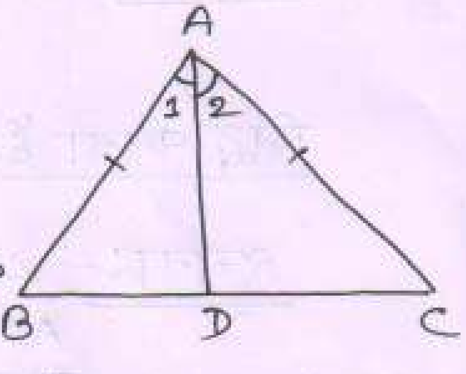
Exercise - 7.2 के लिए

प्रमेय - (7.2) एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

<u>दिया है:-</u> $\triangle ABC$ में,
$AB = AC$



<u>सिद्ध करना है:-</u> $\angle B = \angle C$

<u>रचना:-</u> $\angle A$ का समद्विभाजक AD खींचा जो BC से D पर मिलता है।

<u>प्रमाण:-</u> $\triangle ABD$ तथा $\triangle ACD$ में,

$AB = AC$

$\angle 1 = \angle 2$ [$\angle A$ का समद्विभाजक AD है]

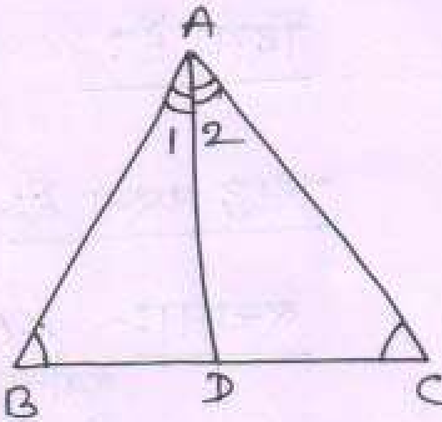
$AD = AD$ [Common]

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [SAS-सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle B = \angle C$ [CPCT]

<u>सिद्ध</u>

प्रमेय-7.3 किसी त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।



दिया है:- ΔABC में,

$\angle B = \angle C$

सिद्ध करना है:- $AB = AC$

रचना:- $\angle A$ का समद्विभाजक AD खींचा जो BC से बिन्दु D पर मिलता है।

प्रमाण:- ΔABD तथा ΔACD में,

$\angle B = \angle C$

$\angle 1 = \angle 2$ [$\angle A$ का समद्विभाजक AD है]

$AD = AD$ [Common]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [A-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore AB = AC$ [CPCT]

सिद्ध

Exercise - 7.2

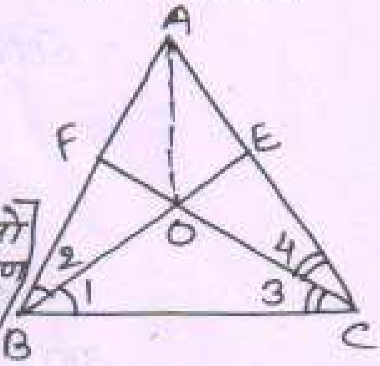
(1) **दिया है:-** समद्विबाहु ΔABC में,

$AB = AC$

$\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं

सिद्ध करना है:- (i) $OB = OC$

(ii) AO, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।



प्रमाण:- समद्विबाहु ΔABC में,

$AB = AC$

$\therefore \angle B = \angle C$ —— (i) [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं]

फिर,

$\because \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle B$ [BE, $\angle B$ का समद्विभाजक है]

$\Rightarrow \angle B = 2\angle 1 = 2\angle 2$ —— (ii)

और,

$\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle C$ [CF, $\angle C$ का समद्विभाजक है]

$\Rightarrow \angle C = 2\angle 3 = 2\angle 4$ —— (iii)

समी० (i) से,

$\angle B = \angle C$

$\Rightarrow \cancel{2}\angle 1 = \cancel{2}\angle 3$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$ —— (iv)

अब,

ΔOBC में,

$\angle 1 = \angle 3$

$\therefore OB = OC$ [समान कोणों के सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं]

सिद्ध

(ii) ΔBCE तथा ΔCBF में,

$\angle BCE = \angle CBF$ [$\because \angle B = \angle C$]

$\angle EBC = \angle FCB$ [समी० (iv) से]

$BC = BC$ [Common]

$\therefore \Delta BCE \cong \Delta CBF$ [A-S-A सर्वांगसमता से]

$\therefore BE = CF$ [CPCT]

$EC = FB$ [CPCT]

