Exercise - 7.3 के लिए

प्रमेय - 7.4 → भुजा - भुजा - भुजा (S-S-S) सर्वांगसमता प्रमेय

अर्थात्

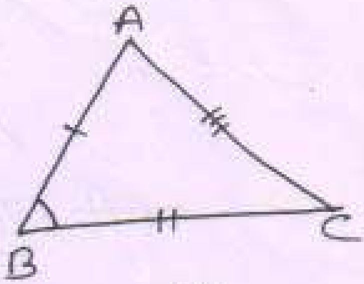
यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएं दूसरे त्रिभुज की क्रमशः तीन भुजाओं के बराबर हों तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

दिया है:- ΔABC और ΔDEF में,

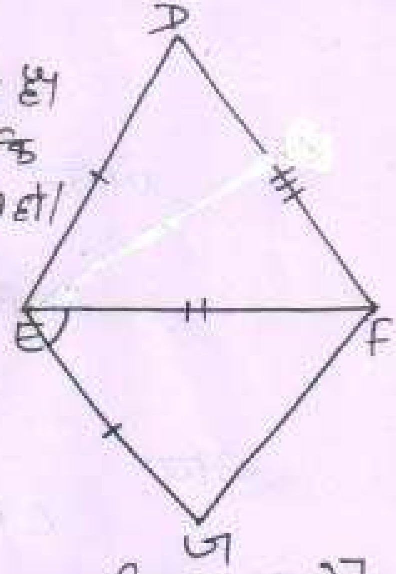
$AB = DE$

$BC = EF$

$AC = DF$



सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



रचना:- माना कि BC सबसे बड़ी भुजा है।
रेखाखण्ड EG इस प्रकार खींचा कि
$EG = AB$ तथा $\angle FEG = \angle CBA$ हो।

प्रमाण:- ΔABC तथा ΔGEF में,

$AB = EG$

$\angle CBA = \angle FEG$

$BC = EF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$ [S-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle BAC = \angle EGF$ — (i) [CPCT]

$AC = GF$ — (ii) [CPCT]

लेकिन,

$AC = DF$ — (iii)

समी॰ (ii) तथा (iii) से,

$GF = DF$ — (iv)

अब,

$$AB = DE \text{ एवं } AB = EG$$

$$\therefore \quad DE = EG \quad \text{— (v)}$$

$\triangle EDG$ में,

$$DE = EG$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 \quad \text{— (vi)}$$ [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होता है]

$\triangle FGD$ में,

$$DF = FG$$

$$\angle 4 = \angle 3 \quad \text{— (vii)}$$ [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होता है]

समी० (vi) तथा (vii) को जोड़ने पर

$$\angle 2 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 3$$

$$\Rightarrow \angle G = \angle D \quad \text{— (viii)}$$

लेकिन,

$$\angle G = \angle A \quad \text{— (ix)}$$

समी० (viii) तथा (ix) से,

$$\angle A = \angle D$$

अब,

$\triangle ABC$ तथा $\triangle DEF$ में,

$$AB = DE$$

$$\angle A = \angle D$$

$$AC = DF$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$$ [SAS सर्वांगसमता से]

सिद्ध

प्रमेय - (7.5) → समकोण - कर्ण - भुजा (RHS) सर्वांगसमता प्रमेय

अर्थात्

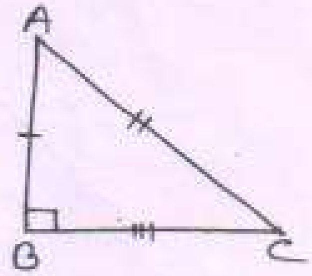
यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, दूसरे समकोण त्रिभुज के क्रमशः कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो, तो वे समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

दिया है:- ΔABC तथा ΔDEF में,

$\angle B = \angle E \quad (90^\circ)$

$AB = DE$

$AC = DF$



सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

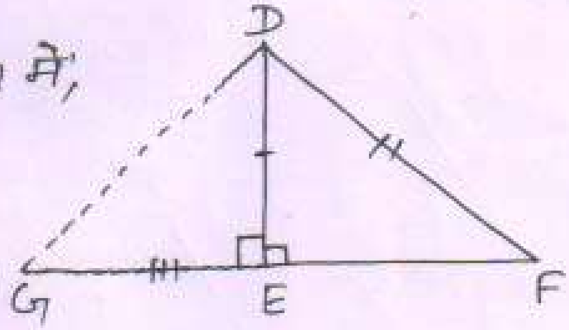
रचना:- FE को G तक बढ़ाया जिसमें $EG = BC$ हो।

