Laboratorio di Fisica 1
R9: Misura della viscosità della glicerina

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

16/04/2024 – 23/04/2024

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato la concentrazione e il coefficiente di viscosità di una soluzione acquosa di glicerina, studiando il moto di caduta di svariate sferette all'interno di essa.

0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	**Soglia**	**Portata**	**Sensibilità**
Cronometro	0.033 s	N./A.	0.033 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Termometro ambientale	−20.0 °C	50.0 °C	0.2 °C

Altro	**Descrizione/Note**
Telecamera	Utilizzata per acquisire fotogrammi del sistema a intervalli regolari.
Cilindro finito	Utilizzato per contenere la glicerina. Su di esso sono indicati, con nastro adesivo nero, due traguardi.
Sferette	Distribuibili in tre classi ("piccole", "medie" o "grandi") sulla base di diametro e massa.
Pinzetta	Per maneggiare le sferette.
Tappo del cilindro	Per contenere le sferette durante la misurazione della massa.

1 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo la temperatura ambiente T_{amb} per assicurarci che non sia cambiata significativamente dall'acquisizione precedente.

2. Misuriamo la distanza tra i due traguardi $L = (18.0 \pm 0.1)\,\text{cm}$ con il metro a nastro.

3. Per ogni classe k di sferette:

   (a) Contiamo le sferette della classe k (indicheremo questo numero con N_k).

   (b) Misuriamo la massa media[1] $\overline{m}_k$ e il raggio medio[2] $\overline{r}_k$ di tutte e N_k le sferette.

   (c) Per ogni sferetta i:

      i. Avviamo l'acquisizione del filmato sulla videocamera.

      ii. Rilasciamo i da ferma, poco sopra la superficie della soluzione, nel contenitore della glicerina, assicurandoci che la sua traiettoria non si avvicini alle pareti del recipiente[3].

      iii. Al termine del moto della sferetta, interrompiamo la registrazione.

L'esperienza è stata ripetuta completamente in due giornate differenti, con $T_{\text{amb},1} = (24.6 \pm 0.2)\,^\circ\text{C}$ e $T_{\text{amb},2} = (19.4 \pm 0.2)\,^\circ\text{C}$. Ciò si è rivelato molto utile per poter valutare la coerenza dei risultati ottenuti, anche alla luce della notevole differenza tra le due temperature.

2 Analisi dei dati raccolti

Nota. *Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.*

2.1 Il modello fisico

Scelta arbitrariamente una sferetta i appartenente alla classe k, fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con asse $z \parallel \vec{g}$ e origine nel punto in cui la sferetta viene rilasciata.

---

[1] Abbiamo misurato direttamente la massa totale m_k^{tot} mediante la bilancia di precisione, per poi calcolare $\overline{m}_k = \frac{1}{N_k} m_k^{\text{tot}}$, assumendo tutte le sferette di ugual massa.

[2] Essendo le sferette essenzialmente indistinguibili, abbiamo misurato direttamente, per ogni classe k, tre diametri con il micrometro ad asta filettata, per poi calcolarne la media $\overline{d}_k$ e ottenere il raggio con la semplice $\overline{r}_k = \frac{1}{2}\overline{d}_k$. Il gruppo di lavoro ritiene che si tratti di una buona stima per il raggio medio di tutte le sferette, anche considerato il fatto che i tre valori, in tutte le misurazioni, erano compatibili fra loro.

[3] Quest'ultima richiesta sarà chiarita nella sezione 2.

Notazione. *Indicheremo con ρ_{sf} e ρ_{sol} le densità, rispettivamente, delle sferette e della soluzione e con η la viscosità di quest'ultima.*

Possiamo ora studiare la dinamica del corpo tra i due traguardi. Per semplificare la discussione, assumeremo:

1. Che il moto del centro di massa sia rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}_i \parallel \vec{g}$;
2. Che il moto avvenga in regime laminare (ovvero $\mathrm{Re} = \frac{1}{\eta}\rho_{\mathrm{sol}}\varnothing v_i \ll 1200$, dove $\varnothing$ è il diametro del recipiente);
3. Che, rispetto alla sferetta, il recipiente possa essere considerato di dimensione indefinita: che si possano, cioè, trascurare gli effetti di bordo;
4. Che il diametro $2r_i$ non superi, in ordine di grandezza, 10^{-3} m.

