2020-06-01

1a $\forall x \forall y\,(\bar{P}(x) \land \bar{P}(y) \to \neg \bar{P}(\bar{F}(x,y)))$

b) $\neg \exists x\,(\bar{P}(x) \land \forall y\,(\bar{P}(y) \to \bar{Q}(y,x)))$

2

A	B	C	$(A \lor \neg B)$	$\to$	$(C$	$\to$	$(A \land B))$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0

DNF: $(A \land B \land C) \lor (A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land C)$
$\lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C)$

eq. $(A \land B) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land B) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C)$

eq $\underbrace{(A \land B) \lor (\neg A \land B)}_{\text{eq } B} \lor (\neg B \land \neg C)$

eq $B \lor (\neg B \land \neg C)$

eq $(B \lor \neg B) \land (B \lor \neg C)$

eq $B \lor \neg C$ Både DNF och KNF.

KNF

$(\neg A \lor B \lor \neg C) \land (A \lor B \lor \neg C)$

eq $B \lor \neg C$.

3a

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \land \neg B}{A}\,\land E \qquad A \to B^{(1)}}{B}\,\to E \qquad \cfrac{A \land \neg B}{\neg B}\,\land E}{\cfrac{\bot}{\neg(A \to B)}\,\neg I\,(1)}\,\neg E$$

3b

$$
\dfrac{\neg A \vee \neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg A}^{3} \quad \cancel{A}^{1}}{\perp}\,\neg E}{B}\,RAA}{A \to B}\,{\to}I\,①
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\neg B}^{4} \quad \cancel{\neg B}^{2}}{\perp}\,\neg E}{B}\,RAA\,②}{A \to B}\,{\to}I}{A \to B}\,\vee E\,③\,④
$$

3c

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\neg \bar{Q}(x) \to \neg \bar{P}(\bar{c}))}{\neg \bar{Q}(\bar{d}) \to \neg \bar{P}(\bar{c})}\,\forall E \qquad \cancel{\neg \bar{Q}(\bar{d})}^{1}}{\neg \bar{P}(\bar{c})}\,{\to}E \qquad \dfrac{\forall x \bar{P}(x)}{\bar{P}(\bar{c})}\,\forall E}{\dfrac{\perp}{\bar{Q}(\bar{d})}\,RAA\,①}\,\neg E
$$

3d

$$
\dfrac{\exists x Q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\bar{Q}(x) \to \bar{P}(\bar{c}))}{\bar{Q}(x) \to \bar{P}(\bar{c})}\,\forall E \qquad \cancel{Q(x)}^{1}}{\bar{P}(\bar{c})}\,{\to}E \qquad \dfrac{\forall x(\bar{P}(x) \to \bar{R}(x, \bar{F}(x)))}{\bar{P}(\bar{c}) \to \bar{R}(\bar{c}, \bar{F}(\bar{c}))}}{\bar{R}(\bar{c}, \bar{F}(\bar{c}))}\,{\to}E}{\exists x \bar{R}(\bar{c}, x)}\,\exists I}{\exists x \bar{R}(\bar{c}, x)}\,\exists E\,①
$$

4a

A	B	C	$(A \to C) \to B$	$A \to (\neg C \to B)$	
1	1	1	1	1	←
1	1	0	1	1	←
1	0	1	0	1	
1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	←
0	1	0	1	1	←
0	0	1	0	1	
0	0	0	0	1	

På alla rader där premisserna är sanna, är även B sann.

Svar: $(A \to C) \to B,\ A \to (\neg C \to B) \models B$.

(4b) Avgör

$$\underbrace{\forall x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))}_{\varphi}, \underbrace{\exists x \bar{R}(x)}_{\psi}, \underbrace{\exists x(\bar{Q}(x) \wedge \bar{R}(x))}_{\tau} \overset{?}{\models} \exists x \neg \bar{R}(x)$$

Låt $A = \{0,1\}$

$P = Q = \emptyset$

$R = \{0,1\}$

$\mathfrak{A} = \langle A;\ ;\ ; P, Q, R \rangle$

Då gäller

$\mathfrak{A} \models \varphi$ eftersom $P \subseteq Q$

$\mathfrak{A} \models \psi$ eftersom $R \neq \emptyset$

$\mathfrak{A} \models \tau$ eftersom $R \cap Q = \emptyset$

Men $\mathfrak{A} \not\models \exists x \neg \bar{R}(x)$ eftersom alla element i A tillhör R.

Alltså är $\mathfrak{A}$ en motexempelstruktur.

Alltså ~~g~~ har vi $\varphi, \psi, \tau \not\models \exists x \neg \bar{R}(x)$.

(5a) Avgör $\exists x \bar{P}(x) \to \forall x \bar{Q}(x) \vdash \forall x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bar{P}(x)^{(1)}}{\exists x \bar{P}(x)}\exists I \quad \exists x \bar{P}(x) \to \forall x \bar{Q}(x)}{\forall x \bar{Q}(x)} \to E}{\bar{Q}(x)} \forall E}{\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x)} \to I\,(1)}{\forall x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))} \forall I$$

Alltså stämmer påståendet.

