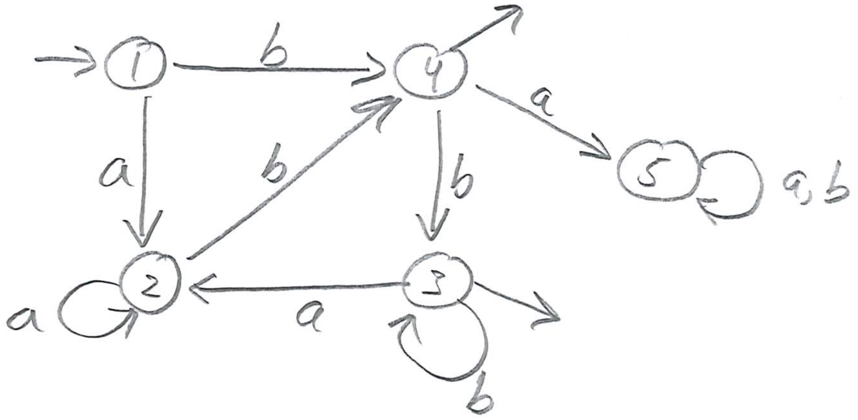
Lektion 3

①

Svar/lösningsförslag.

1. Jag namnger först tillstånden:



Sedan beskriver jag tillståndsövergångarna i tabellform. (Det blir då enklare att använda särskiljandealgoritmen.)

	1	2	3	4	5
a	2	2	2	5	5
b	4	4	3	3	5

Särskiljandealgoritmen:

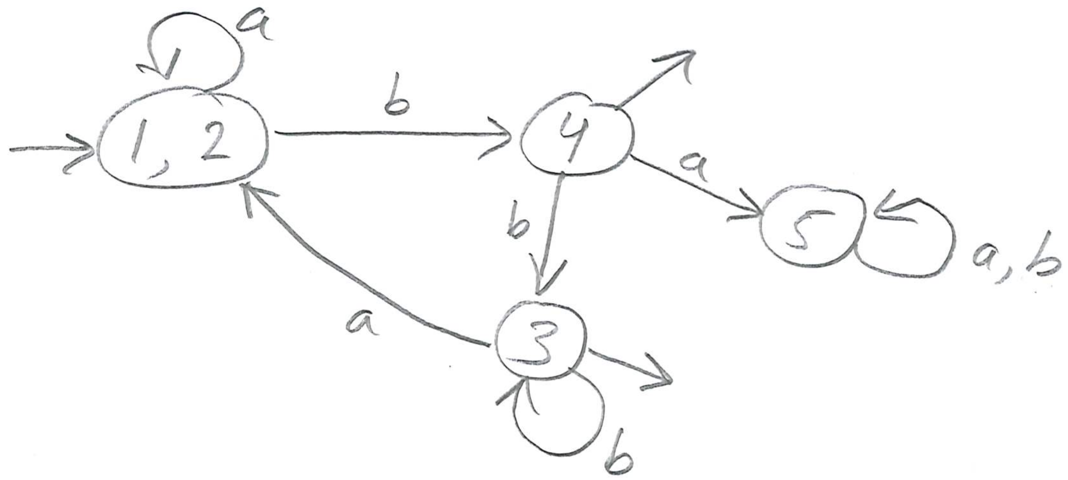
nivå 1 {1 2 5} {3 4}
Accepterande och icke-accepterande tillstånd särskiljs.

nivå 2 {1 2} {5} {3 4}
b driver DFA:n från 1 till 4. b driver DFA:n från 5 till 5. 4 och 5 ligger i olika delar på föregående nivå.

nivå 3 {1 2} {5} {3} {4}
a driver DFA:n från 3, respektive från 4, till olika delar på föregående nivå.

