Laboratorio di Fisica 1
R11: Calorimetro ad azoto liquido

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

14/05/2024 – 21/05/2024

Sommario

Mediante un calorimetro ad azoto liquido, il gruppo di lavoro ha misurato i calori specifici di quattro campioni per risalirne alla natura; per fare ciò è stato necessario determinare il calore latente di vaporizzazione dell'azoto.

0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	**Soglia**	**Portata**	**Sensibilità**
Amperometro	0.001 A	N./A.	0.001 A
Voltmetro	0.01 V	N./A.	0.01 V
Cronometro	0.01 s	99.99 s	0.01 s
Bilancia di precisione	0.01 g	4000.00 g	0.01 g

Altro	**Descrizione/Note**
Calorimetro	Dotato di un tappo con un foro centrale per potervi immergere i materiali e permettere la fuoriuscita dell'azoto gassoso.
Videocamera	Utilizzata per osservare a posteriori i rilevamenti del cronometro e della bilancia di precisione.
Generatore	Per mandare una corrente verso la resistenza presente nel tappo del calorimetro.

1 Misurazione del calore latente di vaporizzazione dell'azoto

1.1 Esperienza e procedimento di misura

1. Posto il calorimetro sopra alla bilancia, avviamo la cattura del filmato.
2. Dopo circa una decina di secondi (non è rilevante per la riuscita dell'esperienza), tramite il generatore forniamo calore all'azoto per mezzo della resistenza.
3. Aspettato ... interrompiamo il flusso di calore e dopo un'altra decina di secondi terminiamo la registrazione video.

1.2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

Grazie al filmato possiamo graficare la variazione della massa in funzione del tempo e, successivamente, costruire tre distinte rette di regressione. . . .

Essendo note, oltre all'intervallo di tempo, tensione ed intensità della corrente, è nota anche la quantità di calore fornito: $Q = I\Delta V \Delta t$.

Il calore latente dell'azoto liquido sarà:

Ripetiamo 9 volte i seguenti passi:

1. Scelta arbitrariamente una configurazione Γ, fissiamo all'asta i cilindri coinvolti, servendoci del foro centrale. Misuriamo poi, mediante il metro a nastro, le posizioni dei cilindri lungo l'asta rispetto al suo estremo fisso.
2. Servendoci dell'apposito programma, avviamo l'acquisizione dell'angolo in funzione del tempo ($\theta(t)$, lo definiremo formalmente più avanti).
3. Inclinando l'asta rispetto alla sua posizione di equilibrio di un angolo prefissato θ_0, sufficientemente piccolo[1], diamo inizio al moto del pendolo. Acquisiamo dati fino all'arresto del moto.

2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

Nota. *Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.*

2.1 Misura di $|\vec{g}|$

Scegliamo un sistema di riferimento cilindrico, con origine all'intersezione fra l'asse di rotazione e il piano, ad esso perpendicolare, contenente il centro di massa, versore $\hat{r}$ parallelo a $\vec{g}$ e versore $\hat{k}$ diretto lungo l'asse di rotazione del sistema.

[1] Questa condizione sull'angolo θ_0 ci permette di approssimare $\sin(\theta) \sim \theta \quad \forall \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$.

La posizione del centro di massa del pendolo fisico sarà allora descritta da $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = (r_{\mathrm{CM}}, \theta, z)$ con $z = 0$, dove θ è lo spostamento angolare rispetto alla posizione di equilibrio.

Vale la seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\sum \tau_z^{\mathrm{ext}} = \dot{L}_z = I_z^{\mathrm{tot}} \ddot{\theta}$$

Nota. *In questa sezione abbiamo trascurato la presenza di attriti, ma chiaramente gli attriti ci sono e il moto è smorzato. Nella sezione successiva tratteremo proprio questo fenomeno, determinando, alla luce dei dati raccolti, quanto influisca sul valore di g.*

Poiché l'unica forza esterna al sistema che compie un momento lungo $\hat{k}$ è la forza peso, si ha:

$$\sum \vec{\tau}_z^{\mathrm{ext}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times M\vec{g} = -Mg\, r_{\mathrm{CM}} \sin(\theta)\hat{k}.$$

L'equazione differenziale che descrive il moto del centro di massa del pendolo fisico sarà allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}} \sin(\theta)$$

È possibile semplificare il modello fisico approssimando $\sin(\theta) \simeq \theta$. Il gruppo di lavoro ha ritenuto valida questa operazione solo quando

$$|\theta_0 - \sin(\theta_0)| < \delta\theta$$

Essendo, nel nostro caso, $\delta\theta = 0.02\,\mathrm{rad}$, abbiamo scelto $\theta_0^{\mathrm{max}} = 0.49\,\mathrm{rad}$. Infatti:

$$0.49\,\mathrm{rad} - \sin(0.49\,\mathrm{rad}) \simeq 0.019\,\mathrm{rad} \qquad 0.50\,\mathrm{rad} - \sin(0.50\,\mathrm{rad}) \simeq 0.021\,\mathrm{rad}$$

Prima di prendere ogni misura, il gruppo di lavoro si è assicurato che θ_0 soddisfacesse abbondantemente la condizione $|\theta_0| < |\theta_0^{\mathrm{max}}|$.

