UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Fourieranalys

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
November 17, 2022

Contents

1. TODO 2
2. Bakgrund 3
2.1. Komplexa exponentialer 3
2.2. Lebesgue integralen 4
3. Laplace Transform 5
3.1. Egenskaper hos Laplacetransformation 7
4. Tillämpningar på differentialekvationer 9
4.1. Tillämpningar till integralekvationer 9
5. Series of functions 11
5.1. Funktionsföljder 11
5.2. Funktionsserier 13
6. Fourierserier 15
6.1. Notation & Terminologi 15
7. Analys av Fourierserier 19
7.1. Konvergerande Fourierserier 19
8. Dirichlets convergence theorem 23
8.1. Dirichlets konvergenskriterier (DIY sats) 23
9. Lösa PDE:er med Fourierserier 26
9.1. Viktiga PDE:er som löses med separation of variabler 26
9.2. Separation av variabler 26

1. TODO

- Review ODE notes
- Exercise 3
- Standardintegrals
- Trigonometriska substitutioner
- Texa publicerade föreläsningsanteckningar
- Se PDF 25
- Gör sista exemplet
- Se bevis för Sats 5.2 i föreläsningsanteckningar
- Uniform limits behave nicely with respecft to derivatives

2. Bakgrund

Låt oss betrakta $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ så att $f(0) = f(\pi) = 0$
När kan vi skriva denna funktion $f(x)$ som en analytisk funktion (potensserie), det vill säga:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n \cdot x) \tag{1}$$

Där $a_n \in \mathbb{R}$ är konstanter.

Inte alla funktioner tillfredställer att intervallet $[0, \pi]$ ger en konvergerande potensserie för f, frågan man kan ställa sig är *när kan vi skriva f som en serie av trigonometriska funktioner?*

Vi kommer inse att *om* f går att skriva som en potensserie av trigonometriska funktioner, så behöver vi hitta våra koefficienter. I fallet med MacLaurin serier så kom de (a_n) från derivatan.
I detta fall kommer det från:

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

I någon mening kommer analys-delen av denna kurs från att vi studerar funktioner utifrån integraler, såsom den ovan.
Integralen ovan är integral-transform.

Vi kan även skriva:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$$

Något mer vi kommer undersöka, är om vår fourierserie konvergerar, och om den konvergerar mot vår funktion (detta är inte alltid uppenbart)

2.1. Komplexa exponentialer.

Det finns en viktig eulerformel. Vi alla känner till e^x, men vad händer om $x = a + bi$?

Definition/Sats 2.1: Eulers formel

Vi får då $e^{a+bi} = \underbrace{e^a}_{\in \mathbb{R}} e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$ för varje $a, b \in \mathbb{R}$

Kom ihåg att vi kan representera komplexa tal med polära koordinater.
Vi har då att varje komplext tal $a + bi$ kan representeras som $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi får då $a + bi = re^{i\theta} = e^{\log(r)+i\theta}$

Övning:
Använd Eulers formel för att visa att $\cos(2x) = \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$ och $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Anmärkning:
Komplexa exponentialer är *inte* injektiva, alltså fungerar inte logaritmen.
Exempelvis kan vi betrakta $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$

Definition/Sats 2.2: Fourierpolynomial

Är på formen:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx}$$

Kallas för polynom för att vi har $e^{ikx} = (e^{ix})^k$ som är ett monom i e^{ix}

Vi kan uttrycka Fourierpolynom m.h.a sinus och cosinus enligt följande:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N}(c_k + c_{-k})\cos(kx) + i(c_k - c_{-k})\sin(kx)$$

Anmärkning:
Detta är samma fourierpolynom som var på *exponential form* i *trigonometrisk form*

2.2. **Lebesgue integralen.**

Den vanliga definitionen av integralen som vi alla är vana vid är Riemann-integralen.

3. Laplace Transform

Vi kommer inte se många komplexa exponentialer, detta stöter vi på senare när vi ska kika på fourierserier och fouriertransformationer.

Precis som alla integraltranformationer, så är tanken bakom att de ska hjälpa att lösa en ODE/PDE. Vi kan tänka på den som en maskin som man stoppar in en funktion, och så spottar den ut en annan funktion:

$$f(t) \sim \mathcal{L}[f](s) = (\widetilde{f}\ (s))$$

Den nya funktionen har lite andra egenskaper. Notera att vi byter variabler från t till s.

Laplace transformationen har lite nice egenskaper:

- $f'(t) \sim \mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)$

Det finns såklart en "inverse-maskin", som tar en laplace transformation som input och ger ursprungliga funktionen:

$$\mathcal{L}[f](s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} f(t)$$

Genom att använda den nice egenskapen på en hel differentialekvation får vi istället en ekvation som består av $s\cdot$ gånger någon funktion, vilket är betydligt lättare att lösa.

