

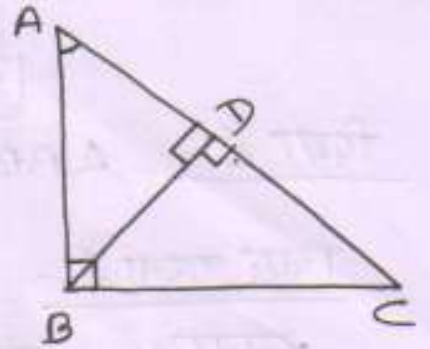
①

प्रमेय:- (6.8) :- समकोण एकत्रिभुज में कर्ण का वर्ग दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

दिया है:- समकोण $\triangle ABC$ में,
 $\angle B = 90^\circ$

सिद्ध करना है:- $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना :- $BD \perp AC$ खींचा।



प्रमाण:- $\triangle ADB$ और $\triangle ABC$ में,
 $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)
 $\angle ADB = \angle B$ (90°)
 $\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC$ (AA-समरूपता से)
 $\angle ABD = \angle C$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC \times AD \quad \text{--- (I)}$$

फिर,

$\triangle BDC$ और $\triangle ABC$ में,
 $\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)
 $\angle BDC = \angle B$ (90°)

$\therefore \triangle BDC \sim \triangle ABC$ (AA-समरूपता से)
 $\therefore \angle CBD = \angle A$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

$$\Rightarrow BC^2 = AC \times CD \quad \text{--- (II)}$$

समीक (I) तथा (II) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AC \times AD + AC \times CD \\ &= AC (AD + CD) \\ &= AC \times AC \\ &= AC^2 \end{aligned}$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

सिद्ध

(2)

प्रमेय - (6.9) ^{हिली} → यदि त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है।

या
पाइथागोरस प्रमेय का विप्लव

दिया है:- ΔABC में,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{--- (1)}$$

सिद्ध करना है:- $\angle B = 90^\circ$

रचना:- एक समकोण ΔPQR बनायेंगे ~~जिसमें~~ जिसमें:

$$PQ = AB$$

$$QR = BC$$

$$\angle Q = 90^\circ$$

प्रमाण:- समकोण ΔPQR में,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \quad \text{[पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

$$\Rightarrow PR^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{--- (11)}$$

सभी (1) तथा (11) से

$$PR^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow PR = AC$$

ΔABC तथा ΔPQR में,

$$AB = PQ$$

$$BC = QR$$

$$AC = PR$$

$$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR \quad \text{[SSS-सर्वांगसमता से]}$$

$$\therefore \angle B = \angle E$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ$$

सिद्ध

1) (i) 7 cm, 24 cm, 25 cm

माना कि $\triangle ABC$ में,

$$AB = 7 \text{ cm}$$

$$BC = 24 \text{ cm}$$

$$AC = 25 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 + BC^2 &= 7^2 + (24)^2 \\ &= 49 + 576 \\ &= 625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (25)^2 \\ &= 625 \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

 $\therefore \triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

(ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

माना कि $\triangle ABC$ में,

$$AB = 3 \text{ cm}$$

$$BC = 8 \text{ cm}$$

$$AC = 6 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 + AC^2 &= 3^2 + 6^2 = 9 + 36 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$BC^2 = 8^2 = 64$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 \neq BC^2$$

 $\therefore \triangle ABC$ एक समकोण \triangle नहीं है।

माना कि $\triangle ABC$ में,

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm

माना कि $\triangle ABC$ में,

$$AB = 50 \text{ cm}$$

$$BC = 80 \text{ cm}$$

$$AC = 100 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 + BC^2 &= (50)^2 + (80)^2 \\ &= 2500 + 6400 \\ &= 8900 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (100)^2 \\ &= 10000 \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 \neq AC^2$$

$\therefore \triangle ABC$ एक समकोण \triangle नहीं है।

(iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

माना कि $\triangle ABC$ में,

$$AB = 13 \text{ cm}$$

$$BC = 12 \text{ cm}$$

$$AC = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore BC^2 + AC^2 &= (12)^2 + (5)^2 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169 \end{aligned}$$

$$AB^2 = (13)^2 = 169$$

$$\therefore BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$\therefore \triangle ABC$ एक समकोण \triangle है।



