

# Laboratorio di Fisica 1

## R9: Misura della viscosità della glicerina

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

16/04/2024 – 23/04/2024

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato la concentrazione e il coefficiente di viscosità di una soluzione acquosa di glicerina, studiando il moto di caduta di svariate sferette all'interno di essa.

## 0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Cronometro	0.033 s	N./A.	0.033 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Termometro ambientale	−20.0 °C	50.0 °C	0.2 °C

Altro	Descrizione/Note
Telecamera	Utilizzata per acquisire fotogrammi del sistema a intervalli regolari.
Cilindro finito	Utilizzato per contenere la glicerina. Su di esso sono indicati, con nastro adesivo nero, due traguardi.
Sferette	Distribuibili in tre classi (“piccole”, “medie” o “grandi”) sulla base di diametro e massa.
Pinzetta	Per maneggiare le sferette.
Tappo del cilindro	Per contenere le sferette durante la misurazione della massa.

# 1 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo la temperatura ambiente  $T_{\text{amb}}$  per assicurarci che non sia cambiata significativamente dall'acquisizione precedente.
2. Misuriamo la distanza tra i due traguardi  $L = (18.0 \pm 0.1)$  cm e il diametro del contenitore  $\varnothing = (8.0 \pm 0.1)$  cm con il metro a nastro.
3. Per ogni classe  $k$  di sferette:
  - (a) Contiamo le sferette della classe  $k$  (indicheremo questo numero con  $N_k$ ).
  - (b) Misuriamo la massa media<sup>1</sup>  $\overline{m}_k$  e il raggio medio<sup>2</sup>  $\overline{r}_k$  di tutte le  $N_k$  le sferette.
  - (c) Per ogni sferetta  $i$ :
    - i. Avviamo l'acquisizione del filmato sulla videocamera.
    - ii. Rilasciamo  $i$  da ferma, poco sopra la superficie della soluzione, nel contenitore della glicerina, assicurandoci che la sua traiettoria non si avvicini alle pareti del recipiente<sup>3</sup>.
    - iii. Al termine del moto della sferetta, interrompiamo la registrazione.

L'esperienza è stata ripetuta completamente in due giornate differenti, con  $T_{\text{amb},1} = (24.6 \pm 0.2)^\circ\text{C}$  e  $T_{\text{amb},2} = (19.4 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ . Ciò si è rivelato molto utile per poter valutare la coerenza dei risultati ottenuti, anche alla luce della notevole differenza tra le due temperature.

## 2 Analisi dei dati raccolti

**Nota.** Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.

### 2.1 Il modello fisico

Scelta arbitrariamente una sferetta  $i$  appartenente alla classe  $k$ , fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con asse  $z \parallel \vec{g}$  e origine nel punto in cui la sferetta viene rilasciata.

---

<sup>1</sup>Abbiamo misurato direttamente la massa totale  $m_k^{\text{tot}}$  mediante la bilancia di precisione, per poi calcolare  $\overline{m}_k = \frac{1}{N_k} m_k^{\text{tot}}$ , assumendo tutte le sferette di ugual massa.

<sup>2</sup>Essendo le sferette essenzialmente indistinguibili, abbiamo misurato direttamente, per ogni classe  $k$ , tre diametri con il micrometro ad asta filettata, per poi calcolarne la media  $\overline{d}_k$  e ottenere il raggio con la semplice  $\overline{r}_k = \frac{1}{2} \overline{d}_k$ . Il gruppo di lavoro ritiene che si tratti di una buona stima per il raggio medio di tutte le sferette, anche considerato il fatto che i tre valori, in tutte le misurazioni, erano compatibili fra loro.

<sup>3</sup>Quest'ultima richiesta sarà chiarita nella sezione 2.

**Notazione.** Indicheremo con  $\rho_{\text{sf}}$  e  $\rho_{\text{sol}}$  le densità, rispettivamente, delle sferette e della soluzione e con  $\eta_{\text{sol}}$  la viscosità di quest'ultima.

