Laboratorio di Fisica 1
R3: Misura del modulo del campo gravitazionale locale

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

18/10/2023 – 25/10/2023

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato indirettamente il modulo del campo gravitazionale locale con due metodi distinti: dapprima facendo cadere due palline da ferme, successivamente tenendo conto di distanze diverse e velocità iniziali diverse.

1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	**Soglia**	**Portata**	**Sensibilità**
Fototraguardi con contatore di impulsi	1 µs	99 999 999 µs	1 µs
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g

Altro	**Descrizione/Note**
Sistema di sgancio elettropneumatico	Usato, tramite comando manuale, per rilasciare le sferette in modo riproducibile.
Due sferette (con diametri distinti)	Indicheremo con A, B le due sferette; il diametro di A è $24,63 \pm 0.1$, mentre quello di b è $22,23 \pm 0.1$.
Livella	Utile per assicurarsi che i fototraguardi siano orizzontali.

2 Esperienza e procedimento di misura

2.1 Misurazione della costante elastica nel caso statico

1. Fissiamo il righello parallelo a $\vec{g}$ e solidale all'estremo fisso della molla. Individuiamo allora un punto P del sistema, solidale all'estremo libero della molla, che terremo come riferimento per misurare (indirettamente) tutti gli allungamenti.

2. Misuriamo allora la posizione x_0 di P (rispetto allo 0 del righello) senza caricare alcuna massa sul gancio: possiamo considerare questa la lunghezza a riposo della molla, in quanto le masse di molla e gancio non contribuiscono all'allungamento causato dall'aggiunta di un grave.

3. Per ogni grave[1] i:

   (a) Ne misuriamo la massa m_i con la bilancia di precisione (nel caso di combinazioni di più campioni, ne misuriamo direttamente la massa complessiva);

   (b) Appeso il grave alla molla, ne misuriamo indirettamente l'allungamento $(\Delta x)_i$, sottraendo x_0 alla misura x_i della sua posizione (e allora $\delta(\Delta x)_i = \delta x_0 + \delta x_i$). Per ridurre ulteriormente la probabilità di commettere errori di parallasse, ripetiamo il procedimento tre volte, tenendo solamente la misura più vicina alla media.

Di seguito sono riportate le misure così ottenute:

$$x_0 = (3.3 \pm 0.1)\,\text{cm}$$

Grave i	**Massa** m_i (g)	**Posizione** x_i (cm)	**Allungamento** $(\Delta x)_i$ (cm)
A	$407,73 \pm 0.01$	$7,9 \pm 0.1$	$4,6 \pm 0.2$
B	$542,47 \pm 0.01$	$9,6 \pm 0.1$	$6,3 \pm 0.2$
C	$667,82 \pm 0.01$	$11,3 \pm 0.1$	$8,0 \pm 0.2$
$A+B$	$950,22 \pm 0.01$	$14,4 \pm 0.1$	$11,1 \pm 0.2$
$A+C$	$1085,56 \pm 0.01$	$15,9 \pm 0.1$	$12,6 \pm 0.2$
$B+C$	$1220,28 \pm 0.01$	$17,5 \pm 0.1$	$14,2 \pm 0.2$
$A+B+C$	$1628,02 \pm 0.01$	$22,2 \pm 0.1$	$18,9 \pm 0.2$

Per determinare la costante elastica k della molla, abbiamo effettuato una regressione lineare (non pesata) dei dati così ottenuti, facendo riferimento alla seguente relazione (che segue direttamente dalla legge di Hooke, ponendo $F_{\text{elastica}} = F_{\text{peso}}$):

$$\Delta x = \frac{g}{k} m$$

Detto $b = b_{\text{best}} \pm \delta b$ il coefficiente angolare della retta di regressione, vale allora:

$$k = \frac{\delta g}{g_{\text{best}}} \qquad \wedge \qquad \frac{\delta k}{k_{\text{best}}} = \frac{\delta g}{g_{\text{best}}} + \frac{\delta b}{b_{\text{best}}}$$

Si noti che l'intercetta della retta di regressione dev'essere compatibile con 0.

Osservazione. *g non può essere considerata una costante nota con certezza, poiché, secondo la legge di gravitazione universale, g dipende dalla distanza dal centro di massa della Terra: che g sia costante al variare della posizione del grave è solo un'approssimazione. Pertanto, abbiamo considerato $g = (9.81 \pm 0.01)\,\text{m/s}^2$.*

Ecco la retta di regressione e i relativi risultati:

`SaticoReg.jpg`

Figura 1: La retta di regressione (in rosso) e la sua regione di incertezza (in rosa).

- $a = (0.02 \pm 0.12)\,\text{cm}$ (compatibile con 0)
- $b = (11.62 \pm 0.12) \cdot 10^{-3}\ \text{cm/g} = (11.62 \pm 0.12) \cdot 10^{-2}\ \text{m/kg}$
- $k = (84.4 \pm 0.8)\,\text{N/m}$

2.2 Misurazione della costante elastica nel caso dinamico

1. Acceso il contatore di impulsi, lo impostiamo in modo tale che, dopo aver avviato l'acquisizione dati, esso misuri venti periodi dell'oscillazione.
2. Per ogni grave i fra i quattro più leggeri[1] (A, B, C e $A + B$):
   (a) Appeso il campione alla molla, allineiamo i due fototraguardi aiutandoci con la livella, in modo tale che possano rilevare le oscillazioni nel modo più accurato possibile;
   (b) Tiriamo leggermente il campione verso il basso e poi lo rilasciamo, in modo che il sistema molla inizi a oscillare con direzione il più possibile parallela a $\vec{g}$;

[1] Nel caso dinamico non abbiamo usato tutte le combinazioni di campioni, per evitare di stressare eccessivamente la molla.

