

Laboratorio di Fisica 1

R6: ...

Gruppo 17: Bergamaschi Riccardo, Graiani Elia, Moglia Simone

8/11/2023 – 15/11/2023

Sommario

Il gruppo di lavoro ha misurato il calore specifico di tre solidi distinti per risalirne alla natura.

0 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Termometro digitale	0 °C	0 °C	0.1 °C
Termometro a mercurio	0.1 °C?	100 °C?	0.1 °C?
Barometro	0 hPa	0 hPa	0 hPa
Bilancia	0.5 g	4100.00 g	0.01 g
Altro	Descrizione/Note		
Calorimetro	sistema isolato termicamente e pressoché adiabatico.		
Fornelletto e pentolino	Per scaldare l'acqua e quindi anche i campioni.		
Tre campioni solidi	Li chiameremo A , B e C .		

1 Misurazione della massa equivalente

1.1 Scritto

Dobbiamo misurare il calore specifico degli oggetti a noi dati. Il calore specifico c è la quantità di calore necessaria ad aumentare di 1 K una quantità unitaria di massa (1 kg) e cambia da sostanza a sostanza. Se abbiamo oggetti composti da più materiali possiamo utilizzare come grandezza, anche se contiene meno informazioni, la capacità termica C , ovvero il calore necessario ad un oggetto per innalzare la sua temperatura di 1 K.

L'equazione che dobbiamo tenere presente è $Q = mc\Delta T$.

Per determinare il calore specifico di un oggetto dobbiamo conoscerne la massa, che si misura con la bilancia, lo sbalzo termico, che si misura con i due termometri, uno a mercurio e uno digitale, e il calore assorbito o ceduto dal corpo, che, però, non è misurabile in modo immediato. Si può misurare in un sistema isolato termicamente, come un calorimetro adiabatico dove mettiamo il corpo a contatto con un'altro corpo (per esempio una massa d'acqua) di cui conosciamo i valori precedentemente descritti. Mettendo due corpi, uno caldo e uno freddo, a contatto termico in un sistema isolato e in cui non viene svolto lavoro meccanico, sappiamo che il corpo caldo cederà calore al corpo freddo fino al raggiungimento di una temperatura di equilibrio e che $\Delta Q_{\text{ced}} = -\Delta Q_{\text{ass}}$ (conservazione dell'energia).

Se noi scaldiamo uno dei solidi nell'acqua bollente, ovvero in corrispondenza della transizione di quest'ultima da stato liquido ad aeriforme, tutto il sistema è a 100°C , salvo correzioni dovute alla pressione diversa da 1 atm. L'acqua da noi utilizzata è distillata ($c = 4186 \text{ J/kg K}$). Quando accendiamo il fornello, per farlo scaldare più velocemente e assicurarci di essere in stato di ebollizione, regoliamo la temperatura della piastra a $T > 100^\circ\text{C}$. Quando il cilindretto raggiunge la temperatura di 100°C lo mettiamo nel calorimetro, nel quale si troverà acqua a temperatura ambiente, ma prima di fare questo trasferimento facciamo partire la misura della temperatura. Chiuso il calorimetro, mescoliamo (per evitare che l'acqua calda resti in alto).

$$m_{\text{met}}c_{\text{met}}(T_{\text{caldo}} - T_{\text{eq}}) = c_{\text{acqua}}m_{\text{acqua}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{fredda}})$$

"Il calorimetro è abbastanza adiabatico e questo lo valuterete nell'ultima parte dell'esperimento."

$$m_{\text{met}}c_{\text{met}}(T_{\text{caldo}} - T_{\text{eq}}) = (c_{\text{acqua}}m_{\text{acqua}} + C_{\text{calorimetro}})(T_{\text{eq}} - T_{\text{fredda}})$$

. Questa è la seconda parte dell'esperimento.

