Laboratorio di Fisica 1
R7: Misura di $|\vec{g}|$ mediante pendolo fisico

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

05/03/2024 – 12/03/2024

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato il modulo del campo gravitazionale locale (g) studiando il moto oscillatorio di un pendolo fisico.

1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	**Soglia**	**Portata**	**Sensibilità**
Sensore di rotazione	0.002 rad	N./A.	0.002 rad
Cronometro	0.001 s	N./A.	0.001 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Calibro ventesimale	0.05 mm	150.00 mm	0.05 mm
Metro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g

Altro	**Descrizione/Note**
Asta e rotore	L'asta, fissata ortogonalmente al rotore, è libera di ruotare attorno ad un suo estremo. Il rotore è invece innestato del sensore di rotazione.
Tre cilindri (con masse e raggi distinti)	Di masse e raggi distinti, presentano un foro centrale lungo l'asse di simmetria. Li indicheremo con A, B e C.

2 Esperienza e procedimento di misura

Definizione. *Con il termine "*configurazione*" indicheremo d'ora in poi l'insieme delle posizioni di una qualunque combinazione di cilindri lungo l'asta, misurate rispetto all'estremo fissato al rotore.*[1]

1. Misuriamo le masse dei cilindri con la bilancia di precisione, i rispettivi diametri (interni ed esterni) con il calibro ventesimale e le altezze con il micrometro ad asta filettata.

2. Mediante il metro a nastro misuriamo la lunghezza dell'asta e, servendoci del micrometro, i diametri di asta e rotore.

3. Ripetiamo 9 volte i seguenti passi:

    (a) Scelta arbitrariamente una configurazione Γ, fissiamo all'asta i cilindri coinvolti, servendoci del foro centrale. Misuriamo poi, mediante il metro a nastro, le posizioni dei cilindri lungo l'asta rispetto al suo estremo fisso.

    (b) Servendoci dell'apposito programma, avviamo l'acquisizione dell'angolo in funzione del tempo ($\theta(t)$, lo definiremo formalmente più avanti).

    (c) Inclinando l'asta rispetto alla sua posizione di equilibrio di un angolo prefissato θ_0, sufficientemente piccolo[2], diamo inizio al moto del pendolo. Acquisiamo dati fino all'arresto del moto.

3 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

Nota. *Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.*

3.1 Misura di $|\vec{g}|$

Scegliamo un sistema di riferimento cilindrico, con origine all'intersezione fra l'asse di rotazione e il piano, ad esso perpendicolare, contenente il centro di massa, versore $\hat{r}$ parallelo a $\vec{g}$ e versore $\hat{k}$ diretto lungo l'asse di rotazione del sistema.

La posizione del centro di massa del pendolo fisico sarà allora descritta da $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = (r_{\mathrm{CM}}, \theta, z)$ con $z = 0$, dove θ è lo spostamento angolare rispetto alla posizione di equilibrio.

[1] Più formalmente, diremo "configurazione" un insieme Γ di coppie ordinate γ della forma (i, d), dove $i \in \{A, B, C\}$ è un cilindro e d è la sua distanza dall'estremo fissato al rotore. Ovviamente non è possibile ripetere i in elementi distinti della configurazione, perché ciò non avrebbe significato fisico.

[2] Questa condizione sull'angolo θ_0 ci permette di approssimare $\sin(\theta) \sim \theta \quad \forall \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$.

Vale la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\sum \tau_z^{\text{ext}} = \dot{L}_z = I_z^{\text{tot}} \ddot{\theta}$$

Nota. *In questa sezione abbiamo trascurato la presenza di attriti, ma chiaramente gli attriti ci sono e il moto è smorzato. Nella sezione successiva tratteremo proprio questo fenomeno, determinando, alla luce dei dati raccolti, quanto influisca sul valore di g.*

Poiché l'unica forza esterna al sistema che compie un momento lungo $\hat{k}$ è la forza peso, si ha:

$$\sum \vec{\tau}_z^{\text{ext}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M\vec{g} = -Mg\, r_{\text{CM}} \sin(\theta)\hat{k}.$$

L'equazione differenziale che descrive il moto del centro di massa del pendolo fisico sarà allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg\, r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \sin(\theta)$$

3.1.1 L'approssimazione $\sin(\theta) \simeq \theta$

Poiché $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$, come accennato in precedenza possiamo semplificare il modello fisico approssimando $\sin(\theta)$ a θ. Questa operazione è valida solo se $\theta - \sin(\theta) < \delta\theta$, ma, essendo chiaramente $\theta(t) \leq \theta_0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$, la condizione è soddisfatta per ogni θ se è soddisfatta per θ_0.

