Laboratorio di Fisica 1
R5: Misura del modulo di scorrimento di un filo

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

22/11/2023 – 29/11/2023

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato la costante di torsione di diversi fili, in modo da ricavarne il modulo di scorrimento.

1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	**Soglia**	**Portata**	**Sensibilità**
Sensore di rotazione	0.002 rad	N./A.	0.002 rad
Cronometro	0.001 s	N./A.	0.001 s
Metro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Calibro ventesimale	0.05 mm	150.00 mm	0.05 mm
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g

Altro	**Descrizione/Note**
Quattro fili inestensibili	Distinguibili per diametro e materiale
Tre cilindri (con masse e raggi distinti)	Indicheremo con A, B, C i tre cilindri e con 0, $A+B$, $A+C$, $B+C$ e $A+B+C$ le loro combinazioni.
Pendolo di torsione	Formato da un disco che ruotando provoca una deformazione elastica al filo ad esso fissato lungo l'asse di rotazione.

2 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo la massa dei cilindri con la bilancia di precisione e il loro diametro con il calibro ventesimale.

2. Con il metro a nastro e il micrometro ad asta filettata misuriamo rispettivamente la lunghezza e il diametro dei fili.

3. Per ogni filo e per ogni combinazione di cilindri:
   (a) Fissiamo il filo al pendolo in modo tale che l'estremità superiore sia vincolata al disco rotante; posizioniamo poi i cilindri sopra al disco, con l'asse centrale allineato a quello del disco stesso.
   (b) Avviamo l'acquisizione dell'angolo in funzione del tempo (rispetto alla posizione di equilibrio);
   (c) Ruotando il disco di un angolo prefissato, diamo inizio al moto armonico del pendolo. Acquisiamo dati fino all'arresto del moto.

3 Analisi dei dati raccolti

Di seguito riportiamo massa, diametro e momento d'inerzia[1] dei tre cilindretti:

i	m_i (g)	d_i (cm)	I_i ($10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$)
A	344.07 ± 0.01	9.045 ± 0.005	3.519 ± 0.004
B	429.65 ± 0.01	5.985 ± 0.005	1.924 ± 0.003
C	473.02 ± 0.01	5.200 ± 0.005	1.599 ± 0.003

Fissiamo un sistema di riferimento inerziale, solidale all'apparato, a coordinate cilindriche[2] (θ, r, h), con versore $\hat{z}$ giacente lungo l'asse di rotazione del filo (antiparallelo a $\vec{g}$), origine O e versore $\hat{x}$ contenuti nel piano sul quale vengono appoggiati i cilindri. Sia inoltre P un punto materiale qualunque solidale all'estremità superiore del filo (e quindi anche ai cilindretti) che, con il filo a riposo, si trovi sul piano xOz. Allora, *trascurando gli attriti*, il moto di P è caratterizzato da (per θ_0 sufficientemente piccolo):

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$$

La pulsazione ω di questo moto armonico dipende dal momento d'inerzia complessivo I_{tot} dei corpi solidali all'estremità mobile del filo, nonché dalle caratteristiche del filo stesso. Queste ultime vengono riassunte nella *costante torsionale* C. In particolare:

$$C = I_{\text{tot}}\,\omega^2$$

[1] Il momento d'inerzia è stato calcolato approssimando questi oggetti a cilindri di densità uniforme e raggio e altezza costanti, in rotazione attorno ad un asse verticale passante per il loro centro:

$$I_i = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} m_i d_i^2$$

Supponendo gli errori su massa e diametro piccoli, casuali e indipendenti, abbiamo calcolato δI_i secondo la tradizionale propagazione degli errori.

[2] Le coordinate di un punto P in questo sistema di riferimento sono definite come segue: detta $\vec{r}$ la proiezione di $\overrightarrow{OP}$ sul piano per O normale a $\hat{z}$, θ è l'angolo piano orientato fra $\hat{x}$ e $\vec{r}$, r è la norma di $\vec{r}$ e h è la posizione lungo $\hat{z}$ della proiezione di P su $\hat{z}$ stesso.

