Pag. 22 n. 3
Punto 1.

$$W = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Determiniamo una base di W. Riducendo a scala, otteniamo che il rango della matrice 2 e i perni corrispondono ai primi due vettori. Una base di W è allora:

$$B_W = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Punto 2. Determiniamo equazioni cartesiane per B_W:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x_1\\1 & 1 & x_2\\1 & 0 & x_3\\0 & 1 & x_4\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x_1\\0 & -1 & x_3 - x_1\\0 & 0 & x_2 - x_1\\0 & 0 & x_4 + x_3 - x_1\end{array}\right]$$

Allora:

$$W = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_1 = 0 \wedge x_4 + x_3 - x_1 = 0\right\}$$

$$U : \begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\\x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\end{cases}$$

$$U = \left\{\begin{bmatrix}2x_3\\3x_3 - x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$U : x_3\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Punto 4. $U + W = ?$

$$U + W = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&1&2&0\\1&1&3&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Il rango è 3, quindi l'ultimo vettore è combinazione linerare degli altri La dimensione di $U+W$ è 3, e di conseguenza non può essere scritto come somma diretta degli altri.

$$\mathbb{R}^4$$

$$W = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\k\\k\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\h\\h\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$U = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\h\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\k\\h\\1\end{bmatrix}\right)$$

12.

$$\begin{aligned} T : & \mathbb{R}^3 && \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} && \longmapsto \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} && \longmapsto \begin{bmatrix}0\\3\\4\\1\end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} && \longmapsto \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} \end{aligned}$$