Possiamo ora studiare la dinamica del corpo tra i due traguardi. Per semplificare la discussione, assumeremo:

1. Che il moto del centro di massa sia rettilineo uniforme con velocità  $\vec{v}_i \parallel \vec{g}$ ;
2. Che il moto avvenga in regime laminare (ovvero  $\text{Re} = \frac{1}{\eta_{\text{sol}}} \rho_{\text{sol}} \varnothing v_i \ll 1200$ );
3. Che, rispetto alla sferetta, il recipiente possa essere considerato di dimensione indefinita: che si possano, cioè, trascurare gli effetti di bordo;
4. Che il diametro  $2r_i$  non superi, in ordine di grandezza,  $10^{-3}$  m.

Valuteremo più avanti, alla luce dei dati raccolti e dei risultati ottenuti, se queste condizioni sono state verificate.

Le forze applicate alla sferetta sono la forza peso, la spinta di Archimede e la forza di attrito viscoso  $\vec{F}_\eta$ . Sotto le ipotesi (2.), (3.) e (4.),  $\vec{F}_\eta$  può essere espressa come  $\vec{F}_\eta = -6\pi\eta_{\text{sol}}r_i v_i \hat{z}$ .

Allora, dalla prima legge di Newton:

$$\frac{4}{3}\pi g r_i^3 (\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}}) \hat{z} - 6\pi\eta_{\text{sol}} r_i v_i \hat{z} = 0$$

dove, per noi,  $g = (9.806 \pm 0.001) \text{ m/s}^2$ . Riarrangiando i termini:

$$v_i = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta_{\text{sol}}} r_i^2$$

Per semplificare i calcoli, il gruppo di lavoro ha assunto tutte le sferette della stessa classe essenzialmente indistinguibili. Sono stati perciò messi in relazione i valori medi per ogni classe:

$$\bar{v}_k = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta_{\text{sol}}} \bar{r}_k^2$$

## 2.2 Misura della densità media di tutte le sferette

Per calcolare  $\rho_{\text{sf}}$ , il gruppo di lavoro ha scelto di effettuare una media ponderata delle densità medie delle tre classi:

$$\rho_{\text{sf}} = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \bar{\rho}_k N_k = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\bar{m}_k}{\frac{4}{3}\pi \bar{r}_k^3} N_k = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\bar{m}_k}{\bar{r}_k^3} N_k$$

La densità media delle sferette è risultata essere, in entrambi i giorni:

$$\rho_{\text{sf}} = (7.713 \pm 0.045) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

## 2.3 Misura e distribuzioni delle velocità

Per ogni sferetta, il gruppo di lavoro ne ha tracciato la quota rispetto al secondo traguardo in ogni fotogramma del relativo filmato. Poiché ciascun fotogramma corrisponde ad un istante di tempo, è stato possibile ottenere in questo modo un grafico della quota in funzione del tempo.

Il gruppo di lavoro ha poi eseguito una regressione lineare sui dati così raccolti, per determinare la velocità media della relativa sferetta.

Riportiamo qui soltanto uno dei grafici ottenuti (sferetta 1, piccola, primo giorno):

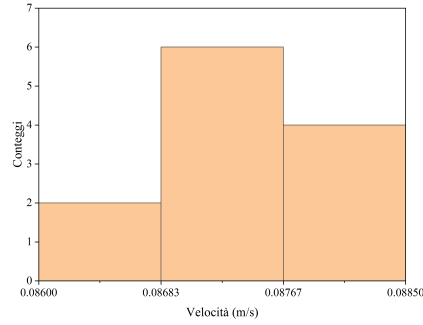


Figura 1: In rosso la retta di regressione, in rosa la sua regione di incertezza.

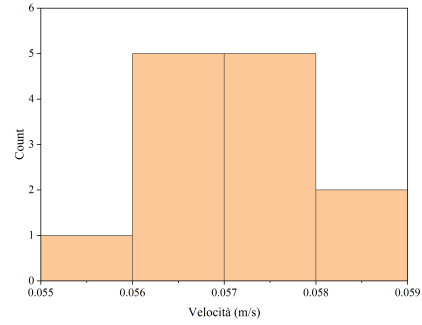
**Osservazione.** Come si può notare, l'andamento dei dati mostrati qui è ben descritto dalla retta: riteniamo che quindi, in questo caso, la sferetta abbia raggiunto la velocità limite prima di oltrepassare il primo traguardo.

