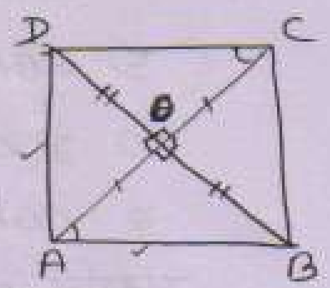
5.) दिया है:- ABCD एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण $AC = BD$

$AO = OC$
$BO = OD$
$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90°$



सिद्ध करना है:- ABCD एक वर्ग है।
अर्थात् $AB = BC = CD = AD$

प्रमाण:- ΔAOB तथा ΔCOD में,
$AO = OC$
$BO = OD$
$\angle AOB = \angle COD$ (90°)
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ [SAS-से]
$\therefore AB = DC$ — (I)
और
$\angle OAB = \angle OCD$ [एकान्तर कोण]
$\therefore AB \parallel \cancel{DC}$
अतः
$AB = DC$ तथा $AB \parallel DC$
$\therefore$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज होगा।

$\therefore AD = BC$ तथा $AD \parallel BC$

इसी प्रकार से,
$\Delta AOD \cong \Delta$ ~~BOC~~ AOB
$AD = AB$ — (II)
समी. (I) तथा (II) से,
$AB = BC = CD = AD$ — (III)

फिर,
ΔABC और ΔBAD में,
$AC = BD$
$AB = AB$ [common]
$BC = AD$
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta BAD$ [SSS-से]
$\therefore \angle ABC = \angle BAD$ [CPCT]

लेकिन,

$\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ [सह-अन्तः कोण]

$\Rightarrow \angle BAD + \angle BAD = 180^\circ$

$\Rightarrow \cancel{2}\angle BAD = \cancel{180^\circ}\ 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAD = 90^\circ$

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD में,

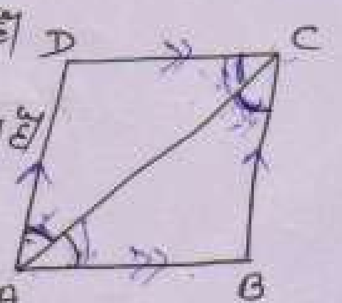
$AB = BC = CD = AD$

तथा $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$

$\therefore$ ABCD एक वर्ग है।

सिद्ध

6) **दिया है:-** ABCD एक समान्तर-चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।



सिद्ध करना है:- AC, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण:- (1) $\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$ [एकान्तर कोण] — (I)

फिर,

$\because AB \parallel DC$

$\therefore \angle CAB = \angle ACD$ [एकान्तर कोण] — (II)

लेकिन, $\angle DAC = \angle CAB$ — (III)

समी० (I), (II) तथा (III) से,

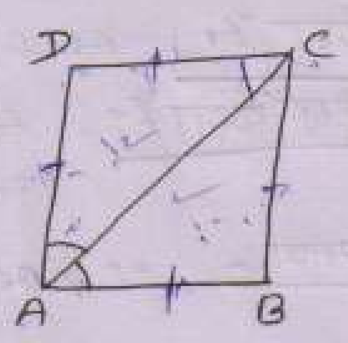
$\angle ACB = \angle ACD$

$\therefore$ AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

सिद्ध

~~Q ∠ABC∠BC∠~~ (14)

6) (ii) ∵ समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते है।



$\therefore \angle A = \angle C$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

$\Rightarrow \angle DAC = \angle DCA$

ΔADC में,

$\angle DAC = \angle DCA$

$\therefore AD = DC$ — (iv) [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होते है]

फिर,

ΔABC और ΔADC में,

$\angle CAB = \angle ACD$

$\angle ACB = \angle CAD$

$AC = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$ [ASA - से]

$\therefore \left.\begin{array}{l} AB = CD \\ BC = AD \end{array}\right] - (v)$

अब (iv) तथा (v) से,

$AB = BC = CD = AD$

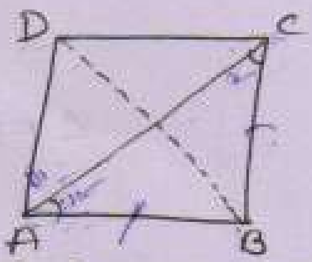
$\therefore ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