Definition/Sats 3.1: Laplace Transformationen

Laplace Transformationen av en funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ är

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Anmärkning:
Laplace transformationen bryr sig inte om vad som händer på den negativa delen av domänen, den vill bara att den är definierad över $\mathbb{R}_+$, alltså:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[H(t) \cdot f(t)](s)$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Vi tappar alltså vad som händer med funktionen i dens negativa domän.

Anmärkning:
Enbart om integralen är definierad. Inte alla funktioner har Laplacetransformationer

Vi kan tänka oss att vi "integrerar" bort t, kvar får vi en funktion som beror på s.

Ibland får man ett svar som är definierad på negativa värden av t och *ibland* löser den DE:n, men absolut inte alltid och detta måste verifieras för hand och kan inte hänvisas till teori.

Exempel:
Beräkna $\mathcal{L}[t^n](s)$:

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt \overset{\text{parts}}{=} \left[t^n \cdot \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty n t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{s} dt$$

$$\text{Om } s > 0 \Rightarrow 0 + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt \overset{\text{parts}}{=} \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt$$

$$= \cdots = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{n!}{s^n} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Anmärkning:
Eftersom integralen för $s < 0$ divergerar, så säger vi att Laplacetransformationen inte är definierad för $s < 0$

Exempel:
Beräkna $\mathcal{L}[e^{at}](s)$:

$$\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt = \left[\frac{e^{t(a-s)}}{a-s}\right]_0^\infty$$

$$\text{Om } s > a \quad \Rightarrow \frac{1}{s-a}$$

Definition/Sats 3.2

Om $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ är:

- Styckvis kontinuerlig (om i varje begränsat intervall $[0, b]$, så är f begränsad och har ändligt många punkter av diskontinuitet)
- Av exponential ordning, dvs det finns konstanter $M > 0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ för alla $t \geq 0$

Då kommer integralen $\mathcal{L}[f](s)$ konvergera $\forall\ s > \alpha$

Anmärkning:
Med exponential ordning menas att:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{Me^{\alpha t}} = 0$$

Anmärkning:
Om Laplacetransformationen konvergerar för a, så kommer den konvergera $\forall\ s > a$

Exempel:
Varje polynom $p(t)$ är av exponentiell ordning med $\alpha = \varepsilon$. Detta för att oavsett hur litet α är, så kommer en exponentialfunktion växa mycket snabbare än ett polynom tillslut.

Anmärkning:
Laplacetransformationen är linjär (följer från att integralen är linjär)

Exempel:
Funktionen $f(t) = e^{t^2}$ är *inte* av exponentiell ordning. t^2 växer snabbare än vilket α som helst. Denna funktion har inga Laplacetransformationer oavsett värde på s

Ni kanske märker att den går att integrera, men inversen är inte längre unik. Samma sak gäller exempelvis även om $f(t) = e^{2st}$

Anmärkning:
Det finns funktioner som inte är styckvis kontinuerliga men som har konvergerande Laplacetransformation. Vi kommer i denna kurs bara bry oss om de som är styckvis kontinuerliga.

Även om man inte vet att lösningen till en DE uppfyller kriterierna kan man alltid testa!

Definition/Sats 3.3: Convolution

Convolution $*$ of $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ is:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) \cdot g(u)du$$

Anmärkning:
$f * g = g * f$

3.1. **Egenskaper hos Laplacetransformation.**

- Om Laplacetransformationen existerar vid s_0, då existerar Laplacetransformationen för samma funktion i s för alla $s > s_0$
- Laplacetransformationen är linjär
- $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \Leftrightarrow$ om $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ så $\mathcal{L}^{-1}[f(s-a)] = e^{as}F(t)$
- $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}\cdot\mathcal{L}[f](s) \quad a > 0$
  Vi vill döda vad som händer på negativa sidan när vi skiftar med a, för vi vet inte vad som händer där, varpå Heaviside funktionen $H(t-a)$ kommer in
- $\mathcal{L}[f(at)](s) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\dfrac{s}{a}\right) \quad a > 0$
- $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$ (måste hålla koll på initialvärdena på DE:n)
- $\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f](s)\right)$ (missbildad spegling av föregående punkt)
- $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s)$

Exempel:
Vad är $\mathcal{L}[\sin(at)]$ och $\mathcal{L}[\cos(at)]$?

