Logik och bevisteknik
Svar/lösningsförslag

1. Sanningsvärdestabeller:

p	q	r	$\overbrace{(p \leftrightarrow \neg r) \to \neg(p \to q)}^{\varphi}$	$\overbrace{q \to \neg(p \vee \neg(q \wedge \neg r))}^{\psi}$
s	s	s	s	f
s	s	f	f	f
f	s	s	f	f
s	f	s	s	s
f	f	s	f	s
s	f	f	s	s
f	s	f	s	s
f	f	f	s	s

(a) På första raden är φ sann och ψ falsk så ψ är <u>inte</u> en logisk konsekvens av φ.

(b) På sjätte raden är ψ sann och φ falsk så φ är <u>inte</u> en logisk konsekvens av ψ.

(c) Ingen av dem är en tautologi, för φ är falsk på andra raden och ψ är falsk på första raden.

2. Vi bildar "block" som beskriver raderna där φ är falsk:

$$p\wedge q\wedge\neg r,\quad \neg p\wedge q\wedge r,\quad \neg p\wedge\neg q\wedge r.$$

Sedan bildar vi konjunktionen av negationerna av dessa block:

$$\neg(p\wedge q\wedge\neg r)\wedge\neg(\neg p\wedge q\wedge r)\wedge\neg(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$$

eq $(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$

Den sista formeln är en KNF som är ekvivalent med φ.

3. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\neg\psi}{\varphi}(\wedge E) \qquad \varphi\to\psi}{\psi}(\to E) \qquad \dfrac{\varphi\wedge\neg\psi}{\neg\psi}(\wedge E)}{\bot}(\neg E)}{\neg\varphi}(RAA)$$

Anmärkning: Mängden $\{\varphi\wedge\neg\psi,\ \varphi\to\psi\}$ är osatisfierbar (dvs. saknar modell), så vilken formel som helst kan härledas från den i det sista steget med hjälp av (RAA).

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\psi}^{2} \qquad \dfrac{\cancel{\varphi}^{1} \quad \varphi\to\psi}{\psi}\,(\to E)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\varphi}\,(\neg I)^{1}}{\neg\psi\to\neg\varphi}\,(\to I)^{2}$$

4. (a) $\forall x(\neg(x=Anna)\to\exists y\,Känner(x,y))$

eller $\neg\exists x(\neg(x=Anna)\wedge\forall y\,\neg Känner(x,y))$.

(b) $\exists x\,Känner(x,Anna)\wedge$
$\exists x\,\neg Känner(x,Anna)$

(c) $\forall x(Känner(x,Anna)\to$
$\exists y(Känner(x,y)\wedge Känner(Anna,y)))$.

5. (a) $\forall x\forall y((P(x)\wedge P(y))\to R(x,y))$ är <u>falsk</u> i $\mathcal{A}$ för $\mathcal{A}\not\models(P(1)\wedge P(1))\to R(1,1)$ eftersom $\mathcal{A}\models P(1)\wedge P(1)$ men $\mathcal{A}\not\models R(1,1)$.

(b) $\forall x\exists y\,R(x,y)$ är <u>sann</u> i $\mathcal{A}$ eftersom $A=\{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{A}\models R(4,0)$ och $\mathcal{A}\models R(n,n+1)$ för $n=0,1,2,3$.

6. $(\forall x P(x) \to \neg \forall x R(x,y)) \wedge \forall y R(z,y)$ eq

$(\forall x P(x) \to \neg \forall u R(u,y)) \wedge \forall v R(z,v)$ eq

$(\neg \forall x P(x) \vee \neg \forall u R(u,y)) \wedge \forall v R(z,v)$ eq

$(\exists x \neg P(x) \vee \exists u \neg R(u,y)) \wedge \forall v R(z,v)$ eq

$\forall v ((\exists x \neg P(x) \vee \exists u \neg R(u,y)) \wedge R(z,v)$ eq

$\forall v (\exists x \exists u (\neg P(x) \vee \neg R(u,y)) \wedge R(z,v)$ eq

$\forall v \exists x \exists u ((\neg P(x) \vee \neg R(u,y)) \wedge R(z,v))$

en prenex normalform.

7. Ingen av sekventerna i (a), (b) eller (c) stämmer. Jag visar det genom att visa att motsvarande semantiska sekvent <u>inte</u> stämmer och använda sundhetssatsen.

