

# Laboratorio di Fisica 1

## R9: Misura della viscosità della glicerina

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

16/04/2024 – 23/04/2024

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato la concentrazione e il coefficiente di viscosità di una soluzione acquosa di glicerina, studiando il moto di caduta di svariate sferette all'interno di essa.

## 0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Cronometro	0.033 s	N./A.	0.033 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Termometro ambientale	?	?	0.2 °C

Altro	Descrizione/Note
Telecamera	Utilizzata per acquisire fotogrammi del sistema a intervalli regolari.
Cilindro finito	Utilizzato per contenere la glicerina. Su di esso sono indicati, con nastro adesivo nero, due traguardi.
Sferette	Distribuibili in tre classi (“piccole”, “medie” o “grandi”) sulla base di diametro e massa.
Pinzetta	Per maneggiare le sferette.
Tappo del cilindro	Per contenere le sferette durante la misurazione della massa.

# 1 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo la temperatura ambiente  $T_{\text{amb}}$  per assicurarci che non sia cambiata significativamente dall'acquisizione precedente.
2. Misuriamo la distanza tra i due traguardi  $L = (18.0 \pm 0.1)$  cm con il metro a nastro.
3. Per ogni classe  $k$  di sferette:
  - (a) Contiamo le sferette della classe  $k$  (indicheremo questo numero con  $N_k$ ).
  - (b) Misuriamo la massa media<sup>1</sup>  $\bar{m}_k$  e il raggio medio<sup>2</sup>  $\bar{r}_k$  di tutte le  $N_k$  sferette.
  - (c) Per ogni sferetta  $i$ :
    - i. Avviamo l'acquisizione del filmato sulla videocamera.
    - ii. Rilasciamo  $i$  da ferma, poco sopra la superficie della soluzione, nel contenitore della glicerina, assicurandoci che la sua traiettoria non si avvicini alle pareti del recipiente<sup>3</sup>.
    - iii. Al termine del moto della sferetta, interrompiamo la registrazione.

L'esperienza è stata ripetuta completamente in due giornate differenti, con  $T_{\text{amb},1} = (24.6 \pm 0.2)^\circ\text{C}$  e  $T_{\text{amb},2} = (19.4 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ . Ciò si è rivelato molto utile per poter valutare la coerenza dei risultati ottenuti, anche alla luce della notevole differenza tra le due temperature.

## 2 Analisi dei dati raccolti e conclusioni

**Nota.** Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.

### 2.1 Il modello fisico

Scelta arbitrariamente una sferetta  $i$  appartenente alla classe  $k$ , fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con asse  $z \parallel \vec{g}$  e origine nel punto in cui la sferetta viene rilasciata.

---

<sup>1</sup>Abbiamo misurato direttamente la massa totale  $m_k^{\text{tot}}$  mediante la bilancia di precisione, per poi calcolare  $\bar{m}_k = \frac{1}{N_k} m_k^{\text{tot}}$ , assumendo tutte le sferette di ugual massa.

<sup>2</sup>Essendo le sferette essenzialmente indistinguibili, abbiamo misurato direttamente, per ogni classe  $k$ , tre diametri con il micrometro ad asta filettata, per poi calcolarne la media  $\bar{d}_k$  e ottenere il raggio con la semplice  $\bar{r}_k = \frac{1}{2} \bar{d}_k$ . Il gruppo di lavoro ritiene che si tratti di una buona stima per il diametro medio di tutte le sferette, anche considerato il fatto che i tre valori, in tutte le misurazioni, erano compatibili fra loro.

<sup>3</sup>Quest'ultima richiesta sarà chiarita nella sezione 2.

**Notazione.** Indicheremo con  $\rho_{\text{sf}}$  e  $\rho_{\text{sol}}$  le densità, rispettivamente, delle sferette e della soluzione e con  $\eta$  la viscosità di quest'ultima.

Possiamo ora studiare la dinamica del corpo tra i due traguardi. Per semplificare la discussione, assumeremo:

1. Che il moto del centro di massa sia rettilineo uniforme con velocità  $\vec{v}_i \parallel \vec{g}$ ;
2. Che il moto avvenga in regime laminare (ovvero  $\text{Re} = \frac{1}{\eta}\rho_{\text{sol}}\varnothing v_i \ll 1200$ , dove  $\varnothing$  è il diametro del recipiente);
3. Che, rispetto alla sferetta, il recipiente possa essere considerato di dimensione indefinita: che si possano, cioè, trascurare gli effetti di bordo;
4. Che il diametro  $2r_i$  non superi, in ordine di grandezza,  $10^{-3}$  m.

