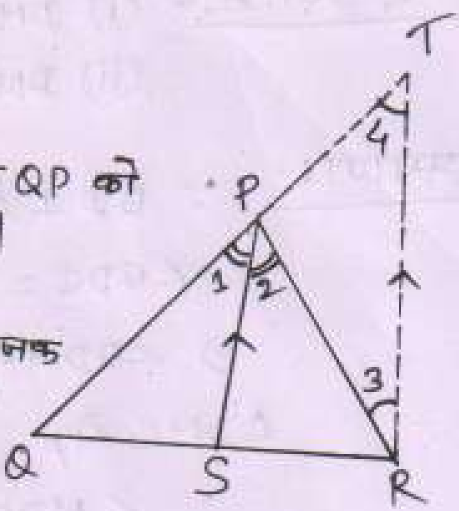
Exercise - 6.6

1) **दिया है:-** ΔPQR में,

PS, $\angle QPR$ का समद्विभाजक है।

सिद्ध करना है:- $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$

रचना:- $RT \parallel PS$ खींचा जो भुजा QP को बढ़ाने पर T पर मिलती है।



प्रमाण:- $\because$ PS, $\angle QPR$ का समद्विभाजक है

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$ — (i)

फिर,

$\because$ $PS \parallel RT$

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 4$ — (ii) [संगत कोण]

और

$\angle 2 = \angle 3$ — (iii) [अन्तः एकान्तर कोण]

समी० (i), (ii) तथा (iii) से,

$\angle 3 = \angle 4$

ΔPRT में,

$\angle 3 = \angle 4$

$\therefore$ $PT = PR$ — (iv) [समान कोणों की सम्मुख भुजाएं समान होती हैं]

अब,

ΔQRT में,

$PS \parallel RT$

$\therefore$ $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PT}$ [थेल्स प्रमेय से]

$\Rightarrow$ $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ [समी० (iv) से]

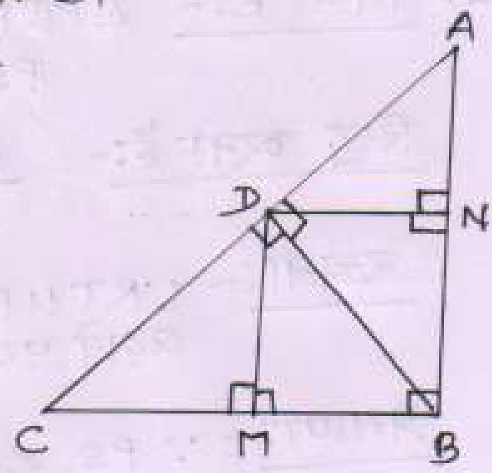
सिद्ध

2) दिया है:- ΔABC में,

D, कर्ण AC पर स्थित है।

$DM \perp BC$, $BD \perp AC$

$DN \perp AB$



सिद्ध करना है:- (i) $DM^2 = DN \cdot MC$

(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

प्रमाण:- $\because BD \perp AC$

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BDM + \angle MDC = 90^\circ$ —— (1)

ΔDMC में,

$\angle MDC + \angle C + \angle DMC = 180^\circ$ [Δ के कोणों का योग 180° है]

$\Rightarrow \angle MDC + \angle C + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle MDC + \angle C = 180^\circ - 90^\circ$

$\Rightarrow \angle MDC + \angle C = 90^\circ$ —— (II)

समी० (1) तथा (II) से,

$\angle BDM + \cancel{\angle MDC} = \cancel{\angle MDC} + \angle C$

$\Rightarrow \angle BDM = \angle C$ —— (III)

ΔBMD तथा ΔMDC में,

$\angle BDM = \angle C$ [समी० (III) से]

$\angle BMD = \angle DMC$ (90°)

$\therefore \Delta BMD \sim \Delta MDC$ [A-A समरूपता से]

$\angle DBM = \angle CDM$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{DM} = \dfrac{DM}{MC}$

$\Rightarrow DM^2 = BM \cdot MC$

$DM^2 = DN \cdot MC$ [$\because$ BNDM एक आयत है]

