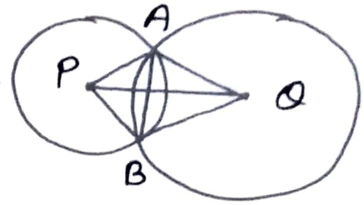
Exercise - 10.6

1.) **दिया है:-** दो वृत्त जिनके केन्द्र P तथा Q है बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करते है।

सिद्ध करना है:- $\angle PAQ = \angle PBQ$



रचना:- AP, BP, AQ, BQ PQ को मिलाया।

प्रमाण:- ΔPAQ तथा ΔPBQ में,

$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ)

$PA = PB$ (त्रिज्या)

$AQ = BQ$ (त्रिज्या)

$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ [SSS - सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle PAQ = \angle PBQ$ (CPCT)

सिद्ध

2) दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में,

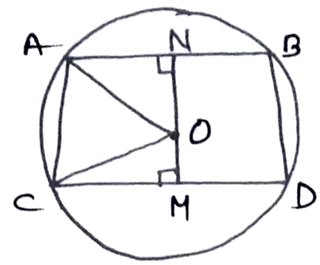
$AB = 5\,cm$

$CD = 11\,cm$

$AB \parallel CD$

$MN = 6\,cm$

$OA = OC = ?$



रचना:- $OM \perp CD$ तथा $ON \perp AB$ खींचा

$\because$ CD वृत्त की जीवा है और $OM \perp CD$

$\therefore$ $CM = MD$ [केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है]

$\Rightarrow CM = MD = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \times 11 = 5.5\,cm$

और,

$\because$ AB वृत्त की जीवा है और $ON \perp AB$

$\therefore$ $AN = NB$ [

$\Rightarrow AN = NB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5\,cm$

माना कि, $OM = x$

$\therefore ON = 6 - x$

समकोण ΔOAN में,

$OA^2 = AN^2 + ON^2$ —— (i) [पाइथागोरस प्रमेय से]

समकोण ΔOCN में,

$OC^2 = CM^2 + OM^2$ —— (ii) [पाइथागोरस प्रमेय से]

समी० (i) तथा (ii) से,

$AN^2 + ON^2 = CM^2 + OM^2$ [$\because OA = OC =$ त्रिज्या]

$\Rightarrow (2.5)^2 + (6-x)^2 = (5.5)^2 + x^2$

$\Rightarrow 6.25 + 36 + \cancel{x^2} - 12x = 30.25 + \cancel{x^2}$

$\Rightarrow 42.25 - 12x = 30.25$

$\Rightarrow 42.25 - 30.25 = 12x$

$\Rightarrow 12 = 12x$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{12}}{\cancel{12}} = 1$

समी० (ii) से,

$$OC^2 = CM^2 + OM^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = (5.5)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = 30.25 + 1^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = 30.25 + 1 = 31.25$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{31.25}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{3125}\ 125}{\cancel{100}\ 4}}$$

$$= \sqrt{\frac{125}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 \times 5 \times 5}{2 \times 2}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

$$\therefore OA = OC = \frac{5}{2}\sqrt{5} \text{ c.m}$$

3.) दिया है:- AB और CD वृत्त की दो समान्तर जीवाएँ हैं जिसका केन्द्र O है (49)

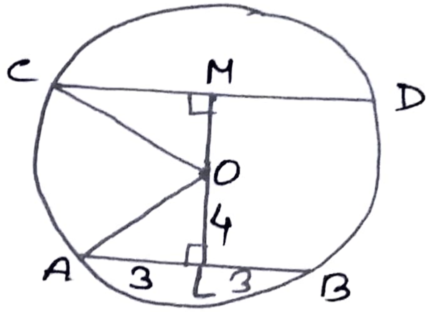
$AB = 6\ c.m$

$CD = 8\ c.m$

$OL \perp AB$ तथा $OM \perp CD$ खींचा।

$OL = 4\ c.m$

$OM = ?$



∵ AB वृत्त की जीवा है तथा $OL \perp AB$

∴ $AL = BL$. [वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।]

$\Rightarrow AL = BL = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{6}^{3} = 3\ c.m$

समकोण ΔOAL में,

$OA = \sqrt{AL^2 + OL^2}$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$

∴ $OA = 5\ c.m$

फिर, ∵ $OA = OC = 5\ c.m$ (त्रिज्या)

∵ CD वृत्त की जीवा है तथा $OM \perp CD$

∴ $CM = MD$ [केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।]

