

# Laboratorio di Fisica 1

## R9: Misura della viscosità della glicerina

Gruppo 15: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

16/04/2024 – 23/04/2024

### Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato la concentrazione e il coefficiente di viscosità di una soluzione acquosa di glicerina, studiando il moto di caduta di svariate sferette all'interno di essa.

## 0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Cronometro	0.033 s	N./A.	0.033 s
Micrometro ad asta filettata	0.01 mm	25.00 mm	0.01 mm
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Bilancia di precisione	0.01 g	6200.00 g	0.01 g
Termometro ambientale	?	?	0.2 °C

Altro	Descrizione/Note
Telecamera	Utilizzata per acquisire fotogrammi del sistema a intervalli regolari.
Cilindro finito	Utilizzato per contenere la glicerina. Su di esso sono indicati, con nastro adesivo nero, due traguardi.
Sferette	Distribuibili in tre classi (“piccole”, “medie” o “grandi”) sulla base di diametro e massa.
Pinzetta	Per maneggiare le sferette.
Tappo del cilindro	Per contenere le sferette durante la misurazione della massa.

# 1 Esperienza e procedimento di misura

1. Misuriamo la temperatura ambiente  $T_{\text{amb}}$  per assicurarci che non sia cambiata significativamente dall'acquisizione precedente.
2. Misuriamo la distanza tra i due traguardi  $L = (18.0 \pm 0.1)$  cm con il metro a nastro.
3. Per ogni classe  $k$  di sferette:
  - (a) Contiamo le sferette della classe  $k$  (indicheremo questo numero con  $N_k$ ).
  - (b) Misuriamo la massa media<sup>1</sup>  $\bar{m}_k$  e il raggio medio<sup>2</sup>  $\bar{r}_k$  di tutte le  $N_k$  le sferette.
  - (c) Per ogni sferetta  $i$ :
    - i. Avviamo l'acquisizione del filmato sulla videocamera.
    - ii. Rilasciamo  $i$  da ferma, poco sopra la superficie della soluzione, nel contenitore della glicerina, assicurandoci che la sua traiettoria non si avvicini alle pareti del recipiente<sup>3</sup>.
    - iii. Al termine del moto della sferetta, interrompiamo la registrazione.

L'esperienza è stata ripetuta completamente in due giornate differenti, con  $T_{\text{amb},1} = (24.6 \pm 0.2)^\circ\text{C}$  e  $T_{\text{amb},2} = (19.4 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ . Ciò si è rivelato molto utile per poter valutare la coerenza dei risultati ottenuti, anche alla luce della notevole differenza tra le due temperature.

## 2 Analisi dei dati raccolti

**Nota.** Avendo valutato gli errori sulle grandezze misurate direttamente come piccoli, casuali e indipendenti, per svolgere ogni calcolo abbiamo utilizzato la tradizionale propagazione degli errori.

### 2.1 Il modello fisico

Scelta arbitrariamente una sferetta  $i$  appartenente alla classe  $k$ , fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con asse  $z \parallel \vec{g}$  e origine nel punto in cui la sferetta viene rilasciata.

---

<sup>1</sup>Abbiamo misurato direttamente la massa totale  $m_k^{\text{tot}}$  mediante la bilancia di precisione, per poi calcolare  $\bar{m}_k = \frac{1}{N_k} m_k^{\text{tot}}$ , assumendo tutte le sferette di ugual massa.

<sup>2</sup>Essendo le sferette essenzialmente indistinguibili, abbiamo misurato direttamente, per ogni classe  $k$ , tre diametri con il micrometro ad asta filettata, per poi calcolarne la media  $\bar{d}_k$  e ottenere il raggio con la semplice  $\bar{r}_k = \frac{1}{2} \bar{d}_k$ . Il gruppo di lavoro ritiene che si tratti di una buona stima per il raggio medio di tutte le sferette, anche considerato il fatto che i tre valori, in tutte le misurazioni, erano compatibili fra loro.

<sup>3</sup>Quest'ultima richiesta sarà chiarita nella sezione 2.

**Notazione.** Indicheremo con  $\rho_{\text{sf}}$  e  $\rho_{\text{sol}}$  le densità, rispettivamente, delle sferette e della soluzione e con  $\eta$  la viscosità di quest'ultima.

