* युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म [Euclid's Division Algorithm]

युक्लिड विभाजन प्रमेय पूर्णांकों की विभाज्यता से संबंधित है। इसके अनुसार एक धनात्मक पूर्णांक 'a' को किसी दूसरे धनात्मक पूर्णांक 'b' से इस प्रकार विभाजित किया जाए कि शेषफल 'r' हो, तो 'r' का मान 'b' से छोटा होता है।

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म या प्रमेय का उपयोग दो धनात्मक पूर्णांकों के महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करने में होता है।

$\because$ भाज्य = a
भाजक = b
भागफल = q
शेषफल = r

$\therefore$ भाजक (b)) भाज्य (a) (भागफल (q)
शेषफल (r)

$\therefore$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$\Rightarrow \quad a = bq + r$

$\therefore$ युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म या प्रमेयिका से

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow$ <u>शेषफल के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बातें :-</u>

(i) शेषफल का मान 0 या 0 से बड़ा होता है लेकिन भाजक (b) से हमेशा छोटा होता है

$\therefore \quad \boxed{0 \leq r < b}$

* अंकगणित का आधारभूत प्रमेय [Fundamental Theorem of Algorithm]

अंकगणित के आधारभूत प्रमेय का संबंध धनात्मक पूर्णांकों के गुणन से है।

हम जानते है कि प्रत्येक भाज्य संख्या-(Composite Number) को अद्वितीय रूप से अभाज्य गुणनखंडो (Prime factor) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसे ही अंकगणित का आधारभूत प्रमेय कहा जाता है।

⇒ इस प्रमेय का प्रयोग मुख्यतः दो रूपों में होता है।

(i) कुछ संख्याओ जैसे — $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ एवं $\sqrt{7}$ आदि की अपरिमेयता सिद्ध करना।

(ii) कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के दशमलव प्रसार की जाँच करना कि यह कब सांत एवं कब असांत आवर्ती है।

Note:- भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओ की घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

* महत्वपूर्ण तथ्य:-

(i) यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका :- दो धनात्मक पूर्णांक 'a' और 'b' दिए रहने पर हम $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ को संतुष्ट करने वाली पूर्ण संख्याएँ 'q' और 'r' ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् ऐसी संख्याओ का अस्तित्व है और ये अद्वितीय है।

(ii) अंकगणित का आधारभूत प्रमेय :- प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओ के एक गुणनफल के रूप में किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड अद्वितीय होता है।

Example :- युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके HCF ज्ञात करे।

(i) 396 और 1080

396) 1080 (2
792
288) 396 (1
288
108) 288 (2
216
72) 108 (1
72
36) 72 (2
72
××

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$1080 = 396 \times 2 + 288$

$396 = 288 \times 1 + 108$

$288 = 108 \times 2 + 72$

$108 = 72 \times 1 + 36$

$72 = 36 \times 2 + 0$

$\because$ शेषफल $= 0$

$\therefore$ HCF $= 36$ Ans

(ii) 52, 1234

52) 1234 (23
104
194
156
38) 52 (1
38
14) 38 (2
28
10) 14 (1
10
4) 10 (2
8
2) 4 (2
4
×

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$1234 = 52 \times 23 + 38$

$52 = 38 \times 1 + 14$

$38 = 14 \times 2 + 10$

$14 = 10 \times 1 + 4$

$10 = 4 \times 2 + 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$

$\because$ शेषफल $= 0$

$\therefore$ HCF $= 2$ Ans

Exercise - 1.1

(1.) निम्नलिखित संख्याओ का HCF ज्ञात करने के लिए युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए —

(i) 135 और 225

$$\begin{array}{r} 135\,)\,225\,(1 \\ 135 \\ \hline 90\,)\,135\,(1 \\ 90 \\ \hline 45\,)\,90\,(2 \\ 90 \\ \hline \times\times \end{array}$$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$225 = 135 \times 1 + 90$