2) दिया है:- समकोण ΔPQR में;

$$\angle P = 90^\circ$$

$$PM \perp QR$$

सिद्ध करना है:- $PM^2 = QM \cdot MR$

प्रमाण:- माना कि

$$\angle MPQ = x^\circ$$

ΔMPQ में,

$$\Rightarrow \angle MPQ + \angle PMQ + \angle MQP = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + 90^\circ + \angle MQP = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MQP = 180^\circ - 90^\circ - x$$

$$= 90^\circ - x \quad \text{--- (I)}$$

$$\therefore \angle MPR + \angle MPQ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MPR + x = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MPR = 90^\circ - x \quad \text{--- (II)}$$

ΔMPR में,

$$\Rightarrow \angle MPR + \angle MRP + \angle PMR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ - x + \angle MRP + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 180^\circ - x + \angle MRP = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MRP = 180^\circ - 180^\circ + x$$

$$\Rightarrow \angle MRP = x$$

$$\therefore \angle MPQ = \angle MRP = x$$

ΔPMR तथा ΔPMQ में,

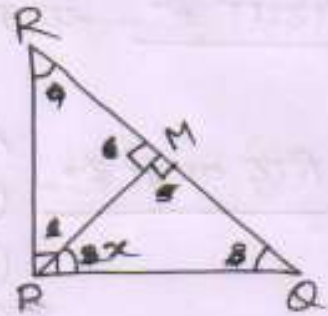
$$\checkmark \angle MRP = \angle MPQ (x)$$

$$\angle QPM = \angle PMR (90^\circ)$$

$$\therefore \Delta PMR \sim \Delta PMQ \text{ [AA-लक्षणानुसार]}$$

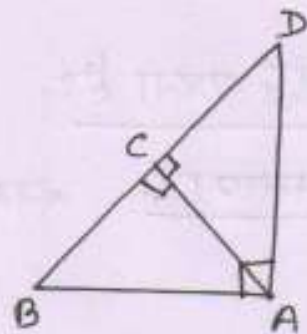
$$\angle MPR = \angle PQM$$

$$\therefore \frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM} \Rightarrow PM^2 = QM \cdot MR \quad \text{सिद्ध}$$



3.) दिया है: - समकोण $\triangle ABD$ में,
 $\angle A = 90^\circ$
 $AC \perp BD$

सिद्ध करना है: - (i) $AB^2 = BC \cdot BD$
 (ii) $AC^2 = BC \cdot DC$
 (iii) $AD^2 = BD \cdot CD$



प्रमाण :-

(i) $\triangle ABC$ तथा $\triangle ABD$ में,
 $\angle ACB = \angle A$ (90°)
 $\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ABD$ (AA-समरूपता से)
 $\therefore \angle BAC = \angle D$ — (1)

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD$$

सिद्ध

(ii) $\triangle ABC$ तथा $\triangle ADC$ में,
 $\angle ACB = \angle ACD$ (90°)
 $\angle BAC = \angle D$ [समीक (1) से]
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADC$ [AA-समरूपता से]
 $\therefore \angle B = \angle CAD$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC \cdot DC$$

सिद्ध

(iii) $\triangle ADC$ तथा $\triangle ABD$ में,
 $\angle ACD = \angle A$ (90°)
 $\angle D = \angle D$ [उभयनिष्ठ]
 $\therefore \triangle ADC \sim \triangle ABD$ [AA-समरूपता से]

अ ~~उप~~

$$\therefore \angle CAD = \angle B$$

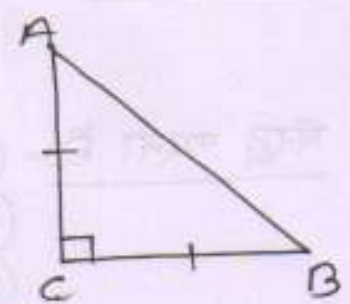
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow AD^2 = BD \cdot CD$$

