CHAPTER - 1

वास्तविक संख्याएं (Real Number)

* परिमेय संख्याएं (Rational Number) :-

(i) परिमेय संख्याएं वैसी संख्याएं हैं जिन्हे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p, q पूर्णांक है। $q \neq 0$.

उदाहरण :- $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{5}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{4}{2}$ इत्यादि।

(ii) 0 तथा सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएं होती हैं क्योंकि इन्हें भी $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iii) परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत (terminat-ing) होता है या असांत (अनवसानी) आवर्ती [nonterminating recurring or repeating] होता है।

(iv) वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती होता है, परिमेय संख्या होती है।

उदाहरण :- 0.984, $3.666 = 3.\overline{6}$

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

* अपरिमेय संख्याएं (Irrational Number) :-

(i) वह संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नही लिखा जा सके, अपरिमेय संख्या कहलाती है जहाँ p एवं q पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

(ii) अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत या अनवसानी अनावर्ती (non-terminating nonrecurring or ~~non-repea~~ non-repeating) होता है।

उदाहरण :- $\sqrt{2} = 1.414213 5 \ldots$

$\sqrt{3} = 1.7320508 \ldots$

$\pi (pi) = 3.14159265 \ldots$

इत्यादि

* वास्तविक संख्याएँ (Real Number):-

वास्तविक संख्याएँ समस्त परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओ का समूह होता है अर्थात् वे सभी संख्याएँ जो या तो परिमेय हो या अपरिमेय, वास्तविक संख्याएँ कहलाती है।

* एल्गोरिथ्म (Algorithm):-

एक विशेष प्रकार की समस्या का हल प्राप्त करने की चरणबद्ध प्रक्रिया (step-by-step procedure) को एल्गोरिथ्म कहते है।

* प्रमेयिका या लेमा (Lemma):-

लेमा एक सिद्ध कथन होता है जिसकी सहायता से दुसरे कथन सिद्ध किए जाते है।

* विरोधाभास (Contradiction):- कभी-कभी किसी कथन की सत्यता सीधे साबित करना आसान नहीं होता है। ऐसे में कथन को असत्य मानकर विरोधाभास स्थिति उत्पन्न कर देते है और यही ∴ कथन की सत्यता का प्रमाण बन जाता है।

* युक्लिड् विभाजन एल्गोरिथ्म या प्रमेयिका

भाजक (b)) भाज्य (a) (भागफल (q)

शेषफल (r)

$\therefore$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$\Rightarrow \quad a = bq + r$

$\therefore$ युक्लिड् विभाजन एल्गोरिथ्म या प्रमेयिका से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

अर्थात्,

युक्लिड् विभाजन एल्गोरिथ्म → दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्णांक संख्याएँ q तथा r विद्यमान है कि $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ है।

* अंकगणित का आधारभूत प्रमेय :-

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओ के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखंड अभाज्य गुणनखंडो के आनेवाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

अथवा,

एक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्या के गुणनफल के रूप में केवल एक ही प्रकार से (अद्वितीय) व्यक्त किया जा सकता है।

* महत्वपूर्ण तथ्य :-

① युक्लिड विभाजन प्रमेयिका :- दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर हम $a = bq + r, 0 \leq r < b$ को संतुष्ट करने वाली पूर्ण संख्याएँ q और r ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् ऐसी संख्याओ का अस्तित्व है और ये अद्वितीय हैं।

② अंकगणित का आधारभूत प्रमेय :- प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओ के एक गुणनफल के रूप में किया जा सकता है तथा यह गुणनखंड अद्वितीय होता है।

③ यदि p कोई अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

④ यदि किसी धनपूर्णांक संख्या का पूर्ण वर्ग न निकले तो वे अपरिमेय होती है। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।

⑤ एक परिमेय संख्या है जिसका दशमलव प्रसार सांत है तो हम $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं; जहाँ p और q सह अभाज्य हैं तथा q का अभाज्य गुणनखंडन $2^n 5^m$ के रूप का है जहाँ n, m ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

⑥ मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि q का अभाज्य गुणनखंड $2^n 5^m$ के रूप का है, जहाँ n, m ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है तो x का दशमलव प्रसार सांत होगा।

⑦ मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि q का अभाज्य गुणनखंड $2^n 5^m$ का रूप का नहीं है, जहाँ n, m ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है तो x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

Ex- 1.1

1.) निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए —

(i) 135 और 225

135) 225 (1
135
x90) 135 (1
90
45) 90 (2
90
x

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$225 = 135 \times 1 + 90$

$135 = 90 \times 1 + 45$

$90 = 45 \times 2 + 0$

$\because$ शेष $= 0$

$\therefore$ HCF $= 45$ Ans

(ii) 196 और 38220

196) 38220 (195
196
1862
1764
xx980
980
xxx

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$38220 = 196 \times 195 + 0$

$\because$ शेषफल $= 0$

$\therefore$ HCF $= 196$ Ans

(iii) 867 और 255

$$\begin{array}{r} 255)\,867\,(3 \\ 765 \\ \hline 102)\,255\,(2 \\ 204 \\ \hline 51)\,102\,(2 \\ 102 \\ \hline \times\times\times \end{array}$$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$867 = 255 \times 3 + 102$

