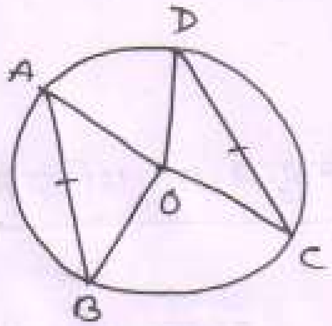
प्रमेय-10.1 → वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती है।

<u>दिया है:-</u> O केन्द्र वाले वृत्त में,

AB तथा CD दो बराबर जीवाएँ है।

$\therefore AB = CD$ — (1)

<u>सिद्ध करना है:-</u> $\angle AOB = \angle COD$



<u>रचना :-</u> OA, OB, OC, OD को मिलाया।

<u>प्रमाण :-</u> ΔAOB तथा ΔCOD में,

$AB = CD$ [समी० (1) से]

$OA = OD$ (त्रिज्या)

$OB = OC$ (त्रिज्या)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ [S-S-S सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle AOB = \angle COD$ [CPCT]

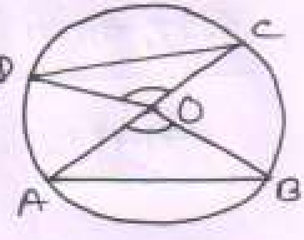
<u>सिद्ध</u>

प्रमेय - (10.2) → यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती है।

दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD है।

$\therefore \angle AOB = \angle COD$ —(1)

सिद्ध करना है:- $AB = CD$



रचना :- OA, OB, OC, OD को मिलाया।

प्रमाण :- ΔAOB तथा ΔCOD में,

$\angle AOB = \angle COD$ [समी० (1) से]

$OA = OD$ (त्रिज्या)

$OB = OC$ (त्रिज्या)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ [S-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore AB = CD$

सिद्ध

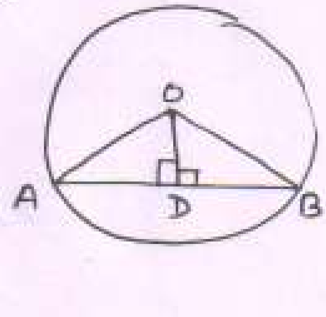
प्रमेय - (10.3) → एक वृत्त ~~की~~ के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में,

AB एक जीवा है जिसपर

$OD \perp AB$

सिद्ध करना है:- $AD = BD$



रचना :- OA तथा OB को मिलाया।

प्रमाण :- ΔAOD तथा ΔBOD में,

$OA = OB$ (त्रिज्या)

$\angle ADO = \angle BDO$ [90°]

$OD = OD$ [Common]

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOD$ [R.H.S सर्वांगसमता से]

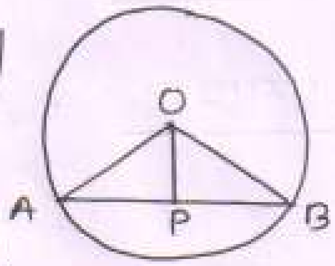
$\therefore AD = BD$ [CPCT] सिद्ध

प्रमेय -(10.4) → एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।

दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में,
AB एक जीवा है जिसका मध्य-बिन्दु P है।
$\therefore AP = BP$ —(1)

सिद्ध करना है:- $OP \perp AB$

रचना:- OA तथा OB को मिलाया।



प्रमाण:- ΔAOP तथा ΔBOP में,

$OA = OB$ (त्रिज्या)

$AP = BP$ (समी० (1) से)

$OP = OP$ (Common)

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$ [S-S-S सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle APO = \angle BPO$ [CPCT]

लेकिन,

$\angle APO + \angle BPO = 180^\circ$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \angle APO + \angle APO = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\angle APO = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle APO = \frac{\cancel{180^\circ}^{90^\circ}}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow \angle APO = 90^\circ$

$\therefore \angle APO = \angle BPO = 90^\circ$

$\therefore OP \perp AB$

सिद्ध

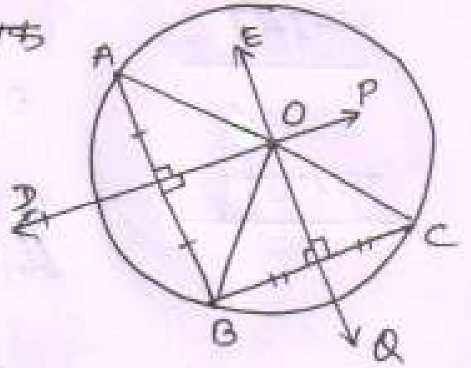
प्रमेय - 10.5 → तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक वृत्त जाता है।