Valuteremo più avanti, alla luce dei dati raccolti e dei risultati ottenuti, se queste condizioni sono state verificate.

Le forze applicate alla sferetta sono la forza peso, la spinta di Archimede e la forza di attrito viscoso $\vec{F}_\eta$. Sotto le ipotesi (2.), (3.) e (4.), $\vec{F}_\eta$ può essere espressa come $\vec{F}_\eta = -6\pi\eta r_i v_i \hat{z}$.

Allora, dalla prima legge di Newton:

$$\frac{4}{3}\pi g r_i^3(\rho_{\mathrm{sf}} - \rho_{\mathrm{sol}})\hat{z} - 6\pi\eta r_i v_i \hat{z} = 0$$

dove, per noi, $g = (9.806 \pm 0.001)\,\mathrm{m/s^2}$. Riarrangiando i termini:

$$v_i = \frac{2g(\rho_{\mathrm{sf}} - \rho_{\mathrm{sol}})}{9\eta} r_i^2$$

Per semplificare i calcoli, il gruppo di lavoro ha assunto tutte le sferette della stessa classe essenzialmente indistinguibili. Sono stati perciò messi in relazione i valori medi per ogni classe:

$$\overline{v}_k = \frac{2g(\rho_{\mathrm{sf}} - \rho_{\mathrm{sol}})}{9\eta} \overline{r}_k^2$$

2.2 Misura della densità media di tutte le sferette

Per calcolare ρ_{sf}, il gruppo di lavoro ha scelto di effettuare una media ponderata delle densità medie delle tre classi:

$$\rho_{\mathrm{sf}} = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \overline{\rho}_k N_k = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\overline{m}_k}{\frac{4}{3}\pi \overline{r}_k^3} N_k = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\overline{m}_k}{\overline{r}_k^3} N_k$$

La densità media delle sferette è risultata essere, in entrambi i giorni:

$$\rho_{\mathrm{sf}} = (7.713 \pm 0.045) \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}.$$

2.3 Misura e distribuzioni delle velocità

Per ogni sferetta, il gruppo di lavoro ne ha tracciato la quota rispetto al secondo traguardo in ogni fotogramma del relativo filmato. Poiché ciascun fotogramma corrisponde ad un istante di tempo, è stato possibile ottenere in questo modo un grafico della quota in funzione del tempo.

Il gruppo di lavoro ha poi eseguito una regressione lineare sui dati così raccolti, per determinare la velocità media della relativa sferetta.

Riportiamo qui soltanto uno dei grafici ottenuti (sferetta 1, piccola, primo giorno):

