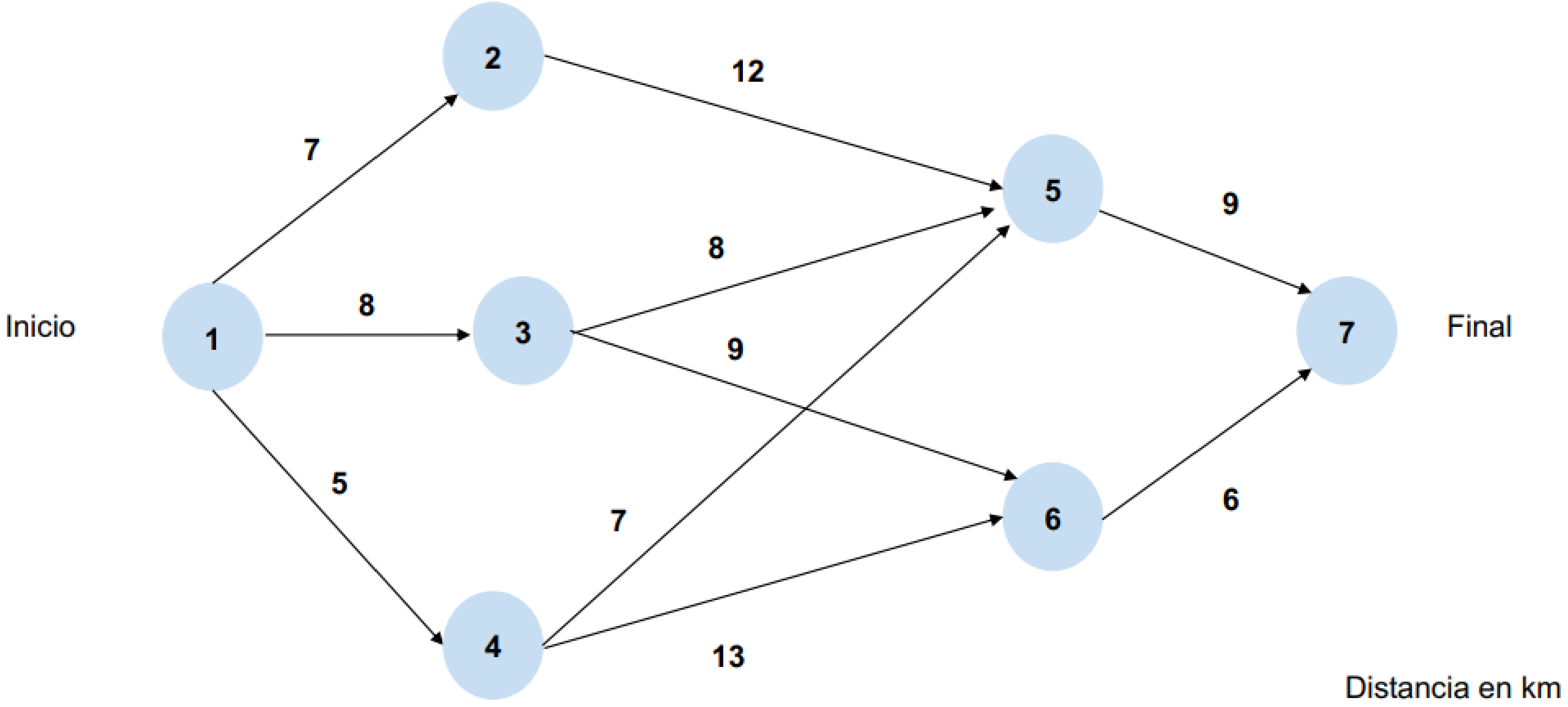
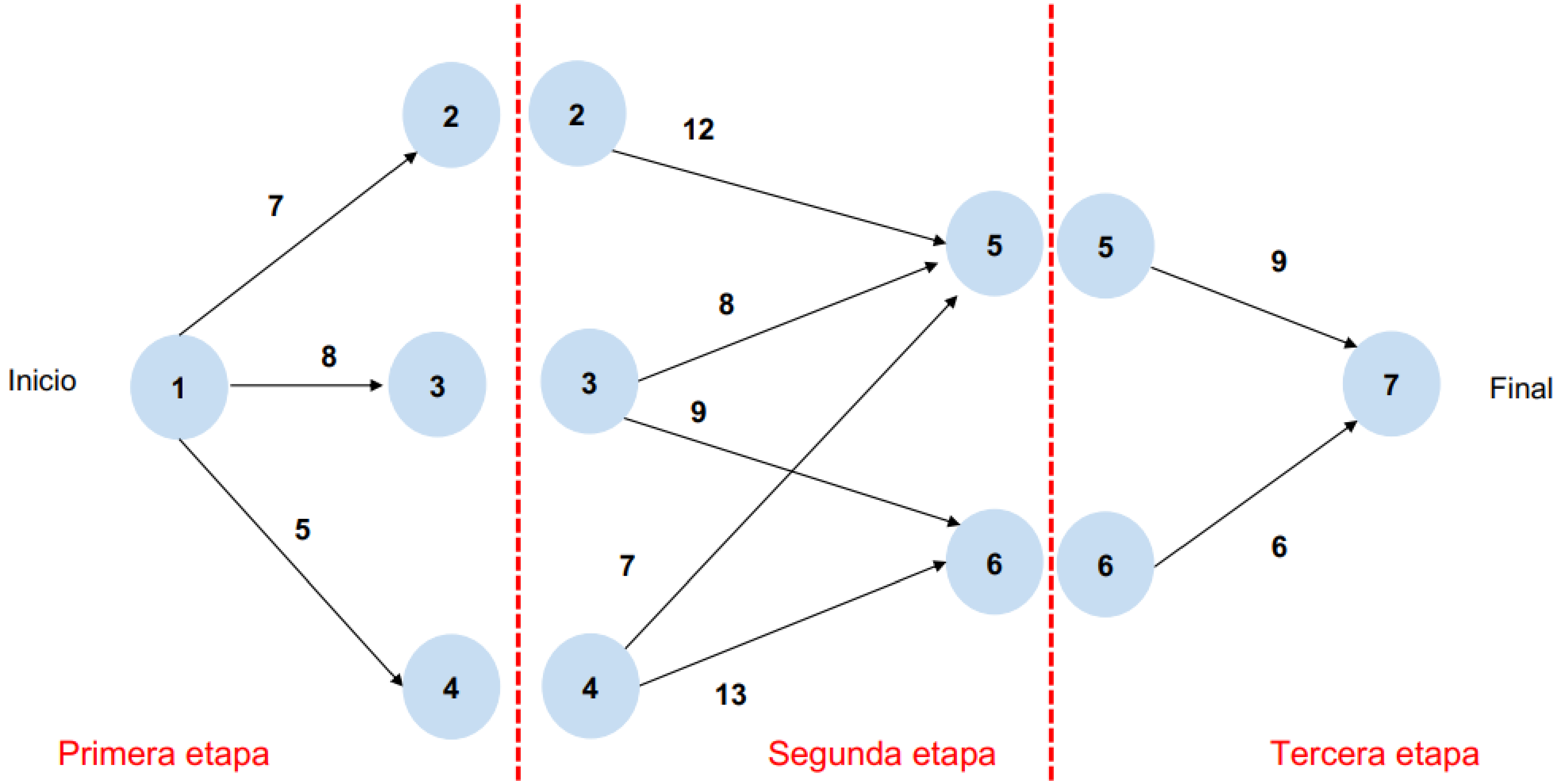
