**1. Data la funzione:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \sqrt{2x} & x > 0 \end{cases}$$

**a. Determinare l'immagine attraverso $f$ di $S = [-2; 1]$.** L'immagine di $S$ attraverso $f$ è l'insieme di tutti i valori che $f$ assume in corrispondenza dei punti di $S$:

$$f([-2; 1]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2; 1] : y = f(x)\}$$

Risolviamo allora l'equazione $y = f(x)$, tenendo $y$ come parametro. I valori cercati di $y$ saranno allora tutti e soli quelli per i quali questa equazione ammette almeno una soluzione nell'intervallo specificato.

$$y = f(x)$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = x^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 0 \\ y = \sqrt{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \leq 0 \\ x = \pm\sqrt{y} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x > 0 \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x = -\sqrt{y} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x = \dfrac{y^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x = -\sqrt{y} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x = \dfrac{y^2}{2} \end{cases}$$

Se $y < 0$, sicuramente non ci sono soluzioni. Altrimenti, le soluzioni $x$ esistono, ma noi dobbiamo imporre che almeno una si trovi nell'intervallo $[-2; 1]$. Le condizioni aggiuntive su $y$ saranno allora:

$$\begin{cases} x \in [-2; 1] \\ x = -\sqrt{y} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \in [-2; 1] \\ x = \dfrac{y^2}{2} \end{cases}$$

$$-2 \leq -\sqrt{y} \leq 1 \quad \vee \quad -2 \leq \frac{y^2}{2} \leq 1$$

$$2 \geq \sqrt{y} \geq -1 \quad \vee \quad -4 \leq y^2 \leq 2$$

$$2 \geq \sqrt{y} \quad \vee \quad y^2 \leq 2$$

$$y \leq 4 \quad \vee \quad -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

$$y \leq 4$$

A questo punto ci resta solo da intersecare questi valori di $y$ con $y \geq 0$ (la condizione trovata in precedenza): otteniamo allora $y \in [0; 4]$. L'immagine di $S$ tramite $f$ sarà allora:

$$f([-2; 1]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2; 1] : y = f(x)\} = [0; 4] \qquad \blacksquare$$