Possiamo ora studiare la dinamica del corpo tra i due traguardi. Per semplificare la discussione, assumeremo:

1. Che il moto del centro di massa sia rettilineo uniforme con velocità  $\vec{v}_i \parallel \vec{g}$ ;
2. Che il moto avvenga in regime laminare (ovvero  $\text{Re} = \frac{1}{\eta} \rho_{\text{sol}} \varnothing v_i \ll 1200$ , dove  $\varnothing$  è il diametro del recipiente);
3. Che, rispetto alla sferetta, il recipiente possa essere considerato di dimensione indefinita: che si possano, cioè, trascurare gli effetti di bordo;
4. Che il diametro  $2r_i$  non superi, in ordine di grandezza,  $10^{-3}$  m.

Valuteremo più avanti, alla luce dei dati raccolti e dei risultati ottenuti, se queste condizioni sono state verificate.

Le forze applicate alla sferetta sono la forza peso, la spinta di Archimede e la forza di attrito viscoso  $\vec{F}_\eta$ . Sotto le ipotesi (2.), (3.) e (4.),  $\vec{F}_\eta$  può essere espressa come  $\vec{F}_\eta = -6\pi\eta r_i v_i \hat{z}$ .

Allora, dalla prima legge di Newton:

$$\frac{4}{3}\pi g r_i^3 (\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}}) \hat{z} - 6\pi\eta r_i v_i \hat{z} = 0$$

ovvero:

$$v_i = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta} r_i^2$$

Per semplificare i calcoli, il gruppo di lavoro ha assunto tutte le sferette della stessa classe essenzialmente indistinguibili. Sono stati perciò messi in relazione i valori medi per ogni classe:

$$\bar{v}_k = \frac{2g(\rho_{\text{sf}} - \rho_{\text{sol}})}{9\eta} \bar{r}_k^2$$

## 2.2 Misura della densità media di tutte le sferette

Per calcolare  $\rho_{\text{sf}}$ , il gruppo di lavoro ha scelto di effettuare una media ponderata delle densità medie delle tre classi:

$$\rho_{\text{sf}} = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \bar{\rho}_k N_k = \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\bar{m}_k}{\frac{4}{3}\pi \bar{r}_k^3} N_k = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sum_k N_k} \sum_k \frac{\bar{m}_k}{\bar{r}_k^3} N_k$$

La densità media delle sferette è risultata essere, in entrambi i giorni,  $(7.713 \pm 0.045) \text{ kg/dm}^3$ .

## 2.3 Misura e distribuzioni delle velocità

Per ogni sferetta, il gruppo di lavoro ne ha tracciato la quota rispetto al secondo traguardo in ogni fotogramma del relativo filmato. Poiché ciascun fotogramma corrisponde ad un istante di tempo, è stato possibile ottenere in questo modo un grafico della quota in funzione del tempo.

Il gruppo di lavoro ha poi eseguito una regressione lineare sui dati così raccolti, per determinare la velocità media della relativa sferetta.

Riportiamo qui soltanto uno dei grafici ottenuti (sferetta 1, piccola, primo giorno):

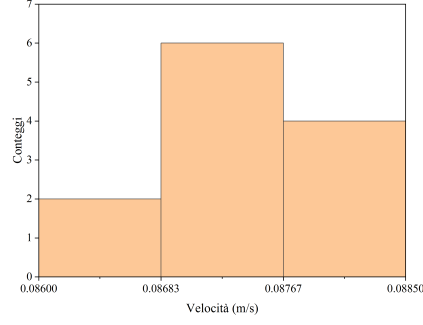


Figura 1: In rosso la retta di regressione, in rosa la sua regione di incertezza.

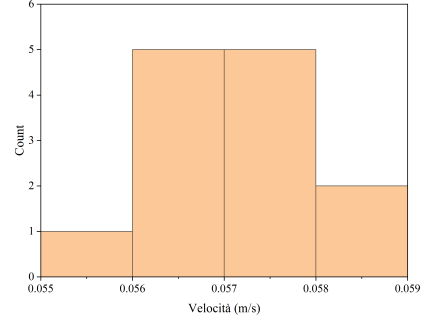
**Osservazione.** Come si può notare, l'andamento dei dati mostrati qui è ben descritto dalla retta: riteniamo che quindi, in questo caso, la sferetta abbia raggiunto la velocità limite prima di oltrepassare il primo traguardo.

