

Laboratorio di Fisica 1

R4: Misura di variabili aleatorie

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

8/11/2023 – 15/11/2023

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato due variabili aleatorie, osservando come queste rispecchino le rispettive distribuzioni teoriche (di Bernoulli e di Poisson).

1 Processo di Bernoulli

1.1 Dati sperimentali

Eseguiamo 400 lanci di sei dadi distinti¹, registrandone tutti i risultati. Per ogni possibile risultato $s \in [1; 6] \cap \mathbb{N}$, possiamo così definire una variabile aleatoria² $x_s \in [0; 6] \cap \mathbb{N}$ come il numero di dadi, fra i sei lanciati, con risultato pari ad s . Possiamo considerare il lancio dei sei dadi come un processo di Bernoulli, in quanto i risultati dei dadi sono indipendenti fra loro. Di conseguenza, la distribuzione di probabilità di x_s è data da:

$$p(x_s = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k} \quad \forall k \in [0; 6] \cap \mathbb{N}$$

Di seguito riportiamo gli istogrammi dei dati così raccolti, assieme ai valori attesi, calcolati mediante la distribuzione teorica.

1.2 Simulazione

Tramite un programma da noi scritto e compilato³, simuliamo la stessa esperienza con 10^{12} lanci dei sei dadi, al fine di verificare la legge dei grandi numeri. Quest'ultima consiste nella tesi che, su un grande numero di prove, i risultati si avvicinano, in proporzione, ai valori attesi.

Di seguito riportiamo, in un istogramma, i risultati della simulazione.

¹Li distinguiamo in base al colore

²Notazione. Per noi $0 \in \mathbb{N}$.

³Vedi Appendice 1

2 Processo di Poisson

2.1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Contatore Geiger	1 conteggi/s	N./A.	1 conteggi/s
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Altro	Descrizione/Note		
Campione di $^{232}_{90}\text{Th}$	Componente di una lampada da campeggio		

2.2 Esperienza e procedimento di misura

Posizionato il contatore Geiger a una certa distanza d_i dal campione di $^{232}_{90}\text{Th}$ (con $i \in [1; 4] \cap \mathbb{N}$), definiamo una variabile aleatoria x_γ come il numero di raggi γ emessi dal $^{232}_{90}\text{Th}$ nell'arco di un secondo, nella direzione del contatore. Allora, detta $\overline{x_\gamma}$ la media teorica⁴ di x_γ , la distribuzione di probabilità di x_γ è data da una Poissoniana:

$$p(x_\gamma = k) = \frac{\overline{x_\gamma}^k e^{-\overline{x_\gamma}}}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Il valore di $\overline{x_\gamma}$ è legato alla distanza d_i e al tempo di dimezzamento del $^{232}_{90}\text{Th}$ ($T_{1/2}$) secondo la seguente relazione :

$$\overline{x_\gamma} = \frac{r^2 \ln 2}{4T_{1/2}} N d_i^{-2} + \gamma_0$$

Per un tempo complessivo di circa un'ora⁵ (3657 s).

Infine, il gruppo di lavoro ha acquisito, sempre per 3657 s, i conteggi al secondo di raggi γ nella direzione opposta rispetto al campione, per avere una stima della radioattività ambientale.

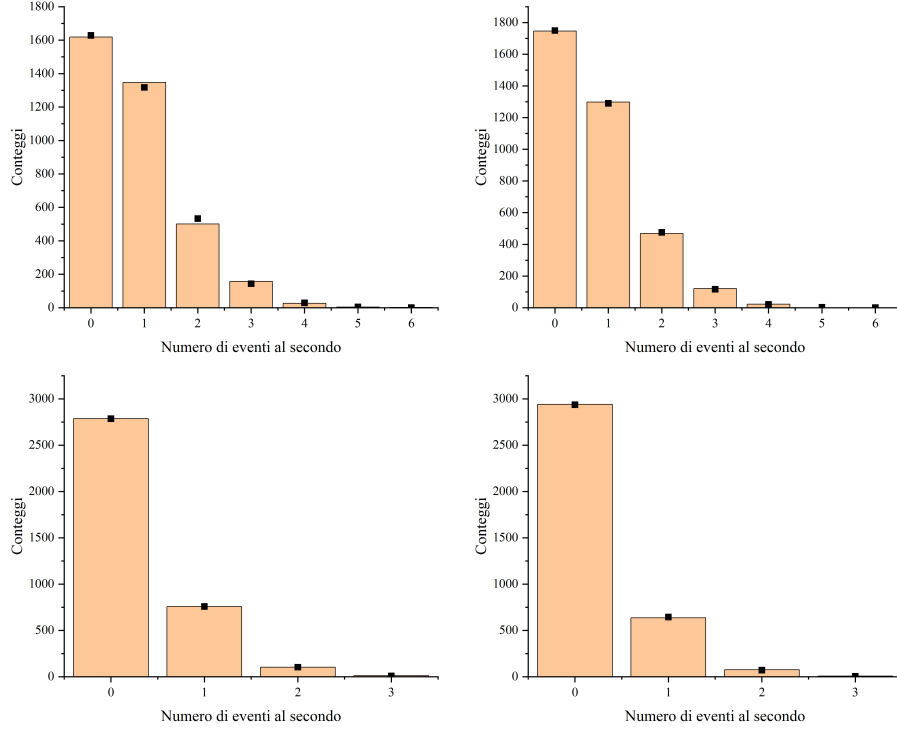
Notazione. Indichiamo con γ_i complessivamente i conteggi acquisiti a distanza d_i dal campione (con $i \in [1; 4] \cap \mathbb{N}$). Allora $\overline{\gamma_i}$ sarà la media della distribuzione, dove $(\overline{\gamma_i})_{best}$ sarà la media dei conteggi, mentre σ_{γ_i} sarà la deviazione standard e $\delta(\overline{\gamma_i}) = \sigma_{\gamma_i} = \frac{\sigma_{\gamma_i}}{\sqrt{3657}}$ l'errore sulla media. Analogamente per γ_{amb} , $\sigma_{\gamma_{amb}}$ e $\delta(\overline{\gamma_{amb}})$.