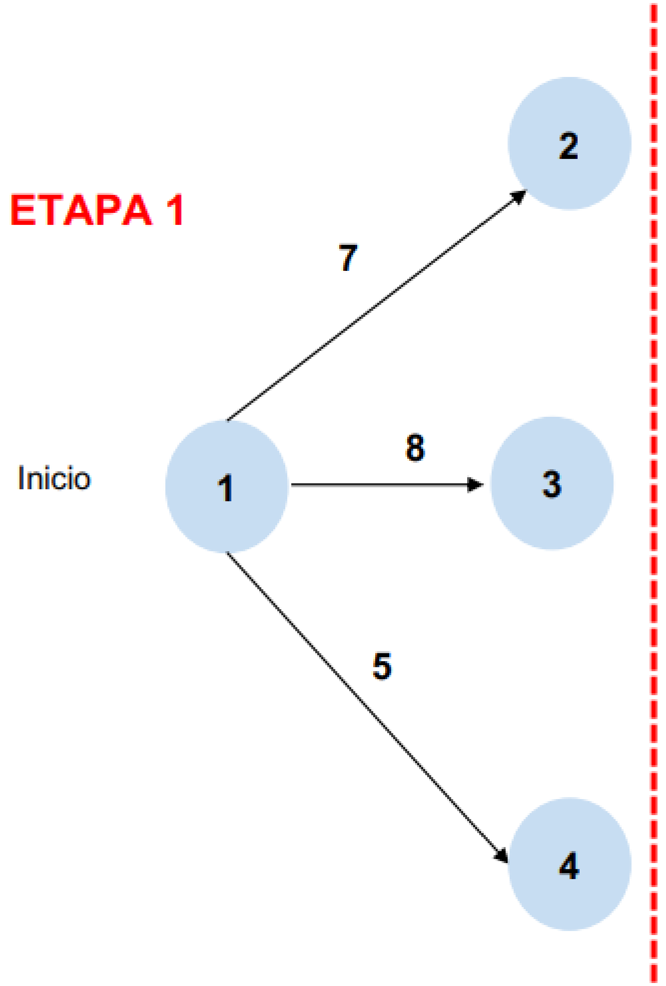
Programación Dinámica