Essendo, nel nostro caso, $\delta\theta = 0.02\,\text{rad}$, possiamo utilizzare $\theta_0^{\max} = 0.49\,\text{rad}$, in quanto:

$$0.49\,\text{rad} - \sin(0.49\,\text{rad}) \simeq 0.019\,\text{rad} \qquad 0.50\,\text{rad} - \sin(0.50\,\text{rad}) \simeq 0.021\,\text{rad}$$

In conclusione, l'approssimazione $\sin(\theta) \simeq \theta$ può essere utilizzata *sic* nel modello fisico con la cautela di verificare che $\theta_0 \leq 0.49\,\text{rad}$. Posta dunque questa condizione, possiamo risolvere:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg\, r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

Questa equazione descrive un moto armonico. Le soluzioni sono infatti del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg\, r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}} \quad \text{è detta “pulsazione”.}$$

Possiamo tuttavia facilmente esprimere ω in funzione del periodo T del moto oscillatorio, più semplice da calcolare dai dati acquisiti. Vale infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{I_z^{\text{tot}}}{M r_{\text{CM}}} = g\frac{T^2}{4\pi^2}$$

3.1.2 Il calcolo di I_z^{tot} e Mr_{CM}

La formula utilizzata per il calcolo di I_z^{tot} riflette la composizione del sistema, sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia:

$$I_z^{\mathrm{tot}} = I_{z,\mathrm{rotore}} + I_{z,\mathrm{asta}} + \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{z,\gamma}$$

Chiaramente, per calcolare i momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è necessario applicare il teorema di Huygens-Steiner a quelli calcolati sui rispettivi centri di massa:

$$I_{z,\mathrm{asta}} = I_{\mathrm{CM,asta}} + m_{\mathrm{asta}} \left(\frac{L_{\mathrm{asta}} + \varnothing_{\mathrm{rotore}}}{2} \right)^2$$

$$I_{z,(i,d)} = I_{\mathrm{CM},i} + m_i \left(d + \frac{h_i - \varnothing_{\mathrm{rotore}}}{2} \right)^2 \qquad \forall (i,d) \in \Gamma$$

Per calcolare il termine Mr_{CM}, si osservi che, per la definizione di posizione del centro di massa, la massa totale si semplifica:

$$\begin{aligned} Mr_{\mathrm{CM}} &= M \cdot \frac{1}{M} \left(m_{\mathrm{rotore}} \cdot 0 + m_{\mathrm{asta}} r_{\mathrm{CM,asta}} + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i r_{\mathrm{CM},i} \right) \\ &= m_{\mathrm{asta}} \left(\frac{L_{\mathrm{asta}} + \varnothing_{\mathrm{rotore}}}{2} \right) + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i \left(d + \frac{h_i - \varnothing_{\mathrm{rotore}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo le misure, dirette e indirette, utilizzate per il calcolo dei momenti d'inerzia:

Oggetto	l (cm)	$\varnothing$ (mm)	m (g)	I_{CM} $(10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2})$
Asta	60.0 ± 0.1	5.94 ± 0.01	45.82 ± 0.01	568.5 ± 1.5
Rotore	N./A.	13.41 ± 0.01	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