Il gruppo di lavoro ha verificato in questo modo l'ipotesi (1.), osservando attentamente la distribuzione dei punti in ogni grafico: nessuno di questi ha mai mostrato una deviazione significativa dal modello lineare.

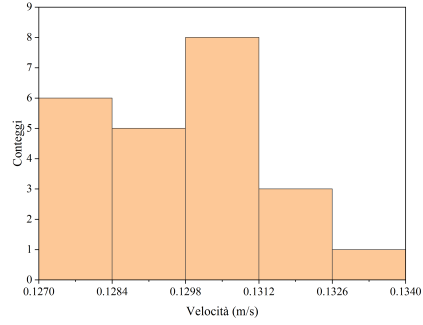
Di seguito riportiamo le distribuzioni delle velocità per ogni classe di sferette, di entrambi i giorni:



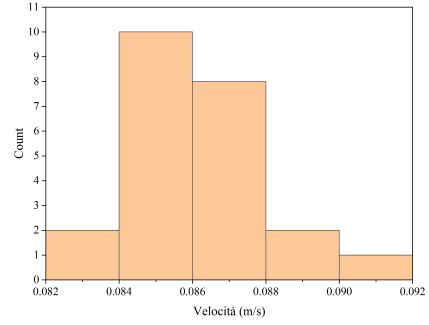
Primo giorno: piccole ( $N = 12$ )  
 $\bar{v} = (8.738 \pm 0.016) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



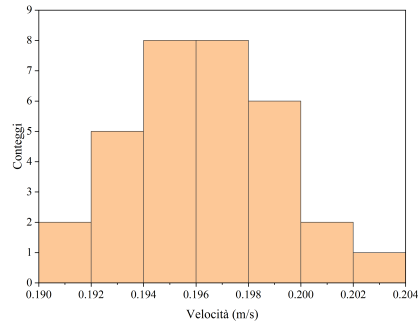
Secondo giorno: piccole ( $N = 13$ )  
 $\bar{v} = (5.65 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



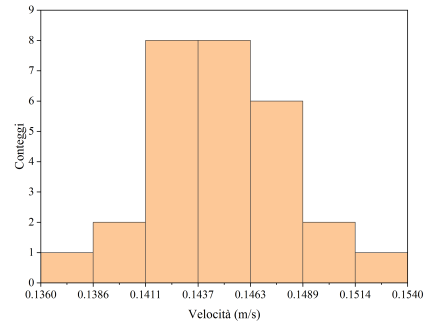
Primo giorno: medie ( $N = 23$ )  
 $\bar{v} = (12.97 \pm 0.03) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



Secondo giorno: medie ( $N = 23$ )  
 $\bar{v} = (8.61 \pm 0.04) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



Primo giorno: grandi ( $N = 32$ )  
 $\bar{v} = (19.58 \pm 0.05) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$



Secondo giorno: grandi ( $N = 28$ )  
 $\bar{v} = (14.48 \pm 0.06) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$

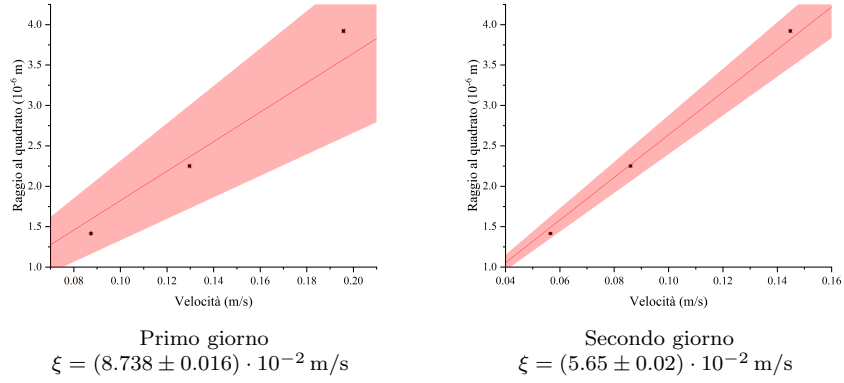
## 2.4 Misura di $\eta$

Ricordiamo la relazione tra  $\bar{v}_k$  e  $\bar{r}_k^2$ :

