

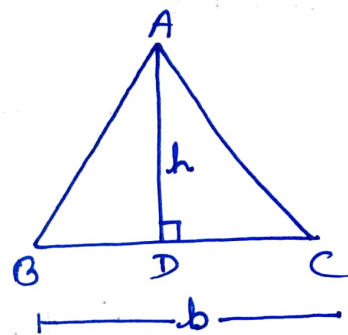
* क्षेत्रमिति (Mensuration): -

गणितशास्त्र के जिस शाखा में किसी आकृति की लम्बाई, समतल आकृतियों के क्षेत्रफल तथा ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन इत्यादि के माप का अध्ययन किया जाता है, उसे क्षेत्रमिति कहते हैं।

* यदि किसी त्रिभुज में आधार तथा शीर्षलम्ब (ऊँचाई) दिया हो, तो

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब (ऊँचाई)}$$

$$= \frac{1}{2} \times b \times h$$

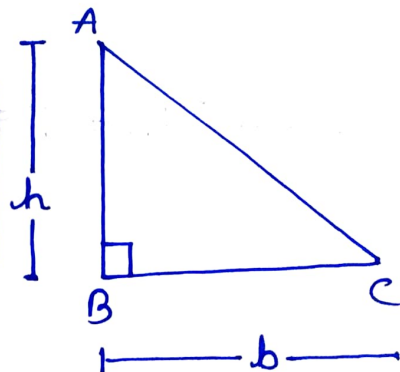


* समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90^\circ$
 $AB \perp BC$ हो, तो

$$\text{समकोण } \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

∴ समकोण त्रिभुज का क्षेत्र = $\frac{1}{2} \times$ समकोण की आसन्न भुजाओं का गुणनफल



* समद्विबाहु त्रिभुज :- Isosceles Triangle

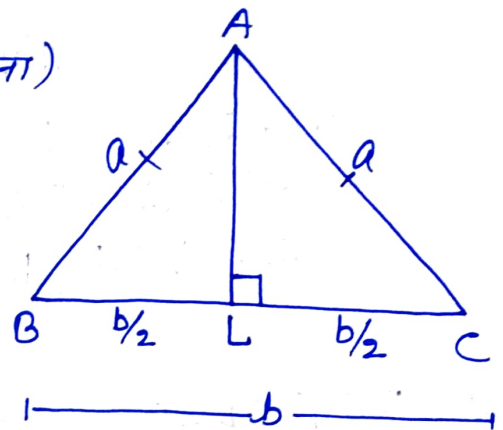
समद्विबाहु $\triangle ABC$ में,

$$AB = AC = a \text{ (माना)}$$

$$BC = b$$

$$AL \perp BC$$

$$\therefore BL = CL = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} b$$



$$\therefore \text{समद्विबाहु } \triangle ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{4} \times b \sqrt{4a^2 - b^2}$$

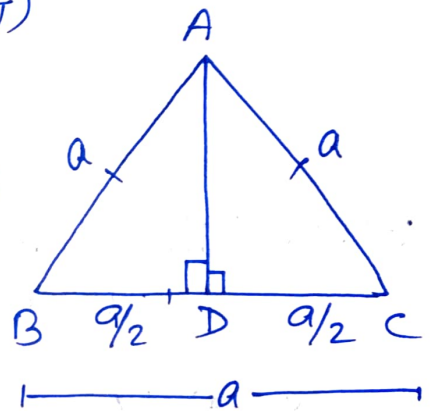
* समबाहु त्रिभुज :-

समबाहु $\triangle ABC$ में,

$$AB = BC = AC = a \text{ (माना)}$$

$$AD \perp BC$$

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a = \frac{a}{2}$$



$$\begin{aligned} \therefore \text{समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{भुजा} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad [\because \text{भुजा} = a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्र} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{भुजा}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \quad [\because \text{भुजा} = a] \end{aligned}$$

* यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई दीया हो (3)
लेकिन ऊँचाई नहीं दीया हो, तो -