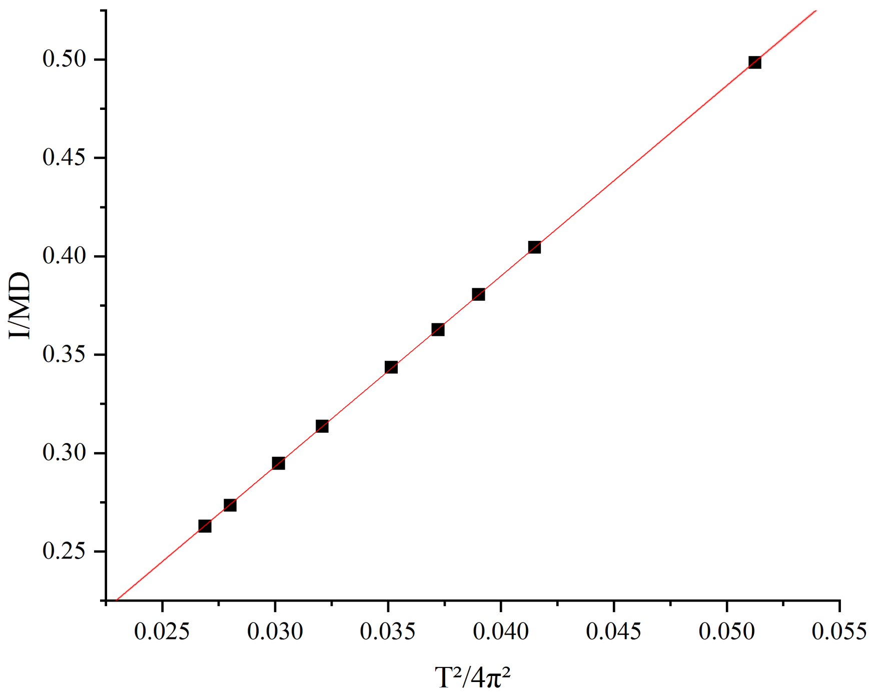
[*] *Valori dati*

i	m_i (g)	d_i^{ext} (mm)	d_i^{int} (mm)	h_i (mm)	$I_{\mathrm{CM},i}$ $(\mathrm{mg\,m^2})$
A	115.95 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	19.93 ± 0.01	10.62 ± 0.03
B	115.86 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	19.89 ± 0.01	10.59 ± 0.03
C	71.46 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	12.08 ± 0.01	5.047 ± 0.018

3.1.3 Il calcolo di g

Utilizzando le formule di cui sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione Γ, i valori di $\frac{I_z^{\mathrm{tot}}}{Mr_{\mathrm{CM}}}$ e $\frac{T^2}{4\pi^2}$, riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di g come coefficiente angolare di una retta di regressione.



I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

1. Intercetta $= (0.003 \pm 0.005)$ m (compatibile con 0)
2. Coefficiente angolare $g = (9.68 \pm 0.13)$ m/s^2 (compatibile con $g_{\text{atteso}} = 9.805\,\text{m/s}^2$)

3.2 Misura dello smorzamento

In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione $\Gamma = \{\}$, dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.

Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima, $\sin(\theta) \simeq \theta$, si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta} - \frac{M g\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}}\theta$$

dove λ è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)\, e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto, ω, è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \qquad \text{con} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{M g\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}}}.$$

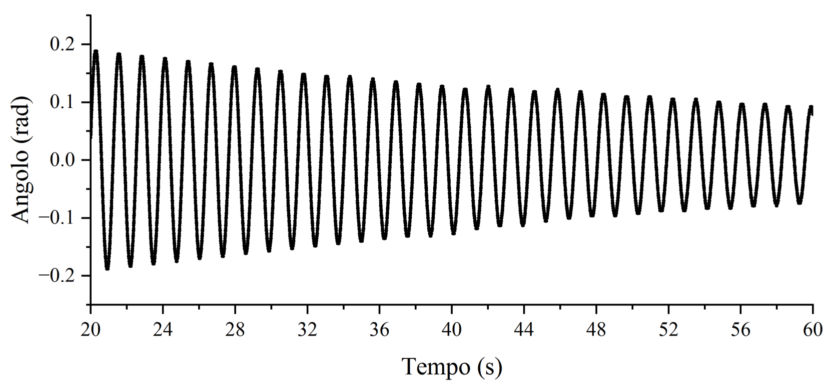


Figura 1: *Parte dei dati di un'acquisizione di $\theta(t)$ con $\Gamma = \{\}$, come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare λ, il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma $\{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_j\} \times \{\theta_k\}$ tali che $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$.

2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come δt_{picco} la semidispersione $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$.

3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata[3]) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio $-\lambda$.

4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con θ cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di λ: λ_{min} e λ_{max}. Abbiamo scelto di porre $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\text{min}} + \lambda_{\text{max}})$.

