

# Laboratorio di Fisica 1

## R7: Misura di $|\vec{g}|$ mediante pendolo fisico

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

05/03/2024 – 12/03/2024

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato il modulo del campo gravitazionale locale ( $g$ ) studiando il moto oscillatorio di un pendolo fisico.

## 0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Sensore di rotazione	0.002 rad	N./A.	0.002 rad
Cronometro	0.001 s	N./A.	0.001 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Calibro ventesimale	0.05 mm	150.00 mm	0.05 mm
Metro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Altro	Descrizione/Note		
Asta e rotore	L'asta, fissata ortogonalmente al rotore, è libera di ruotare attorno ad un suo estremo. Il rotore è invece innestato del sensore di rotazione.		
Tre cilindri (con masse e raggi distinti)	Di masse e raggi distinti, presentano un foro centrale lungo l'asse di simmetria. Li indicheremo con $A$ , $B$ e $C$ .		

# 1 Esperienza e procedimento di misura

**Definizione.** Con il termine “configurazione” indicheremo d’ora in poi l’insieme delle posizioni di una qualunque combinazione di cilindri lungo l’asta, misurate rispetto all’estremo fissato al rotore.<sup>1</sup>

1. Misuriamo le masse dei cilindri con la bilancia di precisione, i rispettivi diametri (interni ed esterni) con il calibro ventesimale e le altezze con il micrometro ad asta filettata.
2. Mediante il metro a nastro misuriamo la lunghezza dell’asta e, servendoci del micrometro, i diametri di asta e rotore.
3. Ripetiamo 9 volte i seguenti passi:
  - (a) Scelta arbitrariamente una configurazione  $\Gamma$ , fissiamo all’asta i cilindri coinvolti, servendoci del foro centrale. Misuriamo poi, mediante il metro a nastro, le posizioni dei cilindri lungo l’asta rispetto al suo estremo fisso.
  - (b) Servendoci dell’apposito programma, avviamo l’acquisizione dell’angolo in funzione del tempo ( $\theta(t)$ ), lo definiremo formalmente più avanti).
  - (c) Inclinando l’asta rispetto alla sua posizione di equilibrio di un angolo prefissato  $\theta_0$ , sufficientemente piccolo<sup>2</sup>, diamo inizio al moto del pendolo. Acquisiamo dati fino all’arresto del moto.

# 2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

**Nota.** Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.

## 2.1 Misura di $|\vec{g}|$

Scegliamo un sistema di riferimento cilindrico, con origine all’intersezione fra l’asse di rotazione e il piano, ad esso perpendicolare, contenente il centro di massa, versore  $\hat{r}$  parallelo a  $\vec{g}$  e versore  $\hat{k}$  diretto lungo l’asse di rotazione del sistema.

La posizione del centro di massa del pendolo fisico sarà allora descritta da  $\vec{r}_{\text{CM}} = (r_{\text{CM}}, \theta, z)$  con  $z = 0$ , dove  $\theta$  è lo spostamento angolare rispetto alla posizione di equilibrio.

---

<sup>1</sup>Più formalmente, diremo “configurazione” un insieme  $\Gamma$  di coppie ordinate  $\gamma$  della forma  $(i, d)$ , dove  $i \in \{A, B, C\}$  è un cilindro e  $d$  è la sua distanza dall’estremo fissato al rotore. Ovviamente non è possibile ripetere  $i$  in elementi distinti della configurazione, perché ciò non avrebbe significato fisico.

<sup>2</sup>Questa condizione sull’angolo  $\theta_0$  ci permette di approssimare  $\sin(\theta) \sim \theta \quad \forall \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ .

Vale la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\sum \tau_z^{\text{ext}} = \dot{L}_z = I_z^{\text{tot}} \ddot{\theta}$$

**Nota.** In questa sezione abbiamo trascurato la presenza di attriti, ma chiaramente gli attriti ci sono e il moto è smorzato. Nella sezione successiva tratteremo proprio questo fenomeno, determinando, alla luce dei dati raccolti, quanto influisca sul valore di  $g$ .