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(t)] = \mathcal{L}[-\cos'(t)] = -\mathcal{L}[\cos'(t)] &= -s\cdot\mathcal{L}[\cos(t)] + \cos(0)\\
&= -s\cdot\mathcal{L}[\cos(t)] + 1\\
\mathcal{L}[\cos(t)] = \mathcal{L}[\sin'(t)] &= s\mathcal{L}[\sin(t)] - \sin(0)\\
\Rightarrow \mathcal{L}[\sin(t)] &= -s^2\mathcal{L}[\sin(t)] + 1\\
\mathcal{L}[\sin(t)](1+s^2) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}[\sin(t)](s) &= \frac{1}{s^2+1}\\
\Rightarrow \mathcal{L}[\cos(t)] &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Vi påminner om att Laplarretransformationen är bara definierad över de positiva reella talen, så vi delar upp i fall då $a < 0$ och $a > 0$:

Fall $a > 0$:

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{1}{a}\cdot\mathcal{L}[\sin(t)]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{1}{a}\cdot\mathcal{L}[\cos(t)]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{s/a}{(s/a)^2+1} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Fall $a < 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}[\sin(-(-a)t)](s) = \mathcal{L}[-\sin(-at)](s) &= -\mathcal{L}[\sin(-at)](s)\\
\Rightarrow -\frac{-a}{s^2+a^2} &= \frac{a}{s^2+a^2}\\
\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[\cos(-(-a)t)] = \mathcal{L}[\cos(-at)](s) &= \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

Fall a=0:

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}[0](s) = 0$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$$

Vi visar att Laplarre av en deriverad funktion (en gång!) är s gånger Laplarren:

Bevis 3.1

Vi skriver vad vi vet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f'(t)e^{-st}dt \\
&\overset{\text{parts}}{=} \lim_{A\to\infty}[f(t)e^{-st}]_0^A + s\int_0^A f(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{A\to\infty} f(A)e^{-sA} - f(0)\cdot 1 + \int_0^A f(t)e^{-st}dt \\
&= 0 - f(0) + s\mathcal{L}[f(t)](s) \Leftrightarrow s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)
\end{aligned}$$

$\square$

4. Tillämpningar på differentialekvationer

Innan vi börjar, ska vi notera unikheten av Laplacetransformationen:

Definition/Sats 4.1

Om Laplacetransformationen för 2 kontinuerliga funktioner sammanfaller, så måste funktionerna vara samma. Om de enbart är kontinuerliga i en punkt, så måste de sammanfalla i den punkten om Laplacetransformationen är densamma.

Då kan vi dra slutsatsen att det finns en invers $\mathcal{L}^{-1}$ (på grund av unikhet)

Exempel:
Lös följande linjära förstaordningens IVP med konstanta koefficienter med Laplace:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Lösning:
Det första vi gör är att köra Laplacetransformation på allt:

$$\mathcal{L}[y'(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[3]$$
$$s \cdot \mathcal{L}[y(t)] - \underbrace{y(0)}_{2} + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[3]$$
$$\mathcal{L}[y(t)](s+1) - 2 = \mathcal{L}[3] = \frac{3}{s}$$
$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{\left(\frac{3}{s} + 2\right)}{s+1} = \frac{3+2s}{s(s+1)}$$

Nu ska vi finna inversen till denna Laplacetransformation, då får vi $y(t)$. Vi kan kika i formelbladet för att hitta detta:

$$\frac{3+2s}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+1}$$
$$y(t) = 3 - e^{-t} \quad t \geq 0$$

Anmärkning:
Lösningen till en ODE är kontinuerlig

Anmärkning:
Integralens värde ändras inte om funktionen är diskontinuerlig i ändligt många punkter.

Laplacetransformationer är hjälpsamma för att inte bara lösa differentialekvationer, men *integralekvationer*

4.1. Tillämpningar till integralekvationer.

Exempel:
Hitta en funktion $f(t)$ sådant att den löser följande ekvation:

$$\underbrace{2\int_0^t \cos(t-x)f(x)dx}_{\text{Konvolution av } \cos * f} = f(t) + 3$$

Lösning:
Börja med Laplacetransformation och använd egenskapen att Laplacetransformationen av konvolutio blir produkt:

$$2\frac{s}{s^2+1}\cdot\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}[f]+\frac{3}{s}$$
$$\mathcal{L}[f]\left(1-\frac{2s}{s^2+1}\right)=-\frac{3}{s}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[f]\left(\frac{s^2-2s+1}{s^2+1}\right)=\mathcal{L}[f]\frac{(s-1)^2}{s^2+1}=-\frac{3}{s}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[f]=-\frac{3s^2+3}{s(s-1)^2}$$

Nu kan vi hitta inversen till Laplacetransformationen, vilket vi kan göra med partialbråksuppdelning, vi får då: (**CHECK**)

$$\mathcal{L}^{-1}=f(t)=-3-6te^t$$

5. Series of functions

5.1. **Funktionsföljder.**

Vi påminner oss om hur det såg ut för talföljder $a_1, a_2, \cdots$,
Vi sade att talföljden *konvergerar* till ett $a \in \mathbb{R}$ om:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \quad |a - a_n| < \varepsilon$$

Vi vill nu undersöka vad som händer om vi tittar på en ”funktionsföljd” och vad det betyder att de sekvenserna konvergerar.

