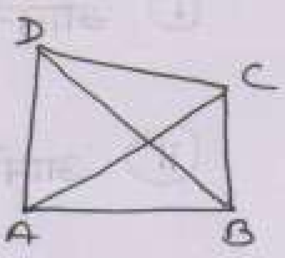
अध्याय-8 [चतुर्भुज]

* **चतुर्भुज:-** वह समतल क्षेत्र जो चार सरल रेखाओ से घिरा हो।



चतुर्भुज ABCD मे,

शीर्ष - A, B, C, D

कोण - ∠A, ∠B, ∠C, ∠D

विकर्ण - AC, BD

भुजा - AB, BC, CD, AD

⇒ विकर्ण (Diagonals) - वह सरल रेखा जो चतुर्भुज क्षेत्र के आमने-सामने के कोणो को मिलाती है, विकर्ण कहलाती है।
अथवा,
चतुर्भुज के सम्मुख ~~कोणो~~ शीर्षो को जोड़नेवाले रेखाखण्ड विकर्ण कहलाता है।

⇒ सम्मुख भुजाएँ - चतुर्भुज की वे दो भुजाएँ जो प्रतिच्छेद नही करती हैं सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं।
जैसे - (AB, CD), (AD, BC)

⇒ क्रमागत भुजाएँ - चतुर्भुज की वे दो भुजाएँ जिनका एक उभयनिष्ठ बिन्दु हो अर्थात् जो प्रतिच्छेद करती है।
जैसे - (AB, BC), (BC, CD), (AD, AB)

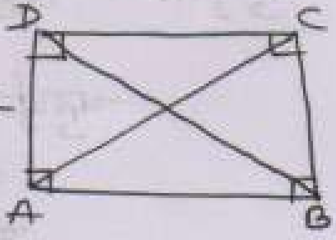
⇒ सम्मुख कोण - चतुर्भुज के वे दो कोण जिनको अंतरित करने वाली भुजाओ में कोई भुजा उभयनिष्ठ न हो।
जैसे - (∠A, ∠C), (∠B, ∠D)

⇒ क्रमागत कोण / आसन्न कोण - चतुर्भुज के वे दो कोण जिनको अंतरित करने वाली भुजाओ में एक भुजा उभयनिष्ठ हो।

जैसे - (∠A, ∠B), ∠B, ∠C)

चतुर्भुज के प्रकार

1.) आयत :- (Rectangle)



(i) आमने-सामने की भुजाएँ बराबर है-

$AB = CD$
$AD = BC$

(ii) आमने-सामने की भुजाएँ समान्तर है-

$AB \parallel CD$
$AD \parallel BC$

(iii) प्रत्येक कोण 90° के बराबर है -

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

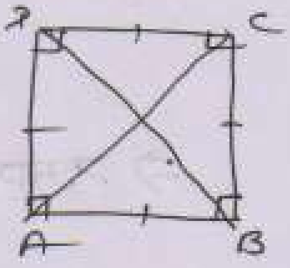
(iv) दोनो विकर्ण आपस में बराबर होते है

$AC = BD$

2.) वर्ग - (Square) -

(i). सभी भुजाओं की लम्बाईयाँ बराबर है

$AB = BC = CD = AD$



(ii) आमने-सामने की भुजाएँ समान्तर है

$AB \parallel CD$
$AD \parallel BC$.

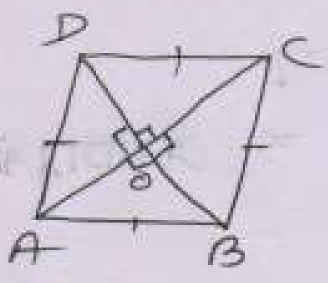
(iii) प्रत्येक कोण 90° के बराबर है।

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

(iv) दोनों विकर्ण परस्पर एक-दूसरे के बराबर है।

$AC = BD$

3.) समचतुर्भुज :