$135 = 90 \times 1 + 45$

$90 = 45 \times 2 + 0$

$\because$ शेषफल $= 0$

$\therefore$ HCF $= 45$ Ans

(ii) 196 और 38220

$$\begin{array}{r} 196\,)\,38220\,(195 \\ 196 \\ \hline 1862 \\ 1764 \\ \hline 980 \\ 980 \\ \hline \times\times\times \end{array}$$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$38220 = 196 \times 195 + 0$

$\because$ शेषफल $= 0$

$\therefore$ HCF $= 196$ Ans

(iii) 867 और 255

$$
\begin{array}{l}
255)\,867\,(3 \\
\quad\;\; 765 \\
\quad\;\; \overline{102)\,255\,(2} \\
\qquad\quad\;\; 204 \\
\qquad\quad\;\; \overline{\times 51)\,102\,(2} \\
\qquad\qquad\quad\;\; 102 \\
\qquad\qquad\quad\;\; \overline{\times\times}
\end{array}
$$

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$867 = 255 \times 3 + 102$

$255 = 102 \times 2 + 51$

$102 = 51 \times 2 + 0$

∵ शेषफल $= 0$

∴ HCF $= 51$ Ans

(3.) स्तंभो की अधिकतम संख्या = 616 और 32 का म०स०

$$
\begin{array}{l}
32)\,616\,(19 \\
\quad\;\; 32 \\
\quad\;\; \overline{296} \\
\quad\;\; 288 \\
\quad\;\; \overline{\times\times 8)\,32\,(4} \\
\qquad\quad\;\; 32 \\
\qquad\quad\;\; \overline{\times\times}
\end{array}
$$

∵ म०स० $= 8$

∴ स्तंभो की अधिकतम संख्या $= 8$ Ans

(2.) माना कि धनात्मक विषम पूर्णांक $= a$

$\therefore b = 6$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \le r < b$

$\Rightarrow a = 6q + r$ जहाँ $0 \le r < 6$

$\therefore r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

यदि $r = 0$

$a = 6q + 0 = 6q$

यदि $r = 1$

$a = 6q + 1$

यदि $r = 2$

$a = 6q + 2$

यदि $r = 3$

$a = 6q + 3$

यदि $r = 4$

$a = 6q + 4$

यदि $r = 5$

$a = 6q + 5$

$\because$ $6q, 6q+2, 6q+4$ एक धनात्मक सम पूर्णांक के रूप में है।

$\therefore$ $6q+1, 6q+3, 6q+5$ एक धनात्मक विषम पूर्णांक के रूप का होगा।

Ans

(5.) माना कि धनात्मक पूर्णांक $= a$

$\therefore b = 9$

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$ जहाँ $0 \leq r < b$

$\Rightarrow a = 9q + r$ जहाँ $0 \leq r < 9$

$\therefore r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

यदि $r = 0$

$a = 9q + 0 = 9q$

$a^3 = (9q)^3$

$= 729q^3$

$= 9(81q^3)$

$= 9m$ [$\because m = 81q^3$ एक पूर्णांक है]

यदि $r = 1$

$a = 9q + 1$

$a^3 = (9q+1)^3$

$= (9q)^3 + 1^3 + 3 \times 9q \times 1 (9q+1)$

$= 729q^3 + 1 + 243q^2 + 27q$

$= 729q^3 + 243q^2 + 27q + 1$

$= 9(81q^3 + 27q^2 + 3q) + 1$

$= 9m+1$ [$\because m = 81q^3 + 27q^2 + 3q$ एक पूर्णांक है]

यदि $r = 2$

$$a = 9q + 2$$

$$a^3 = (9q+2)^3$$

$$= (9q)^3 + 2^3 + 3 \times 9q \times 2\,(9q+2)$$

$$= 729q^3 + 8 + 486q^2 + 108q$$

$$= 729q^3 + 486q^2 + 108q + 8$$

$$= 9\left(81q^3 + 54q^2 + 12q\right) + 8$$

$= 9m + 8$ [$\because m = 81q^3 + 54q^2 + 12q$ एक पूर्णांक है]

$\therefore$ किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m, 9m+1, 9m+8$ के रूप में होगा।

सिद्ध