UPPSALA UNIVERSITET

Föreläsningsanteckningar

Sannolikhetsteori 1

Rami Abou Zahra

Inlämningsdatum
August 30, 2022

Contents

1. Repetition - (K2.1)

1.1. Mängdlära.

Tips för hela kursen! Rita venndiagram
Ω är vår grundmängd/utfallsrum
$x \in \Omega$: x är ett element/utfall i Ω
$A \subseteq \Omega$:A är en delmängd/händelse till Ω
$2^\Omega = \{A : A \subseteq \Omega\}$, kallas även för potensmängden

1.2. Begrepp.

Om A och B är disjunkta säger vi att de är **oförenliga**, dvs $A \cap B = \emptyset$
A, B och C är disjunkta om $A \cap B = \emptyset$ och $A \cap C = \emptyset$ och $B \cap C = \emptyset$
$\lambda \subseteq 2^\Omega$ är disjunkta om $A \cap B = \emptyset$ för alla $A, B \in \lambda$
Sannolikhetsrum $= (\Omega, P)$

2. Regler för sannolikheter - (K2.2)

2.1. Kolmogorovs Axiom.

Ett **sannolikhetsmått** är en funktion $P : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ som uppfyller:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in 2^\Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$ om A_i är parvis disjunkta

Exempel:

Singla slant är det klassiska exemplet, där har vi 2 möjliga utfall (krona eller klave).
Utfallsrummet Ω är mängden $\{krona, klave\}$
Ett rimligt antagande är att sannolikheten att landa på krona är $\frac{1}{2}$ och samma för klave, dvs $P(\{krona\}) = \frac{1}{2}$ och $P(\{klave\}) = \frac{1}{2}$

$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

Exempel:

Singla slant 2 gånger
Utfallsrummet bör rimligtvis vara kopplad till föregående exempel:

$\Omega = \{kr, kl\}\text{x}\{kr, kl\} = \{(kr, kr), (kr, kl), (kl, kr), (kl, kl)\}$

$P(\{x\}) = \frac{1}{4}$, $P(\text{minst en krona}) = P\left(\{(kr, kr), (kr, kl), (kl, kr)\}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Exempel:

Singla slant n gånger: $\Omega = \{kr, kl\}^n$
$P(\{x\}) = \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \Omega, \quad P(A) = \sum_{x \in A} \frac{1}{2^n}$
$P(\text{exakt } k\text{st krona}) = \sum_{xx \text{ innehåller } k \text{ kronor}} \frac{1}{2^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Exempel:

Tärningskast är återigen ett klassiskt exempel, då är $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Är det en normal tärning så är sannolikheten för varje kast $\frac{1}{6}$, $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$

Antag att jag har en riggad tärning sådant att ettan är ombytt till en sexa. Då kommer följande gälla: $P(\{1\}) = 0$ och $P(\{6\}) = \dfrac{1}{3}$

Sannolikheter ska man tänka som proportioner, som associerar en vikt till varje delmängd

Exempel:

Låt $\Omega = \mathbb{N}_+$, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^n}$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$ gäller det att $P(\Omega) = 1$

Kopplar vi detta exempel till verkligheten så kan detta vara ”hur stor är sannolikheten att slinga krona n gånger” eller ”sannolikheten att slinga krona för första gången på n:te slinglen”

Exempel:

Vad är sannolikheten att tärningen hamnar på en sexa på n:te slinglen?
Jo, $P(\{x\}) = \underbrace{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}}_{\text{alla andra siffror}} \cdot \dfrac{1}{6}$

Exempel:

Slumpa ett reellt tal mellan 0 och 1:
$\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, då är $P(A) =$ längden på intervallet $A = 1$

