Class - IX

अध्याय - 7
त्रिभुज (Triangles)

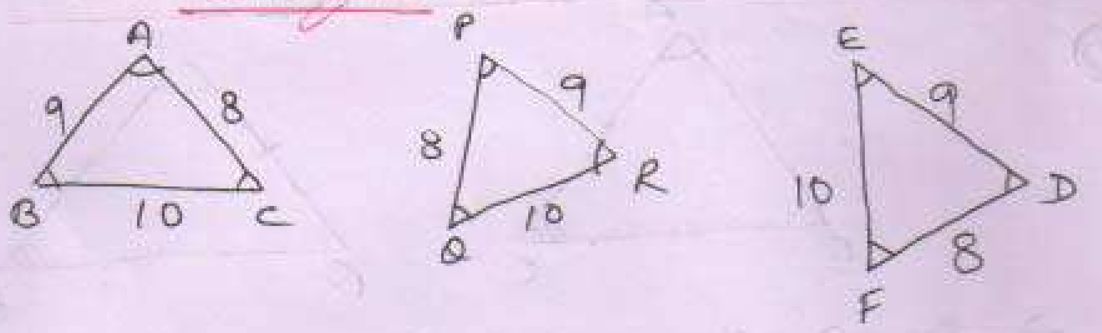
* आकृतियों की सर्वांगसमता (Congruence of Figures)

परिभाषा:- दो ज्यामितीय आकृतियों को सर्वांगसम कहते हैं यदि उनका आकार (shape) और माप (size) समान हो।

अर्थात्,

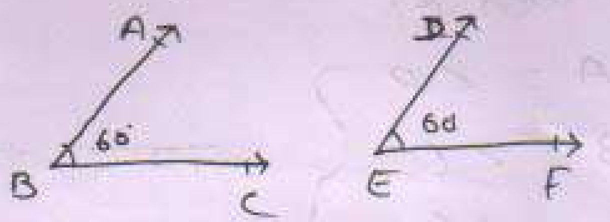
दो ज्यामितीय आकृतियाँ सर्वांगसम कहलायेंगी यदि एक आकृति को बिना झुकाये या मरोड़े दुसरे आकृति पर इस प्रकार रखा जा सके कि यह दुसरे आकृति को पूर्ण रूप से ठीक-ठीक ढँक ले।

उदाहरण:



* दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनकी लम्बाई बराबर हो।

* दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनके माप बराबर हो।

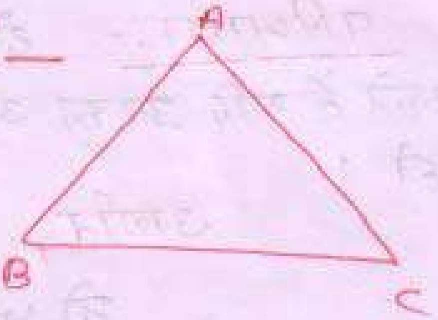


$\therefore \angle ABC = \angle DEF = 60^\circ$

* त्रिभुज :- तीन रेखाखण्डों को मिलने से जो आकृति बनती है उसे त्रिभुज कहते हैं।

(i) त्रिभुज की भुजाएँ —

AB
BC
AC



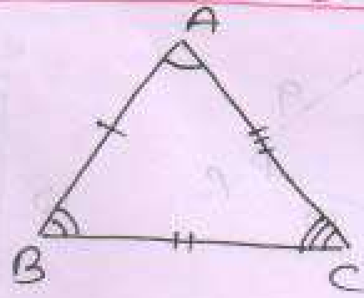
(ii) त्रिभुज के कोण —

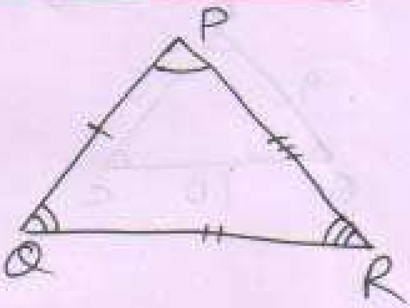
$\angle A = \angle BAC = \angle CAB$

$\angle B = \angle ABC = \angle CBA$

$\angle C = \angle ACB = \angle BCA$

* दो त्रिभुज में संगत भुजाएँ तथा संगत कोण।





(i) दो त्रिभुजो में समान कोणों की सम्मुख भुजाओ को संगत भुजा कहते हैं।

$$\left.\begin{array}{l} AB = PQ \\ BC = QR \\ AC = PR \end{array}\right\} \text{संगत भुजाएँ}$$

