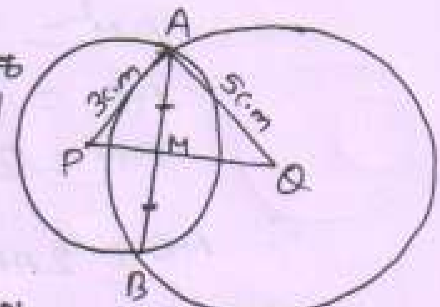
Exercise - 10.4

1.> **दिया है:-** वृत्त $C(P,3)$ और $C(Q,5)$ दो वृत्त परस्पर दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते है।

रचना :- PA और QA को मिलाया।
PM जीवा AB का समद्विभाजक खींचा।



$\therefore$ $PA = 3cm$
$QA = 5cm$
$PQ = 4cm$

$\because$ AB वृत्त $C(P,3)$ की जीवा है और
PM जीवा AB का समद्विभाजक है।

$\therefore PM \perp AB$ [केन्द्र से होकर जाने वाली और जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है]

अतः $\angle PMA = 90^\circ$

माना कि,
$PM = x$
$\therefore QM = 4 - x$

समकोण ΔAPM में,
$AM^2 = AP^2 - PM^2$ — ① [पाइथागोरस प्रमेय से]

समकोण ΔAQM में,
$AM^2 = AQ^2 - QM^2$ — ⑪ [पाइथागोरस प्रमेय से]

समी० ① तथा ⑪ से,

$AP^2 - PM^2 = AQ^2 - QM^2$

$\Rightarrow 3^2 - x^2 = 5^2 - (4-x)^2$

$\Rightarrow 9 - x^2 = 25 - (16 + x^2 - 8x)$

$\Rightarrow 9 - x^2 = 25 - 16 - x^2 + 8x$

$\Rightarrow 9 - \cancel{x^2} - 25 + 16 + \cancel{x^2} = 8x$

$\Rightarrow 25 - 25 = 8x$

$\Rightarrow 0 = 8x$

$\Rightarrow x = 0$

समी० ① से,

$$AM^2 = AP^2 - PM^2$$
$$AM^2 = 3^2 - x^2$$
$$AM^2 = 3^2 - 0^2$$
$$AM^2 = 9 - 0$$
$$AM^2 = 9$$
$$AM = \sqrt{9}$$
$$AM = 3$$

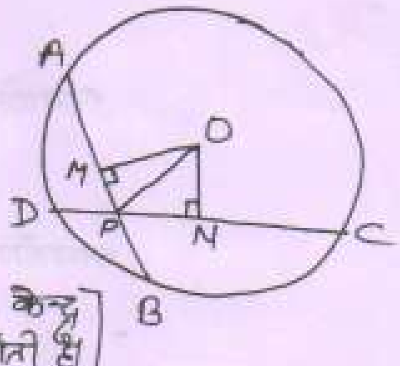
$\therefore\ AB = 2AM = 2 \times 3 = 6\ cm$ Ans

2.> दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD हैं जो एक-दुसरे को P बिन्दु पर काटती है।

सिद्ध करना है:- $AP = CP$
$BP = DP$

रचना:- OP को मिलाया तथा $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ खींचा।

प्रमाण:- ΔOMP और ΔONP में,



$\angle OMP = \angle ONP$ (90°)

$OP = OP$ [Common]

$OM = ON$ [वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती है]

$\therefore\ \Delta OMP \cong \Delta ONP$ [RHS सर्वांगसमता से]

$\therefore\ PM = PN$ — ① [CPCT]

और

$AB = CD$ — ②

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow\ AM = CN$ — ③ [वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है]

