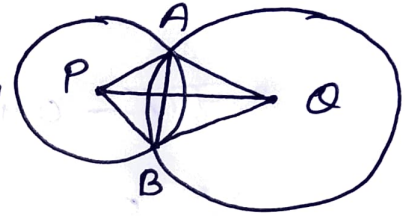


### Exercise-10.6

1) दिया है:- दो वृत्त जिनके केंद्र P तथा Q हैं बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:-  $\angle PAQ = \angle PBQ$

रचना:- AP, BP, AQ, BQ को मिलाया।  
PQ



प्रमाण:-  $\triangle PAQ$  तथा  $\triangle PBQ$  में,

$$PQ = PQ \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$PA = PB \text{ (त्रिज्या)}$$

$$AQ = BQ \text{ (त्रिज्या)}$$

$$\therefore \triangle PAQ \cong \triangle PBQ \text{ [SSS-सर्वांगसमता से]}$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle PBQ \text{ (CPCT)}$$

सिद्ध

2) दिया है:- 0 केन्द्र वाले वृत्त में,

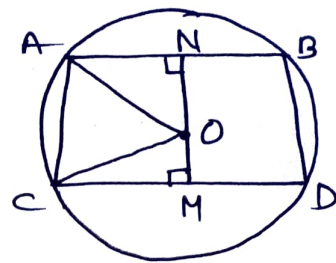
$$AB = 5 \text{ c.m}$$

$$CD = 11 \text{ c.m}$$

$$AB \parallel CD$$

$$MN = 6 \text{ c.m}$$

$$OA = OC = ?$$



माना:-  $OM \perp CD$  तथा  $ON \perp AB$  रखीया

$\therefore$   $CD$  वृत्त की जीवा है और  $OM \perp CD$

$\therefore CM = MD$  [केन्द्र से जीवा पर डाला गया भुज उससे समद्विभाजित करता है]

$$\Rightarrow CM = MD = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \times 11 = 5.5 \text{ c.m}$$

और,

$\therefore AB$  वृत्त की जीवा है और  $ON \perp AB$

$$\therefore AN = NB$$

$$\Rightarrow AN = NB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5 \text{ c.m}$$

माना कि,  $OM = x$ .

$$\therefore ON = 6 - x$$

समकोण  $\triangle OAN$  में,

$$OA^2 = AN^2 + ON^2 \text{ --- (I) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समकोण  $\triangle OCM$  में,

$$OC^2 = CM^2 + OM^2 \text{ --- (II) [पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

समीक ① तथा ② से,

$$AN^2 + ON^2 = CM^2 + OM^2 \text{ [}\because OA = OC = \text{त्रिज्या}]$$

$$\Rightarrow (2.5)^2 + (6-x)^2 = (5.5)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 6.25 + 36 + x^2 - 12x = 30.25 + x^2$$

$$\Rightarrow 42.25 - 12x = 30.25$$

$$\Rightarrow 42.25 - 30.25 = 12x$$

$$\Rightarrow 12 = 12x$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{12} = 1$$

समीर (ii) ले,

$$OC^2 = CM^2 + OM^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = (5.5)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = 30.25 + 1^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = 30.25 + 1 = 31.25$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{31.25}$$

$$= \sqrt{\frac{3125}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{125}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 \times 5 \times 5}{2 \times 2}}$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt{5}$$

$$\therefore OA = OC = \frac{5}{2} \sqrt{5} \text{ cm}$$

3) दिया है:- AB और CD वृत्त की दो समान्तर जीवाएँ हैं जिसका केंद्र O है (49)

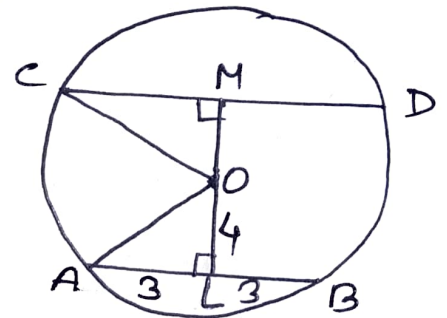
$$AB = 6 \text{ cm}$$

$$CD = 8 \text{ cm}$$

$OL \perp AB$  तथा  $OM \perp CD$  खींचा।

$$OL = 4 \text{ cm}$$

$$OM = ?$$



$\because$  AB वृत्त की जीवा है तथा  $OL \perp AB$

$\therefore AL = BL$  [वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है]

$$\Rightarrow AL = BL = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

समकोण  $\triangle OAL$  में,

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{AL^2 + OL^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}] \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \end{aligned}$$

$$\therefore OA = 5 \text{ cm}$$

फिर,

$$\therefore OA = OC = 5 \text{ cm} \quad (\text{त्रिज्या})$$

$\because$  CD वृत्त की जीवा है तथा  $OM \perp CD$

$\therefore CM = MD$  [केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है]

