प्रमेय - 10.1 → वृत्त के किसी बिन्दु पर की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु पर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।

अथवा

वृत्त की स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्ब होती है।

अथवा

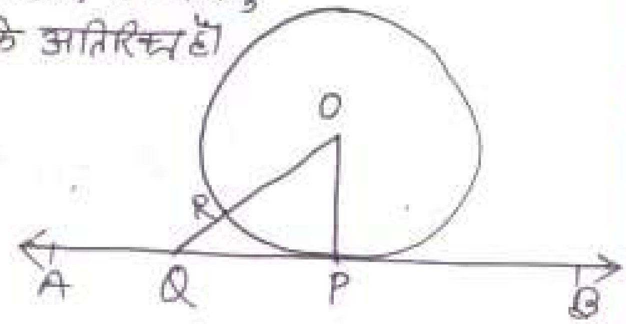
वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखा AB जो वृत्त के P बिन्दु से खींची गई है। OP, वृत्त की त्रिज्या है।

सिद्ध करना है:- $OP \perp AB$

रचना:- स्पर्श रेखा AB पर P के अतिरिक्त एक बिन्दु Q लेंगे और OQ को मिलाएंगे।

प्रमाण:- ∵ स्पर्श रेखा AB पर Q एक बिन्दु है जो स्पर्श बिन्दु P के अतिरिक्त है।



$\therefore OQ = OR + RQ$

$\Rightarrow OQ > OR$

$\Rightarrow OR < OQ$

$\Rightarrow OP < OQ \quad [\because OR = OP = r]$

इस तरह,

OP, P को छोड़कर AB के किसी बिन्दु को O से मिलाने वाली किसी रेखाखण्ड से छोटी होती है, अर्थात्

OP, O और AB के बीच की सबसे छोटी दूरी होती है।

किन्तु,

एक बिन्दु और किसी रेखा के बीच की सबसे छोटी दूरी, उस बिन्दु से रेखा पर लम्ब होती है।

$\therefore OP \perp AB$

सिद्ध

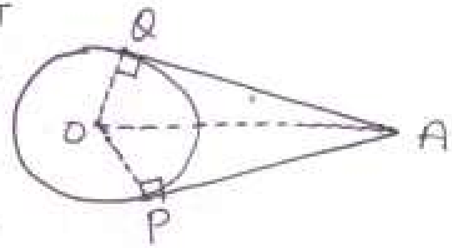
प्रमेय (10.2) :- बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओ की लम्बाईया समान होती है।

दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर एक बिन्दु A से AP और AQ वृत्त पर दो स्पर्श रेखाये है।

सिद्ध करना है- $AP = AQ$

रचना - OP, OQ, OA को मिलाया।

प्रमाण :- ∵ वृत्त की ~~स्पर्श रेखा~~ त्रिज्या ~~...~~ स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है



∴ $OQ \perp AQ$

$OP \perp AP$

अब,

ΔOPA और ΔOQA में,

$OP = OQ$ [त्रिज्या]

$OA = OA$ [Common]

$\angle OQA = \angle OPA = 90$

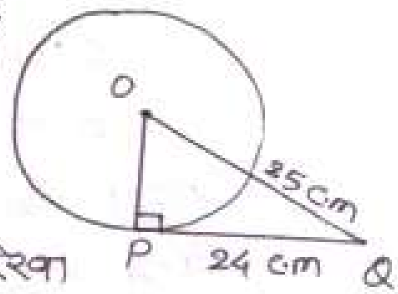
∴ $\Delta OPA \cong \Delta OQA$ [R.H.S]

∴ $AP = AQ$ [CPCT]

सिद्ध

Ex - 10.2

(1) दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त मे,
स्पर्श रेखा = PQ = 24 cm
OQ = 25 cm
त्रिज्या = OP = ?



∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

∴ $OP \perp PQ$

समकोण ΔPOQ में,

$OP = \sqrt{OQ^2 - PQ^2}$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= \sqrt{25^2 - 24^2}$

$= \sqrt{625 - 576}$

$= \sqrt{49}$

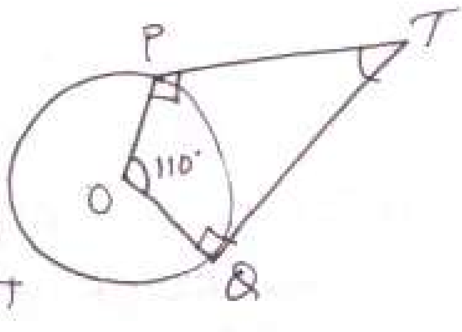
$OP = 7$ cm

∴ वृत्त की त्रिज्या = OP = 7 cm (A) Ans

(2) ∵ TP और TQ वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ है।

$\angle POQ = 110°$

$\angle PTQ = ?$



∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

$OP \perp TP$

$OQ \perp TQ$

∵ चतुर्भुज के चारो कोणो का योगफल 360° होता है।

∴ $\angle POQ + \angle P + \angle Q + \angle PTQ = 360$

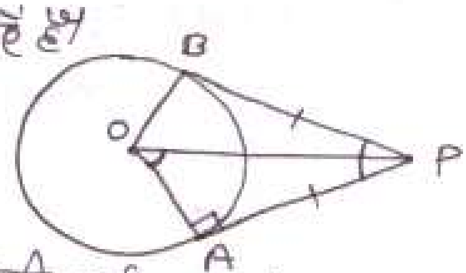
$\Rightarrow 110° + 90° + 90° + \angle PTQ = 360$

$\Rightarrow 290° + \angle PTQ = 360$

$\Rightarrow \angle PTQ = 360° - 290° = 70°$ (B) Ans

3. O केन्द्र वाले वृत्त मे,

PA तथा PB दो स्पर्श रेखाऐं हैं



$\angle BPA = 80^\circ$

$\angle POA = ?$

∵ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओ द्वारा केन्द्र और बिन्दु को मिलाने वाली रेखाखंड के साथ समान कोण बनाते हैं

$\therefore \angle OPA = \angle OPB$.

$\therefore \angle OPA = \angle OPB = \frac{1}{2}\angle BPA = \frac{1}{2} \times \overset{40}{\cancel{80}} = 40^\circ$

फिर,

∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है

$OA \perp PA$

~~समकोण~~ $\triangle OPA$ मे,

$\angle POA + \angle A + \angle OPA = 180^\circ$

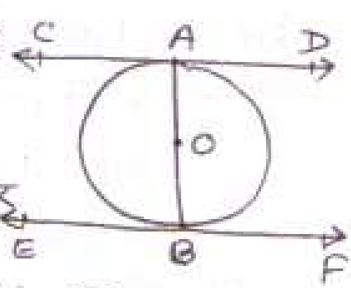
$\Rightarrow \angle POA + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle POA + 130^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle POA = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ (A) A

4. दिया है :- O केन्द्र वाले वृत्त मे,

CD और EF वृत्त की स्पर्शरेखा है



सिद्ध करना है :- $CD \parallel EF$

प्रमाण :- ∵ वृत्त की स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्ब होती है

$\therefore \angle BAD = \angle BAC = 90^\circ$ — (I)

और,

$\angle ABE = \angle ABF = 90^\circ$ — (II)

समी० (I) तथा (II) से,

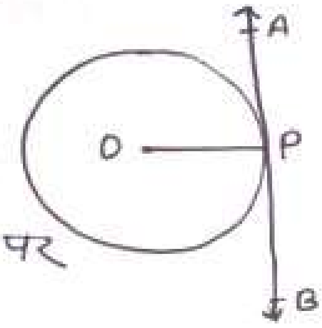
$\angle BAD = \angle ABE$.

ये एकान्तर कोण है $\therefore CD \parallel EF$ सिद्ध

5 दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में,
AB एक स्पर्श रेखा है जो
वृत्त को P बिन्दु पर मिलती है।

सिद्ध करना है:- स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया
लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

रचना:- OP को मिलाया।



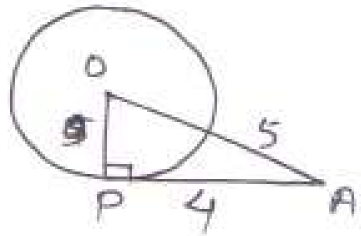
प्रमाण:- ∵ OP वृत्त की त्रिज्या है।
∴ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर
लम्ब होती है।

∴ $OP \perp AB$

∵ वृत्त की त्रिज्या सदैव वृत्त के केन्द्र से होकर
गुजरती है।
अतः स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया
लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

सिद्ध

(6) ∵ O केन्द्र वाले वृत्त में
AP एक स्पर्श रेखा है।
त्रिज्या = OP = r = ?
स्पर्श रेखा = AP = 4 cm
OA = 5 cm



∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
∴ $OP \perp AP$

समकोण ΔOPA में, $\angle P = 90°$

$OP^2 = OA^2 - AP^2$ [पायथागोरस प्रमेय से]

$OP = \sqrt{5^2 - 4^2}$

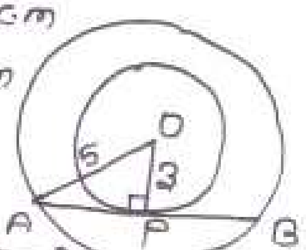
$= \sqrt{25 - 16}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$ cm

∴ वृत्त की त्रिज्या = 3 cm Ans

(7.) दिया है- दो संकेन्द्रीय वृत्त जिसका केन्द्र O है।
छोटे वृत्त की त्रिज्या = OP = 3 cm
बड़े वृत्त की त्रिज्या = OA = 5 cm
जीवा APB की लम्बाई = ?



∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
∴ $OP \perp AB$
∴ $\angle OPA = 90°$

समकोण ΔOPA में, $\angle OPA = 90°$

$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2}$

$= \sqrt{5^2 - 3^2}$

$= \sqrt{25 - 9}$

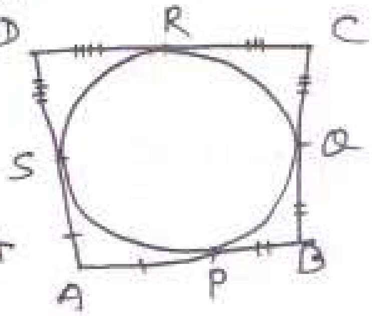
$= \sqrt{16}$

$= 4$ cm

∴ $AB = 2 \times AP$
$= 2 \times 4$
$= 8$ cm [OP, AB का समद्विभाजक है]

Ans

8) <u>दिया है:-</u> ABCD एक चतुर्भुज है जो एक वृत्त के परिगत है।



<u>सिद्ध करना है:-</u> $AB + CD = AD + BC$

<u>प्रमाण:-</u> ∵ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।

∴ बिन्दु A से,

$AP = AS$ — (I)

बिन्दु B से,

$BP = BQ$ — (II)

बिन्दु C से,

$CR = CQ$ — (III)

बिन्दु D से,

$DR = DS$ — (IV)

समी० (I), (II), (III) तथा (IV) को जोड़ने पर,

$\Rightarrow AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$

<u>सिद्ध</u>

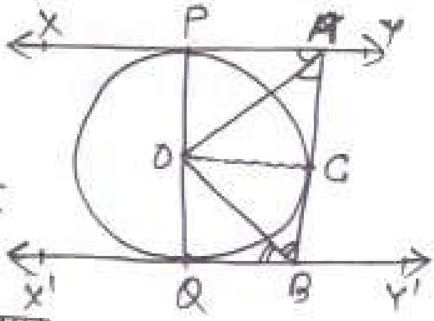
(9) दिया है :- O केन्द्र वाले वृत्त में,

$XY \parallel X'Y'$ (स्पर्श रेखा)

तथा एक अन्य स्पर्श रेखा AB है।

सिद्ध करना है :- $\angle AOB = 90°$

रचना :- OC को मिलाया।



प्रमाण :- ∵ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची स्पर्श रेखाओं द्वारा केन्द्र और बाह्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखाखण्ड के साथ समान कोण बनाते हैं।

$\therefore \angle OAC = \angle OAP = \frac{1}{2}\angle XAB$

$\Rightarrow \angle XAB = 2\angle OAC = 2\angle OAP$ —(1)

और,

$\angle OBC = \angle OBQ = \frac{1}{2}\angle X'BA$

$\Rightarrow \angle X'BA = 2\angle OBC = 2\angle OBQ$ —(11)

∵ $XY \parallel X'Y'$ है तथा AB एक तिर्यक रेखा है

$\therefore \angle XAB + \angle X'BA = 180°$ [सह. अन्त कोण]

$\Rightarrow 2\angle OAC + 2\angle OBC = 180°$

$\Rightarrow \cancel{2}(\angle OAC + \angle OBC) = \cancel{180}\,90°$

$\Rightarrow \angle OAC + \angle OBC = 90°$

फिर $\triangle AOB$ में,

$\angle AOB + \angle OAC + \angle OBC = 180°$ [$\triangle$ के कोणों के गुण से]

