

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 1 extra problem (max 12 poäng). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.

18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.

Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{e^{x^2} - e^{-x^2}}$.
2. Motivera varför funktionen $f(x) = x(x^2 - 3)$ måste anta ett minsta och ett största värde på det **slutna** intervallet $-2 \leq x \leq 2$ samt bestäm dessa värden.
3. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ genom att utnyttja substitutionen $e^x = u$.

4. Skissera kurvan

$$y = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{x^3} = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

Bestäm särskilt asymptoterna, lokala extrempunkterna samt kurvans skärningspunkter med sin sneda asymptot. $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{x^4}$

5. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx$.
6. Lös differentialekvationen $y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
7. Lös differentialekvationen $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$.
8. Ange de x för vilka $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^n$ konvergerar samt bestäm seriens summa för dessa x .
9. Potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ har konvergensradien lika med $\frac{1}{2}$. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.
10. Motivera varför $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$ antar ett största värde på det **öppna** intervallet $-\infty < x < \infty$ samt bestäm detta värde.

V.G.V!

PROBLEM

1. Parablerna $y = (x+1)^2 + 1$ och $y = -(x-1)^2 - 1$ har precis två gemensamma tangenter. Beräkna x -koordinaterna för deras tangeringspunkter på respektive parabel.

2.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- a) Bevisa att $f'(0) = 1$.
- b) Bevisa att $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ inte är lika med 1.

DIVERSE FORMLER OCH SATSER

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad (-1 < r < 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan^{-1} x = \pm \frac{\pi}{2}.$$