सिद्ध

इसी प्रकार से,

$$\Delta NDA \sim \Delta NBD$$

$$\frac{DN}{BN} = \frac{AN}{DN}$$

$$\Rightarrow DN^2 = BN \times AN$$

$$\Rightarrow DN^2 = DM \times AN$$

सिद्ध

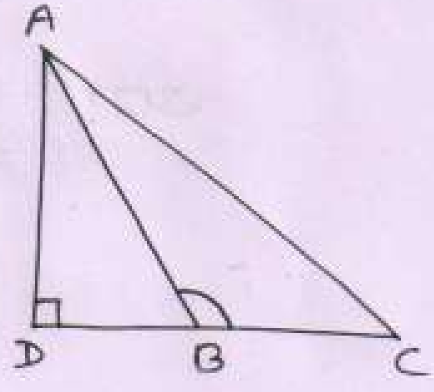
3.) दिया है:- ΔABC में, $\angle ABC > 90^\circ$

$AD \perp CB$

सिद्ध करना है:- $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$

प्रमाण:- समकोण ΔABD में,

$\angle D = 90^\circ$



$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{--- } (1)$$

फिर,

समकोण ΔACD में,

$\angle D = 90^\circ$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + (BD + BC)^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$$

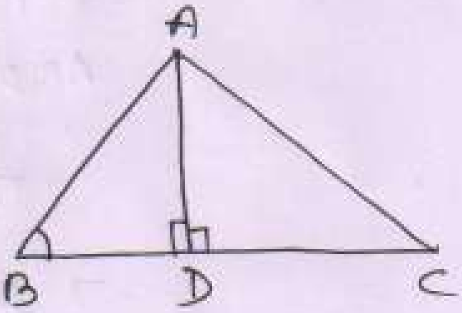
$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$$ [समी० (1) से]

सिद्ध

4) <u>दिया है:-</u> ΔABC में, $\angle ABC < 90^\circ$

$AD \perp BC$

<u>सिद्ध करना है:-</u> $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$



<u>प्रमाण:-</u> समकोण ΔABD में,

$\angle ADB = 90^\circ$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ —— (1)

फिर,

समकोण ΔACD में,

$\angle ADC = 90^\circ$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$= AD^2 + (BC - BD)^2$$

$$= AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD \quad [\text{समी॰ (1) से}]$$

अत:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$$

<u>सिद्ध</u>

5) दिया है:- ΔABC में,

AD, ΔABC की माध्यिका है

$AM \perp BC$

सिद्ध करना है:- (i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

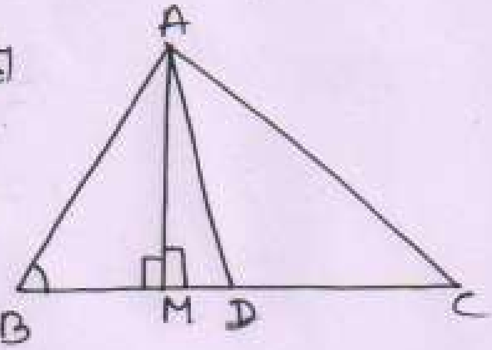
(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

प्रमाण:- $\because$ AD, ΔABC की माध्यिका है

$\therefore$ D, BC का मध्य बिन्दु है

$\Rightarrow BD = DC = \frac{1}{2}BC$ —— (1)



समकोण ΔADM में,

$\angle AMD = 90^\circ$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$AD^2 = AM^2 + MD^2$ —— (1)

फिर,

समकोण ΔAMC में,

$\angle AMC = 90^\circ$

$\therefore AC^2 = AM^2 + MC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= AM^2 + (MD + DC)^2$

$= AM^2 + MD^2 + DC^2 + 2MD \cdot DC$

$= AD^2 + DC^2 + 2MD \cdot DC$

$\Rightarrow AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \cancel{2} \times DM \times \frac{BC}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

$\therefore AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ —— (1)

सिद्ध

फिर,

समकोण ΔAMB में,

$\angle AMB = 90^\circ$

$\therefore AB^2 = AM^2 + BM^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= AM^2 + (BD - DM)^2$

$= AM^2 + BD^2 + DM^2 - 2BD \cdot DM$

$= AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DM$ [समी॰ (1) से]

$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \cancel{2} \times \frac{BC}{\cancel{2}} \times DM$

$= AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

$\therefore AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ —— (11)

सिद्ध

समी॰ (1) तथा (11) को जोड़ने पर

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 = AD^2 + \cancel{BC \cdot DM} + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + AD^2 - \cancel{BC \cdot DM} + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

$= 2AD^2 + \frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{4}$

$= 2AD^2 + \frac{BC^2 + BC^2}{4}$

$= 2AD^2 + \frac{\cancel{2}BC^2}{\cancel{4}\,2}$

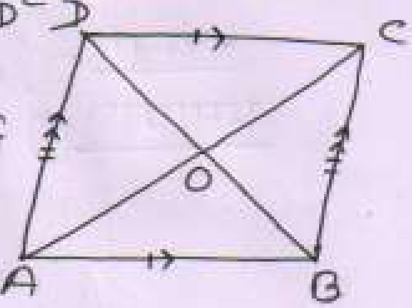
$= 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$\therefore AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