Antag att vi har en följd av funktioner (som alla har samma domän), konvergens i funktionsföljder:

Definition/Sats 5.1

Låt $S \subset \mathbb{R}$ och låt $f_n : S \to \mathbb{C}$ (**FÖR ALGEBRAISK SLUTENHET (nej, för fourierserier är komplexvärda)**) vara en funktionsföljd där $n \geq 0$

Vi säger att funktionsföljden f_n *konvergerar*:

- **Punktvis**: Till en funktion $f : S \to \mathbb{C}$ om $\forall x \in S$ får vi en talföljd $f_1(x), f_2(x), \cdots$ som konvergerar till $f(x)$.

  Mer matematiskt uttryckt: $\forall x \in S\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  Anmärkning:
  Eftersom vi kollar efter punktvis konvergens, så behöver inte f (funktionen som följden konvergerar till) vara kontinuerlig.

- **Likformig konvergens**: Vi säger att f_n konvergerar *likformigt* om vi kan fixera ett $\varepsilon > 0$ och att det för alla x gäller att konvergensen sker.

  Mer matematiskt uttryckt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall x \in S \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  Notera här att vi fixerar både ε och n_0 och då måste detta n_0 funka *för alla* $x \in S$.
  Då ska alla funktioner med $n > n_0$ hamna inom $f \pm \varepsilon$ för alla $x \in S$ så att *hela* funktionen hamna inom $f \pm \varepsilon$

Anmärkning:
Likformig konvergens $\Rightarrow$ punktvis konvergens

Hela iden mellan varför man definierar 2 olika konvergenser är att punktvis konvergens är ”det första man tänker på” när man tänker på konvergens. Men, man vill gärna att följden ska kunna säga något om funktionen och vice versa.

Definition/Sats 5.2

Om $f_n \to f$ likformigt och alla f_n är kontinuerliga, då måste f vara kontinuerlig

Exempel:
Antag att jag har följande:

$$f_n : [1,2] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

Om $x = 1$ så är $f_n(1) = \dfrac{1}{1^n} \to 1$
Om $x > 1$ så är $f_n(x)\dfrac{1}{x^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

Alltså, $f_n \to f$ punktvis konvergens där

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Från Sats 5.2 gäller då att f är diskontinuerlig.

Anmärkning:
Om f är likformigt kontinuerlig, så gäller **inte** att f_n är kontinuerliga.

Om vi modifierar föregående exempel så att $f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} & x > 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ får vi att f är likformigt kontinuerlig $(f = 0)$ men f_n är diskontinuerlig.

Definition/Sats 5.3

Om $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ är en funktionsföljd av integrerbara funktioner och om $f_n \to f$ konvergerar likformigt, då är f också integrerbar och

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \overset{?}{=} \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Exempel:

Låt $f_n = \begin{cases} n, & 0 < x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} < x \le 1 \text{ eller } x = 0 \end{cases}$

Här gäller att $f_n \overset{\text{punktvis}}{\to} f$ och $f(x) = 0$ för alla x
Det som är lite ointuitivt är att $\int_0^1 f(x)dx = 0$ men $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$

Från Sats 5.3 gäller att vi *inte* har likformig konvergens.

5.2. **Funktionsserier.**

Definition/Sats 5.4: Konvergens av funktionsserier

Låt $S \subseteq \mathbb{R}$ och $f_k : S \to \mathbb{C}$ vara en funktionsföljd där $k \geq 0$.

Låt:

$$s_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$$

vara följd av partiella summor där $N \geq 0$

Serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

konvergerar:

- **Punktvis**: Om $s_N \overset{\text{punktvis}}{\to} F$, det vill säga:

$$\forall x \in S\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \qquad \left| \sum_{k=0}^{N} f_k(x) - F(x) \right| < \varepsilon$$

- **Likformigt:** Om $s_N \overset{\text{likformigt}}{\to} F$, det vill säga:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall x \in S \qquad \left| \sum_{k=0}^{N} f_k(x) - F(x) \right| < \varepsilon$$

- **Absolutkonvergens:** Om:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$$

  konvergerar punktvis

- **Absolutlikformigt**: För många adjektiv :p

Anmärkning:
Om $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till någon funktion $F(x)$, så konvergerar serien punktvis till samma $F(x)$

Anmärkning:
Om $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent, så är den punktvis konvergerande.