Il gruppo di lavoro ha verificato in questo modo l'ipotesi (1.), osservando attentamente la distribuzione dei punti in ogni grafico: nessuno di questi ha mai mostrato una deviazione significativa dal modello lineare.

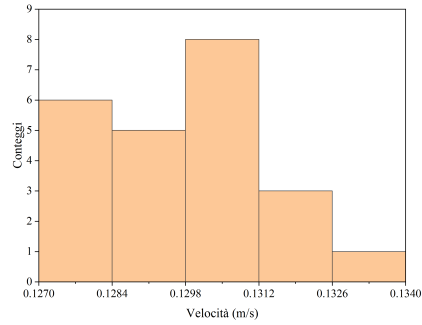
Di seguito riportiamo le distribuzioni delle velocità per ogni classe di sferette, di entrambi i giorni:



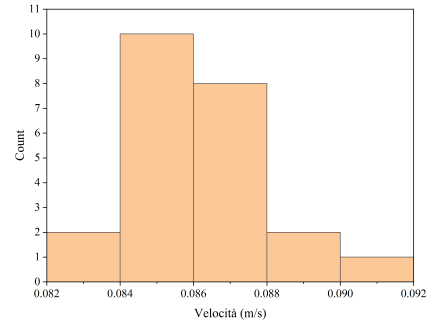
Primo giorno: piccole ( $N = 12$ )  
 $\bar{v} = (8.738 \pm 0.016) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



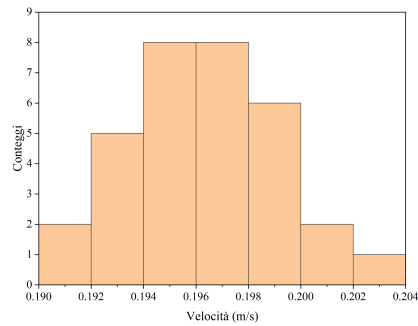
Secondo giorno: piccole ( $N = 13$ )  
 $\bar{v} = (5.65 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



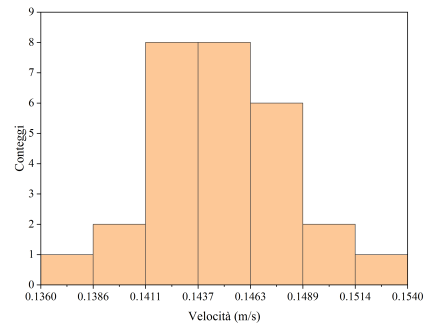
Primo giorno: medie ( $N = 23$ )  
 $\bar{v} = (12.97 \pm 0.03) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



Secondo giorno: medie ( $N = 23$ )  
 $\bar{v} = (8.61 \pm 0.04) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



Primo giorno: grandi ( $N = 32$ )  
 $\bar{v} = (19.58 \pm 0.05) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



Secondo giorno: grandi ( $N = 28$ )  
 $\bar{v} = (14.48 \pm 0.06) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$

**Nota.** Poiché la densità e la viscosità della soluzione, ma in generale di un fluido reale, dipendono dalla temperatura, il gruppo di lavoro ha ritenuto opportuno applicare un modello empirico, in particolare quello sviluppato da N.S.Cheng[1] nel 2008 e da A. Volk e C. J. Kähler[2] nel 2018.

Si noti che questo modello è applicabile, come specificato dagli autori, a temperature nell'intervallo (0 °C, 100 °C), nel quale le temperature ambientali misurate ( $T_{\text{amb}}$ ) rientrano abbondantemente.

## 2.4 Modello di $\rho(T)$ ed $\eta(T)$ per i liquidi puri

Il modello di cui sopra descrive molto bene densità e viscosità di acqua e glicerina (pure), in funzione della temperatura, mediante queste relazioni:

$$\begin{aligned}\eta_{\text{acqua}}(T \text{ } ^\circ\text{C}) &= 1.79 \cdot \exp\left(\frac{-(1230 + T) \cdot T}{36100 + 360 T}\right) \text{ mPa s} \\ \eta_{\text{glicerina}}(T \text{ } ^\circ\text{C}) &= 12100 \cdot \exp\left(\frac{-(1233 + T) \cdot T}{9900 + 70 T}\right) \text{ mPa s} \\ \rho_{\text{acqua}}(T \text{ } ^\circ\text{C}) &= 1000 \left(1 - \left|\frac{T - 3.98}{615}\right|^{1.71}\right) \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{\text{glicerina}}(T \text{ } ^\circ\text{C}) &= (1273 - 0.612 T) \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