$\Rightarrow CM = MD = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{8}^{4} = 4\ c.m$

समकोण ΔOCM में,

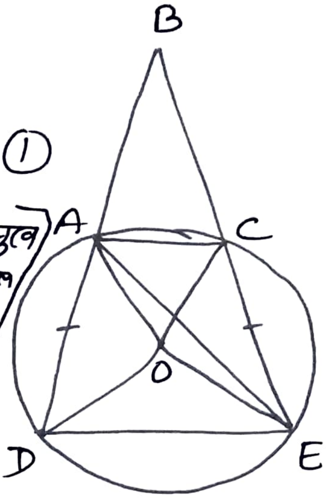
$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3\ c.m$

(4) दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में,
जीवाएँ $AD = CE$

सिद्ध करना है:- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle AOC)$

रचना:- AC, AE और DE को मिलाया।

प्रमाण:- ΔBAE में,



$\angle DAE = \angle ABC + \angle AEC$ — (1)

[बाहृय कोण अपने सम्मुख अन्तः कोणों के योगफल के बराबर होता है]

फिर,

$\angle DOE = 2\angle DAE$

$\Rightarrow \angle DAE = \frac{1}{2}\angle DOE$ — (11)

[एक ही चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेषभाग पर बने कोण का दुगुना होता है]

∴, इसी प्रकार से,

$\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AOC$ — (111)

[एक ही चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण वृत्त के शेष भाग पर बने कोण का दुगुना होता है]

समी० (1) से,

$\angle DAE = \angle ABC + \angle AEC$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle DAE - \angle AEC$

$= \frac{1}{2}\angle DOE - \frac{1}{2}\angle AOC$

$= \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle AOC)$

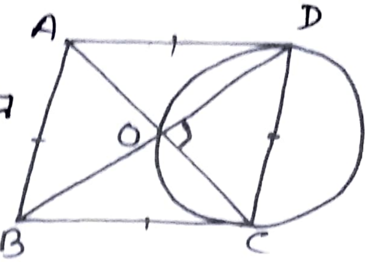
$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle AOC)$

सिद्ध

(5) **दिया है:-** ABCD एक समचतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते है।

सिद्ध करना है:- CD को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है।

प्रमाण:- ∵ समचतुर्भुज के विकर्ण AC तथा BD परस्पर O बिन्दु पर लम्ब समद्विभाजित करते है।



$\therefore$ $AC \perp BD$

$\Rightarrow$ $OC \perp BD$

$\therefore$ $\angle COD = 90°$

∵ CD को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त के लिए $\angle COD$ अर्द्धवृत्त का कोण है।

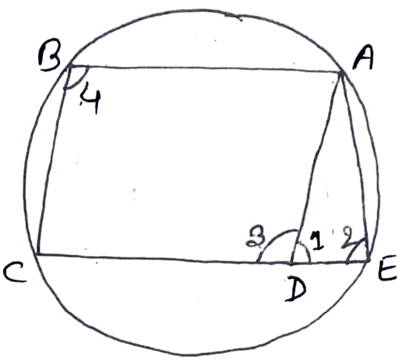
$\therefore$ $\angle COD = 90°$ [अर्द्धवृत्त पर बना कोण समकोण होता है]

अतः समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

सिद्ध

(6) दिया है:- ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त बढ़ाई हुई भुजा CD को E पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है:- AE = AD



प्रमाण:- $\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ$ —— (I)

[रैखिक युग्म]

और,

$\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ —— (II)

[चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है]

तथा

$\angle 3 = \angle 4$ —— (III) [समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

समी० (I) तथा (II) से,

$\angle 3 + \angle 1 = \angle 2 + \angle 4$

$\Rightarrow \cancel{\angle 4} + \angle 1 = \angle 2 + \cancel{\angle 4}$ [समी० (III) से]

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ —— (IV)

ΔADE में,

$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore AD = AE$ [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

सिद्ध

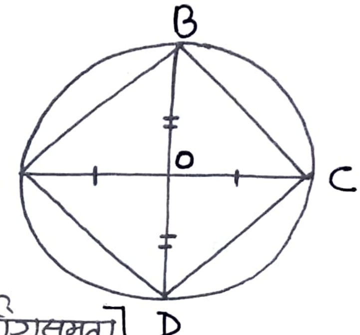
(7) दिया है:- AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं तथा

