Geometria - Esercizi 4

Riccardo Bergamaschi

19/10/2023

Esercizio 1

1. $AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, BA non definito

2. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 26 & -52 \\ 13 & -26 \end{bmatrix}$

3. $AB = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 15 & -3 & 9 & 33 & -6 \\ -10 & 2 & -6 & -22 & 4 \\ -20 & 4 & -12 & -44 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$

4. $AB = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 12 \\ 8 & -2 & 6 \\ -8 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 17 & 5 \end{bmatrix}$

5. $AB = \begin{bmatrix} -2i+4 & 1+5i & 6-4i \\ 4i & i-2 & 1+2i \\ 4-6i & 1+4i & 4-i \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} i-1 & 6-i & -1+3i \\ 0 & 4-4i & 2-4i \\ 2i & 5-6i & 1-i \end{bmatrix}$

Esercizio 3

1. Poiché A e B sono ortogonali, $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = A$ e $\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = B$.

   Allora $\left((AB)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = AB$, e quindi AB è anch'essa ortogonale. $\blacksquare$

2. A è invertibile se e solo se esiste $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversa di A, ovvero tale che $AB = BA = \mathrm{Id}_n$. Essendo A ortogonale, per definizione A^{T} è tale per cui $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = \mathrm{Id}_n$. Di conseguenza, A^{T} è l'inversa di A, ovvero $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$. In particolare, A è invertibile. $\blacksquare$

3. $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$ è ortogonale, poiché $\left(\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. $\blacksquare$

Esercizio 4

1. Poiché A e B sono unitarie, $(A^*)^{-1} = A$ e $(B^*)^{-1} = B$.

   Allora $\left((AB)^*\right)^{-1} = (A^*B^*)^{-1} = (A^*)^{-1}(B^*)^{-1} = AB$, e quindi AB è anch'essa unitaria. ■

2. A è invertibile se e solo se esiste $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ inversa di A, ovvero tale che $AB = BA = \mathrm{Id}_n$. Essendo A unitaria, per definizione A^* è tale per cui $AA^* = A^*A = \mathrm{Id}_n$. Di conseguenza, A^* è l'inversa di A, ovvero $A^* = A^{-1}$. In particolare, A è invertibile. ■

3. $A^{-1} = A^*$ è ortogonale, poiché $\left((A^*)^*\right)^{-1} = A^{-1} = A^*$. ■

Esercizio 5

1. $AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathrm{Id}_2$, quindi A non è ortogonale.

2. $BB^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_2$, quindi B è ortogonale.

3. $$\begin{aligned} C\,C^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_3 \end{aligned}$$

   Quindi C è ortogonale.

4.
$$DD^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_4$$

Quindi D è ortogonale.

Esercizio 6

W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{K})$ su $\mathbb{K}$ solo se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare.

- W è chiuso rispetto alla somma. Siano $A_1, A_2 \in W$; allora:
$$BA_1 = 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})} \wedge BA_2 = 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})}$$
$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2 = 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})} + 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})}$$
Quindi $A_1 + A_2 \in W$.
- W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare. Siano $A \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$; allora $BA = 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})}$ e:
$$B(\lambda A) = \lambda BA = \lambda 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})}$$
Quindi $\lambda A \in W$.

Da queste due considerazioni, segue, per definizione, la tesi. ■

Esercizio 7

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(B^{-1}AB) &= \mathrm{Tr}(B^{-1})\,\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(B^{-1})\,\mathrm{Tr}(B)\,\mathrm{Tr}(A) \\ &= \mathrm{Tr}(B^{-1}B)\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_n)\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizio 8

Essendo A e B ortogonali, valgono:

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = A \quad \wedge \quad \left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = B \quad \wedge \quad B^{-1} = B^{\mathrm{T}}$$

Allora:

$$\begin{aligned}\left(\left(BAB^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} &= \left(\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(BA^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \\ &= \left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} B^{-1} = BAB^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Quindi anche BAB^{T} è ortogonale. ■