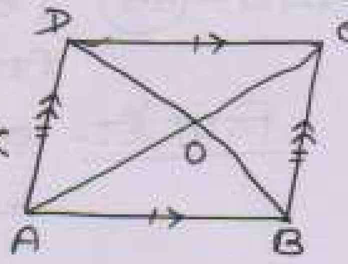
(i) सभी भुजाओ की लम्बाईयां बराबर है।

$AB = BC = CD = AD$

(ii) इनके विकर्ण परस्पर लंब ~~समद्वि~~ समद्विभाजित करते है

$\therefore \; OA = OC \qquad AC \perp BD$
$OB = OD$

4.) समान्तर-चतुर्भुज :-



(i) ~~समान्तर~~ आमने-सामने की भुजाएँ समान्तर और बराबर है।

AB = DC , AB || DC
AD = BC , AD || BC

(ii) सम्मुख कोण बराबर है।

∠A = ∠C
∠B = ∠D

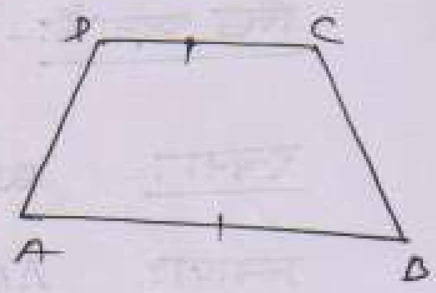
(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

OA = OC
OB = OD

5.) समलम्ब-चतुर्भुज -

(i) चतुर्भुज में कोई दो आमने-सामने की भुजाएँ समान्तर हैं।

AB || DC



* समान्तर-चतुर्भुज के गुण

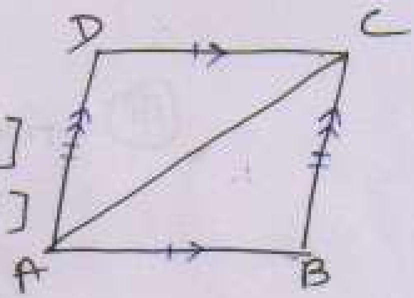
(i) समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है।
(ii) समान्तर-चतुर्भुज के सम्मुख भुजाएँ बराबर होते हैं।
(iii) समान्तर-चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
(iv) समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
(v)

प्रमेय- 8.1 किसी समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

दिया है:- समान्तर चतुर्भुज ABCD के एक विकर्ण AC है जो समान्तर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों ΔABC तथा ΔADC में विभाजित करता है।

सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

प्रमाण:- ΔABC तथा ΔADC में,



$AB = DC$ [सम्मुख भुजाएँ]

$BC = AD$ [सम्मुख भुजाएँ]

$AC = AC$ [Common]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ [SSS-से]

सिद्ध

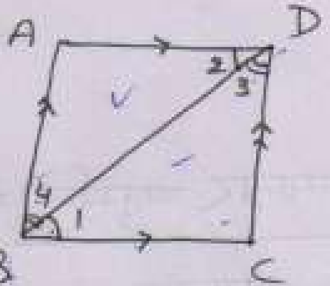
प्रमेय- 8.2 समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

दिया है:- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है:- $AB = DC$

$AD = BC$

रचना:- BD को मिलाया।



प्रमाण:- ΔABD तथा ΔCBD में

$\angle 1 = \angle 2$ [अन्त: एकान्तर कोण]

$\angle 3 = \angle 4$ [अन्त: एकान्तर कोण]

$BD = BD$ [Common]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CBD$ [ASA से]

$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \end{array}\right] - (CPCT)$

सिद्ध

प्रमेय (8.3) यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है अर्थात्

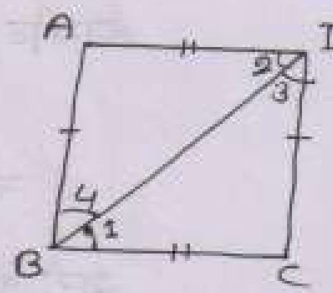
एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि उसके सम्मुख भुजाएँ परस्पर बराबर हो।

दिया है:- ABCD एक चतुर्भुज है जिसमे,

$AB = DC$
$AD = BC$

सिद्ध करना है:- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

रचना:- BD को मिलाया।



प्रमाण:- ΔABD तथा ΔCBD मे,

$AB = DC$
$AD = BC$
$BD = BD$ (common)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CBD$ [SSS-ल]

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ [CPCT]
$\angle 4 = \angle 3$ [CPCT]