$AO = OC$

$BO = OD$

सिद्ध करना है:- AC और BD व्यास है और ABCD एक आयत है।

रचना:- AB, BC, CD और DA को मिलाया।



प्रमाण:- (i) ΔABO और ΔCDO में,

$AO = OC$

$\angle AOB = \angle COD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$BO = OD$

$\therefore \Delta ABO \cong \Delta CDO$ [SAS-सर्वांगसमता से]

$AB = CD$ [CPCT]

$\therefore \angle BAO = \angle DCO$ [CPCT]

लेकिन ये एकान्तर कोण है।

अत: $AB \parallel CD$

$\therefore$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \angle A = \angle C$ [सम्मुख कोण]

लेकिन, $\angle A + \angle C = 180°$ [चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है]

$\Rightarrow \angle A + \angle A = 180°$

$\Rightarrow 2\angle A = 180°$

$\Rightarrow \angle A = \frac{180°}{2} = 90°$

$\therefore \angle BAD = 90°$

लेकिन $\angle BAD$, अर्धवृत्त पर बना कोण है

$\therefore$ BD वृत्त का व्यास है

इसी प्रकार AC भी वृत्त का व्यास है।

सिद्ध

फिर,

$\because$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा

$\angle A = 90°$

$\therefore$ ABCD एक आयत है [क्योंकि समांतर चतुर्भुज का एक कोण समकोण है]

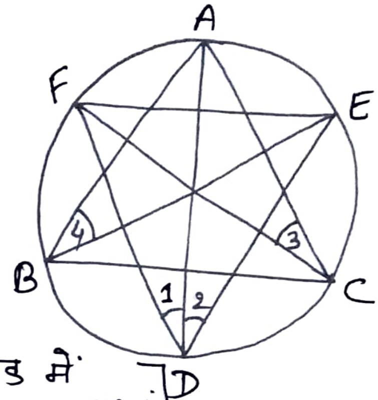
सिद्ध

<8> दिया है:- ΔABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक इसके परिवृत्त को क्रमशः D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

$\angle E = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$

$\angle F = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$



प्रमाण:-

$\because \angle 1 = \angle 3$ —(i) [एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

और,

$\angle 2 = \angle 4$ —(ii) [एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

समी० (i) तथा (ii) जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$

$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B$

$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B)$

$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$ [$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ $\Rightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$]

$\Rightarrow \angle D = \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{90^\circ}{\cancel{180^\circ}} - \frac{1}{2}\angle A$

$\Rightarrow \angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ सिद्ध

इसी प्रकार,

$\angle E = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$

$\angle F = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$

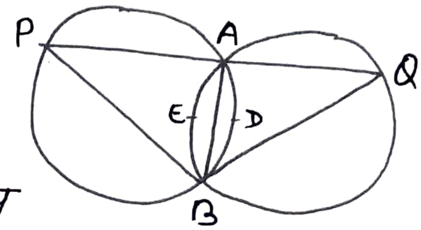
सिद्ध

(9.) **दिया है:-** दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है:- $BP = BQ$

रचना :- AB, PB तथा QB को मिलाया।

प्रमाण :-



∵ सर्वांगसम वृत्तों के चाप ADB और चाप AEB बराबर हैं।

अतः

$\angle APB = \angle AQB$ [∵ सर्वांगसम वृत्तों के समान चाप बराबर कोण अंतरित करते हैं]

$\triangle APB$ तथा $\triangle AQB$ में,

$\angle APB = \angle AQB$

∴ $BP = BQ$ [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]

सिद्ध

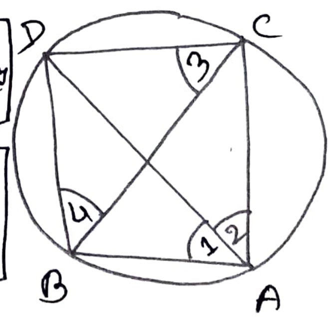
(10.) **दिया है:-** $\triangle ABC$ में,

$\angle A$ का समद्विभाजक ABC के परिवृत्त को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है:- D, BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

रचना :- BD और DC को मिलाया।

प्रमाण :-



∵ $\angle 1 = \angle 3$ — (I) [एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

और,

$\angle 2 = \angle 4$ — (II) [एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं]

तथा

$\angle 1 = \angle 2$ — (III)

समी० (I), (II) तथा (III) से,

$\angle 3 = \angle 4$

∴ $BD = DC$ [$\triangle BDC$ के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

∵ BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिंदु B और C से समदूरस्थ होंगे।

अतः बिन्दु D, BC के लंब समद्विभाजक पर स्थित है। सिद्ध