Esercizio 9

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det\left[\lambda A^1, \lambda A^2, \dots, \lambda A^n\right] \\ &= \lambda \det\left[A^1, \lambda A^2, \dots, \lambda A^n\right] \\ &= \lambda^2 \det\left[A^1, A^2, \dots, \lambda A^n\right] \\ &= \dots \\ &= \lambda^n \det\left[A^1, A^2, \dots, A^n\right] \\ &= \lambda^n \det(A)\end{aligned}$$

■

Esercizio 10

A è antisimmetrica se e solo se $A^{\mathrm{T}} = -A$. Allora:

$$\det(A) = \det\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det(A)$$

Essendo n dispari, $(-1)^n = -1$. Otteniamo dunque l'equazione:

$$\begin{aligned}\det(A) &= -\det(A) \\ 2\det(A) &= 0 \\ \det(A) &= 0\end{aligned}$$

Da cui la tesi. ■

Esercizio 11

1. $\det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 8 + 3 = 11$
2. $\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 17$

3.

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & -7\\ 0 & 3\end{bmatrix} = 3$$

Esercizio 12

Una matrice quadrata è singolare se e solo se ha determinante 0.

$$\det\begin{bmatrix}2a & 1 & 3\\ -a & 5 & 1\\ 2 & 6 & 4\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}5a & -14 & 0\\ -a & 5 & 1\\ 4a+2 & -14 & 0\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}5a & -14\\ 4a+2 & -14\end{bmatrix}$$

$$= -14(5a) - (-14)(4a+2) = -14(a-2)$$

Allora, la matrice è quadrata se e solo se $-14(a-2) = 0$, ovvero $a = 2$.

Esercizio 13

$0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}$ è una matrice diagonale ma non invertibile; infatti:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad 0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} A = 0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} \neq \mathrm{Id}_2$$

Esercizio 14

$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ è antisimmetrica e invertibile; infatti:

$$\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$$

Esercizio 15

In quanto diagonale, $0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}$ è anche simmetrica. Inoltre, abbiamo già dimostrato che essa non è invertibile.

Esercizio 16

Identico all'esercizio 13

Esercizio 17

Identico all'esercizio 15

Esercizio 18

Ogni matrice reale simmetrica è anche, vista come matrice complessa, Hermitiana. Infatti, $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e, fissata $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, vale $A^* = \overline{A^{\mathrm{T}}} = \overline{A} = A$. Di conseguenza, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è Hermitiana (in quanto simmetrica) e invertibile (poiché $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$).

$$\det A = \det\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5\\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 10 & -3 & 3 & 5 & 2\\ 5 & 0 & 3 & 2 & 1\\ -13 & 1 & -8 & -7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-13 & 1 & -8 & -7 & -5\\ 10 & -3 & 3 & 5 & 2\\ 5 & 0 & 3 & 2 & 1\\ -4 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-45 & 1 & -8 & -39 & -5\\ 22 & -3 & 3 & 17 & 2\\ 17 & 0 & 3 & 14 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-45 & 1 & -39 & -8 & -5\\ 22 & -3 & 17 & 3 & 2\\ 17 & 0 & 14 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-6 & 1 & -39 & -8 & -5\\ 5 & -3 & 17 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 14 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-6 & 1 & -15 & -8 & -5\\ 5 & -3 & -3 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}9 & 1 & -15 & -8 & -5\\ 8 & -3 & -3 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}9 & 1 & -33 & -8 & -5\\ 8 & -3 & -19 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-33 & 1 & 9 & -8 & -5\\ -19 & -3 & 8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-27 & 1 & 9 & -8 & -5\\ -1 & -3 & 8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}-27 & 28 & 9 & -8 & -5\\ -1 & 0 & 8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}28 & -27 & 9 & -8 & -5\\ 0 & -1 & 8 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$