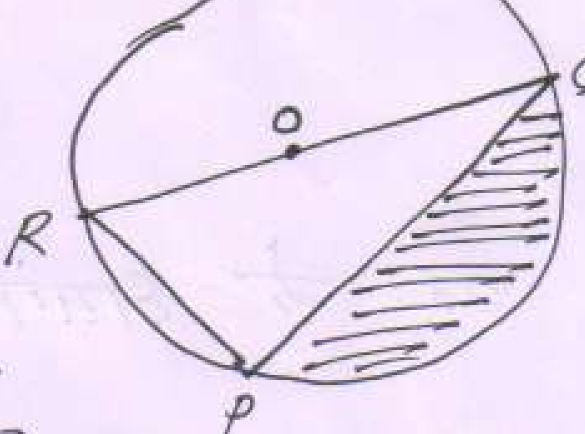
Ex - 12.3 (1)

(1) छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें यदि PQ = 24 cm PR = 7 cm तथा O वृत्त का व्यास है।



हल
QR वृत्त का व्यास है।
O वृत्त का केन्द्र है।

$\angle QPR = 90°$

समकोण $\triangle PQR$ में

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$
$$QR^2 = (24)^2 + (7)^2$$
$$QR^2 = 576 + 49$$
$$QR^2 = 625$$
$$QR = \sqrt{625}$$
$$= 25 \text{ cm.}$$

वृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{25}{2}$ cm

अर्ध वृत्त का का क्षे० (A1)

$$= \frac{1}{2} \times \pi R^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{25}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{7} \times \frac{25 \times 25}{\cancel{2} \times 2}$$

$$= \frac{11\times 625}{28} = \frac{6875}{28}\ \text{cm}^2$$

$\Delta PQR$ का क्षे० ($A_2$) $= \frac{1}{2} \times PQ \times PR$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{24}^{12} \times 7$$

$$= 84\ \text{cm}^2$$

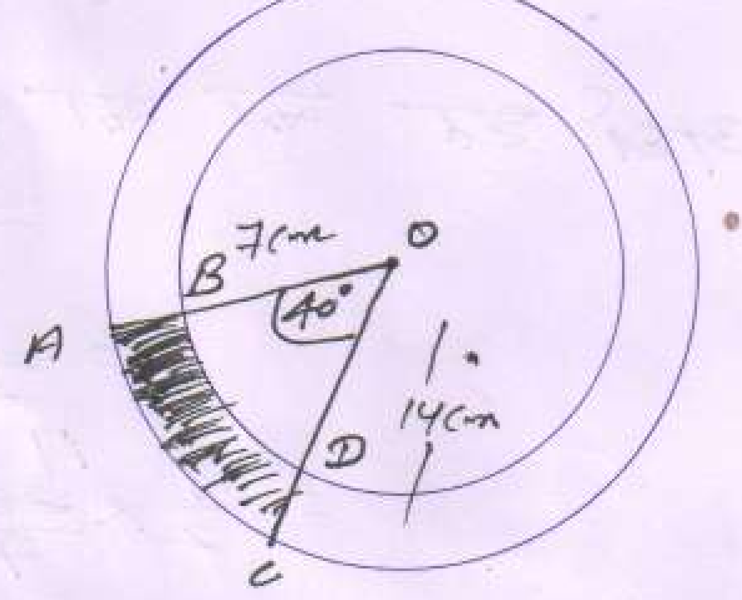
वृत के छायांकित भाग का क्षे०

$$= A_1 - A_2$$

$$= \left(\frac{6875}{28} - 84\right)\ \text{cm}^2$$

Ans

(2) छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें यदि केन्द्र O वाले संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्यायें क्रमशः 7 cm तथा 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40°$



∴ छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = 7 cm

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = 14 cm

केन्द्रीय कोण (θ) = 40°

छायांकित भाग का क्षे॰

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi (R^2 - r^2)$$

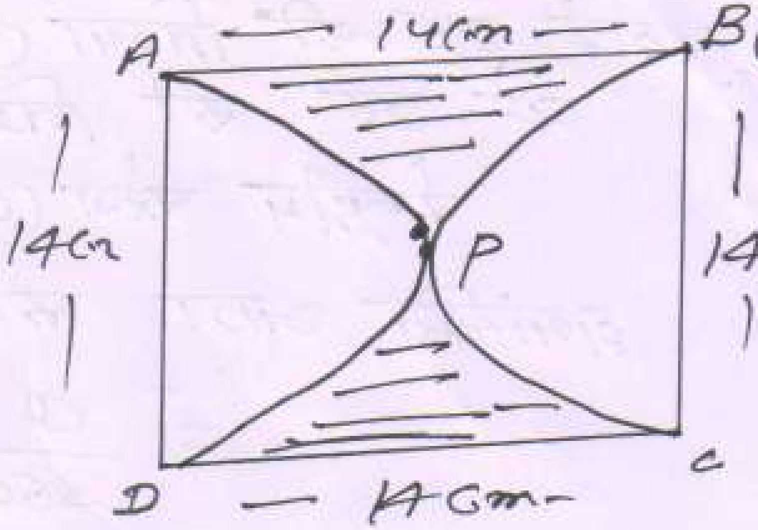
$$= \frac{40}{360} \times \frac{22}{7} \times \{(14)^2 - (7)^2\}$$

$$= \frac{40}{360} \times \frac{22}{7} (14+7)(14-7)$$

$$= \frac{\cancel{40}^{1}}{\cancel{360}_{\cancel{9}\,3}} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{21}^{7} \times \cancel{7}$$

