

Laboratorio di Fisica 1

R7: Misura di $|\vec{g}|$ mediante pendolo fisico

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

05/03/2024 – 12/03/2024

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato il modulo del campo gravitazionale locale (g) studiando il moto oscillatorio di un pendolo fisico.

0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Sensore di rotazione	0.002 rad	N./A.	0.002 rad
Cronometro	0.001 s	N./A.	0.001 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Calibro ventesimale	0.05 mm	150.00 mm	0.05 mm
Metro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Altro	Descrizione/Note		
Asta e rotore	L'asta, fissata ortogonalmente al rotore, è libera di ruotare attorno ad un suo estremo. Il rotore è invece innestato del sensore di rotazione.		
Tre cilindri (con masse e raggi distinti)	Di masse e raggi distinti, presentano un foro centrale lungo l'asse di simmetria. Li indicheremo con A , B e C .		

1 Esperienza e procedimento di misura

Definizione. Con il termine “configurazione” indicheremo d’ora in poi l’insieme delle posizioni di una qualunque combinazione di cilindri lungo l’asta, misurate rispetto all’estremo fissato al rotore.¹

1. Misuriamo le masse dei cilindri con la bilancia di precisione, i rispettivi diametri (interni ed esterni) con il calibro ventesimale e le altezze con il micrometro ad asta filettata.
2. Mediante il metro a nastro misuriamo la lunghezza dell’asta e, servendoci del micrometro, i diametri di asta e rotore.
3. Ripetiamo 9 volte i seguenti passi:
 - (a) Scelta arbitrariamente una configurazione Γ , fissiamo all’asta i cilindri coinvolti, servendoci del foro centrale. Misuriamo poi, mediante il metro a nastro, le posizioni dei cilindri lungo l’asta rispetto al suo estremo fisso.
 - (b) Servendoci dell’apposito programma, avviamo l’acquisizione dell’angolo in funzione del tempo ($\theta(t)$), lo definiremo formalmente più avanti).
 - (c) Inclinando l’asta rispetto alla sua posizione di equilibrio di un angolo prefissato θ_0 , sufficientemente piccolo², diamo inizio al moto del pendolo. Acquisiamo dati fino all’arresto del moto.

2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

Nota. Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.

2.1 Misura di $|\vec{g}|$

Scegliamo un sistema di riferimento cilindrico, con origine all’intersezione fra l’asse di rotazione e il piano, ad esso perpendicolare, contenente il centro di massa, versore \hat{r} parallelo a \vec{g} e versore \hat{k} diretto lungo l’asse di rotazione del sistema.

La posizione del centro di massa del pendolo fisico sarà allora descritta da $\vec{r}_{\text{CM}} = (r_{\text{CM}}, \theta, z)$ con $z = 0$, dove θ è lo spostamento angolare rispetto alla posizione di equilibrio.

¹Più formalmente, diremo “configurazione” un insieme Γ di coppie ordinate γ della forma (i, d) , dove $i \in \{A, B, C\}$ è un cilindro e d è la sua distanza dall’estremo fissato al rotore. Ovviamente non è possibile ripetere i in elementi distinti della configurazione, perché ciò non avrebbe significato fisico.

²Questa condizione sull’angolo θ_0 ci permette di approssimare $\sin(\theta) \sim \theta \quad \forall \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$.

Vale la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\sum \tau_z^{\text{ext}} = \dot{L}_z = I_z^{\text{tot}} \ddot{\theta}$$

Nota. In questa sezione abbiamo trascurato la presenza di attriti, ma chiaramente gli attriti ci sono e il moto è smorzato. Nella sezione successiva tratteremo proprio questo fenomeno, determinando, alla luce dei dati raccolti, quanto influisca sul valore di g .