Di seguito riportiamo i valori di queste grandezze, calcolati alle due temperature  $T_{\text{amb},1}$  e  $T_{\text{amb},2}$ :

$T_{\text{amb}}$	(°C)	$24.6 \pm 0.2$	$19.4 \pm 0.2$
$\eta_{\text{acqua}}$	(mPa s)	$0.901 \pm 0.004$	$1.020 \pm 0.005$
$\eta_{\text{glicerina}}$	(mPa s)	$845 \pm 16$	$1398 \pm 28$
$\rho_{\text{acqua}}$	(kg/m <sup>3</sup> )	$996.99 \pm 0.05$	$998.17 \pm 0.04$
$\rho_{\text{glicerina}}$	(kg/m <sup>3</sup> )	$1257.94 \pm 0.12$	$1261.13 \pm 0.12$

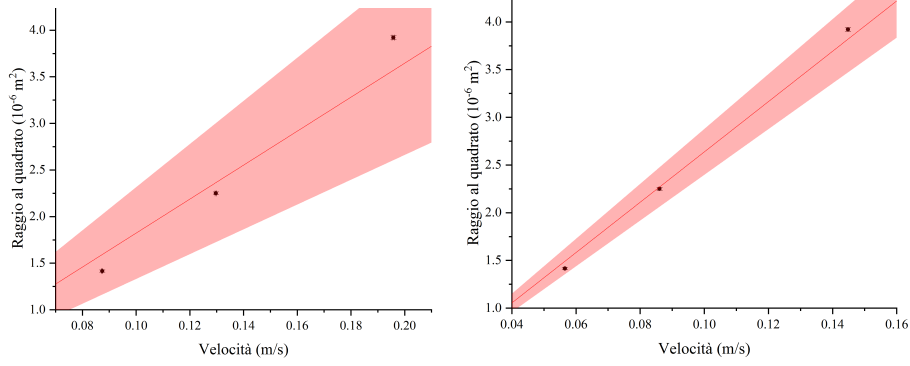
## 2.5 Misura di $\eta_{\text{sol}}$

Ricordiamo la relazione tra  $\bar{v}_k$  e  $\bar{r}_k^2$ :

$$\bar{v}_k = \xi \cdot \bar{r}_k^2 \quad \text{avendo posto} \quad \xi = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta_{\text{sol}}}$$

Trattandosi di una relazione lineare, è possibile determinare una retta di regressione, nella quale, poiché il modello lo richiedeva, abbiamo fissato l'intercetta a 0. Chiaramente, i dati dei due giorni devono essere trattati separatamente, poiché  $\rho_{\text{sol}}$  ed  $\eta_{\text{sol}}$  dipendono dalla temperatura ambiente.

Di seguito riportiamo i due grafici così ottenuti:



Primo giorno  
 $\xi = (8.738 \pm 0.016) \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}$

Secondo giorno  
 $\xi = (5.65 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}$

*In rosso le rette di regressione, in rosa le rispettive regioni di incertezza. Le barre di errore in entrambe le direzioni sono riportate, ma sono troppo ridotte per poter essere apprezzate immediatamente.*

Per calcolare una prima stima di  $\eta_{\text{sol}}$  è possibile approssimare  $\rho_{\text{sol}} \simeq \rho_{\text{glicerina}}$ , calcolata in base a  $T_{\text{amb}}$  secondo il modello sopra citato:

$$\eta = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\xi} \simeq \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{glicerina}}(T_{\text{amb}}))}{9\xi}$$

I valori di  $\eta_{\text{sol}}$  calcolati sulla base dei dati raccolti nelle due giornate sono:

$$\eta_{\text{sol},1} = (256 \pm 3) \text{ mPa} \cdot \text{s} \quad \eta_{\text{sol},2} = (371 \pm 4) \text{ mPa} \cdot \text{s}$$

