

त्रिकोणमितिTrigonometry

* त्रिकोणमिति (Trigonometry) →

त्रिकोणमिति ~~के~~ शब्द ग्रीक भाषा के तीन शब्द —

① Tri + gonia + metron → Trigonometry

Tri का अर्थ है — तीन

gonia का अर्थ है — कोण

metron का अर्थ है — माप

इस तरह,

त्रिकोणमिति का शाब्दिक अर्थ — तीन कोणों की माप

⇒ त्रिकोणमिति में त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है।

⇒ त्रिकोणमिति में भुजाओं के अनुपात एवं कोणों के सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है। ये अनुपात त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाते हैं।

⇒ ग्रीक गणितज्ञ हिपारकस (140 B.C) ने सर्वप्रथम त्रिभुज के कोणों के सम्बन्ध उसकी भुजाओं के साथ स्थापित किया था।

⇒ त्रिकोणमिति ^{सदैव} समकोण त्रिभुज से संबंधित बताया जाता है।

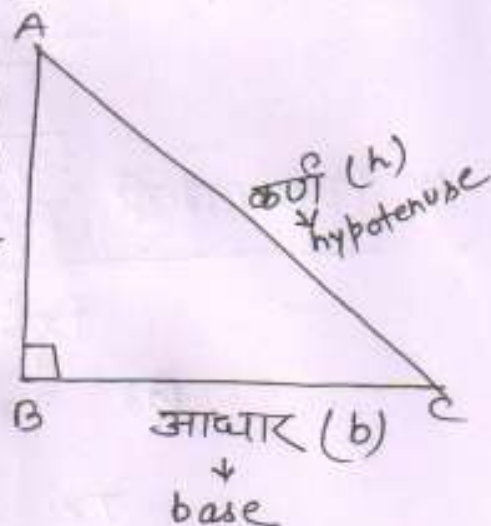
* एक समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90^\circ$

→ समकोण त्रिभुज में एक कोण समकोण (90°) होता है तथा शेष दो कोण न्यूनकोण होते हैं।

→ समकोण (90°) के सामने की भुजा कर्ण (h) कहलाता है।

भुज (p)
↓
Perpendicular

→ शेष दोनों भुजाओं को भुज (p) और आधार (b) से जाना जाता है।



→ एक न्यूनकोण (θ) के सामने की भुजा को भुज (p) कहा जाता है।

→ एक न्यूनकोण (θ) जिस भुजा पर स्थित है उसे आधार (b) माना जाता है।

* त्रिकोणमितीय अनुपात छः प्रकार का होता है—

(i) $\sin \theta$ का उलटा $\csc \theta$ है।

(ii) $\cos \theta$ का उलटा $\sec \theta$ है।

(iii) $\tan \theta$ का उलटा $\cot \theta$ है।

* $\sin \rightarrow$ Sine

$\cos \rightarrow$ cosine

$\tan \rightarrow$ tangent

$\csc \rightarrow$ cosecant

$\sec \rightarrow$ secant

$\cot \rightarrow$ cotangent

* $\sin A \rightarrow$ sin और A का गुणनफल नहीं होता है।

* सूत्र (Formula):-

3

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{p}{h} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \\ \cos \theta &= \frac{b}{h} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \\ \tan \theta &= \frac{p}{b} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \\ \cot \theta &= \frac{b}{p} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} \\ \sec \theta &= \frac{h}{b} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \\ \operatorname{cosec} \theta &= \frac{h}{p} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} \quad \text{या} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sec \theta} \quad \text{या} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \\ \tan \theta &= \frac{1}{\cot \theta} \quad \text{या} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

\therefore

$$\sin \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

(4)

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\bullet \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{1 + \cot^2 \theta}$$

$$\cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1$$

$$\cot \theta = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}$$

\Rightarrow Important point:-

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

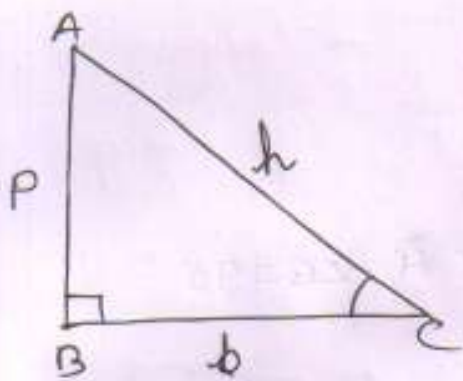
$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