दिया है:- A, B और C तीन असंरेख बिन्दुएं हैं।

सिद्ध करना है:- A, B, C बिन्दुओ से एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है।

रचना:- AB तथा BC को मिलाया।

AB तथा BC का लम्ब समद्विभाजक खींचा जो बिन्दु O पर मिलते हैं। OA, OB, OC को मिलाया।



प्रमाण:- ∵ O, AB के लम्ब समद्विभाजक DP पर स्थित है।

$\therefore OA = OB$ — (I)

फिर,

∵ O, BC के लम्ब समद्विभाजक EQ पर स्थित है।

$\therefore OB = OC$ — (II)

समी० (I) तथा (II) से,

$OA = OB = OC$

माना कि,

$OA = OB = OC = r$

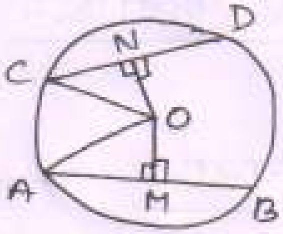
O को केन्द्र तथा r को त्रिज्या मानकर वृत्त खींचने से यह बिन्दुओं A, B और C से होकर जाता है।

सिद्ध

प्रमेय - (10.6) ⇒ एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएं केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है। (10)

दिया है :- O केन्द्र वाले एक वृत्त में, AB तथा CD दो बराबर जीवाएँ हैं अर्थात

$AB = CD$ —(I)



सिद्ध करना है :- $OM = ON$

रचना :- $OM \perp AB$ तथा $ON \perp CD$ खींचा।
OC तथा OA को मिलाया।

प्रमाण :- ∵ वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

∴ $OM \perp AB$

$\Rightarrow AM = BM = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow AB = 2AM = 2BM$ —(II)

और

$ON \perp CD$

$\Rightarrow CN = ND = \frac{1}{2} CD$

$\Rightarrow CD = 2CN = 2ND$ —(III)

समी० (I) से,

$AB = CD$

$\Rightarrow \cancel{2}AM = \cancel{2}CN$

$\Rightarrow AM = CN$ —(IV)

ΔAOM तथा ΔCON में,

$AM = CN$

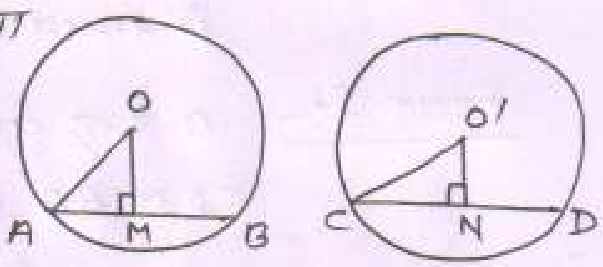
$\angle AMO = \angle CNO \ (90^\circ)$

$OA = OC$ (त्रिज्या)

∴ $\Delta AOM \cong \Delta CON$ [R.H.S से]

∴ $OM = ON$ सिद्ध

यदि दोनो वृत्त सर्वांगसम हो —



दिया है:- वृत्त $C(O, r)$ की जीवा AB तथा वृत्त $C(O', r)$ की जीवा CD है,

$\therefore AB = CD$ — (I)

सिद्ध करना है:- $OM = O'N$

रचना:- $OM \perp AB$ तथा $O'N \perp CD$ खींचा।
तथा OA और $O'N$ को मिलाया

प्रमाण:- $\because OM \perp AB$

$\therefore AM = MB$ [वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करते है]

$\Rightarrow AM = MB = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow 2AM = 2MB = AB$ — (II)

फिर,

$O'N \perp CD$

$\Rightarrow CN = ND$ [वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करते है]

$\Rightarrow CN = ND = \frac{1}{2} CD$

$\Rightarrow 2CN = 2ND = CD$ — (III)

समी० (I) से,

$AB = CD$

$\Rightarrow \cancel{2}AM = \cancel{2}CN$

$\Rightarrow AM = CN$ — (IV)

ΔAOM तथा $\Delta CO'N$ में,

$AM = CN$ [समी० (IV) से]

$OA = O'C$ [सर्वांगसम वृत्तो की त्रिज्याएँ है]

$\angle AMO = \angle CNO'$ (90)

$\therefore \Delta AOM \cong \Delta CO'N$ [R.H.S से]

$\therefore OM = O'N$

सिद्ध

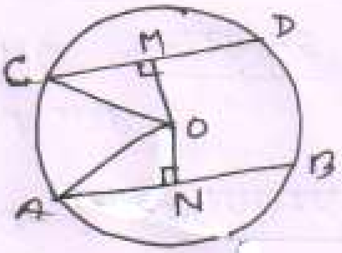
प्रमेय (10.7) → एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लम्बाई में समान होती हैं।

दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में

CD तथा AB दो जीवाएँ हैं जिसकी केन्द्र से दूरी बराबर है।

$\therefore OM = ON$ — (I) $OM \perp CD, ON \perp AB$

सिद्ध करना है:- $AB = CD$



रचना:- OA तथा OC को मिलाया।

प्रमाण:- ∵ वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$\because OM \perp CD$

$\therefore CM = MD = \frac{1}{2} CD$ — (II)

और $ON \perp AB$

$\therefore AN = NB = \frac{1}{2} AB$ — (III)

अब,

ΔAON तथा ΔCOM में,

$ON = OM$ [समी० (I) से]

$OA = OC$ [त्रिज्या]

$\angle ANO = \angle CMO$ [90°

$\therefore \Delta AON \cong \Delta COM$ [R.H.S से]

$\therefore AN = CM$ [CPCT]

$\Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$ [समी० (II) और (III) से]

$\Rightarrow AB = CD$

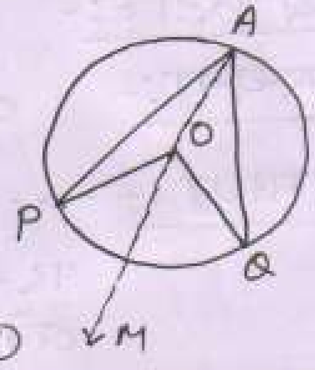
सिद्ध

प्रमेय - (10.8) → एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

दिया है:- O केन्द्र वाले वाले वृत्त में,
PQ एक चाप है जो वृत्त के शेष भाग के एक बिन्दु A पर $\angle PAQ$ अन्तरित करता है।

सिद्ध करना है:- $\angle POQ = 2\angle PAQ$

रचना:- A को O से मिलाया तथा M तक बढ़ाया।



प्रमाण:- ΔPOA में,

$\angle POM = \angle PAO + \angle APO$ —— (I)

[बाह्य कोण अपने सम्मुख अन्त: कोणो के योग के बराबर होता है]

और,

ΔQOA में,

$\angle QOM = \angle QAO + \angle AQO$ — (II)

[बाह्य कोण अपने सम्मुख अन्त: कोणो के योग के बराबर होता है]

फिर, ΔPOA में,

$OP = OA$ (त्रिज्या)

$\therefore \angle PAO = \angle APO$ —(III) [समान भुजाओ के सम्मुख कोण समान होते है।]

और ΔQOA में,

$OQ = OA$ (त्रिज्या)

$\therefore \angle QAO = \angle AQO$ —(IV) [समान भुजाओ के सम्मुख कोण समान होते है।]

समी॰ (I) तथा (II) को जोड़ने पर,

$\angle POM + \angle QOM = \angle PAO + \angle APO + \angle QAO + \angle AQO$

$\Rightarrow \angle POQ = \angle PAO + \angle PAO + \angle QAO + \angle QAO$ [समी॰ (III) तथा (IV) से]

$\Rightarrow \angle POQ = 2\angle PAO + 2\angle QAO$

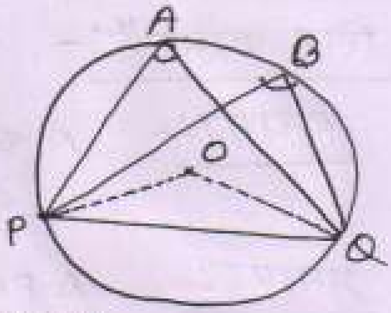
$\Rightarrow \angle POQ = 2(\angle PAO + \angle QAO)$

$\Rightarrow \angle POQ = 2\angle PAQ$ सिद्ध

प्रमेय - 10.9 → एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते है।

दिया है:- O केन्द्र वाले एक वृत्त मे,
PQ एक जीवा है। तथा $\angle PAQ$ और $\angle PBQ$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण है।

सिद्ध करना है:- $\angle PAQ = \angle PBQ$



रचना:- OP और OQ को मिलाया।

प्रमाण:- ∵ एक ही चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दुगुना होता है।

$\therefore \angle POQ = 2\angle PAQ$ —— (I)

$\angle POQ = 2\angle PBQ$ —— (II)

