

# Laboratorio di Fisica 1

## R11: Calorimetro ad azoto liquido

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

14/05/2024 – 21/05/2024

### Sommario

Mediante un calorimetro ad azoto liquido, il gruppo di lavoro ha misurato i calori specifici di quattro campioni; preliminarmente, è stato necessario determinare il calore latente di vaporizzazione dell'azoto.

## 0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Amperometro	0.001 A	N./A.	0.001 A
Voltmetro	0.01 V	N./A.	0.01 V
Cronometro	0.01 s	99.99 s	0.01 s
Bilancia di precisione	0.01 g	4000.0 g	0.01 g <sup>1</sup>

Altro	Descrizione/Note
Calorimetro	Quasi adiabatico, dotato di un coperchio con un foro centrale per potervi immergere i materiali e permettere la fuoriuscita dell'azoto gassoso.
Azoto liquido	Contenuto nel calorimetro
Resistenza	Fissata all'interno del coperchio, fornisce calore all'azoto liquido.
Videocamera	Utilizzata per acquisire i dati mostrati dal cronometro e della bilancia di precisione contemporaneamente.
Generatore	Fornisce corrente elettrica al circuito, composto dall'amperometro (collegato in serie) e da voltmetro e resistenza (collegati in parallelo).
Quattro campioni metallici noti	Li chiameremo $\Xi$ , $\Delta$ , $\aleph$ , $\nabla$ .

---

<sup>1</sup>Per misure superiori a 2000.00 g, la sensibilità è 0.1 g

# 1 Misurazione del calore latente di vaporizzazione dell'azoto

## 1.1 Esperienza e procedimento di misura

1. Posto il calorimetro sopra alla bilancia di precisione, avviamo l'acquisizione del filmato.
2. Dopo almeno una decina di secondi, accendiamo il generatore in modo da fornire calore all'azoto per mezzo della resistenza.
3. Passato circa un minuto, spegniamo il generatore per interrompere lo scambio di calore e, dopo almeno un'altra decina di secondi, terminiamo la registrazione del filmato.

Il gruppo di lavoro ha effettuato questi passaggi due volte: la prima, chiudendo il foro del coperchio con un tappo; la seconda, lasciandolo aperto.

## 1.2 Analisi dei dati raccolti

Essendo l'azoto a temperatura di ebollizione, possiamo esprimere la quantità di calore assorbito ( $\delta Q$ ) in un intervallo di tempo  $\Delta t$  in funzione della massa di azoto evaporata ( $-\Delta m$ ):

$$\delta Q = -\lambda_{\text{vap}} \Delta m$$

dove la costante  $\lambda_{\text{vap}}$  è detta "calore latente di vaporizzazione".

Assumendo le dispersioni di energia trascurabili, possiamo considerare  $\delta Q$  pari al calore sviluppato dalla resistenza per effetto Joule. Vale allora:

$$\delta Q = \mathcal{P} \cdot \Delta t = i \cdot \Delta V \cdot \Delta t$$

da cui:

$$\lambda_{\text{vap}} = \frac{i \cdot \Delta V \cdot \Delta t}{-\Delta m} = \frac{i \cdot \Delta V}{-\gamma} \quad \text{avendo posto} \quad \gamma = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Visionando il filmato, il gruppo di lavoro ha raccolto, a intervalli di tempo regolari, la misura della massa di azoto liquido indicata dalla bilancia.

Chiaramente, non essendo il calorimetro perfettamente adiabatico, la massa di azoto diminuisce anche quando la resistenza è spenta. Per tenere conto di questo errore sistematico, abbiamo effettuato tre regressioni lineari (con coefficienti angolari  $\alpha_1, \beta, \alpha_2$ ) sui dati raccolti, rispettivamente prima, durante e dopo lo scambio di calore con la resistenza. Abbiamo quindi calcolato:

