

# Laboratorio di Fisica 1

## R3: Misura del modulo del campo gravitazionale locale

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

18/10/2023 – 25/10/2023

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato indirettamente il modulo del campo gravitazionale locale ( $\vec{g}$ ) con due metodi distinti: dapprima facendo cadere due palline da ferme, successivamente tenendo conto di distanze diverse e velocità iniziali diverse.

## 1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Due fototraguardi con contatore di impulsi	1 $\mu\text{s}$	99 999 999 $\mu\text{s}$	1 $\mu\text{s}$
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
<b>Altro</b>	<b>Descrizione/Note</b>		
Sistema di sgancio elettropneumatico	Usato, tramite comando manuale, per rilasciare le sferette in modo riproducibile.		
Livella	Utile per assicurarsi che i fototraguardi siano orizzontali.		
Due sferette (con diametri distinti)	Indicheremo con $A, B$ le due sferette e con $\varnothing_A, \varnothing_B$ i rispettivi diametri: $\varnothing_A = (24.63 \pm 0.01) \text{ mm}$ $\varnothing_B = (22.23 \pm 0.01) \text{ mm}$		

## 2 Esperienza e procedimento di misura

### 2.1 Misurazione di $\vec{g}$ con $v_0 = 0$

1. Misuriamo con il metro a nastro la distanza  $d_0$  tra il sistema di sgancio e il fototraguardo. Detto  $\varnothing_i$  il diametro dell' $i$ -esima pallina, la distanza percorsa dalla pallina nel tempo che misureremo sarà allora  $d_0 - \frac{1}{2}\varnothing_i$ .
2. Dopo aver acceso e impostato il contatore di impulsi adeguatamente facciamo cadere la sferetta attraverso il sistema di sgancio, ottenendo così il suo tempo di caduta: eseguiamo questa misura 100 volte per ognuna delle due sferette.

Di seguito sono riportate le misure così ottenute:

$$d_0 = (125.9 \pm 0.1) \text{ cm}$$

Grave $i$	Massa $m_i$ (g)	Posizione $x_i$ (cm)	Allungamento $(\Delta x)_i$ (cm)
$A$	$407,73 \pm 0.01$	$7,9 \pm 0.1$	$4,6 \pm 0.2$
$B$	$542,47 \pm 0.01$	$9,6 \pm 0.1$	$6,3 \pm 0.2$
$C$	$667,82 \pm 0.01$	$11,3 \pm 0.1$	$8,0 \pm 0.2$
$A + B$	$950,22 \pm 0.01$	$14,4 \pm 0.1$	$11,1 \pm 0.2$
$A + C$	$1085,56 \pm 0.01$	$15,9 \pm 0.1$	$12,6 \pm 0.2$
$B + C$	$1220,28 \pm 0.01$	$17,5 \pm 0.1$	$14,2 \pm 0.2$
$A + B + C$	$1628,02 \pm 0.01$	$22,2 \pm 0.1$	$18,9 \pm 0.2$

Per determinare la costante elastica  $k$  della molla, abbiamo effettuato una regressione lineare (non pesata) dei dati così ottenuti, facendo riferimento alla seguente relazione (che segue direttamente dalla legge di Hooke, ponendo  $F_{\text{elastica}} = F_{\text{peso}}$ ):

$$\Delta x = \frac{g}{k} m$$

Detto  $b = b_{\text{best}} \pm \delta b$  il coefficiente angolare della retta di regressione, vale allora:

$$k = \frac{\delta g}{g_{\text{best}}} \quad \wedge \quad \frac{\delta k}{k_{\text{best}}} = \frac{\delta g}{g_{\text{best}}} + \frac{\delta b}{b_{\text{best}}}$$

Si noti che l'intercetta della retta di regressione dev'essere compatibile con 0.

**Osservazione.**  $g$  non può essere considerata una costante nota con certezza, poiché, secondo la legge di gravitazione universale,  $g$  dipende dalla distanza dal centro di massa della Terra: che  $g$  sia costante al variare della posizione del grave è solo un'approssimazione. Pertanto, abbiamo considerato  $g = (9.81 \pm 0.01) \text{ m/s}^2$ .

Ecco la retta di regressione e i relativi risultati:

Figura 1: La retta di regressione (in rosso) e la sua regione di incertezza (in rosa).

- $a = (0.02 \pm 0.12) \text{ cm}$  (compatibile con 0)
- $b = (11.62 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} \text{ cm/g} = (11.62 \pm 0.12) \cdot 10^{-2} \text{ m/kg}$
- $k = (84.4 \pm 0.8) \text{ N/m}$

## 2.2 Misurazione del campo gravitazionale con $v_0 \neq 0$

1. Consideriamo la distanza tra i due fototraguardi e impostiamo i fotodiodi del contatore su A+B.
2. Usando solo
  - (a) Appeso il campione alla molla, allineiamo i due fototraguardi aiutandoci con la livella, in modo tale che possano rilevare le oscillazioni nel modo più accurato possibile;
  - (b) Tiriamo leggermente il campione verso il basso e poi lo rilasciamo, in modo che il sistema molla inizi a oscillare con direzione il più possibile parallela a  $\vec{g}$ ;
  - (c) Attesa la stabilizzazione dell'oscillazione, avviamo l'acquisizione della misura di un tempo (20 periodi)  $20T_i$ .
  - (d) Ripetiamo molte volte (in tutto  $N_{20T_i}$ ) i punti (b) e (c). In particolare,  $N_{20T_A} = N_{20T_B} = 25$  e  $N_{20T_C} = N_{20T_{A+B}} = 30$ .
3. Infine, misuriamo con la bilancia, separatamente, la massa della molla  $m_m$  e la massa del gancio  $m_g$ .