$$\Rightarrow CM = MD = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

समकोण  $\triangle OCM$  में,

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

(4) दिया है:-  $O$  केन्द्र वाले वृत्त में,  
जीवाएँ  $AD = CE$

सिद्ध करना है:-  $\angle ABC = \frac{1}{2} (\angle DOE - \angle AOC)$

रचना:-  $AC, AE$  और  $DE$  को मिलाया।

प्रमाण:-  $\triangle BAE$  में,

$$\angle ADE = \angle ABC + \angle AEC \quad \text{--- (i)}$$

[बाह्य कोण अपने सम्मुख अन्तः कोणों के योगफल के बराबर होता है]

फिर,

$$\angle DOE = 2\angle ADE \quad \left[ \begin{array}{l} \text{एक ही चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण} \\ \text{वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दुगुना} \\ \text{होता है} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \angle ADE = \frac{1}{2} \angle DOE \quad \text{--- (ii)}$$

..., इसी प्रकार,

$$\angle AEC = \frac{1}{2} \angle AOC \quad \text{--- (iii)} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{एक ही चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दुगुना होता है} \end{array} \right]$$

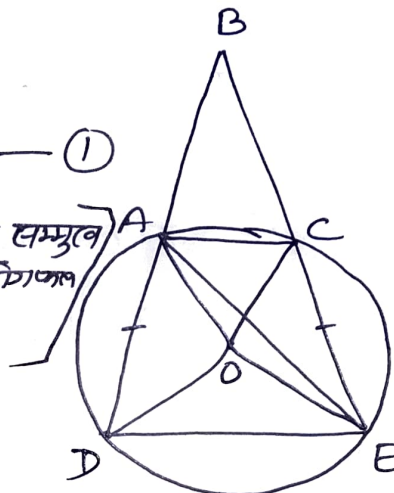
समीक ① से,

$$\angle ADE = \angle ABC + \angle AEC$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle ABC &= \angle ADE - \angle AEC \\ &= \frac{1}{2} \angle DOE - \frac{1}{2} \angle AOC \\ &= \frac{1}{2} (\angle DOE - \angle AOC) \end{aligned}$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} (\angle DOE - \angle AOC)$$

सिद्ध

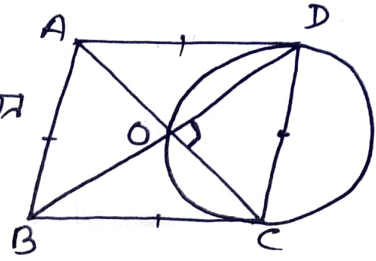




<5> दिया है:- ABCD एक समचतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:- CD को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है।

प्रमाण:-  $\because$  समचतुर्भुज के विकर्ण AC तथा BD परस्पर O बिन्दु पर लम्ब समद्विभाजित करते हैं।



$$\therefore AC \perp BD$$

$$\Rightarrow OC \perp BD$$

$$\therefore \angle COD = 90^\circ$$

$\because$  CD को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त के लिए  $\angle COD$  अर्द्धवृत्त का कोण है।

$$\therefore \angle COD = 90^\circ \quad [\text{अर्द्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता है}]$$

अतः समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

सिद्ध

(6) दिया है:- ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त ~~को~~ खड़ाई हुई भुजा CD को E पर प्रतिच्छेद करता है।

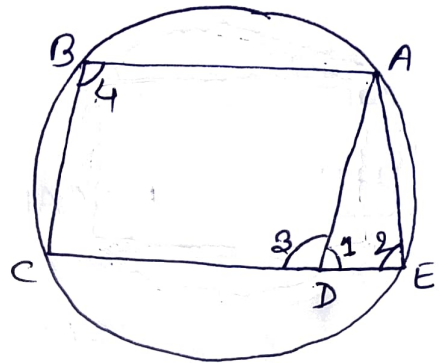
सिद्ध करना है:-  $AE = AD$

प्रमाण:-  $\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ$  — (i)

[संनिहित कोण]

और,

$\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$  — (ii)



तथा [चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग  $180^\circ$  होता है]

$\angle 3 = \angle 4$  — (iii) [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

समीक (i) तथा (ii) से,

$$\angle 3 + \angle 1 = \angle 2 + \angle 4$$

$$\Rightarrow \cancel{\angle 4} + \angle 1 = \angle 2 + \cancel{\angle 4} \quad [\text{समीक (iii) से}]$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \quad \text{--- (iv)}$$