लेकिन,

$AB = AC$

$\Rightarrow AB - FB = AC - EC$

$\Rightarrow AF = AE$ —— (v)

तथा,

$BE - OB = CF - OC$

$\Rightarrow OE = OF$ —— (vi)

अब,

ΔAFO तथा ΔAEO में,

$AF = AE$

$OF = OE$

$OA = OA$ [Common]

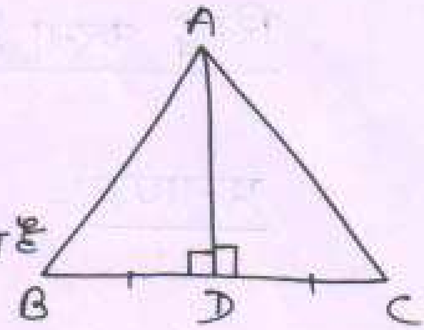
$\therefore \Delta AFO \cong \Delta AEO$ [S-S-S सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle OAF = \angle OAE$ [CPCT]

$\therefore$ AO, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध

(2) ΔABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है। दर्शाइए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।



दिया है:- ΔABC में,

$AD \perp BC$

$BD = CD$

सिद्ध करना है:- ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें, $AB = AC$

प्रमाण:- ΔABD तथा ΔACD में,

$\angle ADB = \angle ADC$ $(90°)$

$BD = CD$

$AD = AD$ [Common]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [SAS सर्वांगसमता से]

$\therefore AB = AC$ [CPCT]

$\therefore \Delta ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध

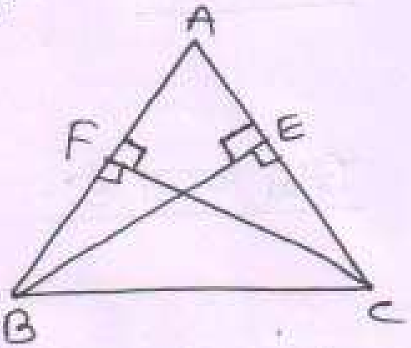
⟨3⟩ दिया है:- ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें,

$AB = AC$

$BE \perp AC$

$CF \perp AB$

सिद्ध करना है:- शीर्षलम्ब $BE = CF$



प्रमाण:- ΔABE तथा ΔACF में,

$AB = AC$

$\angle AEB = \angle AFC \; (90^\circ)$

$\angle A = \angle A$ [Common]

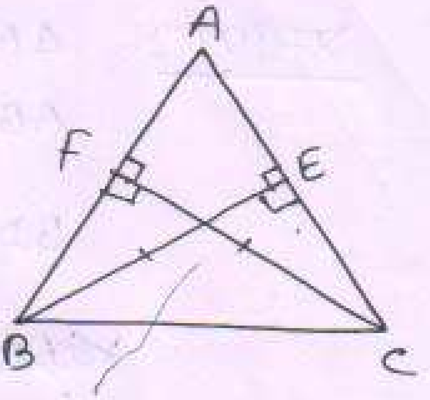
$\therefore \Delta ABE \cong \Delta ACF$ [A-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore BE = CF$ [CPCT]

सिद्ध

(4) <u>दिया है:-</u> ΔABC में, $BE \perp AC$ और $CF \perp AB$
शीर्षलम्ब $BE = CF$

<u>सिद्ध करना है:-</u> (i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$
(ii) $AB = AC$, अर्थात् ΔABC
एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



<u>प्रमाण :-</u> (i) ΔABE तथा ΔACF में,
$BE = CF$
$\angle AEB = \angle AFC$ $(90°)$
$\angle A = \angle A$ [Common]

$\therefore$ $\Delta ABE \cong \Delta ACF$ [AAS सर्वांगसमता से]
सिद्ध

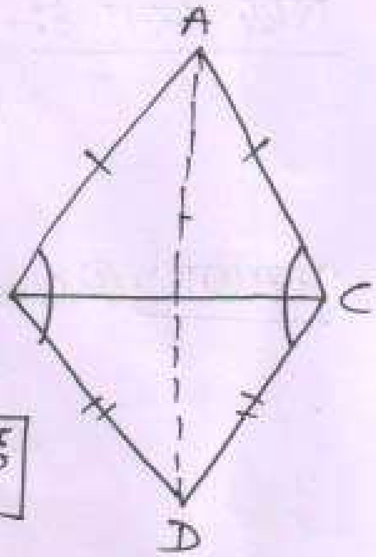
(ii) $\because$ $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