समी० (I) तथा (III) को जोड़ने पर

$$AM + PM = CN + PN$$

$$\Rightarrow AP = CP \quad — (IV)$$

सिद्ध

समी० (II) में से (IV) को घटाने पर

$$AB - AP = CD - CP$$

$$\Rightarrow BP = DP$$

इस प्रकार,

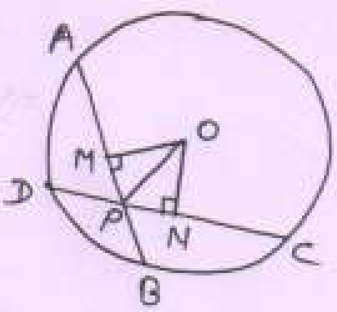
$$AP = CP$$
$$BP = DP$$

सिद्ध

3) दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD हैं जो एक-दुसरे को P बिन्दु पर काटती है।

सिद्ध करना है:- $\angle OPM = \angle OPN$

रचना:- OP को मिलाया तथा $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ बनाए।



प्रमाण:- ΔOMP और ΔONP में,

$\angle OMP = \angle ONP$ (90°)

$OP = OP$ [Common]

$OM = ON$ [वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती है]

$\therefore \Delta OMP \cong \Delta ONP$ [RHS सर्वांगसमता से]

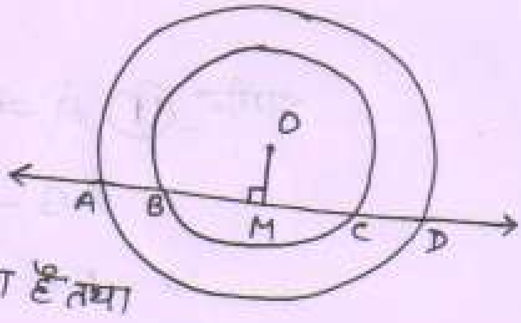
$\therefore \angle OPM = \angle OPN$ [CPCT]

सिद्ध

4) दिया है:- दो संकेन्द्री वृत्त जिसका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करते है।

सिद्ध करना है:- AB = CD

रचना :- OM ⊥ AD



प्रमाण :- ∵ BC अन्त: वृत्त की जीवा है तथा OM ⊥ BC है।

∴ BM = CM —(I) [∵ केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है]

इसी प्रकार,

∵ AD बाह्य वृत्त की जीवा है तथा OM ⊥ AD है।

∴ AM = DM —(II) [∵ केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।]

समी० (II) में से (I) को घटाने पर

AM − BM = DM − CM

⇒ AB = CD

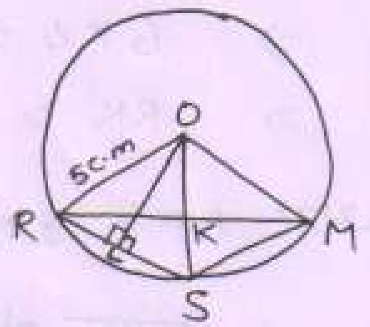
सिद्ध

5> <u>दिया है:-</u> O केन्द्र वाले वृत्त में,

रेशमा, सलमा और मनदीप को क्रमशः बिन्दु R, S और M द्वारा दिखाया गया है।

$RS = SM = 6\,cm$

$OR = OM = OS = 5\,cm$



<u>रचना:</u> OR, OS, RS, RM, OM को मिलाया तथा $OL \perp RS$ खींचा।

$\because OL \perp RS$

$\therefore RL = LS$ [केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।]

$\Rightarrow RL = LS = \frac{1}{2} RS = \frac{1}{2} \times 6 = 3\,cm$

समकोण ΔOLS में,

$OL = \sqrt{OS^2 - LS^2}$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= \sqrt{5^2 - 3^2}$

$= \sqrt{25-9}$

$= \sqrt{16}$

$\therefore OL = 4\,cm$

ΔORK तथा ΔOMK में,

$OR = OM$ (त्रिज्या)

$\angle ROK = \angle MOK$ [$\because$ समान जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण बनाती हैं]

$OK = OK$ [Common]

$\therefore \Delta ORK \cong \Delta OMK$ [SAS सर्वांगसमता से]

$\therefore RK = MK$ [CPCT]