\Rightarrow कुछ संकेत (Some Symbols)

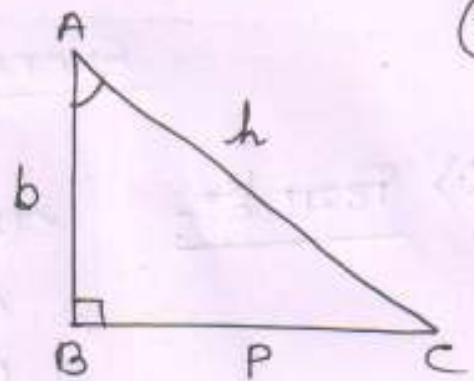
$$(\sin A)^2 = \sin^2 A \quad \text{लिखा जाता है}$$

$$(\sin A)^3 = \sin^3 A \quad \text{लिखा जाता है}$$

$$(\sin A)^{-1} = \frac{1}{\sin A} \quad \text{लिखा जाता है}$$



या



(5)

* समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle B = 90^\circ$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$h^2 = p^2 + b^2$$

$$\therefore h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

और,

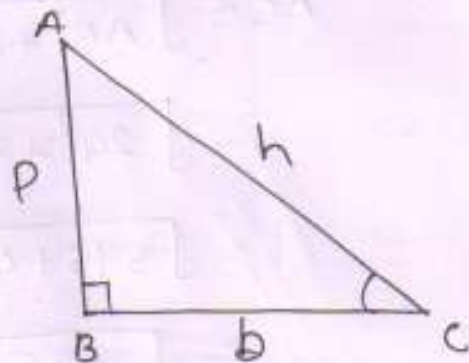
$$p^2 = h^2 - b^2$$

$$\therefore p = \sqrt{h^2 - b^2}$$

और

$$b^2 = h^2 - p^2$$

$$\therefore b = \sqrt{h^2 - p^2}$$



*

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

Exercise - 8.1

(6)

1) दिया है:-

समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle B = 90^\circ$

$$AB = 24 \text{ cm}$$

$$BC = 7 \text{ cm}$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

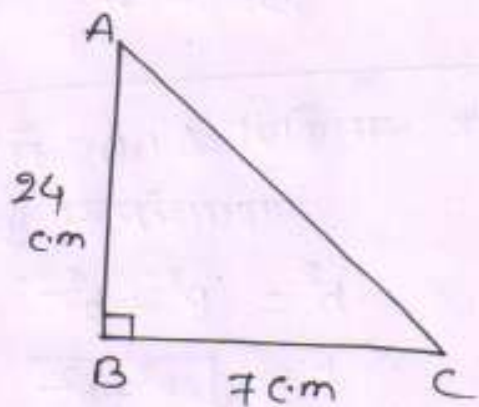
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{24^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{576 + 49}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$= 25 \text{ cm}$$



$$(i) \sin A = \frac{P}{h} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25} \underline{A}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25} \underline{A}$$

$$(ii) \sin C = \frac{P}{h} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25} \underline{A}$$

$$\cos C = \frac{b}{h} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25} \underline{A}$$

2.) समकोण ΔPQR में, $\angle Q = 90^\circ$

$$PQ = 12 \text{ cm}$$

$$PR = 13 \text{ cm}$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$= \sqrt{169 - 144}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$\therefore QR = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore \tan P = \frac{p}{b} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

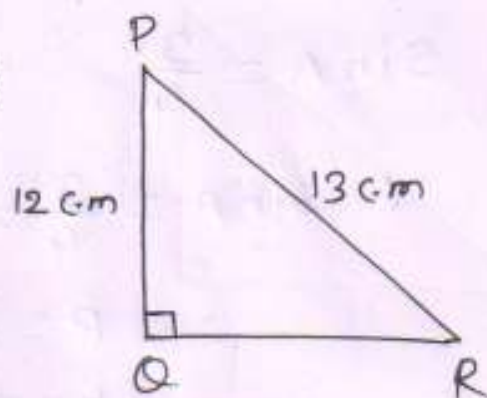
$$\cot R = \frac{b}{p} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12}$$

