

Geometria - Esercizi 4

Riccardo Bergamaschi

19/10/2023

Esercizio 1

1. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, BA non definito
2. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 26 & -28 \\ 13 & -26 \end{bmatrix}$
3. $AB = [14]$, $BA = \begin{bmatrix} 15 & -3 & 9 & 33 & -6 \\ -10 & 2 & -6 & -22 & 4 \\ -20 & 4 & -12 & 44 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$
4. $AB = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 12 \\ 8 & -2 & 6 \\ -8 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 17 & 5 \end{bmatrix}$
5. $AB = \begin{bmatrix} -2i+4 & 1+5i & 6-4i \\ 4i & i-2 & 1+2i \\ 4-6i & 1+4i & 4-i \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} i-1 & 6-i & -1+3i \\ 0 & 4-4i & 2-4i \\ 2i & 5-6i & 1-i \end{bmatrix}$

Esercizio 3

1. Poiché A e B sono ortogonali, $(A^T)^{-1} = A$ e $(B^T)^{-1} = B$.
Allora $\left((AB)^T\right)^{-1} = (A^T B^T)^{-1} = (A^T)^{-1} (B^T)^{-1} = AB$, e quindi AB è anch'essa ortogonale. ■
2. A è invertibile se e solo se esiste $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversa di A , ovvero tale che $AB = BA = \text{Id}_n$. Essendo A ortogonale, per definizione A^T è tale per cui $AA^T = A^T A = \text{Id}_n$. Di conseguenza, A^T è l'inversa di A , ovvero $A^T = A^{-1}$. In particolare, A è invertibile. ■
3. $A^{-1} = A^T$ è ortogonale, poiché $\left((A^T)^T\right)^{-1} = A^{-1} = A^T$. ■

Esercizio 4

1. Poiché A e B sono unitarie, $(A^*)^{-1} = A$ e $(B^*)^{-1} = B$.

Allora $((AB)^*)^{-1} = (A^*B^*)^{-1} = (A^*)^{-1}(B^*)^{-1} = AB$, e quindi AB è anch'essa unitaria. ■

2. A è invertibile se e solo se esiste $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ inversa di A , ovvero tale che $AB = BA = \text{Id}_n$. Essendo A unitaria, per definizione A^* è tale per cui $AA^* = A^*A = \text{Id}_n$. Di conseguenza, A^* è l'inversa di A , ovvero $A^* = A^{-1}$. In particolare, A è invertibile. ■

3. $A^{-1} = A^*$ è ortogonale, poiché $((A^*)^*)^{-1} = A^{-1} = A^*$. ■

Esercizio 5

1. $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq \text{Id}_2$,
quindi A non è ortogonale.

2. $BB^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Id}_2$, quindi
 B è ortogonale.

- 3.

$$\begin{aligned} C C^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Id}_3 \end{aligned}$$

Quindi C è ortogonale.

4.

$$\begin{aligned}
DD^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Id}_4
\end{aligned}$$

Quindi D è ortogonale.

Esercizio 6

W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{n \times q}(\mathbb{K})$ su \mathbb{K} solo se è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare.

- W è chiuso rispetto alla somma. Siano $A_1, A_2 \in W$; allora:

$$BA_1 = 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})} \wedge BA_2 = 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})}$$

$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2 = 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})} + 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})}$$

Quindi $A_1 + A_2 \in W$.

- W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare. Siano $A \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$; allora $BA = 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})}$ e:

$$B(\lambda A) = \lambda BA = \lambda 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{K})}$$

Quindi $\lambda A \in W$.

Da queste due considerazioni, segue, per definizione, la tesi. ■

Esercizio 7

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(B^{-1}AB) &= \text{Tr}(B^{-1}) \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) = \text{Tr}(B^{-1}) \text{Tr}(B) \text{Tr}(A) \\
&= \text{Tr}(B^{-1}B) \text{Tr}(A) = \text{Tr}(\text{Id}_n) \text{Tr}(A) = \text{Tr}(A) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Esercizio 8

Essendo A e B ortogonali, valgono:

$$(A^T)^{-1} = A \quad \wedge \quad (B^T)^{-1} = B \quad \wedge \quad B^{-1} = B^T$$

Allora:

$$\begin{aligned} \left((BAB^T)^T\right)^{-1} &= \left((B^T)^T A^T B^T\right)^{-1} = (BA^T B^T)^{-1} \\ &= (B^T)^{-1} (A^T)^{-1} B^{-1} = BAB^T \end{aligned}$$

Quindi anche BAB^T è ortogonale. ■

Esercizio 9

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det[\lambda A^1, \lambda A^2, \dots, \lambda A^n] \\ &= \lambda \det[A^1, \lambda A^2, \dots, \lambda A^n] \\ &= \lambda^2 \det[A^1, A^2, \dots, \lambda A^n] \\ &= \dots \\ &= \lambda^n \det[A^1, A^2, \dots, A^n] \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

■

Esercizio 10

A è antisimmetrica se e solo se $A^T = -A$. Allora:

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det(A)$$

Essendo n dispari, $(-1)^n = -1$. Otteniamo dunque l'equazione:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det(A) \\ 2 \det(A) &= 0 \\ \det(A) &= 0 \end{aligned}$$

Da cui la tesi. ■

Esercizio 11

$$1. \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 8 + 3 = 11$$

$$2. \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 17$$

3.

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3\end{aligned}$$

Esercizio 12

Una matrice quadrata è singolare se e solo se ha determinante 0.

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 2a & 1 & 3 \\ -a & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 5a & -14 & 0 \\ -a & 5 & 1 \\ 4a+2 & -14 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5a & -14 \\ 4a+2 & -14 \end{bmatrix} \\ &= -14(5a) - (-14)(4a+2) = -14(a-2)\end{aligned}$$

Allora, la matrice è quadrata se e solo se $-14(a-2) = 0$, ovvero $a = 2$.

Esercizio 13

$0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}$ è una matrice diagonale ma non invertibile; infatti:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad 0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}A = 0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})} \neq \text{Id}_2$$

Esercizio 14

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ è antisimmetrica e invertibile; infatti:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$$

Esercizio 15

In quanto diagonale, $0_{\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}$ è anche simmetrica. Inoltre, abbiamo già dimostrato che essa non è invertibile.

Esercizio 16

Identico all'esercizio 13

Esercizio 17

Identico all'esercizio 15

Esercizio 18

Ogni matrice reale simmetrica è anche, vista come matrice complessa, Hermitiana. Infatti, $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e, fissata $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, vale $A^* = \overline{A^T} = \overline{A} = A$. Di conseguenza, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è Hermitiana (in quanto simmetrica) e invertibile (poiché $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$).