Ex- 2.4 (ऐच्छिक)

1) सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उनकी शून्यक हैं प्रत्येक स्थिति में शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध को भी सत्यापित कीजिए।

i) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

शून्यक $= \frac{1}{2}, 1, -2$

अर्थात् $x = \frac{1}{2}, 1, -2$

$P(1) = 2\times1^3 + 1^2 - 5\times1 + 2$

$= 2\times1 + 1 - 5 + 2$

$= 2 + 1 + 2 - 5$

$= 5 - 5$

$= 0$

$P(\frac{1}{2}) = 2\times(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - 5\times\frac{1}{2} + 2$

$= \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{8}_4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2$

$= \frac{1 + 1 - 10 + 8}{4}$

$= \frac{10-10}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$P(-2) = 2\times(-2)^3 + (-2)^2 - 5\times(-2) + 2$

$= 2\times(-8) + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16$

$= 0$

$\therefore$ शून्यक $\frac{1}{2}, 1, -2$ बहुपद $P(x)$ के शून्यक हैं।

फिर, $\therefore \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, \gamma = -2$

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ में,

माना कि

x^3 का गुणांक $= a = 2$

x^2 का गुणांक $= b = 1$

x का गुणांक $= c = -5$

अचरपद $= d = 2$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - 2$$

$$= \frac{1+2-4}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-2) + \frac{1}{2} \times (-2)$$

$$= \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} \times 2$$

$$= \frac{1}{2} - 2 - 1$$

$$= \frac{1}{2} - 3$$

$$= \frac{1-6}{2}$$

$$= \frac{-5}{2}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$= -\frac{2}{2}$$

$$= -\frac{d}{a} = -\frac{\text{अचरपद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

जाँचा

(ii) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

संख्याएँ ~~शून्यक~~ $= 2, 1, 1$

$P(2) = 2^3 - 4\times2^2 + 5\times2 - 2$

$= 8 - 16 + 10 - 2$

$= 18 - 18$

$= 0$

$P(1) = 1^3 - 4\times1^2 + 5\times1 - 2$

$= 1 - 4 + 5 - 2$

$= 6 - 6$

$= 0$

$\therefore$ 2, 1, 1 बहुपद $P(x)$ के शून्यक हैं

$\therefore \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1$

फिर, $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

माना कि,

x^3 का गुणांक $= a = 1$

x^2 का गुणांक $= b = -4$

x का गुणांक $= c = 5$

अचर पद $= d = -2$

$\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1$

$= \frac{4}{1}$

$= \frac{-(-4)}{1}$

$= -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 2\times1 + 1\times1 + 2\times1$

$= 2 + 1 + 2$

$= \frac{5}{1}$

$= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

$\alpha\beta\gamma = 2\times1\times1$

$= \frac{2}{1}$

$= \frac{-(-2)}{1}$

$= -\frac{d}{a}$

$= -\frac{\text{अचरपद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

जाँच"

2) ∵ α, β, γ त्रिघात बहुपद के शून्यक हैं।

∴ शून्यकों का योग $= \alpha+\beta+\gamma = 2$

दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग $= \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = -7$

तीनों शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta\gamma = -14$

∴ त्रिघात बहुपद $= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x+\alpha\beta\gamma$

$= x^3-(2)x^2+(-7)x+(-14)$

$= x^3-2x^2-7x-14$

3) $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

शून्यक $= a-b, a, a+b$

$\because$ α, β, γ त्रिघात बहुपद के शून्यक है

$\therefore \alpha = a-b$

$\beta = a$

$\gamma = a+b$

फिर,

$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ से;

माना कि;

$a = 1$

$b = -3$

$c = 1$

$d = 1$

अब,

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow a - \cancel{b} + a + a + \cancel{b} = -\left(\frac{-3}{1}\right)$

$\Rightarrow 3a = 3$

$\Rightarrow a = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}$

$= a = 1$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$\Rightarrow (a-b) \cdot a \cdot (a+b) = -\frac{1}{1}$

