Lektion 7

Lösningsförslag til inlupp 3

1| Kopera beviset fra Algebra I, bytta ut $\mathbb{Z}$ med R och $\mathbb{Q}$ med $Q(R)$.

2| Låt R vara komm., $\varphi: R \to R$ isomorfism.

$F := \{ r \in R \mid \varphi(r) = r \}$

a) Visa att $F \leq R$.

- $F \neq \emptyset$: $\varphi(0_R) = 0_R \Rightarrow 0_R \in F$.
  $\varphi(1_R) = 1_R \Rightarrow 1_R \in F$.

- Låt $f, g \in F$. $f+g \in F$?

$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g) = f+g \Rightarrow f+g \in F.$

$f \cdot g \in F$?

$\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g) = f \cdot g \Rightarrow f \cdot g \in F.$

b) Låt $p = x^2 + ax + b \in F[x]$. Låt $r \in R$ vara en rot til p.
Visa att $\varphi(r)$ är en rot til p.

$$
\begin{aligned}
p(\varphi(r)) &= \varphi(r)^2 + a \cdot \varphi(r) + b \\
&= \varphi(r^2) + \varphi(a) \cdot \varphi(r) + \varphi(b) \\
&= \varphi(r^2) + \varphi(a \cdot r) + \varphi(b) \\
&= \varphi(r^2 + ar + b) \\
&= \varphi(0) = 0
\end{aligned}
$$

$\underline{r^2 + a \cdot r + b = 0}$

$\varphi(r^2 + a \cdot r + b) = \varphi(0) = 0$

$\varphi(r^2) + \varphi(a \cdot r) + \varphi(b) = 0$

$\varphi(r^2) + \varphi(a) \cdot \varphi(r) + b = 0$

$\varphi(r^2) + a \cdot \varphi(r) + b = 0$

$\varphi(r)^2 + a \cdot \varphi(r) + b = 0$

c) Anta att $\varphi \circ \varphi = id_R$. För varje $r \in R$ finnes en moniskt andragradspolynom $\in F[X]$ med rot r.

$(x - r) \notin F[X]$

Om vi hadde $p \in F[X]$, $\deg(p) = 2$ med rot r, så måste $(x-r) \mid p$, fra b): $(x - \varphi(r)) \mid p$

Vad med $(x-r)(x - \varphi(r))$?

$\ldots = x^2 - rx - \varphi(r)x + r\varphi(r) = x^2 - (r + \varphi(r))x + r \cdot \varphi(r)$

$r + \varphi(r) \in F$? Ja, fordi; $\varphi(r + \varphi(r)) = \varphi(r) + \varphi(\varphi(r)) = \varphi(r) + r$

$r \cdot \varphi(r) \in F$? Ja, fordi $\varphi(r \cdot \varphi(r)) = \varphi(r) \cdot \varphi(\varphi(r)) = \varphi(r) \cdot r$.

altså: $x^2 - (r + \varphi(r))x + r \cdot \varphi(r)$ fungerar.

Repitition: (Ideal)

Def: En delmängd $I \subseteq R$ kallas för ideal om:

i) $0 \in I$

ii) $a, b \in I \Rightarrow a+b \in I$

iii) För alla $r \in R$, $a \in I$: $r \cdot a \in I$.

Delring

i) $0, 1 \in I$

ii) $a, b \in I \Rightarrow a+b \in I, -a \in I$

iii) $a, b \in I \Rightarrow a \cdot b \in I$

Jämför: 1_R ligger i varje delring. Vad händer om $1_R \in I$, I ideal?

$\Rightarrow I = R$ fordi: $\underset{R}{\underset{\cap}{r}} \cdot \underset{I}{\underset{\cap}{1_R}} = r \in I$ för alla $r \in R$.

$\Rightarrow$ (I ideal och delring $\Rightarrow I = R$).

Analogi: I är en "generaliserad noll":

$r \cdot 0 = 0$. för alla $r \in R$. $\qquad r \cdot I \subseteq I$ f.a. $r \in R$.

