प्रमेय - 6.3 - यदि दो त्रिभुजो में, संगत कोण बराबर हो, तो उनकी संगत भुजाएं एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं।

अथवा,

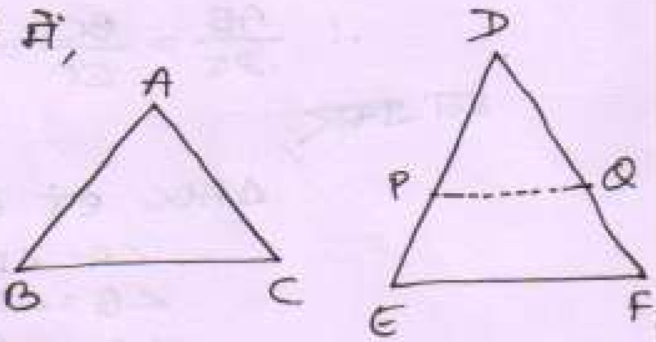
यदि दो त्रिभुजो के संगत कोण बराबर हो, अर्थात् दो त्रिभुज समकोणिक हो तो त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया है:- ΔABC एवं ΔDEF में,

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$



सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचना:- ΔDEF की भुजा DE पर एक बिन्दु P एवं भुजा DF पर एक अन्य बिन्दु Q इस प्रकार लिया कि:

$AB = DP$

$AC = DQ$

तथा PQ को मिलाया।

प्रमाण:- ΔABC एवं ΔDPQ में,

$AB = DP$

$AC = DQ$

$\angle A = \angle D$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (SAS - सर्वांगसमता से)

$\therefore \angle B = \angle P$ (CPCT)

लेकिन,

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

$\therefore \angle P = \angle E$

$\because$ ये कोण संगत कोण के हैं।

$\therefore PQ \parallel EF$

ΔDEF में,

$PQ \parallel EF$

$\therefore \dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ — (i) [रचना से]

इसी प्रकार से,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \quad \text{— (ii)}$$

समी० (i) तथा (ii) से,

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

इस प्रकार,

ΔABC एवं ΔDEF में,

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$ एवं $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

$\angle C = \angle F$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$

सिद्ध

Note:- दो समरूप त्रिभुज सदैव ही समकोणिक होते हैं।

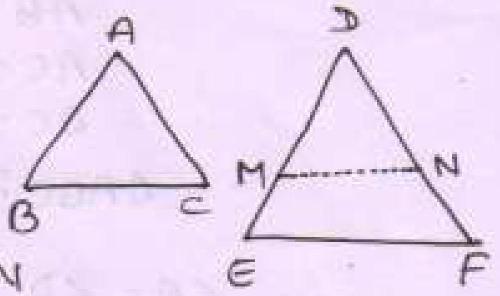
प्रमेय - 6.5 – यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओ के समानुपाती हो, तो इनके संगत कोण बराबर होते हैं, और इसीलिए दोनो त्रिभुज समरूप होते हैं।

अर्थात्

यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक हो, तो वे त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया है:- ΔABC एवं ΔDEF में,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$



सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

रचना:- ΔDEF की भुजा DE पर एक बिन्दु M तथा भुजा DF पर एक बिन्दु N इस प्रकार लिया कि $DM = AB$

$DN = AC$ हो तथा MN को मिलाया।

प्रमाण:- $\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

$\Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{DN}{DF}$ [रचना से]

$\because \Delta DEF$ में,

$$\frac{DM}{DE} = \frac{DN}{DF}$$

$\therefore MN \parallel EF$ [थेल्स प्रमेय के विलोम से]

अब,

ΔDMN एवं ΔDEF में,

$\angle D = \angle D$ [common]

एवं $\angle M = \angle E$ [संगत कोण]

$\angle N = \angle F$ [संगत कोण]

$\therefore \Delta DMN \sim \Delta DEF$ [AA-समरूपता से]

$\therefore \frac{DM}{DE} = \frac{MN}{EF}$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{MN}{EF}$ —— (1)

लेकिन,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \text{ — (ii) (दिया है)}$$

समी० (i) तथा (ii) से,

$$\frac{MN}{EF} = \frac{BC}{EF}$$

$\Rightarrow MN = BC$

ΔABC एवं ΔDMN में,

$AB = DM$
$AC = DN$
$BC = MN$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DMN$ (SSS- सर्वांगसमता से)