लेकिन ये एकान्तर कोण है।

$\therefore AD \parallel BC$ और $AB \parallel DC$

$\therefore$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध

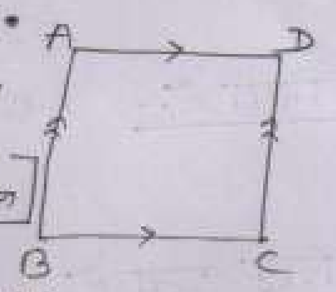
प्रमेय - 8.4 – एक समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है:- ABCD एक समान्तर-चतुर्भुज है जिसमें AB || DC, AD || BC है।

सिद्ध करना है:- $\angle B = \angle D$

$\angle A = \angle C$

प्रमाण:- $\because$ AB || DC और AD एक तिर्यक रेखा है।



$\therefore \angle A + \angle D = 180°$ — (i) [क्रमागत अन्तः कोण]

फिर,

AD || BC और AB एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle A + \angle B = 180°$ — (ii) [क्रमागत अन्तः कोण]

समी० (i) तथा (ii) से,

$\cancel{\angle A} + \angle B = \cancel{\angle A} + \angle D$

$\Rightarrow \angle B = \angle D$

सिद्ध

इसी प्रकार से,

$\angle A = \angle C$ सिद्ध

प्रमेय - 8.5 – एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि सम्मुख कोण परस्पर बराबर हो।

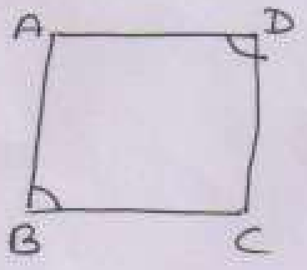
दिया है:- चतुर्भुज ABCD में,

$\angle A = \angle C$

$\angle B = \angle D$

सिद्ध करना है:- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

प्रमाण:- चतुर्भुज ABCD में,



$\angle A = \angle C$ — (i)

$\angle B = \angle D$ — (ii)

समी० (i) तथा (ii) को जोड़ने पर

$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

लेकिन,

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ [चतुर्भुज के गुण से]

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$

$\Rightarrow 2(\angle A + \angle B) = 360°$

$\Rightarrow \angle A + \angle B = \frac{360}{2} = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$

$\because \angle A + \angle B = 180^\circ$

$\therefore AD \parallel BC$

और

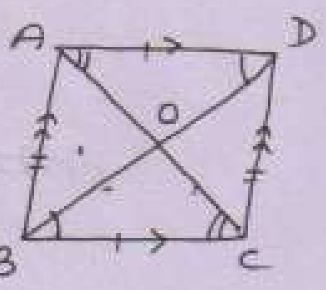
$\therefore$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

सिद्ध

प्रमेयं (8.6) – समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

दिया है:- ABCD एक समान्तर-चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD बिन्दु 'O' पर परस्पर प्रतिच्छेद करती है

सिद्ध करना है:- $OA = OC$
$OB = OD$



प्रमाण:- ΔAOD तथा ΔBOC में,

$\angle ODA = \angle OBC$ [अन्त: एकान्तर कोण]

$\angle OAD = \angle OCB$ [अन्त: एकान्तर कोण]

$AD = BC$

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ [ASA - से]

$\therefore \left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right] - (CPCT)$

सिद्ध

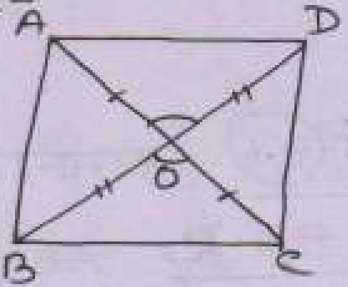
प्रमेय-(8.7) - यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है, तो चतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया है:- ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु 'O' पर प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore AO = OC$

$BO = OD$

सिद्ध करना है:- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



प्रमाण:- ΔAOD तथा COB में,

$OA = OC$

$OD = OB$

$\angle AOD = \angle COD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta COB$ [S-A-S से]

$\therefore \angle OAD = \angle OCB$ [CPCT]

$\angle ODA = \angle OBC$ [CPCT]

लेकिन, ये एकान्तर अन्तः कोण है।

$\therefore AD \parallel BC$

इसी प्रकार से,

$AB \parallel DC$

$\therefore$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध

प्रश्नावली - 8.1

1) माना कि चतुर्भुज ABCD में,

$\angle A = 3x$

$\angle B = 5x$

$\angle C = 9x$

$\angle D = 13x$

$\because$ चतुर्भुज के चारो कोणो का योग 360° होता है।

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$\Rightarrow 3x + 5x + 9x + 13x = 360°$