$\Rightarrow \angle AOB + 90° = 180°$

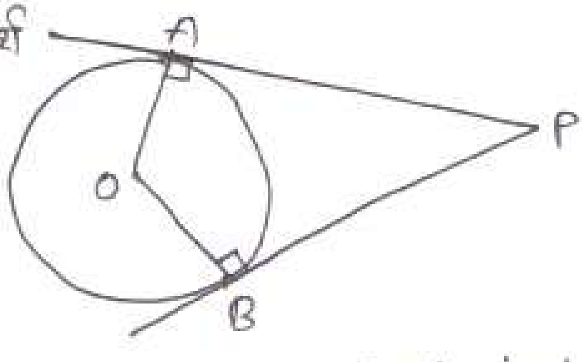
$\Rightarrow \angle AOB = 180° - 90°$

$\Rightarrow \angle AOB = 90°$ सिद्ध

(10) दिया है:- '0' केन्द्र वाले वृत्त में,
PA और PB दो स्पर्श रेखाएँ है।

सिद्ध करना है।- $\angle APB + \angle AOB = 180°$

प्रमाण!- ∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।



∴ $OA \perp PA, \angle A = 90°$
$OB \perp PB, \angle B = 90°$

चतुर्भुज AOBP में,

$\angle A + \angle B + \angle AOB + \angle APB = 360°$ [चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है]

$\Rightarrow 90° + 90° + \angle AOB + \angle APB = 360°$

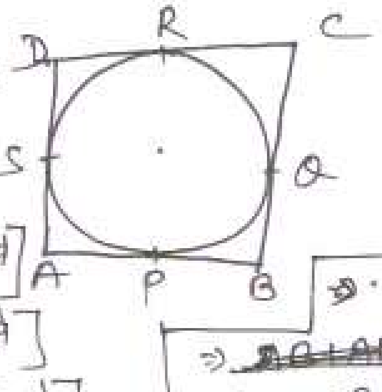
$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 360° - 180°$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 180°$ सिद्ध

(11) दिया है:- '0' केन्द्र वाले वृत्त में,
समान्तर चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं वृत्त को स्पर्श करती है

सिद्ध करना है:- $AB = BC = CD = AD$ अर्थात् समान्तर चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रमाण!- ∵ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।



$AP = AS$ —(I) [बिन्दु A से]
$BP = BQ$ —(II) [बिन्दु B से]
$CR = CQ$ —(III) [बिन्दु C से]
$DR = DS$ —(IV) [बिन्दु D से]

$\Rightarrow$ ~~AB + AB = AD + AD~~
$\Rightarrow$ ~~2AB = 2AD~~
$\Rightarrow$ ~~AB = AD~~

समी० (I), (II), (III) तथा (IV) को जोड़ने पर

$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$

14

$\Rightarrow AB + AB = AD + AD$ [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती है]

$\Rightarrow \cancel{2}AB = \cancel{2}AD$

$\Rightarrow AB = AD$ — (V)

लेकिन,

समान्तर चतुर्भुज ABCD में,

$AB = CD$ — (VI)

$AD = BC$ — (VII)

इस प्रकार,

समी० (V), (VI), (VII) से,

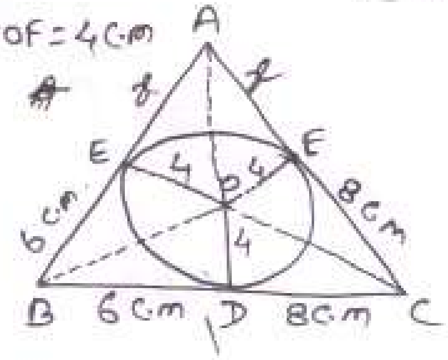
$AB = BC = CD = AD$

$\therefore$ ABCD एक समचतुर्भुज है

सिद्ध

12. दिया है- वृत्त की त्रिज्या = OD = OE = OF = 4 cm

∵ △ABC की भुजाएँ AB, BC, AC ~~अ~~ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ है।



∵ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओ की लम्बाइयाँ बराबर होती है।

∴ $AE = AF = x$ cm (माना कि)

