

# Laboratorio di Fisica 1

## R5: Misura del modulo di scorrimento di un filo

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

22/11/2023 – 29/11/2023

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato la costante torsionale di quattro fili metallici, al fine di verificare il modulo di scorrimento dei rispettivi materiali.

## 1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Sensore di rotazione	0.002 rad	N./A.	0.002 rad
Cronometro	0.001 s	N./A.	0.001 s
Metro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Calibro ventesimale	0.05 mm	150.00 mm	0.05 mm
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Altro	Descrizione/Note		
Quattro fili inestensibili	Distinguibili per diametro e materiale. Li indicheremo con 1, 2, 3, 4.		
Tre cilindri (con masse e raggi distinti)	Indicheremo con $A, B, C$ i tre cilindri e con 0, $A + B$ , $A + C$ , $B + C$ e $A + B + C$ le loro combinazioni.		
Struttura portante e parti mobili	Un disco, ruotando, provoca una deformazione elastica al filo ad esso fissato lungo l'asse di rotazione.		

## 2 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo le masse dei cilindri con la bilancia di precisione e i rispettivi diametri con il calibro ventesimale.

2. Con il metro a nastro e il micrometro ad asta filettata misuriamo, rispettivamente, lunghezza e diametro dei fili.
3. Per ogni filo e per ogni combinazione di cilindri:
  - (a) Fissiamo il filo al sistema, in modo tale che l'estremità inferiore sia vincolata alla struttura, mentre quella superiore al disco rotante; posizioniamo poi i cilindri sopra al disco, con l'asse centrale allineato a quello del disco stesso.
  - (b) Avviamo l'acquisizione dell'angolo in funzione del tempo ( $\theta(t)$ , lo definiremo formalmente più avanti).
  - (c) Ruotando il disco di un angolo prefissato  $\theta_0$ , diamo inizio al moto armonico del pendolo. Acquisiamo dati fino all'arresto del moto.

### 3 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

#### 3.1 Costante torsionale e modulo di scorrimento

Di seguito riportiamo massa, diametro e momento d'inerzia<sup>1</sup> dei tre cilindretti:

$i$	$m_i$ (g)	$d_i$ (cm)	$I_i$ ( $10^{-4}$ kg m <sup>2</sup> )
A	$344.07 \pm 0.01$	$9.045 \pm 0.005$	$3.519 \pm 0.004$
B	$429.65 \pm 0.01$	$5.985 \pm 0.005$	$1.924 \pm 0.003$
C	$473.02 \pm 0.01$	$5.200 \pm 0.005$	$1.599 \pm 0.003$

Fissiamo un sistema di riferimento inerziale, solidale all'apparato, a coordinate cilindriche<sup>2</sup>  $(\theta, r, h)$ , con versore  $\hat{z}$  giacente lungo l'asse di rotazione del filo (antiparallelo a  $\vec{g}$ ), origine  $O$  e versore  $\hat{x}$  contenuti nel piano sul quale vengono appoggiati i cilindri. Sia inoltre  $P$  un punto materiale qualunque solidale all'estremità superiore del filo (e quindi anche ai cilindretti) che, con il filo a riposo, si trovi sul piano  $xOz$ . Allora, *trascurando gli attriti*, il moto di  $P$  è caratterizzato da (per  $\theta_0$  sufficientemente piccolo):

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

La pulsazione  $\omega$  di questo moto armonico dipende dal momento d'inerzia complessivo  $I_{\text{tot}}$  dei corpi solidali all'estremità mobile del filo, nonché dalle caratteristiche del filo stesso. Queste ultime vengono riassunte nella *costante torsionale*

---

<sup>1</sup>Il momento d'inerzia è stato calcolato approssimando questi oggetti a cilindri di densità uniforme e raggio e altezza costanti, in rotazione attorno ad un asse verticale passante per il loro centro:

$$I_i = \frac{1}{2} m_i \left( \frac{d_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} m_i d_i^2$$

<sup>2</sup>Le coordinate di un punto  $P$  in questo sistema di riferimento sono definite come segue: detta  $\vec{r}$  la proiezione di  $\vec{OP}$  sul piano per  $O$  normale a  $\hat{z}$ ,  $\theta$  è l'angolo piano orientato fra  $\hat{x}$  e  $\vec{r}$ ,  $r$  è la norma di  $\vec{r}$  e  $h$  è la posizione lungo  $\hat{z}$  della proiezione di  $P$  su  $\hat{z}$  stesso.

$C$ . In particolare:

$$C = I_{\text{tot}} \omega^2$$

Detto  $T = 2\pi/\omega$  il periodo del moto armonico, si ottiene:

$$I_{\text{tot}} = \frac{C}{4\pi^2} T^2$$

Detto  $I_0$  il momento d'inerzia che rimane costante<sup>3</sup>, al variare dei cilindretti (Cil) posizionati sopra al filo, si ha:

$$\sum_{i \in \text{Cil}} I_i = \frac{C}{4\pi^2} T^2 - I_0$$

Da questa relazione, tramite una regressione lineare (pesata<sup>4</sup>), è possibile ottenere una stima piuttosto precisa dei valori di  $C$  e  $I_0$ .