$255 = 102 \times 2 + 51$

$102 = 51 \times 2 + 0$

$\because$ शेषफल $= 0$

$\therefore$ HCF $= 51$ Ans

3.) स्तंभों की अधिकतम संख्या = 616 और 32 का म०स०

$$\begin{array}{r} 32)\,616\,(19 \\ 32 \\ \hline 296 \\ 288 \\ \hline 8)\,32\,(4 \\ 32 \\ \hline \times\times \end{array}$$

$\therefore$ म०स० $= 8$

$\therefore$ स्तंभो की अधिकतम संख्या = 8 Ans

2) माना कि धनात्मक विषम पूर्णांक $= a$

$b = 6$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow a = 6q + r$ जहाँ $0 \leq r < 6$

$\therefore r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

यदि $r = 0$

$a = 6q + 0 = 6q$

यदि $r = 1$

$a = 6q + 1$

यदि $r = 2$

$a = 6q + 2$

यदि $r = 3$

$a = 6q + 3$

यदि $r = 4$

$a = 6q + 4$

यदि $r = 5$

$a = 6q + 5$

$\because 6q, 6q+2, 6q+4$ एक धनात्मक सम पूर्णांक के रूप में है

$\therefore 6q+1, 6q+3, 6q+5$ एक धनात्मक विषम पूर्णांक के रूप का होगा।

4) माना कि धनात्मक पूर्णांक $= a$

$b = 3q$

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow a = 3q + r$ जहाँ $0 \leq r < 3$

$\therefore r = 0, 1, 2$

यदि $r = 0$

$a = 3q + 0 = 3q$

$a^2 = (3q)^2$

$= 9q^2$

$= 3(3q^2)$

$= 3m$ [$m = 3q^2$ एक पूर्णांक है]

यदि $r = 1$

$a = 3q + 1$

$a^2 = (3q+1)^2$

$= (3q)^2 + 2 \times 3q \times 1 + 1^2$

$= 9q^2 + 6q + 1$

$= 3(3q^2 + 2q) + 1$

$= 3m + 1$ [$m = 3q^2 + 2q$ एक पूर्णांक है।]

यदि $r = 2$

$a = 3q + 2$

$a^2 = (3q+2)^2$

$= (3q)^2 + 2 \times 3q \times 2 + 2^2$

$= 9q^2 + 12q + 4$

$= 9q^2 + 12q + 3 + 1$

$= 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$

$= 3m + 1$ [$m = 3q^2 + 4q + 1$ एक पूर्णांक है।]

$\therefore$ किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m+1$ के रूप का होता है।

सिद्ध

5) माना कि धनात्मक पूर्णांक $= a$

$b = 9$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow a = 9q + r$ जहाँ $0 \leq r < 9$

$\therefore r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

यदि $r = 0$

$a = 9q + 0 = 9q$

$a^3 = (9q)^3$

$= 729q^3$

$= 9(81q^3)$

$= 9m$ [$m = 81q^3$ एक पूर्णांक है।]

यदि $r = 1$

$a = 9q + 1$

$a^3 = (9q+1)^3$

$= (9q)^3 + 1^3 + 3 \times 9q \times 1 (9q+1)$

$= 729q^3 + 1 + 243q^2 + 27q$

$= 729q^3 + 243q^2 + 27q + 1$

$= 9(81q^3 + 27q^2 + 3q) + 1$

$= 9m + 1$ [$m = 81q^3 + 27q^2 + 3q$ पूर्णांक है]

यदि $r = 2$

$a = 9q + 2$

$a^3 = (9q+2)^3$

$= (9q)^3 + 2^3 + 3 \times 9q \times 2 (9q+2)$

$= 729q^3 + 8 + 486q^2 + 108q$

$= 729q^3 + 486q^2 + 108q + 8$

$= 9(81q^3 + 54q^2 + 12q) + 8$

$= 9m + 8$ [$\because m = 81q^3 + 54q^2 + 12q$ एक पूर्णांक है]

$\therefore$ किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$, $9m+1$ या $9m+8$ के रूप का होता है।

उदाहरण – ② (Page-7) :-

माना कि धनात्मक पूर्णांक $= a$

$b = 2$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow$ $a = 2q + r$ जहाँ $0 \leq r < 2$

$\therefore$ $r = 0, 1$

यदि $r = 0$

$a = 2q + 0 = 2q$

यदि $r = 1$

$a = 2q + 1$

$\therefore$ धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा धनात्मक विषम पूर्णांक $2q+1$ के रूप का होता है।

उदाहरण - ③ (Page-7) :-

माना कि धनात्मक विषम पूर्णांक $= a$

$b = 4$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow$ $a = 4q + r$ जहाँ $0 \leq r < 4$

$\therefore$ $r = 0, 1, 2, 3$

यदि $r = 0$

$a = 4q + 0 = 4q$

यदि $r = 1$

$a = 4q + 1$

यदि $r = 2$

$a = 4q + 2$

यदि $r = 3$

$a = 4q + 3$

$\because$ धनात्मक सम पूर्णांक $4q, 4q+2$ के रूप का है

$\therefore$ $4q+1$, $4q+3$ धनात्मक विषम पूर्णांक के रूप का होता है।