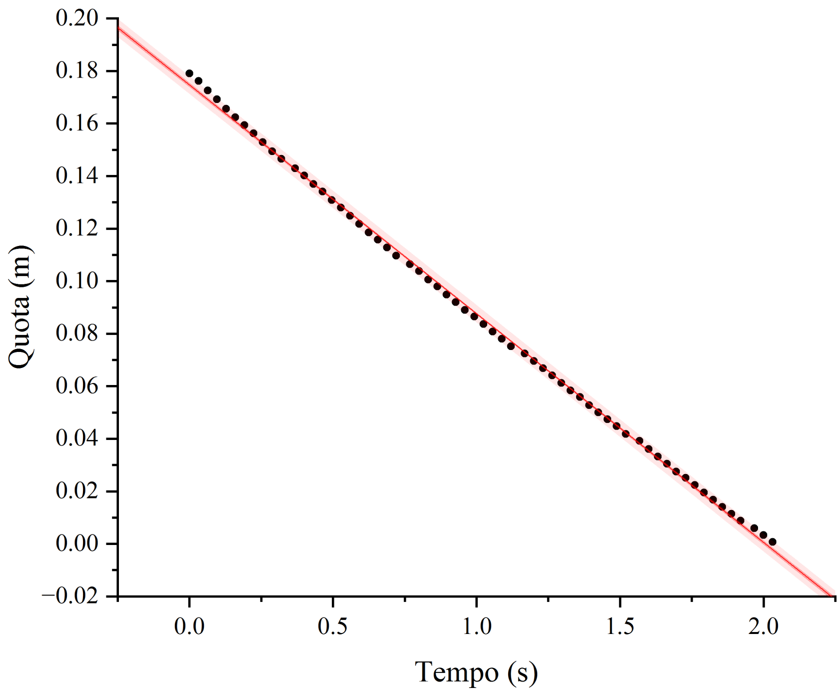
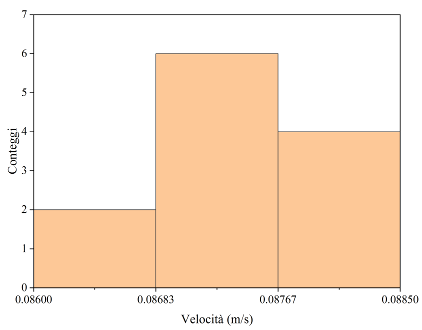


Figura 1: *In rosso la retta di regressione, in rosa la sua regione di incertezza.*

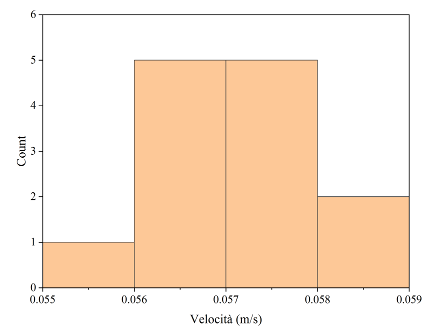
Osservazione. *Come si può notare, l'andamento dei dati mostrati qui è ben descritto dalla retta: riteniamo che quindi, in questo caso, la sferetta abbia raggiunto la velocità limite prima di oltrepassare il primo traguardo.*

Il gruppo di lavoro ha verificato in questo modo l'ipotesi (1.), osservando attentamente la distribuzione dei punti in ogni grafico: nessuno di questi ha mai mostrato una deviazione significativa dal modello lineare.

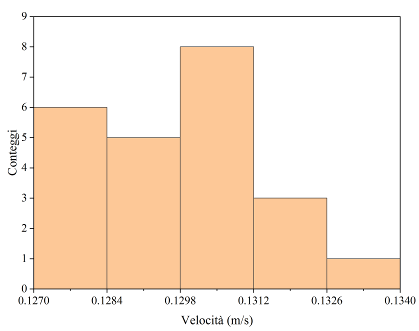
Di seguito riportiamo le distribuzioni delle velocità per ogni classe di sferette, di entrambi i giorni:



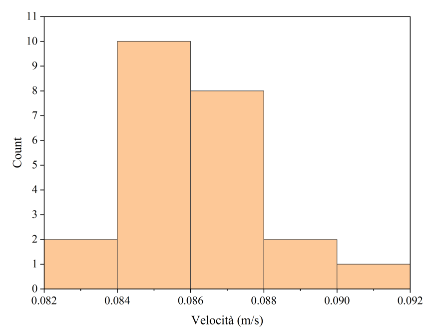
Primo giorno: piccole ($N = 12$)
$\overline{v} = (8.738 \pm 0.016) \cdot 10^{-2}$ m/s



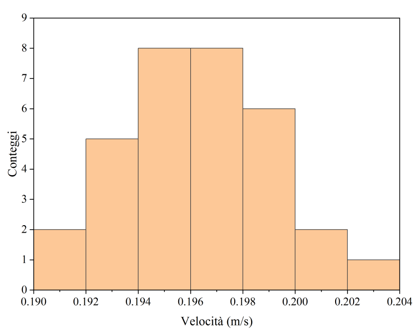
Secondo giorno: piccole ($N = 13$)
$\overline{v} = (5.65 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$ m/s



