

(1)

निर्देशांक ज्यामिति → CHAPTER (7)
Co-ordinate Geometry

* निर्देशांक ज्यामिति को परिभाषित करें ?

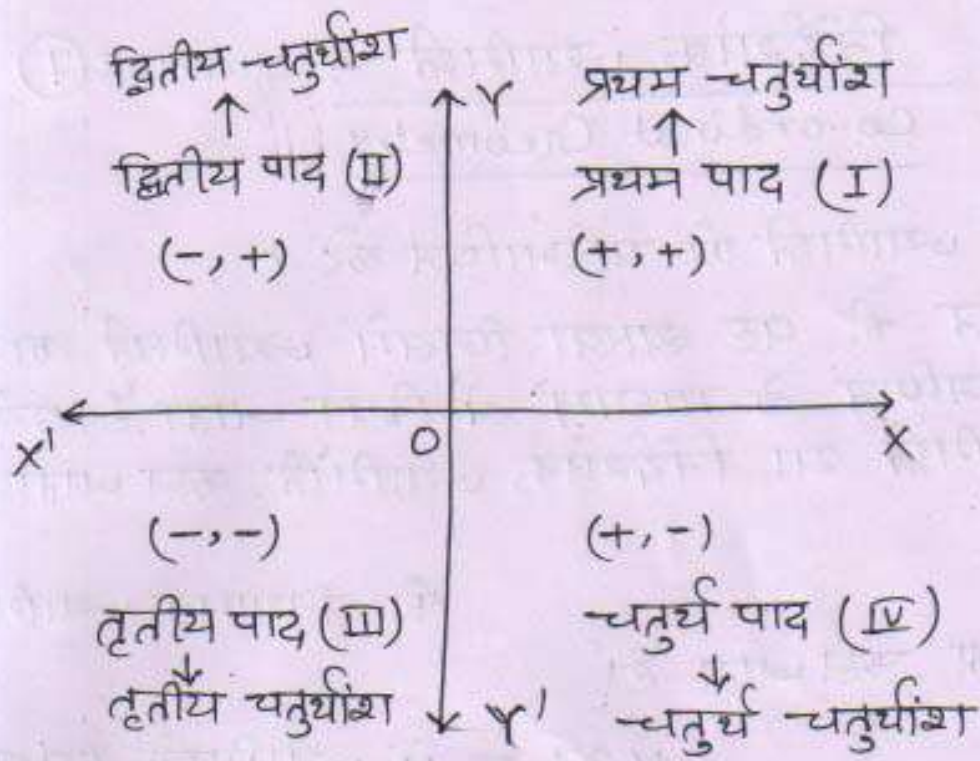
Ans:- गणित की वह शाखा जिसमें ज्यामिति का अध्ययन बीजगणित के माध्यम से किया जाता है। उसे नियामक ज्यामिति या निर्देशांक ज्यामिति कहा जाता है।

को नियामक ज्यामिति का पिता कहा जाता है।

1637 ई. में ज्यामिति एवं बीजगणित के बीच संबंध स्थापित किया गया। जिसे डेकार्टेजियन ज्यामिति कहा जाता है। इसके बाद में निर्देशांक ज्यामिति कहा गया।

उपयोग:- भौतिकी, इंजीनियरिंग, समुद्री परिवहन, भूकम्प शास्त्र, एवं कला के क्षेत्र में उपयोग किया जाता है।