## 2.6 Concentrazione della glicerina

Il modello empirico della viscosità di una soluzione acquosa di glicerina[1] è descritto dalla seguente equazione:

$$\eta_{\text{sol}} = \eta_{\text{acqua}}^\alpha \eta_{\text{glicerina}}^{1-\alpha}$$

al variare di un parametro  $\alpha \in [0, 1]$  legato alla concentrazione dell'acqua. Risolvendo l'equazione in  $\alpha$  si ottiene:

$$\alpha = \frac{\ln \eta_{\text{sol}} - \ln \eta_{\text{glicerina}}}{\ln \eta_{\text{acqua}} - \ln \eta_{\text{glicerina}}}$$

La relazione tra  $\alpha$  e la concentrazione in massa  $c_m$  della *glicerina* in soluzione è invece la seguente:

$$\alpha = 1 - c_m + \frac{ab c_m (1 - c_m)}{a c_m + b(1 - c_m)} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} a &= 0.705 - 0.0017 T_{\text{amb}} \\ b &= (4.9 + 0.036 T_{\text{amb}}) a^{2.5} \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione in  $c_m$  si ottiene:

$$c_m = \frac{-\alpha a + \alpha b + ab + a - 2b - \sqrt{\Delta}}{2(ab + a - b)}$$

con  $\Delta = \alpha^2 a^2 - 2\alpha^2 ab + \alpha^2 b^2 - 2\alpha a^2 b - 2\alpha a^2 - 2\alpha ab^2 + 2\alpha ab + a^2 b^2 + 2a^2 b + a^2$ .

I valori di  $\alpha$  e  $c_m$  calcolati a partire da  $\eta_{\text{sol}}$  e  $T_{\text{amb}}$  per entrambi i giorni sono:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0.174 \pm 0.006 & c_{m,1} = (93.6 \pm 0.3)\% \text{ m/m} \\ \alpha_2 = 0.184 \pm 0.006 & c_{m,2} = (93.2 \pm 0.3)\% \text{ m/m} \end{array}$$

## 2.7 Ricalcolo della densità per una migliore stima

Nota la concentrazione di glicerina, è ora possibile calcolare una stima della densità della soluzione, facendo ancora una volta affidamento al modello empirico[2]:

$$\rho_{\text{sol}} = \kappa(T, c_m) \left( \rho_{\text{acqua}}(T) + \frac{\rho_{\text{glicerina}}(T) - \rho_{\text{acqua}}(T)}{1 + \frac{\rho_{\text{glicerina}}(T)}{\rho_{\text{acqua}}(T)} \left( \frac{1}{c_m} - 1 \right)} \right)$$

dove  $\kappa(T, c_m) = 1 + (1.78 \cdot 10^{-6} T^2 - 1.82 \cdot 10^{-4} T + 1.41 \cdot 10^{-2}) \sin(c_m^{1.31} \pi)^{0.81}$  è un coefficiente legato alla contrazione volumica, un fenomeno osservabile sperimentalmente nella maggior parte delle miscele liquide.

Applicando questa formula ai valori di  $T$  e  $c_m$  di cui sopra, otteniamo:

$$\rho_{\text{sol},1} = (1241.5 \pm 1.2) \text{ kg/m}^2 \quad \rho_{\text{sol},2} = (1243.7 \pm 1.2) \text{ kg/m}^2$$

Possiamo osservare facilmente che queste misure non sono compatibili con i rispettivi valori di  $\rho_{\text{glicerina}}$ : l'approssimazione  $\rho_{\text{sol}} \simeq \rho_{\text{glicerina}}$  non è quindi giustificata.

Tuttavia, è evidente che:

$$(\rho_{\text{sol}})_{\text{best}} < (\rho_{\text{glicerina}})_{\text{best}}$$

Si può allora immaginare che il  $\rho_{\text{sol}}$  così determinato approssimi il valore vero *meglio* di  $\rho_{\text{glicerina}}$ : il gruppo di lavoro ha quindi deciso di ricalcolare la densità della soluzione come appena mostrato, utilizzando stavolta la nuova stima di  $\rho_{\text{sol}}$ .

Reiterando questo processo più volte, le stime di  $\rho_{\text{sol}}$ ,  $c_m$  ed  $\eta_{\text{sol}}$  si sono velocemente stabilizzate attorno a valori ben definiti: di seguito riportiamo i risultati delle prime iterazioni.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Il gruppo di lavoro ha in realtà effettuato sei iterazioni: sono riportate soltanto le prime quattro, in quanto le differenze tra le successive si sono rivelate inapprezzabili.