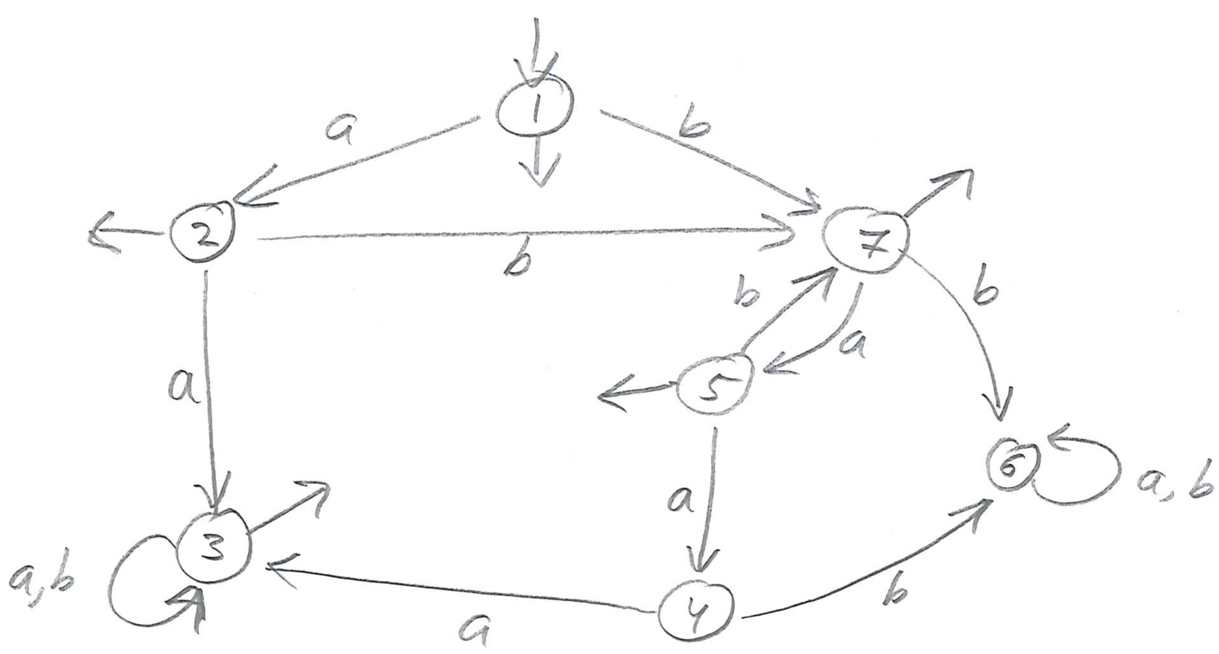
nivå 4 {1 2} {5} {3} {4}.

Nivåerna 3 och 4 ser likadana ut så vi är klara. Vi får nu följande <u>minimala</u> DFA (med samma språk):



Den andra DFA:n i uppgiften är redan minimal. (När man använder särskiljande-algoritmen så kommer det till sist hända att varje del bara innehåller ett tillstånd. Mera detaljer i minimeringen av nästa DFA.)

Jag numrerar först tillstånden.



Övergångstabell:

	1	2	3	4	5	6	7
a	2	3	3	3	4	6	5
b	7	7	3	6	7	6	6

Särskiljning:

nivå 1 {1, 2, 3, 5, 7} {4, 6}

nivå 2 {1, 2, 3} {5} {7} {4} {6}

nivå 3 {1 2} {3} {5} {7} {4} {6}

nivå 4 {1} {2} {3} {5} {7} {4} {6}

Alla delar innehåller bara ett tillstånd, så DFA:n är redan minimal.

2. Se boken.

3. $L = \{ w \in \{a,b\}^* :$ w innehåller minst tre gånger så många b som a $\}$

Med särskiljandesatsen:

Låt $A = \{ a^n : n = 1, 2, 3, \ldots \}$.