Notera att det inte spelar roll om det är ett öppet eller slutet intervall

Vill man räkna ut unionen av sannolikheten summerar man sannolikheterna:

$$P\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Vad är då sannolikheten att vi slumpar ett rationellt tal mellan $(0,1)$? Vi får inte glömma att $\mathbb{Q}$ är uppräknelig:

$$P\left(\mathbb{Q} \cap (0,1)\right) = P\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}\cap(0,1)} \{q\}\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}\cap(0,1)} P(\{q\}) = 0$$

Hur ser $P(\text{irrationellt tal})$ ut?

$$P(\mathbb{Q}^c \cap (0,1))$$

$$\underbrace{(\mathbb{Q} \cap (0,1)) \cup (\mathbb{Q}^c \cap (0,1))}_{\text{disjunkta}} = \Omega$$

$$1 = P(\Omega) = \underbrace{P(\mathbb{Q} \cap (0,1))}_{=0} + P(\mathbb{Q}^c \cap (0,1)) \Rightarrow P(\text{irrationellt tal}) = 1 - 0 = 1$$

Exempel:

Ta en Riemann-integrerbar funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ så $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Vi sätter $P(A) = \int_A f(x)dx$

Exempel:

Tag enhetskvadraten $\Omega = [0,1]^2$, $P(A) =$ arean. Slumpa ett tal i kvadraten

Theorem 2.1: Diskreta Sannolikhetsrum

Sannolikhetsrummet (Ω, P) kallas för **diskret** om det finns en uppräknelig delmängd $A \subseteq \Omega$ så att:

$$P(B) = \sum_{x \in B \cap A} P(\{x\})$$

Alternativ beskrivning:

$$\exists A \subseteq \Omega :$$
$$\sum_{x \in A} P(\{x\}) = 1$$

Theorem 2.2: Kontinuerliga Sannolikhetsrum

Icke-diskreta sannoliketsrum (förutom blandade osv, men vi kommer inte arbeta med dessa ändå)

2.2. A^c.

Med komplementet menar vi $x \in A^c \Leftrightarrow x \in A$ där $(x \in \Omega, \quad A \subseteq \Omega)$

$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

2.3. **B-A.**

$$\begin{gathered} x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \\ \Rightarrow x \in B \wedge x \in A^c \\ x \in B \cap A^c \\ P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{gathered}$$

3. Tolkning av sannolikheter

Om vi tar exemplet att singla slant. Vad betyder det att sannolikheten är $\frac{1}{2}$?
Man kan tolka det som att ”det finns 2 fall, och båda har lika stor chans att inträffa”
Eller en mer data-inriktad tolkning, det vill säga om man singlar slant 100ggr, kommer ungefär hälften av kasten resultera i krona eller klave.

Det finns däremot tolkningar via Kolmogorovs axiom, det vill säga:

- $P(A) = p$ betyder att A utgör p enheter av utfallsrummet Ω
- Om vi upprepat slumpar ett $x \in \Omega$ så kommer tillslut $x \in A$ inträffa med frekvens p (**stora talens lag**)

3.1. Sannolikhetsmåttet P.

Uppfyller följande:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$
- A, B disjunkta gäller $P(A \cup B) = P(A \cup B \cup \emptyset \cdots)$ (ty axiomet säger att vi skall ha oändliga disjunkta par, vi kan därför fylla ut med oändligt många tomma mängder) $\Rightarrow P(A) + P(B)$
- $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
- Om $A \subseteq B$ så gäller $A \cap B = A$ och $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- Om $P(B \setminus A) \geq 0$ så $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0}$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (Booles olikhet)

Theorem 3.1

Om $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq \Omega$ så gäller

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Kallas även för att sannolikhetsmåttet är kontinuerligt ovanifrån

Proof 3.1: Bevis av föregående sats

$$\underbrace{A_1}_{B_1}, \underbrace{A_2 \setminus A_1}_{B_2}, \underbrace{A_3 \setminus A_2}_{B_3} \cdots \underbrace{A_{n+1} \setminus A_n}_{B_{n+1}}$$

