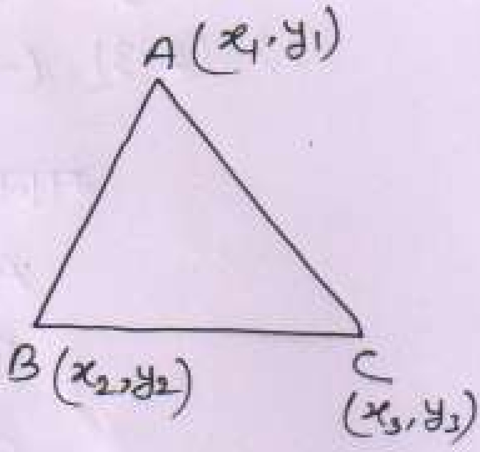
* त्रिभुज का क्षेत्रफल :-

माना कि ΔABC में,

$A = (x_1, y_1)$

$B = (x_2, y_2)$

$C = (x_3, y_3)$



$\therefore$ Δ का क्षे० $= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$

* त्रिभुज का क्षेत्रफल सदैव धनात्मक लिया जाता है। अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल सदा धनात्मक होगा।

* तीन बिन्दुओ के संरेखी होने की शर्त :-

तीन बिन्दुएँ संरेखी होगी यदि Δ का क्षेत्रफल का मान 0 होगा।

अर्थात्

Δ का क्षेत्रफल $= 0$ हो तो तीनों बिन्दुएँ संरेखी होगी।

Exercise - 7.3

(1) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं:-

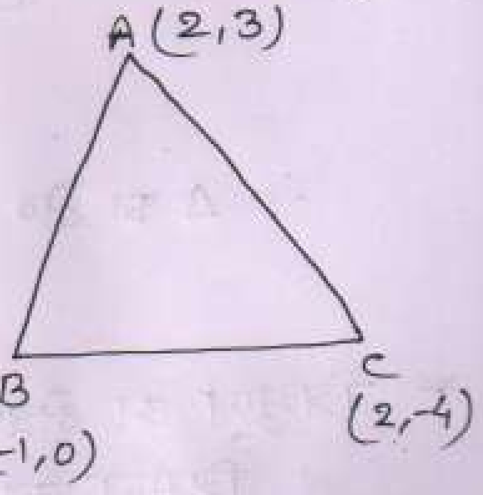
(i) (2,3), (-1,0), (2,-4)

माना कि ΔABC के शीर्षों का निर्देशांक है,

$A = (2,3)$

$B = (-1,0)$

$C = (2,-4)$



माना कि,

$x_1 = 2 \qquad y_1 = 3$

$x_2 = -1 \qquad y_2 = 0$

$x_3 = 2 \qquad y_3 = -4$

$\therefore$ ΔABC का क्षे० $= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$

$= \frac{1}{2}\left| 2[0-(-4)] + (-1)(-4-3) + 2(3-0) \right|$

$= \frac{1}{2}\left| 2\times4 + (-1)(-7) + 2\times3 \right|$

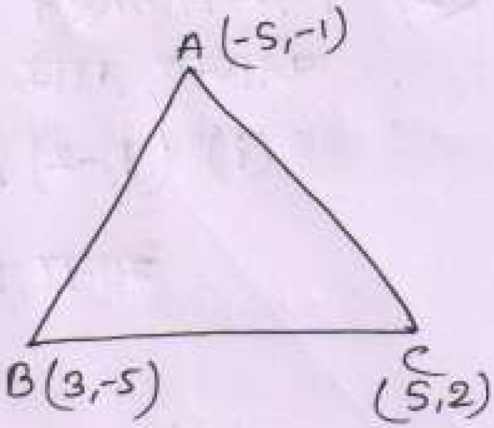
$= \frac{1}{2}\left| 8+7+6 \right|$

$= \frac{1}{2}\left| 21 \right|$

$= \frac{21}{2}$ वर्ग मात्रक

(ii) $(-5, -1), (3, -5), (5, 2)$

माना कि ΔABC में,



$A = (-5, -1)$

$B = (3, -5)$

$C = (5, 2)$

फिर,

$x_1 = -5 \qquad y_1 = -1$

$x_2 = 3 \qquad y_2 = -5$

$x_3 = 5 \qquad y_3 = 2$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$= \frac{1}{2}\left| -5(-5-2) + 3[2-(-1)] + 5[-1-(-5)]\right|$

$= \frac{1}{2}\left| -5(-7) + 3(2+1) + 5(-1+5)\right|$

$= \frac{1}{2}\left| 35 + 3\times3 + 5\times4 \right|$

$= \frac{1}{2}\left| 35 + 9 + 20 \right|$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{64}^{32}$

$= 32$ वर्ग इकाई

(2.) निम्नलिखित में से प्रत्येक में 'K' का मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनो बिंदु संरेखी हो :-

(i) (7,-2), (5,1), (3,K)