$$\bar{v}_k = \frac{2g(\rho_{sf} - \rho_{sol})}{9\eta} \bar{r}_k^2$$

Trattandosi di una relazione lineare, è possibile determinare una retta di regressione, nella quale, poiché il modello lo richiedeva, abbiamo fissato l'intercetta a 0. Chiaramente, i dati dei due giorni devono essere trattati separatamente, poiché  $\rho_{sol}$  ed  $\eta$  dipendono dalla temperatura ambiente.

Di seguito riportiamo i due grafici così ottenuti:



## 2.5 Concentrazione della glicerina

## 2.6 Ricalcolo della densità per una migliore stima

**Nota.** In questa sezione abbiamo trascurato la presenza di attriti, ma chiaramente gli attriti ci sono e il moto è smorzato. Nella sezione successiva tratteremo proprio questo fenomeno, determinando, alla luce dei dati raccolti, quanto influisca sul valore di  $g$ .

Poiché l'unica forza esterna al sistema che compie un momento lungo  $\hat{k}$  è la forza peso, si ha:

$$\sum \vec{\tau}_z^{\text{ext}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M\vec{g} = -Mg r_{\text{CM}} \sin(\theta) \hat{k}.$$

L'equazione differenziale che descrive il moto del centro di massa del pendolo fisico sarà allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \sin(\theta)$$

È possibile semplificare il modello fisico approssimando  $\sin(\theta) \simeq \theta$ . Il gruppo di lavoro ha ritenuto valida questa operazione solo quando

$$|\theta_0 - \sin(\theta_0)| < \delta\theta$$

Essendo, nel nostro caso,  $\delta\theta = 0.02 \text{ rad}$ , abbiamo scelto  $\theta_0^{\max} = 0.49 \text{ rad}$ . Infatti:

$$0.49 \text{ rad} - \sin(0.49 \text{ rad}) \simeq 0.019 \text{ rad} \quad 0.50 \text{ rad} - \sin(0.50 \text{ rad}) \simeq 0.021 \text{ rad}$$

Prima di prendere ogni misura, il gruppo di lavoro si è assicurato che  $\theta_0$  soddisfacesse abbondantemente la condizione  $|\theta_0| < |\theta_0^{\max}|$ .

L'equazione differenziale semplificata è allora:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

Questa equazione descrive un moto armonico. Le soluzioni sono infatti del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{dove} \quad \omega = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}} \quad \text{è detta "pulsazione"}.$$

Possiamo tuttavia facilmente esprimere  $\omega$  in funzione del periodo  $T$  del moto oscillatorio, più semplice da calcolare dai dati acquisiti. Vale infatti:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e quindi} \quad \frac{I_z^{\text{tot}}}{M r_{\text{CM}}} = g \frac{T^2}{4\pi^2}$$

La formula utilizzata per il calcolo di  $I_z^{\text{tot}}$  riflette la composizione del sistema, sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia:

$$I_z^{\text{tot}} = I_{z,\text{rotore}} + I_{z,\text{asta}} + \sum_{\gamma \in \Gamma} I_{z,\gamma}$$

Chiaramente, per calcolare i momenti d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è necessario applicare il teorema di Huygens-Steiner a quelli calcolati sui rispettivi centri di massa<sup>4</sup>:

$$I_{z,\text{asta}} = I_{\text{CM},\text{asta}} + m_{\text{asta}} \left( \frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2$$

$$I_{z,(i,d)} = I_{\text{CM},i} + m_i \left( d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)^2 \quad \forall (i,d) \in \Gamma$$

