

Laboratorio di Fisica 1

R8: Misura di $|\vec{g}|$ mediante rotolamento puro

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

19/03/2024 – 9/04/2024

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato indirettamente il modulo del campo gravitazionale locale (g) studiando il moto di rotolamento di un corpo rigido.

0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

| Strumento di misura | Soglia | Portata | Sensibilità |
|---|--|--------------------|-------------|
| Sistema a contatti elettrici con contatore di impulsi | 1 μ s | 99 999 999 μ s | 1 μ s |
| Metro a nastro | 0.1 cm | 300.0 cm | 0.1 cm |
| Calibro ventesimale | 0.05 mm | 150.00 mm | 0.05 mm |
| Bilancia di precisione | 0.01 g | 4200.00 g | 0.01 g |
| Cellulare come goniometro | 0.1° | 45.0° | 0.1° |
| Altro | Descrizione/Note | | |
| Piano inclinato | Costituito da guide che permettono al campione di cadere da un contatto elettrico all'altro con un moto di rotolamento puro. | | |
| Campione | Corpo rigido con simmetria assiale, assimilabile a una combinazione di cilindri e tronchi di cono coassiali. | | |
| Cuscinetto | Posto a coprire il secondo contatto elettrico, attutisce l'impatto del campione contro di esso. | | |
| Brugola e Lucidi | Utili per cambiare, rispettivamente, la distanza tra i contatti e l'angolo di inclinazione delle guide. | | |

1 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo la massa del campione con la bilancia di precisione e, con il calibro ventesimale, tutti i diametri e le altezze necessarie al calcolo del suo momento d'inerzia.
2. Fissiamo la distanza L tra i due contatti elettrici e l'angolo θ di inclinazione delle guide rispetto a un piano normale a \vec{g} . Allora, acceso e impostato adeguatamente il contatore di impulsi, misuriamo 50 volte il tempo di caduta del campione $t_{L,\theta}$.
3. Ripetiamo il punto precedente per svariate combinazioni di L e θ .

2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

2.1 Calcolo del momento d'inerzia del campione

Essendo il momento d'inerzia additivo, abbiamo calcolato I_{CM} sommando i singoli momenti d'inerzia rispetto al comune asse di simmetria dei cilindri e dei tronchi di cono che compongono il campione, dove la massa di ciascuno di essi è stata facilmente calcolata assumendo la densità del campione uniforme. Di seguito riportiamo tali misure:

| # | Forma | h (mm) | $d_{1,2}$ (mm) | I (10^{-6} kg m ²) |
|----|----------------|------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | Cilindro | 30.45 ± 0.05 | 49.90 ± 0.05 | 154.6 ± 1.8 |
| 2 | Tronco di cono | 5.95 ± 0.10 | 49.90 ± 0.05 29.40 ± 0.05 | 13.7 ± 0.5 |
| 3 | Cilindro | 9.20 ± 0.10 | 25.85 ± 0.05 | 3.36 ± 0.08 |
| 4 | Cilindro | 10.80 ± 0.05 | 18.65 ± 0.05 | 1.07 ± 0.02 |
| 5 | Tronco di cono | 4.25 ± 0.05 | 34.55 ± 0.05 49.90 ± 0.05 | 11.8 ± 0.4 |
| 6 | Cilindro | 52.95 ± 0.05 | 49.90 ± 0.05 | 269 ± 3 |
| 7 | Tronco di cono | 4.25 ± 0.05 | 49.90 ± 0.05 36.35 ± 0.05 | 12.6 ± 0.4 |
| 8 | Cilindro | 10.80 ± 0.05 | 18.75 ± 0.05 | 1.09 ± 0.02 |
| 9 | Cilindro | 9.25 ± 0.10 | 25.90 ± 0.05 | 3.41 ± 0.08 |
| 10 | Tronco di cono | 5.95 ± 0.10 | 29.10 ± 0.05 49.90 ± 0.05 | 13.5 ± 0.5 |
| 11 | Cilindro | 30.40 ± 0.05 | 49.90 ± 0.05 | 154.4 ± 1.8 |

- Massa totale: $M = (2214.57 \pm 0.01)$ g

- Volume totale: $V = (2.654 \pm 0.017) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$
- Densità media: $\rho = (8.34 \pm 0.05) \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$
- Momento d'inerzia totale: $I_{\text{CM}} = (6.38 \pm 0.09) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

