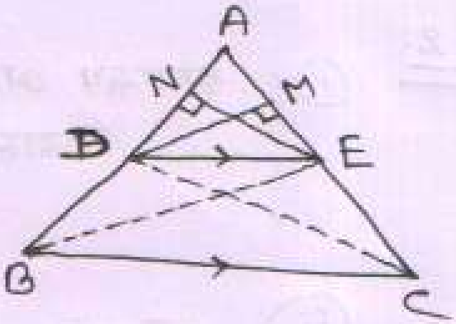
प्रमेय-6.1 → थेल्स प्रमेय

अथवा

किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओ को समान अनुपात में विभाजित करती है।



दिया है:- ΔABC में,

$DE \parallel BC$

सिद्ध करना है:- $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना:- $DM \perp AC$

$EN \perp AB$ खींचा

तथा

BE एवं CD को मिलाया।

प्रमाण:- $ar(\Delta ADE) = \frac{1}{2} \times AD \times EN$

$ar(\Delta BDE) = \frac{1}{2} \times DB \times EN$

$\therefore \frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta BDE)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times AD \times \cancel{EN}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times DB \times \cancel{EN}} = \frac{AD}{DB}$ —— (I)

और,

$ar(\Delta ADE) = \frac{1}{2} \times AE \times DM$

$ar(\Delta CED) = \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$\therefore \frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta CED)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times AE \times \cancel{DM}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times EC \times \cancel{DM}} = \frac{AE}{EC}$ —— (II)

$\because$ ΔBDE एवं ΔCED एक ही आधार DE है और दोनो त्रिभुज दो समान्तर रेखाओ के बीच स्थित है।

$\therefore ar(\Delta BDE) = ar(\Delta CED)$

समी० (II) से,

$\frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta CED)} = \frac{AE}{EC}$

$\Rightarrow \frac{ar(\Delta ADE)}{ar(\Delta BDE)} = \frac{AE}{EC}$ —— (III)

$\therefore$ समी० (I) तथा (III) से,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

सिद्ध

प्रमेय - 6.2 - थेल्स प्रमेय का विलोम

अथवा

यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।

दिया है :- DE, ΔABC की भुजाओं AB और AC को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{— (1)}$$

सिद्ध करना है :- $DE \parallel BC$

रचना :- $DF \parallel BC$ खींचा जो AC को F पर काटती है।

प्रमाण :- ΔABC में,

$$DF \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad \text{— (11)} \quad [\text{थेल्सप्रमेय}]$$

समी० (1) तथा (11) से,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$$

दोनो तरफ 1 जोड़ने पर

$$\therefore \frac{AE}{EC} + 1 = \frac{AF}{FC} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{AE+EC}{EC} = \frac{AF+FC}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{AC}{FC}$$

दोनोतरफतुलना करने पर

$$\therefore EC = FC$$

$\Rightarrow$ F और E एक ही बिन्दु है।

$\therefore$ DE और DF एक ही रेखा है।

किन्तु $DF \parallel BC$

$\therefore DE \parallel BC$, सिद्ध

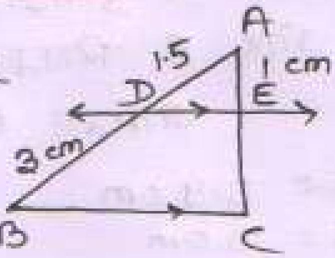
Notes:-

1. यदि ΔABC में,
$DE \parallel BC$
$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ — [थेल्स प्रमेय से]

2. यदि ΔABC में,
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$
$\therefore DE \parallel BC$ — [थेल्स प्रमेय के विलोम से]

प्रश्नावली - 6.2

1. (i) दिया है - DE || BC



AD = 1.5 c.m

DB = 3 c.m

AE = 1 c.m

EC = ?

∵ ΔABC में,

DE || BC

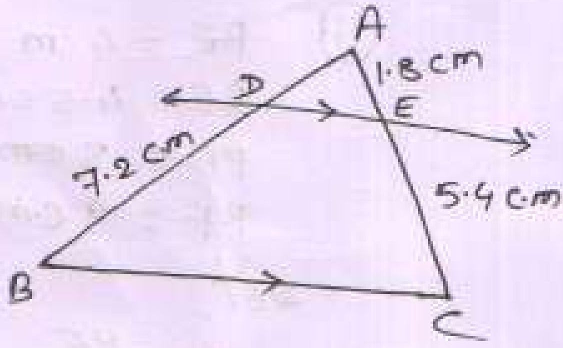
$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ — [थेल्स प्रमेय से]

$$\Rightarrow \frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{15}\,{}^{8}}{\cancel{3}\times\cancel{10}_{2}} = \frac{1}{EC}$$

$$\Rightarrow EC = 2 \text{ c.m}$$ Ans

(ii) दिया है - DE || BC



AD = ?