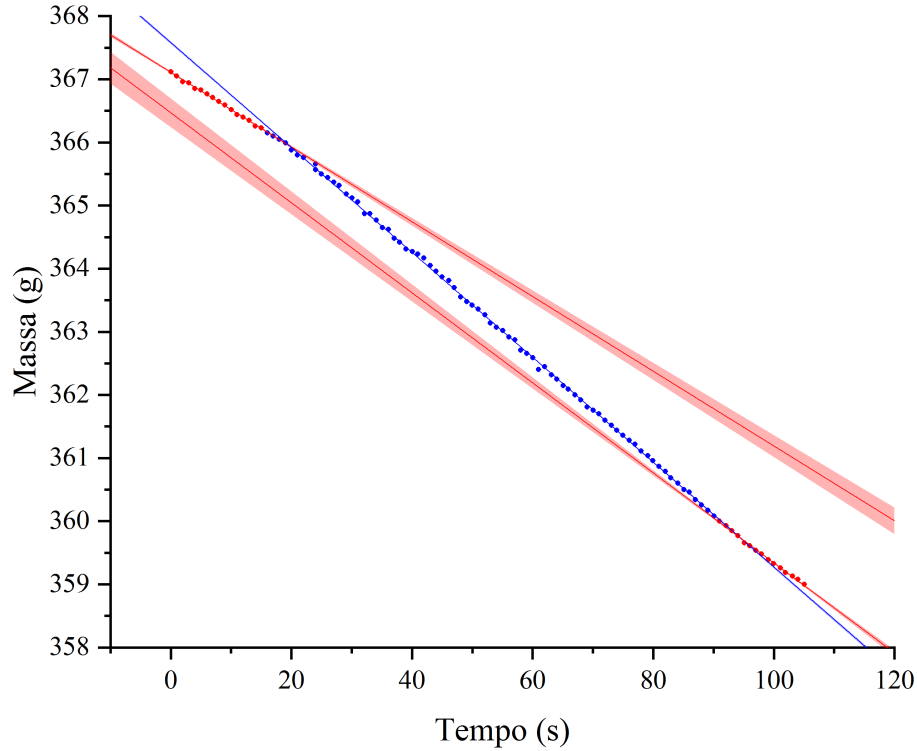
$$\gamma = \beta - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Di seguito riportiamo graficamente i dati acquisiti, accompagnati dalle rette di regressione e dai valori di  $\gamma$  e  $\lambda_{\text{vap}}$  calcolati.

**Nota.** La struttura di entrambi i grafici è la seguente:

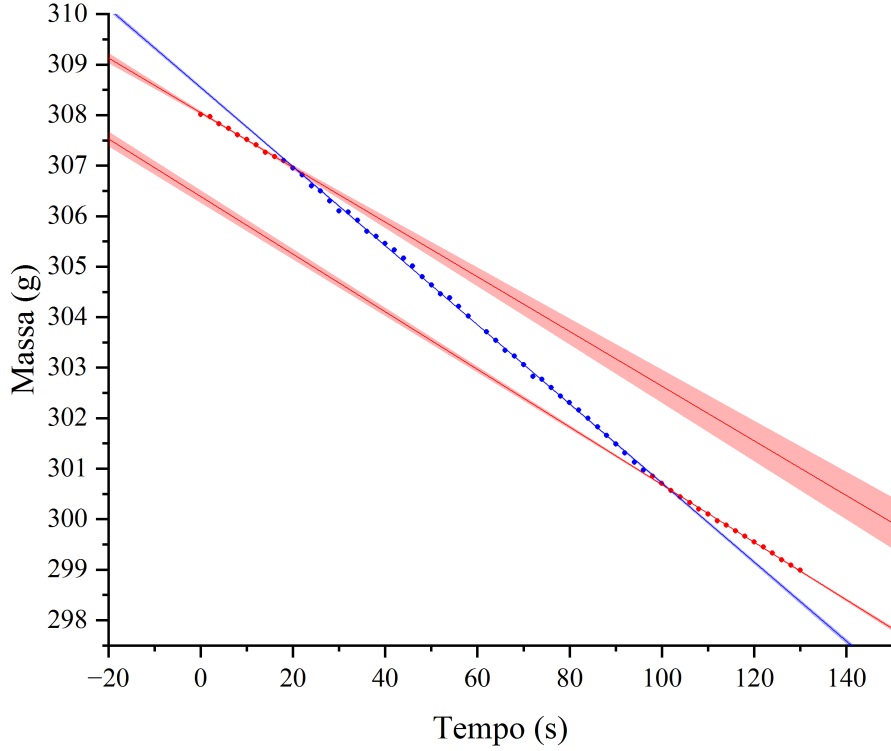
- in blu, i dati raccolti con la resistenza accesa e la relativa retta di regressione (la cui zona di incertezza, estremamente ridotta, è rappresentata in azzurro);
- in rosso, i dati raccolti con la resistenza spenta e le rispettive rette di regressione (le cui zone di incertezza sono rappresentate in rosa);
- sono inoltre riportate le barre di errore, tuttavia così ridotte da risultare invisibili.