Anmärkning:
Om f_k är kontinuerliga och serien $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till $F(x)$, så är $F(x)$ kontinuerlig

Anmärkning:
Om f_k är integrerbara i ett intervall $[a, b]$ och serien $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt till $F(x)$, så är:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Definition/Sats 5.5: Weirstrass M-test

Låt $f_k : [a, b] \to \mathbb{C}$ vara en funktionsföljd sådant att det finns tal $M_k \geq 0$ som uppfyller följande:

- $\forall x \in [a, b] \quad |f_k(x)| \leq M_k \quad$ (bounds the whole function f_k)
- Serien $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$ konvergerar

Då gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ är absolutkonvergent och likformigt och punktvis

6. Fourierserier

6.1. **Notation & Terminologi.**

Skillnaden mellan Fourierserier och Laplacetransformationen har mest att göra med funktionens domän. I Laplacetransformationen så begränar vi oss till $\mathbb{R}_+$, men med Fourierserier vill vi kunna nyttja hela $\mathbb{R}$

Definition/Sats 6.1: Periodisk funktion

Vi säger att en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2π-periodisk om:

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exempel:
$\sin(kx)$ och $\cos(kx)$ där $k \in \mathbb{Z}$ är 2π periodiska.

Iden är att försöka uttrycka en godtycklig 2π periodisk funktion som en oändlig linjärkombination av $\sin(x)$ och $\cos(x)$

Anmärkning:
En bra fördel med 2π periodiska funktioner är att trots att funktionen är definierad på hela $\mathbb{R}$ så räcker det med att studera $[0, 2\pi]$

Anmärkning:
Om man försöker omvandla en funktion till 2π periodisk, så kan det hända att vi introducerar diskontinuitet vid ändpunkten $k \cdot 2\pi$

Definition/Sats 6.2

Vi skriver följande:

- $C(\mathbb{T}) = \{\text{kontinuerliga funkioner} f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid 2\pi \text{ periodiska}\}$
- $C^k(\mathbb{T}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid 2\pi \text{ periodiska med } f^{(k)}(x) \text{ kontinuerlig}\right\}$

Anmärkning:
Bara för en funktion ligger i $C(\mathbb{T})$ betyder det **inte** att den ligger i $C^1(\mathbb{T})$

Anmärkning:
Anledningen till varför vi studerar just 2π periodiska funktioner är för att om vi har en annan funktion med period $p \neq 2\pi$, så kan vi med variabelbyte få den funktionen att bli 2π periodisk

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad p > 0 \text{ - periodisk}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad g(x) = f\left(\frac{p}{2\pi} \cdot x\right) \qquad 2\pi \text{ - periodisk}$$

Fråga:
Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en 2π periodisk funktion. Kan vi skriva $f(x)$ i termer av en fourierserie?

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{e^{ikx}}_{\cos(kx) + i\sin(kx)} \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Anmärkning:
Om jag har en serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ så kan jag skriva den som:

$$\underbrace{\sum_{k=\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Exponentialform}} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}_{\text{Trigon. form}}$$

där:

$$a_0 = 2c_0$$
$$a_k = c_k + c_{-k}$$
$$b_k = i(c_k - c_{-k})$$

Anledningen till varför vi delar på 2 är för att det blir en finare formel senare när man väl ska använda den

Anmärkning:
Konstanterna c_k kommer från $f(x)$, vi kan därmed uttrycka c_k som en funktion av f

Lemma 6.1

Givet $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} \frac{e^{inx}}{in} |_0^{2\pi} \overset{2\pi-\text{per.}}{=} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi & n = 0 \end{cases}$$

Givet $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}$$

Antag att

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

där serien är likformigt konvergent. Då måste f vara kontinuerlig.
Hur kan vi få ut c_k ur funktionen $f(x)$? Låt oss testa lite grejs:

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx = \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}e^{-ikx}dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(m-k)x}dx \overset{\text{likf. kont.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_m e^{i(m-k)x}dx$$
$$\overset{\text{Lem6.1}}{=} 2\pi \cdot c_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Detta gäller för nice funktioner, funktioner som kommer från likformigt konvergenta fourierserier.

Då kan man få för sig att bara studera dessa typer av funktioner, men det finns en till tolkning.

Formeln för c_k funkar för alla funktioner som är integrerbara. Vi kan konstruera en fourierserie av en given funktion, men kommer serien konvergera? Kommer serien konvergera till funktionen vi började med?
Det är vad som studien av fourierserier försöker besvara.

Definition/Sats 6.3: Fourierserien av en funktion

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara 2π periodisk och integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$

Funktionens fourierserie anges av:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

där:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Vi skall nu försöka besvara föregående frågor:

- Konvergerar serien:
  - Punktvis
  - Likformigt
  - Absolut
  - På något sätt?
- Om serien konvergerar, konvergerar den till $f(x)$?

Anmärkning:
Vi antar här att vår funktion är 2π periodisk (men det spelar egentligen ingen roll vilken period eftersom vi kan med variabelbyte få den att bli 2π, viktigt att den är periodisk dock!)

Anmärkning:
Eftersom vi kan gå från exponentialform till trigonometrisk form, så gäller följande för fourierserier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx$$

Anmärkning:
Tidigare sa vi att b_k var en multipel av i, men detta gällde för att c_k var komplex, så $b_k = ic_k \in \mathbb{R}$. Det är därför vi inte behöver bry oss så mycket om i när vi definierar den som vi gjorde här.