$BD = BE = 6$ cm

$CD = CF = 8$ cm

फिर,

∵ वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है

$OD \perp BC$

$OE \perp AB$

$OF \perp AC$

∴ $OD = OE = OF = 4$ cm

रचना— OA, OB, OC को मिलाया।

△ABC में,

$a = AC = (x+6)$ cm

$b = BC = 6+8 = 14$ cm

$c = AB = (x+8)$ cm

$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{x+6+14+x+8}{2}$$

$$= \frac{2x+28}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(x+14)}{\cancel{2}}$$

$$= x+14$$

हीरोन सूत्र से,

$$\triangle ABC \text{ का क्षे०} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{(x+14)(\cancel{x}+14-\cancel{x}-6)(\cancel{x+14-14})(x+14-x-8)}$$

$$= \sqrt{(x+14)(8)(x)(6)}$$

$= \sqrt{(x+14)\times 48x}$

$= \sqrt{48x(x+14)}$

फिर,

$ar(\Delta OBC) = \frac{1}{2}\times BC\times OD$

$= \frac{1}{2}\times \cancel{14}^{7}\times 4$

$= 28\ cm^2$

$ar(\Delta OAC) = \frac{1}{2}\times AC\times OF$

$= \frac{1}{2}\times(x+8)\times \cancel{4}^{2}$

$= 2x+16\ cm^2$

$ar(\Delta OAB) = \frac{1}{2}\times AB\times OE$

$= \frac{1}{2}\times(x+6)\times \cancel{4}^{2}$

$= 2x+12\ cm^2$

अब,

$ar(\Delta ABC) = ar(\Delta OBC) + ar(\Delta OAC) + ar(\Delta OAB)$

$\Rightarrow \sqrt{48x(x+14)} = 28+2x+16+2x+12$

$\Rightarrow \sqrt{48x(x+14)} = 56+4x$

$\Rightarrow 48x(x+14) = (56+4x)^2$

$\Rightarrow 48x(x+14) = [4(14+x)]^2$

$\Rightarrow \cancel{48}^{3}x(x+14) = \cancel{16}(x+14)^2$

$\cancel{\Rightarrow x = \frac{(x+14)^2}{3(x+14)} = \frac{(x+14)(x+14)}{3(x+14)} =}$

$$\Rightarrow 3x = \frac{(x+14)^2}{(x+14)}$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{(x+14)\cancel{(x+14)}}{\cancel{(x+14)}}$$

$$\Rightarrow 3x = x+14$$

$$\Rightarrow 3x - x = 14$$

$$\Rightarrow 2x = 14$$

$$\Rightarrow x = \frac{\cancel{14}}{\cancel{2}} = 7$$

$\therefore$ $AB = x+6 = 7+6 = 13\text{ c.m}$

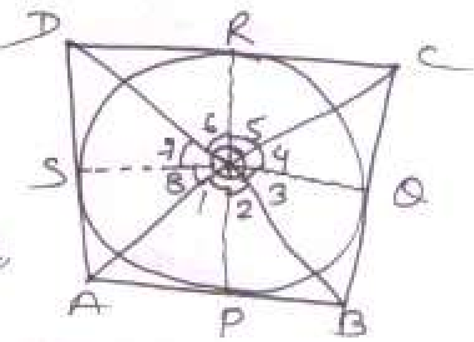
$AC = x+8 = 7+8 = 15\text{ c.m}$

(13.) दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD है।
∴ AB, BC, CD, AD वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है:- ~~COD~~ ~~∠AOB~~

$\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$

$\angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$



रचना:- OA, OB, OC, OD, OP, OQ, OR, OS को मिलाया।

प्रमाण:- ∵ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ द्वारा केन्द्र पर समान कोण अंतरित करती है।

$\therefore \angle 1 = \angle 8$ — (I)

$\angle 2 = \angle 3$ — (II)

$\angle 4 = \angle 5$ — (III)

$\angle 6 = \angle 7$ — (IV)

∵ एक बिन्दु पर बने सभी कोणों का जोड़ 360° होता है

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 1 = 360^\circ$

[समी॰ I, II, III, IV से]

$\Rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 5 + 2\angle 6 = 360^\circ$

$\Rightarrow \cancel{2}(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = \cancel{360^\circ}\ 180^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ सिद्ध

इसी प्रकार से,

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD + \angle AOD + \angle BOC = 360^\circ$

$\Rightarrow 180^\circ + \angle AOD + \angle BOC = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle AOD + \angle BOC = 360^\circ - 180^\circ$

$\Rightarrow \angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$ सिद्ध