(c) Attesa la stabilizzazione dell'oscillazione, avviamo l'acquisizione della misura di un tempo (20 periodi) $20T_i$.

(d) Ripetiamo molte volte (in tutto N_{20T_i}) i punti (b) e (c). In particolare, $N_{20T_A} = N_{20T_B} = 25$ e $N_{20T_C} = N_{20T_{A+B}} = 30$.

3. Infine, misuriamo con la bilancia, separatamente, la massa della molla m_m e la massa del gancio m_g.

Infatti, nel caso dinamico, il contributo di queste masse *non* si annulla; in particolare, la massa del gancio contribuisce appieno (in quanto è solidale col grave), mentre la massa della molla contribuisce per circa $\frac{1}{3}$. La massa effettiva da considerare per ogni grave sarà allora:

$$((m_{\text{eff}})_i)_{\text{best}} = (m_i)_{\text{best}} + (m_g)_{\text{best}} + \frac{1}{3}(m_m)_{\text{best}}$$

$$\delta\,(m_{\text{eff}})_i = \delta m_i + \delta m_g + \frac{1}{3}\delta m_m$$

Di seguito sono riportate le distribuzioni dei dati raccolti:

Dinamico1.jpg

Dinamico2.jpg

Dinamico3.jpg

Dinamico4.jpg

Poiché i nostri dati hanno assunto distribuzioni grossolanamente approssimabili a gaussiane, possiamo procedere al calcolo di k, utilizzando, per ogni grave i, i seguenti valori:

$$(20T_i)_{\text{best}} = \overline{20T_i} \qquad \wedge \qquad \delta\,(20T_i) = \sigma_{\overline{20T_i}} = \frac{\sigma_{20T_i}}{\sqrt{N_{20T_i}}}$$

dove $\overline{20T_i}$ e σ_{20T_i} indicano rispettivamente media e deviazione standard dei tempi.

Per determinare la costante elastica della molla, abbiamo effettuato una regressione lineare (stavolta pesata) sui quadrati dei valori medi dei tempi (T_i^2, con $\delta T_i^2 = 5 \cdot 10^{-3}(20T_i)_{\text{best}}\delta(20T_i)\ )^2$ rispetto alla massa $(m_{\text{eff}})_i$, facendo riferimento alla relazione $T_i^2 = \frac{4\pi^2}{k}\,(m_{\text{eff}})_i$. Allora, detto b il coefficiente angolare della retta di regressione, varrà:

$$k_{\text{best}} = \frac{4\pi^2}{b_{\text{best}}} \qquad \wedge \qquad \frac{\delta k}{k_{\text{best}}} = \frac{\delta b}{b_{\text{best}}}$$

Si noti che, anche in questo caso, l'intercetta a della retta dev'essere compatibile con 0.

Di seguito è riportata la retta di regressione, assieme ai risultati ottenuti:

DinamicoReg.jpg

Figura 4: La retta di regressione (in rosso) e la sua regione di incertezza (in rosa).

- $a = (0.02 \pm 0.19)\,\text{cm}$ (compatibile con 0)
- $b = (4.604 \pm 0.002) \cdot 10^{-4}\ \text{s}^2/\text{g} = (46.04 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}\ \text{s}^2/\text{kg}$
- $k = (85.74 \pm 0.04)\,\text{N/m}$

[2] La formula per l'errore su T_i^2 segue direttamente dalla propagazione degli errori:

$$\frac{\delta T_i^2}{(T_i^2)_{\text{best}}} = 2\frac{\delta T_i}{(T_i)_{\text{best}}} \qquad \delta T_i^2 = 2\,(T_i)_{\text{best}}\,\delta T_i \qquad \delta T_i^2 = \frac{(20T_i)_{\text{best}}\,(\delta 20T_i)}{200}$$

da cui quanto riportato sopra. Si osservi che δT_i^2 dipende da $(20T_i)_{\text{best}}$: proprio questo è il motivo dietro alla scelta del metodo pesato per la regressione lineare.

3 Conclusioni

Per valutare numericamente la consistenza tra i due valori di k ottenuti, abbiamo calcolato il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{|(k_{\text{statica}})_{\text{best}} - (k_{\text{dinamica}})_{\text{best}}|}{\delta k_{\text{statica}} + \delta k_{\text{dinamica}}}$$

Allora k_{statica} e k_{dinamica} sono consistenti se e solo se $\varepsilon \leq 1$.

Nel nostro caso, $\varepsilon = 1.33$. Il gruppo di lavoro ha ipotizzato che questa inconsistenza (comunque contenuta, seppur non trascurabile) fra le due misure possa essere ragionevolmente giustificata dalla difficoltà incontrata nel ridurre al minimo le oscillazioni in direzione perpendicolare a $\vec{g}$; considerato inoltre che la posizione dei fototraguardi non era ottimale, ciò potrebbe avere ulteriormente influenzato la distribuzione dei tempi. È in effetti possibile osservare che le distribuzioni da noi ottenute non sono, il più delle volte, del tutto simmetriche: la moda sembra essersi spostata leggermente a sinistra – un possibile sintomo dell'influenza di un errore sistematico sulle misure.