सिद्ध

7) **दिया है :-** ABCD एक समचतुर्भुज है।

सिद्ध करना है :- विकर्ण AC, $\angle A$ और $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।
विकर्ण BD, $\angle B$ और $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण :- $\because$ ABCD एक समचतुर्भुज है।



$\therefore AB = BC = CD = AD$

$\because \triangle ABC$ में,

$AB = BC$

$\therefore \angle ACB = \angle CAB$ —(i) [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होता है]

फिर,

$\because AD \parallel BC$ तथा AC एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$ —(ii) [एकान्तर कोण]

समी० (i) तथा (ii) से,

$\angle DAC = \angle CAB$

$\therefore$ AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

समी० (i) से,

$\angle ACB = \angle DAC = \angle DCA$

$\therefore$ AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

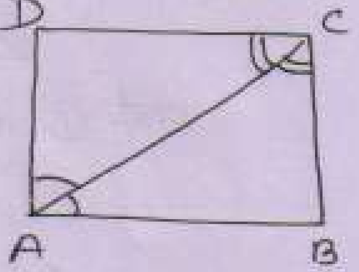
इसी प्रकार से,

BD, $\angle B$ तथा $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

8) <u>दिया है:-</u> ABCD एक आयत है जिसमें विकर्ण AC, ~~कोण~~ ∠A और ∠C को समद्विभाजित करता है।

<u>सिद्ध करना है:-</u> (i) ABCD एक वर्ग है।
(ii) विकर्ण BD, ∠B और ∠D को समद्विभाजित करता है।

<u>प्रमाण:-</u> ∵ $\angle A = \angle C$ [प्रत्येक कोण 90° का होता है]



$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

$\Rightarrow \angle DAC = \angle DCA$ —(i)

$\triangle DAC$ में,

$\angle DAC = \angle DCA$

$\Rightarrow AD = DC$ —(ii) [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती है]

इसी प्रकार से,

$\triangle ABC$ में,

$\angle BAC = \angle BCA$

∴ $AB = BC$ —(iii) [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती है]

∵ ABCD एक आयत है।

∴ $AB = DC$ तथा $AD = BC$ —(iv)

समी॰ (ii), (iii), (iv) से,

$AB = BC = CD = AD$

तथा

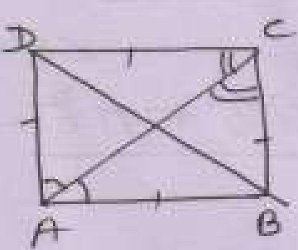
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ [आयत के प्रत्येक कोण 90° का होता है]

∴ ABCD एक वर्ग है।

<u>सिद्ध</u>

(8) $\because$ ABCD एक वर्ग है।

$\therefore AB = BC = CD = AD$



ΔABD में,

$AB = AD$

$\Rightarrow \angle ABD = \angle ADB$ — (i)

लेकिन,

$\angle ADB = \angle DBC$ — (ii) [अन्त: एकान्तर कोण]

समी० (i) तथा (ii) से,

$\angle ABD = \angle DBC$

$\therefore$ BD, $\angle B$ को समद्विभाजित करता है।

इसी प्रकार से,

$\angle ADB = \angle BDC$

$\therefore$ BD, $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

$\therefore$ विकर्ण BD, $\angle B$ और $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध

9) <u>दिया है:-</u> समान्तर चतुर्भुज ABCD में;

$DP = BQ$

<u>सिद्ध करना है:-</u> (i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$ (ii) $AP = CQ$