प्रमाण:- ΔABC तथा ΔDEG में,

$AB = DE$

$BC = EG$

$\angle B = \angle DEG \, (90^\circ)$



$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEG$ [S-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle C = \angle G$ — (I) [CPCT]

और

$AC = DG$ — (II) [CPCT]

लेकिन,

$AC = DF$

$\therefore DG = DF$

$\therefore \angle G = \angle F$ — (III) [समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है]

समी० (I) तथा (III) से,

$\angle C = \angle F$ — (IV)

ΔABC तथा ΔDEF में,

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

$\angle A = \angle D$ — (v)

फिर, ΔABC तथा ΔDEF में,

$AB = DE$

$AC = DF$

$\angle A = \angle D$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ [SAS सर्वांगसमता से]

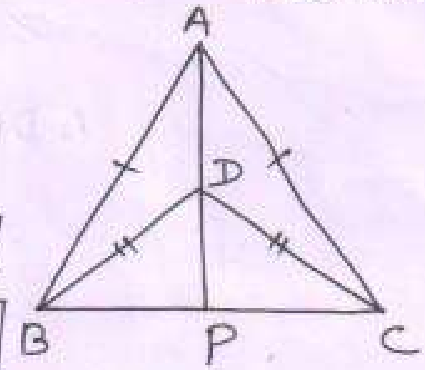
सिद्ध

Exercise - 7.3

(1) दिया है:- ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध करना है:- (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$
(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$
(iii) AP, $\angle A$ और $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।
(iv) AP रेखाखण्ड BC पर लम्ब समद्विभाजक है।

प्रमाण:- (i) ΔABD तथा ΔACD में,



$AB = AC$
$DB = DC$
$AD = AD$ [common]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [S-S-S से]

$\angle BAP = \angle CAP$ —(1) [CPCT]

$\therefore$ AP, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

(ii) ΔABP तथा ΔACP में,

$AB = AC$
$\angle BAP = \angle CAP$ (समी० (1) से)
$AP = AP$ [common]

$\therefore \Delta ABP \cong \Delta ACP$ [S-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore BP = CP$ —(ii) [CPCT]

और,

$\angle APB = \angle APC$ —(iii) [CPCT]

लेकिन,

$\angle APB + \angle APC = 180°$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \angle APB + \angle APB = 180°$

$\Rightarrow 2\angle APB = 180°$

$\Rightarrow \angle APB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\therefore \angle APB = \angle APC = 90^\circ$

अब,

$\triangle DBP$ तथा $\triangle DCP$ में,

$DB = DC$

$BP = CP$

$\angle DPB = \angle DPC \ (90^\circ)$

$\therefore \triangle DBP \cong \triangle DCP$ [S-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle BDP = \angle CDP$ [CPCT]

$\therefore$ AP, $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध

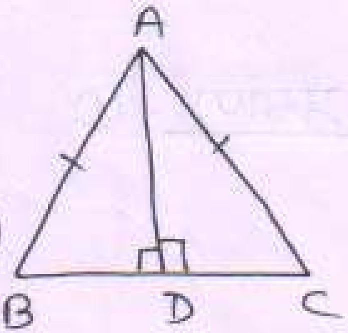
2) दिया है:- समद्विबाहु ΔABC में,

$AB = AC$

$AD \perp BC$

सिद्ध करना है:- (i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) $AD, \angle A$ को समद्विभाजित करता है।



प्रमाण:- ΔABD तथा ΔACD में,

$AB = AC$

$\angle ADB = \angle ADC$ $(90°)$

$AD = AD$ [Common]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [S-A-S सर्वांगसमता से]

$\therefore BD = CD$ [CPCT]

$\therefore$ AD, रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध

(ii) $\because \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ [CPCT]