इस प्रकार के त्रिभुज का क्षेत्रफल हीरो का सूत्र प्रयोग करके
निकाला जाता है।

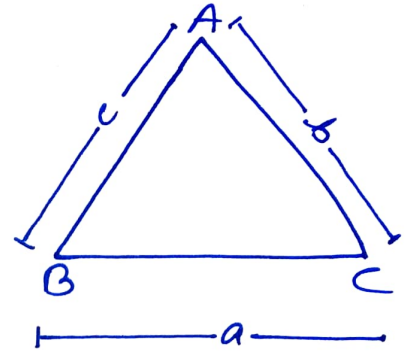
माना ΔABC में,

$$BC = a$$

$$AB = c$$

$$AC = b$$

$$\therefore S = \frac{a+b+c}{2}$$



$$\therefore \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Note:-

- (i) त्रिभुज की ~~अर्ध~~ अर्ध परिमिति को 'S' से सूचित जाता है।
- (ii) त्रिभुज के क्षेत्रफलों को Δ (डेल्टा) से सूचित किया जाता है।
- (iii) हीरोन के इस सूत्र को हीरो का सूत्र (Hero's formula) भी कहा जाता है।

Exercise - 12.1

(4)

1) \therefore यातायात ^{संकेत} बोर्ड एक समबाहु त्रिभुज के रूप में

\therefore समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई = a

\therefore समबाहु त्रिभुज की परिमाप = $3a$

$$\Rightarrow 180 = 3a$$

$$\Rightarrow a = \frac{180}{3} = 60$$

$$\Rightarrow a = 60 \text{ cm}$$

$$\therefore S = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

\therefore हीरोन सूत्र से,

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्र} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a-2a}{2} \right) \left(\frac{3a-2a}{2} \right) \left(\frac{3a-2a}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}$$

$$= \frac{a \times a}{2 \times 2} \sqrt{3}$$

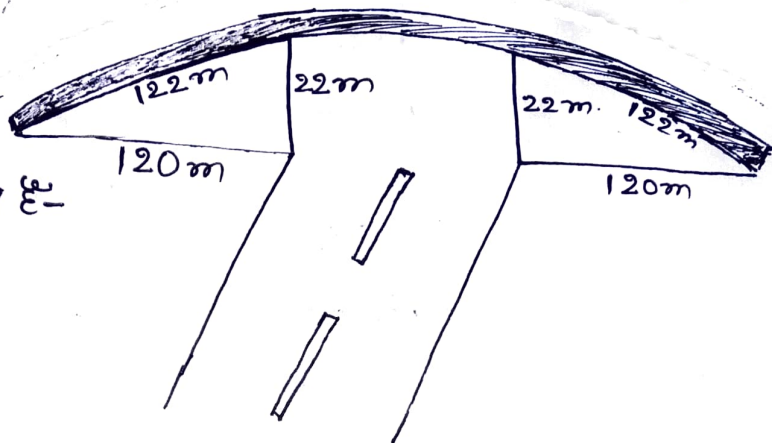
$$= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times (60)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 60 \times 60 = 900\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

2. > ∴ फलार्डओवर की दीवारे त्रिभुजाकार के रूप में हैं।



∴ दीवार की भुजाएँ निम्न हैं-

$$a = 122\text{m}$$

$$b = 22\text{m}$$

$$c = 120\text{m}$$

$$\therefore S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$= \frac{122+22+120}{2}$$

$$= \frac{264}{2}$$

$$= 132\text{m}$$

∴ हीरोन के सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{एक त्रिभुजाकार दीवार का क्षेत्र} &= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \\ &= \sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)} \\ &= \sqrt{132 \times 10 \times 110 \times 12} \\ &= \sqrt{11 \times 12 \times 10 \times 11 \times 10 \times 12} \\ &= 11 \times 12 \times 10 \\ &= 1320\text{m}^2 \end{aligned}$$