(0,0)	0	+	निम्न
(0,0)	+	+	उच्च
(0,0)	+	-	निम्न
(0,0)	-	-	उच्च
(0,0)	-	+	निम्न



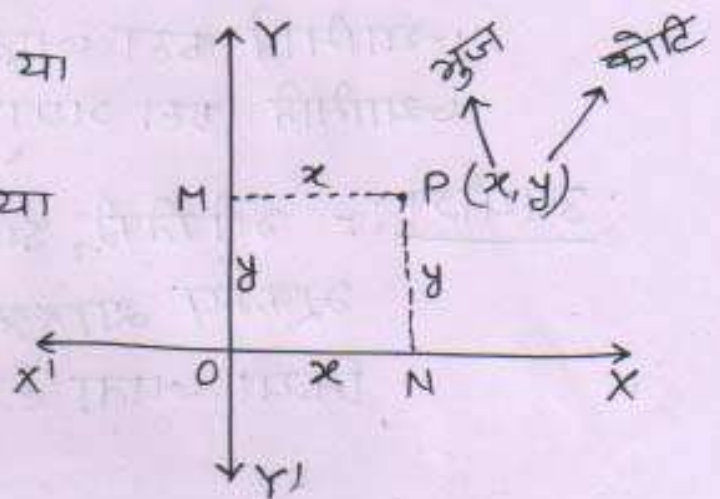
* कार्तीय नियामक पद्धति :-

\Rightarrow x को P का x -नियामक या भुज कहा जाता है।

\Rightarrow y को P का y -नियामक या कोटि कहा जाता है।

$\Rightarrow x = x$ -अक्ष पर की दूरी

$\Rightarrow y = y$ -अक्ष पर की दूरी



\Rightarrow मूल-बिन्दु का नियामक $(0, 0)$ होता है।

\Rightarrow x -अक्ष पर के किसी बिन्दु का नियामक $(x, 0)$ होता है।

\Rightarrow y -अक्ष पर के किसी बिन्दु का नियामक $(0, y)$ होता है।

बिन्दु की स्थिति	x	y	(x, y)
प्रथम चतुर्थांश	+	+	$(+, +)$
द्वितीय चतुर्थांश	-	+	$(-, +)$
तृतीय चतुर्थांश	-	-	$(-, -)$
चतुर्थ चतुर्थांश	+	-	$(+, -)$

* नियम :-

- (i) क्षैतिज रेखा को x -अक्ष तथा उदग्र रेखा को y -अक्ष कहते हैं।
- (ii) निर्देशांक अक्षों के कटान बिन्दु को मूलबिन्दु कहते हैं।
- (iii) किसी बिन्दु को y -अक्ष से दूरी उस बिन्दु का x -निर्देशांक या भुज कहते हैं।
- (iv) किसी बिन्दु को x -अक्ष से दूरी उस बिन्दु का y -निर्देशांक या कोटि कहते हैं।
- (v) x -अक्ष पर किसी बिन्दु का निर्देशांक $(x, 0)$ होता है।
- (vi) y -अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु का निर्देशांक $(0, y)$ होता है।
- (vii) मूल-बिन्दु का निर्देशांक $(0, 0)$ होता है।
- (viii) x -अक्ष पर स्थित सभी बिन्दुओं के y -निर्देशांक 0 होते हैं।
- (ix) y -अक्ष पर स्थित सभी बिन्दुओं के x -निर्देशांक 0 होते हैं।

0 A

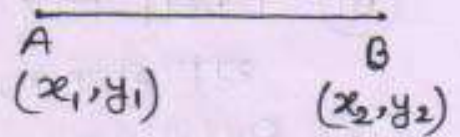
0A = OA

* दूरी-सूत्र (Distance formula)

माना कि A तथा B दो बिन्दु हैं जिनके निर्देशांक

$$A = (x_1, y_1)$$

$$B = (x_2, y_2)$$



$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

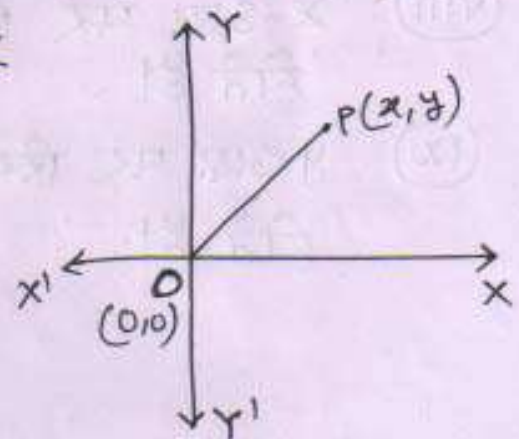
या

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

\Rightarrow मूल-बिन्दु $(0, 0)$ से बिन्दु $P(x, y)$ की दूरी $= OP$

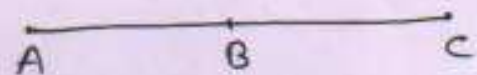
$$\therefore OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$