DB = 7.2 cm

AE = 1.8 c.m

EC = 5.4 c.m

∵ ΔABC में,

DE || BC

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ — [थेल्स प्रमेय से]

$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{1.8\times 7.2}{5.4}$$

$$= \frac{\cancel{18}\times\cancel{72}^{24}\times\cancel{10}}{\cancel{10}\times 10\times\cancel{54}_{3}}$$

$$= \frac{24}{10} = 2.4 \text{ c.m}$$ Ans

2 ∵ ΔPQR की भुजाओ PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित है।

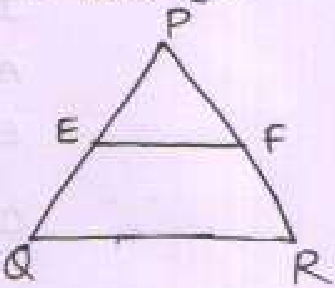
बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है-

(i) $PE = 3.9$ cm

$EQ = 3$ cm

$PF = 3.6$ cm

$FR = 2.4$ cm



यहाँ ∵ $\frac{PE}{EQ} = \frac{\cancel{3.9}}{\cancel{3}} = 1.3$

$$\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times \cancel{10}}{\cancel{10} \times \underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

∴ $\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$

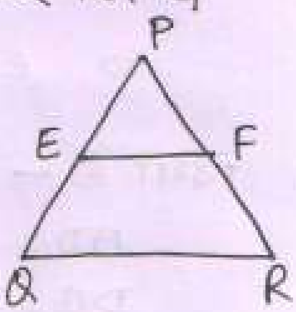
∴ EF, QR के समान्तर नहीं है।

(ii) $PE = 4$ cm

$QE = 4.5$ cm

$PF = 8$ cm

$RF = 9$ cm



यहाँ,

$$\frac{PE}{QE} = \frac{4}{4.5} = \frac{4 \times \overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{9}{\cancel{45}}} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{PF}{RF} = \frac{8}{9}$$

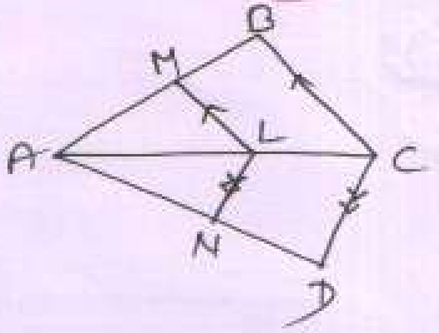
∴ $\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF}$

∴ $EF \parallel QR$ है।

3. **दिया है:-** $LM \parallel CB$

$LN \parallel CD$

सिद्ध करना है:- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$



प्रमाण:- ΔABC में,

$LM \parallel CB$

$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC}$ — (1) [थेल्स प्रमेय]

फिर,

ΔADC में,

$LN \parallel CD$

$\therefore \frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC}$ — (11) [थेल्स प्रमेय]

समी॰ (1) तथा (11) से,

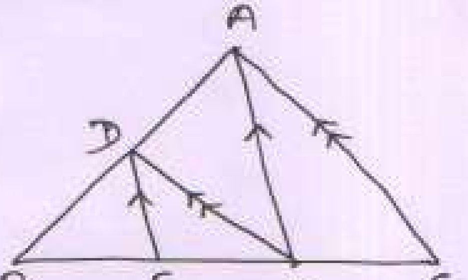
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$

सिद्ध

4. **दिया है:-** $DE \parallel AC$

$DF \parallel AE$

सिद्ध करना है:- $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$



प्रमाण:- ΔABC में,

$DE \parallel AC$

$\therefore \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ — (1) [थेल्स प्रमेय]

फिर,

ΔABE में,

$\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FE}$ — (11) [थेल्स प्रमेय]

समी॰ (1) तथा (11) से,

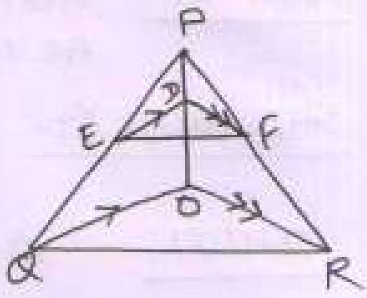
$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

सिद्ध

5. <u>दिया है:-</u> $DE \parallel OQ$

$DF \parallel OR$

<u>सिद्ध करना है:-</u> $EF \parallel QR$



<u>प्रमाण:-</u> ΔPOQ में,

$DE \parallel OQ$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \quad \text{— (I)} \quad [\text{थेल्स प्रमेय}]$$

फिर,

ΔPOR में,

$DF \parallel OR$

$$\therefore \frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO} \quad \text{— (II)} \quad [\text{थेल्स प्रमेय}]$$

समी० (I) तथा (II) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अब,

ΔPQR में,

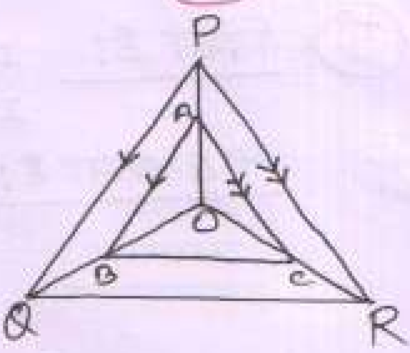
$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$\therefore EF \parallel QR$ [थेल्स प्रमेय के विलोम से]