Valuteremo più avanti, alla luce dei dati raccolti e dei risultati ottenuti, se queste condizioni sono state verificate.

Le forze applicate alla sferetta sono la forza peso, la spinta di Archimede e la forza di attrito viscoso  $\vec{F}_\eta$ . Sotto le ipotesi (2.), (3.) e (4.),  $\vec{F}_\eta$  può essere espressa come  $\vec{F}_\eta = -6\pi\eta r_i v_i \hat{z}$ .

Allora, dalla prima legge di Newton:

$$\frac{4}{3}\pi g r_i^3 (\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}}) \hat{z} - 6\pi\eta r_i v_i \hat{z} = 0$$

ovvero:

$$v_i = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta} r_i^2$$

Per semplificare i calcoli, il gruppo di lavoro ha assunto tutte le sferette della stessa classe essenzialmente indistinguibili. Sono stati perciò messi in relazione i valori medi per ogni classe:

$$\bar{v}_k = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta} \bar{r}_k^2$$

## 2.2 Misura della densità media di tutte le sferette

Per calcolare  $\rho_{\text{sf}}$ , il gruppo di lavoro ha scelto di effettuare una media ponderata delle densità medie delle tre classi:

$$\rho_{\text{sf}} = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \bar{\rho}_k N_k = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\bar{m}_k}{\frac{4}{3}\pi \bar{r}_k^3} N_k = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\bar{m}_k}{\bar{r}_k^3} N_k$$

La densità media delle sferette è risultata essere, in entrambi i giorni,  $(7.713 \pm 0.045) \text{ kg/dm}^3$ .

## 2.3 Distribuzioni delle velocità

**Nota.** In questa sezione abbiamo trascurato la presenza di attriti, ma chiaramente gli attriti ci sono e il moto è smorzato. Nella sezione successiva tratteremo proprio questo fenomeno, determinando, alla luce dei dati raccolti, quanto influisca sul valore di  $g$ .

Poiché l'unica forza esterna al sistema che compie un momento lungo  $\hat{k}$  è la forza peso, si ha:

$$\sum \vec{\tau}_z^{\text{ext}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M\vec{g} = -Mg r_{\text{CM}} \sin(\theta) \hat{k}.$$

L'equazione differenziale che descrive il moto del centro di massa del pendolo fisico sarà allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \sin(\theta)$$

È possibile semplificare il modello fisico approssimando  $\sin(\theta) \simeq \theta$ . Il gruppo di lavoro ha ritenuto valida questa operazione solo quando

$$|\theta_0 - \sin(\theta_0)| < \delta\theta$$

Essendo, nel nostro caso,  $\delta\theta = 0.02 \text{ rad}$ , abbiamo scelto  $\theta_0^{\text{max}} = 0.49 \text{ rad}$ . Infatti:

$$0.49 \text{ rad} - \sin(0.49 \text{ rad}) \simeq 0.019 \text{ rad} \quad 0.50 \text{ rad} - \sin(0.50 \text{ rad}) \simeq 0.021 \text{ rad}$$

Prima di prendere ogni misura, il gruppo di lavoro si è assicurato che  $\theta_0$  soddisfacesse abbondantemente la condizione  $|\theta_0| < |\theta_0^{\text{max}}|$ .

L'equazione differenziale semplificata è allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

Questa equazione descrive un moto armonico. Le soluzioni sono infatti del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}} \quad \text{è detta "pulsazione"}.$$

Possiamo tuttavia facilmente esprimere  $\omega$  in funzione del periodo  $T$  del moto oscillatorio, più semplice da calcolare dai dati acquisiti. Vale infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e quindi} \quad \frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T^2}{4\pi^2}$$

La formula utilizzata per il calcolo di  $I_z^{\text{tot}}$  riflette la composizione del sistema, sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia:

$$I_z^{\text{tot}} = I_{z,\text{rotore}} + I_{z,\text{asta}} + \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{z,\gamma}$$

Chiaramente, per calcolare i momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è necessario applicare il teorema di Huygens-Steiner a quelli calcolati sui rispettivi centri di massa<sup>4</sup>:

$$I_{z,\text{asta}} = I_{\text{CM},\text{asta}} + m_{\text{asta}} \left( \frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2$$

$$I_{z,(i,d)} = I_{\text{CM},i} + m_i \left( d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2 \quad \forall (i,d) \in \Gamma$$

