# Laboratorio di Fisica 1
# R7: Misura di $|\vec{g}|$ mediante pendolo fisico

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

05/03/2024 – 12/03/2024

**Sommario**

Il gruppo di lavoro ha misurato il modulo del campo gravitazionale locale ($g$) studiando il moto oscillatorio di un pendolo fisico.

## 1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

| **Strumento di misura** | **Soglia** | **Portata** | **Sensibilità** |
|---|---|---|---|
| Sensore di rotazione | 0.002 rad | N./A. | 0.002 rad |
| Cronometro | 0.001 s | N./A. | 0.001 s |
| Micrometro ad asta filettata | 0.01 mm | 25.00 mm | 0.01 mm |
| Calibro ventesimale | 0.05 mm | 150.00 mm | 0.05 mm |
| Metro | 0.1 cm | 300.0 cm | 0.1 cm |
| Bilancia di precisione | 0.01 g | 6200.00 g | 0.01 g |

| **Altro** | **Descrizione/Note** |
|---|---|
| Rotore e asta | L'asta, fissata ortogonalmente al rotore ad un estremo, è libera di ruotare grazie ad esso. |
| Tre cilindri (con masse e raggi distinti) | Presentano un foro centrale lungo l'asse di simmetria. Indicheremo con $A, B, C$ i tre cilindri e con 0, $A+B$, $A+C$, $B+C$ e $A+B+C$ le loro combinazioni. |

## 2 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo le masse dei cilindri con la bilancia di precisione, i rispettivi diametri (interni ed esterni) con il calibro ventesimale e le altezze con il micrometro ad asta filettata.

2. Con il metro a nastro misuriamo la lunghezza dell'asta e con il micrometro il suo diametro, nonché il diametro del rotore.

3. Per ogni configurazione di cilindri:

   (a) Fissiamo i cilindri scelti all'asta attraverso il foro centrale e ne misuriamo la distanza dal rotore.

   (b) Avviamo l'acquisizione dell'angolo in funzione del tempo ($\theta(t)$, lo definiremo formalmente più avanti).

   (c) Ruotando l'asta di un angolo prefissato $\theta_0$, sufficientemente piccolo[1], diamo inizio al moto armonico del pendolo. Acquisiamo dati fino all'arresto del moto.

# 3 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

***Nota.*** *Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.*

## 3.1 Misura di $|\vec{g}|$

Di seguito riportiamo i momenti d'inerzia costanti per tutto l'esperimento:

| Oggetto | $l$ (cm) | $\varnothing$ (mm) | $m$ (g) | $I$ ($10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$) |
|---|---|---|---|---|
| Asta | $60.0 \pm 0.1$ | $5.94 \pm 0.01$ | $45.82 \pm 0.01$ | $568.5 \pm 1.5$ |
| Rotore | N./A. | $13.41 \pm 0.01$ | $22.4 \pm 0.1^*$ | $0.058 \pm 0.001^*$ |

[*] *Valori dati*

Di seguito riportiamo massa, diametri (interni ed esterni) e altezza dei tre cilindri.

| $i$ | $m_i$ (g) | $d_i^{\mathrm{ext}}$ (mm) | $d_i^{\mathrm{int}}$ (mm) | $h_i$ (mm) |
|---|---|---|---|---|
| A | $115.95 \pm 0.01$ | $29.95 \pm 0.05$ | $6.20 \pm 0.05$ | $19.93 \pm 0.01$ |
| B | $115.86 \pm 0.01$ | $29.95 \pm 0.05$ | $6.20 \pm 0.05$ | $19.89 \pm 0.01$ |
| C | $71.46 \pm 0.01$ | $29.95 \pm 0.05$ | $6.20 \pm 0.05$ | $12.08 \pm 0.01$ |

Sappiamo che il moto armonico del pendolo segue la legge $\sum \tau^{\mathrm{ext}} = I\alpha$ in quanto compie una rotazione. Detta $D$ la posizione del centro di massa rispetto all'asse di rotazione, possiamo scrivere $-Mg\sin(\theta)D = I\alpha$. Approssimando $sin(\theta)$ a $\theta$ ed esprimendo l'accelerazione angolare come derivata seconda dello spostamento angolare:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgD}{I}\,\theta$$

[1] Questa condizione sull'angolo $\theta_0$ ci permette di approssimare $\sin(x) \sim x$.

da cui

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{MDg}{I}$$

.