$\triangle ADE$  में,

$$\angle 1 = \angle 2$$

$\therefore AD = AE$  [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

सिद्ध

<7> दिया है:- AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं तथा

$$AO = OC$$

$$BO = OD$$

सिद्ध करना है:- AC और BD व्यास हैं और ABCD एक आयत है।

रचना:- AB, BC, CD और DA को मिलाया।

प्रमाण:- (i)  $\triangle ABO$  और  $\triangle CDO$  में,

$$AO = OC$$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ [वर्षाभिमुख कोण]}$$

$$BO = OD$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO \text{ [SAS-सर्वांगसमता]}$$

$$AB = CD \text{ [CPCT]}$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DCO \text{ [CPCT]}$$

लेकिन ये एकान्तर कोण हैं।

अतः  $AB \parallel CD$

$\therefore$  ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle A = \angle C \text{ [संमुख कोण]}$$

लेकिन,  $\angle A + \angle C = 180^\circ$  [चक्रीय चतुर्भुज के संमुख कोणों का योग  $180^\circ$  होता है]

$$\Rightarrow \angle A + \angle A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\angle A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ$$

लेकिन  $\angle BAD$ , अर्धवृत्त पर बना कोण है

$\therefore$  BD वृत्त का व्यास है

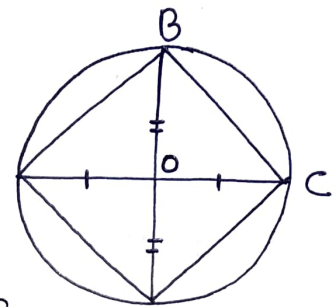
इसी प्रकार AC भी वृत्त का व्यास है।

फिर,

$\therefore$  ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा  $\angle A = 90^\circ$

$\therefore$  ABCD एक आयत है [क्योंकि समान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण है]

सिद्ध





(8) दिया है:-  $\triangle ABC$  के कोणों  $A, B$  और  $C$  के समद्विभाजक इसके परिवृत्त को क्रमशः  $D, E$  और  $F$  पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:-  $\angle D = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$

$$\angle E = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B$$

$$\angle F = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C$$

प्रमाण:-

$\because \angle 1 = \angle 3$  — ① [एक ही वृत्तखंड में  
दोनों कोण बराबर होते हैं]

और,

$\angle 2 = \angle 4$  — ② [एक ही वृत्तखंड में  
दोनों कोण बराबर होते हैं]

समी ① तथा ② जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$$

$$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle B$$

$$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2} (\angle C + \angle B)$$

$$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) \left[ \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \\ \Rightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2} \times 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$

$$\Rightarrow \angle D = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$

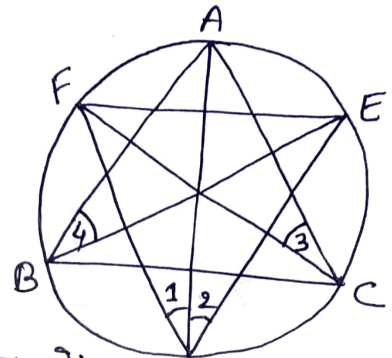
इसी प्रकार,

सिद्ध

$$\angle E = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B$$

$$\angle F = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C$$

सिद्ध

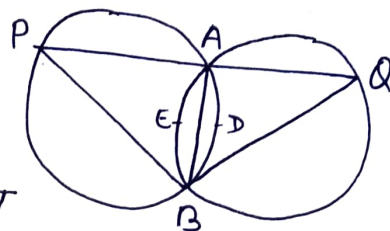


<9> दिया है:- दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:-  $BP = BQ$

रचना:-  $AQ, PB$  तथा  $BQ$  को मिलाया।

प्रमाण:-



∵ सर्वांगसम वृत्तों के चाप

$ADB$  और चाप  $AEB$  बराबर हैं।

अतः

$\angle APB = \angle AQB$  [∵ सर्वांगसम वृत्तों के समान चाप बराबर कोण अंतरित करते हैं।]

$\triangle APB$  तथा  $\triangle AQB$  में,

$\angle APB = \angle AQB$

∴  $BP = BQ$  [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]

सिद्ध

<10> दिया है:-  $\triangle ABC$  में,

$\angle A$  का समद्विभाजक  $ABC$  के परिवृत्त को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है:- D, BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

रचना:- BD और DC को मिलाया।

प्रमाण:-

∵  $\angle 1 = \angle 3$  — (i) [एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं]

और,

$\angle 2 = \angle 4$  — (ii) [एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं]

तथा

$\angle 1 = \angle 2$  — (iii)

समी ①, ② तथा ③ से,

$\angle 3 = \angle 4$

∴  $BD = DC$  [ $\triangle BDC$  के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

∵ BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिन्दु B और C से समदूरस्थ होंगे।

अतः बिन्दु D, BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है। सिद्ध

