Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Thomas Erlandsson

ENVARIABELANALYS
**KandMat1, Frist, Lärare**
2011-04-26

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
**Skrivtid:** 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-x}}{e^{-x} - e^{-2x}}$.

2. Bestäm **största värdet** av $x^2 e^{-2x}$ på **hela** intervallet $0 \le x < \infty$. Motivera noggrant.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-2x}\, dx$.

4. $f(x)$ definieras enligt $f(x) = -x\ln x,\ 0 < x < 1, f(0) = f(1) = 0, f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x,\ x > 1$. Bestäm **största värdet** av $f(x)$ på **hela** intervallet $0 \le x < \infty$.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$.

6. Skissera kurvan
$$y = \frac{(x+1)^2}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}.$$
Bestäm särskilt nollställena samt eventuella vertikala, horisontella och sneda asymptoter samt lokala extrempunkter.

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' - y = 1$$
för vilken $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2$ för vilken $y(1) = 0$.

9. Talet $x$ uppfyller att $0 < x < 1$. Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{1}{2}n}$.

10. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ har konvergensradien lika med 3. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka $x$ serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.

V.G.V!

PROBLEM

1. Bestäm de värden på $\beta$ för vilka det går att dra

a) precis två      b) precis en      c) ingen

tangent till parabeln $y = x^2$ genom punkten $P = (1, \beta)$. Illustrera de tre fallen med figurer.

2.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, dvs att funktionen är kontinuerlig i origo.

b) Bevisa att $f'(0) = 0$.

c) Bestäm de lokala extrempunkterna och asymptoterna till kurvan

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0, f(0) = 0$$

samt skissera den.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}\ , \ |r| < 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$