Ex - 1.3

1) माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\because \sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक है, $q \neq 0$ और p तथा q का उभयनिष्ट गुणनखंड केवल 1 होता है]

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$\Rightarrow (\sqrt{5})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$

$\Rightarrow 5 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow 5q^2 = p^2$ —— (1)

$\because$ p^2, 5 से विभाज्य है

$\therefore$ p भी 5 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ 5, p का गुणनखंड है

फिर,

माना कि $p = 5K$

समी० (1) से,

$5q^2 = p^2$

$\Rightarrow 5q^2 = (5K)^2$

$\Rightarrow \cancel{5}q^2 = \cancel{25}^{5}K^2$

$\Rightarrow q^2 = 5K^2$

$\because$ q^2, 5 से विभाज्य है

$\therefore$ q भी 5 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ 5, q का गुणनखंड है

$\because$ p तथा q का उभयनिष्ट गुणनखंड 5 है लेकिन कथन के अनुसार p तथा q का उभयनिष्ट गुणनखंड केवल 1 होता है

विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है

अतः $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है

सिद्ध

2) माना कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore\ 3+2\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक है, $q \neq 0$]

$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{p}{q} - 3$

$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{p-3q}{q}$

$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p-3q}{2q}$

$\because$ p एवं q पूर्णांक है।

$\therefore$ $p, -3q$ एवं $2q$ भी पूर्णांक है।

$\therefore$ $\frac{p-3q}{2q}$ एक परिमेय संख्या है लेकिन $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः अपरिमेय संख्या = परिमेय संख्या जो सत्य नहीं है।

विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

$\therefore$ $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

सिद्ध

3. (i) माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं, $q \neq 0$]

$\Rightarrow \sqrt{2}p = q$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{q}{p}$

$\because$ p एवं q पूर्णांक है।

$\therefore \frac{q}{p}$ एक परिमेय संख्या है लेकिन $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः अपरिमेय संख्या = परिमेय संख्या जो कि असत्य है।

विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

सिद्ध

(ii) माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore 7\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं, $q \neq 0$]

$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p}{7q}$

$\because$ p एवं q पूर्णांक है।

$\therefore$ p एवं 7q पूर्णांक है।

$\therefore \frac{p}{7q}$ एक परिमेय संख्या है लेकिन $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः अपरिमेय संख्या = परिमेय संख्या जो कि असत्य है।

विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

$\therefore 7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। सिद्ध

(iii) माना कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore 6+\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं, $q \neq 0$]

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - 6$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p-6q}{q}$

$\because$ p एवं q पूर्णांक हैं।

$\therefore$ 6q, p एवं q भी पूर्णांक हैं।

$\therefore \frac{p-6q}{q}$ एक परिमेय संख्या है लेकिन $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

विरोधाभास से,

हमारा मानना गलत है।

$\therefore 6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

सिद्ध