सिद्ध

4) दिया है:- समद्विबाहु समकोण $\triangle ABC$ में;

सिद्ध करना है:- $AB^2 = 2AC^2$ $\angle C = 90^\circ$
 $AC = BC$



प्रमाण:- समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$ [$AC = BC$]

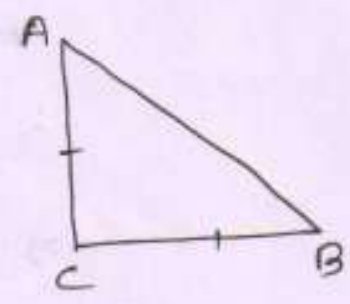
$\Rightarrow AB^2 = 2AC^2$

सिद्ध

5) दिया है:- समद्विबाहु $\triangle ABC$ में,

$AC = BC$
 $AB^2 = 2AC^2$

सिद्ध करना है:- $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है अर्थात् $\angle C = 90^\circ$



प्रमाण:- $\therefore AB^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$

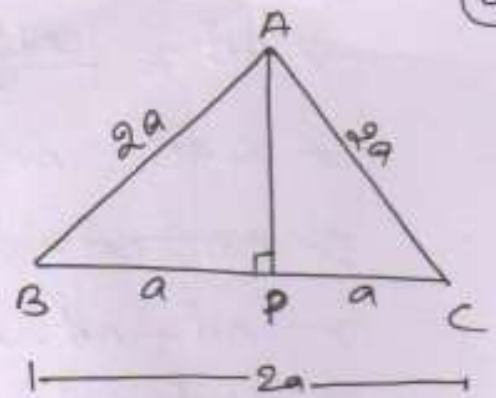
$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,

$\therefore \triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है
अर्थात् $\angle C = 90^\circ$

सिद्ध

6) दिया है: समबाहु $\triangle ABC$ में,
 $AB = BC = AC = 2a$
 शीर्षलंब $AP = ?$



$\therefore AP$ एक शीर्षलंब है जो $\triangle ABC$ की भुजा की समद्विभाजित करता है

$$\therefore BP = CP = a$$

समकोण $\triangle ABP$ में,

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{(2a)^2 - a^2}$$

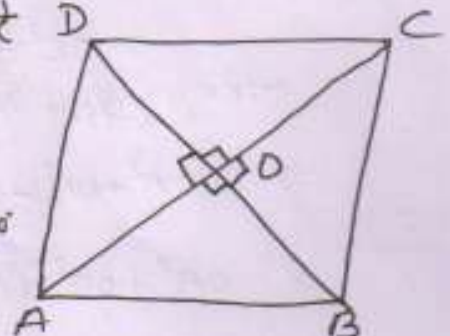
$$= \sqrt{4a^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{3a^2}$$

$$= \sqrt{3}a$$

7) दिया है: समचतुर्भुज $ABCD$ में,
 विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं और, $AB = BC = CD = AD$
सिद्ध करना है: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

प्रमाण: \therefore समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।



$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$$

$$OA = \frac{1}{2} AC$$

$$OB = \frac{1}{2} BD$$

समकोण $\triangle AOB$ में,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \left(\frac{1}{2} AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4AB^2 = AC^2 + BD^2$$

~~$$\Rightarrow AB^2 + AB^2 + AB^2 + AB^2 = AC^2 + BD^2$$~~

$$\Rightarrow AB^2 + AB^2 + AB^2 + AB^2 = AC^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 \quad [AB = BC = CD = AD]$$

सिद्ध

8) दिया है:- $\triangle ABC$ में, O एक बिंदु है।

$$OD \perp BC$$

$$OE \perp AC$$

$$OF \perp AB$$

सिद्ध करना है:-

$$(i) OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

$$(ii) AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$$

रचना:- OA, OB, OC को मिलाया।

प्रमाण:- (i) समकोण $\triangle OFA$ में,

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 \quad \text{[पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण $\triangle ODB$ में,

$$OB^2 = OD^2 + BD^2 \quad \text{--- (ii) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण $\triangle OEC$ में,