Fissiamo un sistema di riferimento inerziale, solidale all'apparato, a coordinate cilindriche[2] $(\theta, r, h)$, con versore $\hat{z}$ giacente lungo l'asse di rotazione del filo (antiparallelo a $\vec{g}$), origine $O$ e versore $\hat{x}$ contenuti nel piano sul quale vengono appoggiati i cilindri. Sia inoltre $P$ un punto materiale qualunque solidale all'estremità superiore del filo (e quindi anche ai cilindretti) che, con il filo a riposo, si trovi sul piano $xOz$. Allora, *trascurando gli attriti*, il moto di $P$ è caratterizzato da:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

La pulsazione $\omega$ di questo moto armonico dipende dal momento d'inerzia complessivo $I_{\text{tot}}$ dei corpi solidali all'estremità mobile del filo, nonché dalle caratteristiche del filo stesso. Queste ultime vengono riassunte nella *costante torsionale* $C$. In particolare:

$$C = I_{\text{tot}}\, \omega^2$$

Detto $T = 2\pi/\omega$ il periodo del moto armonico, si ottiene:

$$I_{\text{tot}} = \frac{C}{4\pi^2}\, T^2$$

Detto $I_0$ il momento d'inerzia che rimane costante[3], al variare dei cilindretti (Cil) posizionati sopra al filo, si ha:

$$\sum_{i \,\in\, \text{Cil}} I_i = \frac{C}{4\pi^2}\, T^2 - I_0$$

Da questa relazione, tramite una regressione lineare (pesata[4]), è possibile ottenere una stima piuttosto precisa dei valori di $C$ e $I_0$.

Figura 1: *I dati raccolti, assieme alle rette di regressione lineare (in rosa, le regioni di incertezza).*

Riportiamo di seguito i risultati delle regressioni lineari, dove $\xi = \frac{C}{4\pi^2}$ è il coefficiente angolare.

[2] Le coordinate di un punto $P$ in questo sistema di riferimento sono definite come segue: detta $\vec{r}$ la proiezione di $\overrightarrow{OP}$ sul piano per $O$ normale a $\hat{z}$, $\theta$ è l'angolo piano orientato fra $\hat{x}$ e $\vec{r}$, $r$ è la norma di $\vec{r}$ e $h$ è la posizione lungo $\hat{z}$ della proiezione di $P$ su $\hat{z}$ stesso.

[3] $I_0$ include, ad esempio, il momento d'inerzia del disco su cui era possibile appoggiare i cilindretti, nonché quello della parte mobile del sensore di rotazione.

[4] Gli errori assoluti su $I$ variano da punto a punto.

| $j$ | $I_0$ ($10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$) | $\xi$ ($10^{-4}\,\mathrm{J}$) | $C$ (mJ) |
|---|---|---|---|
| 1 | $1.620 \pm 0.006$ | $2.015 \pm 0.002$ | $7.956 \pm 0.010$ |
| 2 | $1.581 \pm 0.006$ | $9.587 \pm 0.012$ | $37.85 \pm 0.05$ |
| 3 | $1.582 \pm 0.006$ | $28.56 \pm 0.03$ | $112.75 \pm 0.14$ |
| 4 | $1.587 \pm 0.006$ | $39.86 \pm 0.05$ | $157.38 \pm 0.20$ |

La costante torsionale $C$ dipende da alcune caratteristiche del filo, come la lunghezza $l$ e il diametro $d$. In particolare, vale:

$$C = \frac{\pi}{2l}\left(\frac{d}{2}\right)^4 G = \frac{\pi d^4}{32l} G$$

dove la grandezza $G$ (dimensionalmente, una pressione) è detta "modulo di scorrimento" del materiale di cui è composto il filo. Allora:

$$G = \frac{32l}{\pi d^4} C$$

Di seguito riportiamo, in una tabella, le misure di $l$ e $d$ dei vari fili e i corrispondenti valori della costante di scorrimento.

