UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam

Tentamen i matematik, 5 hp
KandData, KandMa
LOGIK OCH BEVISTEKNIK I
2019-04-16

Skrivtid: 8.00 - 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). För godkänd kurs krävs att alla explicita kursmål är godkända samt att tentamenspoängen är minst 18 (inklusive ev bonuspoäng). För betyg 4 eller 5 krävs dessutom att tentamenspoängen är minst 25 resp minst 32. För varje uppgift anges vilket/vilka explicita kursmål som uppgiften berör.

Uppgifterna 1-5 behandlar satslogik. I dessa uppgifter används den satslogiska signaturen $\sigma = \{A, B, C\}$.

1. [Mål 1, 3, 4]. Låt $\sigma = \{A,\ B,\ C\}$ vara en satslogisk signatur.

(a) Redogör för hur formler i LP(σ) byggs upp.

(b) Förklara vad som menas med en σ-struktur.

(c) Låt φ vara en formel i LP(σ). Vad menas med att φ är en tautologi?

(d) Låt $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ vara en mängd av formler och låt φ vara en formel i LP(σ). Vad menas med att $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$? (4)

2. [Mål 5.] Skriv följande sats på konjunktiv normalform (KNF), och på disjunktiv normalform (DNF). Förklara hur du kommit fram till ditt svar!

$$\big(\neg (A \vee B) \longrightarrow C\big) \longrightarrow (A \wedge \neg B) \qquad (4)$$

3. [Mål 2.] Konstruera formella bevis i naturlig deduktion för följande påståenden.

(a) $A \longrightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$

(b) $A,\ B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (4)

4. [Mål 4.] Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange en σ-struktur som är motexempel. För varje slutledning som är giltig, konstruera att bevis i naturlig deduktion som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $A \longrightarrow (B \vee C) \models (A \longrightarrow B) \wedge C$

(b) $(A \longrightarrow B) \vee C \models A \longrightarrow (B \vee C)$ (4)

5. [Mål 6.] Avgör om följande påståenden på formen $\Gamma \vdash \tau$ gäller, dvs om τ är bevisbar i naturlig deduktion från premisserna i Γ.

(a) $A \vee B \vdash (B \longrightarrow A) \vee (A \longrightarrow B)$.

(b) $\neg(A \vee B) \longrightarrow C,\ \neg A \wedge \neg B \vdash \neg\big((A \wedge B) \longrightarrow C\big)$.

Motivera dina svar noggrant! (4)

FLER UPPGIFTER PÅ NÄSTA SIDA !

Uppgifterna 6-11 behandlar predikatlogik, dvs första ordningens logik.

6. [Mål 7, 9, 10.] Låt $\sigma = \langle\, \overline{c}; \overline{F}; \overline{P} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ 0\ ; 1\ ;\ 2 \rangle$.

(a) Ange alla slutna termer i språket LR(σ).

(b) Ange alla slutna atomära formler i språket LR(σ).

(c) Låt τ vara formeln $\overline{P}(\overline{c}, \overline{F}(\overline{c})) \wedge \exists x \forall y (x \doteq y \vee \overline{P}(x,y))$. Ange två σ-strukturer $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ så att $\mathcal{A} \models \tau$ och $\mathcal{B} \not\models \tau$. (4)

7. [Mål 8.] Låt $\sigma = \langle\ ; \overline{F}\ ; \overline{P}, \overline{Q} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ ; 2\ ; 1,\ 2 \rangle$. Betrakta σ-strukturen $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N},\ F,\ P,\ Q \rangle$, där $F(n,m) = n + m$, $P(n) \iff n$ är ett primtal, och $Q(n,m) \iff n < m$. Översätt följande till predikatlogiska slutna formler i språket LR(σ).

(a) Varje primtal är summan av två olika naturliga tal som båda är mindre än primtalet.

(b) Det finns inget största primtal. (2)

8. [Mål 12.] Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ ;\ ; 1,\ 1,\ 1 \rangle$. Konstruera formella bevis i naturlig deduktion för följande påståenden.

(a) $\forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{R}(x)), \forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \neg\overline{Q}(x)), \exists x\, \overline{P}(x) \vdash \exists x(\overline{R}(x) \wedge \neg\overline{Q}(x))$

(b) $\exists x(\overline{P}(x) \wedge \neg\overline{Q}(x)), \forall x(\overline{R}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x)), \forall x \forall y(\neg\overline{R}(x) \longrightarrow \overline{P}(y)) \vdash \forall y\, \overline{P}(y)$ (4)

9. [Mål 11, 12.] Låt $\sigma = \langle\ \overline{c}\ ;\ ; \overline{P}, \overline{Q} \rangle$ vara signatur med ställigheterna $\langle\ 0;\ ; 1,\ 1 \rangle$. Avgör om följande slutledningar på formen $\Gamma \models \sigma$ är giltiga. För varje slutledning som inte är giltig, ange en σ-struktur som är motexempel. För varje slutledning som är giltig, konstruera att bevis i naturlig deduktion som vittnar om att $\Gamma \vdash \sigma$.

(a) $\models (\forall x \overline{P}(x) \longrightarrow \forall x \overline{Q}(x)) \longleftrightarrow \forall x(\overline{P}(x) \longrightarrow \overline{Q}(x))$

(b) $\models \exists x(\overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(\overline{c})) \longleftrightarrow \exists x \overline{P}(x) \wedge \overline{Q}(\overline{c})$ (4)

10. [Mål 9, 14.] Låt $\sigma = \langle\ ;\ ; \overline{R} \rangle$ av ställigheter $\langle\ ;\ ; 2 \rangle$. Låt $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, där

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \overline{R}(x,x) \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z(\overline{R}(x,y) \wedge \overline{R}(y,z) \longrightarrow \overline{R}(x,z)) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y(\overline{R}(x,y) \wedge \overline{R}(y,x) \longrightarrow x \doteq y)
\end{aligned}$$

(a) Ange en modell för Γ.

(b) Visa att Γ är oberoende, dvs visa att ingen av formlerna i Γ kan bevisas i naturlig deduktion från de övriga två formlerna. (4)

11. [Mål 13.] Formulera sundhetssatsen och fullständighetssatsen för första ordningens logik samt förklara i ord vad de innebär. Ange gärna exempel på var i tentauppgifterna du har använt dig av någon av satserna, eller hur man skulle kunna använda dem. (2)

LYCKA TILL !