Infatti, nel caso dinamico, il contributo di queste masse *non* si annulla; in particolare, la massa del gancio contribuisce appieno (in quanto è solidale col grave), mentre la massa della molla contribuisce per circa  $\frac{1}{3}$ . La massa effettiva da considerare per ogni grave sarà allora:

$$((m_{\text{eff}})_i)_{\text{best}} = (m_i)_{\text{best}} + (m_g)_{\text{best}} + \frac{1}{3}(m_m)_{\text{best}}$$

$$\delta(m_{\text{eff}})_i = \delta m_i + \delta m_g + \frac{1}{3}\delta m_m$$

Di seguito sono riportate le distribuzioni dei dati raccolti:

Figura 2: Istogrammi dei periodi delle oscillazioni di A e B

Figura 3: Istogrammi dei periodi delle oscillazioni di C e A + B

Poiché i nostri dati hanno assunto distribuzioni grossolanamente approssimabili a gaussiane, possiamo procedere al calcolo di  $k$ , utilizzando, per ogni grave  $i$ , i seguenti valori:

$$(20T_i)_{\text{best}} = \overline{20T_i} \quad \wedge \quad \delta(20T_i) = \sigma_{\overline{20T_i}} = \frac{\sigma_{20T_i}}{\sqrt{N_{20T_i}}}$$

dove  $\overline{20T_i}$  e  $\sigma_{20T_i}$  indicano rispettivamente media e deviazione standard dei tempi.

Per determinare la costante elastica della molla, abbiamo effettuato una regressione lineare (stavolta pesata) sui quadrati dei valori medi dei tempi ( $T_i^2$ , con  $\delta T_i^2 = 5 \cdot 10^{-3} (20T_i)_{\text{best}} \delta(20T_i)$ )<sup>2</sup> rispetto alla massa ( $m_{\text{eff}})_i$ , facendo riferimento alla relazione  $T_i^2 = \frac{4\pi^2}{k} (m_{\text{eff}})_i$ . Allora, detto  $b$  il coefficiente angolare della retta di regressione, varrà:

$$k_{\text{best}} = \frac{4\pi^2}{b_{\text{best}}} \quad \wedge \quad \frac{\delta k}{k_{\text{best}}} = \frac{\delta b}{b_{\text{best}}}$$

Si noti che, anche in questo caso, l'intercetta  $a$  della retta dev'essere compatibile con 0.

Di seguito è riportata la retta di regressione, assieme ai risultati ottenuti:

Figura 4: La retta di regressione (in rosso) e la sua regione di incertezza (in rosa).

- $a = (0.02 \pm 0.19) \text{ cm}$  (compatibile con 0)
- $b = (4.604 \pm 0.002) \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{g} = (46.04 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ s}^2/\text{kg}$
- $k = (85.74 \pm 0.04) \text{ N/m}$

### 3 Conclusioni

Per valutare numericamente la consistenza tra i due valori di  $k$  ottenuti, abbiamo calcolato il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{|(k_{\text{statica}})_{\text{best}} - (k_{\text{dinamica}})_{\text{best}}|}{\delta k_{\text{statica}} + \delta k_{\text{dinamica}}}$$

Allora  $k_{\text{statica}}$  e  $k_{\text{dinamica}}$  sono consistenti se e solo se  $\varepsilon \leq 1$ .

---

<sup>2</sup>La formula per l'errore su  $T_i^2$  segue direttamente dalla propagazione degli errori:

$$\frac{\delta T_i^2}{(T_i^2)_{\text{best}}} = 2 \frac{\delta T_i}{(T_i)_{\text{best}}} \quad \delta T_i^2 = 2 (T_i)_{\text{best}} \delta T_i \quad \delta T_i^2 = \frac{(20T_i)_{\text{best}} (\delta 20T_i)}{200}$$

da cui quanto riportato sopra. Si osservi che  $\delta T_i^2$  dipende da  $(20T_i)_{\text{best}}$ : proprio questo è il motivo dietro alla scelta del metodo pesato per la regressione lineare.

Nel nostro caso,  $\varepsilon = 1.33$ . Il gruppo di lavoro ha ipotizzato che questa inconsistenza (comunque contenuta, seppur non trascurabile) fra le due misure possa essere ragionevolmente giustificata dalla difficoltà incontrata nel ridurre al minimo le oscillazioni in direzione perpendicolare a  $\vec{g}$ ; considerato inoltre che la posizione dei fototraguardi non era ottimale, ciò potrebbe avere ulteriormente influenzato la distribuzione dei tempi. È in effetti possibile osservare che le distribuzioni da noi ottenute non sono, il più delle volte, del tutto simmetriche: la moda sembra essersi spostata leggermente a sinistra – un possibile sintomo dell’influenza di un errore sistematico sulle misure.