2.2 Calcolo di g mediante la dinamica del corpo rigido

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale solidale al piano inclinato, con origine nel punto di partenza del campione, asse x parallelo alle guide e asse y entrante nel piano inclinato, possiamo scrivere la legge del moto del centro di massa e le equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido:

$$x_{\text{CM}}(t) = \frac{1}{2} a_{\text{CM}} t^2$$

$$\begin{cases} Mg \sin \theta - F_s = M a_{\text{CM}} \\ Mg \cos \theta - F_n = 0 \\ R M g \sin \theta = (I_{\text{CM}} + M R^2) \alpha \end{cases}$$

dove R è il raggio di contatto, \vec{F}_s è la forza di attrito statico tra il campione e le guide, mentre \vec{F}_n è la reazione vincolare delle guide, normale al piano.

Per poter descrivere il moto del campione come di rotolamento puro, dobbiamo assicurarci che $F_s \leq \mu_s F_n$, con μ_s il coefficiente di attrito statico tra il corpo rigido e le guide. Se questa condizione è verificata, possiamo utilizzare la relazione:

$$\alpha = \frac{a_{\text{CM}}}{R}$$

Risolvendo il sistema lineare e la disequazione di cui sopra si ottiene:

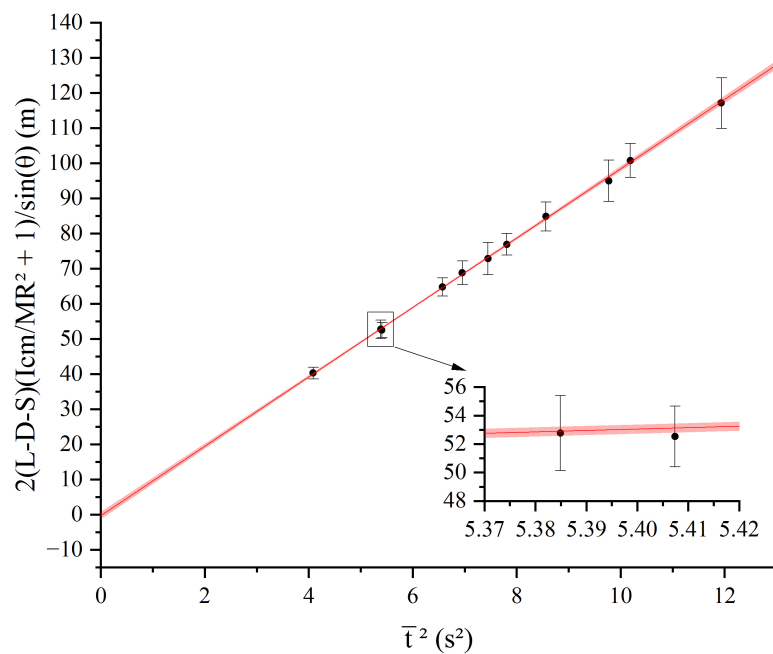
$$\begin{cases} a_{\text{CM}} = \frac{M R^2}{I_{\text{CM}} + M R^2} g \sin \theta \\ F_n = M g \cos \theta \\ F_s = \frac{I}{I + M R^2} M g \sin \theta \\ 0 \leq \alpha \leq \arctan \left(\mu_s \left(\frac{M R^2}{I_{\text{CM}}} + 1 \right) \right) \end{cases}$$

Ricordando ora che $L = x_{\text{CM}}(\bar{t}_{L,\theta}) + D + S$, dove D è il diametro più esterno del campione e S è lo spessore del cuscinetto, possiamo ricavare:

$$\frac{2(L - D - S)}{\sin \theta} \left(\frac{I_{\text{CM}}}{M R^2} + 1 \right) = g \cdot \bar{t}_{L,\theta}^2$$

Possiamo pertanto determinare il modulo di \vec{g} mediante una regressione lineare pesata¹:

¹La scelta di una regressione lineare *pesata* è giustificata dal fatto che gli errori sull'ascissa, per quanto ridotti, sono diversi fra di loro.



*In rosso la retta di regressione, in rosa la sua regione di incertezza.
Nel grafico principale, le barre di errore lungo l'ascissa, date le loro dimensioni, non sono visibili.*

Di seguito riportiamo i risultati della regressione lineare:

- Coefficiente angolare (g) = $(9.9 \pm 0.5) \text{ m/s}^2$
- Intercetta = $(0 \pm 3) \text{ m}$ (compatibile con 0, come ci si aspettava)