Poiché l'unica forza esterna al sistema che compie un momento lungo \hat{k} è la forza peso, si ha:

$$\sum \vec{\tau}_z^{\text{ext}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M\vec{g} = -Mg r_{\text{CM}} \sin(\theta) \hat{k}.$$

L'equazione differenziale che descrive il moto del centro di massa del pendolo fisico sarà allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \sin(\theta)$$

È possibile semplificare il modello fisico approssimando $\sin(\theta) \simeq \theta$. Il gruppo di lavoro ha ritenuto valida questa operazione solo quando

$$|\theta_0 - \sin(\theta_0)| < \delta\theta$$

Essendo, nel nostro caso, $\delta\theta = 0.02 \text{ rad}$, abbiamo scelto $\theta_0^{\text{max}} = 0.49 \text{ rad}$. Infatti:

$$0.49 \text{ rad} - \sin(0.49 \text{ rad}) \simeq 0.019 \text{ rad} \quad 0.50 \text{ rad} - \sin(0.50 \text{ rad}) \simeq 0.021 \text{ rad}$$

Prima di prendere ogni misura, il gruppo di lavoro si è assicurato che θ_0 soddisfacesse abbondantemente la condizione $\theta_0 < \theta_0^{\text{max}}$.

L'equazione differenziale semplificata è allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

Questa equazione descrive un moto armonico. Le soluzioni sono infatti del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}} \quad \text{è detta "pulsazione"}.$$

Possiamo tuttavia facilmente esprimere ω in funzione del periodo T del moto oscillatorio, più semplice da calcolare dai dati acquisiti. Vale infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e quindi} \quad \frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T^2}{4\pi^2}$$

La formula utilizzata per il calcolo di I_z^{tot} riflette la composizione del sistema, sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia:

$$I_z^{\text{tot}} = I_{z,\text{rotore}} + I_{z,\text{asta}} + \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{z,\gamma}$$

Chiaramente, per calcolare i momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è necessario applicare il teorema di Huygens-Steiner a quelli calcolati sui rispettivi centri di massa³:

$$I_{z,\text{asta}} = I_{\text{CM},\text{asta}} + m_{\text{asta}} \left(\frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2$$

$$I_{z,(i,d)} = I_{\text{CM},i} + m_i \left(d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2 \quad \forall (i,d) \in \Gamma$$

Per calcolare il termine Mr_{CM} , si osservi che, per la definizione di posizione del centro di massa, la massa totale si semplifica:

$$\begin{aligned} Mr_{\text{CM}} &= M \cdot \frac{1}{M} \left(m_{\text{rotore}} \cdot 0 + m_{\text{asta}} r_{\text{CM},\text{asta}} + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i r_{\text{CM},i} \right) \\ &= m_{\text{asta}} \left(\frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i \left(d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo le misure, dirette e indirette, utilizzate per il calcolo dei momenti d'inerzia⁴:

Oggetto	L (cm)	\varnothing (mm)	m (g)	I_{CM} (10^{-5} kg m^2)
Asta	60.0 ± 0.1	5.94 ± 0.01	45.82 ± 0.01	568.5 ± 1.5
Rotore	N./A.	13.41 ± 0.01	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

i	m_i (g)	d_i^{ext} (mm)	d_i^{int} (mm)	h_i (mm)	$I_{\text{CM},i}$ (mg m^2)
A	115.95 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	19.93 ± 0.01	10.62 ± 0.03
B	115.86 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	19.89 ± 0.01	10.59 ± 0.03
C	71.46 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	12.08 ± 0.01	5.047 ± 0.018

[*] *Valori dati*

³Questi ultimi sono stati calcolati mediante le seguenti formule:

$$I_{\text{CM},\text{asta}} = \frac{1}{12} m_{\text{asta}} L_{\text{asta}}^2 \quad I_{\text{CM},i} = \frac{1}{16} m_i \left((d_i^{\text{ext}})^2 + (d_i^{\text{int}})^2 \right) + \frac{1}{12} m_i h_i^2 \quad \forall i \in \{A, B, C\}$$

⁴ L_{asta} è la lunghezza della parte dell'asta che sporge all'esterno del rotore.

Il periodo dell'oscillazione è stato misurato individuando $N + 1$ zeri consecutivi di $\theta(t)$, diciamo $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$. Allora, poiché tra uno zero e l'altro corre metà periodo, è possibile calcolare T in questo modo: $T = \frac{2}{N}(t_N - t_0)$

Il gruppo di lavoro ha scelto N di volta in volta, in modo tale che fosse proporzionale al numero di oscillazioni compiute dal pendolo prima di fermarsi. Complessivamente, N ha assunto valori da 30 a 180.

