

* शंकु का छिन्नक (frustum of a cone) :-

(35)

जब एक ठोस भ्रूषणीय शंकु को उसके आधार के समान्तर किसी तल द्वारा काट लिया जाता है तो इस तल एवं आधार के बीच के भाग को शंकु का छिन्नक कहा जाता है।

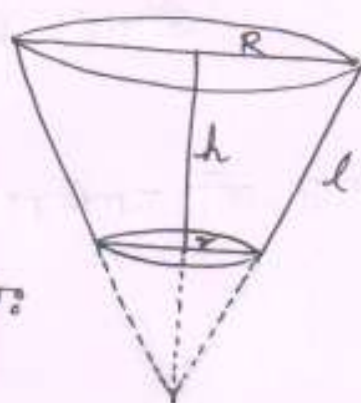
अतः शंकु के छिन्नक के ऊपर तथा नीचे का भाग वृत्ताकार होता है।

माना कि शंकु के छिन्नक में,

$$\text{ऊँचाई} = h$$

$$\text{तिर्यक ऊँचाई} = l$$

दोनों वृत्ताकार सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः r तथा R हैं।



(i) शंकु का छिन्नक का आयतन

$$= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$



(ii) शंकु के छिन्नक का वक्रपृष्ठीय क्षेत्र

$$= \pi l (R + r)$$

$$\therefore l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

(iii) शंकु के छिन्नक का कुल पृष्ठीय क्षेत्र =

$$= \pi R^2 + \pi r^2 + \pi l (R + r)$$

Exercise - 13.4

(1) \because पानी पीने वाला एक गिलास है जो शंकु के घिन्नक के आकार का है।

\therefore गिलास के ऊपरी सिरे का व्यास = 4 cm
 $R = 2$ cm

नीचले सिरे का व्यास = 2 cm
 $r = 1$ cm

ऊँचाई = $h = 14$ cm



\therefore गिलास की धारिता = शंकु के घिन्नक का आयतन

$$= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \left(2^2 + 1^2 + 2 \times 1 \right)$$

$$= \frac{44}{3} (4 + 1 + 2)$$

$$= \frac{44}{3} \times 7$$

$$= \frac{308}{3}$$

$$= 102 \frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

Ans

(2) शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई $= l = 4 \text{ cm}$
 माना कि ऊपरी सिरे की त्रिज्या $= R$
 निचले सिरे की त्रिज्या $= r$



\therefore ऊपरी सिरे की परिधि $= 18 \text{ cm}$

$$\therefore 2\pi R = 18$$

$$\Rightarrow R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi} \text{ cm}$$

निचले सिरे की परिधि $= 6 \text{ cm}$

$$2\pi r = 6$$

$$\Rightarrow r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \text{ cm}$$

\therefore शंकु के छिन्नक का वक्रपृष्ठीय क्षेत्र $= \pi l (R + r)$

$$= \pi \times 4 \left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi} \right)$$

$$= \pi \times 4 \times \frac{1}{\pi} (9 + 3)$$

$$= 4 \times 12$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$

Ans

(3) \therefore तुर्की टोपी एक छिन्नक के आकार की है।

\therefore छिन्नक के निचले सिरे की त्रिज्या $= R = 10 \text{ cm}$
 ऊपरी सिरे की त्रिज्या $= r = 4 \text{ cm}$
 तिरछी ऊँचाई $= l = 15 \text{ cm}$



\therefore तुर्की टोपी बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्र

$=$ छिन्नक का वक्रपृष्ठीय क्षेत्र + ऊपरी सिरे का क्षेत्र

$$= \pi l (R + r) + \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 15 (10 + 4) + \frac{22}{7} \times (4)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 15 \times 14 + \frac{22}{7} \times 16$$

$$= 660 + \frac{352}{7}$$

$$= \frac{4620 + 352}{7}$$

$$= \frac{4972}{7}$$

$$= 710 \frac{2}{7} \text{ cm}^2$$

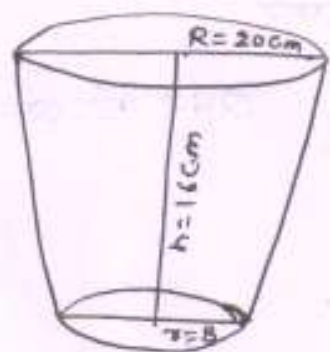
Ans

(4) ∴ वर्तन एक शंकु के छिन्नक के आकार का है।

∴ ऊपरी सिरे की त्रिज्या = $R = 20 \text{ cm}$

निचले सिरे की त्रिज्या = $r = 8 \text{ cm}$

ऊँचाई = $h = 16 \text{ cm}$



(39)

