

* केंद्रीय प्रवृत्ति के माप :- तीन प्रकार की होती हैं।

- (i) अंकगणितीय माध्य / माध्य (Arithmetic Mean)
- (ii) माध्यक / माध्यिका (Median)
- (iii) बहुलक (Mode)

<1> समान्तर (अंकगणितीय) माध्य :-

सजातीय श्रृंखलाओं के सभी प्रेक्षकों के योग में प्रेक्षकों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त मान को अंकगणितीय माध्य या समान्तर माध्य कहते हैं।

इसे प्रायः M द्वारा सूचित किया जाता है।

$$\therefore \text{माध्य (M)} = \frac{\text{सभी प्रेक्षकों का योग}}{\text{प्रेक्षकों की कुल संख्या}}$$

\Rightarrow यदि किसी आँकड़े के n प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हों तो

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

जहाँ, \bar{x} = अंकगणितीय माध्य / माध्य

n = प्रेक्षकों की कुल संख्या

\Rightarrow $\Sigma \rightarrow$ सिग्मा (Sigma) :-

$\Sigma \rightarrow$ कुल योग

उदाहरण :- ① 90 से 100 के बीच की सभी विषम संख्याओं का माध्य ज्ञात करें।

Ans.: 90 से 100 के बीच की विषम संख्याएँ हैं-

91, 93, 95, 97, 99

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{91 + 93 + 95 + 97 + 99}{5} = \frac{475}{5} = 95$$

उदाहरण:- (2) यदि 6, 10, x , एवं 12 का माध्य 8 हो तो x का मान ज्ञात करें।

Ans:- माध्य = $\frac{6+10+x+12}{4}$

$$\Rightarrow 8 = \frac{28+x}{4}$$

$$\Rightarrow 32 = 28+x$$

$$\Rightarrow 32-28 = x$$

$$\Rightarrow 4 = x$$

$$\therefore x = 4 \text{ Ans}$$

उदाहरण:- (3) यदि 6 प्रेक्षकों $x, (x+3), (x+6), (x+9), (x+12)$ और $(x+15)$ का माध्य 18 हो तो प्रथम चार प्रेक्षकों का माध्य ज्ञात करें।

Ans:- माध्य = $\frac{x+x+3+x+6+x+9+x+12+x+15}{6}$

$$\Rightarrow 18 = \frac{6x+45}{6}$$

$$\Rightarrow 108 = 6x+45$$

$$\Rightarrow 108-45 = 6x$$

$$\Rightarrow 63 = 6x$$

$$\Rightarrow x = \frac{63}{6} = 10.5$$

अतः प्रथम चार प्रेक्षकों का मान है-

$$x = 10.5$$

$$x+3 = 10.5+3 = 13.5$$

$$x+6 = 10.5+6 = 16.5$$

$$x+9 = 10.5+9 = 19.5$$

$$\therefore \text{प्रथम चार प्रेक्षकों का माध्य} = \frac{10.5+13.5+16.5+19.5}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

* समान्तर माध्य निकालने का सूत्र :-

(i) जब वंछन सरल या व्यक्तिगत हो :-

n राशियों $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ हो तो

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n}$$

उदाहरण :-

6, 9, 7, 5, 4 का माध्य ज्ञात करें।

Ans:

$$\text{माध्य} = \frac{6 + 9 + 7 + 5 + 4}{5}$$

$$= \frac{31}{5} = 6.2 \quad \underline{\underline{A}}$$

(ii) प्रत्यक्ष विधि :- (Direct Method)

यदि किसी आंकड़े के n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ की संगत वारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ हो तो

$$\text{माध्य} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}$$

$$\therefore \boxed{\text{माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}}$$

उदाहरण :- यदि चर मान 2, 3, 4, 5 की वारम्बारताएँ क्रमशः 1, 7, 3, 9 हों, तो उनका समान्तर माध्य ज्ञात करें।