अतः

$OK \perp RM$ [$\because$ केन्द्र से होकर जाने वाली और जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।]

ΔORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times RS \times OL$ —— (I)

फिर,

ΔORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OS \times RK$ —— (II)

समी० (I) तथा (II) से,

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \times RS \times OL = \frac{1}{2} \times OS \times RK$

$\Rightarrow \quad RS \times OL = OS \times RK$

$\Rightarrow \quad 6 \times 4 = 5 \times RK$

$\Rightarrow \quad RK = \frac{6 \times 4}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$ c.m

अतः $RM = 2RK = 2 \times 4.8 = 9.6$ c.m Ans

$\therefore$ रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी $= RM = 9.6$ c.m

Ans

6) <u>दिया है:-</u> O केन्द्र वाले वृत्ताकार पार्क में A, S और D क्रमशः अंकुर, सैय्यद तथा डेविड दर्शाते है।

अतः $AS = SD = AD$

वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या $= 20$ c.m

$\therefore \quad OA = OS = OD = 20$ c.m

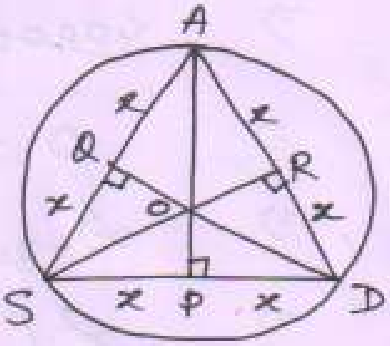
रचना:- $AP \perp SD$ बनाया।

माना कि $AS = SD = AD = 2x$ c.m

ΔASD में,

$AS = AD$ और $AP \perp SD$

$\therefore \quad SP = PD = x$ c.m



इसी प्रकार से,

$DR = RA = x$ c.m

$AQ = QS = x$ c.m

समकोण ΔOPD में,

$$OP = \sqrt{OD^2 - PD^2}$$

$$= \sqrt{(20)^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{400 - x^2}$$

अब, ΔAPD में,

$$AP^2 + PD^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow (AO + OP)^2 + x^2 = (2x)^2$$

$$\Rightarrow \left(20 + \sqrt{400 - x^2}\right)^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow (20)^2 + \left(\sqrt{400 - x^2}\right)^2 + 2 \times 20 \times \sqrt{400 - x^2} + x^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow 400 + 400 \cancel{- x^2} + 40\sqrt{400 - x^2} \cancel{+ x^2} = 4x^2$$

$$\Rightarrow 800 + 40\sqrt{400 - x^2} = 4x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{4}\left(200 + 10\sqrt{400 - x^2}\right) = \cancel{4}x^2$$

$\Rightarrow \quad 200 + 10\sqrt{400 - x^2} = x^2$

$\Rightarrow \quad 10\sqrt{400 - x^2} = x^2 - 200$

दोनो तरफ वर्ग करने पर

$\Rightarrow \quad \left(10\sqrt{400 - x^2}\right)^2 = (x^2 - 200)^2$

$\Rightarrow \quad 100(400 - x^2) = (x^2)^2 + (200)^2 - 2 \times x^2 \times 200$

$\Rightarrow \quad 40000 - 100x^2 = x^4 + 40000 - 400x^2$

$\Rightarrow \quad \cancel{40000} - \cancel{40000} = x^4 - 400x^2 + 100x^2$

$\Rightarrow \quad 0 = x^4 - 300x^2$

$\Rightarrow \quad x^4 - 300x^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2(x^2 - 300) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 = 0$ या $x^2 - 300 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0 \qquad \Rightarrow x^2 = 300$

$\Rightarrow x = \sqrt{300}$

$= \sqrt{3 \times 100}$

$= 10\sqrt{3}$.

अतः प्रत्येक कोन की डोरी की लम्बाई $= 2x$

$= 2 \times 10\sqrt{3}$

$= 20\sqrt{3}$ cm