माना कि,

$x_1 = 7 \qquad y_1 = -2$

$x_2 = 5 \qquad y_2 = 1$

$x_3 = 3 \qquad y_3 = K$

∴ संरेखी होने के लिए आवश्यक है कि,
Δ का क्षे० = 0 हो।

$$\therefore \Delta \text{ का क्षे०} = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| 7(1-K)+5[K-(-2)]+3(-2-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| 7-7K+5(K+2)+3(-3)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| 7-7K+5K+10-9\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| 8-2K\right|$$

$$= \frac{1}{2}\times(8-2K)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{2}(4-K)$$

$$= 4-K$$

∴ Δ का क्षे० = 0

∴ $4-K=0$

$\Rightarrow 4 = K$

$\Rightarrow K = 4$

(ii) (8,1), (K,-4), (2,-5)

माना कि,

$x_1 = 8$, $y_1 = 1$

$x_2 = K$, $y_2 = -4$

$x_3 = 2$, $y_3 = -5$

∵ संरेखी होने के लिए आवश्यक है कि

Δ का क्षे० = 0

∴ Δ का क्षे० $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left|8[-4-(-5)]+K(-5-1)+2[1-(-4)]\right|$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left|8(-4+5)+K(-6)+2(1+4)\right|$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left|8\times1+K(-6)+2\times5\right|$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left|8-6K+10\right|$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left|18-6K\right|$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\times(18-6K)$

$\Rightarrow 0 = 18-6K$

$\Rightarrow 6K = 18$

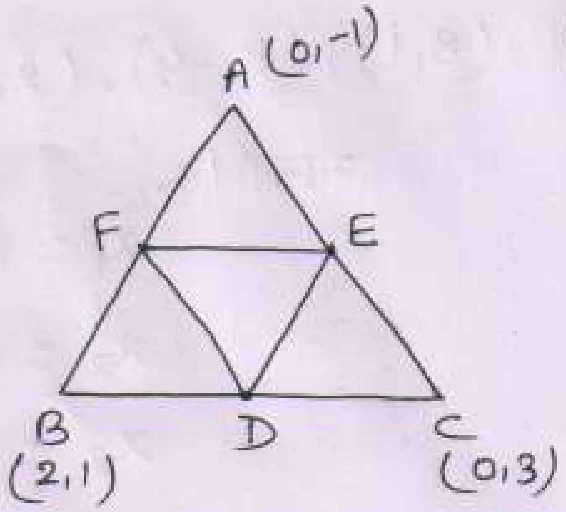
$\Rightarrow K = \frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{6}}$ ∴ $K = 3$

⟨3⟩ ΔABC में,

$A = (0, -1)$

$B = (2, 1)$

$C = (0, 3)$



माना कि,

$x_1 = 0, \quad y_1 = -1$

$x_2 = 2, \quad y_2 = 1$

$x_3 = 0, \quad y_3 = 3$

$$\Delta ABC \text{ का क्षे॰} = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|0(1-3)+2[3-(-1)]+0(-1-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|0+2(3+1)+0\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|0+2\times4+0\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|0+8+0\right|$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{8}^{4}$$

$$= 4$$

∵ ΔABC की भुजाओं AB, BC, AC का मध्य-बिन्दु क्रमशः D, E, F है।

∴ D, BC का मध्य-बिन्दु है।

$$\therefore D = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$$

$$D = \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}, \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\right)$$

$\therefore D = (1, 2)$

और,

E, AC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore E = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$

$= \left(\frac{0}{2}, \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)$

$= (0, 1)$

और,

F, AB का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore F = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}, \frac{0}{2}\right)$

$= (1, 0)$

अब,

ΔDEF में,

$D = (1, 2)$

$E = (0, 1)$

$F = (1, 0)$

माना कि,

$x_1 = 1 \quad y_1 = 2$

$x_2 = 0 \quad y_2 = 1$

$x_3 = 1 \quad y_3 = 0$

$\therefore$ ΔDEF का क्षेत्र $= \frac{1}{2} \left| x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_2) + x_3 (y_1 - y_2) \right|$

$= \frac{1}{2} \left| 1(1-0) + 0(0-2) + 1(2-1) \right|$

$= \frac{1}{2} \left| 1\times1 + 0 + 1\times1 \right|$

$= \frac{1}{2} (1 + 0 + 1)$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$

$= 1$

$\therefore$ अनुपात $= \dfrac{\Delta DEF \text{ का क्षे॰}}{\Delta ABC \text{ का क्षे॰}}$