### 1.2.1 Prima acquisizione: foro chiuso



$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,\text{chiuso}} &= (-59.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} & \beta_{\text{chiuso}} &= (-83.06 \pm 0.05) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} \\
 \alpha_{2,\text{chiuso}} &= (-71.3 \pm 0.5) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} & \gamma_{\text{chiuso}} &= (-17.8 \pm 0.6) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} \\
 \lambda_{\text{vap,chiuso}} &= (3.00 \pm 0.11) \cdot 10^5 \text{ J/kg}
 \end{aligned}$$

### 1.2.2 Seconda acquisizione: foro aperto



$$\alpha_{1,\text{aperto}} = (-54.1 \pm 0.6) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} \quad \beta_{\text{aperto}} = (-78.28 \pm 0.07) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$$

$$\alpha_{2,\text{aperto}} = (-57.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s} \quad \gamma_{\text{aperto}} = (-22.7 \pm 0.5) \cdot 10^{-6} \text{ kg/s}$$

$$\lambda_{\text{vap,aperto}} = (2.35 \pm 0.06) \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

### 1.3 Conclusioni

Confrontando i due valori di  $\lambda_{\text{vap}}$  così ottenuti con il valore atteso  $\lambda_{\text{vap,atteso}} = (1.9856 \pm 0.0001) \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , possiamo osservare che nessuno dei due risulta compatibile con quest'ultimo.

Per quanto riguarda  $\lambda_{\text{vap,chiuso}}$ , il gruppo di lavoro ritiene che la presenza del tappo abbia impedito a una parte significativa dell'azoto gassoso di fuoriuscire dal sistema, portando la bilancia a misurare, in ogni momento, una massa di azoto superiore a quella ancora in fase liquida. Ma, soprattutto, la variazione di massa rispetto al tempo misurata mediante la retta di regressione è risultata essere minore di quella effettiva, portandoci a sovrastimare  $\lambda_{\text{vap}}$  (ricordiamo che  $\gamma$  è al denominatore).

Questa ipotesi è sostenuta dal fatto che  $\lambda_{\text{vap,aperto}}$ , pur risultando anch'esso non compatibile, si avvicina di più al valore atteso  $\lambda_{\text{vap,atteso}}$ .

Invece, riguardo a  $\lambda_{\text{vap,aperto}}$ , il gruppo di lavoro ritiene che, durante l'esperienza, la resistenza non fosse completamente immersa nell'azoto liquido: di conseguenza, parte del calore sviluppato per effetto Joule è stato disperso, probabilmente assorbito dall'azoto già in fase gassosa. Di conseguenza, nell'analisi di cui sopra il calore assorbito dall'azoto è stato sovrastimato – e, con esso, anche  $\lambda_{\text{vap}}$ .

Questa ipotesi è sostenuta dal fatto che, come è possibile osservare dal grafico, la massa totale iniziale di azoto si aggira attorno ai 308 g, quando il calorimetro ne conteneva ben di più.

## 2 Misurazione dei calori specifici dei campioni

### 2.1 Esperienza e procedimento di misura

Per ogni campione:

1. Come prima, avviamo la cattura del filmato dopo aver posizionato il calorimetro sopra alla bilancia di precisione.
2. Dopo circa una decina di secondi, lo inseriamo nel calorimetro, che poi andiamo a chiudere tramite un tappo in plastica.
3. Attesi uno o due minuti per assicurarci che lo scambio di calore con l'azoto sia terminato, possiamo rimuovere il campione dal calorimetro e, successivamente, interrompere la registrazione.