(ii) दो त्रिभुजों में समान भुजाओं के सम्मुख कोणों को संगत कोण कहते हैं

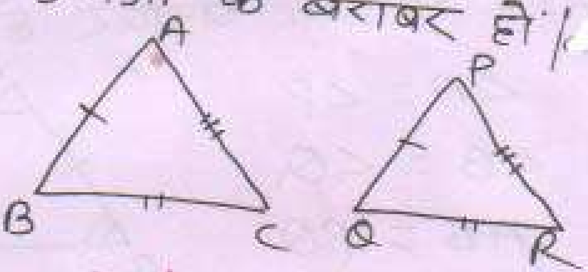
$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle P \\ \angle B = \angle Q \\ \angle C = \angle R \end{array}\right\} \text{संगत कोण}$$

* त्रिभुजों की सर्वांगसमता कसौटी :-

1. S-S-S [भुजा - भुजा - भुजा] → SSS
2. A-A-A [कोण - कोण - कोण] → AAA
3. S-A-S [भुजा - कोण - भुजा] → SAS
4. A-S-A [कोण - भुजा - कोण] - ASA
5. R.H.S [समकोण - कर्ण - भुजा] RHS

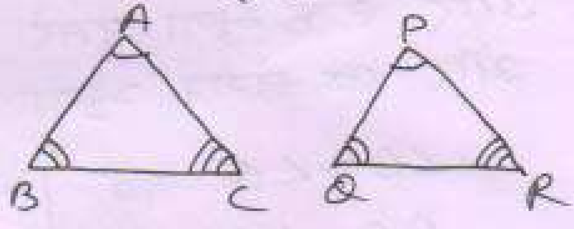
(1) S-S-S (भुजा - भुजा - भुजा) :- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की क्रमशः तीनों भुजाओं के बराबर हों।

$AB = PQ$
$BC = QR$
$AC = PR$



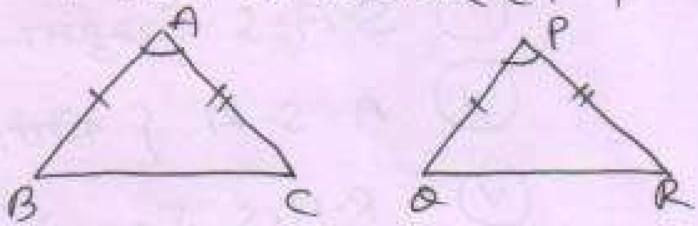
(11) A-A-A (कोण - कोण - कोण) :- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की तीनों कोण दूसरे त्रिभुज की क्रमशः तीनों कोणों के बराबर हों। -

$\angle A = \angle P$
$\angle B = \angle Q$
$\angle C = \angle R$



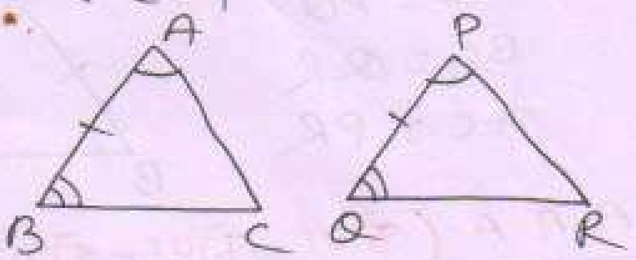
(iii) S-A-S (भुजा-कोण-भुजा):- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते है यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके अन्तर्गत बना कोण, दूसरे त्रिभुज की क्रमशः दोनो भुजाएँ तथा उनके अन्तर्गत बना कोण के बराबर हो ।