Ans:

$$\text{माध्य} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 7 + 4 \times 3 + 5 \times 9}{1 + 7 + 3 + 9}$$

$$= \frac{2 + 21 + 12 + 45}{20}$$

$$= \frac{80}{20} = 4 \quad \underline{\underline{Ans}}$$

उदाहरण :-

(41)

किसी बगीचे के 30 पौधों की ऊँचाइयों (सेमी. में) निम्न प्रकार हैं-

| ऊँचाई (सेमी. में) | 70 | 58 | 60 | 52 | 65 | 75 | 68 |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| पौधों की संख्या | 3 | 5 | 4 | 7 | 6 | 2 | 3 |


उनकी माध्य ऊँचाई ज्ञात करें।

| ऊँचाई (सेमी. में) (x_i) | f_i (पौधों की संख्या) | $f_i x_i$ |
|--------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 70 | 3 | 210 |
| 58 | 5 | 290 |
| 60 | 4 | 240 |
| 52 | 7 | 364 |
| 65 | 6 | 390 |
| 75 | 2 | 150 |
| 68 | 3 | 204 |
| | $\Sigma f_i = 30$ | $\Sigma f_i x_i = 1848$ |

$$\therefore \text{माध्य ऊँचाई} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{1848}{30}$$

$$= 61.6 \text{ सेमी}$$



* माध्यक (Median) :-

=> अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका की गणना

(i) सरल वितरण के लिए -

नियम:-

- (a) दिए गए आँकड़ों के प्रेक्षणों को आरोही या अवरोही क्रम में सजाते हैं।
- (b) कुल प्रेक्षणों की संख्या को n से सूचित किया जाता है।
- (c) यदि $n =$ विषम संख्या हो, तो

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ पद}$$

- (d) यदि $n =$ सम संख्या हो, तो

$$\text{माध्यिका} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{2}\right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{वाँ पद} \right]$$

उदाहरण:-

2, 3, 8, 5, 7, 6, 9, 11, 10 का माध्यक ज्ञात करें-

Ans:-

दिए गए प्रेक्षणों को आरोही क्रम में सजाने पर,

2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

$\therefore n = 9$ जो विषम संख्या है।

$$\therefore \text{माध्यक} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{वाँ पद}$$

$$= \left(\frac{9+1}{2}\right) \text{वाँ पद}$$

$$= \left(\frac{10}{2}\right) \text{वाँ पद}$$

$$= 5 \text{ वाँ पद}$$

$$= \underline{\underline{7 \text{ Ans}}}$$

उदाहरण:-

1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 13, 18, 16 की माध्यिका
जात करें।

(43)

Ans:-

प्रेक्षणों को आरोही क्रम में सजाने पर,
1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18

$\therefore n = 12$ जो सम संख्या है।

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्यिका} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{12}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{12}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद} \right] \\ &= \frac{1}{2} [6 \text{ वाँ पद} + 7 \text{ वाँ पद}] \\ &= \frac{1}{2} [8 + 10] \\ &= \frac{1}{2} \times 18 \\ &= 9\end{aligned}$$

* यदि अवर्गीकृत बारम्बारता वितरण दी गयी हो तो सारिणी में चर के मानों को आरोही या अपरोही क्रम में सजाएँ। इसके बाद प्रत्येक चर के लिए संचयी बारम्बारता ज्ञात करें तथा बारम्बारताओं का योगफल N प्राप्त करें।

अब $\frac{N}{2}$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता ज्ञात करें। इस संचयी बारम्बारता के संगत चर का मान दिए गए बारम्बारता वितरण की माध्यिका होगी।

उदाहरण:-

नीचे दिए गए बारम्बारता वितरण की माध्यिका ज्ञात करें —

| | | | | | | |
|-----|---|---|----|----|----|----|
| x | 3 | 6 | 10 | 12 | 7 | 15 |
| f | 3 | 4 | 2 | 8 | 13 | 10 |