$\therefore \angle A = \angle D$
$\angle B = \angle M$
$\angle C = \angle N$

किन्तु, $\angle M = \angle E$ तथा $\angle N = \angle F$

$\therefore \angle A = \angle D$
$\angle B = \angle E$
$\angle C = \angle F$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ [AA- समरूपता से]

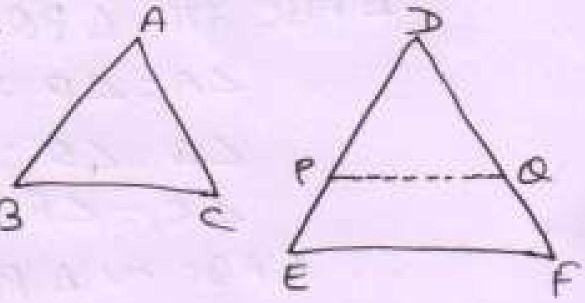
सिद्ध

प्रमेय - 6.5 - यदि दो त्रिभुजो की संगत भुजाओ का एक युग्म आनुपातिक हो और आन्तरिक कोण बराबर हो तो ये त्रिभुज समरूप होते है।

दिया है:- ΔABC एवं ΔDEF में,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ तथा } \angle A = \angle D$$

सिद्ध करना है:- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



रचना :- ΔDEF की भुजा DE एवं DF पर दो बिन्दु क्रमशः P एवं Q इस प्रकार काटा कि
$AB = DP$
$AC = DQ$ हो। PQ को मिलाया।

प्रमाण:- ΔABC एवं ΔDPQ में,

$AB = DP$
$AC = DQ$
$\angle A = \angle D$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DPQ$ [SAS-सर्वांगसमता से]

$$\left.\begin{aligned} \therefore \angle B &= \angle P \\ \angle C &= \angle Q \end{aligned}\right\} — ①$$

$$\because \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF}$$

$\therefore PQ \parallel EF$.

$\therefore \angle P = \angle E$ एवं $\angle Q = \angle F$ (संगत कोण)

लेकिन, $\angle B = \angle P$ एवं $\angle C = \angle Q$ (समी० ① से)

$\therefore \angle B = \angle E$ एवं $\angle C = \angle F$

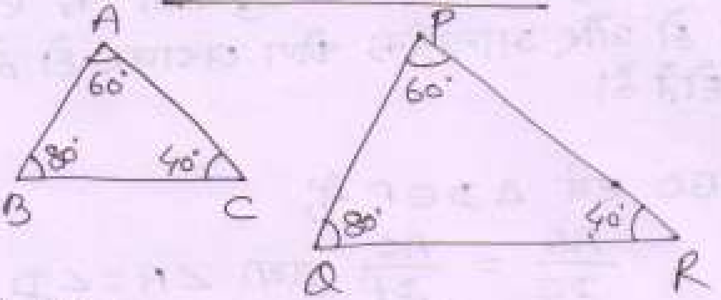
ΔABC एवं ΔDEF में,

$\angle A = \angle D$
$\angle B = \angle E$
$\angle C = \angle F$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ [AA - समरूपता से] सिद्ध

Exercise - 6.3

(1) (i)



ΔABC तथा ΔPQR में,

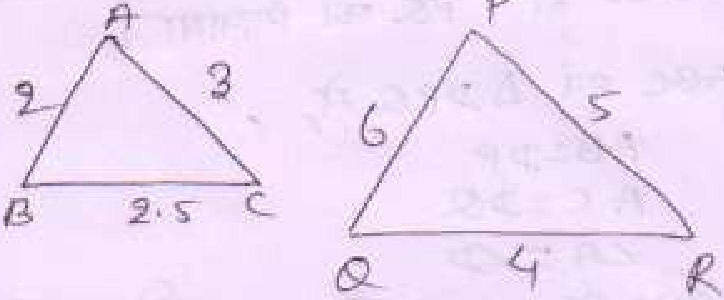
$\angle A = \angle P = 60°$

$\angle B = \angle Q = 80°$

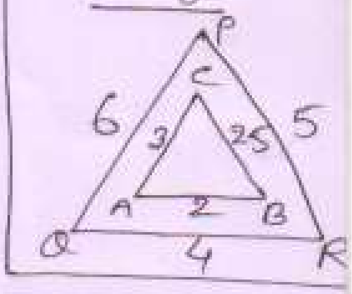
$\angle C = \angle R = 40°$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ [AAA- समरूपता से]

(ii)



