UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody
018–471 32 81, 073–990 96 58
seidon@math.uu.se

Prov i matematik
KandMat, Fristående
Algebra II
2014–06–04

Nedan följer svar, ledningar och kommentarer till tentamen.

1. (**4p**) Avgör, för vart och ett av följande påsåenden, om det är sant eller falskt. Om påståendet är falskt krävs motexempel. Om påståendet är sant krävs inget bevis.

a) Om K är en kropp så är $K[X]$ en kropp. *Kommentar: Detta är **falskt!** T ex saknar polynomet $f(X) = X$ invers!*

b) Om I är ett maximalideal i en kommutativ ring R, så är R/I en kropp. *Kommentar: Detta är sant, enligt sats från kursen.*

c) Två polynom $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}_{17}[X]$ är lika om $f(a) = g(a)$ för alla $a \in \mathbb{Z}_{17}$. *Kommentar: Detta är **falskt!** T ex ger Fermats lilla sats att polynomet $f(X) = X^{17} - X$ uppfyller $f(a) = 0$ för alla $a \in \mathbb{Z}_{17}$, men det är inte lika med nollpolynomet. Att bara skriva att två polynom är lika om och endast om deras koefficienter är lika räcker inte som motivering, ty det villkoret skulle kunna vara ekvivalent med att polynomens värde i alla punkter är lika (så är också fallet över oändliga kroppar). **Motexempel krävs** för att visa att så är inte fallet här.*

d) Nollidealet i en ring kan aldrig vara maximalt. *Kommentar: Detta är falskt! I en kropp är nollidealet alltid maximalt.*

2. (**5p**) År n är det riksdagsval i Sverige precis då $4|(n + 2)$, presidentval i Finland precis då $6|(n+2)$, och parlamentsval i EU precis då $5|(n+1)$. Antag att det alltid kommer att vara så. Bestäm alla årtal då alla tre valen äger rum samma år. *Kommentar: Detta sker år $34 + 60m$ för varje heltal m. Observera att 4, 5 och 6 inte är parvis relativt prima. Observera även att division inte bevarar kongruens i allmänhet.*

3. (**5p**) Låt R vara en kommutativ ring.

a) Vad menas med att R är *faktoriell*? Återge definitionen! *Kommentar: En faktoriell ring är ett **integritetsområde** där varje **nollskilt, icke-inverterbart** element kan skrivas som en produkt av irreducibla element på ett entydigt sätt så när som på associering och faktorernas ordning.*

b) Låt $R = \mathbb{Z}[i]$ och $a = 15 - 45i \in R$. Faktoriesera a i irreducibla faktorer. *Svar:* $15-45i = 3(2+i)(2-i)^2(1-i)$. *Andra varianter kan förekomma på grund av associering och ordning. Notera särskilt att $1 - 3i$ inte är irreducibelt, ty dess Euklidiska norm är 10, som inte är ett primtal.*

4. (**5p**) Låt R vara en kommutativ ring.

a) Antag att $a \in R$ är inverterbart. Visa att varje element associerat till a är inverterbart. *Kommentar: Om a är inverterbart och $x = au$ med u inverterbart, så är $u^{-1}a^{-1}$ invers till x.*

b) Antag att $b \in R$ är irreducibelt. Visa att varje element associerat till b är irreducibelt. *Kommentar: Ett element z är irreducibelt om och endast om z är **icke-inverterbart** och **för varje** $x, y \in R$ medför $z = xy$ att x eller y är inverterbart. Så om b är irreducibelt och z associerat till b är z också icke-inverterbart, vilket följer ur föregående deluppgift, och om $z = xy$ så är $b = uxy = (ux)y$ för något inverterbart $u \in R$. Men att b är irreducibelt medför att antingen är y inverterbart, eller så är ux inverterbart. Enligt föregående är då antingen y eller x inverterbart. Därmed är z irreducibelt. Observera att det inte räcker att hitta **en viss** faktorisering av z i två faktorer där den ena är inverterbar — man måste visa att varje faktorisering kräver att ena eller andra faktorn är inverterbar. T ex är $6 = 6 \cdot 1 \in \mathbb{Z}$ och 1 är inverterbart, trots att 6 inte är irreducibelt ty det gäller även att $6 = 2 \cdot 3$.*

c) Antag att $c \in R$ är en nolldelare. Visa att varje element associerat till c är en nolldelare. *Kommentar: Om $z = cu$ med u inverterbart så är $z \neq 0$ ty $c = u^{-1}z \neq 0$ och om $dc = 0$ för något $d \in R$ så är $dz = dcu = 0u = 0$, dvs z är en nolldelare.*

5. (**5p**) Låt R vara en ring och $F : R \to R$ en ringhomomorfism. Definiera delmängden $\text{fix}(F) = \{x \in R | F(x) = x\}$. Denna mängd kallas för *fixpunktsmängden* till F.

a) Visa att $\text{fix}(F)$ är en delring till R. *Kommentar: Här måste man visa att summan och produkten av två element i $\text{fix}(F)$ ligger i $\text{fix}(F)$, att 0 och 1 ligger där, och att den **additiva inversen** till varje element i $\text{fix}(F)$ ligger där. Man behöver inte visa associativitet, kommutativitet osv, ty dessa gäller i R och operationerna i en delring är desamma som i stora ringen, så man måste bara visa slutenhet enligt föregående mening. Observera att den additiva inversen är viktig! $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ är sluten under alla andra villkor men ej en ring då additiv invers saknas.*

b) Betrakta funktionen $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som ges av $z \mapsto \overline{z}$ (dvs komplexkonjugatet av z). Visa att K är en isomorfism och bestäm $\text{fix}(K)$. *Kommentar: Kontrollera att K är en homomorfism som är injektiv och surjektiv. Observera att surjektivitet inte följer ur injektivitet och det faktum att definitionsmängd och målmängd har samma kardinalitet! Detta gäller endast om kardinaliteten är ändlig. Funktionen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ som ges av $n \mapsto n/1$ är en injektiv ringhomomorfism som inte är surjektiv trots att $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. För funktionen K är fixpunktsmänden helt enkelt realaxeln.*

6. (**6p**) Låt $C(\mathbb{R})$ beteckna mängden av alla kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Denna mängd är en kommutativ ring under punktvis addition och multiplikation. (Detta betyder att $f + g$ definieras genom $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$, och $f \cdot g$ på motsvarande sätt.)

a) Visa att $I = \{f \in C(\mathbb{R}) | f(2) = 0\}$ är ett primideal i $C(\mathbb{R})$. (Glöm inte att först visa att det är ett ideal!) *Kommentar: Man måste kontrollera idealaxiomen, bl a att idealet är **icke-tomt**. Observera att ringen inte bara består av polynom.*

b) Visa att funktionen $\alpha : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ som ges av $f \mapsto f(2)$ är en surjektiv ringhomomorfism, och bestäm kärnan av α. *Kommentar: Här kontrollerar man först homomorfismaxiomen. Sedan är α surjektiv ty varje reellt tal a är bilden av t ex den konstanta funktionen a. Kärnan är I från tidigare.*

c) Visa att $C(\mathbb{R})/I \simeq \mathbb{R}$. *Kommentar: Detta följer ur del b) ovan och Noethers första isomorfisats.*