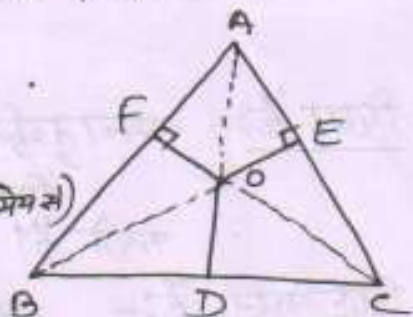
$$OC^2 = OE^2 + CE^2 \quad \text{--- (iii) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

अभी (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 = OF^2 + AF^2 + OD^2 + BD^2 + OE^2 + CE^2$$

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

सिद्ध



11) समकोण ~~कोण~~ $\triangle OBF$ में,
 $BF^2 = OB^2 - OF^2$ — (iv) [पाइथागोरस प्रमेय से]

समकोण $\triangle ODC$ में,
 $CD^2 = OC^2 - OD^2$ — (v) [पाइथागोरस प्रमेय से]

समकोण $\triangle OAE$ में,
 $AE^2 = OA^2 - OE^2$ — (vi) [पाइथागोरस प्रमेय से]

सभी (iv), (v), (vi) को जोड़ने से,

$$\begin{aligned} AE^2 + BF^2 + CD^2 &= OB^2 - OF^2 + OC^2 - OD^2 + OA^2 - OE^2 \\ &= OA^2 + OB^2 + OC^2 - OE^2 - OD^2 - OF^2 \\ &= AF^2 + BD^2 + CE^2 \end{aligned}$$

$$\therefore AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$$

सिद्ध

9.7) सीढ़ी की लम्बाई = $AC = 10\text{ m}$

खिड़की की ऊँचाई = $AB = 8\text{ m}$

दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे
 की दूरी = $BC = ?$

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\angle B = 90^\circ$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

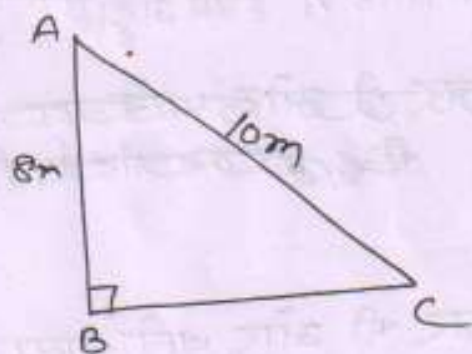
$$BC^2 = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - 8^2}$$

$$= \sqrt{100 - 64}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6\text{ m}$$



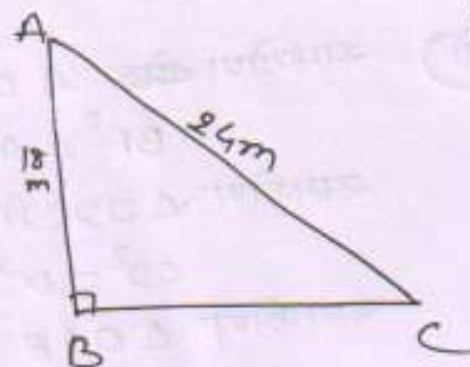
10) माना कि,

खंभे की ऊँचाई = $AB = 18\text{ m}$

तारी की लम्बाई = $AC = 24\text{ m}$

खंभे के आधार से खूँटे की दूरी = BC

समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle B = 90^\circ$



$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{24^2 - 18^2}$$

$$= \sqrt{576 - 324}$$

$$= \sqrt{252}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7}$$

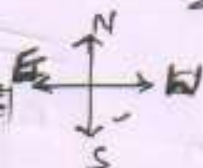
$$= 2 \times 3 \sqrt{7}$$

$$= 6\sqrt{7}\text{ m.}$$

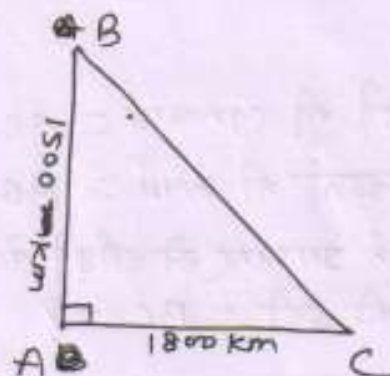
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 252} \\ 2 \overline{) 126} \\ 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