Rough



ΔABC तथा ΔPQR में,

$\frac{AB}{QR} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2}$

$\frac{BC}{PR} = \frac{\cancel{2.5}}{\cancel{5}_2} = \frac{1}{2}$

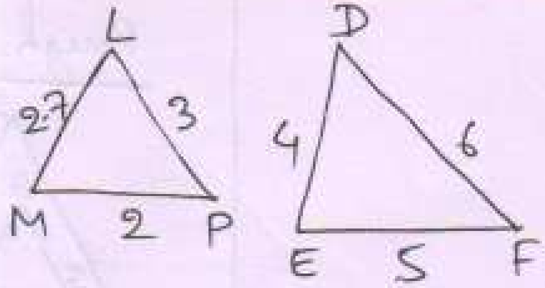
$\frac{AC}{PQ} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}_2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$

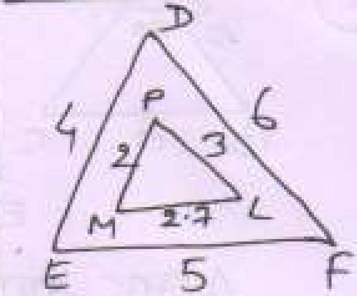
$\because$ भुजाएँ समानुपाती है

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ [SSS- समरूपता से]

7) (iii)



Rough



ΔLMP तथा ΔDEF में

$$\frac{MP}{DE} = \frac{2}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{PL}{DF} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}_2} = \frac{1}{2}$$

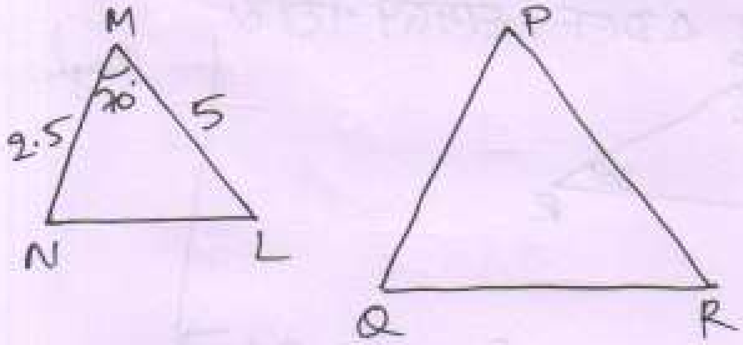
$$\frac{ML}{EF} = \frac{2.7}{5} = \frac{27}{5\times10} = \frac{27}{50}$$

$$\because \frac{MP}{DE} = \frac{PL}{DF} \neq \frac{ML}{EF}$$

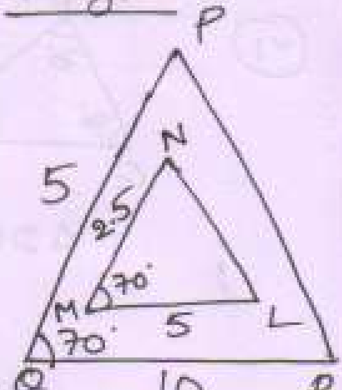
$\therefore$ भुजाएँ समानुपाती नही है

$\therefore$ ΔLMP तथा ΔDEF समरूप नही है।

(iv)



Rough



ΔMNL तथा ΔPQR में,

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\cancel{2.5}}{\cancel{5}_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ML}{QR} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{10}_2} = \frac{1}{2}$$

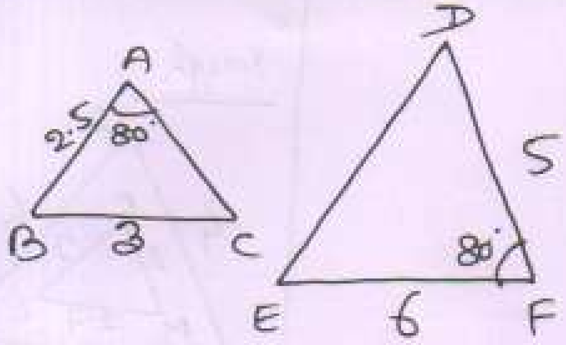
$$\angle M = \angle Q = 70$$

$$\because \frac{MN}{PQ} = \frac{ML}{QR} \text{ तथा } \angle M = \angle Q = 70°$$

