Lektion 5

Svar / lösningsförslag

1. Jag använder "mallen" i mina föreläsningsanteckningar.

1. L_1 är oändlig eftersom $a^n b^n a^n \in L_1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.
2. Antag att L_1 är en CFL.
3. Låt k vara given av pumpsatsen.
4. Välj $w = a^k b^k a^k$, så $w \in L_1$ och $|w| \geq k$.
5. Antag att $w = uvxyz$ där $|vxy| \leq k$ och $vy \neq \varepsilon$. Eftersom $|vxy|$ så är vxy en delsträng av $a^k b^k$ eller en delsträng av $b^k a^k$. Vi gör en falluppdelning.

   Fall 1: Antag att vxy är en delsträng av $a^k b^k$. Strängen uv^2xy^2z kommer då att ha för många växlingar mellan 'a' och 'b' (om v eller y innehåller både a:n och b:n) eller så kommer det sista a-blocket

vara kortare än det första a-blocket
eller vara kortare än b-blocket.
I samtliga fall så $uv^2xy^2z \notin L_1$.

Fall 2: Antag att vxy är en delsträng av $b^k a^k$. Det första a-blocket i $uxz = uv^0xy^0z$ kommer då att vara längre än det sista a-blocket eller vara längre än b-blocket. I båda fallen så $uv^0xy^0z \notin L_1$.

6. Slutsatsen i punkt 5 motsäger pumpsatsen för CFL, så L_1 är inte en CFL (dvs. inte sammanhangsfritt).

I beviset att L_2 inte är en CFL kommer jag bara att beskriva stegen 3–5.

3. Låt k vara given av pumpsatsen.
4. Välj $w = a^k b^k c^k$ så $w \in L_2$ och $|w| \geq k$.

5. Antag att $w = uvxyz$ där $|vxy| \leq k$ och $vy \neq \varepsilon$. Då måste vxy vara en delsträng av $a^k b^k$ eller av $b^k c^k$. I det första fallet så kommer $uxz = uv^0xy^0z$ att ha färre 'a' än 'c' eller färre 'b' än 'c'. I det andra fallet kommer uxz att ha fler 'a' än 'b' eller fler 'a' än 'c'. I samtliga fall så $uv^0xy^0z \notin L_2$.

2. (a) $abaabbba \in L(G_1)$ men $babbaab \notin L(G_1)$. Det senare beror på att produktionsregeln $S \to ABS$ alltid skapar <u>lika många</u> A som B (som sedan kan göras om till 'a' och 'b').

(b) $L(G_1)$ består av alla strängar över $\{a, b\}$ som har lika många 'a' som 'b'.

(c) $L(G_1)$ är sammanhangsfritt (trots att G_1 inte är en CFG) för man kan konstruera en PDA M så att $L(M) = L(G_1)$. (Se lösningen till en av uppgifterna till lektion 4.)

3. (a) $111111 = 1^6 \notin L(G_2)$,

$11111111 = 1^8 \in L(G_2)$, vilket motiveras av svaret till (b)-delen.

(b) $L(G_2) = \{ 1^{(2^n)} : n \in \mathbb{N} \}$.

Detta beror på att varje Y som "förflyttar sig" (med regeln $1Y \to Y11$) från höger om alla ettor till vänster om alla ettor fördubblar antalet ettor, och man kan bara bli av med Y:na genom att flytta dem till X som alltid står längst till vänster.

5. Min grammatik för L_1 är en modifikation av grammatiken i Exempel 4.1 i boken, så läs först detta exempel.

$$\left.\begin{array}{l} S \to \varepsilon \mid ABNSC \\ BNA \to ABN \\ BNB \to BBN \\ BNC \to BC \end{array}\right\} \text{Skapar strängar på formen } A^n B^n C^n$$

$$\left.\begin{array}{l} A \to \varepsilon \mid a \\ B \to b \\ C \to CC \mid a \end{array}\right\} \text{Gör } A^n B^n C^n \text{ till } a^m b^n a^l \text{ där } m \le n \le l.$$

En grammatik för L_2:

$S \to ABCS \mid \varepsilon$ (skapar lika många A som B som C)

$$\left.\begin{array}{l} AB \to BA \\ AC \to CA \\ BA \to AB \\ BC \to CB \\ CA \to AC \\ CB \to BC \end{array}\right\} \text{ordnar om symbolerna på varje möjligt sätt}$$

$A \to a$
$B \to b$
$C \to c$