11)

माना कि 'A' हवाई अड्डा है



~~उत्तर की ओर जाने वाला हवाई जहाज द्वारा~~
~~तय की गई दूरी = AB =~~



\therefore उत्तर की ओर जाने वाला हवाई जहाज द्वारा

तय की गई दूरी = $AB = 1\frac{1}{2} \times 1000\text{ km}$

$$= \frac{3}{2} \times 1000$$

$$= 1500\text{ km}$$

तथा,

पश्चिम की ओर जाने वाला हवाई जहाज द्वारा

तय की गई दूरी = $AC = 1\frac{1}{2} \times 1200\text{ km}$

$$= \frac{3}{2} \times 1200$$

$$= 1800\text{ km}$$

दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी = BC .

11) \therefore समकोण ΔABC में, $\angle A = 90^\circ$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{(1500)^2 + (1800)^2}$$

$$= \sqrt{2250000 + 3240000}$$

$$= \sqrt{5490000}$$

$$= \sqrt{549 \times 10000}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 61 \times 1000 \times 100}$$

$$= 3 \times 1000 \sqrt{61}$$

$$= 3000 \sqrt{61} \text{ Km}$$

12) माना कि,

खंभा $AB = 6 \text{ m}$

खंभा $PQ = 11 \text{ m}$

दोनों खंभों के निचले सिरों के बीच

की दूरी $= BQ = 12 \text{ m}$

दोनों खंभों के ऊपरी सिरों के बीच की दूरी $= AP = ?$

$\therefore AR = BQ = 12 \text{ m}$

$$PR = PQ - AR = 11 - 6 = 5 \text{ m}$$

समकोण ΔAPR में,

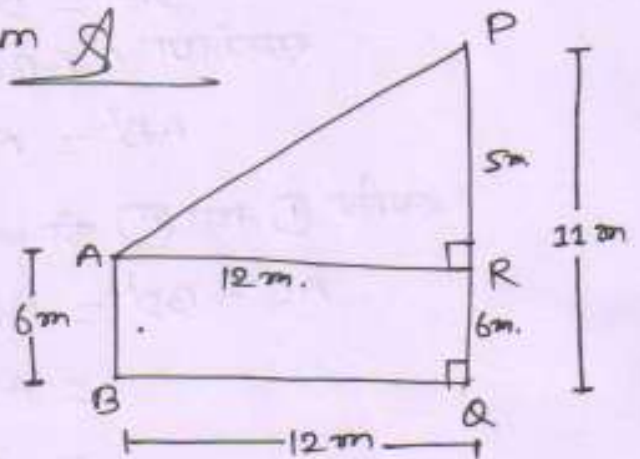
$$AP = \sqrt{AR^2 + PR^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{12^2 + 5^2}$$

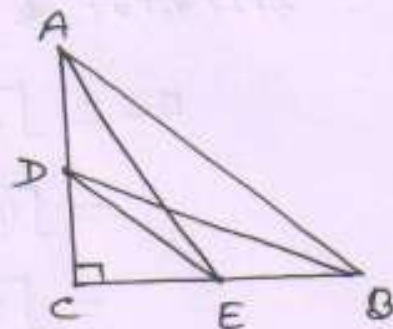
$$= \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13 \text{ m}$$



13) दिया है:- समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$
 भुजाओं CA और CB पर क्रमशः
 बिन्दु D और E स्थित हैं।



सिद्ध करना है:- $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

प्रमाण:- समकोण $\triangle ACE$ में, $\angle C = 90^\circ$

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 \text{ --- (i) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण $\triangle DCB$ में, $\angle C = 90^\circ$

$$BD^2 = DC^2 + BC^2 \text{ --- (ii) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण $\triangle DCE$ में, $\angle C = 90^\circ$

$$DE^2 = DC^2 + CE^2 \text{ --- (iii) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ --- (iv) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समीक ① तथा ② को जोड़ने पर,

$$\begin{aligned} AE^2 + BD^2 &= AC^2 + CE^2 + DC^2 + BC^2 \\ &= AC^2 + BC^2 + DC^2 + CE^2 \end{aligned}$$