Per calcolare il termine  $M r_{\text{CM}}$ , si osservi che, per la definizione di posizione del centro di massa, la massa totale si semplifica:

$$M r_{\text{CM}} = M \cdot \frac{1}{M} \left( m_{\text{rotore}} \cdot 0 + m_{\text{asta}} r_{\text{CM},\text{asta}} + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i r_{\text{CM},i} \right)$$

$$= m_{\text{asta}} \left( \frac{L_{\text{asta}} + \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right) + \sum_{(i,d) \in \Gamma} m_i \left( d + \frac{h_i - \varnothing_{\text{rotore}}}{2} \right)$$

---

<sup>4</sup>Questi ultimi sono stati calcolati mediante le seguenti formule:

$$I_{\text{CM},\text{asta}} = \frac{1}{12} m_{\text{asta}} L_{\text{asta}}^2 \quad I_{\text{CM},i} = \frac{1}{16} m_i \left( (d_i^{\text{ext}})^2 + (d_i^{\text{int}})^2 \right) + \frac{1}{12} m_i h_i^2 \quad \forall i \in \{A, B, C\}$$

Di seguito riportiamo le misure, dirette e indirette, utilizzate per il calcolo dei momenti d'inerzia<sup>5</sup>:

Oggetto	$L$ (cm)	$\varnothing$ (mm)	$m$ (g)	$I_{\text{CM}}$ ( $10^{-5} \text{ kg m}^2$ )
Asta	$60.0 \pm 0.1$	$5.94 \pm 0.01$	$45.82 \pm 0.01$	$568.5 \pm 1.5$
Rotore	N./A.	$13.41 \pm 0.01$	$22.4 \pm 0.1^*$	$0.058 \pm 0.001^*$

$i$	$m_i$ (g)	$d_i^{\text{ext}}$ (mm)	$d_i^{\text{int}}$ (mm)	$h_i$ (mm)	$I_{\text{CM},i}$ ( $\text{mg m}^2$ )
A	$115.95 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.93 \pm 0.01$	$10.62 \pm 0.03$
B	$115.86 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$19.89 \pm 0.01$	$10.59 \pm 0.03$
C	$71.46 \pm 0.01$	$29.95 \pm 0.05$	$6.20 \pm 0.05$	$12.08 \pm 0.01$	$5.047 \pm 0.018$

[\*] *Valori dati*

---

<sup>5</sup> $L_{\text{asta}}$  è la lunghezza della parte dell'asta che sporge all'esterno del rotore.



Il periodo dell'oscillazione è stato misurato individuando  $N + 1$  zeri consecutivi di  $\theta(t)$ , diciamo  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ . Allora, poiché tra uno zero e l'altro corre metà periodo, è possibile calcolare  $T$  in questo modo:  $T = \frac{2}{N}(t_N - t_0)$

Il gruppo di lavoro ha scelto  $N$  di volta in volta, in modo tale che fosse proporzionale al numero di oscillazioni compiute dal pendolo prima di fermarsi. Complessivamente,  $N$  ha assunto valori da 30 a 180.

Come descritto sopra, il gruppo di lavoro ha calcolato, per ogni configurazione  $\Gamma$ , i valori di  $\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}}$  e  $\frac{T^2}{4\pi^2}$ , riportati nel grafico seguente.

Come è possibile osservare dalla relazione che le lega, la dipendenza tra queste due grandezze è lineare: questo ci permette di determinare il valore di  $g$  come coefficiente angolare di una retta di regressione.

Figura 2: *In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)*

- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

I risultati della regressione lineare sono chiaramente compatibili con i valori attesi. Infatti:

- Secondo il modello fisico utilizzato, l'intercetta dovrebbe essere nulla; in effetti,  $(0.003 \pm 0.005)$  m è compatibile con 0 m.
- Il valore di  $g$  atteso è  $9.806 \text{ m/s}^2$ ; si può osservare facilmente che il valore misurato,  $(9.68 \pm 0.13) \text{ m/s}^2$ , è compatibile con esso.

Possiamo pertanto concludere che l'esperienza ha avuto successo: mediante l'apparato sperimentale abbiamo ottenuto una misura di  $g$  compatibile con quella attesa.