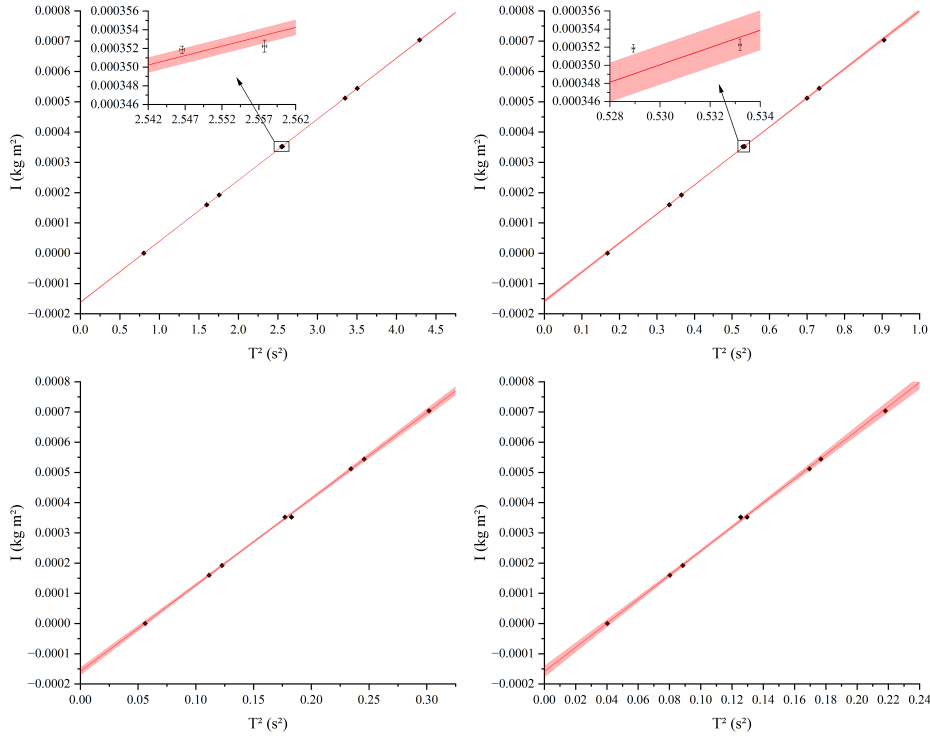


Figura 1:  $I$  dati raccolti, assieme alle rette di regressione lineare (in rosa, le regioni di incertezza). Abbiamo ingrandito le regioni che contenevano punti così vicini fra loro da risultare addirittura indistinguibili.

<sup>3</sup> $I_0$  include, ad esempio, il momento d'inerzia del disco su cui era possibile appoggiare i cilindretti, nonché quello della parte mobile del sensore di rotazione.

<sup>4</sup>Gli errori assoluti su  $I$  variano da punto a punto.

Riportiamo di seguito i risultati delle regressioni lineari, dove  $\xi = \frac{C}{4\pi^2}$  è il coefficiente angolare.

$j$	$I_0$ ( $10^{-4} \text{ kg m}^2$ )	$\xi$ ( $10^{-4} \text{ J}$ )	$C$ (mJ)
1	$1.620 \pm 0.006$	$2.015 \pm 0.002$	$7.956 \pm 0.010$
2	$1.581 \pm 0.006$	$9.587 \pm 0.012$	$37.85 \pm 0.05$
3	$1.582 \pm 0.006$	$28.56 \pm 0.03$	$112.75 \pm 0.14$
4	$1.587 \pm 0.006$	$39.86 \pm 0.05$	$157.38 \pm 0.20$

La costante torsionale  $C$  dipende da caratteristiche del filo, come la lunghezza  $l$  e il diametro  $d$ . In particolare, vale:

$$C = \frac{\pi}{2l} \left( \frac{d}{2} \right)^4 G = \frac{\pi d^4}{32l} G$$

dove la grandezza  $G$  (dimensionalmente, una pressione) è detta “modulo di scorrimento” del materiale di cui è composto il filo. Allora:

$$G = \frac{32l}{\pi d^4} C$$

Di seguito riportiamo, in una tabella, le misure di  $l$  e  $d$  dei vari fili e i corrispondenti valori della costante di scorrimento.

$j$	$l$ (cm)	$d$ (mm)	$C$ (J)	$G$ (GPa)
1	$43.3 \pm 0.1$	$0.81 \pm 0.01$	$7.956 \pm 0.010$	$82 \pm 4$
2	$43.1 \pm 0.1$	$1.20 \pm 0.01$	$37.85 \pm 0.05$	$80 \pm 3$
3	$43.0 \pm 0.1$	$1.57 \pm 0.01$	$112.75 \pm 0.14$	$81 \pm 2$
4	$42.7 \pm 0.1$	$1.97 \pm 0.01$	$157.38 \pm 0.20$	$45.4 \pm 1.1$

### 3.2 Attrito

Il moto del pendolo di torsione è condizionato dalla presenza di attriti, che ne riducono l'ampiezza. In particolare, il modello di riferimento è il seguente:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove  $\lambda$  è un parametro legato, appunto, agli attriti. Per stimare  $\lambda$ , il gruppo di lavoro ha proceduto su un'acquisizione come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo calcolato  $|\theta(t)|$ . Ciò ci ha permesso di trattare massimi e minimi “insieme”, evitando di ripetere l'analisi.
2. Poi, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{|\theta_k|\}$  tali che  $|\theta_{i-1}| < |\theta_k| > |\theta_{j+1}|$ .

3. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come  $\delta t$  la semidispersione  $\frac{1}{2}(t_j - t_i)$ .
4. Infine, abbiamo graficato i punti su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata<sup>5</sup>) sulle nuove ordinate.

---

<sup>5</sup> $\delta \ln |\theta|$  è tutt'altro che costante.