

द्विघात समीकरण [4]

①

* द्विघात समीकरण :- यदि a, b, c वास्तविक संख्याएँ हो तथा $a \neq 0$ तो $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप का कोई भी समीकरण द्विघात समीकरण कहलाता है।
जैसे:- $2x^2 + 3x + 4 = 0$

* द्विघात समीकरण के गुण:-

- ① इसका मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ है, $a \neq 0$ हो।
- ② इसके दो शून्यक होते हैं — α, β
- ③ शून्यकों का योगफल $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$
- ④ द्विघात समीकरण $= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

* विवेचक / विविक्टर :-

- ① विविक्टर को D से निरूपित किया जाता है।
- ② $D = b^2 - 4ac$

* ③ यदि $D > 0$ हो तो

- ① द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक और असमान होंगे।

④ मूल $= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

* यदि $D < 0$ हो तो

- ① द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे।

* ⑤ यदि $D = 0$ हो तो

- ① द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक और समान होंगे।

\therefore मूल $= \frac{-b}{2a}$

* द्विघात समीकरण के प्रकार:-

(2)

- ① शुद्ध द्विघात समीकरण - जिस द्विघात समीकरण में x का एक घात वाला पद नहीं हो उसे शुद्ध द्विघात समीकरण कहते हैं अर्थात् $ax^2+bx+c=0$ में $b=0$ हो तो वह शुद्ध द्विघात समीकरण होगा।

\Rightarrow इसका मानक रूप $ax^2+c=0$ होता है।

जैसे:- $x^2-16=0$

- ② मिश्रित द्विघात समीकरण:- इसका मानक रूप $ax^2+bx+c=0$ है। जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$

* द्विघात समीकरण के हल की विधि

① गुणनखंड विधि

② द्विघाती सूत्र

③ पूर्ण वर्ग विधि

1.) (i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$$

हैं, द्विघात समीकरण है।

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - x - 3$$

$$\Rightarrow \cancel{x} - x - 2 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow -x - 2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 1 = 0$$

नहीं, द्विघात समीकरण नहीं है।

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 - x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 8 = 0$$

हैं, द्विघात समीकरण है।

viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 2^3 - 6x(x-2)$$

$$\Rightarrow -4x^2 - x + 1 = -8 - 6x^2 + 12x$$

$$\Rightarrow -4x^2 - x + 1 + 8 + 6x^2 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 9 = 0$$

हैं, द्विघात समीकरण है।

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = -6 + 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 6 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$$

हैं, द्विघात समीकरण है।

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 - x^2 - 5x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$$

हैं, द्विघात समीकरण है।

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 3 = 0$$

नहीं, द्विघात समीकरण नहीं है।

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2)$

$$\Rightarrow x^3 + 2^3 + 3x \cdot 2(x+2) = 2x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x = 2x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - 2x^3 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow -x^3 + 6x^2 + 14x + 20 = 0$$

नहीं, द्विघात समीकरण नहीं है।

2.) ① माना कि आयताकार भूखंड की चौड़ाई = x म.
लम्बाई = $(2x+1)$ म.

∴ आयताकार भूखंड का क्षेत्र = 528 m^2

$$\Rightarrow \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} = 528$$

$$\Rightarrow (2x+1) \times x = 528$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0 \text{ Ans}$$

② माना कि पहला चनाएक घणीक = x
दूसरा चनाएक घणीक = $x+1$

प्रश्नसे,

$$x(x+1) = 306$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0 \text{ Ans}$$

③ माना कि रोहन की वर्तमान आयु = x वर्ष
रोहन की माँ की वर्तमान आयु = $(x+26)$ वर्ष
3 वर्ष पश्चात्

रोहन की आयु = $(x+3)$ वर्ष

रोहन की माँ की आयु = $x+26+3$

= $(x+29)$ वर्ष

प्रश्नसे,

$$(x+3)(x+29) = 360$$

$$\Rightarrow x^2 + 29x + 3x + 87 = 360$$

$$\Rightarrow x^2 + 32x + 87 - 360 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 32x - 273 = 0$$

Ans

(iv)

माना कि रेलगाड़ी की चाल = x km/h

(5)

$$\text{कुल दूरी} = 480 \text{ km}$$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{480}{x} \text{ घंटे}$$

फिर,

यदि रेलगाड़ी की चाल 8 km/h कम होती है

$$\therefore \text{रेलगाड़ी की चाल} = (x-8) \text{ km/h}$$

$$\therefore \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{480}{x-8} \text{ घंटे}$$

प्रश्न से,

$$\frac{480}{x-8} = \frac{480}{x} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{480x - 480(x-8)}{x(x-8)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{480x - 480x + 3840}{x^2 - 8x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3840}{x^2 - 8x} = 3$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 8x) = 3840$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = \frac{3840}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 1280$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0$$