### 2.2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

Analogamente a quanto detto prima, possiamo esprimere la quantità di calore assorbito dall'azoto come:

$$\delta Q = -\lambda_{\text{vap}} \Delta m$$

Considerando il calorimetro totalmente adiabatico, questa quantità di calore è pari a quella ceduta dal campione. Possiamo quindi scrivere:

$$\delta Q = cm\Delta T$$

Da queste due relazioni è possibile ricavare un'espressione per  $c$ :

$$c = \frac{\lambda(-\gamma)\Delta t}{m\Delta T} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

**Notazione.** Con il simbolo  $c$  non indichiamo direttamente il calore specifico, in quanto dipende dalla temperatura; intendiamo, invece, una sua "media" tra  $-196^\circ\text{C}$  e  $25^\circ\text{C}$ .

Oggetto	$L$ (cm)	$\varnothing$ (mm)	$m$ (g)	$I_{\text{CM}}$ ( $10^{-5} \text{ kg m}^2$ )
Asta	$60.0 \pm 0.1$	$5.94 \pm 0.01$	$45.82 \pm 0.01$	$568.5 \pm 1.5$
Rotore	N./A.	$13.41 \pm 0.01$	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

$i$	$m_i$ (g)	$d_i^{\text{ext}}$ (mm)	$d_i^{\text{int}}$ (mm)	$h_i$ (mm)	$I_{\text{CM},i}$ ( $\text{mg m}^2$ )
A	$115.95 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.93 \pm 0.01$	$10.62 \pm 0.03$
B	$115.86 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.89 \pm 0.01$	$10.59 \pm 0.03$
C	$71.46 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$12.08 \pm 0.01$	$5.047 \pm 0.018$

[\*] *Valori dati*

Il periodo dell'oscillazione è stato misurato individuando  $N + 1$  zeri consecutivi di  $\theta(t)$ , diciamo  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ . Allora, poiché tra uno zero e l'altro corre metà periodo, è possibile calcolare  $T$  in questo modo:  $T = \frac{2}{N}(t_N - t_0)$

Il gruppo di lavoro ha scelto  $N$  di volta in volta, in modo tale che fosse proporzionale al numero di oscillazioni compiute dal pendolo prima di fermarsi. Complessivamente,  $N$  ha assunto valori da 30 a 180.

Come descritto sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione  $\Gamma$ , i valori di  $\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}}$  e  $\frac{T^2}{4\pi^2}$ , riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di  $g$  come coefficiente angolare di una retta di regressione.

Figura 1: *In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)*

- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti,  $(0.003 \pm 0.005) \text{ m}$  è compatibile con  $0 \text{ m}$ .
- Il valore di  $g$  atteso è  $9.806 \text{ m/s}^2$ ; si può osservare facilmente che il valore misurato,  $(9.68 \pm 0.13) \text{ m/s}^2$ , è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di  $g$  compatibile con quella attesa.



## 2.3 Misura dello smorzamento

*In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione  $\Gamma = \{\}$ , dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.*

*Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.*

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima,  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

dove  $\lambda$  è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto,  $\omega$ , è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}}.$$

Figura 2: *Parte dei dati di un'acquisizione di  $\theta(t)$  con  $\Gamma = \{\}$ , come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare  $\lambda$ , il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{\theta_k\}$  tali che  $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$ .
2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come  $\delta t_{\text{picco}}$  la semidispersione  $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$ .
3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata<sup>1</sup>) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio  $-\lambda$ .

---

<sup>1</sup> $\delta \ln |\theta|$ , infatti, varia molto, nonostante  $\delta |\theta|$  sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con  $\theta$  cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di  $\lambda$ :  $\lambda_{\min}$  e  $\lambda_{\max}$ . Abbiamo scelto di porre  $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ .

Figura 3:  $\ln|\theta(t)|$  di massimi e minimi, su scala logaritmica (per  $\Gamma = \{\}$ ). Sono riportate anche le barre di errore sull'ordinata. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.

Poiché l'obiettivo è calcolare  $g$ , la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione  $\Gamma$ , si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.

Figura 4: In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)

I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di  $g$  risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.