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ (iv) $AQ = CP$

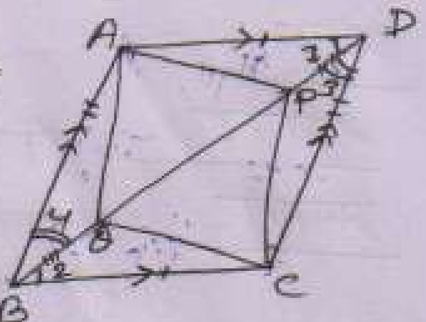
(v) APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

<u>प्रमाण:</u> (i) ΔAPD तथा ΔCQB में;

$AD = BC$ [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा]

$DP = BQ$

$\angle 1 = \angle 2$ [एकान्तर कोण]



$\therefore \Delta APD \cong \Delta CQB$ [SAS से]
सिद्ध

(ii) $\because \Delta APD \cong \Delta CQB$

$\therefore AP = CQ$ [CPCT]

सिद्ध

(iii) ΔAQB तथा ΔCPD में;

$AB = CD$ [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा]

$BQ = DP$

$\angle 4 = \angle 3$ [एकान्तर कोण]

$\therefore \Delta AQB \cong \Delta CPD$ [SAS से]

(iv) $\because \Delta AQB \cong \Delta CPD$

$\therefore AQ = CP$ [CPCT]

(v) $\because$ चतुर्भुज AQCP में,

$AP = CQ$

$AQ = CP$

$\therefore$ AQCP एक समान्तर चतुर्भुज है

सिद्ध

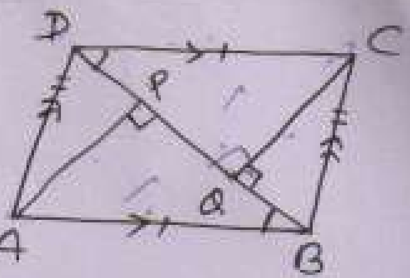
⑩ दिया है:- समान्तर चतुर्भुज ABCD में,

$AP \perp BD$

$CQ \perp BD$

सिद्ध करना है:- (I) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(II) $AP = CQ$



प्रमाण:- ΔAPB तथा ΔCQD में,

$AB = CD$ [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$\angle APB = \angle CQD$ (90°)

$\angle ABP = \angle CDQ$ (एकान्तर कोण)

$\therefore \Delta APB \cong \Delta CQD$ [ASA - से]

$\therefore AP = CQ$ [CPCT]

सिद्ध

(19)

9) दिया है:- समांतर ABCD में,

विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित है कि

$DP = BQ$ — ⓪

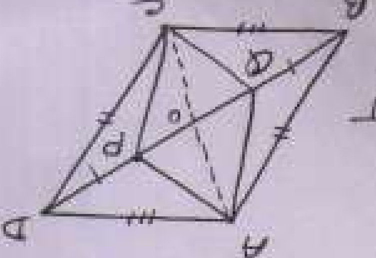
सिद्ध करना है:- (I) $\Delta APD \cong \Delta CQB$ (II) $AP = CQ$

(III) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ (IV) $AQ = CP$

(V) APCQ एक समांतर चतुर्भुज है।

~~प्रक्रिया~~

रचना :- AC को मिलाया।



प्रमाण :- ∵ समांतर-चतुर्भुज के विकर्ण AC तथा BD परस्पर समद्विभाजित करता है

$\therefore OB = OD$ — (I)

$OA = OC$ — (II)

लेकिन, $BQ = DP$ — (III)