È necessaria una prima parte dell'esperimento per misurare $C_{\text{calorimetro}}$. Prendiamo due masse d'acqua, una fredda da mettere nel calorimetro ed una da scaldare nel pentolino. È meglio che le masse si equivalgano, e che la loro somma sia uguale all'acqua che utilizzeremo nella seconda parte, in modo che il calorimetro si bagni allo stesso modo. Raggiunti i 100°C , versiamo l'acqua calda nel calorimetro. Allora:

$$m_{\text{calda}}c_{\text{acqua}}(T_{\text{calda}} - T_{\text{eq}}) = (m_{\text{fredda}}c_{\text{acqua}} + C_{\text{calorimetro}})(T_{\text{eq}} - T_{\text{fredda}})$$

Invece che misurare $C_{\text{calorimetro}}$ in J/K, possiamo considerare a quanta acqua equivale il calorimetro dal punto di vista termico, ovvero la quantità di acqua che assorbirebbe lo stesso calore del calorimetro.

$$m_{\text{calda}}(T_{\text{calda}} - T_{\text{eq}}) = (m_{\text{fredda}} + m_{\text{equiv}})(T_{\text{eq}} - T_{\text{fredda}})$$

Osservazione. La massa equivalente (m_{equiv}) ci da anche un'idea di quanto il calorimetro disturbi la misura.

Una volta ottenuto questo valore, possiamo calcolare i calori specifici dei metalli di cui sono composti i cilindretti.

Come ultima cosa misureremo la discesa esponenziale della temperatura dell'acqua dentro al calorimetro e in particolare il suo tempo caratteristico, ovvero la quantità di tempo τ che impiega l'acqua all'interno del calorimetro ad abbassare la sua temperatura di $(T_0 - T_{amb})e$ volte.

La legge che segue questa discesa è:

$$(T - T_{amb.}) = (T_0 - T_{amb.})e^{-t/\tau}$$

Il parametro τ descrive quanto bene il calorimetro trattiene il calore (quindi sia adiabatico). Per misurarlo abbiamo scaldato 200 g d'acqua, che abbiamo poi lasciato raffreddare nel calorimetro in partenza vuoto, registrandone la T .

L'equazione della regressione lineare che abbiamo utilizzato è:

$$\ln(T - T_{amb.}) = \ln(T_0 - T_{amb.}) - \frac{1}{\tau}t$$

2 Processo di Bernoulli

2.1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Materiali	Descrizione/Note
Sei dadi	Di colori diversi, per poterli identificare facilmente
Calcolatore	Computer portatile ⁴

2.2 Dati sperimentali

Eseguiamo 400 lanci di sei dadi distinti⁵, registrandone tutti i risultati. Per ogni possibile risultato⁶ $s \in [1; 6] \cap \mathbb{N}$, possiamo così definire una variabile aleatoria $x_s \in [0; 6] \cap \mathbb{N}$ come il numero di dadi, fra i sei lanciati, con risultato pari ad s . Il lancio dei sei dadi è un processo di Bernoulli; di conseguenza, la distribuzione di probabilità di x_s è data da:

$$p(x_s = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k} \quad \forall k \in [0; 6] \cap \mathbb{N}$$

Di seguito riportiamo gli istogrammi dei dati così raccolti, assieme ai valori attesi, dedotti dalla distribuzione teorica.

⁴Intel core i5 gen 7 dual-core 1.6 GHz

⁵Li distinguiamo in base al colore

⁶Notazione. Per noi $0 \in \mathbb{N}$.

Figura 1: ...

Figura 2: ...

Onestà dei dadi

Avendo segnato tutti i risultati di ogni dado, possiamo inoltre stimare se i dadi che abbiamo utilizzato sono truccati o meno. Infatti, su un dado onesto ci aspettiamo che escano tutti i risultati possibili con equa probabilità. Di seguito riportiamo gli istogrammi dei valori usciti su ogni dado.

2.3 Simulazione

Tramite un programma da noi scritto e compilato⁷, simuliamo la stessa esperienza con 10^{12} lanci dei sei dadi al fine di verificare la legge dei grandi numeri. Questa consiste nella tesi che, su un grande numero di prove, i risultati si avvicinino ai valori attesi.

Di seguito riportiamo, in un istogramma, i risultati della simulazione.