B_i är disjunkta, och följande gäller:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} (P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \cdots + P(B_n))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} (P(A_1) + (P(A_2) - P(A_1)) + (P(A_3) - P(A_2)) + \cdots + (P(A_n) - P(A_{n-1})))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

$\square$

Theorem 3.2

Låt $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1 \cdots \subseteq \Omega$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Lemma 3.1: De morgans lagar

- $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$
- $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$

Proof 3.2: Bevis av Lemma

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\ &\Leftrightarrow x \notin A_i \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow x \in A_i^c \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \end{aligned}$$

$\square$

Proof 3.3: Bebis av sats

Vi har $A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq A_3^c \subseteq \cdots$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)$$
$$\Rightarrow 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_i^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_i^c)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$\square$

4. Betingade sannolikheten $P(A|B)$

Theorem 4.1: Betingade sannolikheten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \text{Sannolikheten för } A \text{ givet } B \text{ förutsatt att } P(B) > 0$$

Exempel:

Låt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, $P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^n}$

Detta sade vi kunde representera antalet slantsinglingar som krävs för att landa på krona (eller klave)
Säg nu att vi sätter det här $B =$ första försöket landar på klave $= \{1\}^c = \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$

Vi förväntar oss att $P(1|B) = 0$ (B gäller, alltså att vi har fått klave på första försöket, men då gäller det att det inte finns någon chans att vi får krona på första försöket)

Med motiveringen över gäller $P(2|B) = \dfrac{1}{2}$ och följande:

$$P(n|B) = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{P(\{n\} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{n\})}{1/2} = 2P(n) = 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Vi kan definiera ett sannolikhetsmått $Q : 2^B \to \mathbb{R}$ (för något $B \in \Omega$) och $Q(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)} =$ betingade sannolikheten
Mer generellt kan vi definiera $Q : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ genom $Q(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (med andra ord, den betingade sannolikheten)

För att visa att Q är ett sannolikhetsmått måste vi visa att den uppfyller Kolmogorovs axiom:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in 2^\Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=0}^\infty P(A_i)$ om A_i är parvis disjunkta

Detta kommer inte vara så svårt, om vi visar det för $Q : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ så har vi visat det för $Q : 2^B \to \mathbb{R}$.
Vi visar första axiomet:

$$Q(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \quad \forall A \in 2^\Omega$$

Andra axiomet:

$$Q(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B) = \dfrac{P(B)}{P(B)}} = 1$$

Tredje axiomet:
Antag $A_1, A_2, \cdots$ disjunkta. Då är $B \cap A_1, B \cap A_2, \cdots$ också disjunkta.
Vi vill räkna följande:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \cap B\right)}{P(B)}$$

Notera:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \text{ ty följande:}$$

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B &\Rightarrow x \in A_i \text{ för något } i \text{ och } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A_i \cap B \text{ för något } i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

Vi får då:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{P(\bigcup_{i=11}^{\infty} A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)}}_{Q(A_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Nu följer det till exempel att:

- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$
- Om $A \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq \cdots$ så gäller $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n|B)$

4.1. **Oberoende utsagor.**

Antag att $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$. Vi säger att A och B är **oberoende** om $P(A|B) = P(A)$ och $P(B|A) = P(B)$

Exempel:
Singla slant 2ggr, $\Omega = \{kr, kl\}^2$.
Vi ansätter $A =$ första försöket ger krona $= \{(kr, kr), (kr, kl)\}$
Vi ansätter $B =$ andra försöket ger krona $= \{(kl, kr), (kr, kr)\}$

Vi får då följande:

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) \qquad P(A \cap B) = P(kr, kr) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(B)$$

$$\Rightarrow A \text{ och } B \text{ är oberoende}$$

Exempel:
Låt $\Omega =$ Uppsalas vuxna befolkning.
Låt $A = \{\text{Man}\}$ $B = \{\text{Bruna ögon}\}$ $C = \{\text{Över 170cm}\}$

Avgör vilka som är oberoende