Dugga 2021-04-23
Lösningsförslag

1. (a)

$$\dfrac{(\varphi\land\psi)\lor\chi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\land\psi}^{2}}{\varphi}(\land E) \quad \cancel{\neg\varphi}^{1}}{\bot}(\neg E)}{\chi}(RAA)}{\neg\varphi\to\chi}(\to I)^{1} \qquad \dfrac{\cancel{\chi}^{2}}{\neg\varphi\to\chi}(\to I)}{\neg\varphi\to\chi}(\lor E)^{2}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{2} \quad \cancel{\psi}^{1}}{\varphi\land\psi}(\land I) \qquad (\varphi\land\psi)\to\chi}{\chi}(\to E) \qquad \neg\chi}{\bot}(\neg E)}{\neg\psi}(\neg I)^{1}}{\varphi\to\neg\psi}(\to I)^{2}$$

2. Vi skriver upp sanningsvärdestabellen för formeln:

p	q	r	$(p\leftrightarrow r)$	$\to$	$(q\lor\neg r)$	"block" som beskriver tilldelningen
s	s	s	s	S	s	$p\land q\land r$
f	s	s	f	S		$\neg p\land q\land r$
s	f	s	s	f	f	$p\land\neg q\land r$
s	s	f	f	S		$p\land q\land\neg r$
f	f	s	f	S		$\neg p\land\neg q\land r$
s	f	f	f	S		$p\land\neg q\land\neg r$
f	s	f	s	S	s	$\neg p\land q\land\neg r$
f	f	f	s	S	s	$\neg p\land\neg q\land\neg r$

Genom att ta disjunktionen av blocken på raderna där formeln är sann får vi en DNF som är ekvivalent:

$(p \leftrightarrow r) \to (q \vee \neg r)$ eq

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

(Det finns också enklare DNF:er som är eqvivalenta med formeln.)

Genom att ta konjunktionen av <u>negationerna</u> av blocken där formeln är <u>falsk</u> får vi en KNF som är ekvivalent:

$(p \leftrightarrow r) \to (q \vee \neg r)$ eq

$\neg(p \wedge \neg q \wedge r)$ eq

$\underbrace{\neg p \vee q \vee \neg r}$

Detta är en KNF och <u>också</u> en DNF (som är enklare än den första).

3. Vi ser i lösningen till uppg. 2 att det finns en sanningsvärdes-tilldelning som gör den sann och en sanningsvärdestilldelning som gör den falsk. Det följer att
   (a) den är satisfierbar, och
   (b) den är <u>inte</u> valid.

Vi skriver nu upp sanningsvärdes-tabellen för $\neg((p \to q) \vee r)$:

p	q	r	$\neg(($	p	$\to$	q	$)\vee$	$r)$
s	s	s	f				s	
f	s	s	f				s	
s	f	s	f				s	
s	s	f	f		s	s	s	
f	f	s	f	f	s		s	
s	f	f	s		f		f	f
f	s	f	f	f	s		s	
f	f	f	f	f	s		s	

(c) Vi ser att om $\neg((p\to q)\vee r)$ är sann (rad 6) så är även $(p\leftrightarrow r)\to(q\vee\neg r)$ sann så $(p\leftrightarrow r)\to(q\vee \neg r)$ är en logisk konsekvens av $\neg((p\to q)\vee r)$.

(d) Det finns rader där den ena formeln är sann men den andra falsk så de är <u>inte</u> ekvivalenta.

4. (a) Vi betraktar motsvarande semantiska sekvent

$$(*) \quad \neg(p \to (q \vee \neg p)),\ p \models \neg(\neg p \to q).$$

För att avgöra dess korrekthet analyserar vi sanningsvärdestabellen:

p	q	$\neg(p\to(q\vee\neg p))$	p	$\neg(\neg p \to q)$
s	s	f s s s	s	
s	f	S s f f f f s	S	f f s s
f	s	f s s s	f	
f	f	f f s	f	

Det finns en rad där båda antagandena är sanna men slutsatsen falsk, så $(*)$ stämmer inte. Enligt fullständighetssatsen (eller sundhetssatsen) stämmer <u>inte</u> heller

$$\neg(p \to (q \vee \neg p)),\ p \vdash \neg(\neg p \to q).$$

(b) Genom att betrakta motsvarande semantiska sekvent och fullständighetssatsen så kan man komma fram till att

$\neg p \wedge q \vdash \neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$ stämmer. Här är en härledning:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p\leftrightarrow(q\vee r)}^{1}}{(q\vee r)\to p}\,(\leftrightarrow E) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg p\wedge q}{q}\,(\wedge E)}{(q\vee r)}\,(\vee I)}{p}\,(\to E) \qquad \dfrac{\neg p \wedge q}{\neg p}\,(\wedge E)}{\perp}\,(\neg E)}{\neg(p\leftrightarrow(q\vee r))}\,(\neg I)^{1}$$