## 2.7 Misura dello smorzamento

*In questa sezione, illustreremo come il gruppo di lavoro abbia valutato lo smorzamento del moto e quanto questo sia significativo, prendendo come esempio la configurazione  $\Gamma = \{\}$ , dove il pendolo fisico è composto solamente da asta e rotore, senza l'aggiunta di cilindri.*

*Il gruppo di lavoro ha effettuato gli stessi passaggi per tutte le altre configurazioni: i risultati saranno messi in evidenza alla fine della sezione.*

Sempre applicando la seconda equazione cardinale della dinamica, è facile ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il moto del sistema sotto l'effetto delle forze di attrito. Approssimando, come prima,  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , si ottiene:

$$\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}} \theta$$

dove  $\lambda$  è una costante legata allo smorzamento del moto. Le soluzioni di questa equazione differenziale sono infatti della forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) e^{-\lambda t}$$

dove la pulsazione del moto,  $\omega$ , è data da:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg r_{\text{CM}}}{I_z^{\text{tot}}}}.$$

Figura 3: *Parte dei dati di un'acquisizione di  $\theta(t)$  con  $\Gamma = \{\}$ , come raccolti dal sensore di rotazione, riportati su una larga scala temporale. Si può chiaramente notare lo smorzamento del moto.*

Per stimare  $\lambda$ , il gruppo di lavoro ha proceduto come segue:

1. Per prima cosa, abbiamo individuato i massimi dei nostri dati, ovvero gli insiemi di punti della forma  $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_j\} \times \{\theta_k\}$  tali che  $\theta(t_{i-1}) < \theta_k > \theta(t_{j+1})$ .
2. Per ogni massimo, ne abbiamo calcolato il punto medio, prendendo come  $\delta t_{\text{picco}}$  la semidispersione  $\frac{1}{2}(t_j - t_i) + \delta t$ .
3. Infine, abbiamo graficato i punti così trovati su scala logaritmica e abbiamo effettuato una regressione lineare (pesata<sup>6</sup>) sulle nuove ordinate. Il coefficiente angolare di tale regressione dovrebbe essere proprio  $-\lambda$ .

---

<sup>6</sup> $\delta \ln |\theta|$ , infatti, varia molto, nonostante  $\delta |\theta|$  sia costante: ciò è conseguenza della propagazione degli errori. È inoltre possibile osservarlo nella *Figura 2*.

4. Abbiamo ripetuto i tre punti precedenti sugli stessi dati, con  $\theta$  cambiato di segno: così facendo, ai massimi si sostituiscono i minimi e tutto il resto dell'analisi è analoga. Per ogni configurazione abbiamo pertanto ottenuto due diversi valori di  $\lambda$ :  $\lambda_{\min}$  e  $\lambda_{\max}$ . Abbiamo scelto di porre  $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$ .

Figura 4:  $\ln|\theta(t)|$  di massimi e minimi, su scala logaritmica (per  $\Gamma = \{\}$ ). Sono riportate anche le barre di errore sull'ordinata. In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa la sua regione di incertezza.

Poiché l'obiettivo è calcolare  $g$ , la correzione da effettuare sul periodo, per tenere conto dell'attrito, è la seguente:

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 + \lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2} = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$$

Effettuata questa correzione per ogni configurazione  $\Gamma$ , si può allora costruire nuovamente una retta di regressione, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente. La relazione fra le grandezze misurate, ricordiamo, è lineare:

$$\frac{I_z^{\text{tot}}}{Mr_{\text{CM}}} = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

Riportiamo di seguito il grafico della nuova regressione, unitamente ai risultati ottenuti.

Figura 5: In rosso, la retta di regressione lineare e in rosa, appena visibile, la sua regione di incertezza. (le barre di errore sull'ascissa sono così ridotte da risultare invisibili)

I risultati della regressione lineare sono i seguenti:

- Intercetta =  $(0.003 \pm 0.005)$  m
- Coefficiente angolare  $g = (9.68 \pm 0.13)$  m/s<sup>2</sup>

Come è possibile osservare comparando questi risultati a quelli precedentemente ottenuti, il valore di  $g$  risultante è rimasto essenzialmente invariato (al netto della sua incertezza).

In conclusione, possiamo affermare ragionevolmente che, rispetto alla sensibilità degli strumenti di misura, il contributo dell'attrito è trascurabile.