11) दिया है:- ΔABC और ΔDEF में,

$AB = DE$

$AB \parallel DE$

$BC = EF$

$BC \parallel EF$

शीर्ष A, B और C को क्रमशः शीर्ष D, E और F से जोड़ा जाता है।

सिद्ध करना है:- (i) चतुर्भुज ABED एक समान्तर चतुर्भुज है।

(ii) चतुर्भुज BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है।

(iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$ है।

(iv) चतुर्भुज ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

(v) $AC = DF$

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

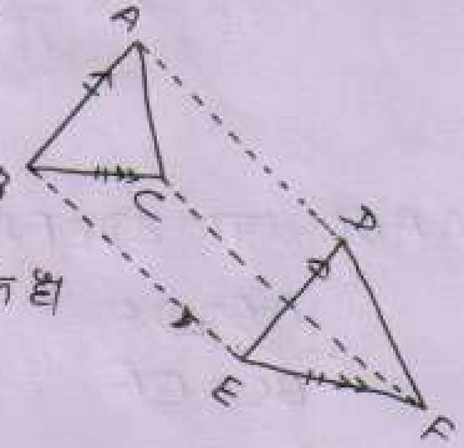
प्रमाण:- (i) चतुर्भुज ABED में,

$AB = DE$

$AB \parallel DE$

∴ चतुर्भुज ABED एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध



(ii) चतुर्भुज BEFC में,

$BC = EF$

$BC \parallel EF$

∴ ~~चतुर्भुज~~ BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध

(iii)

∵ $BE = CF$ और $BE \parallel CF$ —(I) [∵ BEFC एक समान्तर चतुर्भुज है]

तथा

$AD = BE$ और $AD \parallel BE$ —(II) [∵ ABED एक समान्तर चतुर्भुज है]

समी (I) तथा (II) से,

$AD = CF$ और $AD \parallel CF$

सि.प्र.

(iv) ∵ ~~ACF... समान्तर~~

∵ $AD = CF$ और $AD \parallel CF$

∴ ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है

∴ ~~AC = ...~~

सिद्ध

(v) ∵ ACFD एक समान्तर चतुर्भुज है

∴ ~~AC~~

$AC = DF$

सिद्ध

(vi) ΔABC तथा ΔDEF में,

$AB = DE$

$BC = EF$

$AC = DF$

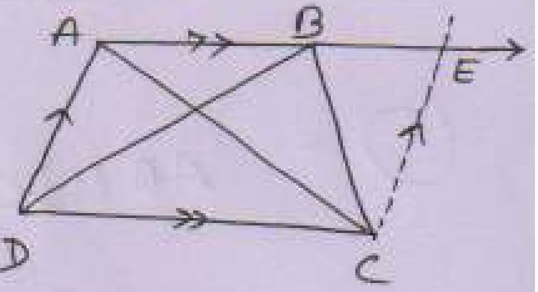
∴ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ [SS-S से]

सिद्ध

12) दिया है :- ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें,

$AB \parallel DC$

$AD = BC$



सिद्ध करना है :- (i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD

रचना :- AB को E तक बढ़ाया तथा $CE \parallel AD$ खींचा।

प्रमाण :- (i) $\because AB \parallel DC$

तथा

$CE \parallel AD$

$\therefore$ AECD एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore AD = CE$ — (i)

लेकिन, $AD = BC$ — (ii) (दिया है)

समी. (i) तथा (ii) से

$BC = CE$

$\therefore \angle CBE = \angle CEB$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

अब, $\because AD \parallel CE$ तथा AE एक तिर्यक रेखा है

$\therefore \angle A + \angle CEB = 180^\circ$ [सह-अन्तः कोण]

$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - \angle CEB$

$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - \angle CBE$ — (iii)

लेकिन,

$\angle B + \angle CBE = 180^\circ$ [रैखिक युग्म से]

$\Rightarrow \angle B = 180^\circ - \angle CBE$ — (iv)

समी० (iii) तथा (iv) से,

$\angle A = \angle B$

सिद्ध

(ii) ∵ $AB \parallel DC$ तथा AD एक तिर्यक रेखा है।

∴ $\angle A + \angle D = 180°$ — (v)

$AB \parallel DC$ तथा BC एक तिर्यक रेखा है

∴ $\angle B + \angle C = 180°$ — (vi)

समी० (v) तथा (vi) से,

$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$

$\Rightarrow \angle C = \angle D$ [क्योंकि $\angle A = \angle B$] ~~समी~~.

सिद्ध

(iii) ΔABC तथा ΔBAD में,

$AB = AB$

$AD = BC$

$\angle A = \angle B$

∴ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ [S-A-S से]

(iv) ∵ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

∴ $AC = BD$ [CPCT]

सिद्ध