3 Processo di Poisson

3.1 Materiali e strumenti di misura utilizzati

Strumento di misura	Soglia	Portata	Sensibilità
Contatore Geiger	1 conteggi/s	???	1 conteggi/s
Metro a nastro	0.1 cm	300.0 cm	0.1 cm
Altro	Descrizione/Note		
Sei dadi	Usati per riprodurre un processo bernoulliano.		
Campione di Torio-232	Usato per riprodurre un processo poissoniano.		

3.2 Esperienza e procedimento di misura

1. Acceso e impostato adeguatamente il contatore Geiger, misuriamo per 5 diverse distanze tra contatore e campione il numero di raggi γ_{ij} emessi da quest'ultimo in 3600 intervalli da un secondo.
2. Direzioneato il contatore dal verso opposto rispetto al campione, misuriamo il numero di raggi γ_{amb} rilevabili che definiscono il fondo dei nostri dati.

⁷ Vedi Appendice 1

Fissato un sistema di riferimento solidale all'apparato di misura, con origine nella posizione di partenza delle sferette e $\hat{x} = \hat{g}$, possiamo scrivere la seguente legge del moto:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Per ogni sferetta i , posto $x(\overline{t_i}) = d_0 - \frac{1}{2}\varnothing_i$, la norma di \vec{g} è ricavabile da:

$$g = \frac{2d_0 - \varnothing_i}{(\overline{t_i})^2}$$

dove determiniamo l'errore su g propagando gli errori su d_0, \varnothing_i e $\overline{t_i}$, avendo posto

$$\delta\overline{t_i} = \sigma_{\overline{t_i}} = \frac{\sigma_{t_i}}{\sqrt{100}} = \frac{\sigma_{t_i}}{10}.$$

Di seguito riportiamo gli istogrammi dei tempi e i valori di g così ottenuti.

Figura 3: Istogrammi dei dati t_1 e t_2 raccolti

i	\varnothing_i (mm)	$\overline{t_i}$ (ms)	g (m/s ²)	ε
A	24.63 ± 0.01	503.62 ± 0.03	9.83 ± 0.02	1.00
B	22.23 ± 0.01	503.91 ± 0.03	9.82 ± 0.02	0.93

3.3 Esperienza sulla distribuzione di Poisson

1. Consideriamo la distanza tra i due fototraguardi e impostiamo i fotodiodi del contatore su A+B.
2. Usando solo
 - (a) Appeso il campione alla molla, allineiamo i due fototraguardi aiutandoci con la livella, in modo tale che possano rilevare le oscillazioni nel modo più accurato possibile;
 - (b) Tiriamo leggermente il campione verso il basso e poi lo rilasciamo, in modo che il sistema molla inizi a oscillare con direzione il più possibile parallela a \vec{g} ;
 - (c) Attesa la stabilizzazione dell'oscillazione, avviamo l'acquisizione della misura di un tempo (20 periodi) $20T_i$.
 - (d) Ripetiamo molte volte (in tutto N_{20T_i}) i punti (b) e (c). In particolare, $N_{20T_A} = N_{20T_B} = 25$ e $N_{20T_C} = N_{20T_{A+B}} = 30$.
3. Infine, misuriamo con la bilancia, separatamente, la massa della molla m_m e la massa del gancio m_g .

Infatti, nel caso dinamico, il contributo di queste masse *non* si annulla; in particolare, la massa del gancio contribuisce appieno (in quanto è solidale col grave), mentre la massa della molla contribuisce per circa $\frac{1}{3}$. La massa effettiva da considerare per ogni grave sarà allora:

$$((m_{\text{eff}})_i)_{\text{best}} = (m_i)_{\text{best}} + (m_g)_{\text{best}} + \frac{1}{3}(m_m)_{\text{best}}$$

$$\delta(m_{\text{eff}})_i = \delta m_i + \delta m_g + \frac{1}{3}\delta m_m$$

Di seguito sono riportate le distribuzioni dei dati raccolti:

Figura 4: Istogrammi dei periodi delle oscillazioni di A e B

Figura 5: Istogrammi dei periodi delle oscillazioni di C e $A + B$

Poiché i nostri dati hanno assunto distribuzioni grossolanamente approssimabili a gaussiane, possiamo procedere al calcolo di k , utilizzando, per ogni grave i , i seguenti valori:

$$(20T_i)_{\text{best}} = \overline{20T_i} \quad \wedge \quad \delta(20T_i) = \sigma_{\overline{20T_i}} = \frac{\sigma_{20T_i}}{\sqrt{N_{20T_i}}}$$

dove $\overline{20T_i}$ e σ_{20T_i} indicano rispettivamente media e deviazione standard dei tempi.