| $j$ | $l$ (cm) | $d$ (mm) | $C$ (mJ) | $G$ (GPa) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $43.3 \pm 0.1$ | $0.81 \pm 0.01$ | $7.956 \pm 0.010$ | $82 \pm 4$ |
| 2 | $43.1 \pm 0.1$ | $1.20 \pm 0.01$ | $37.85 \pm 0.05$ | $80 \pm 3$ |
| 3 | $43.0 \pm 0.1$ | $1.57 \pm 0.01$ | $112.75 \pm 0.14$ | $81 \pm 2$ |
| 4 | $42.7 \pm 0.1$ | $1.97 \pm 0.01$ | $157.38 \pm 0.20$ | $45.4 \pm 1.1$ |

Per valutare numericamente la consistenza dei risultati ottenuti con i valori $G$ riportati in letteratura ($G_l$), abbiamo calcolato, per ogni filo $j$, il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{G_{j\,\mathrm{best}} - G_{l\,\mathrm{best}}}{\delta G_j + \delta G_l}$$

Allora $G_j$ è consistente con $G_l$ se e solo se $|\varepsilon| \leq 1$.

| $j$ | $G_i$ (GPa) | Materiale | $G_l$ (GPa) | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $82 \pm 4$ | Acciaio | $84 \pm 1$ | $-0.468$ |
| 2 | $80 \pm 3$ | | | $-0.978$ |
| 3 | $81 \pm 2$ | | | $-0.809$ |
| 4 | $45.4 \pm 1.1$ | Rame | $43 \pm 1$ | $+1.174$ |

L'inconsistenza non trascurabile tra i valori di $G$ per il filo di rame potrebbe essere dovuta alle cattive condizioni del filo stesso.

Infatti, il gruppo di lavoro lo ha reciso da una bobina, per poi srotolarlo: queste operazioni hanno lasciato imperfezioni visibili ad occhio nudo sul filo, come, ad esempio, piccole piegature.

Riteniamo che queste imperfezioni potrebbero avere influenzato le nostre misure in maniera non trascurabile.

## 3.2 Attrito

Il moto del pendolo di torsione è condizionato dalla presenza di attriti, che ne modificano ampiezza e periodo. In particolare, il modello matematico di riferimento è descritto da:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)\, e^{-\lambda t}$$

dove $\lambda$ è un parametro costante legato allo smorzamento del moto.

Figura 2: *I dati di un'acquisizione di $\theta(t)$, come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare $\lambda$, il gruppo di lavoro ha proceduto sull'acquisizione in *Figura 2* come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo calcolato $|\theta(t)|$. Ciò ci ha permesso di trattare massimi e minimi "insieme", evitando di ripetere l'analisi.
2. Poi, abbiamo individuato i picchi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma $\{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_j\} \times \{|\theta_k|\}$ tali che $|\theta_{i-1}| < |\theta_k| > |\theta_{j+1}|$.
3. Per ogni picco, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come $\delta t_{\text{picco}}$ la semidispersione $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$.
4. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata[5]) sulle nuove ordinate.

Figura 3: *$|\theta(t)|$, su scala logaritmica. Sono riportate anche le barre di errore. In blu, una retta di regressione lineare sull'intervallo di dati in nero.*

Dai risultati della regressione lineare emerge che

$$\lambda = (46.67 \pm 0.11)\,\text{mHz}$$

Abbiamo infine valutato il contributo dell'attrito sul periodo dell'oscillazione. Vale infatti:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$$

[5] $\delta \ln|\theta|$, infatti, varia molto, nonostante $\delta|\theta|$ sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 3*.

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione misurata mentre $\omega_0$ è la pulsazione in assenza di attrito.

Si ottiene allora:

$$T_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{T^2} + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

dove $T$ è il periodo misurato mentre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ è il periodo in assenza di attrito.

Per questa acquisizione:

$$T = (409.96 \pm 0.04)\,\text{ms}$$

da cui segue:

$$T_0 = (409.95 \pm 0.04)\,\text{ms}$$

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.