$\Rightarrow (a^2 - b^2) \times 1 = -1$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = -1$

$\Rightarrow 1^2 - b^2 = -1$

$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$

$\Rightarrow 1 + 1 = b^2$

$\Rightarrow 2 = b^2$

$\Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

4) $P(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$

शून्यक $= 2 \pm \sqrt{3}$

$= (2+\sqrt{3}), (2-\sqrt{3})$

$\therefore \quad x = 2+\sqrt{3}$ और $x = 2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow x - 2 - \sqrt{3} = 0 \qquad \Rightarrow x - 2 + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow (x-2) - \sqrt{3} = 0 \qquad \Rightarrow (x-2) + \sqrt{3} = 0$

अतः $[(x-2)-\sqrt{3}][(x-2)+\sqrt{3}]$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखंड होगा।

$\therefore [(x-2)-\sqrt{3}][(x-2)+\sqrt{3}]$

$= (x-2)^2 - (\sqrt{3})^2$

$= x^2 - 4x + 4 - 3$

$= x^2 - 4x + 1$

$\therefore x^2 - 4x + 1$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखंड होगा।

अब,

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-4x+1 & \cancel{x^4} - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35 \;\big(\; x^2 - 2x - 35 \\
 & \cancel{x^4} - 4x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -2\cancel{x^3} - 27x^2 + 138x - 35 \\
 & -2\cancel{x^3} + 8x^2 - 2x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & -35\cancel{x^2} + 14\cancel{0x} - 3\cancel{5} \\
 & -35\cancel{x^2} + 14\cancel{0x} - 3\cancel{5} \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore x^2 - 2x - 35$ भी बहुपद $P(x)$ का गुणनखंड होगा।

$\therefore \quad x^2 - 2x - 35 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 5x - 35 = 0$

$\Rightarrow x(x-7) + 5(x-7) = 0$

$\Rightarrow (x+5)(x-7) = 0$

$\Rightarrow x+5 = 0$ या $x-7 = 0$

$\Rightarrow x = -5$ $\quad \Rightarrow x = 7$

$\therefore$ -5 और 7 भी बहुपद $p(x)$ के शून्यक होगा।

5) $x^2 - 2x + k \,)\, x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 \,(\, x^2 - 4x + 8 - k$

$\quad x^4 - 2x^3 + kx^2$

$\quad - \quad + \quad -$

$\quad -4x^3 + 16x^2 - kx^2 - 25x + 10$

$\quad -4x^3 + 8x^2 - 4kx$

$\quad + \quad - \quad +$

$\quad 8x^2 - kx^2 + 4kx - 25x + 10$

$\quad 8x^2 \quad -16x + 8k$

$\quad - \quad + \quad -$

$\quad -kx^2 + 4kx - 9x - 8k + 10$

$\quad -kx^2 + 2kx - k^2$

$\quad + \quad - \quad +$

$\quad 2kx - 9x + k^2 - 8k + 10$

$\because$ शेषफल $= 2kx - 9x + k^2 - 8k + 10$

~~लेकिन~~ $= (2k-9)x + (k^2 - 8k + 10)$

लेकिन, शेषफल $= x + a$

तुलना करने पर 9

$\Rightarrow (2K-9)x = x$

$\Rightarrow 2K-9 = 1$

$\Rightarrow 2K = 1+9$

$\Rightarrow 2K = 10$

$\Rightarrow K = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow K = 5$

और

$K^2 - 8K + 10 = a$

$\Rightarrow 5^2 - 8 \times 5 + 10 = a$

$\Rightarrow 25 - 40 + 10 = a$

$\Rightarrow 35 - 40 = a$

$\Rightarrow -5 = a$

$\therefore a = -5$

$\therefore \left.\begin{array}{l} K = 5 \\ a = -5 \end{array}\right\}$