\Rightarrow तीन बिन्दु A, B, C संरेखी होंगे यदि सबसे बड़ा, शेष दोनों के योग के बराबर हो।

$$\therefore \boxed{AC = AB + BC}$$



Note:-

5

- ① एक त्रिभुज समबाहु होगा यदि और केवल यदि इसकी सभी भुजाएँ समान हों।
- ② एक त्रिभुज समद्विबाहु होगा यदि उसकी दो भुजाएँ आपस में बराबर हों।
- ③ यदि एक त्रिभुज की दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।
- ④ चतुर्भुज ABCD एक समचतुर्भुज होगा यदि $AB=BC=CD=AD$
- ⑤ चतुर्भुज ABCD एक वर्ग होगा यदि $AB=BC=CD=AD$ तथा विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD
- ⑥ चतुर्भुज ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज होगा यदि उसकी सम्मुख भुजाएँ आपस में समान हों परन्तु विकर्णों की भंडाई समान न हो।
अर्थात् , $AB=CD$
 $BC=AD$
विकर्ण $AC \neq$ विकर्ण BD
- ⑦ ABCD एक आयत होगा यदि चारों भुजाएँ बराबर हों तथा विकर्ण भी आपस में बराबर हों।
अर्थात् , $AB=BC=CD=AD$
विकर्ण $AC =$ विकर्ण BD

Exercise - 7.1

(6)

(1) बिन्दुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए:-

(i) $(2, 3), (4, 1)$

माना कि,

$$A = (2, 3)$$

$$B = (4, 1)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{4+4}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ Ans.}$$

(ii) $(-5, 7), (-1, 3)$

माना कि,

$$A = (-5, 7)$$

$$B = (-1, 3)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + (7-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-5+1)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ Ans.}$$

(iii)

 $(a, b), (-a, -b)$

(7)

माना कि,

$$A = (a, b)$$

$$B = (-a, -b)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{[a - (-a)]^2 + [b - (-b)]^2}$$

$$= \sqrt{(a+a)^2 + (b+b)^2}$$

$$= \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2}$$

$$= \sqrt{4(a^2 + b^2)}$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2} \text{ Ans}$$

<2> माना कि,

$$A = (0, 0)$$

$$B = (36, 15)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(36-0)^2 + (15-0)^2}$$

$$= \sqrt{(36)^2 + (15)^2}$$

$$= \sqrt{1296 + 225}$$

$$= \sqrt{1521}$$

$$= 39 \text{ Ans}$$

(3) माना कि,

$$A = (1, 5)$$

$$B = (2, 3)$$

$$C = (-2, -11)$$

दूरी सूत्र से,

$$\begin{array}{ccc} \overline{A} & \overline{B} & \overline{C} \\ (1, 5) & (2, 3) & (-2, -11) \end{array}$$

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{1+4}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [3-(-11)]^2}$$

$$= \sqrt{(2+2)^2 + (3+11)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 14^2}$$

$$= \sqrt{16+196}$$

$$= \sqrt{212}$$

$$= 2\sqrt{53}$$

$$AC = \sqrt{[1-(-2)]^2 + [5-(-11)]^2}$$

$$= \sqrt{(1+2)^2 + (5+11)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (16)^2}$$

$$= \sqrt{9+256}$$

$$= \sqrt{265}$$

$$= 5\sqrt{53}$$

$$\therefore AB + BC \neq AC$$

\therefore बिन्दु A, B, C संरेखी नहीं हैं।
सिद्ध

(4) माना कि $\triangle ABC$ के तीन शीर्ष A, B, C हैं

(9)

$$\therefore A = (5, -2)$$

$$B = (6, 4)$$

$$C = (7, -2)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(5-6)^2 + (-2-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{1+36}$$