$\Rightarrow 30x = 360°$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{360}^{12}}{\cancel{30}}$

$\Rightarrow x = 12°$

$\therefore \angle A = 3x = 3 \times 12° = 36°$

$\angle B = 5x = 5 \times 12° = 60°$

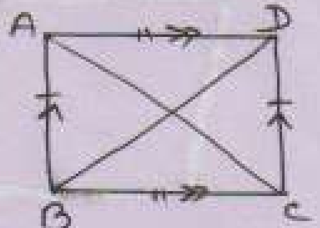
$\angle C = 9x = 9 \times 12° = 108°$

$\angle D = 13x = 13 \times 12 = 156°$

(2) दिया है :- ABCD एक समान्तर-चतुर्भुज है जिसमे

$AC = BD$

सिद्ध करना है :- ABCD एक आयत है।



प्रमाण :- ΔABC तथा ΔDCB में,

$AB = DC$ [समांतर-चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$BC = BC$ [Common]

$AC = BD$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta DCB$ [SSS-से]

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$ {CPCT]

लेकिन,

$\angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$ [सह-अन्त: कोण]

$\Rightarrow \angle ABC + \angle ABC = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\angle ABC = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ABC = \frac{\cancel{180^\circ}}{\cancel{2}} = 90^\circ$

$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

$\therefore$ समान्तर-चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

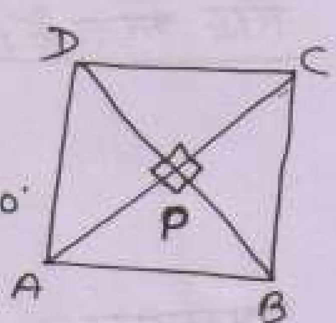
सिद्ध

3. दिया है:- चतुर्भुज ABCD में,
विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करता है।

$AP = PC$

$BP = PD$

$\angle DPC = \angle DPA = \angle APB = \angle BPC = 90^\circ$



सिद्ध करना है:- ABCD एक समचतुर्भुज है।
अर्थात् $AB = BC = DC = AD$

प्रमाण:- ΔAPD तथा ΔDPC में,

$AP = PC$

$DP = DP$ [Common]

$\angle APD = \angle DPC = 90^\circ$

$\therefore \Delta APD \cong \Delta DPC$ [SAS-से]

$\therefore AD = DC$ (CPCT) — (I)

इसीप्रकार से,

$\Delta APD \cong \Delta APB$

$\therefore AD = AB$ [CPCT] — (II)

और,

$\Delta APB \cong \Delta BPC$

$\therefore AB = BC$ [CPCT] — (III)

और,

$\Delta BPC \cong \Delta DPC$

$\therefore BC = DC$ [CPCT] — (IV)

समी० (I), (II), (III), (IV) से,

$AB = BC = CD = AD$

अर्थात् ABCD एक समचतुर्भुज है

सिद्ध

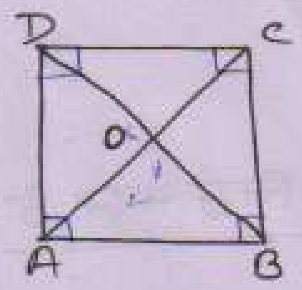
(4.) दिया है:- ABCD एक वर्ग है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर ~~एक~~ O बिन्दु पर काटते है।

सिद्ध करना है:- $AC = BD$

$OB = OD$

$OA = OC$

$AC \perp BD$



प्रमाण:- ΔDAB और ΔADC में;

$AD = AD$ [उभयनिष्ट]

$AB = DC$

$\angle DAB = \angle ADC \; (90^\circ)$

$\therefore \Delta DAB \cong \Delta ADC$ (SAS-से)

$\therefore BD = AC$ [CPCT]

$\because$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore OB = OD$

$OA = OC$

फिर,

ΔAOB और ΔAOD में;

$OA = OA$

$OB = OD$

$AB = AD$

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOD$ [SSS-से]

$\angle AOB = \angle AOD$ (CPCT)

लेकिन,

$\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \angle AOB + \angle AOB = 180^\circ$

$\Rightarrow \cancel{2}\angle AOB = \cancel{180^\circ}\,90^\circ$

$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$

$\therefore OA \perp BD$ अर्थात् $AC \perp BD$ सिद्ध