सिद्ध

6) <u>दिया है:-</u> समान्तर-चतुर्भुज ABCD में,
AC तथा BD विकर्ण है।

<u>सिद्ध करना है:-</u> $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$



<u>प्रमाण:-</u> ∵ समान्तर-चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर O बिन्दु पर समद्विभाजित करती है।

∴ AC और BD का मध्य-बिन्दु O है।

अब,
ΔABC में,
BO एक माध्यिका है।

$$\therefore \quad AB^2+BC^2=2BO^2+\frac{1}{2}AC^2 \quad \text{---(1)}$$

तथा
ΔADC में,
DO एक माध्यिका है।

$$\therefore \quad AD^2+CD^2=2DO^2+\frac{1}{2}AC^2 \quad \text{---(11)}$$

समी० (1) तथा (11) को जोड़ने पर,

$$AB^2+BC^2+AD^2+CD^2=2BO^2+\frac{1}{2}AC^2+2DO^2+\frac{1}{2}AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=2\left(\frac{BD}{2}\right)^2+\frac{1}{2}AC^2+2\left(\frac{BD}{2}\right)^2+\frac{1}{2}AC^2$$

$$=\cancel{2}\times\frac{BD^2}{\cancel{4}_2}+\cancel{2}\times\frac{BD^2}{\cancel{4}_2}+\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AC^2$$

$$=\frac{1}{2}BD^2+\frac{1}{2}BD^2+\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AC^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[BD^2+BD^2+AC^2+AC^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2BD^2+2AC^2\right]$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(AC^2+BD^2\right)$$

$$\therefore AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$$ <u>सिद्ध</u>

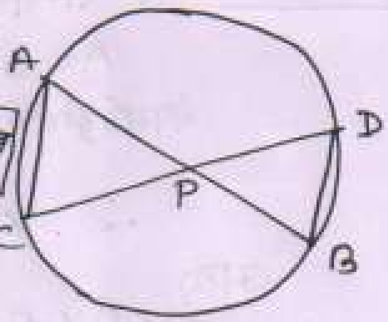
7) <u>दिया है:-</u> एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती है।

<u>सिद्ध करना है:-</u> (i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$

(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$

<u>रचना:-</u> AC तथा BD को मिलाया।

<u>प्रमाण:-</u> (i) ΔAPC तथा ΔDPB में



$\angle APC = \angle DPB$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle CAP = \angle BDP$ [एक ही वृत्तखंड के कोण]

$\therefore \Delta APC \sim \Delta DPB$ [AA - समरूपता से]

<u>सिद्ध</u>

(ii) $\because \Delta APC \sim \Delta DPB$

$\angle ACP = \angle DBP$

$$\therefore \frac{CP}{PB} = \frac{AP}{DP}$$

$$\Rightarrow AP \cdot PB = CP \cdot DP$$

<u>सिद्ध</u>

8) <u>दिया है:-</u> एक वृत्त की दो जीवाएं AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।

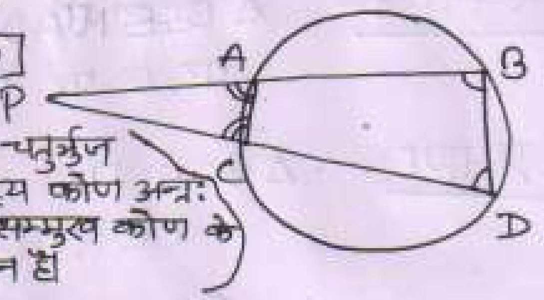
<u>सिद्ध करना है:-</u> (i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$

(ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

<u>प्रमाण:-</u> (i) ΔPAC तथा ΔPDB में,

$\angle P = \angle P$ [Common]

$\angle PAC = \angle PDB$ [चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण अन्तः सम्मुख कोण के समान है]



$\therefore \Delta PAC \sim \Delta PDB$ [A-A समरुपता से]

(ii) $\because \Delta PAC \sim \Delta PDB$

$\therefore \angle PCA = \angle PBD$

$$\therefore \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$$

$\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

सिद्ध

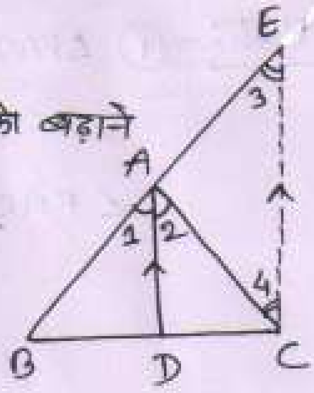
9) दिया है:- ΔABC में,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