Poiché l'unica forza esterna al sistema che compie un momento lungo  $\hat{k}$  è la forza peso, si ha:

$$\sum \vec{\tau}_z^{\text{ext}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M\vec{g} = -Mg r_{\text{CM}} \sin(\theta) \hat{k}.$$

L'equazione differenziale che descrive il moto del centro di massa del pendolo fisico sarà allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \sin(\theta)$$

È possibile semplificare il modello fisico approssimando  $\sin(\theta) \simeq \theta$ . Il gruppo di lavoro ha ritenuto valida questa operazione solo quando

$$|\theta_0 - \sin(\theta_0)| < \delta\theta$$

Essendo, nel nostro caso,  $\delta\theta = 0.02 \text{ rad}$ , abbiamo scelto  $\theta_0^{\text{max}} = 0.49 \text{ rad}$ . Infatti:

$$0.49 \text{ rad} - \sin(0.49 \text{ rad}) \simeq 0.019 \text{ rad} \quad 0.50 \text{ rad} - \sin(0.50 \text{ rad}) \simeq 0.021 \text{ rad}$$

Prima di prendere ogni misura, il gruppo di lavoro si è assicurato che  $\theta_0$  soddisfacesse abbondantemente la condizione  $\theta_0 < \theta_0^{\text{max}}$ .

L'equazione differenziale semplificata è allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

Questa equazione descrive un moto armonico. Le soluzioni sono infatti del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}} \quad \text{è detta "pulsazione"}.$$

Possiamo tuttavia facilmente esprimere  $\omega$  in funzione del periodo  $T$  del moto oscillatorio, più semplice da calcolare dai dati acquisiti. Vale infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e quindi} \quad \frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T^2}{4\pi^2}$$

La formula utilizzata per il calcolo di  $I_z^{\text{tot}}$  riflette la composizione del sistema, sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia:

$$I_z^{\text{tot}} = I_{z,\text{rotore}} + I_{z,\text{asta}} + \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{z,\gamma}$$

Chiaramente, per calcolare i momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è necessario applicare il teorema di Huygens-Steiner a quelli calcolati sui rispettivi centri di massa:

$$I_{z,\text{asta}} = I_{\text{CM},\text{asta}} + m_{\text{asta}} \left( \frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2$$

$$I_{z,(i,d)} = I_{\text{CM},i} + m_i \left( d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2 \quad \forall (i,d) \in \Gamma$$

Per calcolare il termine  $Mr_{\text{CM}}$ , si osservi che, per la definizione di posizione del centro di massa, la massa totale si semplifica:

$$\begin{aligned} Mr_{\text{CM}} &= M \cdot \frac{1}{M} \left( m_{\text{rotore}} \cdot 0 + m_{\text{asta}} r_{\text{CM},\text{asta}} + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i r_{\text{CM},i} \right) \\ &= m_{\text{asta}} \left( \frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i \left( d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo le misure, dirette e indirette, utilizzate per il calcolo dei momenti d'inerzia:

Oggetto	$l$ (cm)	$\varnothing$ (mm)	$m$ (g)	$I_{\text{CM}}$ ( $10^{-5} \text{ kg m}^2$ )
Asta	$60.0 \pm 0.1$	$5.94 \pm 0.01$	$45.82 \pm 0.01$	$568.5 \pm 1.5$
Rotore	N./A.	$13.41 \pm 0.01$	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

$i$	$m_i$ (g)	$d_i^{\text{ext}}$ (mm)	$d_i^{\text{int}}$ (mm)	$h_i$ (mm)	$I_{\text{CM},i}$ ( $\text{mg m}^2$ )
A	$115.95 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.93 \pm 0.01$	$10.62 \pm 0.03$
B	$115.86 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.89 \pm 0.01$	$10.59 \pm 0.03$
C	$71.46 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$12.08 \pm 0.01$	$5.047 \pm 0.018$