Exempel:
Vi ska köra ett exempel och speciellt se om vi kan svara på frågorna ovan.

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ så att $f(x) = x$ i intervallet $[-\pi, \pi)$ (f är 2π periodisk)

Lägg märke till att $f(x)$ är en udda funktion. En linjärkombination av jämna funktioner kommer vara jämn, alltså kommer vi ha en linjärkombination av udda funktioner.
Eftersom $\cos(x)$ är jämn, så kommer alla a_k koefficienter vara 0 (inga jämna funktioner). Vi behöver då bara räkna fram b_k:
$k \geq 1$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \overset{\text{parts}}{=} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$
$$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

Nu kan vi besvara frågorna.

Exempel:
Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en 2π periodisk funktion där $f(x) = x^2$ då $x \in [-\pi, \pi]$

Denna funktion har nollställen i jämna multiplar av π (inkl. 0)

Bestäm funktionens fourierserie. Notera att vår funktion är jämn, så vi kommer *inte* ha några sin eftersom sinus är udda. Detta gör det lättare att representera funktionen i trigonometrisk form:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$$

Vi kan använda att funktionen är symmetrisk och därmed räkna halva koefficienterna
Där a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx$$

$$\overset{\text{parts}}{=} \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3} \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

7. Analys av Fourierserier

Vi vill undersöka

- Konvergerar serien:
  - Punktvis
  - Likformigt
  - Absolut
  - På något sätt?
- Om serien konvergerar, konvergerar den till $f(x)$?

Om vi analyserar följande:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

Konvergerar serien?
Vi kan använda Weirstrass M-test eftersom:

$$\left| \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx) \right| = M_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{4} \frac{4}{n^2} \Leftarrow \text{ konvergerar}$$

Av Weirstrass M test konvergerar serien absolut, likformigt, och punktvis

Anmärkning:
Om vi sätter absolutbelopp på vår fourierserie så försvinner de trigonometriska formerna och vår kandidat för M_n blir då våra koefficienter

Konvergerar serien till $f(x)$?
NÄSTA FÖRELÄSNING SER VI ATT SVARET ÄR JA

Evaluering av Fourierserien
Låt oss anta för tillfället att serien konvergerar till funktionen
Vi vet att $f(\pi) = \pi^2$
Fourierserien i π:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{1}^{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3 \cdot 4} = \frac{\pi^2}{6}$$

7.1. **Konvergerande Fourierserier.**

I en talföljd vet vi att serien konvergerar om exempelvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Vi kan översätta detta till fourierserier genom att undersöka om koefficienterna går till 0

För att göra detta behöver vi införa lite nya verktyg:

Definition/Sats 7.1: Absolutintegrerbar

Om vi tar ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ av de reella talen och vi har en $f : I \to \mathbb{C}$, säger vi att f är absolutintegrerbar om:
$\int_I |f(x)| dx$ konvergerar (integrerbar)

Anmärkning:

- Om $I = [a, b]$ är ett ändligt intervall och $f : I \to \mathbb{C}$ integrerbar, så är f absolutintegrerbar
- Detta gäller *inte* om intervallet I är oändligt:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty$$

$$\int_0^\infty |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$$

Lemma 7.1: Riemann-Lebesgue

Om vi har ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ och en funktion $f : I \to \mathbb{C}$ som är integrerbar *och* absolutintegrerbar, då gäller:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx = 0$$

Samma gäller för följande (och för $-\infty$):

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

Anmärkning:
En funktion kan vara absolutintegrerbar men *inte* integrerbar, exempelvis:

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Här gäller att $|f(x)| = 1$ som är integrerbar, men funktionen går knappt att rita (ej Riemann integrerbar men Lebesgue integrerbar)

Varför gillar vi Riemann-Lebesgues sats? Tänk på koefficienterna! De är integrerbara på den formen (ett intervall $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, integrerbar, absolutintegrerbar?)

Corollarium:
Om vi har en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är 2π periodisk och integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$ så:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 = \lim_{n\to-\infty} c_n$$

Bevis 7.1

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Då följer det från Riemann-Lebesgues sats att:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

$$I = [0, 2\pi] \qquad \lambda = -n$$

Vi kan göra detta för $-\infty$ □

Anmärkning:
Notera att kraven vi ställde för c_n är samma för de för Fourierserier.

För vanliga gränsvärden kan vi säga något om deras hastigheter. $\frac{1}{n}$ går mot 0 segare än vad $\frac{1}{n^2}$ gör.

