

# Laboratorio di Fisica 1

## R7: Misura di $|\vec{g}|$ mediante pendolo fisico

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

05/03/2024 – 12/03/2024

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato il modulo del campo gravitazionale locale ( $g$ ) studiando il moto oscillatorio di un pendolo fisico.

## 1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Sensore di rotazione	0.002 rad	N./A.	0.002 rad
Cronometro	0.001 s	N./A.	0.001 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Calibro ventesimale	0.05 mm	150.00 mm	0.05 mm
Metro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Altro	Descrizione/Note		
Rotore e asta	L'asta, fissata ortogonalmente al rotore ad un estremo, è libera di ruotare grazie ad esso.		
Tre cilindri (con masse e raggi distinti)	Presentano un foro centrale lungo l'asse di simmetria. Indicheremo con $A, B, C$ i tre cilindri e con $0, A + B, A + C, B + C$ e $A + B + C$ le loro combinazioni.		

## 2 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo le masse dei cilindri con la bilancia di precisione, i rispettivi diametri (interni ed esterni) con il calibro ventesimale e le altezze con il micrometro ad asta filettata.

2. Con il metro a nastro misuriamo la lunghezza dell'asta e con il micrometro il suo diametro, nonché il diametro del rotore.
3. Per ogni configurazione di cilindri:
  - (a) Fissiamo i cilindri scelti all'asta attraverso il foro centrale e ne misuriamo la distanza dal rotore.
  - (b) Avviamo l'acquisizione dell'angolo in funzione del tempo ( $\theta(t)$ , lo definiremo formalmente più avanti).
  - (c) Ruotando l'asta di un angolo prefissato  $\theta_0$ , sufficientemente piccolo<sup>1</sup>, diamo inizio al moto armonico del pendolo. Acquisiamo dati fino all'arresto del moto.

### 3 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

**Nota.** Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.

#### 3.1 Misura di $|\vec{g}|$

Di seguito riportiamo i momenti d'inerzia costanti per tutto l'esperimento:

Oggetto	$l$ (cm)	$\varnothing$ (mm)	$m$ (g)	$I$ ( $10^{-5}$ kg m <sup>2</sup> )
Asta	$60.0 \pm 0.1$	$5.94 \pm 0.01$	$45.82 \pm 0.01$	$568.5 \pm 1.5$
Rotore	N./A.	$13.41 \pm 0.01$	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

[\*] Valori dati

Di seguito riportiamo massa, diametri (interni ed esterni) e altezza dei tre cilindri.

$i$	$m_i$ (g)	$d_i^{\text{ext}}$ (mm)	$d_i^{\text{int}}$ (mm)	$h_i$ (mm)
A	$115.95 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.93 \pm 0.01$
B	$115.86 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.89 \pm 0.01$
C	$71.46 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$12.08 \pm 0.01$

Sappiamo che il moto armonico del pendolo segue la legge  $\sum \tau^{\text{ext}} = I\alpha$  in quanto compie una rotazione.

Detta  $D$  la posizione del centro di massa rispetto all'asse di rotazione, possiamo scrivere  $-Mg \sin(\theta)D = I\alpha$ .

---

<sup>1</sup>Questa condizione sull'angolo  $\theta_0$  ci permette di approssimare  $\sin(\theta) \sim \theta \quad \forall \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ .

Approssimando  $\sin(\theta)$  a  $\theta$  ed esprimendo l'accelerazione angolare come derivata seconda dello spostamento angolare:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \theta$$

da cui ricaviamo l'equazione della retta di regressione, il cui grafico verrà riportato in seguito.

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{MDg}{I}$$

Per valutare numericamente la consistenza dei risultati ottenuti con i valori  $G$  riportati in letteratura ( $G_l$ ), abbiamo calcolato, per ogni filo  $j$ , il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{G_{j_{\text{best}}} - G_{l_{\text{best}}}}{\delta G_j + \delta G_l}$$

Allora  $G_j$  è consistente con  $G_l$  se e solo se  $|\varepsilon| \leq 1$ .

$j$	$G_i$ (GPa)	Materiale	$G_l$ (GPa)	$\varepsilon$
1	$82 \pm 4$	Acciaio	$84 \pm 1$	-0.468
2	$80 \pm 3$			-0.978
3	$81 \pm 2$			-0.809
4	$45.4 \pm 1.1$	Rame	$43 \pm 1$	+1.174

L'inconsistenza non trascurabile tra i valori di  $G$  per il filo di rame potrebbe essere dovuta alle cattive condizioni del filo stesso.

Infatti, il gruppo di lavoro lo ha reciso da una bobina, per poi srotolarlo: queste operazioni hanno lasciato imperfezioni visibili ad occhio nudo sul filo, come, ad esempio, piccole piegature.

Riteniamo che queste imperfezioni potrebbero avere influenzato le nostre misure in maniera non trascurabile.

### 3.2 Misura dello smorzamento

Il moto del pendolo fisico è condizionato dalla presenza di attriti, che ne modificano ampiezza e periodo. In particolare, il modello matematico di riferimento è descritto da:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove  $\lambda$  è un parametro costante legato allo smorzamento del moto.

Figura 1: *I dati di un'acquisizione di  $\theta(t)$ , come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare  $\lambda$ , il gruppo di lavoro ha proceduto sull'acquisizione in *Figura 2* come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo calcolato  $|\theta(t)|$ . Ciò ci ha permesso di trattare massimi e minimi “insieme”, evitando di ripetere l'analisi.
2. Poi, abbiamo individuato i picchi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{|\theta_k|\}$  tali che  $|\theta_{i-1}| < |\theta_k| > |\theta_{j+1}|$ .
3. Per ogni picco, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come  $\delta t_{\text{picco}}$  la semidisersione  $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$ .
4. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata<sup>2</sup>) sulle nuove ordinate.

Figura 2:  *$|\theta(t)|$ , su scala logaritmica. Sono riportate anche le barre di errore. In blu, una retta di regressione lineare sull'intervallo di dati in nero.*

Dai risultati della regressione lineare emerge che

$$\lambda = (46.67 \pm 0.11) \text{ mHz}$$

Abbiamo infine valutato il contributo dell'attrito sul periodo dell'oscillazione. Vale infatti:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$$

---

<sup>2</sup> $\delta \ln |\theta|$ , infatti, varia molto, nonostante  $\delta |\theta|$  sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 3*.

dove  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  è la pulsazione misurata mentre  $\omega_0$  è la pulsazione in assenza di attrito.

Si ottiene allora:

$$T_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{T^2} + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

dove  $T$  è il periodo misurato mentre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  è il periodo in assenza di attrito.

Per questa acquisizione:

$$T = (409.96 \pm 0.04) \text{ ms}$$

da cui segue:

$$T_0 = (409.95 \pm 0.04) \text{ ms}$$

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.