$$= \sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{(6-7)^2 + [4-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{1+6^2}$$

$$= \sqrt{1+36}$$

$$= \sqrt{37}$$

$$AC = \sqrt{(5-7)^2 + [-2-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2+2)^2}$$

$$= \sqrt{4+0^2}$$

$$= \sqrt{4+0}$$

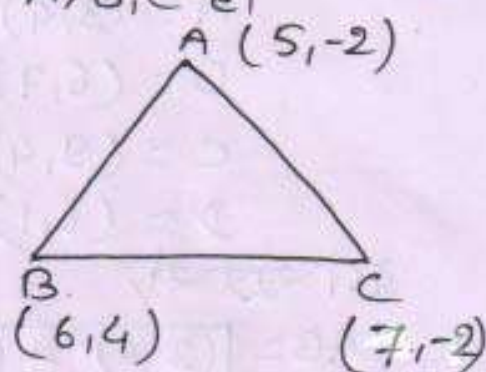
$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

$$\therefore AB = BC = \sqrt{37}$$

$\therefore \triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है

सिद्ध



(5) चित्र से स्पष्ट है कि

$$A = (3, 4)$$

$$B = (6, 7)$$

$$C = (9, 4)$$

$$D = (6, 1)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(3-6)^2 + (4-7)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(6-9)^2 + (7-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(9-6)^2 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

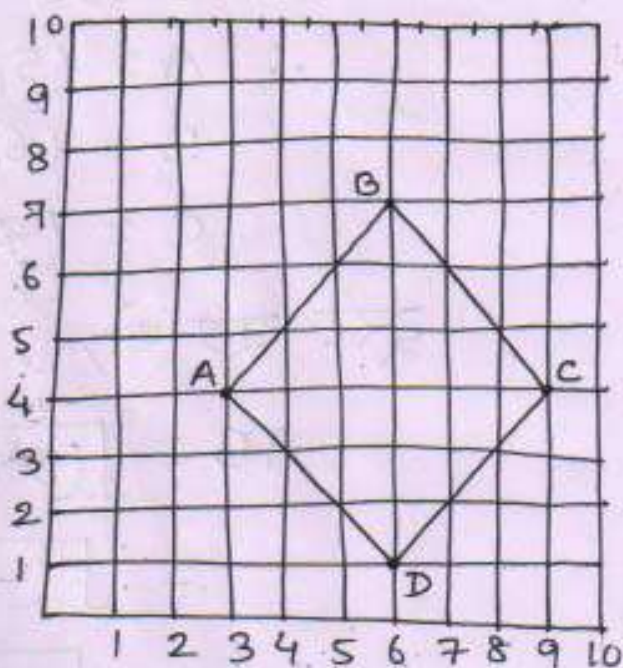
$$AD = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

यदि



संज्ञ

$$\text{विकर्ण } AC = \sqrt{(3-9)^2 + (4-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{36+0}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

$$\text{विकर्ण } BD = \sqrt{(6-6)^2 + (7-1)^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{0+36}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

∴ ABCD में,

$$AB = BC = CD = AD = 3\sqrt{2}$$

विकर्ण AC = विकर्ण BD

∴ ABCD एक वर्ग है। चम्पा सही है।

(6.) निम्नलिखित बिंदुओं द्वारा बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए —

14.