Detto $T = 2\pi/\omega$ il periodo del moto armonico, si ottiene:

$$I_{\text{tot}} = \frac{C}{4\pi^2} T^2$$

Detto I_0 il momento d'inerzia che rimane costante[3], al variare dei cilindretti posizionati sopra al filo, si ha:

$$I_{\text{cilindretti}} = \frac{C}{4\pi^2} T^2 - I_0$$

Da questa dipendenza lineare, tramite una regressione lineare pesata, è possibile ottenere una stima piuttosto accurata del valore di C.

j	l_j	d_j	ξ_j	C_j	G_j	materiale
1						
2						
3						
4						

4 Conclusioni

[3] I_0 include, ad esempio, il momento d'inerzia del disco su cui era possibile appoggiare i cilindretti, nonché quello della parte mobile del sensore di rotazione.

D'ora in avanti indicheremo con ξ la costante $\frac{Nr^2 \ln 2}{4T_{\frac{1}{2}}}$ (unità di misura: m^2/s). La relazione diventa allora:

$$\overline{x_i} = \xi d_i^{-2} + \overline{x_0}$$

Per ogni distanza d_i, il gruppo di lavoro ha acquisito ripetutamente il valore di x_i per un tempo complessivo di circa un'ora[4] (3657 s); ha poi acquisito nuovamente x_4 col contatore Geiger rivolto in direzione opposta, per avere una stima diretta di $\overline{x_0}$.

Di seguito riportiamo gli istogrammi dei dati così raccolti, assieme ai valori attesi, calcolati mediante la distribuzione teorica.

Come si può osservare da questi grafici, i risultati ottenuti si allineano molto bene alle distribuzioni di Poisson. Per valutare l'accuratezza della nostra stima di $\overline{x_0}$, possiamo effettuare una regressione lineare (pesata) utilizzando l'equazione di x_i in funzione di d_i^{-2}:

$$\overline{x_i} = \xi d_i^{-2} + \overline{x_0}$$

Di seguito riportiamo una tabella con i dati utilizzati per la regressione lineare, assieme a un grafico della retta di regressione stessa.

i	d_i (cm)	d_i^{-2} (m^{-2})	$\overline{x_i}$
1	9.5 ± 0.1	111 ± 2	0.809 ± 0.015
2	10.3 ± 0.1	94.3 ± 1.8	0.737 ± 0.014
3	26.5 ± 0.1	14.24 ± 0.11	0.272 ± 0.009
4	41.2 ± 0.1	5.89 ± 0.03	0.219 ± 0.008

Risultati della regressione lineare:

- $\overline{x_0} = 0.188 \pm 0.006$
- $\xi = (5.70 \pm 0.13) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Per valutare numericamente la consistenza tra i due valori di $\overline{x_0}$ ottenuti, abbiamo calcolato il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{(x_{0\,\mathrm{misurato}})_{\mathrm{best}} - (x_{0\,\mathrm{misurato}})_{\mathrm{best}}}{\delta x_{0\,\mathrm{misurato}} + \delta x_{0\,\mathrm{misurato}}}$$

Allora $x_{0\,\mathrm{misurato}}$ e $x_{0\,\mathrm{misurato}}$ sono consistenti se e solo se $|\varepsilon| \leq 1$.

Nel nostro caso, $\varepsilon = 1.33$. Il gruppo di lavoro ha ipotizzato che questa inconsistenza (comunque contenuta, seppur non trascurabile) fra le due misure possa essere ragionevolmente giustificata dalla difficoltà incontrata nel ridurre al minimo le oscillazioni in direzione perpendicolare a $\vec{g}$; considerato inoltre che la posizione dei fototraguardi non era ottimale, ciò potrebbe avere ulteriormente

[4]Abbiamo scelto deliberatamente di acquisire esattamente 3657 secondi in quanto 3657 minimizza la funzione $f(x) = \left\{\frac{x}{\pi}\right\} = \frac{x}{\pi} - \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor$ meglio di 3600.

influenzato la distribuzione dei tempi. È in effetti possibile osservare che le distribuzioni da noi ottenute non sono, il più delle volte, del tutto simmetriche: la moda sembra essersi spostata leggermente a sinistra – un possibile sintomo dell'influenza di un errore sistematico sulle misure.