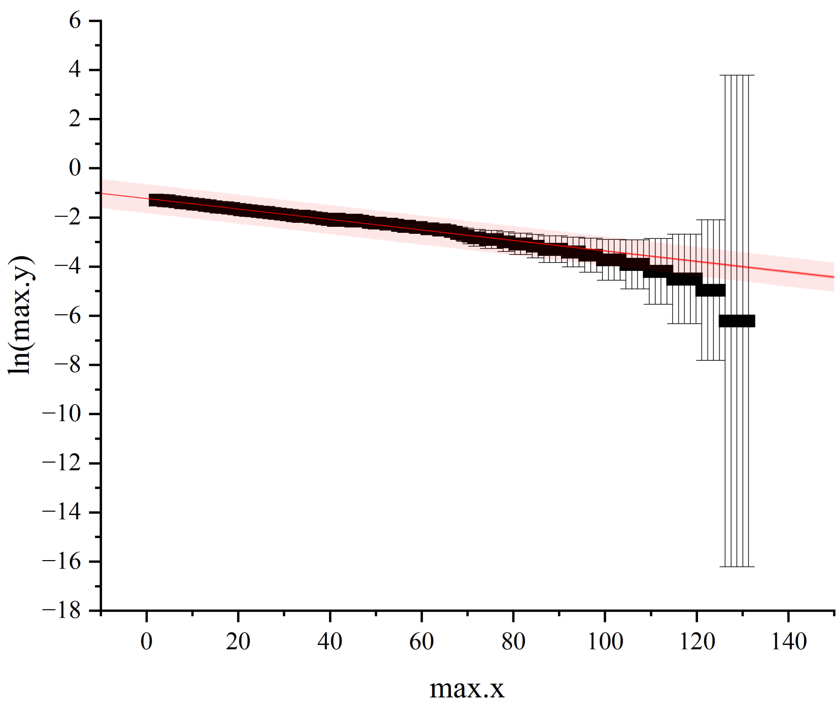


Figura 2: $\ln\theta(t_{massimi})$, *su scala logaritmica. Sono riportate anche le barre di errore. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.*

[3] $\delta \ln|\theta|$, infatti, varia molto, nonostante $\delta|\theta|$ sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

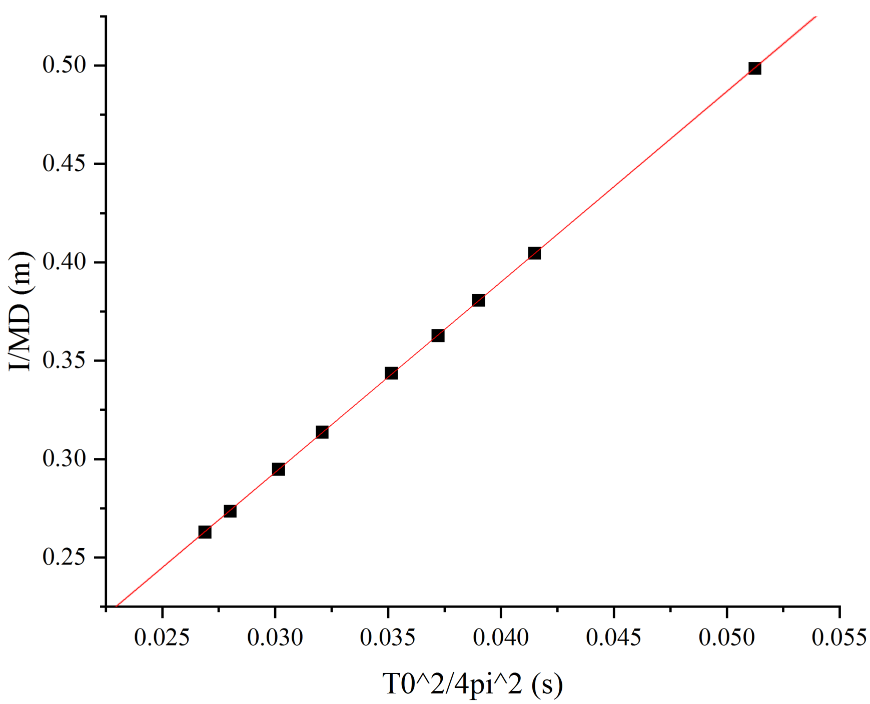
Poiché l'obiettivo è calcolare g, la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione Γ, si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{M r_{\text{CM}}} = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.



I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

1. Intercetta = (0.003 ± 0.005) m (compatibile con 0)
2. Coefficiente angolare $g = (9.68 \pm 0.13)$ m/s^2 (compatibile con $g_{\text{atteso}} = 9.805\,\text{m/s}^2$)

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di g risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.