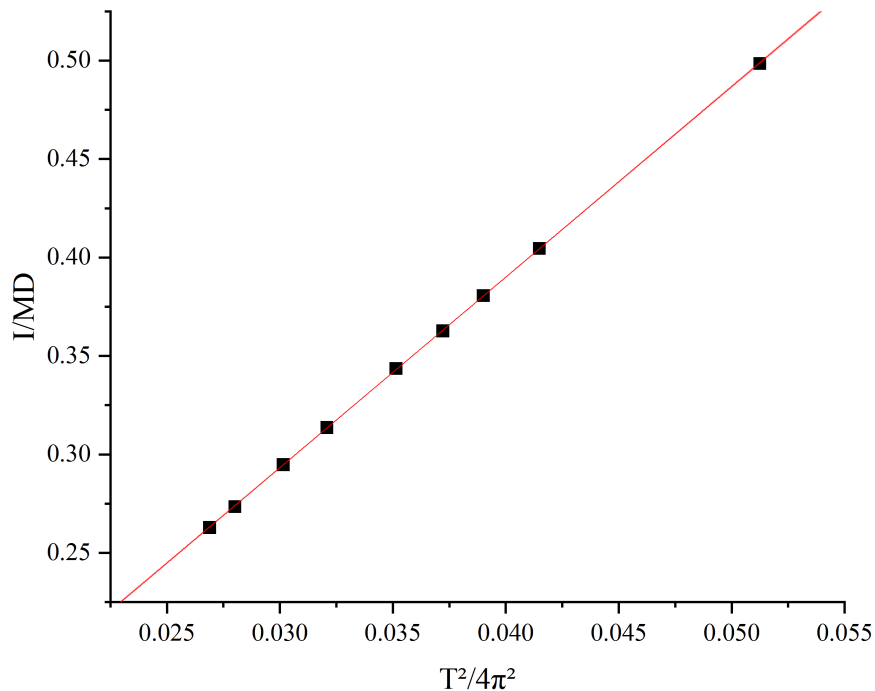
[\*] *Valori dati*

Il periodo dell'oscillazione è stato misurato individuando  $N + 1$  zeri consecutivi di  $\theta(t)$ , diciamo  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ . Allora, poiché tra uno zero e l'altro corre metà periodo, è possibile calcolare  $T$  in questo modo:  $T = \frac{2}{N}(t_N - t_0)$

Il gruppo di lavoro ha scelto  $N$  di volta in volta, in modo tale che fosse proporzionale al numero di oscillazioni compiute dal pendolo prima di fermarsi. Complessivamente,  $N$  ha assunto valori da 30 a 180.

Come descritto sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione  $\Gamma$ , i valori di  $\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}}$  e  $\frac{T^2}{4\pi^2}$ , riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di  $g$  come coefficiente angolare di una retta di regressione.



- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti,  $(0.003 \pm 0.005)$  m è compatibile con 0 m.
- Il valore di  $g$  atteso è  $9.806 \text{ m/s}^2$ ; si può osservare facilmente che il valore misurato,  $(9.9 \pm 0.5) \text{ m/s}^2$ , è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di  $g$  compatibile con quella attesa.

## 2.2 Misura dello smorzamento

*In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione  $\Gamma = \{\}$ , dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.*

*Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.*

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima,  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta} - \frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

dove  $\lambda$  è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto,  $\omega$ , è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}}.$$

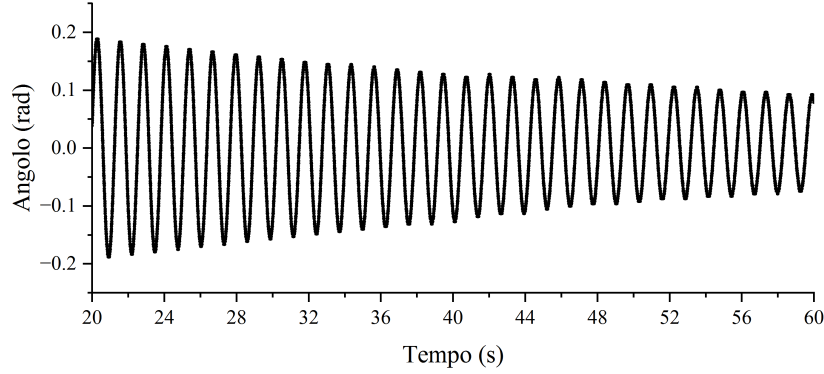


Figura 1: *Parte dei dati di un'acquisizione di  $\theta(t)$  con  $\Gamma = \{\}$ , come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare  $\lambda$ , il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{\theta_k\}$  tali che  $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$ .
2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come  $\delta t_{\text{picco}}$  la semidisersione  $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$ .
3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata<sup>3</sup>) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio  $-\lambda$ .
4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con  $\theta$  cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di  $\lambda$ :  $\lambda_{\min}$  e  $\lambda_{\max}$ . Abbiamo scelto di porre  $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ .

