

LP n° 8 Titre : Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulement visqueux

Présentée par : Florian Poydenot

Rapport écrit par : Nathan Vaudry

Correcteur : Marc Rabaud

Date : 26/11/18

### Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Hydrodynamique physique	Guyon Petit		
Physique spé PC, PC*	Olivier, Gié, Sarmant		2000
National committee for fluid mechanics films			

### Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis : Hydrostatique, fluides parfaits, diffusion, électromagnétisme

19<sup>ème</sup> siècle : travaux de Stokes, Navier et de Couette. Vidéo de mise en évidence du phénomène de viscosité (déformation unidirectionnelle)

I Notion de viscosité

1) Expérience

2 plaques distantes de  $h$ . Celle du haut se déplaçant à vitesse  $U$  selon  $\mathbf{e}_x$

$\mathbf{v} = v(y)\mathbf{e}_x$

$d\mathbf{F} = \eta dS (dv/dy) \mathbf{e}_z$  (d rond)

Action de contact  $d\mathbf{F} = -pd\mathbf{S}$  OG de  $\eta$

2) Modèle microscopique

Gaz parfait  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{u}_i$  <  $\mathbf{u}_i$  > = 0 et <  $\mathbf{u}_i^2$  > =  $u_{\text{moy}}^2$

Nombre de particules moyen  $\delta N = n u_{\text{moy}} dS/6$  d'où  $\delta F_x = m \delta N v(y+l) - m \delta N v(y-l)$  avec  $l$  le libre parcours moyen des particules. Développement limité  $\delta F_x = 2m \delta N (dv/dy) l = m n u_{\text{moy}} (dv/dy) l dS$  (d rond) D'où  $\eta = m n u_{\text{moy}} l/3$  or  $m n = \rho_0$  la masse volumique du fluide. On définit  $\nu = \eta/\rho_0$  qui correspond à un coefficient de diffusion (analogue au coefficient de diffusion thermique). OG pour l'air à 20°C

II Dynamique des écoulements visqueux

1) Contraintes exercées sur une particule de fluide

Schéma montrant les différentes forces de cisaillement.

$d\mathbf{F}_{\text{tot}} = d\mathbf{F}(y) - d\mathbf{F}(y-dy) = \eta dS ((dv(y)/dy) - (dv(y-dy)/dy)) \mathbf{e}_x$  (d rond)

On a alors  $d\mathbf{F}_{\text{tot}}/dt = \eta (d^2v/dy^2) \mathbf{e}_x$  (d rond)

2) Equation de Navier-Stokes

$\rho_0 D\mathbf{v}/Dt = -\mathbf{grad} P + \rho_0 \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v}$

et  $\text{div } \mathbf{v} = 0$

3) Conditions aux limites

- Cinématiques

Paroi solide :  $v_{\text{perp}} = 0$  et  $\mathbf{v}_{\text{fluide}} = \mathbf{v}_{\text{paroi}}$

- Dynamiques

Solide :  $P_{\text{fluide}} = P_{\text{paroi}}$

Fluide : égalité des forces volumiques

#### 4) Nombre de Reynolds

Vitesse  $U$ , longueur  $L$  caractéristiques. . Introduction de grandeurs adimensionnées selon les échelles introduites et simplification de l'équation de Navier-Stokes selon :

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad}^*) \mathbf{v}^* = -\mathbf{grad}^* p^* + \mathbf{g}^* + (Re^{-1}) \Delta^* \mathbf{v}^* \text{ avec}$$

$$Re = LU/v = (OG(\text{terme convectif}) / OG(\text{terme diffusif}))$$

$Re \ll 1$  : écoulement visqueux et  $Re \gg 1$  : écoulement inertiel

Exemple de la bactérie :  $L = 1 \mu\text{m}$ ,  $U = 15 \mu\text{m/s}$  et  $v = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$   $Re = 10^{-5}$

Voiture :  $L = 1\text{m}$ ,  $U = 30 \text{m/s}$  et  $v = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$   $Re = 10^6$  (approximation du fluide

parfait)

### III Applications

Ecoulement de Couette plan

$$\mathbf{v} = v(y, t) \mathbf{e}_x \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = 0 \text{ car } \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Ecriture de l'équation de Navier-Stokes et projection selon  $\mathbf{e}_y$

$0 = dP/dy - \rho g$  (équation fondamentale de l'hydrostatique) donc  $P = P(y)$  (d rond)

Selon  $\mathbf{e}_x$  nous obtenons

$dv/dt = v(d^2v/dy^2)$  (d rond) Equation de diffusion attendue car réponse linéaire entre la force et la vitesse similaire à la loi de Fick et Navier-Stokes correspond à une équation de conservation de quantité de mouvement.