Suponga que se desea seleccionar la ruta por carretera más corta entre dos ciudades. La red que se muestra en la figura proporciona las posibles rutas entre la ciudad de inicio en el nodo 1 y la ciudad de destino en el nodo 7.



Descomponer el problema en etapas



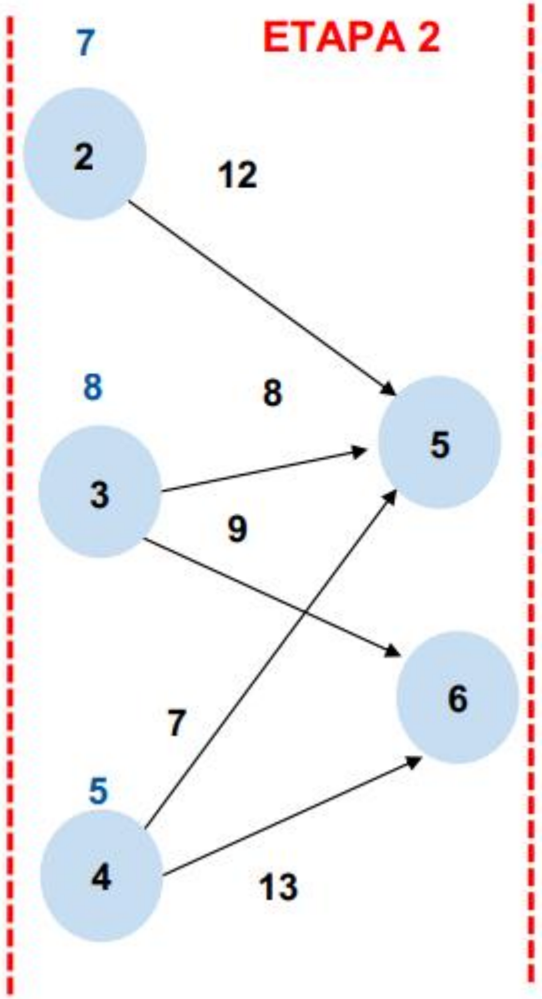


- La idea general para calcular la ruta más corta es calcular las distancias acumulativas más cortas a todos los nodos terminales de una etapa, y luego utilizarlas como dato de entrada a la etapa subsiguiente.
- Partiendo del nodo 1, la etapa 1 llega a tres nodos terminales (2, 3 y 4)

ETAPA 1

- Del nodo 1 al nodo 2 hay 7 km
- Del nodo 1 al nodo 3 hay 8km
- Del nodo 1 al nodo 4 hay 5 km

! La distancia más corta es de 1 → 4 con 5 km



La Etapa 2 tiene dos nodos terminales (5 y 6).