(5b) Avgör

$$\underbrace{\forall x\,(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))}_{\varphi} \vdash \underbrace{\exists x\,\bar{P}(x) \to \forall x\,\bar{Q}(x)}_{\psi}$$

Låt $A = \{0,1\}$
$P = \{0\}$
$Q = \{0\}$

$\mathfrak{A} = \langle A;\,;\,;\, P, Q \rangle$

Nu gäller $\mathfrak{A} \models \forall x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))$ eftersom $P \subseteq Q$

Det gäller också att $\mathfrak{A} \models \exists x\,\bar{P}(x)$ eftersom $0 \in P$

och att $\mathfrak{A} \not\models \forall x\,\bar{Q}(x)$ eftersom $1 \notin Q$.

Alltså $\mathfrak{A} \not\models \exists x\,\bar{P}(x) \to \forall x\,\bar{Q}(x)$.

Alltså $\varphi \not\models \psi$.

Sundhetssatsen ger att $\varphi \not\vdash \psi$. //

(6)

A	B	$\oplus(A,B)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A	$\oplus(A,A)$	$\neg A$
1	0	0
0	1	1

A	B	$A \vee B$	$\oplus(\oplus(A,B), \oplus(A,B))$		
1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1

Vi ser att

$\neg A$ eq $\oplus(A,A)$

$A \vee B$ eq $\oplus(\oplus(A,B), \oplus(A,B))$

Alltså kan $\neg$ och $\vee$ uttryckas enbart med $\oplus$

Eftersom $\{\neg, \vee\}$ är f.t. följer nu att $\{\oplus\}$ är f.t.

7a) $\overbrace{\neg \exists x\, \bar{Q}(x)}^{\varphi},\ \overbrace{\exists x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))}^{\psi} \models \exists x\, \neg \bar{P}(x).$

Låt $\mathcal{A} = \langle A;\,;\,;\, P, Q\rangle$ en godtycklig σ-struktur.

Anta att $\mathcal{A} \models \neg \exists x\, \bar{Q}(x)$ och $\mathcal{A} \models \exists x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x))$.

Då måste $Q = \emptyset$ (ty annars skulle $\mathcal{A} \models \exists x\, \bar{Q}(x)$).

Och det finns något element $a \in A$ så att $\mathcal{A} \models \bar{P}(\bar{a}) \to \bar{Q}(\bar{a})$.

Alltså $\mathcal{A} \not\models \bar{P}(\bar{a})$ eller $\mathcal{A} \models \bar{Q}(\bar{a})$.

Eftersom $Q = \emptyset$ så kan inte $\mathcal{A} \models \bar{Q}(\bar{a})$ gälla.

Alltså måste $\mathcal{A} \not\models \bar{P}(\bar{a})$, dvs $a \notin P$.

Alltså finns något element som inte tillhör P,

dvs $\mathcal{A} \models \exists x\, \neg \bar{P}(x)$.

Alltså eftersom $\mathcal{A}$ godtycklig struktur, så har vi visat att $\exists x \neg \bar{P}(x)$ är sann i varje modell för φ och ψ.

Alltså gäller $\varphi, \psi \models \exists x\, \neg \bar{P}(x)$.

7b)

$$\dfrac{\exists x(\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\bar{P}(x)}^{(1)} \qquad \cancel{\bar{P}(x) \to \bar{Q}(x)}^{(2)}}{\bar{Q}(x)}\,\to E}{\exists x\, \bar{Q}(x)}\,\exists I \qquad \neg \exists x\, Q(x)}{\bot}\,\neg E}{\neg \bar{P}(x)}\,\neg I\ (1)}{\exists x\, \neg \bar{P}(x)}\,\exists I}{\exists x\, \neg \bar{P}(x)}\,\exists E\ (2)$$

8

$\sigma = \langle \bar{c}; \bar{F}; \bar{R} \rangle$ av ställighet $\langle 0; 1; 2 \rangle$

$\varphi_1 \quad \forall x \neg \bar{R}(x,x)$

$\varphi_2 \quad \forall x \forall y \forall z \, (\bar{R}(x,y) \wedge \bar{R}(y,z) \rightarrow \bar{R}(x,z))$

$\varphi_3 \quad \forall x \, \bar{R}(x, \bar{F}(x))$

$\mathcal{A} = \langle A; c; F; P \rangle$ en σ-struktur.

(a) Anta $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$.

(a) Ange en modell för $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

(ex $\mathbb{N}$ $<$ S $\quad S(n) = n+1$, $n < n+1$)

(b) oberoende

$\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$ $\qquad P = \{(1,2),$ $<$ $F(x) = x\}$

$\varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2$ $\qquad$ Förstör transitiv $(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \ldots$

$F(1) = 2$ $\quad P = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$

$F(2) = 3$ $\quad F(n) = n+1$

$F(3)$

$\varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$ $\qquad P = \{(0,0)\}$

$F(0) = 0$

$A = \{0\}$.

c) Antag $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$, och antag att $\mathcal{A}$ ändlig, ~~[illegible]~~

Låt $a_0 \in A$. Sätt $a_1 = F(a_0)$. Nu är $R(a_0, a_1)$ och $a_0 \neq a_1$ enl φ_1 och φ_3. Sätt $a_2 = F(a_1)$. Nu är $R(a_1, a_2)$ och $a_1 \neq a_2$ enl φ_1, och dessutom, enl φ_2 följer att $a_2 \neq a_0$. Osv. vi kan på detta sätt skapa en oändlig följd av olika element $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Så $\mathcal{A}$ kan inte vara ändlig.