Ans:-

दी गई बारम्बारता सारिणी के प्रेक्षकों को आरोही क्रम में लिखकर संचयी बारम्बारता ज्ञात करेंगे।

| x | f | संचयी बारम्बारता (Cf) |
|-----|----------|---------------------------|
| 3 | 3 | 3 |
| 6 | 4 | 7 |
| 7 | 13 | 20 |
| 10 | 2 | 22 |
| 12 | 8 | 30 |
| 15 | 10 | 40 |
| | $N = 40$ | |

$\therefore N = 40$

$\therefore \frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$ जो संचयी बारम्बारता 20 के बराबर है।

अतः

माध्यक = 20 के संगत चर मान एवं उसके ठीक बाद वाले चर का माध्य

$$= \frac{7+10}{2}$$

$$= \frac{17}{2}$$

$$= 8.5$$

उदाहरण:-

| | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|----|
| x | 3 | 6 | 10 | 12 | 7 | 15 |
| f | 5 | 4 | 3 | 6 | 13 | 10 |

| x | f | संचयी वारम्भारता (Cf) |
|----|--------|-----------------------|
| 3 | 5 | 5 |
| 6 | 4 | 9 |
| 7 | 13 | 22 |
| 10 | 3 | 25 |
| 12 | 6 | 31 |
| 15 | 10 | 41 |
| | N = 41 | |

$$\therefore N = 41$$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{41}{2} = 20.5 \text{ ठीक इससे बड़ी संचयी वारम्भारता 22 है}$$

$$\therefore \text{संचयी वारम्भारता 22 का चर मान 7 है}$$

$$\therefore \text{माध्यक} = 7$$

* बहुलक (Mode) :- किसी वितरण का बहुलक वह चर मान है जिसके आस-पास चर मान सर्वाधिक केन्द्रित होता है।

\Rightarrow बहुलक, वह चर मान होता है जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती है।

\Rightarrow बहुलक को M_0 से निरूपित किया जाता है।

* अवर्गीकृत आँकड़ों के बहुलक की गणना :-

(A) सरल वितरण के लिए —

विधि :- (i) सर्वप्रथम आँकड़ों के प्रेक्षणों का समूह प्राप्त करें एवं उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में सजा दें।

(ii) उस प्रेक्षण का मान प्राप्त करें जो दिए गए अंकन में सर्वाधिक बार आया है।

(iii) प्राप्त प्रेक्षण का मान ही बहुलक है।

उदाहरण :- नीचे दिए गए आँकड़ों का बहुलक प्राप्त करें।
110, 120, 130, 120, 110, 140, 130, 120, 140,
120, 110, 115, 130, 120

Ans. :- आँकड़ों के प्रेक्षणों को आरोही क्रम में सजाने पर
110, 110, 110, 115, 120, 120, 120, 120, 120, 130, 130,
130, 140, 140

\therefore 120 की पुनरावृत्ति सर्वाधिक है

\therefore बहुलक = 120

(b) अवगीकृत वारंवारता वितरण के लिए —

बहुलक = सर्वाधिक वारम्बारता वाले चरमान

उदाहरण :- निम्नांकित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करें।

| | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| चर | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| वारम्बारता | 2 | 3 | 1 | 7 | 5 | 3 |

\therefore सर्वाधिक वारम्बारता = 7

\therefore बहुलक = 6 Ans

(c) माध्य, माध्यक एवं बहुलक में संबंध

$$\text{बहुलक} = 3 \times \text{माध्यिका} - 2 \times \text{माध्य}$$

Exercise - 14.4

(1) एक टीम ने फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए -

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

Ans:-

$\therefore 2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3$

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{2+3+4+5+0+1+3+3+4+3}{10}$$

$$= \frac{28}{10}$$

$$= 2.8 \text{ Ans}$$

फिर,

आरोही क्रम में सजाने पर,

0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5

$\therefore n = 10$ जो सम संख्या है।

$$\therefore \text{माध्यक} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{10}{2} \right) \text{वाँ पद} + \left(\frac{10}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [5 \text{ वाँ पद} + 6 \text{ वाँ पद}]$$