सिद्ध करना है:- AD, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है,

अर्थात् $\angle 1 = \angle 2$

रचना है:- $CE \parallel AD$ खींचा जो BA को बढ़ाने पर E पर मिलती है।



प्रमाण:- ΔBCE में,

$CE \parallel AD$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad \text{—(I)} \quad [\text{थेल्स प्रमेय से}]$$

लेकिन,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{—(II)}$$

समी० (I) तथा (II) से,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

दोनो तरफ तुलना करने पर

$AE = AC$

अब,

ΔACE में,

$AE = AC$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ —(III) [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते है]

$\because AD \parallel CE$ तथा AC एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle 2 = \angle 4$ —(IV) [अन्तः एकान्तर कोण]

समी० (III) तथा (IV) से,

$\angle 2 = \angle 3$ —(V)

परन्तु, $\angle 1 = \angle 2$ —(VI)

समी० (V) तथा (VI) से,

$\angle 1 = \angle 3$ —— (VII)

∴ ये संगत कोण हैं।

∵ $\angle 3 = \angle 4$ [समी० (III) से]

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ [समी० (VII) तथा (IV) से]

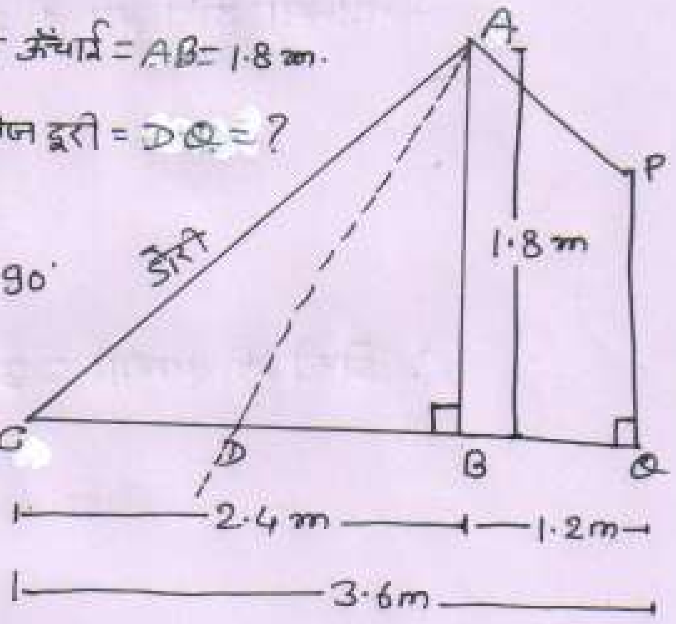
∴ AD, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

सिद्ध

10) दिया है:- पानी की सतह से छड़ की ऊँचाई = AB = 1.8 m.

नाजिमा द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी = DQ = ?

डोरी की लम्बाई = AC



हल: समकोण ΔABC में, $\angle ABC = 90°$

∴ पाइथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = (1.8)^2 + (2.4)^2$

$\Rightarrow AC^2 = 3.24 + 5.76$

$\Rightarrow AC^2 = 9$

$\Rightarrow AC = \sqrt{9} = 3$ m.

∵ नाजिमा डोरी को 5 cm/s की दर से अंदर खींचे तो 12 सेकेण्ड के बाद डोरी की लम्बाई कम होती है।

$\Rightarrow 5 \times 12 = 60 \text{ cm} = \frac{60}{100} \text{ m} = 0.6 \text{ m}$

माना कि 12 सेकेन्ड के बाद काँटे की स्थिति D है।

$\therefore AD = AC - 0.6 \text{ m}$

$= 3 - 0.6$

$= 2.4$ m.

अब,

समकोण ΔABD में,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 \quad \text{[पाइथागोरस प्रमेय से]}$$

$$\Rightarrow (2.4)^2 = (1.8)^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow 5.76 = 3.24 + BD^2$$

$$\Rightarrow 5.76 - 3.24 = BD^2$$

$$\Rightarrow 2.52 = BD^2$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{2.52}$$

$$= 1.587 \text{ m}$$

$\therefore$ नाजिमा द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी $= DQ = BD + 1.2$ m

$= 1.587 + 1.2$ m

$= 2.787$ m

$= 2.79$ m

A

$\therefore$ डोरी की लम्बाई $= 3$ m