$$= \frac{5 - 5}{12}$$

$$= \frac{0}{12}$$

$$= 0$$



$$3) \sin A = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin A = \frac{3}{4} = \frac{P}{h}$$

$$\therefore P = 3$$

$$h = 4$$

$$\therefore b = \sqrt{h^2 - p^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{16 - 9}$$

$$= \sqrt{7}$$

$$\therefore \cos A = \frac{b}{h} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \underline{\star}$$

$$\tan A = \frac{P}{b} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad \underline{\star}$$

$$4) 15 \cot A = 8$$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{8}{15} = \frac{b}{P}$$

$$\therefore b = 8$$

$$P = 15$$

$$\therefore h = \sqrt{P^2 + b^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{225 + 64}$$

$$= \sqrt{289}$$

$$= 17$$

$$\therefore \sin A = \frac{P}{h} = \frac{15}{17} \quad \underline{\star}$$

$$\sec A = \frac{h}{b} = \frac{17}{8} \quad \underline{\star}$$

$$5) \sec \theta = \frac{13}{12}$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{13}{12} = \frac{h}{b}$$

$$\therefore h = 13$$

$$b = 12$$

$$\therefore P = \sqrt{h^2 - b^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$= \sqrt{169 - 144}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$\therefore P = 5$$

$$\sin \theta = \frac{P}{h} = \frac{5}{13} \quad \underline{\text{A}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{h} = \frac{12}{13} \quad \underline{\text{A}}$$

$$\tan \theta = \frac{P}{b} = \frac{5}{12} \quad \underline{\text{A}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{h}{P} = \frac{13}{5} \quad \underline{\text{A}}$$

$$\cot \theta = \frac{b}{P} = \frac{12}{5} \quad \underline{\text{A}}$$

दिया है:-

(10)

- 6) समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$
तथा $\angle A$ और $\angle B$ न्यूनकोण हैं।

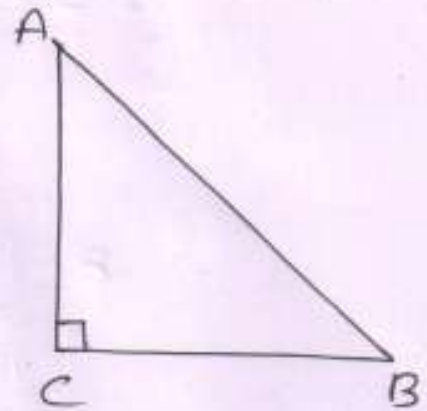
$$\cos A = \cos B$$

सिद्ध करना है:- $\angle A = \angle B$

प्रमाण:- $\cos A = \frac{b}{h} = \frac{AC}{AB}$

और

$$\cos B = \frac{b}{h} = \frac{BC}{AB}$$



लेकिन,

$$\cos A = \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$$

दोनों तरफ तुलना करने पर,

$$AC = BC$$

$\therefore \triangle ABC$ में,

$$AC = BC$$

$\therefore \angle B = \angle A$ [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं]

$$\therefore \angle A = \angle B$$

सिद्ध

$$(7) \therefore \cot \theta = \frac{7}{8} = \frac{b}{p}$$

$$\therefore b = 7$$

$$p = 8$$

$$\therefore h = \sqrt{p^2 + b^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{8^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{64 + 49}$$

$$h = \sqrt{113}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{p}{h} = \frac{8}{\sqrt{113}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{h} = \frac{7}{\sqrt{113}}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \left(\frac{7}{\sqrt{113}} \right)^2 \\ &= \frac{\left(\frac{8}{\sqrt{113}} \right)^2}{\left(\frac{7}{\sqrt{113}} \right)^2} \\ &= \frac{\frac{49}{113}}{\frac{64}{113}} \\ &= \frac{49}{113} \times \frac{113}{64} \\ &= \frac{49}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } \cot^2 \theta &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 &= \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\frac{7}{\sqrt{13}}}{\frac{8}{\sqrt{13}}} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{7}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{8} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{7}{8} \right)^2 \\
 &= \frac{49}{64}
 \end{aligned}$$

$$87 \quad 3 \cot A = 4$$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3} = \frac{b}{p}$$

$$\therefore b = 4$$

$$p = 3$$

$$\therefore h = \sqrt{p^2 + b^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$\therefore \tan A = \frac{p}{b} = \frac{3}{4}$$

$$\sin A = \frac{p}{h} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{4}{5}$$