Vi visar att L särskiljer A. Då följer från särskiljandesatsen att L inte är reguljär. Låt $x, y \in A$. Då finns $i \neq j$ så att $x = a^i$ och $y = a^j$. Låt k vara det minsta av i och j. och låt $z = b^k$. Om $i < j$ så $xz = a^i b^{3i} \in L$ och $yz = a^j b^{3i} \notin L$. Om $j < i$ så $xz = a^i b^{3j} \notin L$ och $yz = a^j b^{3j} \in L$. Så L särskiljer x och y, där x och y var godtyckliga olika strängar från A. Obs! Det är viktigt att A är oändlig. Annars kan vi inte använda särskiljandesatsen.

Med pumpsatsen:

1. L är oändlig, för alla $a^n b^{3n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tillhör L.
2. Antag att L är reguljär.
3. Låt N vara givet av pumpsatsen för reguljära språk.

4. Välj $u = a^N$, $w = b^{3N}$, $v = \varepsilon$, så $|w| \geq N$ och $uwv = a^N b^{3N} \in L$.

5. Antag att $w = xyz$ där $y \neq \varepsilon$.
Då gäller att $xy^0z = xz = b^k$ för något $k < 3N$.
Det följer att $uxy^0zv = a^N b^k$ där $k < 3N$
så $uxy^0zv \notin L$.

6. Slutsatsen i punkt 5 motsäger pumpsatsen, så L kan <u>inte</u> vara reguljärt.

<u>Obs!</u> I bevis av icke-regularitet med pumpsatsen så kommer jag i fortsättningen inte (nödvändigtvis) förklara alla stegen 1–6 (som i lösningen ovan) utan jag förklarar (eventuellt) endast stegen 4–5 som är den "svåra" delen.

---

4. <u>Med pumpsatsen</u>:

Låt N vara given av pumpsatsen (under antagandet att L är reguljär).
Välj $u = (p \wedge (p \wedge (p \wedge \ldots (p \wedge p$
där u innehåller N vänsterparanteser (och $N+1$ p:n), $w =)^N$ och $v = \varepsilon$.

Då gäller att $|w| \geq N$ och
$uwv = (p \wedge (p \wedge (p \wedge \ldots (p \wedge p))^N \in L$.
Antag att $w = xyz$ och $y \neq \varepsilon$.
Då gäller att $xy^0z = xz =)^k$ för
något $k < N$. Det följer att $uxy^0zv =$
$(p \wedge (p \wedge (p \wedge \ldots (p \wedge p))^k$ har <u>färre</u>
högerparanteser än vänsterparanteser,
så $uxy^0zv \notin L$. Eftersom $w = xyz$
är en godtycklig uppdelning av w
så att $y \neq \varepsilon$ så har vi fått en
motsägelse till pumpsatsen. Därmed
är L inte reguljärt.

5. L_1 är reguljärt och följande är ett
reguljärt uttryck för L_1:
$aa(a \cup b)^* aa \cup ab(a \cup b)^* ba \cup ba(a \cup b)^* ab$
$\cup\ bb(a \cup b)^* bb$.

L_2 är <u>inte</u> reguljärt.

<u>Bevis med särskiljandesatsen:</u>

Låt $A = \{a^n b : n \in \mathbb{N}\}$, så A är oändlig. Vi visar att L_2 särskiljer A. Antag att $x, y \in A$ och $x \neq y$. Då finns $i \neq j$ så att $x = a^i b$ och $y = a^j b$. Välj $z = ba^i$. Då gäller att $xz = a^i b b a^i$ och $yz = a^j b b a^i$.

Eftersom $a^i bba^i = uvu^{rev}$ om $u = v = a^i$ och $v = bb$ så $xz \in L$. Men det går inte att skriva $yz = uvu^{rev}$ där $|v| = 2$, så $yz \notin L$. Förklaring:

Kom ihåg att $yz = a^j bba^i$ där $j \neq i$. Om $a^j bba^i = uvu^{rev}$ och $|v| = 2$ så måste (eftersom $|u| = |u^{rev}|$) v innehålla de två mittersta tecknen i $a^j bba^i$ och (eftersom $i \neq j$) så måste antingen

u innehålla minst ett 'b' och u^{rev} innehålla bara 'a',

eller

u^{rev} innehålla minst ett 'b' och u innehålla bara 'a'.

