

\* शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) :-

(14)

① यदि बहुपद  $P(x)$  का घात  $> 1$  हो तो  $P(x)$  को  $(x-a)$  से भाग देने पर शेषफल  $P(x)$  में  $x$  की जगह ' $a$ ' रखने पर मिलता है।

अर्थात्

$$\text{शेषफल} = P(a) \text{ का मान}$$

② यदि बहुपद  $P(x)$  का घात  $> 1$  हो तो  $P(x)$  को  $(x+a)$  से भाग देने पर शेषफल  $P(x)$  में  $x$  की जगह ' $-a$ ' रखने पर मिलता है।

अर्थात्

$$\text{शेषफल} = P(-a) \text{ का मान}$$

Example :-

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4$  को  $x-1$  से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करें -

$$\therefore x-1=0$$

$$\Rightarrow x=1$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P(1)$$

$$= 4 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 4$$

$$= 4 \times 1 - 3 \times 1 + 2 - 4$$

$$= 4 - 3 + 2 - 4$$

$$= 6 - 7$$

$$= -1$$

31) भाग विधि से शेषफल प्राप्त करना :- (15)

माना कि  $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$  को  $x-1$  से भाग दिया जाए -

$$\begin{array}{r}
 x-1 \overline{) 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1} \quad \left( 3x^3 - x^2 = x - 4 \right. \\
 \underline{3x^4 - 3x^3} \phantom{- 3x - 1} \\
 -x^3 - 3x - 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \phantom{- 3x - 1} \\
 -x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{-x^2 + x} \phantom{- 1} \\
 -4x - 1 \\
 \underline{-4x + 4} \\
 -5
 \end{array}$$

$\therefore$  शेषफल =  $-5$

Rules: -

- (i) भाज्य (Dividend) का पहला पद को भाजक (Divisor) के पहला पद से भाग देकर दोनो पद को बराबर किया जाता है।
- (ii) प्रत्येक step में निचले वाले बहुपद के प्रत्येक पद का चिन्ह (sign) बदलता है।
  - (+) के बदले (-) दिया जाता है।
  - (-) के बदले (+) दिया जाता है।



## \* गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem):-

(16)

- माना कि
- ① बहुपद  $P(x)$  में  $x$  की जगह  $a$  रखने पर यदि शेषफल  $P(a) = 0$  हो तो  $(x-a)$ , बहुपद  $P(x)$  का गुणनखण्ड होगा।
  - ② यदि  $(x-a)$  बहुपद  $P(x)$  का गुणनखण्ड हो तो  $P(x)$  में  $x$  की जगह  $a$  रखने पर शेषफल  $P(a) = 0$  होगा।

जैसे:- ① गुणनखण्ड प्रमेय से जात करें कि क्या  $x-1$ ,  $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$  का गुणनखण्ड है?

$$\text{माना कि } P(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\therefore x-1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$P(1) = 1^6 - 1^5 + 1^4 - 1^3 + 1^2 + 1 + 1$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 5 - 2$$

$$= 3 \neq 0$$

$\therefore x-1$ , बहुपद  $P(x)$  का गुणनखण्ड नहीं होगा।

$$\text{② } P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$$

$$\therefore x-2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$P(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 4 \times 2 - 4$$

$$= 8 - 12 + 8 - 4$$

$$= 16 - 16 = 0$$

$\therefore x-2$ , बहुपद  $P(x)$  का गुणनखण्ड है।

Q (iii) यदि  $x-2$ ,  $x^5 - 3x^4 - ax^3 + 3ax^2 + 2ax + 4$  का गुणनखंड है तो  $a$  का मान ज्ञात करें।

माना कि  $P(x) = x^5 - 3x^4 - ax^3 + 3ax^2 + 2ax + 4$

$$\therefore x-2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$P(2) = 2^5 - 3 \times 2^4 - a \times 2^3 + 3a \times 2^2 + 2a \times 2 + 4$$

$$= 32 - 48 - 8a + 12a + 4a + 4$$

$$= 36 - 48 - 8a + 16a$$

$$= -12 + 8a$$

$\therefore x-2$ , बहुपद  $P(x)$  का गुणनखंड है

$$\therefore P(2) = 0$$

$$\Rightarrow -12 + 8a = 0$$

$$\Rightarrow 8a = 12$$

$$\Rightarrow a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$4. > P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(i) x + 1$$

$$\therefore x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P(-1)$$

$$= (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 1$$

$$= -1 + 3 \times 1 - 3 + 1$$

$$= -1 + 3 - 3 + 1$$

$$= -4 + 4$$

$$= 0 \quad \underline{\underline{A}}$$

$$(ii) x - \frac{1}{2}$$

$$\therefore x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{1 + 6 + 12 + 8}{8}$$

$$= \frac{27}{8} \quad \underline{\underline{A}}$$



(iii)

 $x$ 

$$\therefore x = 0$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P(0)$$

$$= 0^3 + 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1$$

$$= 0 + 0 + 0 + 1$$

$$= \underline{1}$$

(iv)

 $x + \pi$ 

$$\therefore x + \pi = 0$$

$$\Rightarrow x = -\pi$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P(-\pi)$$

$$= (-\pi)^3 + 3 \times (-\pi)^2 + 3 \times (-\pi) + 1$$

$$= -\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$$

(v)

 $5 + 2x$ 

$$\therefore 5 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = -5$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

शेषफल प्रमेय से,

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 1$$

$$= -\frac{125}{8} + 3 \times \frac{25}{4} - \frac{15}{2} + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{125}{8} + \frac{75}{4} - \frac{15}{2} + 1 \\
 &= \frac{-125 + 150 - 60 + 8}{8} \\
 &= \frac{-185 + 158}{8} \\
 &= -\frac{27}{8}
 \end{aligned}$$

2.) माना कि  $P(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$

$$\therefore x - a = 0$$

$$\Rightarrow x = a$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\text{शेषफल} = P(a)$$

$$= a^3 - a \cdot a^2 + 6 \cdot a - a$$

$$= a^3 - a^3 + 6a - a$$

$$= 6a - a$$

$$= 5a$$

3.) माना कि  $P(x) = 3x^3 + 7x$

$$\therefore 7 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = -7$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

$$P\left(-\frac{7}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right)^3 + 7 \times \left(-\frac{7}{3}\right)$$

$$= 3 \times \left(-\frac{343}{27}\right) - \frac{49}{3}$$

$$= -3 \times \frac{343}{27} - \frac{49}{3}$$

$$= -\frac{343}{9} - \frac{49}{3}$$

$$= \frac{-343 - 147}{9}$$

$$= \frac{-590}{9} \neq 0$$

अतः गुणखंड नहीं है।

समाप्त