad \text{eq} \quad \varphi * \varphi$$

$$\varphi \wedge \psi \quad \text{eq} \quad (\varphi * \psi) * (\varphi * \psi).$$

5. Se kursboken för definitioner.

6. Om $\Gamma \vdash_\sigma \varphi$ så $\Gamma \models_\sigma \varphi$ (där vi antar att $\Gamma \subseteq LP(\sigma)$ och $\varphi \in LP(\sigma)$).

7. $\Gamma \vdash_\sigma \varphi$ om och endast om $\Gamma \models_\sigma \varphi$.

Ibland kallas implikationen

"om $\Gamma \models_\sigma \varphi$ så $\Gamma \vdash_\sigma \varphi$"
för fullständighetssatsen, men i vår kursbok kallas denna implikation för "adekvathetssatsen".

8. Stämmer inte, för $\neg A \vee \neg B \not\models \neg A \to B$. (Låt $A^*(A) = A^*(B) = f$.)

9. Stämmer inte, för $\neg A \wedge \neg B \not\models \neg A \to \neg B$. (Låt $A^*(A) = f$ och $A^*(B) = s$.)

10. Stämmer inte, för $\{A, \neg A \leftrightarrow B\} \not\models B \vee C$. (Låt $A^*(A) = s$, $A^*(B) = A^*(C) = f$.)

11. Stämmer, eftersom
$$\{A \vee \neg B, C \vee \neg B\} \models A \vee \neg B.$$

Obs! I 8–11 används sundhets- eller fullständighetssatsen för att "överföra" ett påstående om '$\models$' till ett påstående om '$\vdash$'.

12. 8, 9, 11. (Betrakta en sanningsvärdestabell och se endast raderna där A är sann.)

13. 8, 10, 11 (Betrakta en sanningsvärdestabell och se endast raderna där B är sann.)

I uppg. 14–19 resonerar vi som i uppg. 8–11, bortsett från att vi ibland måste ge en härledning i naturlig deduktion.

14. Stämmer inte.

15 Stämmer.

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\lor\psi)\land\gamma}{\varphi\lor\psi}\,(\land E) \qquad \dfrac{\cancel{\varphi}^1}{\varphi\lor(\psi\land\gamma)}\,(\lor I) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\psi}^1 \quad \dfrac{(\varphi\lor\psi)\land\gamma}{\gamma}\,(\land E)}{\psi\land\gamma}\,(\land I)}{\varphi\lor(\psi\land\gamma)}\,(\lor I)}{\varphi\lor(\psi\land\gamma)}\,(\lor E)^1$$

16. Stämmer.

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{2} \quad \cancel{\varphi \to \psi}^{1}}{\psi}\,(\to E)}{(\varphi \to \psi) \to \psi}\,(\to I)^{1} \qquad \dfrac{\cancel{\psi}^{2}}{(\varphi \to \psi) \to \psi}\,(\to I)}{(\varphi \to \psi) \to \psi}\,(\vee E)^{2}$$

17. Stämmer inte.

18. Stämmer. (Gör härledningen själv.)

19. Stämmer. (Gör härledningen själv.)

20. Läs beviset av sundhetssatsen i boken så förstår du hur man ska göra.

21. (a) Låt $\sigma = \{P, F, G, S\}$, och låt satssymbolerna ha följande betydelser:

P : Jag är i Paris.
F : Jag är i Frankrike.
G : Jag är i Genève.
S : Jag är i Schweiz.

Då översätts resonemanget till

$$\{P \to F,\ G \to S\} \vdash (P \to S) \vee (G \to F).$$

Denna slutledning är (kanske lite kontraintuitivt) korrekt, eftersom

$$\{P \to F,\ G \to S\} \vDash (P \to S) \vee (G \to F)$$

(och vi använder fullständighetssatsen).

Det senare kan inses så här.

Enda sättet som slutsatsen kan vara falsk är om

P och G är sanna,

och S och F är falska.

Men då är även antagandena

$P \to F$ och $G \to S$ falska.

(Eller gör en sanningsvärdestabell, med 16 rader.)

(b) Låt $\sigma = \{p, q, r\}$ och låt satssymbolerna ha följande betydelser:

p : 1 är ett primtal.

q : 2 är ett primtal.

r : 2 är det minsta primtalet.

Då översätts resonemanget till: ⑨

$\{q \to r,\ r \to \neg p,\ \neg p\} \vdash r.$

Om man låter p, q och r vara falska så blir antagandena sanna men slutsatsen blir falsk. Därmed är r inte en konsekvens av antagandena. Från sundhetssatsen följer nu att slutsatsen r inte följer från antagandena. (Visserligen är 2 ett primtal, men resonemanget som ges är alltså otillräckligt för att visa detta.)