Vi kan göra något liknande med funktioner. Det finns en ”slogan” som säger följande:
Ju mer integrerbar en funktion är, desto snabbare går deras fourierkoefficienter mot 0
Vi skriver detta som en sats:

Definition/Sats 7.2

Om $f \in C^k(\mathbb{T})$, så är $f^{(k)}$ kontinuerlig och därmed integrerbar med fourierkoefficienter, med följande:

$$c_n \text{ av } f^{(k)}(n) = (in)^k c_n$$

Detta påminner om Laplacetransformationens egenskap med avseende på derivatan. Om vi struntar i IVP så har vi ju något liknande
Detta följer från att Laplacetransformationen och Fourier är *integral transformationer*

Definition/Sats 7.3

Om $f \in C^k(\mathbb{T})$, så finns det en konstant $c > 0$ så att:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |c_n| \le \frac{c}{|n|^k}$$

Anmärkning:
Det är nästan som att koefficienterna vet något om funktionen :o

Corollarium
Om $f \in C^2(\mathbb{T})$, så är funktionens fourierserie likformigt, absolut, och punktvis konvergent

Bevis 7.2

Det låter väldigt lämpligt att använda Weirstrass M-test:

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\left|c_n e^{inx}\right| = |c_n| \leq \frac{c}{|n|^2} = M_n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ konvergerar}$$

$\square$

8. Dirichlets convergence theorem

Vårat mål är att studera punktvis konvergens av fourierserier, då behöver vi några hjälpdefinitioner eftersom vi ska ha definiera en sats som är lite teknisk

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara 2π-periodisk

Definition/Sats 8.1: Horizontella/Lateral gränsvärden

Vi säger att f har *lateral* gränsvärden i punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ om:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

existerar

Anmärkning:
Detta är likt definitionen av kontinuitet, men skillnaden är att kontinuitet gäller om $x_0^- = x_0^+$

Definition/Sats 8.2: Horizontella/Lateral gränsvärden för derivator

Om f har *lateral* gränsvärde i x_0 så har den *lateral* derivata i x_0 om:

$$f'_L = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$$
$$f'_R = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$$

Anmärkning:
Om $f'_L = f'_R$ så är funktionen deriverbar i x_0

8.1. **Dirichlets konvergenskriterier (DIY sats).**

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är 2π periodisk och integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$ (dvs en funktion som har en fourierserie) *och* om f har laterala gränsvärden *och* laterala derivator i någon punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, så kommer funktionens fourierserie konvergera i x_0:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx_0} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Det vill säga, fourierserien konvergerar i punkten x_0 och är medianen av de laterala gränsvärden

Följder från kriterierna

- Om funktionen f från kriterierna är kontinuerlig i x_0, så gäller att fourierserien i x_0 konvergerar till $f(x_0)$
$$f(x_0^+) = f(x_0^-) \Rightarrow \frac{2f(x_0)}{2} = f(x)$$
- Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2π periodisk och differentierbar i varje $x \in \mathbb{R}$, så är funktionens fourierserie punktvis konvergent till f
- Nu kan vi säga att om $f \in C^2(\mathbb{T})$ så är funktionens fourierserie absolut (**CHECK**), likformigt, och punktvis konvergent till f

För att bevisa Dirichlets kriterier så krävs rätt mycket tekniska saker, så vi kommer bara ge en generell bild över hur beviset går till

Definition/Sats 8.3: Convolution/Faltning

Om f, g är 2π periodiska och integrerbara på $[0, 2\pi]$, så är deras *faltning* (Convolution):

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

Skillnaden mellan gamla och nya definitionen är att vi här har $\frac{1}{2\pi}$ framför integralen och lite annorlunda gränser till integralen

Lemma 8.1

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

Beviset för Lemma 8.1 är att använda variabelbytet $u = x - t$

Anmärkning:
Faltningen är 2π periodisk och integrerbar

Lemma 8.2

$$c(f * g)_n = c_n(f)c_n(g)$$

Anmärkning:
Här menas $c()$ som fourierkoefficienterna för f resp. g
Notera att det påminner lite om Laplarren.

Bevis 8.1

$$\begin{aligned}
c(f * g)_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f * g)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt\ e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}dxdt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} g(t) \int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-inx}dxdt \\
&\overset{u=x-t}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} g(t) \int_{-t}^{2\pi-t} f(u) \underbrace{e^{-in(u+t)}}_{e^{-inu}e^{-int}} dudt \\
&\overset{2\pi\text{-per.}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt \int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}du \\
&\Leftrightarrow c(f)_n c(g)_n
\end{aligned}$$

$\square$

Anmärkning:
Vår Laplacetransformation ”har blivit” våra fourierkoefficienter

Notation
Givet en funktion f som har en fourierserie (alltså f är integrerbar på intervallet $[0, 2\pi]$ och 2π periodisk) Låt $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_n e^{ikx}$ vara följden av partiella summor av fourierserien av f

Att analysera konvergensen av fourierserierna till f är samma som att analysera konvergensen till följden av dessa partiella summor.