Men båda fallen är omöjliga eftersom u och u^{rev} alltid innehåller samma tecken (lika många gånger).

Man kan också visa att L_2 inte är reguljärt med pumpsatsen. Om N är givet av pumpsatsen (för L_2) kan man välja (t.ex.) $u = a^N bb$, $w = a^N$ och $v = \varepsilon$. Om $w = xyz$ och $y \neq \varepsilon$ så kommer uxy^0zv (alternativt uxy^nzv där $n > 1$) inte att tillhöra L_2, pga liknande argument som ovan (då särskiljandesatsen användes).

L_3 är reguljärt. Observera att
$\overline{L_3} = \{w \in \{a,b\}^* : w$ har (minst) en förekomst av $aabb\}$.

$\overline{L_3}$ beskrivs av det reguljära uttrycket
$(a \cup b)^* aabb (a \cup b)^*$ så $\overline{L_3}$ är reguljärt. Eftersom reguljära språk är slutna under komplement så

är $L_3 = \overline{\overline{L}}_3$ reguljärt.

L_4 är inte reguljärt. Observera först att (för varje $n = 1, 2, 3, \ldots$) så har a^n $n-1$ förekomster av aa. Så speciellt har $(aa)^n = a^{2n}$ $2n-1$ förekomster av aa. På samma sätt har $(bb)^n$ $2n-1$ förekomster av bb.

<u>Bevis av icke-regularitet med särskiljandesatsen:</u>

Låt $A = \{(aa)^n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ så A är oändlig och det räcker att visa att L_4 särskiljer A. Antag att $x, y \in L_4$ och $x \neq y$. Så $x = (aa)^i$ och $y = (aa)^j$ för något i och j så att $i \neq j$. Välj $z = (bb)^i$. Då har $xz = (aa)^i (bb)^i$ $2i-1$ förekomster av aa och $2i-1$ förekomster av bb. Å andra sidan har

$yz = (aa)^j (bb)^i$ $2j-1$ förekomster av aa och $2i-1$ förekomster av bb (där $i \neq j$). Så $xz \in L_4$ och $yz \notin L_4$.

Alltså särskiljs A av L_4 (så L_4 är inte reguljär).

På liknande sätt kan man visa att L_4 inte är reguljär med hjälp av pumpsatsen. Under antagandet att L_4 är reguljär låt N vara given av pumpsatsen. Välj (t.ex.) $u = \varepsilon$, $w = (aa)^N$, $v = (bb)^N$. Så $|w| \geq N$ och $uwv = (aa)^N (bb)^N \in L_4$. Om $w = xyz$ och $y \neq \varepsilon$ så $uxy^0zv \notin L$ (och $uxy^nzv \notin L$ om $n > 1$), vilket motsäger pumpsatsen. Att $uxy^0zv \notin L$ behöver dock motiveras på liknande sätt som i beviset med hjälp av särskiljandesatsen.