Se puede llegar al nodo 5 desde los nodos 2,3,4
Se puede llegar al nodo 6 desde los nodos 2, 3

Nodo terminal 5

$$(Distancia\ más\ corta\ al\ nodo\ 5)$$
$$= Min_{i=2,3,4}\{(Distancia\ más\ corta\ al\ nodo\ i) + (Distancia\ del\ nodo\ i\ al\ nodo\ 5)\}$$

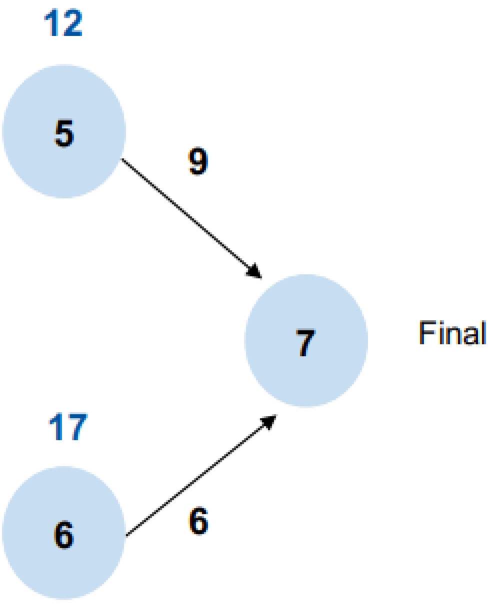
$$= min \begin{Bmatrix} 7 + 12 = 19 \\ 8 + 8 = 16 \\ 5 + 7 = 12 \end{Bmatrix}$$ = 12 km (desde el nodo 4)

Nodo terminal 6

$$(Distancia\ más\ corta\ al\ nodo\ 6)$$
$$= Min_{i=3,4}\{(Distancia\ más\ corta\ al\ nodo\ i) + (Distancia\ del\ nodo\ i\ al\ nodo\ 6)\}$$

$$= min \begin{Bmatrix} 8 + 9 = 17 \\ 5 + 13 = 18 \\ \end{Bmatrix}$$ = 17 km (desde el nodo 3)

ETAPA 3



La Etapa 3 tiene un nodo terminal (7).

Se puede llegar al nodo 7 desde los nodos 5 y 6

Nodo terminal 7

$$(Distancia\ más\ corta\ al\ nodo\ 7)$$
$$= Min_{i=5,6}\{(Distancia\ más\ corta\ al\ nodo\ i) + (Distancia\ del\ nodo\ i\ al\ nodo\ 7)\}$$

$$= min \begin{Bmatrix} 12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23 \\ \end{Bmatrix} = 21 \text{ km (desde el nodo 5)}$$

Ruta más corta

1 → 4 → 5 → 7

Con un total **de 21 km recorridos**.

- En el ejemplo anterior se utiliza la recursividad hacia adelante en la cual los cálculos proceden de la etapa 1 a la etapa 3

- El mismo ejemplo puede resolverse por medio de recursividad hacia atrás, comenzando en la etapa 3 y terminando en la etapa 1

- La recursividad hacia adelante y hacia atrás da la misma solución óptima.

- Aun cuando el procedimiento hacia adelante parece más lógico, la mayor parte de la literatura de programación dinámica utiliza la recursividad hacia atrás. La razón de esta preferencia es que, por lo general, la recursividad hacia atrás puede ser más eficiente desde el punto de vista computacional.