⁴Che il parametro della distribuzione coincida con la media è facilmente dimostrabile. Detto λ quel parametro, vale:

$$\begin{aligned} \overline{x_\gamma} &= \sum_{k=0}^{+\infty} k p(x_\gamma = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \left(0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda \quad \square \end{aligned}$$

⁵Abbiamo scelto deliberatamente di acquisire esattamente 3657 secondi in quanto 3657 minimizza la funzione $f(x) = \left\{ \frac{x}{\pi} \right\} = \frac{x}{\pi} - \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$ meglio di 3600.

Di seguito, riportiamo, come istogrammi, le distribuzioni di tutti i γ_i , a cui abbiamo sovrapposto i valori attesi



Come si può osservare, le distribuzioni ottenute si allineano molto bene alle distribuzioni di Poisson

i	d_i (cm)	d_i^{-2} (m ⁻²)	$\bar{\gamma}_i$
1	9.5 ± 0.1	111 ± 2	0.809 ± 0.015
2	10.3 ± 0.1	94.3 ± 1.8	0.737 ± 0.014
3	26.5 ± 0.1	14.24 ± 0.11	0.272 ± 0.009
4	41.2 ± 0.1	5.89 ± 0.03	0.219 ± 0.008

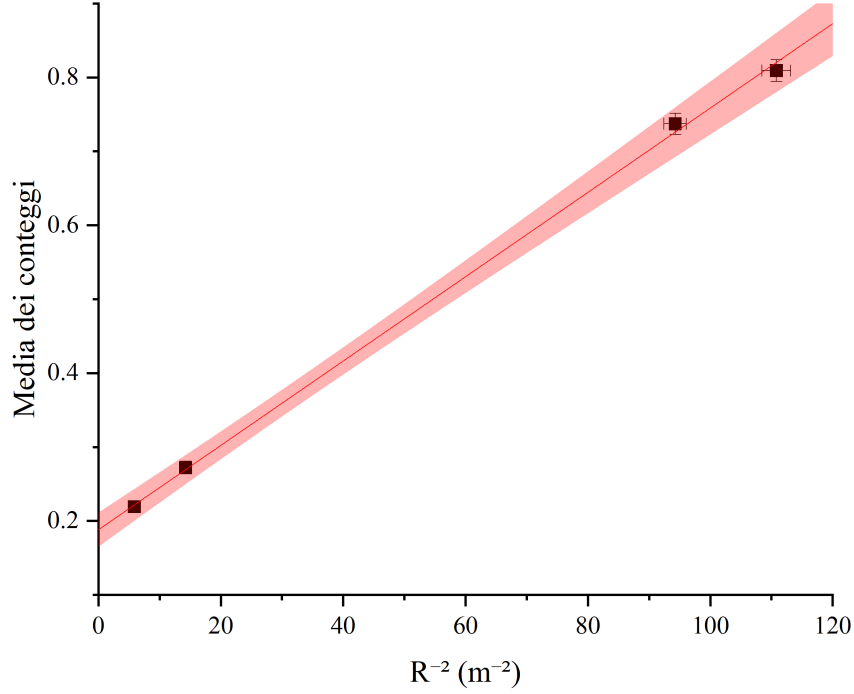


Figura 1: La retta di regressione (in rosso) e la sua regione di incertezza (in rosa).