Stationnaire :  $d^2v/dy^2 = 0$  d'où  $v(y) = ay + b$  et conditions aux limites donnent  $b = 0$  et  $ah = U$  d'où  $v(y) = U(y/h) \mathbf{e}_x$

Ecriture des forces en  $y = h$  :

$-\eta(U/h)dS$  donnant une puissance surfacique égale à  $\eta(U^2/h)$  . Cette puissance dissipée s'écrit  $-\eta(U/h^2)$

Non abordé : que se passe-t-il si  $\eta$  est arbitrairement petit (fluide parfait) ? Notion de couche limite.

### Questions posées par l'enseignant

- Expérience : quelles précautions à prendre ? Quel temps caractéristique faut-il attendre pour que l'on atteigne le régime stationnaire ? Viscosité cinématique de l'eau ?
- Est-ce que  $Re$  est le seul nombre adimensionné apparaissant dans l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes ?
- Pourquoi n'y a-t-il pas de signe - dans la réponse liant force et gradient de vitesse contrairement à la loi de Fick ?
- D'où vient la force de traînée aérodynamique pour la voiture ? Pourquoi y applique-t-on Navier-Stokes et pas Euler ? Pourquoi la vitesse tangentielle près d'une paroi est nulle ? Trouvez l'origine microscopique de la distribution des vitesses.
- Quelle différence physique fondamentale est présente avec la viscosité ?
- Equation de Stokes ? Exemples ?
- Réversibilité et dissipation d'énergie, comment est-ce possible ?
- Existe-t-il des valeurs critiques de  $Re$  correspondant à une certaine équation ? Comment savoir si un écoulement est laminaire ?
- Quelle est l'expression globale de la force appliquée sur le fluide ? Calcul global de la force exercée sur une paroi.
- Exemple de fluides rhéofluidifiants.
- Evolution de la viscosité avec la température. Viscosité dépend-elle de l'écoulement ? Existe-t-elle uniquement à cause d'un cisaillement du fluide ?
- Profil de Couette : résultat indépendant de la viscosité. Est-ce que la viscosité intervient encore dans l'équation de Navier-Stokes ?

### Commentaires donnés par l'enseignant

Préciser ce qui se passe dans la manipulation du film. Prendre plus de temps sur les conditions aux limites.

Viscosité à une certaine température

Modèle 1/6 des gaz parfaits : pré-requis de thermodynamique. A bien maîtriser (car distribution statistique).

Div  $\mathbf{v}=0$  si incompressibilité. Adimensionnement de Navier-Stokes plus court. Puissance dissipée en chaleur n'est pas une conclusion.

Viscosité tendant vers 0 un peu limite mais bonne ouverture.

Equation d'Euler en pré-requis ? Electromagnétisme ? (effet de Peau)

Pourquoi  $P=P(y)$  dans l'écoulement de Couette ?

-Réversibilité : exemple d'une particule sédimentant parallèlement à une paroi à très faible  $Re$ . Pas d'attraction et attraction par renversement du temps. La particule reste donc parallèle à la paroi.

-Il existe un  $Re$  dans le cas d'écoulements parallèles (défini par le rapport de 2 temps (diffusif/convectif)).

**Partie réservée au correcteur**

### **Avis sur le plan présenté**

Bien pour les 40 mn. Il faut savoir expliquer vos choix de ne pas parler d'autre chose dans ces 40 mn.

### **Concepts clés de la leçon**

Modèle microscopique thermodynamique pour expliquer la diffusion de quantité de mouvement.

### **Concepts secondaires mais intéressants**

Description instationnaire au démarrage de Couette plan  
Réversibilité à petit Reynolds

### **Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)**

Mise en évidence des contraintes de cisaillement dans un montage de Couette. La rotation d'un des cylindres entraîne l'autre ...

### **Points délicats dans la leçon**

Justifier la vitesse nulle à la paroi.

Savoir expliquer la dépendance en température pour un gaz et un liquide.

Expliquer la réversibilité avec les bons arguments de symétrie.

### **Bibliographie conseillée**