6. Se svar/lösningar i kursboken.

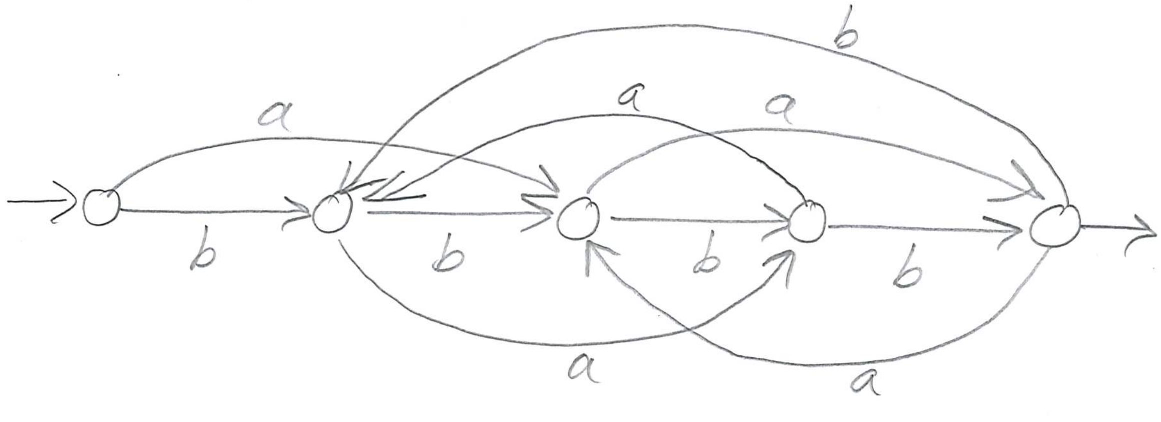
7. (a) Språket består av alla strängar $w \in \{a, b\}^*$ sådana att

$$(\text{antalet 'a' i } w) \cdot 50$$

$$+ (\text{antalet 'b' i } w) \cdot 25$$

är jämnt delbart med 100.

Detta språk är reguljärt och accepteras av följande DFA:



(b) Låt L vara språket från (a)-delen och låt $L_1 = \{w \in L : \text{antalet kronor som } w \text{ representerar är högst } 100\}$.
Då är L_1 ändligt och därmed reguljärt.
Låt $L_2 = \{w \in \{c\}^* : |w| \geq 100\}$. Då är $c^{100}c^*$ ett reguljärt uttryck för L_2 så L_2 är reguljärt. Strängarna som ska accep-

teras är precis de som tillhör L_1L_2 och L_1L_2 är reguljärt (eftersom reguljära språk är slutna under sammanfogning).

(c) Låt L_3 beteckna språket som beskrivs i (c)-delen. L_3 är inte reguljärt vilket jag visar med pumpsatsen. Antag att L_3 är reguljärt och att N är given av pumpsatsen. Låt $u = (aa)^N$, $w = c^N$ och $v = \varepsilon$. Så $|w| \geq N$ och $uwv = (aa)^N c^N \in L_3$. Antag att $w = xyz$ och $y \neq \varepsilon$. Då finns $k < N$ så att $xy^0z = xz = c^k$ och det följer att $uxy^0zv = (aa)^N c^k \notin L_3$.

8. Påståendena (a), (d), (f), (g) och (j) stämmer och följer från att reguljära språk är slutna under
sammanfogning,
union ($\cup$),
komplement och
snitt ($\cap$).

(Reguljära språk är även slutna under '$*$' och '$+$')

(b) Motexempel: $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_3 = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$.
Då är L_1 reguljär, L_3 icke-reguljär och $L_1 L_3 = L_3$ icke-reguljär.

(c) Motexempel: $L_1 = \emptyset$, $L_3 = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$.
Då är L_1 reguljär, L_3 icke-reguljär och $L_1 L_3 = \emptyset$ är reguljär.

(e) Om $\overline{L_3}$ är reguljär så är $\overline{\overline{L_3}} = L_3$ också reguljär (en slutenhetsegenskap).
Så om L_3 är icke-reguljär så är även $\overline{L_3}$ icke-reguljär.

(h) Motexempel: $L_1 = \{a,b\}^*$, $L_3 = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$.
$L_1 \cap L_3 = L_3$ är ej reguljärt.

(i) Motexempel: L_1, L_3 som i del (h).
$L_1 \cup L_3 = L_1$ är reguljärt.

(k) Motexempel: Välj L_1, L_3 som i (h). Då har vi $L_1 - L_3 = \overline{L_3}$ som inte är reguljärt.