$$\begin{aligned} \therefore \text{तिर्यक ऊँचाई} = l &= \sqrt{h^2 + (R-r)^2} \\ &= \sqrt{(16)^2 + (20-8)^2} \\ &= \sqrt{256 + (12)^2} \\ &= \sqrt{256 + 144} \\ &= \sqrt{400} \\ &= 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{वर्तन की धारिता} &= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr) \\ &= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16 ((20)^2 + 8^2 + 20 \times 8) \\ &= \frac{3.14 \times 16}{3} [400 + 64 + 160] \\ &= \frac{3.14 \times 16}{3} \times \frac{208}{1} \\ &= 3.14 \times 16 \times 208 \text{ cm}^3 \\ &= 10449.92 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{वर्तन में दूध का आयतन} &= 10449.92 \text{ cm}^3 \\ &= \frac{10449.92}{1000} \text{ लीटर} \\ &= 10.44992 \text{ लीटर} \\ &= 10.45 \text{ लीटर} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{दूध का मूल्य} = 10.45 \times 20 \text{ रु} = 209 \text{ रु मात्र}$$

फिर,

(40)

छतन को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्र

= छिन्नक का वक्रपृष्ठीय क्षेत्र + निचले सिरे का क्षेत्र

$$= \pi l(R+r) + \pi r^2$$

$$= 3.14 \times 20(20+8) + 3.14 \times 8^2$$

$$= 62.80 \times 28 + 3.14 \times 64$$

$$= 1758.4 + 200.96 \text{ cm}^2$$

$$= 1959.36 \text{ cm}^2$$

\therefore धातु की चादर का मूल्य = $\frac{8}{100} \times 1959.36 \text{ ₹}$

$$= 8 \times 19.5936 \text{ ₹}$$

$$= 156.7488 \text{ ₹}$$

$$= 156.75 \text{ ₹}$$

Ans

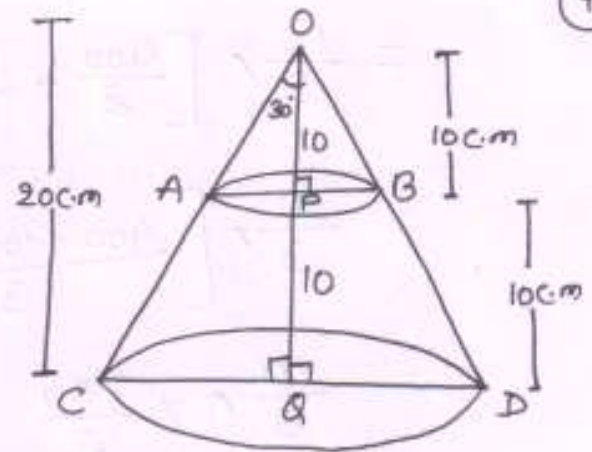
(5) शंकु के शीर्ष कोण = 60°

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ$$

शंकु की ऊँचाई = $OQ = H = 20 \text{ cm}$

\therefore शंकु का शीर्षलम्ब, शीर्षकोण को समद्विभाजित करता है।

$$\therefore \angle COQ = 30^\circ$$



माना कि,

छिन्नक के ऊपरी सिरे की त्रिज्या = $AP = r$

" " निचले सिरे की त्रिज्या = $CQ = R$

$\triangle AOP$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{10} = \frac{AP}{OP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{10}$$

$$\Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$\triangle COQ$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{R}{20} = \frac{CQ}{OQ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R}{20}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R &= \frac{20}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{छिन्नक का आयतन} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 10 \left[\left(\frac{20\sqrt{3}}{3} \right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} \right)^2 + \frac{20\sqrt{3}}{3} \times \frac{10\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$= \frac{10}{3} \pi \left[\frac{400 \times 3}{3 \times 3} + \frac{100 \times 3}{3 \times 3} + \frac{200 \times 3}{3 \times 3} \right]$$

$$= \frac{10}{3} \pi \left[\frac{400}{3} + \frac{100}{3} + \frac{200}{3} \right]$$

$$= \frac{10}{3} \pi \left[\frac{400 + 100 + 200}{3} \right]$$

$$= \frac{10}{3} \pi \times \frac{700}{3}$$

$$= \frac{70000}{9} \pi \text{ cm}^3$$

∴ छिन्नक की तार खनारि गई है जो बेलन के आकार की है।

$$\therefore \text{बेलनाकार तार का व्यास} = \frac{1}{16} \text{ cm}$$

$$R = \frac{1}{2 \times 16} = \frac{1}{32} \text{ cm}$$

माना कि बेलनाकार तार की लम्बाई = H

अब,

छिन्नक का आयतन = बेलनाकार तार का आयतन

$$\Rightarrow \frac{70000}{9} \pi = \pi R^2 H$$

$$\Rightarrow \frac{70000}{9} = \left(\frac{1}{32} \right)^2 \times H$$

$$\Rightarrow \frac{70000}{9} = \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times H$$

$$\Rightarrow H = \frac{70000 \times 32 \times 32}{9} \text{ cm}$$

$$= \frac{70000 \times 32 \times 32}{9 \times 1000} \text{ m}$$

$$= \frac{71680}{9}$$

$$= 7964.4 \text{ m}$$

∴ तार की लम्बाई = 7964.4 m Ans