---

<sup>3</sup> $\delta \ln |\theta|$ , infatti, varia molto, nonostante  $\delta |\theta|$  sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

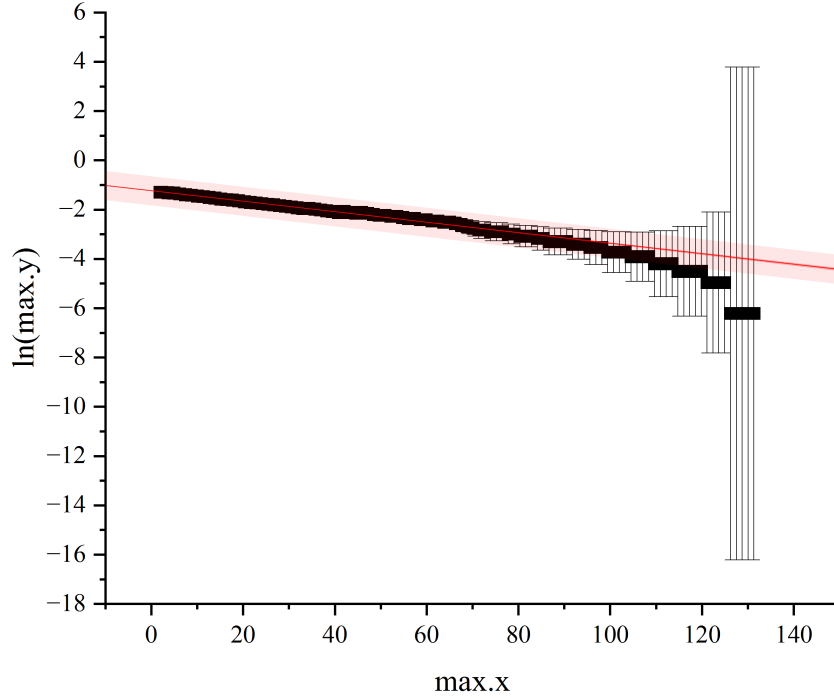


Figura 2:  $\ln \theta(t_{massimi})$ , su scala logaritmica. Sono riportate anche le barre di errore. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.

Poiché l'obiettivo è calcolare  $g$ , la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

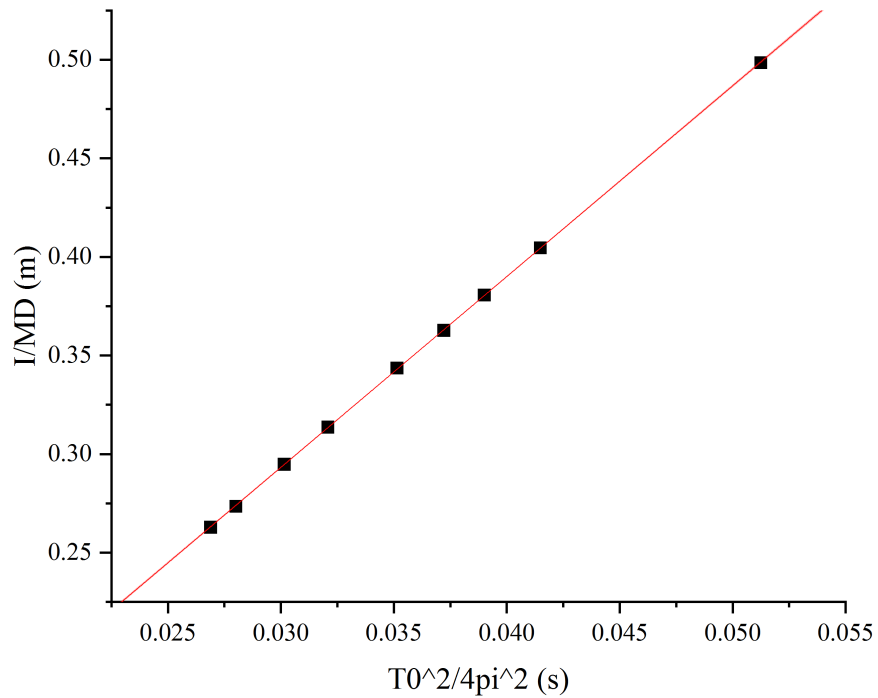
$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione  $\Gamma$ , si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.





I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

1. Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m (compatibile con 0)
2. Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup> (compatibile con  $g_{\text{atteso}} = 9.805$  m/s<sup>2</sup>)

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di  $g$  risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.