$$= \frac{1}{2} [3+3]$$

$$= \frac{1}{2} \times 6$$

$$= 3 \text{ Ans}$$

फिर,

$$\therefore 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5$$

$\therefore 3$ की पुनरावृत्ति सर्वाधिक है

$$\therefore \text{बहुलक} = \underline{\underline{3}} \text{ Ans}$$

(2.) गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए :-

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42
52, 60

इन आँकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

Ans:-

$\therefore 41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42$
52, 60

$$\text{माध्य} = \frac{41+39+48+52+46+62+54+40+96+52+98+40+42+52+60}{15}$$

$$= \frac{882}{15}$$

$$= 58.8 \text{ Ans}$$

फिर,

आँकड़ों को आरोही क्रम में सजाने पर

39, 40, 40, 41, 42, 46, 48, 52, 52, 52, 54, 60, 62, 96, 98

$\therefore n = 15$ जो एक विषम संख्या है।

$$\therefore \text{माध्यक} = \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{वाँ पद}$$

$$= \left(\frac{15+1}{2} \right) \text{वाँ पद}$$

$$= \left(\frac{16}{2}\right)^8 \text{ वॉ पद}$$

$$= 8 \text{ वॉ पद}$$

$$= 52 \text{ Ans}$$

फिर,

∴ 52 की पुनरावृत्ति सर्वाधिक है-

$$\therefore \text{सहायक} = 52 \text{ Ans}$$

(3) निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि आँकड़ों का साध्यक 63 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए -

$$29, 32, 48, 50, x, x+2, 72, 78, 84, 95$$

$$\therefore n = 10 \text{ जो सम संख्या है।}$$

$$\therefore \text{साध्यक} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{2}\right) \text{ वॉ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ वॉ पद} \right]$$

$$\Rightarrow 63 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{10}{2}\right) \text{ वॉ पद} + \left(\frac{10}{2} + 1\right) \text{ वॉ पद} \right]$$

$$\Rightarrow 126 = 5 \text{ वॉ पद} + 6 \text{ वॉ पद}$$

$$\Rightarrow 126 = x + x + 2$$

$$\Rightarrow 126 - 2 = 2x$$

$$\Rightarrow 124 = 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{124}{2} = 62$$

$$\therefore x = 62 \text{ A}$$

(4) आँकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

Ans:- \therefore आँकड़ों को बारम्बारता खेन बनायेंगे —

| चर (x) | बारम्बारता (f) |
|--------|----------------|
| 14 | 4 |
| 17 | 1 |
| 18 | 2 |
| 22 | 1 |
| 23 | 1 |
| 25 | 1 |
| 28 | 1 |

\therefore सर्वाधिक बारम्बारता = 4

\therefore बहुलक = सर्वाधिक बारम्बारता का चर मान
= 14 Ans

(5) निम्न सारणी से एक फैक्टरी में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए :-

| वेतन (रुपयों में) | कर्मचारियों की संख्या |
|-------------------|-----------------------|
| 3000 | 16 |
| 4000 | 12 |
| 5000 | 10 |
| 6000 | 8 |
| 7000 | 6 |
| 8000 | 4 |
| 9000 | 3 |
| 10000 | 1 |
| कुल योग | 60 |

Ans: -

| वेतन (रुपयों में) (x) | कर्मचारियों की संख्या (f) | fx |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------|
| 3000 | 16 | 48000 |
| 4000 | 12 | 48000 |
| 5000 | 10 | 50000 |
| 6000 | 8 | 48000 |
| 7000 | 6 | 42000 |
| 8000 | 4 | 32000 |
| 9000 | 3 | 27000 |
| 10000 | 1 | 10000 |
| | $\Sigma f = 60$ | $\Sigma fx = 305000$ |

$$\therefore \text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{305000}{60} = \frac{30500}{6} = 5083.33$$

Ans