Per determinare la costante elastica della molla, abbiamo effettuato una regressione lineare (stavolta pesata) sui quadrati dei valori medi dei tempi (T_i^2 , con $\delta T_i^2 = 5 \cdot 10^{-3} (20T_i)_{\text{best}} \delta(20T_i)$)² rispetto alla massa $(m_{\text{eff}})_i$, facendo riferimento alla relazione $T_i^2 = \frac{4\pi^2}{k} (m_{\text{eff}})_i$. Allora, detto b il coefficiente angolare della retta di regressione, varrà:

$$k_{\text{best}} = \frac{4\pi^2}{b_{\text{best}}} \quad \wedge \quad \frac{\delta k}{k_{\text{best}}} = \frac{\delta b}{b_{\text{best}}}$$

Si noti che, anche in questo caso, l'intercetta a della retta dev'essere compatibile con 0.

Di seguito è riportata la retta di regressione, assieme ai risultati ottenuti:

Figura 6: La retta di regressione (in rosso) e la sua regione di incertezza (in rosa).

²La formula per l'errore su T_i^2 segue direttamente dalla propagazione degli errori:

$$\frac{\delta T_i^2}{(T_i^2)_{\text{best}}} = 2 \frac{\delta T_i}{(T_i)_{\text{best}}} \quad \delta T_i^2 = 2 (T_i)_{\text{best}} \delta T_i \quad \delta T_i^2 = \frac{(20T_i)_{\text{best}} (\delta 20T_i)}{200}$$

da cui quanto riportato sopra. Si osservi che δT_i^2 dipende da $(20T_i)_{\text{best}}$: proprio questo è il motivo dietro alla scelta del metodo pesato per la regressione lineare.

- $a = (0.02 \pm 0.19) \text{ cm}$ (compatibile con 0)
- $b = (4.604 \pm 0.002) \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{g} = (46.04 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ s}^2/\text{kg}$
- $k = (85.74 \pm 0.04) \text{ N/m}$

4 Conclusioni

Per valutare numericamente la consistenza tra i due valori di k ottenuti, abbiamo calcolato il seguente valore (numero puro):

$$\varepsilon = \frac{|(k_{\text{statica}})_{\text{best}} - (k_{\text{dinamica}})_{\text{best}}|}{\delta k_{\text{statica}} + \delta k_{\text{dinamica}}}$$

Allora k_{statica} e k_{dinamica} sono consistenti se e solo se $\varepsilon \leq 1$.

Nel nostro caso, $\varepsilon = 1.33$. Il gruppo di lavoro ha ipotizzato che questa inconsistenza (comunque contenuta, seppur non trascurabile) fra le due misure possa essere ragionevolmente giustificata dalla difficoltà incontrata nel ridurre al minimo le oscillazioni in direzione perpendicolare a \vec{g} ; considerato inoltre che la posizione dei fototraguardi non era ottimale, ciò potrebbe avere ulteriormente influenzato la distribuzione dei tempi. È in effetti possibile osservare che le distribuzioni da noi ottenute non sono, il più delle volte, del tutto simmetriche: la moda sembra essersi spostata leggermente a sinistra – un possibile sintomo dell’influenza di un errore sistematico sulle misure.

Appendices

A Codice Rust per $5 \cdot 10^{12?}$ lanci di dadi

Qui riportiamo il codice Rust, da noi scritto, che ci ha permesso di lanciare virtualmente $5 \cdot 10^{12?}$ dadi in maniera estremamente efficiente.