Metodo di risoluzione dei sistemi lineari

Riccardo Bergamaschi

2 novembre 2023

Soluzioni all'indietro, direttamente sulla matrice completa

È possibile riscrivere l'algoritmo delle soluzioni all'indietro in termini di operazioni elementari di riga e di colonna.

Osservazione

Sia M una matrice ridotta a scala. Allora, se sommiamo un multiplo di una qualche riga M_i a una qualche altra riga M_j con $j < i$, la matrice che ne risulta è ancora ridotta a scala.

Caso semplice: una e una sola soluzione

Sia $SX = b$ un sistema lineare ridotto a scala, compatibile e con S matrice quadrata (n equazioni, n incognite). Allora, $S|b$ è della forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{1n} & b_0 \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Ovvero, S è triangolare superiore. L'idea è quella di arrivare ad $S = \mathrm{Id}_n$ tramite operazioni elementari di riga: in questo modo, il vettore dei coefficienti sarà esattamente il vettore soluzione.

Possiamo per prima cosa rendere tutti gli elementi della diagonale principale pari ad 1, dividendo ogni riga per il relativo perno (che è sempre $\neq 0$). La matrice sarà allora della forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & s_{21} & \dots & s_{1n} & b_0 \\ 0 & 1 & \dots & s_{2n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array}\right]$$

Ora, vogliamo mandare s_{21} a 0. Per fare questo, sottraiamo alla prima riga s_{21} volte la seconda. Analogamente, per mandare a 0 s_{31} ed s_{32} sottrarremo alla seconda e alla terza riga gli adeguati multipli di S_3. Questo procedimento permette di ridurre la matrice dei coefficienti alla matrice identità:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array}\right]$$

A questo punto, l'unica soluzione del sistema sarà evidente.

Esempio

Risolviamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + y + 3z = 6 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

Per prima cosa, scriviamo e riduciamo a scala la matrice completa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

Possiamo osservare che il sistema è compatibile e ammette una e una sola soluzione.

Ora applichiamo l'algoritmo sopra descritto:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] &\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right] \\ &\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right] \\ &\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 1 & 0 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right] \\ &\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 39/8 \\ 0 & 1 & 0 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Allora l'unica soluzione del sistema è $\begin{bmatrix} 39/8 \\ -9/8 \\ -5/2 \end{bmatrix}$.

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\
0 & 5 & 5 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 6 & -2 & 2
\end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\
0 & 5 & 5 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 4 & 6 & 2 & 2 \\
0 & 5 & 5 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 5 & 5 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 5 & -1 & 7 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

Esercizio 5.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & t & t \\ 1 & t & t \end{bmatrix} \xrightarrow[A_3 - A_1]{A_2 - tA_1} \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & t(1-t) & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

Se $a_{22} = t(1-t) \neq 0$, anche $a_{33} = t - 1 \neq 0$, e quindi la matrice è ridotta a scala. In tal caso, ha rango 3.

Se invece $a_{22} = t(1-t) = 0$, allora $t = 0 \vee t = 1$.

Se $t = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso, la matrice ha rango 2.

Infine, se $t = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso, la matrice ha rango 1.

In conclusione:

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1 & t = 1 \\ 2 & t = 0 \\ 3 & t \notin \{0; 1\} \end{cases}$$

Esercizio 5.6

Esercizio 5.7

Esercizio 9

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - h = 0 \\ x_1 - x_2 - kx_3 = h \\ 3x_1 - kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 1 & -1 & -k & h \\ 3 & -k & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & -k-1 & -k+1 & h \\ 0 & -2k & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & -k-1 & -k+1 & h \\ 0 & -2k & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & -k+1 & (k+2)h \\ 0 & 0 & -1 & 2kh \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & -1 & 2kh \\ 0 & 0 & -k+1 & (k+2)h \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & -1 & 2kh \\ 0 & 0 & 0 & (-2k^2+3k+2)h \end{array}\right]$$

Se $(-2k^2 + 3k + 2)h = 0$, le due rette sono incidenti. Altrimenti, sono sghembe.