(i) $(-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$

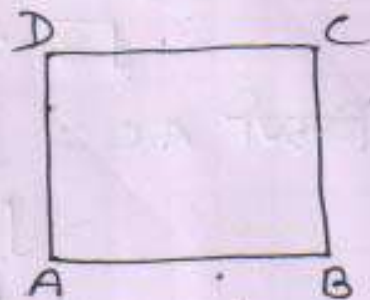
माना कि चतुर्भुज ABCD में,

$$A = (-1, -2)$$

$$B = (1, 0)$$

$$C = (-1, 2)$$

$$D = (-3, 0)$$



दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (0-2)^2}$$

$$= \sqrt{(1+1)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 4}$$

$$= \sqrt{4+4}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{[-1-(-3)]^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-1+3)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{4+4}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 AD &= \sqrt{[-1-(-3)]^2 + (-2-0)^2} \\
 &= \sqrt{(-1+3)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{2^2 + 4} \\
 &= \sqrt{4+4} \\
 &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{विकर्ण } AC &= \sqrt{[-1-(-1)]^2 + (-2-2)^2} \\
 &= \sqrt{(-1+1)^2 + (-4)^2} \\
 &= \sqrt{0^2 + 16} \\
 &= \sqrt{0+16} \\
 &= \sqrt{16} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{विकर्ण } BD &= \sqrt{[1-(-3)]^2 + (0-0)^2} \\
 &= \sqrt{(1+3)^2 + 0} \\
 &= \sqrt{4^2} \\
 &= \sqrt{16} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

\therefore चतुर्भुज ABCD में,

$$AB = BC = CD = AD$$

और

$$\text{विकर्ण } AC = BD$$

\therefore ABCD एक वर्ग है।

Q.E.D.

(ii) $(-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$

13

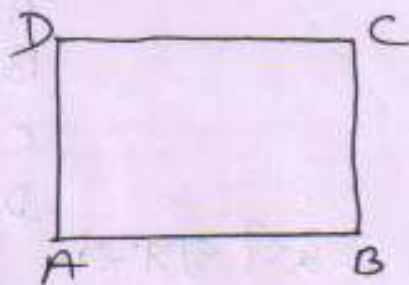
माना कि, चतुर्भुज ABCD में,

$$A = (-3, 5)$$

$$B = (3, 1)$$

$$C = (0, 3)$$

$$D = (-1, -4)$$



दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (5-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{36 + 16}$$

$$= \sqrt{52}$$

$$= 2\sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 4}$$

$$= \sqrt{13}$$

$$CD = \sqrt{[0-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2}$$

$$= \sqrt{(0+1)^2 + (3+4)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{1 + 49}$$

$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{[-3-(-1)]^2 + [5-(-4)]^2}$$

$$= \sqrt{(-3+1)^2 + (5+4)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{4 + 81}$$

$$= \sqrt{85}$$

$$\therefore AB \neq BC \neq CD \neq AD$$

\therefore ABCD कोई भी
चतुर्भुज का प्रकार
नहीं है

(iii) $(4,5), (7,6), (4,3), (1,2)$

(14)

माना कि, चतुर्भुज ABCD में,

$$A = (4,5)$$

$$B = (7,6)$$

$$C = (4,3)$$

$$D = (1,2)$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (5-6)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{9+1}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(7-4)^2 + (6-3)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{9+1}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$AD = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

\therefore चतुर्भुज ABCD में,

$$AB = CD \text{ और } BC = AD$$

\therefore ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

(7) माना कि x-अक्ष पर अग्राष्ट बिन्दु P है।

\therefore P का निर्देशांक $= (a, 0)$

तथा

$$A = (2, -5)$$

$$B = (-2, 9)$$

दूरी सूत्र से,

$$PA = \sqrt{(a-2)^2 + [0-(-5)]^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 4 + (0+5)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 4 + 25}$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 29}$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 29}$$

और,

$$PB = \sqrt{[a-(-2)]^2 + (0-9)^2}$$

$$= \sqrt{(a+2)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 4a + 4 + 81}$$

$$= \sqrt{a^2 + 4a + 85}$$

$$\therefore PA = PB$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 4a + 29} = \sqrt{a^2 + 4a + 85}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{a^2 - 4a + 29})^2 = (\sqrt{a^2 + 4a + 85})^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 29 = a^2 + 4a + 85$$

$$\Rightarrow -4a + 29 = 4a + 85$$

$$\Rightarrow -4a - 4a = 85 - 29$$

$$\Rightarrow -8a = 56$$

$$\Rightarrow a = \frac{56}{-8} = -7$$

$$\therefore P \text{ का निर्देशांक } = (a, 0)$$

$$= (-7, 0)$$

✓

(8) दिया है:-

$$P = (2, -3)$$

$$Q = (10, y)$$

$$PQ = 10$$

दूरी सूत्र से,

$$PQ = \sqrt{(10-2)^2 + [y - (-3)]^2}$$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{8^2 + (y+3)^2}$$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{64 + y^2 + 6y + 9}$$