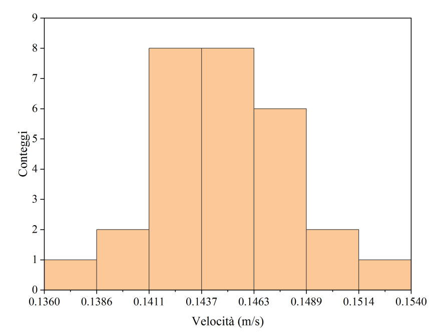
Primo giorno: medie ($N = 23$)
$\overline{v} = (12.97 \pm 0.03) \cdot 10^{-2}$ m/s



Secondo giorno: medie ($N = 23$)
$\overline{v} = (8.61 \pm 0.04) \cdot 10^{-2}$ m/s



Primo giorno: grandi ($N = 32$)
$\overline{v} = (19.58 \pm 0.05) \cdot 10^{-2}$ m/s



Secondo giorno: grandi ($N = 28$)
$\overline{v} = (14.48 \pm 0.06) \cdot 10^{-2}$ m/s

2.4 Modello di $\rho(T)$ ed $\eta(T)$ per i liquidi puri

Poiché la densità e la viscosità di un fluido reale dipendono dalla temperatura, il gruppo di lavoro ha ottenuto opportuno applicare un modello empirico.

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{acqua}}(T\ {}^\circ\text{C}) &= 1.79 \cdot \exp\left(\frac{-(1230+T)\cdot T}{36100+360\,T}\right) \text{mPa s} \\
\eta_{\text{glicerina}}(T\ {}^\circ\text{C}) &= 12100 \cdot \exp\left(\frac{-(1233+T)\cdot T}{9900+70\,T}\right) \text{mPa s} \\
\rho_{\text{acqua}}(T\ {}^\circ\text{C}) &= 1000\left(1-\left|\frac{T-3.98}{615}\right|^{1.71}\right) \text{kg/m}^3 \\
\rho_{\text{glicerina}}(T\ {}^\circ\text{C}) &= (1273-0.612\,T)\ \text{kg/m}^3
\end{aligned}$$

Di seguito riportiamo i valori di queste grandezze, calcolati alle due temperature $T_{\text{amb},1}$ e $T_{\text{amb},2}$:

T_{amb}	(°C)	24.6 ± 0.2	19.4 ± 0.2
η_{acqua}	(mPa s)	0.901 ± 0.006	1.020 ± 0.007
$\eta_{\text{glicerina}}$	(mPa s)	845 ± 21	1398 ± 35
ρ_{acqua}	(kg/m^3)	996.99 ± 0.05	998.17 ± 0.04
$\rho_{\text{glicerina}}$	(kg/m^3)	1257.94 ± 0.12	1261.13 ± 0.12

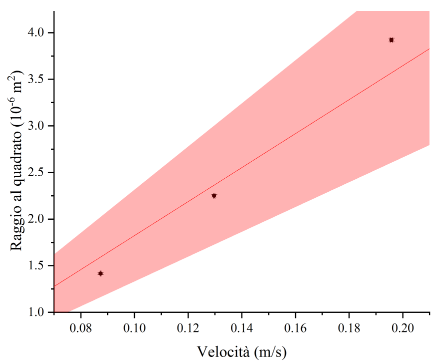
2.5 Misura di η

Ricordiamo la relazione tra $\overline{v}_k$ e $\overline{r}_k^2$:

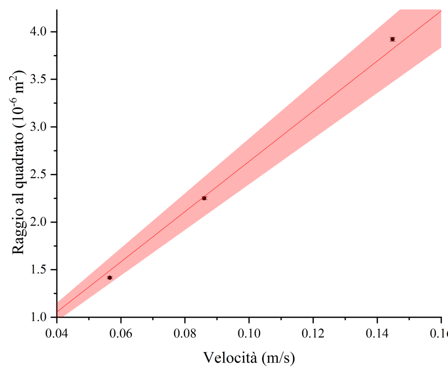
$$\overline{v}_k = \xi \cdot \overline{r}_k^2 \qquad \text{avendo posto} \qquad \xi = \frac{2g(\rho_{\text{sf}}-\rho_{\text{sol}})}{9\eta}$$

Trattandosi di una relazione lineare, è possibile determinare una retta di regressione, nella quale, poiché il modello lo richiedeva, abbiamo fissato l'intercetta a 0. Chiaramente, i dati dei due giorni devono essere trattati separatamente, poiché ρ_{sol} ed η dipendono dalla temperatura ambiente.