$= \frac{1}{4}$

$= 1 : 4$

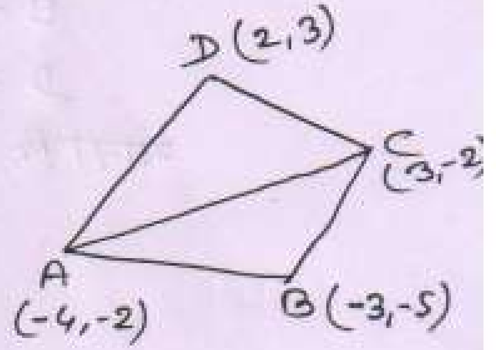
(4.) माना कि, चतुर्भुज ABCD में,

$A = (-4, -2)$

$B = (-3, -5)$

$C = (3, -2)$

$D = (2, 3)$



∴ AC को मिलाया ।

ΔABC में;

$A = (-4, -2)$

$B = (-3, -5)$

$C = (3, -2)$

माना कि,

$x_1 = -4 \qquad y_1 = -2$

$x_2 = -3 \qquad y_2 = -5$

$x_3 = 3 \qquad y_3 = -2$

ΔABC का क्षे० $= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -4[-5-(-2)] + (-3)[-2-(-2)] + 3[-2-(-5)] \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -4(-5+2) - 3(-2+2) + 3(-2+5) \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -4(-3) - 3(0) + 3 \times 3 \right|$

$= \frac{1}{2}\left| 12 - 0 + 9 \right|$

$= \frac{1}{2} \times 21$

$= \frac{21}{2}$

ΔACD के लिए,

$A = (-4, -2)$

$C = (3, -2)$

$D = (2, 3)$

माना कि,

$x_1 = -4 \qquad y_1 = -2$

$x_2 = 3 \qquad y_2 = -2$

$x_3 = 2 \qquad y_3 = 3$

ΔACD का क्षे० $= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|-4(-2-3) + 3[3-(-2)] + 2[-2-(-2)]\right|$

$= \frac{1}{2}\left|-4(-5) + 3(3+2) + 2(-2+2)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|20 + 3 \times 5 + 2 \times 0\right|$

$= \frac{1}{2}\left|20 + 15 + 0\right|$

$= \frac{1}{2} \times 35$

$= \frac{35}{2}$

$\because$ चतुर्भुज ABCD का क्षे० $=$ ΔABC का क्षे० $+$ ΔACD का क्षे०

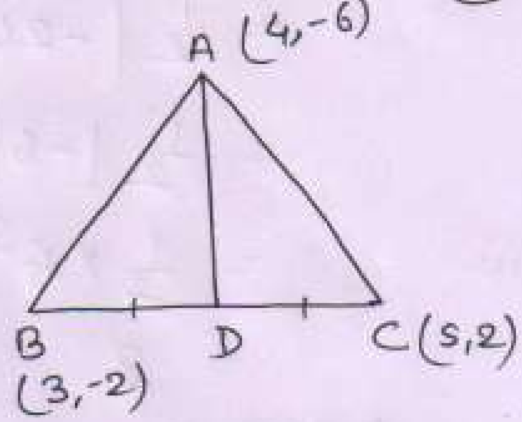
$= \frac{21}{2} + \frac{35}{2}$

$= \frac{21+35}{2}$

$= \frac{\cancel{56}}{\cancel{2}}$

$= 28$ वर्ग मात्रक

<5> माना कि, ΔABC में,



$A = (4,-6)$

$B = (3,-2)$

$C = (5,2)$

और AD, ΔABC की माध्यिका है

$\because$ D, BC का मध्य-बिन्दु है

$$\therefore \quad D = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+2}{0}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{8}^4}{\cancel{2}}, \frac{0}{0}\right)$$

$$= (4,0)$$

<u>सिद्ध करना है:-</u> $ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$

ΔABD में,

$A = (4,-6)$.

$B = (3,-2)$

$D = (4,0)$

माना कि,

$x_1 = 4 \qquad y_1 = -6$

$x_2 = 3 \qquad y_2 = -2$

$x_3 = 4 \qquad y_3 = 0$

$$ar(\Delta ABD) = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|4(-2-0)+3[0-(-6)]+4[-6-(-2)]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|4\times(-2)+3(0+6)+4(-6+2)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-8+18+4(-4)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-8+18-16\right|$$

=

$= \frac{1}{2}|-24+18|$

$= \frac{1}{2}|-6|$

$= \frac{1}{2} \times 6^{3}$

$= 3$

ΔACD में,

$A = (4, -6)$

$C = (5, 2)$

$D = (4, 0)$

माना कि,

$x_1 = 4 \quad y_1 = -6$

$x_2 = 5 \quad y_2 = 2$

$x_3 = 4 \quad y_3 = 0$

$ar(\Delta ACD) = \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|$

$= \frac{1}{2}|4(2-0) + 5[0-(-6)] + 4(-6-2)|$

$= \frac{1}{2}|4\times2 + 5(0+6) + 4(-8)|$

$= \frac{1}{2}|8 + 5\times6 - 32|$

$= \frac{1}{2}|8+30-32|$

$= \frac{1}{2}|38-32|$

$= \frac{1}{2} \times 6^{3}$

$= 3$

$\therefore ar(\Delta ABD) = ar(\Delta ACD)$ proved