$\therefore AD, \angle A$ को समद्विभाजित करता है।

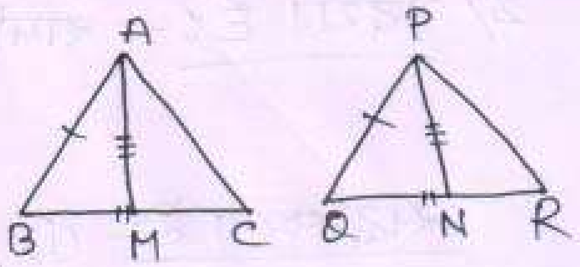
सिद्ध

(3.) दिया है:- ΔABC तथा ΔPQR में,

$AB = PQ$

$BC = QR$

माध्यिका $AM = PN$



सिद्ध करना है:- (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

प्रमाण:- (i) $\because$ AM, ΔABC की माध्यिका है

$\therefore BM = CM = \frac{1}{2} BC$

$\Rightarrow BC = 2BM = 2CM$ — (I)

और

$\because$ PN, ΔPQR की माध्यिका है

$\therefore QN = RN = \frac{1}{2} QR$

$\Rightarrow QR = 2QN = 2RN$ — (II)

$\because BC = QR$

$\therefore \cancel{2}BM = \cancel{2}QN$

$\Rightarrow BM = QN$ — (III)

ΔABM तथा ΔPQN में,

$AB = PQ$

$BM = QN$ [समी० (III) से]

$AM = PN$

$\therefore \Delta ABM \cong \Delta PQN$ [S-S-S सर्वांगसमता से]

सिद्ध

$\because$ $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

$\therefore$ $\angle AMB = \angle PNQ$ [CPCT]

लेकिन,

$\angle AMB + \angle AMC = \angle PQN + \angle PNR$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow$ $\cancel{\angle AMB} + \angle AMC = \cancel{\angle AMB} + \angle PNR$

$\Rightarrow$ $\angle AMC = \angle PNR$ — (IV)

(ii) ΔAMC तथा ΔPNR में,

$AM = PN$

$CM = RN$

$\angle AMC = \angle PNR$ (90°)

$\therefore$ $\Delta AMC \cong \Delta PNR$ (SAS - सर्वांगसमता से]

$\therefore$ $AC = PR$ — (V) [CPCT]

अब,

ΔABC तथा ΔPQR में,

$AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ [S-S-S सर्वांगसमता से]

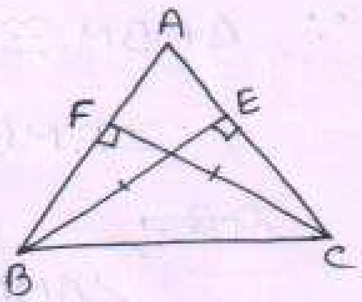
सिद्ध

4.) दिया है:- ΔABC में,

$BE \perp AC$

$CF \perp AB$

$BE = CF$



सिद्ध करना है:- ΔABC समद्विबाहु है अर्थात् $AB = AC$

प्रमाण:- ΔBEC तथा ΔCFB में,

$\angle BEC = \angle CFB$ (90°)

$BE = CF$

$BC = BC$ [Common]

$\therefore \Delta BEC \cong \Delta CFB$ [RHS सर्वांगसमता से]

$\therefore \angle ECB = \angle FBC$ [CPCT]

$\Rightarrow \angle C = \angle B$

$\because$ ΔABC में,

$\angle B = \angle C$

$\therefore AB = AC$ [समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर है।]

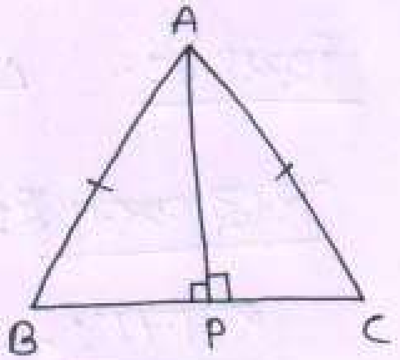
$\therefore \Delta ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध

<5·> दिया है:- समद्विबाहु ΔABC में,

$$AB = AC$$

सिद्ध करना है:- $\angle B = \angle C$



रचना:- $AP \perp BC$ खींचा

प्रमाण:- ΔAPB तथा ΔAPC में,

$$AB = AC$$

$$\angle APB = \angle APC = 90^\circ$$

$$AP = AP \quad [\text{Common}]$$

$\therefore \Delta APB \cong \Delta APC$ [RHS सर्वांगसमता से]

$\angle B = \angle C$ [CPCT]

सिद्ध