Di seguito riportiamo i due grafici così ottenuti:



Primo giorno
$\xi = (8.738 \pm 0.016) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s}$



Secondo giorno
$\xi = (5.65 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s}$

In rosso le rette di regressione, in rosa le rispettive regioni di incertezza. Le barre di errore in entrambe le direzioni sono riportate, ma sono troppo ridotte per poter essere apprezzate immediatamente.

Per calcolare una prima stima di η è possibile approssimare $\rho_{\mathrm{sol}} \simeq \rho_{\mathrm{glicerina}}$, calcolata in base a T_{amb} secondo il modello sopra citato:

$$\eta = \frac{2g(\rho_{\mathrm{sf}} - \rho_{\mathrm{sol}})}{9\xi} \simeq \frac{2g(\rho_{\mathrm{sf}} - \rho_{\mathrm{glicerina}}(T_{\mathrm{amb}}))}{9\xi}$$

I valori di η calcolati sulla base dei dati raccolti nelle due giornate sono:

$$\eta_1 = (256 \pm 3)\,\mathrm{mPa\,s} \qquad \eta_2 = (371 \pm 4)\,\mathrm{mPa\,s}$$

2.6 Concentrazione della glicerina

Il modello empirico della viscosità di una soluzione acquosa di glicerina è descritto dalla seguente equazione:

$$\eta_{\mathrm{sol}} = \eta_{\mathrm{acqua}}^{\alpha}\eta_{\mathrm{glicerina}}^{1-\alpha}$$

al variare di un parametro $\alpha \in [0,1]$ legato alla concentrazione dell'acqua. Risolvendo l'equazione in α si ottiene:

$$\alpha = \frac{\ln \eta_{\mathrm{sol}} - \ln \eta_{\mathrm{glicerina}}}{\ln \eta_{\mathrm{acqua}} - \ln \eta_{\mathrm{glicerina}}}$$

La relazione tra α e la concentrazione in massa c_{m} della *glicerina* in soluzione è invece la seguente:

$$\alpha = 1 - c_{\mathrm{m}} + \frac{ab\,c_{\mathrm{m}}(1 - c_{\mathrm{m}})}{a\,c_{\mathrm{m}} + b(1 - c_{\mathrm{m}})} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} a = 0.705 - 0.0017\,T_{\mathrm{amb}} \\ b = (4.9 + 0.036\,T_{\mathrm{amb}})\,a^{2.5} \end{array}$$

Risolvendo l'equazione in c_m si ottiene:

$$c_\mathrm{m} = \frac{-\alpha a + \alpha b + ab + a - 2b - \sqrt{\Delta}}{2(ab + a - b)}$$

con $\Delta = \alpha^2 a^2 - 2\alpha^2 ab + \alpha^2 b^2 - 2\alpha a^2 b - 2\alpha a^2 - 2\alpha ab^2 + 2\alpha ab + a^2 b^2 + 2a^2 b + a^2$.

I valori di α e c_m calcolati a partire da η e T_amb per entrambi i giorni sono:

$$\alpha_1 = 0.174 \pm 0.006 \qquad c_{\mathrm{m},1} = (93.6 \pm 0.3)\%\,\mathrm{m/m}$$
$$\alpha_2 = 0.184 \pm 0.006 \qquad c_{\mathrm{m},2} = (93.2 \pm 0.3)\%\,\mathrm{m/m}$$

