बहुपद (Polynomials)

* **बहुपद (Polynomial) :-** किसी चर x में बहुपद x का एक बीजीय व्यंजक है जिसमें x के सिर्फ धनात्मक पूर्णांक घात आरोही या अवरोही क्रम में सजे रहते हैं।

उदाहरण :- (i) $4x+3$
(ii) $3x^2+8x+15$
(iii) $\sqrt{2}x^2+5x-3$

* **बहुपद का गुणांक (Coefficient of a Polynomial) :-**

किसी बहुपद मे प्रयुक्त विभिन्न पदो में चर x के गुणांक को उस पद का गुणांक कहते है।

जैसे :- $5x^3+3x^2-7x+3$ में

x^3 का गुणांक $= 5$
x^2 का गुणांक $= 3$
x का गुणांक $= -7$
3 का गुणांक $= 0$

* **बहुपद का घात (Degree of Polynomial) :-**

किसी बीजीय व्यंजक (बहुपद) में चर का अधिकतम घात को ही बहुपद का घात कहते हैं।

=> यदि कोई बहुपद एक-चर में हो तो, चर के घात के अधिकतम मान को बहुपद का घात कहते है परन्तु यदि कोई बहुपद एक से अधिक चर में हो तो चरो के घातों को जोड़ने पर प्राप्त संख्या बहुपद का घात कहलाती है। जैसे :- $5x^2y^5z^4+4xyz^4+7x^7-2$ का घात 11 है।

जैसे:- (i) $2x+3$ में

x का अधिकतम घात 1 है

$\therefore$ बहुपद का घात = 1 है

(ii) $5x^4+2x^2+3$ में,

x का अधिकतम घात 4 है

$\therefore$ बहुपद का घात = 4 है

(iii) $5x^2y^5z^4 + 4xyz^4 + 7x^7 - 2$ में

बहुपद का घात = 11 है

* बहुपद का मानक रूप (Standard form of Polynomials):-

जब किसी बहुपद में पदों के घात आरोही या अवरोही क्रम में सजे रहते हैं तब बहुपद को मानक रूप में कहते हैं।

उदाहरण:- $8x^3-4x^2+2x+1$ में

चर x, अवरोही क्रम में लिखा हुआ है।

$\therefore$ $6x^3-2x^2-3x+2 \longrightarrow$ अवरोही क्रम में

$2-3x-2x^2+6x^3 \longrightarrow$ आरोही क्रम में

Important Point

* बहुपदों का वर्गीकरण (Classification of Polynomials) :-

(i) एकपदी बहुपद (Monomial) :- जिस बहुपद में एक ही पद रहता है उसे एकपदी बहुपद कहते है।

जैसे :- $5x^4$, $4x$, 2, $7x^3$ इत्यादि एकपदी बहुपद है।

(ii) द्विपदी बहुपद (Binomial) :- जिस बहुपद में दो पद हो, उसे द्विपदी बहुपद कहते है।

जैसे :- $2x^5 - 7x$, $3x^2 + 2$ इत्यादि द्विपदी बहुपद है।

(iii) त्रिपदी बहुपद (Trinomial) :- जिस बहुपद में तीन पद हो, उसे त्रिपदी बहुपद कहते है।

जैसे :- $7x^3 + 2x^2 - 5x$; $8x^5 + 2x^2 + 7$ इत्यादि त्रिपदी बहुपद है।

(iv) शून्य बहुपद (Zero Polynomial) :- जिस बहुपद में सभी गुणांक शून्य होते हैं उसे शून्य बहुपद कहा जाता है।

जैसे :- $0 \cdot x^4 - 0 \cdot x^2 + 0$, $0x^5 + 0 \cdot x^2 - 0 \cdot x$ इत्यादि शून्य बहुपद है।

$\because$ शून्य बहुपद का कोई घात नही होता है अर्थात शून्य बहुपद का घात अपरिभाषित है।

(v) अचर बहुपद (Constant Polynomial) :- जिस बहुपद में सिर्फ एक ही पद हो जो किसी वास्तविक संख्या के बराबर हो, उसे अचर बहुपद कहते है। जैसे - $2, -5, \sqrt{3}$ इत्यादि

* बहुपद के गुण :-

(i) यदि किसी बहुपद में चर का घात ऋणात्मक हो तो वह बहुपद नहीं हो सकता है।

जैसे:- $4x^{-2}$, $2x^{-2}+4x+2$ इत्यादि बहुपद नहीं है।

(ii) यदि किसी बहुपद में चर का घात भिन्न के रूप में हो तो वह बहुपद नहीं हो सकता है।