समी० (I) तथा (II) से,

$\cancel{2}\angle PAQ = \cancel{2}\angle PBQ$

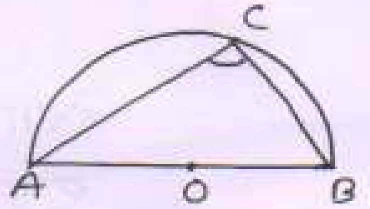
$\Rightarrow \angle PAQ = \angle PBQ$

सिद्ध

उपप्रमेय :- अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

दिया है :- O केन्द्र वाले वृत्त में,
AB एक व्यास है तथा $\angle ACB$ अर्द्धवृत्त का कोण है।

सिद्ध करना है :- $\angle ACB = 90°$



प्रमाण :- ∵ केन्द्र पर का कोण एकान्तर खंड पर बने हुए किसी कोण का दुगुना होता है।

$$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2} \times \cancel{180°}^{90°} \quad [\angle AOB = 180°]$$

$$\Rightarrow \angle ACB = 90°$$

सिद्ध

प्रमेय - (10.10) → यदि दो बिन्दुओ को मिलानेवाली रेखाखण्ड दो अन्य बिन्दुओं पर, जो इस रेखाखण्ड को आविष्ट करने वाली रेखा के एक ओर स्थित हैं, समान कोण अंतरित करता हो तो ये चार बिन्दु एक वृत्तीय होते हैं

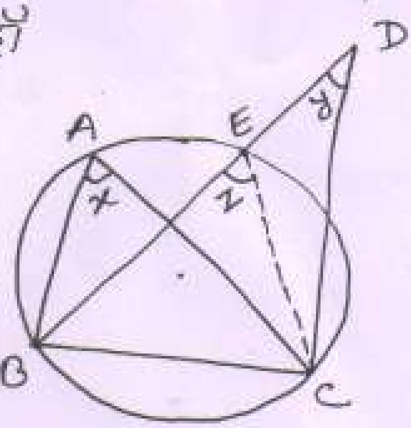
अथवा,

यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओ पर समान कोण अंतरित करें, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात् वे चक्रिय होते हैं।)

दिया है:- B और C बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड BC को आविष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर दो अन्य बिन्दु A तथा D है जहाँ

$\angle BAC = \angle BDC$

$\Rightarrow \angle x = \angle y$



सिद्ध करना है:- बिन्दु A, B, C, D एक वृत्तीय हैं

रचना:- मान लिया कि चारों बिन्दु एक ही वृत्त पर नहीं है। सुविधा के लिए मान लिया कि A, B, C से होकर जो वृत्त खींचा जाता है वह बिन्दु D बिन्दु से होकर नहीं जाता है, बल्कि BD को E बिन्दु पर काटता है। EC को मिलाया।

प्रमाण:- $\because \angle x = \angle z$ — (I) [एक ही वृत्तखंड के कोण है]

लेकिन,

$\angle x = \angle y$ — (II) [दिया है]

समी० (I) तथा (II) से,

$\angle y = \angle z$

लेकिन, यह असंभव है क्योंकि किसी भी त्रिभुज का बहिष्कोण उसके सामने के अंतः कोण से हमेशा बड़ा होता है।

∴ यह तभी संभव है जब बिन्दु D और E संपाती हो

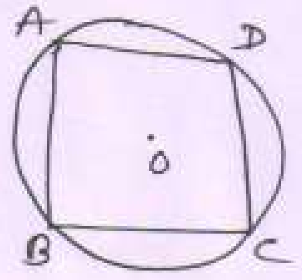
अतः बिन्दु A, B, C से होकर जानेवाला वृत्त D से होकर गुजरेगा।

अर्थात् बिन्दु A, B, C और D एक वृत्तीय है।

सिद्ध

+ चक्रिय चतुर्भुज (Cyclic Quadrilateral) :-

वह चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हो चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।



(i) चक्रिय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।

$\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

प्रमेय - 10.11 → चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।

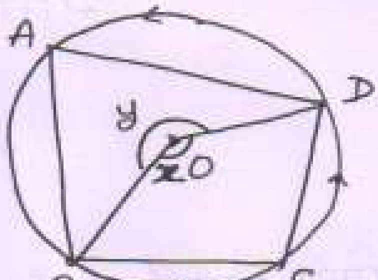
दिया है :- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसका केन्द्र O है।

सिद्ध करना है :- $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

रचना :- OB और OD को मिलाया।

प्रमाण :- ∵ एक ही चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दुगुना होता है।



∴ BD (चाप BCD), एकान्तर खण्ड में $\angle BAD$ अन्तरित करता है।

$\therefore \angle BOD = 2\angle A$

$\Rightarrow x = 2\angle A$

$\Rightarrow \angle A = \frac{1}{2}x$ —— (1)