Come descritto sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione Γ , i valori di $\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}}$ e $\frac{T^2}{4\pi^2}$, riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di g come coefficiente angolare di una retta di regressione.

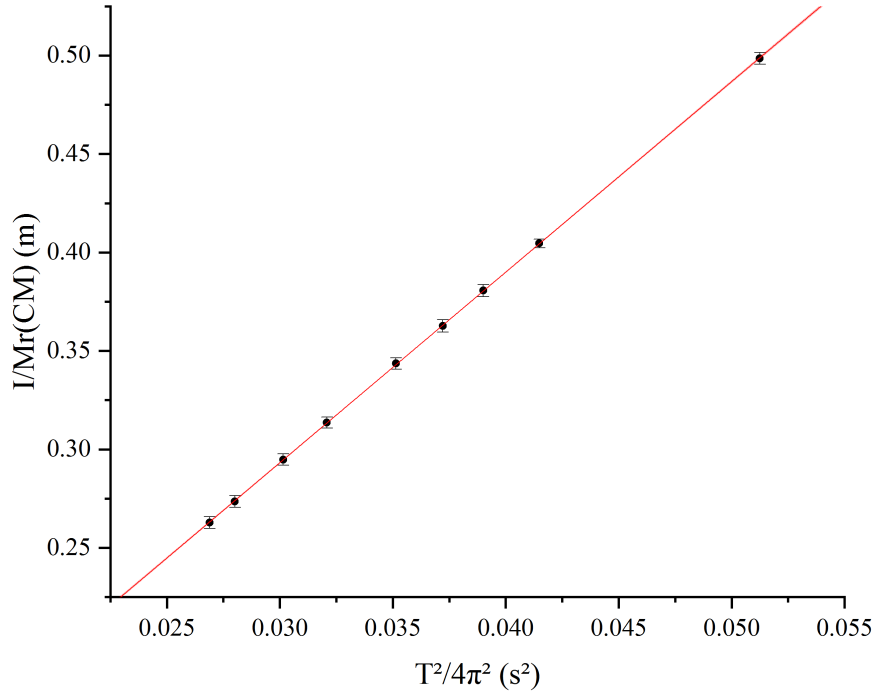


Figura 1: In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)

- Intercetta = (0.003 ± 0.005) m
- Coefficiente angolare $g = (9.68 \pm 0.13)$ m/s²

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti, (0.003 ± 0.005) m è compatibile con 0 m.
- Il valore di g atteso è 9.806 m/s^2 ; si può osservare facilmente che il valore misurato, $(9.68 \pm 0.13) \text{ m/s}^2$, è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di g compatibile con quella attesa.

2.2 Misura dello smorzamento

In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione $\Gamma = \{\}$, dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.

Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima, $\sin(\theta) \simeq \theta$, si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta} - \frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

dove λ è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto, ω , è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}}.$$

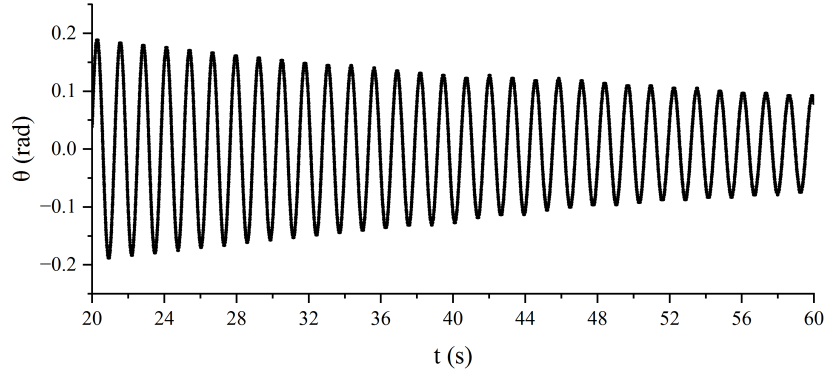


Figura 2: Parte dei dati di un'acquisizione di $\theta(t)$ con $\Gamma = \{\}$, come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.