∴ विज्ञापन से,

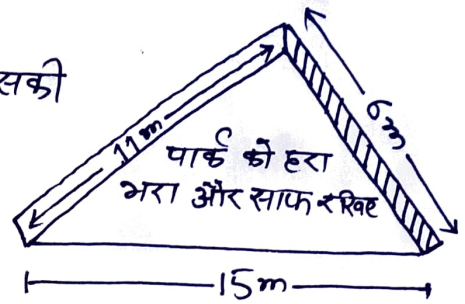
$$1 \text{ वर्ष (12 महीने) में प्राप्त किराया} = ₹ 50000 \times 1320$$

$$\therefore 1 \text{ महीना में प्राप्त किराया} = ₹ \frac{50000 \times 1320}{12}$$

$$\therefore 3 \text{ महीने में प्राप्त किराया} = ₹ \frac{50000 \times 1320}{12} \times 3$$

$$= 16,50,000 \text{ ₹ } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

(3) \because पार्श्वीय दीवारें त्रिभुजाकार हैं जिसकी भुजाएँ
 $a = 15\text{m}$
 $b = 6\text{m}$
 $c = 11\text{m}$



$$\therefore S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+6+11}{2} = \frac{32}{2} = 16\text{m}.$$

हीरोन के सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{रंग से पैट हुए भाग का क्षेत्रफल} &= \text{पार्श्वीय दीवार का क्षेत्र} \\ &= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \\ &= \sqrt{16(16-15)(16-6)(16-11)} \\ &= \sqrt{16 \times 1 \times 10 \times 5} \\ &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5} \\ &= 2 \times 2 \times 5\sqrt{2} \\ &= 20\sqrt{2}\text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{रंग से पैट हुए भाग का क्षेत्र} = 20\sqrt{2}\text{m}^2 \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

(4) माना कि त्रिभुज की भुजाएँ a, b तथा c हों

(7)

$$\therefore a = 18 \text{ cm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का परिमाप} = 42 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 42$$

$$\Rightarrow 18 + 10 + c = 42$$

$$\Rightarrow 28 + c = 42$$

$$\Rightarrow c = 42 - 28$$

$$\Rightarrow c = 14 \text{ cm}$$

$$\therefore S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+10+14}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ cm}$$

हीरोन के सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \\ &= \sqrt{21(21-18)(21-10)(21-14)} \\ &= \sqrt{21 \times 3 \times 11 \times 7} \\ &= \sqrt{3 \times 7 \times 3 \times 11 \times 7} \\ &= 3 \times 7 \sqrt{11} \\ &= 21 \sqrt{11} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ans

<5> माना कि त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हैं

$$\therefore a = 12x$$

$$b = 17x$$

$$c = 25x$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का परिमाप} = 540 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 540$$

$$\Rightarrow 12x + 17x + 25x = 540$$

$$\Rightarrow 54x = 540$$

$$\Rightarrow x = \frac{540}{54}$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$\therefore a = 12x = 12 \times 10 = 120 \text{ cm}$$

$$b = 17x = 17 \times 10 = 170 \text{ cm}$$

$$c = 25x = 25 \times 10 = 250 \text{ cm}$$

फिर,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{120+170+250}{2} = \frac{540}{2} = 270 \text{ cm}$$

हीरोन के सूत्र से,

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$$

$$= \sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$$

$$= \sqrt{81000000}$$

$$= 9000 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = 9000 \text{ cm}^2$$

(9.)

(6) समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप = 30 cm तथा बराबर भुजाएँ 12 cm लम्बाई की हों।

माना कि,

$$a = b = 12 \text{ cm}$$

तथा

$$\text{तीसरी भुजा की लम्बाई} = c$$

$$\therefore \text{समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप} = 30 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 30$$

$$\Rightarrow 12 + 12 + c = 30$$

$$\Rightarrow 24 + c = 30$$

$$\Rightarrow c = 30 - 24$$

$$\Rightarrow c = 6 \text{ cm}$$

अब

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+12+6}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

हीरोन के सूत्र से,

$$\begin{aligned} \text{समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्र} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)} \\ &= \sqrt{15 \times 3 \times 3 \times 9} \\ &= \sqrt{15 \times 9 \times 9} \\ &= 9\sqrt{15} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ans