$$\Rightarrow 10 = \sqrt{y^2 + 6y + 73}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (10)^2 = (\sqrt{y^2 + 6y + 73})^2$$

$$\Rightarrow 100 = y^2 + 6y + 73$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y + 73 = 100$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y + 73 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y(y+9) - 3(y+9) = 0$$

$$\Rightarrow (y-3)(y+9) = 0$$

$$\Rightarrow y-3=0 \text{ या } y+9=0$$

$$\Rightarrow y=3 \quad \Rightarrow y=-9$$

$$\therefore y = 3, -9 \quad \underline{Ans}$$

<9> दिया है:-

$$Q = (0, 1)$$

$$P = (5, -3)$$

$$R = (x, 6)$$

दूरी सूत्र से,

$$PQ = \sqrt{(5-0)^2 + (-3-1)^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16}$$

$$= \sqrt{41}$$

$$RQ = \sqrt{(x-0)^2 + (6-1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 25}$$

$\therefore Q$, बिन्दुओं P और R से समदूरस्थ है

$$\therefore PQ = RQ$$

$$\Rightarrow \sqrt{41} = \sqrt{x^2 + 25}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{41})^2 = (\sqrt{x^2 + 25})^2$$

$$\Rightarrow 41 = x^2 + 25$$

$$\Rightarrow 41 - 25 = x^2$$

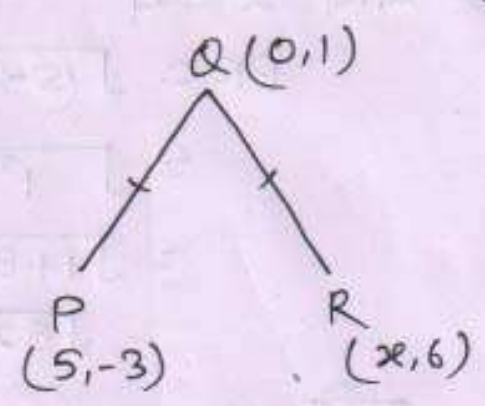
$$\Rightarrow 16 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$$

$$\therefore QR = \sqrt{x^2 + 25}$$

$$= \sqrt{4^2 + 25}$$

$$= \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \text{ Ans}$$



यदि $x = 4$

$$\begin{aligned}
 PR &= \sqrt{(5-4)^2 + (-3-6)^2} \\
 &= \sqrt{1^2 + (-9)^2} \\
 &= \sqrt{1+81} \\
 &= \sqrt{82} \text{ A}
 \end{aligned}$$

यदि $x = -4$

$$\begin{aligned}
 PR &= \sqrt{[5-(-4)]^2 + (-3-6)^2} \\
 &= \sqrt{(5+4)^2 + (-9)^2} \\
 &= \sqrt{9^2 + 81} \\
 &= \sqrt{81+81} \\
 &= \sqrt{162} \\
 &= 9\sqrt{2} \text{ Any}
 \end{aligned}$$

<10> माना कि,

(19)

$$P = (x, y)$$

$$A = (3, 6)$$

$$B = (-3, 4)$$

दूरी सूत्र से,

$$PA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45}$$

$$PB = \sqrt{[x - (-3)]^2 + (y-4)^2}$$

$$= \sqrt{(x+3)^2 + y^2 - 8y + 16}$$

$$= \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25}$$

$$\therefore PA = PB$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45 = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25$$

$$\Rightarrow -6x - 12y + 45 = 6x - 8y + 25$$

$$\Rightarrow -6x - 12y + 45 - 6x + 8y - 25 = 0$$

$$\Rightarrow -12x - 4y + 20 = 0$$

$$\Rightarrow -4(3x + y - 5) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$$

Ans