Example Solve

उदाहरण - ② → (Page-7) :- दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

Ans :- माना कि धनात्मक पूर्णांक $= a$

$\therefore\ b = 2$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से

$a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < b$

$\Rightarrow\ a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < 2$

$\therefore\ r = 0, 1$

यदि $r = 0$

$a = 2q + 0 = 2q$

यदि $r = 1$

$a = 2q + 1$

$\therefore$ धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा धनात्मक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है।

सिद्ध

उदाहरण-3→(Page-7):- दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

Ans:- माना कि धनात्मक विषम पूर्णांक $= a$

$\therefore b = 4$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow a = 4q + r$ जहाँ $0 \leq r < 4$

$\therefore r = 0, 1, 2, 3$

यदि $r = 0$

$a = 4q + 0 = 4q$

यदि $r = 1$

$a = 4q + 1$

यदि $r = 2$

$a = 4q + 2$

यदि $r = 3$

$a = 4q + 3$

$\therefore$ धनात्मक विषम पूर्णांक हमेशा $4q+1$, $4q+3$ के रूप का होता है।

सिद्ध

Example Solve

उदाहरण-4→(Page-7):- एक मिठाई विक्रेता के पास 420 काजू की बर्फियाँ और 130 बादाम की बर्फियाँ है। वह इनकी ऐसी ढेरियाँ बनाना चाहती है कि प्रत्येक ढेरी में बर्फियों की संख्या समान रहे तथा ये ढेरिया बर्फी की परात में न्यूनतम स्थान घेरें। इस काम के लिए प्रत्येक ढेरी में कितनी बर्फियाँ रखी जा सकती है?

Ans:- काजू-बर्फियों की संख्या = 420

बादाम-बर्फियों की संख्या = 130

∵ प्रत्येक काजु और बादाम बर्फियों के ढेर में बर्फियों की संख्या समान रखनी है।

∴ प्रत्येक ढेरी में बर्फियों की संख्या = HCF (420, 130)

2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

2	130
5	65
13	13
	1

$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

$130 = 2 \times 5 \times 13$

$HCF = 2 \times 5 = 10$

∴ मिठाई-विक्रेता को प्रत्येक ढेरी में काजु और बादाम की 10-10 बर्फियों रखनी चाहिए।

Av

उदाहरण-5 → (Page-11) :- संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

Ans:-

$\because 4^n = (2\times2)^n = (2^2)^n = (2)^{2n}$

हम जानते हैं कि किसी संख्या का अंत 0 (शून्य) में तभी होता है जब 2 और 5 के धनात्मक घात इसके गुणनखण्ड हों।

$\therefore 4^n = 2^{2n}$ यह गुणनखण्ड अद्वितीय है।

$\because$ 2 के अतिरिक्त कोई दूसरी अभाज्य संख्या 4^n का गुणनखण्ड नहीं होगा।

अतः 4^n का अंत 0 (शून्य) पर समाप्त नहीं होगा।

सिद्ध

Example Solve

उदाहरण - 6 → (Page-12) :- संख्याओ 6 और 20 के अभाज्य गुणनखण्ड विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

Ans:-

$$\begin{array}{c|c} 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$6 = 2 \times 3$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

HCF $= 2$ Ans

LCM $= 2^2 \times 3 \times 5$

$= 4 \times 3 \times 5$

$= 60$ Ans

उदाहरण - 7 → (Page-12) :- अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

Ans:-

$$\begin{array}{c|c} 2 & 96 \\ \hline 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 404 \\ \hline 2 & 202 \\ \hline 101 & 101 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$\therefore 96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$

$404 = 2 \times 2 \times 101 = 2^2 \times 101$

$\therefore$ HCF $= 2^2 = 4$ Ans

LCM $= 2^5 \times 3 \times 101 = 9696$ Ans

उदाहरण-8 →(Page-12):- संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

Ans:-

$$\begin{array}{c|c} 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$6 = 2 \times 3$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

$HCF = 2 \times 3 = 6$ Ans

$LCM = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$= 8 \times 9 \times 5$

$= 360$ Ans

Example Solve

उदाहरण-9 → (Page-15) :- सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Ans:- माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक है, $q \neq 0$ और p एवं q का उभयनिष्ट गुणनखण्ड केवल 1 होता है]

दोनो तरफ वर्ग करने पर

$\Rightarrow (\sqrt{3})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$

$\Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow 3q^2 = p^2$ —— (1)

$\because$ p^2, 3 से विभाज्य है।

$\therefore$ p भी 3 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ 3, p का गुणनखण्ड है।

फिर,

माना कि $p = 3K$

समी० (1) से,

$3q^2 = p^2$

$\Rightarrow 3q^2 = (3K)^2$

$\Rightarrow \cancel{3}q^2 = \cancel{9}^{3}K^2$

$\Rightarrow q^2 = 3K^2$

$\because$ q^2, 3 से विभाज्य है।

$\therefore$ q भी 3 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ 3, q का गुणनखण्ड है।

$\because$ p एवं q का उभयनिष्ट गुणनखण्ड 3 है, परन्तु कथन के अनुसार p एवं q का उभयनिष्ट गुणनखण्ड केवल 1 होता है।

$\therefore$ विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

अतः $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। सिद्ध

उदाहरण-10 → (Page-16):- दर्शाइए कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Ans:- माना कि $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore 5-\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं, $q \neq 0$]

$\Rightarrow 5 - \frac{p}{q} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{5q-p}{q} = \sqrt{3}$

$\because$ p एवं q पूर्णांक है।

$\therefore$ $5q$, p एवं q भी पूर्णांक है।

$\therefore$ $\frac{5q-p}{q}$ एक परिमेय संख्या है लेकिन $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः

परिमेय संख्या = अपरिमेय संख्या जो कि असत्य है।

$\therefore$ विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

अतः $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

सिद्ध

उदाहरण-11 → (Page-17):- दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Ans:- माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore 3\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं, $q \neq 0$]

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{3q}$

$\because$ p एवं q पूर्णांक है।

$\therefore$ p एवं $3q$ भी पूर्णांक होगा।

$\therefore$ $\frac{p}{3q}$ एक परिमेय संख्या है लेकिन $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः अपरिमेय संख्या = परिमेय संख्या जो कि असत्य है।

$\therefore$ विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

अतः $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। सिद्ध