10.9| $X \subseteq R$, $X \neq \emptyset$. Visa att

$$I = \mathrm{Ann}_R(X) = \{ a \in R \mid xa = 0 \text{ f.a. } x \in X \}$$

är et ideal.

Bevis: i) $0 \in I$: $x \cdot 0 = 0$ f.a. $x \in X$.

ii) $a, b \in I$, $x \cdot (a+b) = xa + xb = 0 + 0 = 0$ $\qquad X \cdot I = \{0\}$

$\Rightarrow a+b \in I$

iii) $r \in R$, $a \in I$, $x \cdot (r \cdot a) = (xa) \cdot r = 0 \cdot r = 0$

$\Rightarrow r \cdot a \in I$

11| Låt $f: R \to S$, $I \trianglelefteq S$, visa att

$$J = f^{-1}(I) = \{ r \in R \mid f(r) \in I \}$$

är et ideal i R.

Bevis: i) $0_R \in J$: $f(0_R) = 0_S \in I$

ii) $r, s \in J$: $r+s \in J \Leftrightarrow f(r+s) \in I \Leftrightarrow f(r) + f(s) \in I$

stämmer fordi $f(r), f(s) \in I$

iii) $r \in R$, $a \in J$: $r \cdot a \in J \Leftrightarrow f(r \cdot a) \in I \Leftrightarrow f(r) \cdot f(a) \in I$

stämmer fordi $f(a) \in I$.

112| Låt $f: R \to S$, f epimorfism (i.e. f surj.), $I \trianglelefteq R$. Visa att $f(I) \trianglelefteq S$ är et ideal.

Bevis: i) $0_S = f(0_R) \in f(I)$ fordi $0_R \in I$

ii) $a, b \in f(I)$. $\Rightarrow \exists\, r, s \in I: f(r) = a,\ f(s) = b$

$\Rightarrow r+s \in I$ och $f(\underbrace{r+s}_{I}) = f(r) + f(s) = a+b \in f(I)$

iii) Låt $s \in S$, $a \in f(I)$. $\Rightarrow \exists\, r \in I: f(r) = a$

f surj. $\Rightarrow \exists\, t \in R: f(t) = s$

I ideal $\Rightarrow t \cdot \underset{I}{r} \in I \Rightarrow f(t \cdot r) = f(t) \cdot f(r) = s \cdot a \in f(I)$.

116| Vilka är sanna?

a) $\mathbb{Q}$ är et ideal i $\mathbb{R}$? Nei, fordi $1_{\mathbb{Q}} \cdot \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) En hom. $f: R \to S$ avbilder ideal på ideal.

Nei, om f är inte surj: $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$

$\mathbb{Q}$ ideal i $\mathbb{Q}$ men $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ inte ideal i $\mathbb{R}$.

c) R en ring, I ideal i R. I är en delring av R.

Nei om $I \neq R$. I delring $\Rightarrow 1 \in I \Rightarrow r \cdot 1 \in I$ f.a. $r \in R$.

d) Varje delring av R är et ideal.

Nei, om delringen är äkta så som c) ....

e) I i R är ett äkta ideal $\Leftrightarrow 1 \notin I$.

Ja, c), d).

118| Låt K vara en kropp, $f: K \to R$ en ringhom.

Visa att f är injektiv.

Bevis: Låt $k, l \in K$, anta att $f(k) = f(l)$.

$\Leftrightarrow f(k) - f(l) = 0 \Leftrightarrow f(k-l) = 0$

$K = \underset{\text{inv. element.}}{K^*} \cup \{0\}$. f hom $\Rightarrow f$ sender inv. element. til inv. element.

$\Rightarrow f(k-l) = 0 \Leftrightarrow k-l \notin K^* \Leftrightarrow k-l = 0 \Leftrightarrow k = l$.

123, 124| Hitta et prim och et max. ideal i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$\{0\} \times \mathbb{Z}$ är et ideal. (Övning: Vis att det är prim)

$2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($2\mathbb{Z}$ är max. i $\mathbb{Z}$)