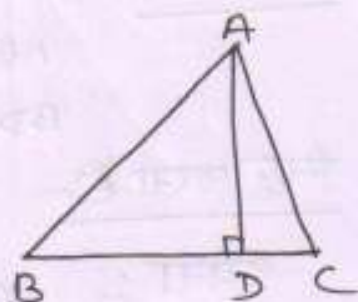
$$= AB^2 + DE^2 \text{ [समीक (iii) तथा (iv) से]}$$

$$\therefore AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

सिद्ध

14) दिया है:- $\triangle ABC$ में,
 $AD \perp BC$
 $DB = 3CD$

सिद्ध करना है:- $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



प्रमाण:- समकोण $\triangle ABD$ में,
 $\angle ADB = 90^\circ$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ --- (I) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण $\triangle ADC$ में,
 $\angle ADC = 90^\circ$

$$\therefore AC^2 = AD^2 + DC^2 \text{ --- (II) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समीक (I) - (II) से,

$$AB^2 - AC^2 = \cancel{AD^2} + BD^2 - \cancel{AD^2} - DC^2$$

$$= BD^2 - DC^2$$

$$= (3CD)^2 - DC^2$$

$$= 9DC^2 - DC^2$$

$$= 8DC^2$$

$$= 8 \left(\frac{BC}{4} \right)^2 \left[\begin{array}{l} BC = BD + DC \\ = 3DC + DC \\ = 4DC \end{array} \right] \therefore DC = \frac{BC}{4}$$

$$= 8 \times \frac{BC^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB^2 - AC^2 = \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2AB^2 - 2AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

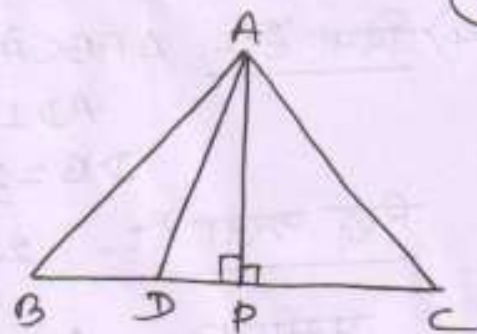
सिद्ध

15) दिया है:- समबाहु $\triangle ABC$ में,
 $AB = BC = AC$

$$BD = \frac{1}{3} BC$$

सिद्ध करना है:- $9AD^2 = 7AB^2$

रचना :- $AP \perp BC$ खींचा।



प्रमाण:- $\because \triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore P$, भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

स्वमकोण $BP = CP = \frac{1}{2} BC$

$\triangle ABP$ में, $\angle APB = 90^\circ$

$$\therefore AB^2 = AP^2 + BP^2 \quad \text{--- (1) [पाइथागोरस प्रमेय]}$$

$\triangle ADP$ में, $\angle APD = 90^\circ$

$$\therefore AD^2 = AP^2 + DP^2$$

$$= AP^2 + (BP - BD)^2$$

$$= AP^2 + BP^2 + BD^2 - 2BP \cdot BD$$

$$= AB^2 + BD^2 - 2BP \cdot BD$$

$$= AB^2 + \left(\frac{1}{3}BC\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}BC \times \frac{1}{3}BC$$

$$= AB^2 + \frac{BC^2}{9} - \frac{BC^2}{3}$$

$$= \frac{9AB^2 + BC^2 - 3BC^2}{9}$$

$$= \frac{9AB^2 - 2BC^2}{9}$$

$$\Rightarrow \cancel{9AB^2} = \cancel{9BC^2} - 2BC^2$$

$$3 \quad 9AD^2 = 9AB^2 - 2AB^2$$

$$2) \quad 9AD^2 = 7AB^2 \quad \underline{\underline{\text{सिद्ध}}}$$