Recursividad hacia atrás

- Definición de la ecuación recursiva

$$f_i(x_i) = Min\ \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}$$

Sea

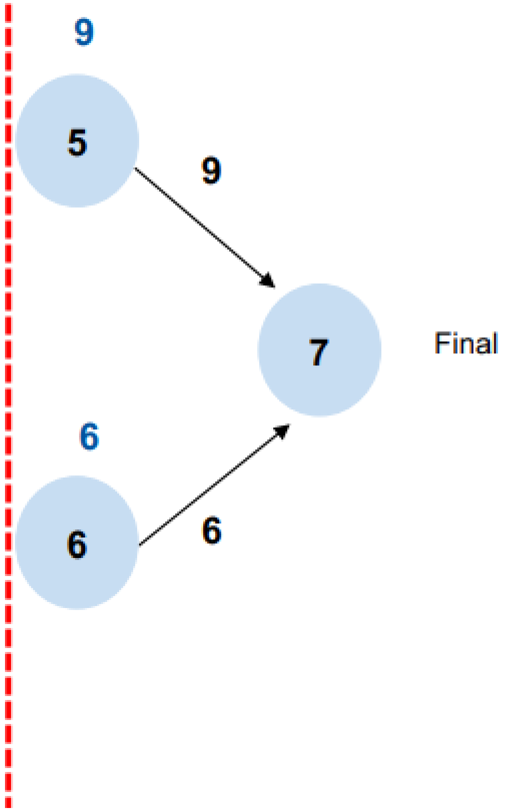
$i = etapas$

$x_i = estados\ de\ la\ etapa\ i \quad (nodos)$

$d(x_i, x_{i+1}) = distancia\ de\ del\ nodo\ \ x_i\ \ al\ \ nodo\ x_{i+1}$

$f_i(x_i) = distancia\ más\ corta\ en\ la\ etapa\ i$

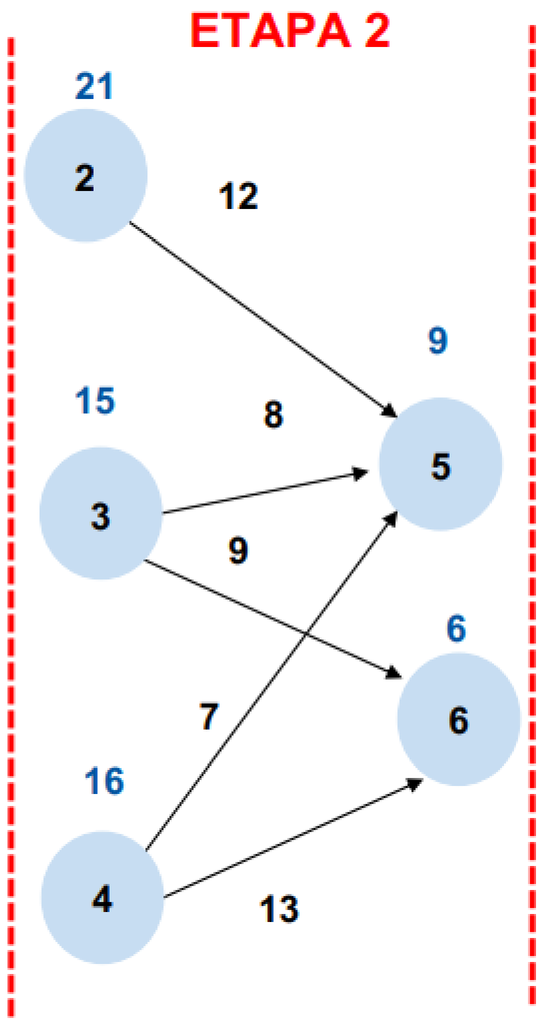
ETAPA 3



$x_4 = 7$

está conectado a 5 y 6 $(x_3 = 5\ y\ 6)$ exactamente con una ruta cada uno.