$\therefore$ $AB = AC$ [CPCT]

सिद्ध

(5) <u>दिया है:-</u> समद्विबाहु ΔABC और ΔDBC समान आधार BC पर स्थित है।

<u>सिद्ध करना है:-</u> $\angle ABD = \angle ACD$



<u>रचना:-</u> AD को मिलाया

<u>प्रमाण:-</u> ΔABD तथा ΔACD में,

$AB = AC$ [ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज]

$BD = DC$ [ΔDBC एक समद्विबाहु त्रिभुज है]

$AD = AD$ [common]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [SSS सर्वांगसमता से]

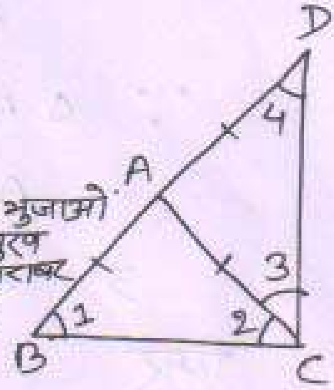
$\therefore \angle ABD = \angle ACD$ (CPCT)

सिद्ध

6) <u>दिया है:-</u> समद्विबाहु त्रिभुज ABC में,

$$AB = AC$$
$$AD = AB$$

<u>सिद्ध करना है:-</u> $\angle BCD = 90^\circ$



<u>प्रमाण:-</u> समद्विबाहु $\triangle ABC$ में,

$$AB = AC$$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ — (I) [बराबर भुजाओं की सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

फिर,

$\because AD = AB$

$\Rightarrow AD = AC$ [क्योंकि $AB = AC$]

$\therefore \angle 4 = \angle 3$ — (II) [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

समी० (I) तथा (II) को जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 4 = \angle BCD \quad \text{— (III)}$$

अब

~~[illegible]~~ $\triangle BCD$ में,

$\angle 1 + \angle 4 + \angle BCD = 180^\circ$ [$\triangle$ के तीनों कोणों का योगफल 180° होता है।]

$\Rightarrow \angle BCD + \angle BCD = 180^\circ$ [समी० (III) से]

$\Rightarrow 2\angle BCD = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BCD = \frac{\cancel{180^\circ}\, 90^\circ}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow \angle BCD = 90^\circ$

सिद्ध

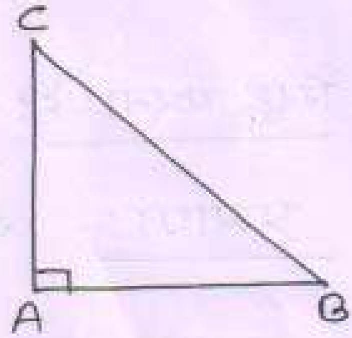
(7) दिया है:- समकोण ΔABC में,

$\angle A = 90^\circ$

$AB = AC$

$\angle B = ?$

$\angle C = ?$



$\because$ ΔABC में,

$AB = AC$

$\Rightarrow \angle B = \angle C$ —(1) [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।]

फिर

$\because$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180° होता है

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ$ [समी० (1) से]

$\Rightarrow 2\angle B = 180^\circ - 90^\circ$

$\Rightarrow 2\angle B = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle B = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\therefore \angle B = \angle C$

$\therefore 45^\circ = \angle C$

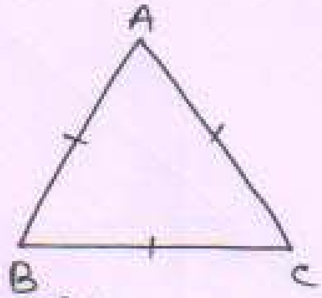
$\therefore \angle B = 45^\circ$

$\angle C = 45^\circ$

(8) दिया है:- ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें,

$$AB = BC = AC$$

सिद्ध करना है:- $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$



प्रमाण:- समबाहु ΔABC में,

$$AB = AC$$

$\therefore \quad \angle B = \angle C$ — (I) [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है।]

और,

$$AB = BC$$

$\therefore \quad \angle A = \angle C$ — (II) [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है।]

समी० (I) तथा (II) से,

$\angle A = \angle B = \angle C$ — (III)

अब,

ΔABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ [Δ के कोणों का योग 180° होता है।]

$\Rightarrow \angle A + \angle A + \angle A = 180^\circ$ [समी० (III) से]

$\Rightarrow 3\angle A = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle A = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

अत: समी० (III) से,

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

सिद्ध