

UPPSALA UNIVERSITET

FÖRELÄSNING 7

Kombinatorik

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
February 14, 2023

CONTENTS

1. Dyck-stigar	2
1.1. Hur många Dyck-stigar finns det av varje given längd?	2
1.2. Newtons binomialsats och en explicit formel för d_n	3
1.3. Kombinatoriskt bevis av Teorem 11	3

1. DYCK-STIGAR

Anmärkning:

Betrakta stigar som alfabet för lättare räkning! (Ge exempel på detta)

1.1. Hur många Dyck-stigar finns det av varje given längd?

Vi börjar med att hitta någon rekursion som ger oss någon slags idé om hur vi gör. Sättet vi gör det är att rita diagonalen i Figur 1. Vi tittar på första punkten som träffar den blåa diagonalen, för när den har den träffat den diagonalen, vet vi att resten kommer vara en dyck-stig (den börjar i den punkten och går till slutet som också ligger på diagonalen). Detta är en kortare dyck-stig.

I termer av former betyder detta Lemma 4.

Vad vi sett i bilden är att varje dyck-stig kan skrivas som steg uppåt:

$$uw_i H w_w$$

Där u är uppåt, w_i en dyck-stig, H punkten som träffar diagonalen.

Hur kan vi skapa en dyck-stig med längd $2n$? Notera att vi plockar på oss 2 extra steg (u, H):

$$d_{n+1} = \sum_{k=0}^n \underbrace{d_k}_{\text{Val på första stigen}} \cdot \underbrace{\quad}_{\text{Val av andra stigen}}$$

Anmärkning

Dyck-stigar går alltid till hörnet, dvs från $(0,0) \rightarrow (n,n)$

Notera att summan är $d_{n+1} = (d * d)_n$ (per definition av faltning)

Proposition 5:

$$F_d(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Bevisiden kommer från vår rekursion, att $d_{n+1} = (d * d)_n$. Tag genererande funktionen på båda sidorna

Bevis 1.1

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} x^n &= F_d(x)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} x^{n+1} &= \frac{F_d(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

Alltså:

$$\begin{aligned} F_d(x)^2 &= \frac{F_d(x) - 1}{x} \Rightarrow x F_d(x)^2 = F_d(x) - 1 \\ F_d(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x} \end{aligned}$$

Notera \pm , vi måste bestämma om det ska vara ett plus-eller minus tecken.

Vi kan använda att vi vet när funktionen ska vara lika med noll, antalet stigar mellan $(0,0)$ och $(0,0)$ är 0:

$$F_d(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad \text{existerar ej, alltså måste vara ett minust-tecken}$$

□

Anmärkning

Den viktiga idén bakom lösningen var att hitta en rekursion, då kunde vi använda våra kombinatoriska verktyg på den såsom genererande funktioner.

Vi är nästan i mål, det vi ska göra nu kommer ge oss en faktisk formel.

1.2. Newtons binomialsats och en explicit formel för d_n .

Notera att $x^{\underline{k}} = \frac{x!}{(x-k)!}$, då blir:

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$$

Teorem 8

Skillnad mellan denna och "vanliga" binomialsatsen? Jo, vanliga binomialsatsen gäller för $r \in \mathbb{Z}$, men denna gosse gäller för $r \in \mathbb{R}$

Beviset kanske går att få fram kombinatoriskt, se över om det ska tilläggas.