(a) Motexempel till

$\{\exists x P(x), \forall x (\neg P(x) \to Q(x))\} \models \forall x (Q(x) \vee \neg P(x))$:

$\mathcal{A} = \langle A;;; P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$ där $A = \{1,2\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$ och $Q^{\mathcal{A}} = \{2\}$. Tolkningen av R har ingen betydelse i detta fall.

Notera att $\mathcal{A} \not\models Q(1) \vee \neg P(1)$ så
$\mathcal{A} \not\models \forall x\,(Q(x) \vee \neg P(x))$.

(Men $\forall x\,(Q(x) \vee P(x))$ är en konsekvens av antagandena.)

(b) Strukturen $\mathcal{A}$ från del (a) är också ett motexempel till

$$\{\forall x\,(P(x) \vee Q(x)),\ \exists x \neg P(x)\} \models \forall x\, Q(x).$$

(c) Motexempel till

$$\{\forall x \forall y\,(R(x,y) \to (P(x) \wedge Q(y)))\} \models \forall x \forall y\,(R(x,y) \to \neg R(y,x)):$$

$\mathcal{C} = \langle C;;;P^{\mathcal{C}}, Q^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}} \rangle$ där $C = \{1\}$,
$P^{\mathcal{C}} = Q^{\mathcal{C}} = \{1\}$ och $R^{\mathcal{C}} = \{(1,1)\}$.

(d) Jag kallar mängden av antaganden för T och visar att

$$T \models \forall x \forall y\,(R(x,y) \to \neg R(y,x)).$$

Det följer från adekvathetssatsen att
$T \vdash \forall x \forall y\,(R(x,y) \to \neg R(y,x))$.

Antag att $\mathcal{M} \models T$. Antag också att a och b är godtyckliga element i M. Antag vidare att $\mathcal{M} \models R(a,b)$. Eftersom $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \wedge Q(y)))$ så $\mathcal{M} \models R(a,b) \to (P(a) \wedge Q(b))$ och därmed $\mathcal{M} \models P(a) \wedge Q(b)$.
Eftersom $\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \to \neg Q(x))$ så $\mathcal{M} \models P(a) \to \neg Q(a)$ och därmed $\mathcal{M} \models \neg Q(a)$. Antag att $\mathcal{M} \models R(b,a)$. Eftersom $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \wedge Q(y)))$ så $\mathcal{M} \models R(b,a) \to (P(b) \wedge Q(a))$ och vi får $\mathcal{M} \models P(b) \wedge Q(a)$. Men $\mathcal{M} \models Q(a)$ och $\mathcal{M} \models \neg Q(a)$ är omöjligt, så vi drar slutsatsen att $\mathcal{M} \not\models R(b,a)$ så $\mathcal{M} \models \neg R(b,a)$ och därmed $\mathcal{M} \models R(a,b) \to \neg R(b,a)$. Eftersom $a, b \in M$ var godtyckliga så $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$.

8. (a) Låt $\varphi(x,y,z)$ vara tex.

$$R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge$$
$$\neg\exists u(\neg(u=z) \wedge R(z,u) \wedge R(u,x) \wedge R(u,y))$$

(b) Låt $\psi(x)$ vara tex. $\forall y R(x,y)$.

(c) Svaret på båda frågorna är nej. Låt χ vara $\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$. Då gäller att $\chi \in T_{\mathcal{N}}$ och $\neg\chi \in T_{\mathcal{B}}$. Vi har $\mathcal{B} \models T_{\mathcal{B}}$ och $\mathcal{B} \not\models \chi$ så $T_{\mathcal{B}} \not\models \chi$. Vi har $\mathcal{N} \models T_{\mathcal{N}}$ och $\mathcal{N} \not\models \neg\chi$ så $T_{\mathcal{N}} \not\models \neg\chi$.

9. Låt ψ vara en valid sats, tex. $\lambda \to \lambda$ där λ är vilken sats som helst. Enligt adekvathetssatsen så finns en härledning H_2 av ψ där alla antaganden är avslutade. Med hjälp av regeln $(\to I)$ får vi också en härledning H_1 av $\bot \to \psi$ där alla antaganden är avslutade.

8

Med hjälp av den nya regeln får vi en härledning

$$\dfrac{\begin{matrix} H_1 \\ \bot \to \psi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} H_2 \\ \psi \end{matrix}}{\bot}$$

som visar att $\vdash \bot$. Men eftersom $\nvdash \bot$ så gäller inte längre sundhetssatsen.

Notera att argumentet fungerar oavsett om vi arbetar med satslogik eller första ordningens logik.