L'equazione differenziale semplificata è allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}} \theta$$

Questa equazione descrive un moto armonico. Le soluzioni sono infatti del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}}} \quad \text{è detta “pulsazione”.}$$

Possiamo tuttavia facilmente esprimere ω in funzione del periodo T del moto oscillatorio, più semplice da calcolare dai dati acquisiti. Vale infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{I_z^{\mathrm{tot}}}{M r_{\mathrm{CM}}} = g\frac{T^2}{4\pi^2}$$

La formula utilizzata per il calcolo di I_z^{tot} riflette la composizione del sistema, sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia:

$$I_z^{\text{tot}} = I_{z,\text{rotore}} + I_{z,\text{asta}} + \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{z,\gamma}$$

Chiaramente, per calcolare i momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è necessario applicare il teorema di Huygens-Steiner a quelli calcolati sui rispettivi centri di massa[2]:

$$I_{z,\text{asta}} = I_{\text{CM,asta}} + m_{\text{asta}} \left(\frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2$$

$$I_{z,(i,d)} = I_{\text{CM},i} + m_i \left(d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2 \qquad \forall (i,d) \in \Gamma$$

Per calcolare il termine Mr_{CM}, si osservi che, per la definizione di posizione del centro di massa, la massa totale si semplifica:

$$\begin{aligned} Mr_{\text{CM}} &= M \cdot \frac{1}{M} \left(m_{\text{rotore}} \cdot 0 + m_{\text{asta}} r_{\text{CM,asta}} + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i r_{\text{CM},i} \right) \\ &= m_{\text{asta}} \left(\frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i \left(d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo le misure, dirette e indirette, utilizzate per il calcolo dei momenti d'inerzia[3]:

Oggetto	L (cm)	$\varnothing$ (mm)	m (g)	I_{CM} ($10^{-5}\,\text{kg}\,\text{m}^2$)
Asta	60.0 ± 0.1	5.94 ± 0.01	45.82 ± 0.01	568.5 ± 1.5
Rotore	N./A.	13.41 ± 0.01	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

i	m_i (g)	d_i^{ext} (mm)	d_i^{int} (mm)	h_i (mm)	$I_{\text{CM},i}$ ($\text{mg}\,\text{m}^2$)
A	115.95 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	19.93 ± 0.01	10.62 ± 0.03
B	115.86 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	19.89 ± 0.01	10.59 ± 0.03
C	71.46 ± 0.01	29.95 ± 0.05	6.20 ± 0.05	12.08 ± 0.01	5.047 ± 0.018

[*] *Valori dati*

[2] Questi ultimi sono stati calcolati mediante le seguenti formule:

$$I_{\text{CM,asta}} = \frac{1}{12} m_{\text{asta}} L_{\text{asta}}^2 \qquad I_{\text{CM},i} = \frac{1}{16} m_i \left((d_i^{\text{ext}})^2 + (d_i^{\text{int}})^2 \right) + \frac{1}{12} m_i h_i^2 \quad \forall i \in \{A, B, C\}$$

[3] L_{asta} è la lunghezza della parte dell'asta che sporge all'esterno del rotore.

Il periodo dell'oscillazione è stato misurato individuando $N+1$ zeri consecutivi di $\theta(t)$, diciamo $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$. Allora, poiché tra uno zero e l'altro corre metà periodo, è possibile calcolare T in questo modo: $T = \frac{2}{N}(t_N - t_0)$

Il gruppo di lavoro ha scelto N di volta in volta, in modo tale che fosse proporzionale al numero di oscillazioni compiute dal pendolo prima di fermarsi. Complessivamente, N ha assunto valori da 30 a 180.

Come descritto sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione Γ, i valori di $\frac{I_z^{\mathrm{tot}}}{M r_{\mathrm{CM}}}$ e $\frac{T^2}{4\pi^2}$, riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di g come coefficiente angolare di una retta di regressione.

Figura 1: *In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)*

- Intercetta $= (0.003 \pm 0.005)$ m
- Coefficiente angolare $g = (9.68 \pm 0.13)$ m/s^2

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti, (0.003 ± 0.005) m è compatibile con $0\,\mathrm{m}$.
- Il valore di g atteso è $9.806\,\mathrm{m/s^2}$; si può osservare facilmente che il valore misurato, $(9.68 \pm 0.13)\ \mathrm{m/s^2}$, è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di g compatibile con quella attesa.

2.2 Misura dello smorzamento

In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione $\Gamma = \{\}$, dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.

Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima, $\sin(\theta) \simeq \theta$, si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \frac{M g\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}}\theta$$

dove λ è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)\, e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto, ω, è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \qquad \text{con} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{M g\, r_{\mathrm{CM}}}{I_z^{\mathrm{tot}}}}.$$

Figura 2: *Parte dei dati di un'acquisizione di $\theta(t)$ con $\Gamma = \{\}$, come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare λ, il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma $\{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_j\} \times \{\theta_k\}$ tali che $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$.

2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come $\delta t_{\mathrm{picco}}$ la semidispersione $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$.

3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata[4]) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio $-\lambda$.

[4] $\delta \ln|\theta|$, infatti, varia molto, nonostante $\delta|\theta|$ sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con θ cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di λ: λ_{min} e λ_{max}. Abbiamo scelto di porre $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\text{min}} + \lambda_{\text{max}})$.

Figura 3: $\ln|\theta(t)|$ *di massimi e minimi, su scala logaritmica (per* $\Gamma = \{\}$*). Sono riportate anche le barre di errore sull'ordinata. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.*

Poiché l'obiettivo è calcolare g, la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione Γ, si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g\frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.

Figura 4: *In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)*

I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

- Intercetta $= (0.003 \pm 0.005)$ m
- Coefficiente angolare $g = (9.68 \pm 0.13)$ m/s^2

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di g risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.