Bevis 1.2: Bevis av Proposition 9

När $k = 0$, visa att man kan använda fallande-fakultet för att visa att:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k 4^k x^k \\ F_d(x) &= \frac{1 - 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k 4^k x^k}{2x} \\ \Rightarrow \frac{-4 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k 4^{k-1} x^{k-1}}{2x} &= -4 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k 4^{k-1} x^{k-1} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} 4^{k-1} x^{k-1} = F_d(x) \end{aligned}$$

□

Lemma 1.1: 10

Det gäller att:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n}$$

Bevis 1.3

GÖR DETTA

□

1.3. Kombinatoriskt bevis av Teorem 11.

Bevis 1.4

Metoden går ut på att titta på mängden av *alla* uppåt-höger stigar från $(0,0)$ till (n,n) som vi vet hur många de är (de är $\binom{2n}{n}$). Vi vet att dyck-stigar är delmängd till dessa, per definition. Det vi behöver göra nu är att räkna de stigar som inte är dyck-stigar och sedan plocka bort de från totalen. De stigar som inte är dyck-stigar kallar vi för *dåliga stigar*. Se Figur 2

Vi försöker hitta en bijektion mellan dåliga stigar och uppåt-höger stigar från $(0,0)$ till $(n+1,n-1)$ (vi tar oss alltså till en annan punkt). Vi identifierar den första punkten där den dåliga stigen träffar den underdiagonalen (grönt). Vi vet att det måste finnas en sådan punkt eftersom vi har antagit att det är en dålig stig (det är annars en dyck-stig). Det vi sedan gör är att vi speglar stigen i den punkten, så att varje steg höger blir ett steg uppåt och ett steg uppåt blir ett steg höger. Detta sker alltså *efter* punkten som korsar den punkten.

Notera att vi hamnade i punkten $(n+1, n-1)$, hur kan vi visa att det alltid sker?

Vi vet att när vi träffade den gula punkten så har vi ett steg fler åt höger än uppåt (annars hade vi hamnat på den blåa diagonalen). Vi vet att den vita stigen hamnar på den blåa, så om vi har ett steg mer åt höger än uppåt, måste vi jämna ut. Totalt har vi 2 steg fler åt höger efter speglingen, vilket gör att vi hamnar i $(n+1, n-1)$. Använd att steg innan höger = steg innan höger -1

Vi har nu gjort hälften av bijektionen, för att vi ska vara säkra på att detta är en bijektion ska vi kunna ta en uppåt-höger stig från $(0,0)$ till $(n+1, n-1)$ och skapa en dålig stig. Vi gör detta på precis samma sätt. Vi tittar på uppåt-höger stig, och tittar på den första punkten där den träffar den gröna diagonalen. Eftersom $(n+1, n-1)$ ligger utanför till höger så kommer den skära en punkt H . Vi får nu samma argumentation fast baklänges och vi har fått en dålig stig.

Vi har visat att antalet dåliga stigar $= |UH : (0,0) \rightarrow (n+1, n-1)|$ m.h.a denna bijektion. Vi vet faktiskt hur vi ska räkna dessa uppåt höger stigar:

$$= \binom{(n+1) + (n-1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$$

Då får vi att:

$$\begin{aligned} d_n &= \underbrace{\binom{2n}{n}}_{UH \text{ till } (n,n)} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (2n - (n+1))!} \\ &= (2n)! \left(\frac{1}{n!n!} - \frac{1}{(n+1)!(n-1)!} \right) = (2n)! \left(\frac{n+1}{(n+1)!n!} - \frac{n}{(n+1)!n!} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Hade vi istället valt att studera den genererande funktionen hade vi studerat:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} x^k$$

Om vi hade försökt bevisa $d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$ med rekursion är det nästintill omöjligt. Det kombinatoriska beviset är rakt på sak och tydligt, men vi missar en del sevärdheter som faktiskt kan vara intressanta. \square

Anmärkning

Anledning till varför man är intresserad av Catalan tal är att de räknar många olika saker

Exempel 12

Vi vet att varje sådant uttryck börjar med (. Startparantes, sedan w_1 som är matchande uttryck med paranteser, stäng av Startparantes, sedan w_2 . Men detta är samma som vår uppdelning av dyck-stigar.

För att skapa P_{n+1} väljer vi längden av w_1 (tillåtet att vara tomt):

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^n P_k P_{n-k}$$

Detta uppfyller samma följd av rekursion, och ges därmed av Catalantal.