फिर,

BD (चाप DAB), एकान्तर खण्ड में $\angle BCD$ अन्तरित करता है।

$\therefore \angle BOD = 2\angle C$

$\Rightarrow y = 2\angle C$

$\Rightarrow \angle C = \frac{1}{2}y$ —— (11)

समी० (1) तथा (11) को जोड़ने पर,

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$= \frac{1}{2}(x+y)$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{360}^{180}$

$\therefore \angle A + \angle C = 180$

और

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ [चतुर्भुज के चारो कोणों का योगफल 360° होता है]

$\Rightarrow \angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360°$

$\Rightarrow 180° + \angle B + \angle D = 360°$

$\Rightarrow \angle B + \angle D = 360° - 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

और

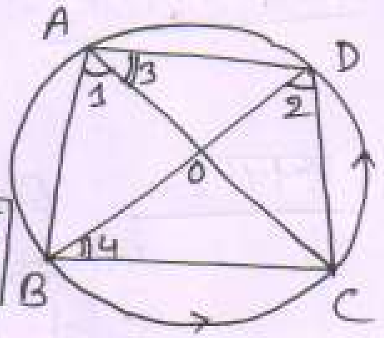
$\angle A + \angle C = 180°$ सिद्ध

Second Method!-

दिया है!- ABCD एक चक्रिय चतुर्भुज है जिसका केन्द्र O है

सिद्ध करना है.- $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$



रचना!- AC और BD को मिलाया।

प्रमाण!- $\because \angle 1 = \angle 2$ —(I) [एक ही वृत्तखंड BC के कोण है]

और

$\angle 3 = \angle 4$ —(II) [एक ही वृत्तखंड CD के कोण है]

समी० (I) तथा (II) को जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$

$\Rightarrow \angle A = \angle 2 + \angle 4$ —(III)

$\because \Delta BCD$ में,

$\angle 2 + \angle 4 + \angle C = 180°$ [त्रिभुज के गुण से]

$\Rightarrow \angle A + \angle C = 180°$

$\because$ चतुर्भुज ABCD में,

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\Rightarrow \angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C)$

$\Rightarrow \angle B + \angle D = 360^\circ - 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

इस प्रकार,

$$\left.\begin{aligned} \angle A + \angle C &= 180^\circ \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \text{सिद्ध}$$

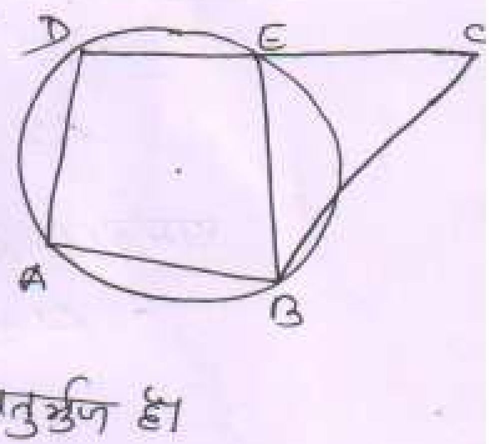
प्रमेय (10.12) → यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग 180° हो, तो ~~चक्रीय~~ चतुर्भुज चक्रीय होता है।

दिया है:- ABCD एक चतुर्भुज है जिसमे

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

सिद्ध करना है:- बिन्दु A, B, C और D चक्रीय होंगे अर्थात् ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज होगा।

रचना:- D, A, B बिन्दुओ से होकर एक जो वृत्त खींचा जाता है वह बिन्दु C से होकर नही गुजरता है अपितु यह CD को E बिन्दु पर काटता है। EB को मिलाया।



प्रमाण:-

$\because$ ABED एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \angle BAD + \angle BED = 180^\circ$ —— (I)

लेकिन,

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ —— (II)

समी० (I) तथा (II) से,

$\cancel{\angle BAD} + \angle BED = \cancel{\angle BAD} + \angle BCD$

$\Rightarrow \angle BED = \angle BCD$

लेकिन बहिष्कोण अपने सामने के अन्तः कोण के बराबर नही होता है।

यह तभी संभव है जब C और E दोनों बिन्दु एक ही हो।

अतः बिन्दु A, B और D से होकर जाने वाला वृत्त C से भी गुजरेगा।

∴ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज होगा।

सिद्ध

* महत्वपूर्ण बिन्दु

(i) किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण उसी चाप द्वारा परिधि पर बनाये गये कोण का दुगुना होता है।

(ii) अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

(iii) एक ही वृत्तखंड के कोण समान होते हैं।

(iv) किसी चक्रीय चतुर्भुज के आमने-सामने के कोणों का योग 180° होता है।