2.3 Conclusioni

Per valutare numericamente la consistenza tra i due valori di k ottenuti, abbiamo calcolato il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{|(k_{\text{statica}})_{\text{best}} - (k_{\text{dinamica}})_{\text{best}}|}{\delta k_{\text{statica}} + \delta k_{\text{dinamica}}}$$

Allora k_{statica} e k_{dinamica} sono consistenti se e solo se $\varepsilon \leq 1$.

Nel nostro caso, $\varepsilon = 1.33$. Il gruppo di lavoro ha ipotizzato che questa inconsistenza (comunque contenuta, seppur non trascurabile) fra le due misure possa essere ragionevolmente giustificata dalla difficoltà incontrata nel ridurre al minimo le oscillazioni in direzione perpendicolare a \vec{g} ; considerato inoltre che la posizione dei fototraguardi non era ottimale, ciò potrebbe avere ulteriormente influenzato la distribuzione dei tempi. È in effetti possibile osservare che le distribuzioni da noi ottenute non sono, il più delle volte, del tutto simmetriche: la moda sembra essersi spostata leggermente a sinistra – un possibile sintomo dell'influenza di un errore sistematico sulle misure.

Appendices

A Codice Rust per $\cdot 10^{12}$ lanci di sei dadi

Qui riportiamo il codice Rust, da noi scritto, che ci ha permesso di lanciare virtualmente $6 \cdot 10^{12}$ dadi in maniera estremamente efficiente.

```
1  **** Architettura del programma ****
2  * Il lavoro viene eseguito in parallelo da 20 thread.
3  * Ogni volta che un thread completa una milestone,
4  *   invia i risultati attuali al `main()`.
5  * Quando il programma principale
6  */
7
8  *** Costanti per la compilazione ***
9  // Parametri della simulazione
10 const N_THREADS:    u8  = 20;           // Numero di thread
11 const N_MILESTONES: u32 = 10_000;       // Numero di milestone
12 const N_THROWS:     u32 = 5_000_000;    // Numero di lanci per milestone
13 const N_ROLLS:      u8  = 6;           // Numero di dadi da lanciare
14 // Altre costanti
15 const N_BINS: usize = (N_ROLLS + 1) as usize;
16 const N_COUNT_TOTAL: u128 = (N_MILESTONES as u128) * (N_THREADS as u128);
17
18 *** Importazioni ***
19 use std::{sync::mpsc::{self, Sender}, thread, io::{self, Write}};
20 use rand::prelude::Distribution;
21
22
23 *** Lavoro di ogni thread ***
24 fn work(tx: Sender<[u128; N_BINS]>) {
25     let mut rng = rand::thread_rng();
26     let die = rand::distributions::Uniform::from(1..7u8);
27     let mut counter: u8;
28     let mut bins: [u128; N_BINS];
29     for _milestone in 0..N_MILESTONES {
30         bins = [0; N_BINS];
31         for _throw in 0..N_THROWS {
32             counter = 0;
33             for _roll in 0..N_ROLLS {
34                 // Lancia un dado
35                 if die.sample(&mut rng) == 1 {
36                     counter += 1; // Successo!
37                 }
38             }

```

```

39         bins[counter as usize] += 1;
40     }
41     tx.send(bins).unwrap();
42 }
43 }
44
45
46 /** Utility per l'output */
47
48 fn print_info() {
49     // Stampa a schermo la configurazione iniziale
50     println!("#dadi: {N_ROLLS}");
51     println!("#lanci: {N_THROWS}");
52     println!("#volte: {N_MILESTONES}");
53     println!("#thread: {N_THREADS}");
54     let total: u128 = (N_THROWS as u128)*N_COUNT_TOTAL;
55     println!("#totale: {total}");
56 }
57
58 fn print_bins(count: u128, bins: [u128; N_BINS]) {
59     // Stampa a schermo il progresso attuale e i conteggi dei bin
60     let percent: u128 = (100*count)/N_COUNT_TOTAL;
61     print!("[{count}/{N_COUNT_TOTAL}|{percent}%");
62     for i in 0..N_BINS {
63         let bin = bins[i];
64         print!("\t{bin}");
65     }
66     print!("\n");
67     io::stdout().flush().unwrap();
68 }
69
70
71 /** Programma principale */
72 fn main() {
73     print_info();
74     // Crea i thread
75     let (tx, rx) = mpsc::channel::<[u128; N_BINS]>();
76     for _i in 0..N_THREADS {
77         let txi = tx.clone();
78         thread::spawn(move || { work(txi); });
79     }
80     // Combina gli output
81     let mut count: u128 = 0;
82     let mut bins: [u128; N_BINS] = [0; N_BINS];
83     for bin in rx {
84         for i in 0..N_BINS {

```

```

85         bins[i] += bin[i];
86     }
87     count += 1; // Un altro thread ha finito!
88     if (count % (N_THREADS as u128)) == 0 {
89         print_bins(count, bins);
90     }
91     if count == N_COUNT_TOTAL {
92         break;
93     }
94 }
95 }

```