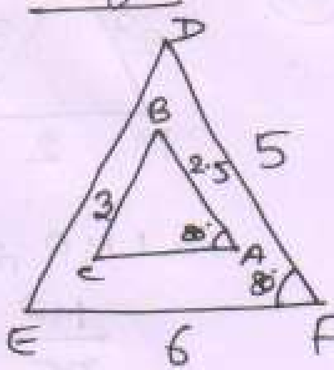
$\therefore$ $\Delta MNL \sim \Delta PQR$ [SAS- समरूपता से]

⟨1⟩

(v)



Rough



ΔABC तथा ΔDEF में,

$$\frac{AB}{DF} = \frac{2.5}{5_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{3}{DE}$$

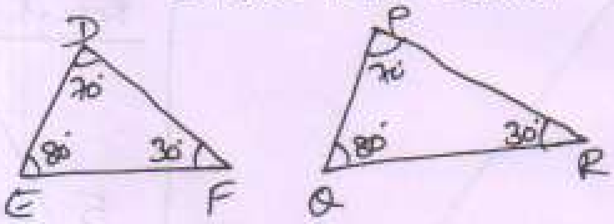
$$\frac{AC}{EF} = \frac{AC}{6}$$

$$\because \frac{AB}{DF} \neq \frac{BC}{DE} \neq \frac{AC}{EF}$$

$\therefore$ भुजाएँ समानुपाती नहीं हैं

$\therefore$ ΔABC तथा ΔDEF समरूप नहीं है

(vi)



Rough

ΔDEF में,

$\angle D + \angle E + \angle F = 180°$ [त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है]

$\Rightarrow 70° + 80° + \angle F = 180°$

$\Rightarrow 150° + \angle F = 180°$

$\Rightarrow \angle F = 180° - 150° = 30°$

ΔPQR में,

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$ [त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है]

$\Rightarrow \angle P + 80° + 30° = 180°$

$\Rightarrow \angle P + 110° = 180°$

$\Rightarrow \angle P = 180° - 110° = 70°$

ΔDEF तथा ΔPQR में,

$\angle D = \angle P$

$\angle E = \angle F$

$\therefore \Delta DEF \sim \Delta PQR$ [AA-समरूपता से]

(2.) दिया है:- $\Delta ODC \sim \Delta OBA$

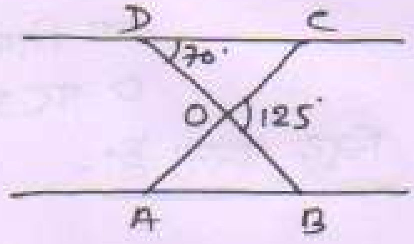
$\angle BOC = 125^\circ$

$\angle CDO = 70^\circ$

$\angle DOC = ?$

$\angle DCO = ?$

$\angle OAB = ?$



$\because \angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ Ans

फिर,

ΔDOC में,

$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ$ [Δ के तीनों कोणों का योग 180° होता है]

$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow 125^\circ + \angle DCO = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. Ans

फिर,

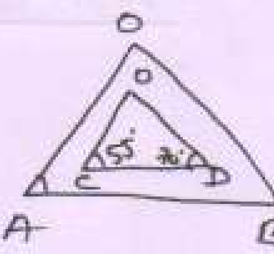
$\Delta ODC \sim \Delta OBA$

$\therefore \angle DCO = \angle OAB$ [संगत कोण]

$\Rightarrow 55^\circ = \angle OAB$

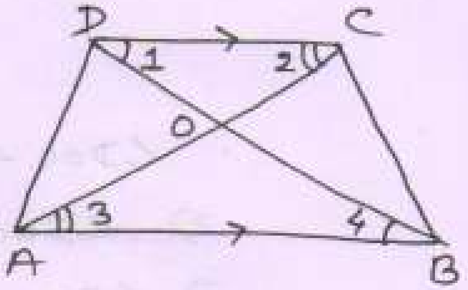
$\Rightarrow \angle OAB = 55^\circ$ Ans

Rough



(3) दिया है:- समलम्ब चतुर्भुज ABCD में,
$AB \parallel DC$
तथा विकर्ण AC और BD परस्पर
O पर प्रतिच्छेद करते हैं

सिद्ध करना है:- $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$



प्रमाण :- $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में,

$\angle 4 = \angle 1$
$\angle 3 = \angle 2$ } (अन्तः एकान्तर कोण)

