UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Lindgren

Tentamen i matematik
Envariabelanalys för M, 1MA210
9 januari 2020

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon.
Antal uppgifter är 10. Det maximala antalet poäng för varje uppgift är 5 p. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skriv din tentakod på varje ark. Betygsgränserna är: 0-21= Betyg U, 22-35= Betyg 3, 36-42= Betyg 4, 43-50= Betyg 5. Eventuella bonuspoäng från duggan räknas vid minst 20 poäng på tentan.

1. Bestäm följande gränsvärden:

   a)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x}-\sqrt{x^4+\frac{1}{2}x^2}\right)$$

   b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^{\sin x}-1}$$

2. Skissa grafen till kurvan $y = x^3e^{-x}$. Bestäm och klassificera lokala och globala extrempunkter samt bestäm funktionens max- och minvärde, om de existerar.

3. Bestäm
$$\int x\arcsin(x^2)\,dx.$$

–Var god vänd–

4. Bestäm volymen av kroppen som uppstår när området

$$\left\{ x \in [1, \infty), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right\}$$

roterar kring x-axeln.

5. Bestäm för vilka x potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \ln k}{k^3}$$

konvergerar och för vilka x den divergerar.

6. Använd Taylorpolynom för att bestämma ett närmevärde till $\sqrt{10}$ med ett fel som är mindre än $1/1000$.

7. a) Låt f vara en funktion definierad på $(0, \infty)$ och A ett reellt tal. Definiera vad som menas med att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

   b) Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

8. I denna uppgift krävs endast svar och ingen motivering. Ge exempel på:

   a) En begränsad talföljd som ej är konvergent.
   b) En följd som är monotont växande men ej konvergent.
   c) En kontinuerlig funktion på $[1, \infty)$ som ej är likformigt kontinuerlig på $[1, \infty)$.
   d) En begränsad funktion på $[2, 5]$ som ej är integrerbar på $[2, 5]$.
   e) En deriverbar funktion som ej är två gånger deriverbar.

–Var god vänd–

9. Visa med hjälp av definitionen att funktionen $f(x) = x^2$ är integrerbar på $[0, 1]$ och bestäm integralen
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
utifrån definitionen. Du får använda formeln
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

10. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$. Visa att det finns $c \in [0, 1]$ så att
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 4\int_0^c f(x)\,dx.$$

Lycka till!