<b>Giorno 1</b>	$\rho_{\text{sol}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\eta_{\text{sol}}$ (mPa s)	$c_{\text{m}}$ (% m/m)	$\rho_{\text{sol}}$ (kg/m <sup>3</sup> )
Iterazione	(assunto)			(ottenuto)
1	$1257.94 \pm 0.12$	$256.42 \pm 2.99$	$93.56 \pm 0.26$	$1241.53 \pm 1.21$
2	$1241.53 \pm 1.21$	$257.08 \pm 3.03$	$93.58 \pm 0.26$	$1241.57 \pm 1.21$
3	$1241.57 \pm 1.21$	$257.07 \pm 3.03$	$93.58 \pm 0.26$	$1241.57 \pm 1.21$
4	$1241.57 \pm 1.21$	$257.07 \pm 3.03$	$93.58 \pm 0.26$	$1241.57 \pm 1.21$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

<b>Giorno 2</b>	$\rho_{\text{sol}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\eta_{\text{sol}}$ (mPa s)	$c_{\text{m}}$ (% m/m)	$\rho_{\text{sol}}$ (kg/m <sup>3</sup> )
Iterazione	(assunto)			(ottenuto)
1	$1261.13 \pm 0.12$	$370.80 \pm 4.32$	$93.17 \pm 0.25$	$1243.73 \pm 1.17$
2	$1243.73 \pm 1.17$	$371.80 \pm 4.38$	$93.18 \pm 0.25$	$1243.77 \pm 1.17$
3	$1243.77 \pm 1.17$	$371.80 \pm 4.38$	$93.19 \pm 0.25$	$1243.77 \pm 1.17$
4	$1243.77 \pm 1.17$	$371.80 \pm 4.38$	$93.19 \pm 0.25$	$1243.77 \pm 1.17$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Nota.** Abbiamo riportato più cifre decimali del necessario, semplicemente per mostrare le piccole differenze tra le prime iterazioni.

### 3 Conclusioni

Sulla base dei dati acquisiti durante l'esperienza, il gruppo di lavoro è riuscito a determinare la viscosità e la concentrazione di una soluzione di acqua e glicerina.

Per valutare numericamente la compatibilità tra  $\eta_{\text{sol},1}$  ed  $\eta_{\text{sol},2}$  (e tra  $c_{\text{m},1}$  e  $c_{\text{m},2}$ ), abbiamo calcolato i seguenti valore (numeri puri):

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{|(\eta_{\text{sol},1})_{\text{best}} - (\eta_{\text{sol},2})_{\text{best}}|}{\delta\eta_{\text{sol},1} + \delta\eta_{\text{sol},2}}$$

$$\varepsilon_c = \frac{|(c_{\text{m},1})_{\text{best}} - (c_{\text{m},2})_{\text{best}}|}{\delta c_{\text{m},1} + \delta c_{\text{m},2}}$$

Allora le due misure di  $\eta_{\text{sol}}$  da noi ottenute sono compatibili fra loro se e solo se  $\varepsilon_{\eta} \leq 1$ ; similmente, le due misure di  $c_{\text{m}}$  sono compatibili fra loro se e solo se  $\varepsilon_c \leq 1$ .

Nel nostro caso,  $\varepsilon_{\eta} \simeq 0.923$  e  $\varepsilon_c \simeq 0.758$ : le due misure sono dunque compatibili.

Possiamo pertanto affermare che l'esperienza si è conclusa con successo.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Nian-Sheng Cheng. «Formula for the Viscosity of a Glycerol-Water Mixture». In: *Industrial & Engineering Chemistry Research* 47.9 (mag. 2008), pp. 3285–3288. ISSN: 0888-5885. DOI: 10.1021/ie071349z. URL: <https://doi.org/10.1021/ie071349z>.
- [2] Andreas Volk e Christian J. Kähler. «Density model for aqueous glycerol solutions». In: *Experiments in Fluids* 59.5 (apr. 2018), p. 75. ISSN: 1432-1114. DOI: 10.1007/s00348-018-2527-y. URL: <https://doi.org/10.1007/s00348-018-2527-y>.