2.7 Ricalcolo della densità per una migliore stima

Nota la concentrazione di glicerina, è ora possibile calcolare una stima della densità della soluzione, facendo ancora una volta affidamento ad un modello empirico:

$$\rho_\mathrm{sol} = \kappa(T, c_\mathrm{m}) \left(\rho_\mathrm{acqua}(T) + \frac{\rho_\mathrm{glicerina}(T) - \rho_\mathrm{acqua}(T)}{1 + \frac{\rho_\mathrm{glicerina}(T)}{\rho_\mathrm{acqua}(T)} \left(\frac{1}{c_\mathrm{m}} - 1 \right)} \right)$$

dove $\kappa(T, c_\mathrm{m}) = 1 + \left(1.78 \cdot 10^{-6}\, T^2 - 1.82 \cdot 10^{-4}\, T + 1.41 \cdot 10^{-2}\right) \sin\left(c_\mathrm{m}^{1.31} \pi\right)^{0.81}$ è il coefficiente di espansione volumica.

Applicando questa formula ai valori di T e c_m di cui sopra, otteniamo:

$$\rho_{\mathrm{sol},1} = (1241.5 \pm 1.2)\,\mathrm{kg/m^2} \qquad \rho_{\mathrm{sol},2} = (1243.7 \pm 1.2)\,\mathrm{kg/m^2}$$

Possiamo osservare facilmente che queste misure non sono compatibili con i rispettivi valori di $\rho_\mathrm{glicerina}$: l'approssimazione $\rho_\mathrm{sol} \simeq \rho_\mathrm{glicerina}$ non è quindi giustificata.

Tuttavia, è evidente che:

$$(\rho_\mathrm{sol})_\mathrm{best} < (\rho_\mathrm{glicerina})_\mathrm{best}$$

Possiamo dunque immaginare che il ρ_sol così determinato approssimi il valore vero *meglio* di $\rho_\mathrm{glicerina}$.

Il gruppo di lavoro ha quindi deciso di ricalcolare la densità della soluzione come appena mostrato, utilizzando stavolta la nuova stima di ρ_sol.

Reiterando questo processo più volte, le stime di ρ_sol, c_m ed η_sol si sono velocemente stabilizzate attorno a valori ben definiti: di seguito riportiamo i risultati delle prime iterazioni.

Giorno 1 Iterazione	ρ_{sol} (kg/m^3) (assunto)	η_{sol} (mPa s)	c_{m} (% m/m)	ρ_{sol} (kg/m^3) (ottenuto)
1	1257.94 ± 0.12	256.42 ± 2.99	93.56 ± 0.26	1241.53 ± 1.21
2	1241.53 ± 1.21	257.08 ± 3.03	93.58 ± 0.26	1241.57 ± 1.21
3	1241.57 ± 1.21	257.07 ± 3.03	93.58 ± 0.26	1241.57 ± 1.21
4	1241.57 ± 1.21	257.07 ± 3.03	93.58 ± 0.26	1241.57 ± 1.21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Giorno 2 Iterazione	ρ_{sol} (kg/m^3) (assunto)	η_{sol} (mPa s)	c_{m} (% m/m)	ρ_{sol} (kg/m^3) (ottenuto)
1	1261.13 ± 0.12	370.80 ± 4.32	93.17 ± 0.25	1243.73 ± 1.17
2	1243.73 ± 1.17	371.80 ± 4.38	93.18 ± 0.25	1243.77 ± 1.17
3	1243.77 ± 1.17	371.80 ± 4.38	93.19 ± 0.25	1243.77 ± 1.17
4	1243.77 ± 1.17	371.80 ± 4.38	93.19 ± 0.25	1243.77 ± 1.17
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nota. *Abbiamo riportato più cifre decimali del necessario, semplicemente per mostrare le piccole differenze tra le prime iterazioni.*

3 Conclusioni

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti, (0.003 ± 0.005) m è compatibile con $0\,\mathrm{m}$.
- Il valore di g atteso è $9.806\,\mathrm{m/s^2}$; si può osservare facilmente che il valore misurato, $(9.68 \pm 0.13)\ \mathrm{m/s^2}$, è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di g compatibile con quella attesa.

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di g risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.