

**Skrivtid:** kl. 8-13. *Inga hjälpmedel.*

**Svar:** Skriv endast en uppgift per blad. Alla svar ska motiveras. Svaren ska förenklas så långt det går, men får dock innehålla outräknade binomialkoefficienter, faktulteter eller potenser, förutsatt att talen utskrivna innehåller fler än fyra siffror i bas tio.

**Betyg:** 40 poäng totalt. Minst 18 poäng krävs för betyget 3, 25 för betyget 4 och 32 för betyget 5.

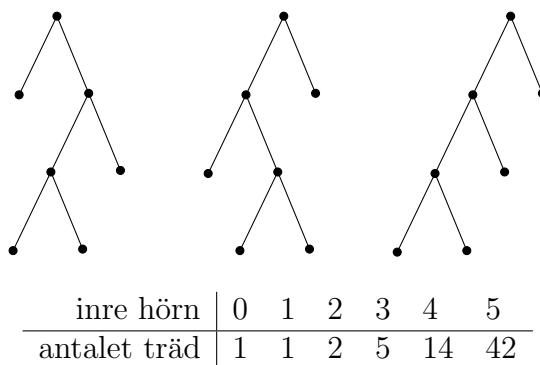
1. En kommitté bestående av 2 män och 2 kvinnor ska väljas från en större grupp bestående av 8 män och  $k$  kvinnor.
  - (a) Bestäm antalet sätt att bilda kommittén om  $k = 5$ . (2)
  - (b) Bestäm antalet kvinnor i större gruppen om det finns 1008 sätt att bilda kommittén. (2)
  - (c) Kommittén tar hand om 6 ärenden. Bestäm antalet sätt att fördela ärendena om varje person tar hand om minst ett ärende. (3)
2.
  - (a) Bestäm på hur många sätt talet 330 kan faktoriseras med positiva heltalsfaktorer (till exempel,  $330 = 6 \cdot 55$  och  $330 = 1 \cdot 330$  är olika faktoriseringar men  $330 = 55 \cdot 6$  anses ekvivalent med första faktoriseringen). (2)
  - (b) Ett positivt heltal  $n$  har en primtalsfaktorisering  $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ , där  $p_1, p_2, \dots, p_k$  är olika primtal. Beskriv hur Stirlingtal kan användas för att bestämma antalet faktoriseringar som består av exakt  $j$  heltalsfaktorer, där  $1 \leq j \leq k$ . Beskriv också relationen till Belltal. (3)
3. Alice, Bob, Chris och Daphne äter hors-d'oeuvre bestående av 10 kanapéer. Bob äter som mest 1 kanapé. De andra äter som mest 7 kanapéer var. På hur många sätt kan de 10 kanapéerna fördelas mellan de fyra personerna? Lös problemet med genererande funktion. (5)
4. En rad med 9 träd ska planteras vid en gata. Raden ska inkludera exakt 2 ek, ett jämnt antal björk och resten tall. På hur många sätt kan man plantera raden? Lös problemet med genererande funktion eller med någon annan lämplig metod. (4)
5. Alice och Bob bygger ett torn med brickor. Bob väljer endast plastbrickor (röd, vit, grön eller blå) och Alice väljer endast träbrickor (ek eller furu). Alice börjar bygga tornet och hon placerar alltid precis en bricka efter Bob. Bob placerar brickor som helst. Om vi antar att det finns obegränsat antal brickor av vart slag, hur många sätt finns det för Alice och Bob att bygga ett torn av 20 brickor? Lös problemet genom att ställa upp och lösa en differensekvation. (5)

[Fler uppgifter på nästa sida...]

6. Kombinatoriska ord bestående av 12 bokstäver bildas av basordet

$aaabbbcccd$

- (a) Hur många sådana ord finns det? (1)
- (b) Hur många ord innehåller minst tre identiska bokstäver tillsammans i ordning efter varandra (till exempel,  $ddbababaccd$ )? (4)
- (c) Antag ett nytt basord ges med 12 bokstäver och minst två av varje bokstav (till exempel  $faadcdcdfe$ ). Mängden  $X$  består av alla möjliga kombinatoriska ord som kan bildas med samma bokstäverna. Varje ord som tillhör  $X$  kan förkortas genom att ta bort upprepningar (till exempel, ordet  $faadcdcdfe$  blir  $fadce$ ). Om 721 ord i mängden  $X$  väljs slumpmässigt, förklara varför minst 2 har samma förkortning. (2).
7. Tre olika binära träd visas nedan. Varje träd har 3 inre hörn om vi inkluderar det översta hörnet som kallas ofta för roten (vi betraktar träd med endast en rot). Antalet möjliga binära träd ökar för antalet inre hörn, som visas i tabellen.



- (a) Ange de två andra träden med 3 inre hörn. (1)
- (b) Beräkna antalet möjliga binära träd som har 6 inre hörn. (2)
- (c) Antalet möjliga binära träd  $C_n$  som har  $n$  inre hörn kan beräknas med hjälp av genererande funktionen

$$f(t) = \frac{1}{2t} (1 - \sqrt{1 - 4t})$$

Härled en formel för  $C_n$  med hjälp av  $f(t)$  eller visa hur uttrycket för  $f(t)$  fås med hjälp av en känd formel för  $C_n$ . (4)