<u>सिद्ध</u>

⑥ दिया है:- AB ∥ PQ
AC ∥ PR

सिद्ध करना है:- BC ∥ QR



प्रमाण:- ΔPOQ में,

AB ∥ PQ

$$\therefore \frac{OB}{BQ} = \frac{OA}{AP} \quad \text{—— (I)}$$ [थेल्स प्रमेय से]

फिर,

ΔPOR में,

AC ∥ PR

$$\therefore \frac{OC}{CR} = \frac{OA}{AP} \quad \text{—— (II)}$$ [थेल्स प्रमेय से]

समी० (I) तथा (II) से,

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

अब,

ΔOQR में,

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

∴ BC ∥ QR [थेल्स प्रमेय के विलोम से]

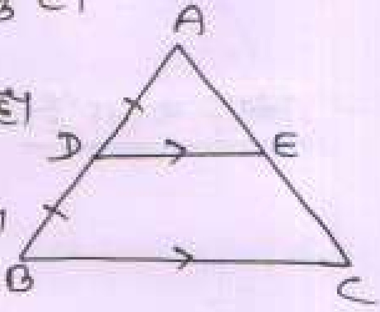
सिद्ध

7 **दिया है:-** $\triangle ABC$ में,

D, AB का मध्य-बिन्दु है।

$DE \parallel BC$

सिद्ध करना है:- E, AC का मध्य-बिन्दु है।



प्रमाण:- $\because$ D, AB का मध्य-बिन्दु है

$\therefore AD = DB$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = 1$ —— (1)

फिर,

$\triangle ABC$ में,

$DE \parallel BC$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\Rightarrow 1 = \frac{AE}{EC}$ [समी० (1) से]

$\Rightarrow AE = EC$

$\therefore$ E, AC का मध्य-बिन्दु है।

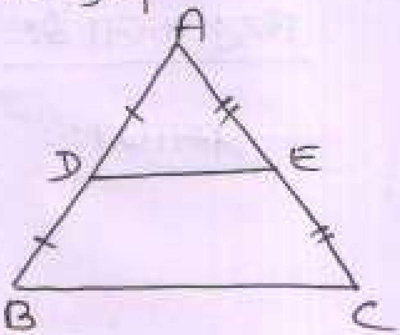
सिद्ध

8 **दिया है:-** ΔABC में,

D, AB का मध्य-बिन्दु है।

और E, AC का मध्य-बिन्दु है।

सिद्ध करना है:- $DE \parallel BC$



प्रमाण:- $\because$ D, AB का मध्य-बिन्दु है

$\therefore AD = DB$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = 1$ —— (1)

फिर,

$\because$ E, AC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore AE = EC$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = 1$ —— (11)

समी० (1) तथा (11) से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ΔABC में,

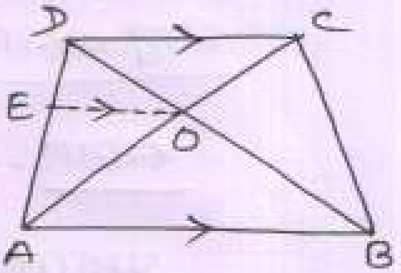
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$\therefore DE \parallel BC$ [थेल्स प्रमेय के विलोम से]

सिद्ध

9. दिया है:- ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC एवं BD एक-दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती है। $AB \parallel CD$

सिद्ध करना है:- $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$



रचना:- $OE \parallel AB \parallel CD$ खींचा।

प्रमाण:- $\triangle ABD$ में,

$OE \parallel AB$

$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ —— (I) [थेल्स प्रमेय से]

फिर,

$\triangle ADC$ में,

$OE \parallel DC$

$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$ —— (II) [थेल्स प्रमेय से]

समी० (I) तथा (II) से,

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$ [BO तथा CO का परस्पर स्थान बदलने पर]

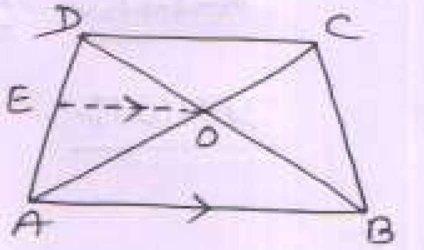
सिद्ध

(10) दिया है:- ABCD एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

सिद्ध करना है:- चतुर्भुज ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

रचना:- $OE \parallel AB$ खींचा ।



प्रमाण:- $\triangle ABD$ में,

$$OE \parallel AB$$

$$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO} \quad \text{—(1)} \quad [\text{थेल्स प्रमेय से}]$$

लेकिन,

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \quad \text{—(11)}$$

समी० (1) तथा (11) से,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

$\triangle ADC$ में,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

$$\therefore \quad OE \parallel CD \quad [\text{थेल्स प्रमेय के विलोम से}]$$

लेकिन,

$$OE \parallel AB$$

$\therefore \quad AB \parallel CD \quad \therefore$ चतुर्भुज ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

सिद्ध