Definition/Sats 8.4: Dirichlets kärna

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \qquad c_n = 1\ \forall n$$

Anmärkning:
$c(D_N)_m = 1$ annars 0 om $|m| > N$ (ty vi är utanför vår fourierserie och därmed har inga termer, vilket är ekvivalent med en summa från och till oändligheten men med koefficienter 0 utanför det önskade intervallet)

Definition/Sats 8.5

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$$

Två polynom är samma om de har samma koefficienter. I vårat fall kommer S_N ha koefficienterna $c(f)_k$, men D_N har koefficienterna 1 i intervallet och 0 utanför medan f har koefficienterna $c(f)_k$. Då följer det från faltningens egenskaper att de är samma

För att visa Dirichlets kriterier, studera D_N och dra slutsatsen att dess egenskaper implicerar att $S_N(f)(x_0)$ konvergerar till $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

9. Lösa PDE:er med Fourierserier

9.1. **Viktiga PDE:er som löses med separation of variabler.**

9.1.1. *Vågekvationben.*

$$u(x,t)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9.1.2. *Värmeekvationen.*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

Det var värmeekvationen som Fourier började med

9.1.3. *Schrödingers ekvation.*

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9.2. **Separation av variabler.**

Vi inleder med ett exempel:

Exempel:
Lös följande IVP (initalvärdesproblem) för $u(x,t)$:

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(x) \quad t > 0,\ 0 < x < \pi \\ x = 0 \Rightarrow u(0,t) = 0 \\ x = \pi \Rightarrow u(\pi,t) = 1 \quad \forall t > 0 \\ t = 0 \Rightarrow u(x,0) = \dfrac{3}{\pi}x + \cos(x) \quad \forall 0 < x < \pi \end{cases}$$

Problemet är inte så lätt som den kan vara. Iden är som en vanlig DE, lös det generella problemet (som ger parametrar), stoppa in randvärderna och få lösningen.

Vanligtvis kan vi ta linjärkombinationer av lösningarn för att få fler lösningar.

Eftersom vi har $\cos(x)$ i PDE:n och $= 1$ i randvärderna, så har vi ett *icke-homogent* problem. Vi måste förenkla ner problemet till ett homogent problem:

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

Här slänger vi all icke-homogenitet till $\varphi(x)$ som är en funktion av *en* variabel (och ger oss en ODE), och $v(x,t)$ är då en homogen PDE som blir lättare att lösa

Nu ger vi lite info om v och φ:

$$(**)\begin{cases} v_t = v_{xx} \quad t > 0,\ 0 < x < \pi \\ v(0,t) = 0 \ \&\ \underbrace{v(\pi,t) = 0}_{\Rightarrow \text{ homogen}} \quad \forall t > 0 \\ v(x,0) = ?\ = 1 \end{cases} \qquad (***)\begin{cases} \varphi'' = -\cos(x) \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = v_t \\ u_{xx} = v_{xx} + \varphi'' \\ \Rightarrow v_t = v_{xx} + \varphi'' + \cos(x) \end{cases}$$

Nu behöver vi lösa ODE:n $(***)$ för att bestämma initialvärdena till $v(x,0)$ i $(***)$

$$\varphi'' = -\cos(x)$$
$$\varphi' = \int -\cos(x)dx = -\sin(x) + C$$
$$\varphi = \int\int -\cos(x)dx = \int -\sin(x) + C = \cos(x) + Ax + B$$
$$\Rightarrow \varphi(0) = 1 + B = 0 \Leftrightarrow B = -1$$
$$\Rightarrow \varphi(\pi) = -1 + A\pi - 1 = 1 \Leftrightarrow A = \frac{3}{\pi}$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$

Vi vet att $u(x,0) = \frac{3}{\pi}x + \cos(x)$
Däremot, per konstruktion har vi att $u(x,0) = v(x,0) + \varphi(x)$:

$$v(x,0) + \varphi(x) = v(x,0) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$
$$u(x,0) = v(x,t) + \varphi(x) = v(x,t) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$
$$u(x,0) = \frac{3}{\pi}x + \cos(x) = v(x,0) + \cos(x) + \frac{3}{\pi}x - 1$$
$$\Rightarrow v(x,0) = 1$$

Nu löser vi $(**)$ genom separation av variabler metoden

Iden med separation av variabler metoden är att försöka hitta speciella lösningar på formen
$v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ där X är en funktion som bara beror på x och T är en funktion som bara beror på t

Vi kikar närmare på $(**)$:

$$v_t = v_{xx} \Leftrightarrow X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(x)$$
$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Nu har vi fått ner problemet till en ODE:

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda X(x) \\ T'(t) = -\lambda T(t) \end{cases}$$

Detta är ett system av ODE:er som beror på en parameter λ