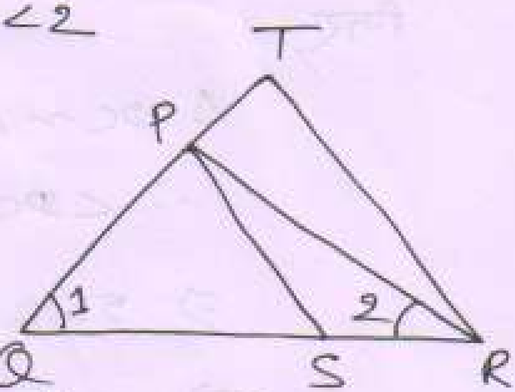
$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$ [AA- समरूपता से]

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

सिद्ध

(4.) दिया है:- $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है:- $\triangle PQS \sim \triangle TQR$



प्रमाण:- $\because$ $\triangle PQR$ में,

$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore PR = PQ$ [समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ की लम्बाई समान होती है]

दिया,

$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$$ [समी० (1) से]

$\triangle PQS$ तथा $\triangle TQR$

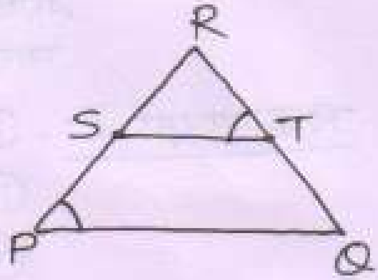
$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$$

तथा $\angle 1 = \angle 1$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \triangle PQS \sim \triangle TQR$ [SAS- समरूपता से] सिद्ध

(5) **दिया है:-** ΔPQR में,

$\angle P = \angle RTS$



सिद्ध करना है:- $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

प्रमाण:- ΔRPQ तथा ΔRTS में,

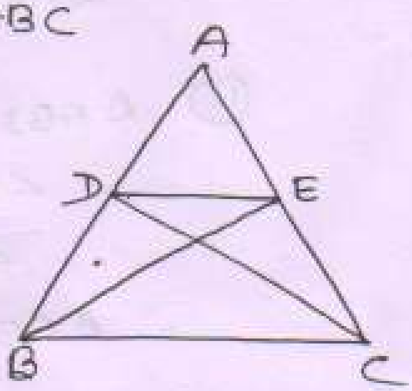
$\angle P = \angle RTS$

$\angle R = \angle R$ [Common]

$\therefore \Delta RPQ \sim \Delta RTS$ [AA- समरूपता से]

(6) **दिया है:-** $\Delta ABE \cong \Delta ACD$

सिद्ध करना है:- $\Delta ADE \sim \Delta ABC$



प्रमाण:- $\Delta ABE \cong \Delta ACD$

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$ — (i)

$\angle AEB = \angle ADC$ — (ii)

$AB = AC$ — (iii)

$AE = AD$

या, $AD = AE$ — (iv)

समी० (iv) में (iii) से भाग देने पर

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

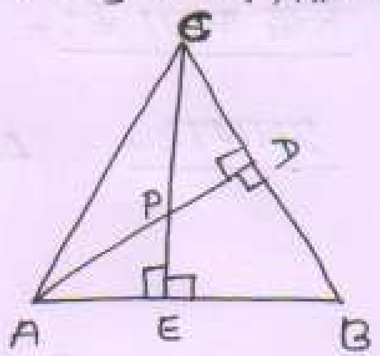
ΔADE तथा ΔABC में,

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ तथा $\angle A = \angle A$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$ [SAS- समरूपता से]

सिद्ध

(7) दिया है:- ΔABC में,
शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है:- (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

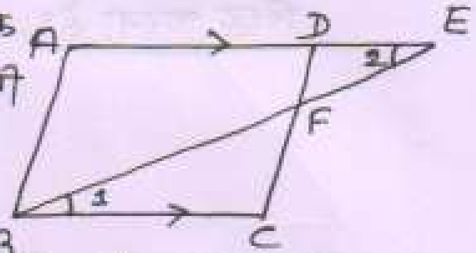
प्रमाण:- (i) ΔAEP तथा ΔCDP में,
$\angle AEP = \angle CDP$ (90°)
$\angle APE = \angle CPD$ [शीर्षाभिमुख कोण]
$\therefore \Delta AEP \sim \Delta CDP$ (AA समरूपता से)
सिद्ध

(ii) ΔABD तथा ΔCBE में,
$\angle ADB = \angle CEB$ (90°)
$\angle B = \angle B$ [Common]
$\therefore \Delta ABD \sim \Delta CBE$ (AA-समरूपता से)
सिद्ध

(iii) ΔAEP तथा ΔADB में,
$\angle AEP = \angle ADB$ (90°)
$\angle PAE = \angle DAB$ (Common)
$\therefore \Delta AEP \sim \Delta ADB$ (AA-समरूपता से)
सिद्ध