	$d(x_3, x_4)$	Solución Óptima	
x_3	$x_4 = 7$	$f_3(x_3)$	$x_4 *$
5	9	9	7
6	6	6	7

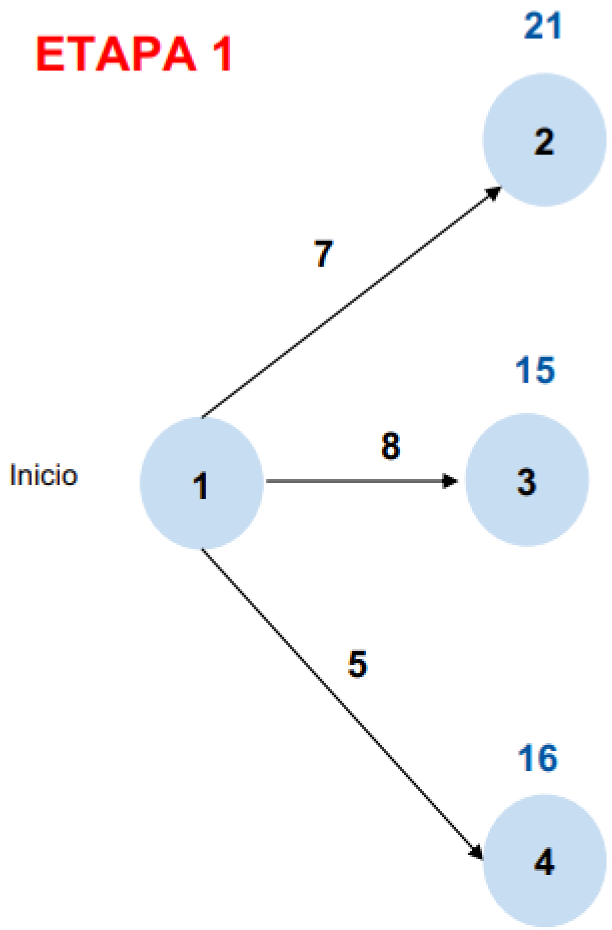


$x_3 = 5$ está conectado a 2, 3 y 4 $(x_2 = 2, 3\ y\ 4)$

$x_3 = 6$ está conectado a 3 y 4 $(x_2 = 3\ y\ 4)$

	$d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$		Solución Óptima	
x_2	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	$x_3 *$
2	12 + 9 = 21	-	21	5
3	8 + 9 = 17	9 + 6 = 15	15	6
4	7 + 9 =16	13 + 6 = 19	16	5

ETAPA 1



$x_2 = 2, 3, 6$ está conectado a 1 $(x_1 = 1)$

	$d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$			Solución Óptima	
x_1	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2*
1	7 + 21 = 28	8 + 15 = 23	5 + 16 = 21	21	4

SOLUCIÓN

Para recorrer una distancia de 21 km se debe tomar el camino por el nodo 4, luego por el nodo 5 y finalmente por el nodo 7

1 → 4 → 5 → 7

Independientemente del tipo o tamaño de un problema de programación dinámica, existen algunos términos y conceptos importantes que son inherentes a cada problema. Algunos de los más importantes son los siguientes:

1. El problema se puede dividir en **etapas**, cada una de las cuales requiere una **política de decisión**
2. Cada etapa tiene cierto número de **estados** asociados con su inicio
3. El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa
4. El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una **política óptima** para manejar el problema completo, es decir, una receta para elaborar la política de decisión óptima para cada etapa en cada uno de los estados posibles
5. **Principio de optimalidad**: las decisiones futuras para todas las etapas futuras constituyen una política optima independientemente de la política adoptada en todas las etapas precedentes.
6. El procedimiento de solución comienza cuando se determina la política óptima para la última etapa

7. Se dispone de una ecuación recursiva que identifica la política óptima para la etapa i dada la política óptima para la etapa i+1
8. Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución comienza al final y se mueve hacia atrás etapa por etapa para encontrar cada vez la política optima para esa etapa hasta que encuentra la política optima de la etapa inicial.