जैसे:- $5x^{3/2}$, $2x^{1/2}+2x+3$ इत्यादि बहुपद नहीं है।

(iii) यदि किसी बहुपद में चर root (करणी) के अन्दर हो तो वह बहुपद नहीं हो सकता है।

जैसे:- $5\sqrt{x}$, $\frac{5}{2}\sqrt{x}$ इत्यादि बहुपद नहीं है।

(iv) यदि किसी बहुपद में चर हर के रूप में हो तो वह बहुपद नहीं हो सकता है।

जैसे:- $x-\frac{1}{x}$, $2x^2+\frac{3}{x}+5$ इत्यादि बहुपद नहीं है।

Important Point

* बहुपद के प्रकार (Kinds of Polynomials):-

① एकघातीय रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) :-

(i) जिस बहुपद का घात 1 हो अर्थात् एक घात वाले बहुपद को एकघातीय बहुपद कहते हैं।

(ii) इसका मानक रूप $ax+b$ तथा $a \neq 0$ है।

(iii) शून्यकों की संख्या एक हो।

(iv) शून्यक = $\frac{-b}{a}$

जैसे:- $x+5$, $3x+\sqrt{5}$ एक रैखिक बहुपद है।

② द्विघातीय बहुपद (Quadratic Polynomial):-

(i) जिस बहुपद का घात 2 हो तो उसे द्विघातीय बहुपद कहते हैं।

(ii) इसका मानक रूप ax^2+bx+c, $(a \neq 0)$ है।

(iii) शून्यकों की संख्या दो है।

(iv) द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β है।

(v) $\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(vi) द्विघात बहुपद $= x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$= x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल

③ त्रिघात बहुपद (Cubic Polynomial):-

(i) जिस बहुपद का अधिकतम घात 3 है उसे त्रिघात बहुपद कहते है।

(ii) इसका मानक रूप ax^3+bx^2+cx+d, $(a\neq0)$ है।

(iii) शून्यको की संख्या तीन है।

(iv) त्रिघात बहुपद के शून्यक α, β और γ है।

(v) $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

(vi) त्रिघात बहुपद $= x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$

* बहुपदों के शून्यको और गुणांको मे संबंध :-

① रैखिक बहुपद $ax+b$ मे,

x का गुणांक $= a$

अचर पद $= b$

$\therefore$ शून्यक $= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचरपद})}{x \text{ का गुणांक}}$

जैसे:- रैखिक बहुपद $3x-2$ मे,

माना कि x का गुणांक $= a = 3$

अचर पद $= b = 2$

$\therefore$ शून्यक $= \frac{-b}{a} = -\frac{2}{3}$

Important Point

(2.) द्विघात बहुपद ax^2+bx+c में,

x^2 का गुणांक $= a$

x का गुणांक $= b$

अचर पद $= c$

$\because$ α एवं β द्विघात बहुपद के शून्यक है।

$\therefore$ शून्यकों का योग $= \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

जैसे:- x^2-2x-8 में,

माना कि

x^2 का गुणांक $= a = 1$

x का गुणांक $= b = -2$

अचर पद $= -8$

$\because$ x^2-2x-8

$= x^2-4x+2x-8$

$= x(x-4)+2(x-4)$

$= (x+2)(x-4)$

$\therefore$ $(x+2)(x-4) = 0$

$\Rightarrow$ $x+2=0$ या $x-4=0$

$\Rightarrow$ $x=-2$ $\Rightarrow x=4$

$\therefore$ $x = -2, 4$

$\therefore \alpha = -2$

$\beta = 4$

अब,

शून्यकों का योग $= \alpha + \beta = -2 + 4$

$= \frac{2}{1}$

$= \frac{-(-2)}{1}$

$= -\frac{b}{a}$

$= -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

और,

शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = -2 \times 4$

$= \frac{-8}{1}$

$= \frac{c}{a}$

$= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

जाँच

Important Point

(3.) त्रिघात बहुपद ax^3+bx^2+cx+d में,

x^3 का गुणांक $= a$

x^2 का गुणांक $= b$

x का गुणांक $= c$

अचर पद $= d$

$\because$ α, β एवं γ त्रिघात बहुपद के शून्यक है

$\therefore$ शून्यकों का योगफल $= \alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

दो-दो शून्यकों के गुणन का योग $= \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = \frac{c}{a}$

$= \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

शून्यको का गुणनफल $= \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

जैसे:- त्रिघात बहुपद $2x^3+x^2-5x+2$ के $\frac{1}{2}, 1$ एवं -2 शून्यक है

$\therefore$ α, β और γ त्रिघात बहुपद के शून्यक है

$\therefore$ $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$

फिर,

$2x^3+x^2-5x+2$ मे

माना कि x^3 का गुणांक $= a = 2$

x^2 का गुणांक $= b = 1$

x का गुणांक $= c = -5$

अचर पद $= d = 2$

अब,

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{2}+1+(-2)$$
$$= \frac{1}{2}+1-2$$
$$= \frac{1+2-4}{2}$$
$$= \frac{3-4}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = \frac{1}{2}\times 1 + 1\times(-2) + \frac{1}{2}\times(-2)$$
$$= \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{2}$$
$$= \frac{1}{2} - 2 - 1$$
$$= \frac{1}{2} - 3$$
$$= \frac{1-6}{2}$$
$$= \frac{-5}{2}$$
$$= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}\times 1\times(-2)$$
$$= -\frac{1}{2}\times 2$$
$$= -\frac{2}{2}$$
$$= -\frac{d}{a} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$