$AB = PQ$
$AC = PR$
$\angle A = \angle P$



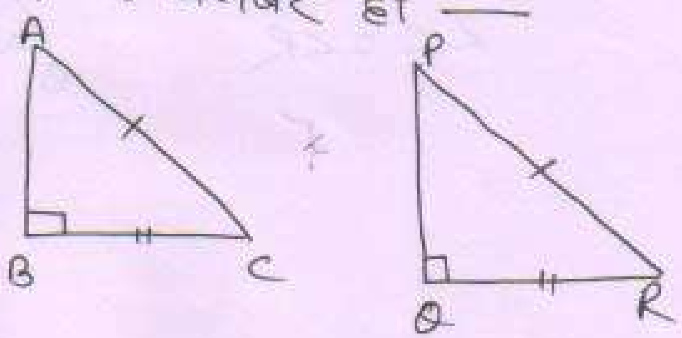
(iv) A-S-A (कोण-भुजा-कोण):- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते है यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अन्तर्गत भुजा क्रमशः दुसरे त्रिभुज के दो संगत कोणो और उनकी अन्तर्गत भुजा के बराबर हो ।

$\angle A = \angle P$
$\angle B = \angle Q$
$AB = PQ$



(v) R-H-S (समकोण-कर्ण-भुजा):- दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते है यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दुसरे समकोण त्रिभुज के क्रमशः कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो —

$\angle B = \angle Q = 90^\circ$
$AC = PR$
$BC = QR$



class-IX

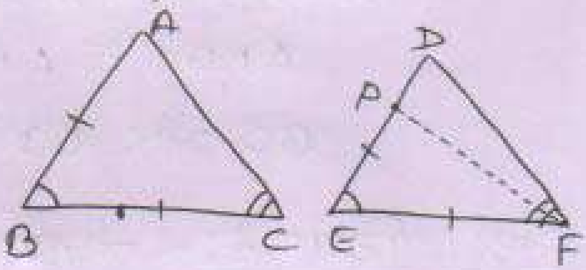
प्रमेय - 7.1 (A-S-A) :-

दिया है :- ΔABC और ΔDEF में,

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

$BC = EF$



सिद्ध करना है :- $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

प्रमाण :- यदि $AB < DE$ हो तो,

DE पर ऐसा बिन्दु P लेंगे ताकि $PE = AB$ हो तथा PF को मिलाया।

$\because$ ΔABC तथा ΔPEF में,

$AB = PE$

$BC = EF$

$\angle B = \angle E$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PEF$ [SAS]

$\therefore$ $\angle ACB = \angle PFE$ (C.P.C.T)

लेकिन

$\angle ACB = \angle DFE$

$\therefore$ $\angle PFE = \angle DFE$

यह तभी संभव है जब किरण FP किरण FD के संपाति हो अर्थात्

बिन्दु P, बिन्दु D के संपाति हो

$\therefore$ $AB = DE$

अब

ΔABC तथा ΔDEF में

$AB = DE$

$BC = EF$

$\angle B = \angle E$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ [SAS से]

Res

Ex:- 7.1

1) चतुर्भुज ACBD में, AC = AD है और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति में)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है।

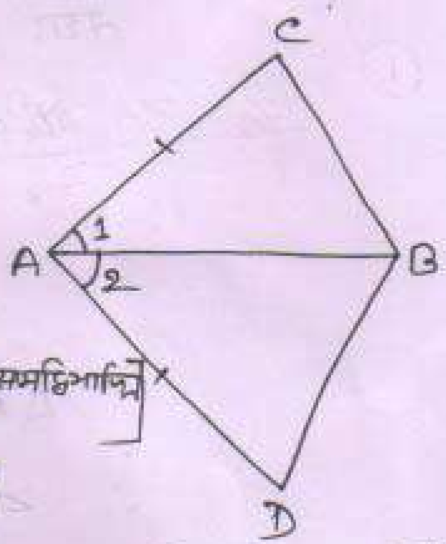
BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