Per calcolare il termine  $Mr_{\text{CM}}$ , si osservi che, per la definizione di posizione del centro di massa, la massa totale si semplifica:

$$\begin{aligned} Mr_{\text{CM}} &= M \cdot \frac{1}{M} \left( m_{\text{rotore}} \cdot 0 + m_{\text{asta}} r_{\text{CM},\text{asta}} + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i r_{\text{CM},i} \right) \\ &= m_{\text{asta}} \left( \frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i \left( d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) \end{aligned}$$

Di seguito riportiamo le misure, dirette e indirette, utilizzate per il calcolo dei momenti d'inerzia<sup>5</sup>:

Oggetto	$L$ (cm)	$\varnothing$ (mm)	$m$ (g)	$I_{\text{CM}}$ ( $10^{-5} \text{ kg m}^2$ )
Asta	$60.0 \pm 0.1$	$5.94 \pm 0.01$	$45.82 \pm 0.01$	$568.5 \pm 1.5$
Rotore	N./A.	$13.41 \pm 0.01$	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

$i$	$m_i$ (g)	$d_i^{\text{ext}}$ (mm)	$d_i^{\text{int}}$ (mm)	$h_i$ (mm)	$I_{\text{CM},i}$ ( $\text{mg m}^2$ )
A	$115.95 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.93 \pm 0.01$	$10.62 \pm 0.03$
B	$115.86 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.89 \pm 0.01$	$10.59 \pm 0.03$
C	$71.46 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$12.08 \pm 0.01$	$5.047 \pm 0.018$

[\*] *Valori dati*

---

<sup>4</sup>Questi ultimi sono stati calcolati mediante le seguenti formule:

$$I_{\text{CM},\text{asta}} = \frac{1}{12} m_{\text{asta}} L_{\text{asta}}^2 \quad I_{\text{CM},i} = \frac{1}{16} m_i \left( (d_i^{\text{ext}})^2 + (d_i^{\text{int}})^2 \right) + \frac{1}{12} m_i h_i^2 \quad \forall i \in \{A, B, C\}$$

<sup>5</sup> $L_{\text{asta}}$  è la lunghezza della parte dell'asta che sporge all'esterno del rotore.

Il periodo dell'oscillazione è stato misurato individuando  $N + 1$  zeri consecutivi di  $\theta(t)$ , diciamo  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ . Allora, poiché tra uno zero e l'altro corre metà periodo, è possibile calcolare  $T$  in questo modo:  $T = \frac{2}{N}(t_N - t_0)$

Il gruppo di lavoro ha scelto  $N$  di volta in volta, in modo tale che fosse proporzionale al numero di oscillazioni compiute dal pendolo prima di fermarsi. Complessivamente,  $N$  ha assunto valori da 30 a 180.

Come descritto sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione  $\Gamma$ , i valori di  $\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}}$  e  $\frac{T^2}{4\pi^2}$ , riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di  $g$  come coefficiente angolare di una retta di regressione.

Figura 1: *In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)*

- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti,  $(0.003 \pm 0.005)$  m è compatibile con 0 m.
- Il valore di  $g$  atteso è  $9.806 \text{ m/s}^2$ ; si può osservare facilmente che il valore misurato,  $(9.68 \pm 0.13) \text{ m/s}^2$ , è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di  $g$  compatibile con quella attesa.



## 2.4 Misura dello smorzamento

*In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione  $\Gamma = \{\}$ , dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.*

*Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.*

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima,  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

dove  $\lambda$  è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto,  $\omega$ , è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}}.$$

Figura 2: *Parte dei dati di un'acquisizione di  $\theta(t)$  con  $\Gamma = \{\}$ , come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare  $\lambda$ , il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{\theta_k\}$  tali che  $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$ .
2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come  $\delta t_{\text{picco}}$  la semidispersione  $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$ .
3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata<sup>6</sup>) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio  $-\lambda$ .

---

<sup>6</sup> $\delta \ln |\theta|$ , infatti, varia molto, nonostante  $\delta |\theta|$  sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con  $\theta$  cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di  $\lambda$ :  $\lambda_{\min}$  e  $\lambda_{\max}$ . Abbiamo scelto di porre  $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ .

Figura 3:  $\ln|\theta(t)|$  di massimi e minimi, su scala logaritmica (per  $\Gamma = \{\}$ ). Sono riportate anche le barre di errore sull'ordinata. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.

Poiché l'obiettivo è calcolare  $g$ , la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione  $\Gamma$ , si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.

Figura 4: In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)

I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di  $g$  risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.