(iv) ΔPDC तथा ΔBEC में,
$\angle PDC = \angle BEC$ (90°)
$\angle PCD = \angle BCE$ [Common]
$\therefore \Delta PDC \sim \Delta BEC$ [AA-समरूपता से]
सिद्ध

(8) दिया है:- समान्तर चतुर्भुज ABCD में,
भुजा AD के बढ़े भाग पर E एक बिन्दु है तथा BE, CD को F पर काटती है।



सिद्ध करना है:- $\Delta ABE \sim \Delta CFB$

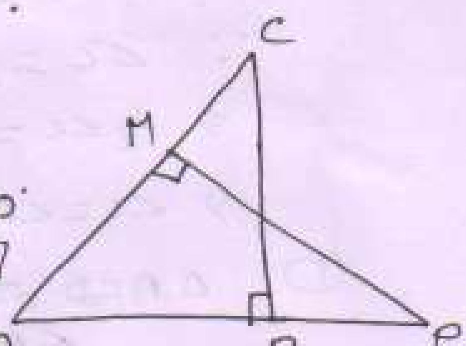
प्रमाण:- $AE \parallel BC$ और BE एक तिर्यक रेखा है
$\therefore \angle 1 = \angle 2$ —(1) [एकान्तर कोण]

ΔABE तथा ΔCFB में,
$\angle 2 = \angle 1$
$\angle A = \angle C$ [सम्मुख कोण]
$\therefore \Delta ABE \sim \Delta CFB$ [AA-समरूपता से]

सिद्ध

(9.) दिया है:- ΔABC और ΔAMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके $\angle B$ और $\angle M$ समकोण है।

सिद्ध करना है:- (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$
(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$



प्रमाण:- (i) ΔABC तथा ΔAMP में,
$\angle ABC = \angle AMP = 90^\circ$
$\angle A = \angle A$ [Common]
$\therefore \Delta ABC \sim \Delta AMP$ [AA-समरूपता से]

सिद्ध

(ii) $\because \Delta ABC \sim \Delta AMP$

$$\therefore \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

सिद्ध

10.) दिया है :- $\Delta ABC \sim \Delta FEG$

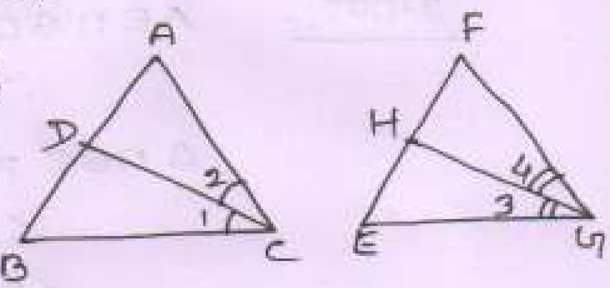
CD और GH क्रमशः $\angle C$ और $\angle G$ के अर्द्धक हैं

सिद्ध करना है :- (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

प्रमाण :- ~~ΔACD तथा ΔFGH में~~,



$\because \Delta ABC \sim \Delta FEG$

$\therefore \angle A = \angle F$ — (i)

$\angle B = \angle E$ — (ii)

$\angle C = \angle G$ — (iii)

$\because$ CD, $\angle C$ का अर्द्धक है

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle C$

तथा

GH, $\angle G$ का अर्द्धक है

$\therefore \angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle G$.

$\because \angle C = \angle G$ [समी० (iii) से]

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ — (iv)

(i) ΔACD तथा ΔFGH में,

$\angle A = \angle F$ (समी० (i) से)

$\angle 2 = \angle 4$ (समी० (iv) से)

$\therefore \Delta ACD \sim \Delta FGH$ (AA- समरूपता से)

$\therefore \angle ADC = \angle FHG$

$\therefore \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

सिद्ध

(ii) ΔDCB तथा ΔHGE में,

$\angle 1 = \angle 3$ (समी० (iv) से)

$\angle B = \angle E$ (समी० (ii) से)

$\therefore \Delta DCB \sim \Delta HGE$ (AA- समरूपता से)

(iii) ΔDCA तथा ΔHGF में,

$\angle A = \angle F$ (समी० (i) से)

$\angle 2 = \angle 4$ (समी० (iv) से)

$\therefore \Delta DCA \sim \Delta HGF$ (AA- समरूपता से)

सिद्ध