L.H.S,

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} &= \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\
 &= \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} \\
 &= \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} \\
 &= \frac{7}{16} \times \frac{16}{25} \\
 &= \frac{7}{25}
 \end{aligned}$$

R.H.S,

$$\begin{aligned}
 \cos^2 A - \sin^2 A &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\
 &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\
 &= \frac{16-9}{25} \\
 &= \frac{7}{25}
 \end{aligned}$$

 $\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$ Proved

(9) समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle B = 90^\circ$

$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \tan A = \frac{p}{b} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore BC = 1$$

$$AB = \sqrt{3}$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \quad [\text{पाइथागोरस प्रमेय से}]$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{3+1}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$\therefore AC = 2$$

$$\sin A = \frac{p}{h} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin C = \frac{p}{h} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos C = \frac{b}{h} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$(i) \sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1+3}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

$$(ii) \cos A \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= 0$$

10) समकोण ΔPQR में, $\angle Q = 90^\circ$

15

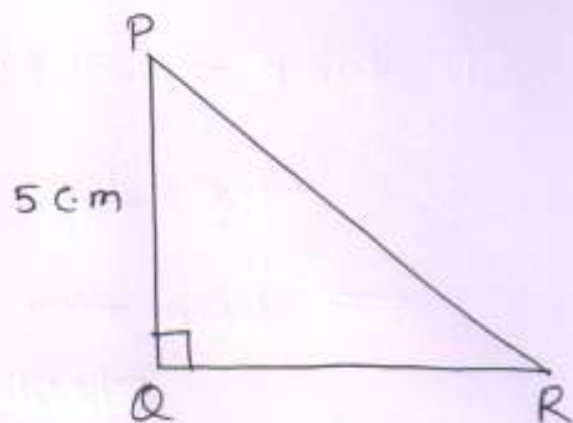
$$PR + QR = 25 \text{ cm}$$

$$PQ = 5 \text{ cm}$$

$$\sin P = ?$$

$$\cos P = ?$$

$$\tan P = ?$$



माना कि $PR = x \text{ cm}$

$$QR = (25 - x) \text{ cm}$$

\therefore पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 5^2 + (25 - x)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} = 25 + (25)^2 + \cancel{x^2} - 50x$$

$$\Rightarrow 0 = 25 + 625 - 50x$$

$$\Rightarrow 50x = 650$$

$$\Rightarrow x = \frac{650}{50}$$

$$x = 13 \text{ cm}$$

$$\therefore PR = x = 13 \text{ cm}$$

$$QR = 25 - x$$

$$= 25 - 13$$

$$= 12 \text{ cm}$$

$$\therefore \sin P = \frac{p}{h} = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{b}{h} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{p}{b} = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

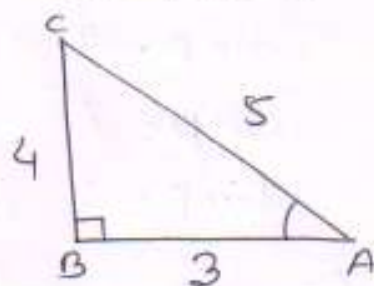
11) बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। (16)
कारण सहित उत्तर की पुष्टि कीजिए —

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

इसमें $\tan A$ मान 1 से अधिक है।

\therefore असत्य



(ii) $\sec A = \frac{12}{5}$, A के कुछ मानों के लिये।

$$\therefore \sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{12}{5}$$

\therefore कर्ण हमेशा आधार से बड़ा होता है

\therefore सत्य

(iii) $\cos A$, $\angle A$ के cosecant के लिए संकेत है।

असत्य है क्योंकि $\cos A$, $\angle A$ के cosine के लिए संकेत है।

(iv) $\cot A$, \cot और A का गुणनफल होता है।

असत्य है क्योंकि $\cot A$ एक संकेत है। यह \cot और A का गुणनफल नहीं है।

(v) $\sin \theta = \frac{4}{3}$ किसी कोण θ के लिए

असत्य है, क्योंकि कर्ण, लम्ब से है।

A