Ans:- दिया है:- चतुर्भुज ACBD में,

$AC = AD$

AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \cong \Delta ABD$



प्रमाण:- ΔABC तथा ΔABD में,

$AC = AD$

$\angle 1 = \angle 2$ [AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।]

$AB = AB$ [Common]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ABD$ [SAS - सर्वांगसमता से]

$\therefore BC = BD$ [CPCT]

सिद्ध

2) ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AD = BC और $\angle DAB = \angle CBA$ है (देखिए आकृति)। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$

(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$

Ans:- दिया है:- ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें

$AD = BC$

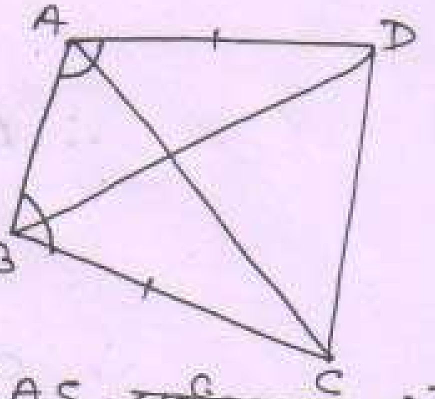
$\angle DAB = \angle CBA$

सिद्ध करना है:- (i) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$

(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$

प्रमाण:- (i) $\triangle ABD$ तथा $\triangle BAC$ में,



$AD = BC$

$\angle DAB = \angle CBA$

$AB = AB$ [Common]

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC$ [SAS - सर्वांगसमता से]

सिद्ध

(ii) $\because \triangle ABD \cong \triangle BAC$

$\therefore BD = AC$ [CPCT]

सिद्ध

(iii) $\because \triangle ABD \cong \triangle BAC$

$\therefore \angle ABD = \angle BAC$ [CPCT]

सिद्ध

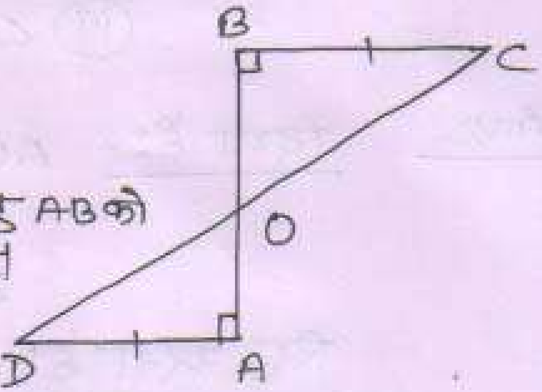
(3) एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लम्ब रेखाखंड हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।

Ans:- दिया है:- $AD \perp AB$

$BC \perp AB$

$BC = AD$

सिद्ध करना है:- CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



प्रमाण:- ΔBOC तथा ΔAOD में,

$BC = AD$

$\angle B = \angle A \ (90^\circ)$

$\angle BOC = \angle AOD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \Delta BOC \cong \Delta AOD$ [AAS - सर्वांगसमता से]

$\therefore BO = AO$ [CPCT]

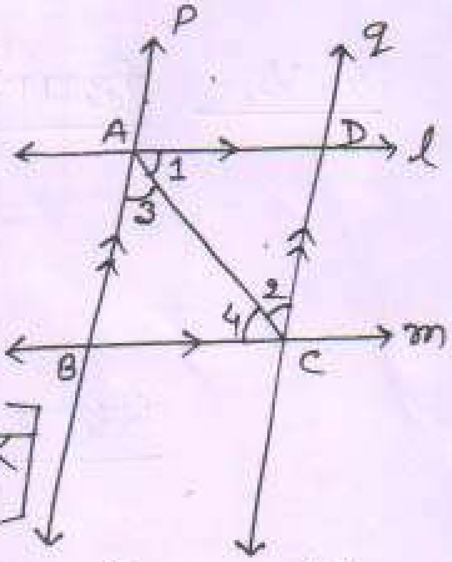
$\therefore$ CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध

4). l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हे समान्तर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है। (देखिए आकृति) दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है।

Ans:- दिया है:- $l \parallel m$
$p \parallel q$

सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



प्रमाण:- ∵ $l \parallel m$ तथा AB एक तिर्यक रेखा है

∴ $\angle 4 = \angle 1$ — (I) [एकान्तर कोण]

फिर,

∵ $p \parallel q$ तथा AB एक तिर्यक रेखा है

∴ $\angle 3 = \angle 2$ — (II) [एकान्तर कोण]

अब,

ΔABC तथा ΔCDA में,

$\angle 4 = \angle 1$ (समीo (I) से)

$\angle 3 = \angle 2$ (समीo (II) से)

$AC = AC$ [Common]

∴ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ [ASA-सर्वांगसमता से]

सिद्ध

5) रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब है। दर्शाइए कि

(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

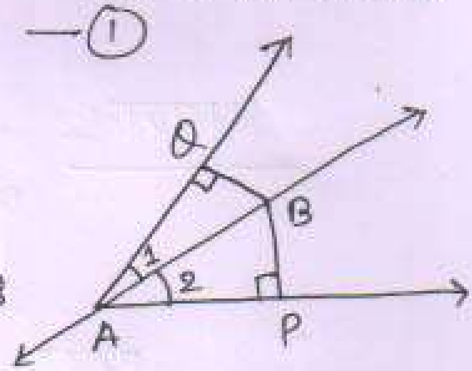
(ii) $BP = BQ$ है, अर्थात बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है।

Ans:- दिया है:- रेखा l, $\angle A$ को समद्विभाजित करती है।

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ — (1)

$BP \perp AP$

$BQ \perp AQ$



सिद्ध करना है:- (i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$

प्रमाण:- (i) ΔAPB तथा ΔAQB में,

$\angle 2 = \angle 1$ (समी० (1) से)

$\angle APB = \angle AQB$ $(90°)$

$AB = AB$ (Common)

$\therefore \Delta APB \cong \Delta AQB$ (AAS-सर्वांगसमता से)

सिद्ध

(ii) $\because \Delta APB \cong \Delta AQB$

$\therefore BP = BQ$ (CPCT)

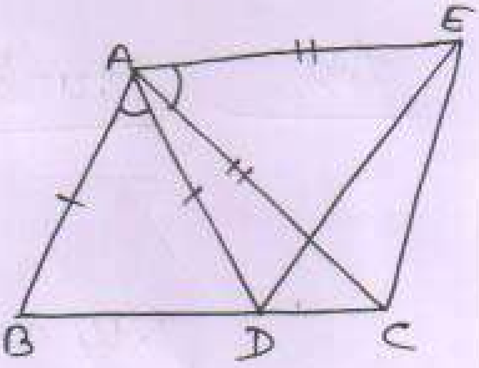
सिद्ध

6> आकृति में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$

Ans:- दिया है:- $AC = AE$

$AB = AD$

$\angle BAD = \angle EAC$



सिद्ध करना है:- $BC = DE$

प्रमाण:- $\because \angle BAD = \angle EAC$

दोनों तरफ $\angle DAC$ जोड़ने पर

$\Rightarrow \angle BAD + \angle DAC = \angle EAC + \angle DAC$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle DAE$ —— (1)

अब,

ΔABC तथा ΔADE में,

$AB = AD$

$AC = AE$

$\angle BAC = \angle DAE$ (समी० (1) से)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADE$ [SAS-सर्वांगसमता से]

$\therefore BC = DE$ (CPCT)

सिद्ध

7) AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है। D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार है कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ दर्शाइए कि (i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$
(ii) $AD = BE$

Ans:

<u>दिया है:-</u> P, रेखाखंड AB का मध्य-बिन्दु है।

$\angle BAD = \angle ABE$

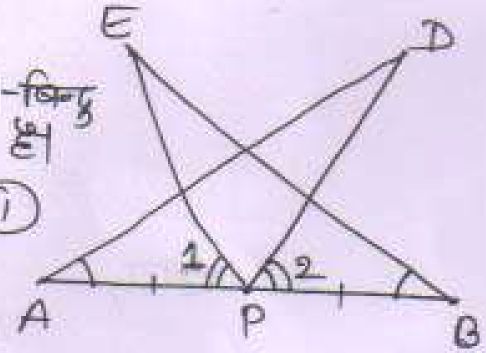
$\angle EPA = \angle DPB$

<u>सिद्ध करना है:-</u> (i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) $AD = BE$

<u>प्रमाण:-</u> $\because$ P, AB का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore AP = BP$ —(i)



फिर,

$\angle EPA = \angle DPB$

दोनों तरफ $\angle EPD$ जोड़ने पर

$\Rightarrow \angle EPA + \angle EPD = \angle DPB + \angle EPD$

$\Rightarrow \angle APD = \angle BPE$ —(ii)

अब,

ΔDAP तथा ΔEBP में,

$AP = BP$ (समी० (i) से)

$\angle APD = \angle BPE$ (समी० (ii) से)

$\angle BAD = \angle ABE$

$\therefore \Delta DAP \cong \Delta EBP$ (ASA-सर्वांगसमता से)

$\therefore AD = BE$ (CPCT)

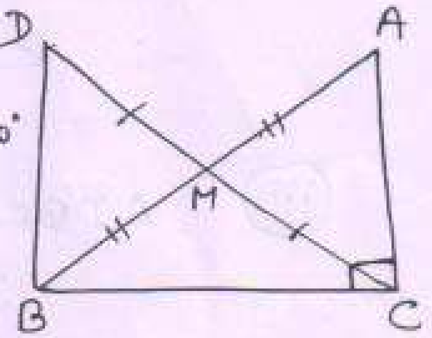
8) एक समकोण ΔABC में, जिसमें $\angle C$ समकोण है, M, कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $DM = CM$ है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है। दर्शाइए कि

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ एक समकोण है

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



Ans:- **दिया है:-** समकोण ΔABC में, $\angle C = 90°$

M, कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है।

$DM = CM$

सिद्ध करना है:- (i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ एक समकोण है।

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

प्रमाण:- (i) ΔAMC तथा ΔBMD में,

$AM = BM$ [M, AB का मध्य-बिन्दु है]

$CM = DM$

$\angle AMC = \angle BMD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \Delta AMC \cong \Delta BMD$ [SAS-सर्वांगसमता]

सिद्ध

$\because \Delta AMC \cong \Delta BMD$

$\therefore AC = DB$ —(1) [CPCT]

और $\angle CAM = \angle DBM$ —(ii) [CPCT]

दोनो तरफ $\angle MBC$ जोड़ने पर

$\Rightarrow \angle CAM + \angle MBC = \angle DBM + \angle MBC$

$\Rightarrow \angle CAB + \angle ABC = \angle DBC$

$\Rightarrow 180^\circ - \angle C = \angle DBC$ $[\angle CAB + \angle ABC + \angle C = 180^\circ]$

$\Rightarrow 180^\circ - 90^\circ = \angle DBC$

$\Rightarrow 90^\circ = \angle DBC$

$\therefore$ $\angle DBC$ एक समकोण है

सिद्ध

(iii) ΔDBC तथा ΔACB में,

$DB = AC$ (समी० ① से)

$\angle DBC = \angle ACB$ (90°)

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ [SAS - सर्वांगसमता से]

सिद्ध

$\because$ $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

$\therefore$ $DC = AB$ [CPCT]

(iv) $\because$ $DC = AB$

$\Rightarrow DM + CM = AB$

$\Rightarrow CM + CM = AB$ $[DM = CM]$

$\Rightarrow 2CM = AB$

$\Rightarrow CM = \frac{1}{2} AB$

सिद्ध