Per stimare λ , il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{\theta_k\}$ tali che $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$.
2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come δt_{picco} la semidispersione $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$.
3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata⁵) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio $-\lambda$.
4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con θ cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di λ : λ_{\min} e λ_{\max} . Abbiamo scelto di porre $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$.

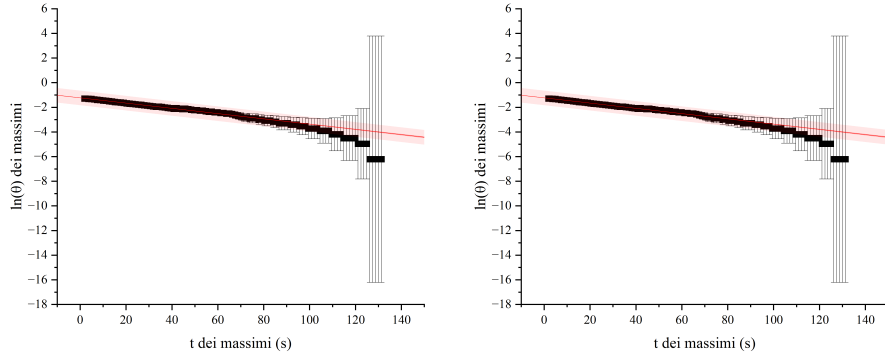


Figura 3: $\ln\theta(t)$ di massimi e minimi, su scala logaritmica (per $\Gamma = \{\}$). Sono riportate anche le barre di errore. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.

Poiché l'obiettivo è calcolare g , la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione Γ , si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione

⁵ $\delta \ln |\theta|$, infatti, varia molto, nonostante $\delta |\theta|$ sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.

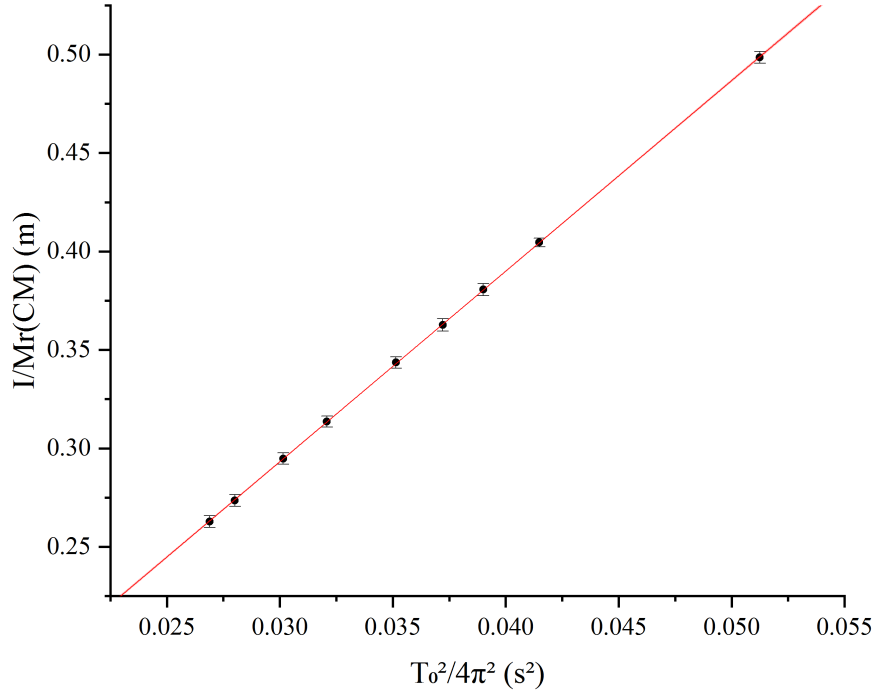


Figura 4: *In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)*

I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

- Intercetta = $(0.003 \pm 0.005) \text{ m}$
- Coefficiente angolare $g = (9.68 \pm 0.13) \text{ m/s}^2$

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di g risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.