$= \frac{154}{3}$ cm² Ans

(3) छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है। तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।




वर्ग की भुजा
$= 14\ cm$

अर्ध वृत्त का व्यास
$= 14\ cm$

त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2}$
$= 7\ cm$

वर्ग का क्षे० $(A_1) =$ भुजा$^2$

$$= (14)^2$$
$$= 14 \times 14$$
$$= 196\ cm^2$$

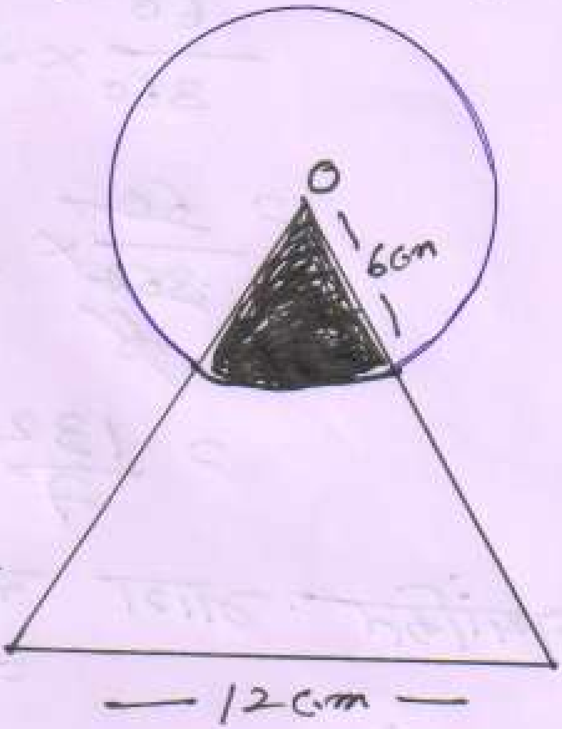
अर्ध वृत्त का क्षे० $(A_2) = \frac{1}{2} \times \pi r^2$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7)^2$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 7$$
$$= \underline{77\ cm^2}$$

दोनों अर्ध वृत्त का क्षे० $= 2 \times 77$
$= \underline{154\ cm^2}$

छायांकित भाग का क्षे० $= A_1 - A_2$
$= 196 - 154$
$= \underline{42\ cm^2}$

(4) आकृति 12.22 में आकृति भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केंद्र मानकर 6 cm त्रिज्या वाला एक वृत्तीय भाग खींचा गया है।




हल

वृत्त की त्रिज्या (r) = 6 cm

वृत्त का क्षे० ($A_1$)

$$= \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times (6)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6$$

$$= \frac{22 \times 36}{7} = \frac{792}{7} \text{ cm}^2$$

समबाहु $\triangle OAB$ का क्षे० ($A_2$)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{भुजा}^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (12)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \times \overset{3}{\cancel{12}} \times 12$$

$$= \sqrt{3} \times 36$$

$$= 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

त्रिज्यखण्ड OCD का क्षेत्रफल जिसका केन्द्रीय कोण 60° है।

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times (6)^2$$

$$= \frac{\cancel{60}}{\cancel{360}_{6}} \times \frac{22}{7} \times \cancel{6 \times 6}$$

$$= \frac{132}{7}\ cm^2$$

छायांकित भाग का क्षे०

$$= A_1 + A_2 - A_3$$

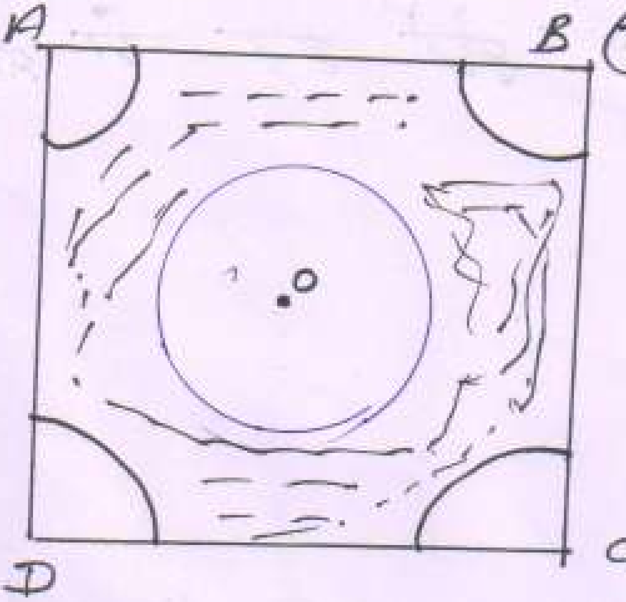
$$= \left(\frac{792}{7} + 36\sqrt{3} - \frac{132}{7}\right)$$

$$= \left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right) cm^2$$

(5) भुजा 4 cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 cm व्यास का एक वृत्त काटा गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल

माना कि ABCD एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक भुजा 4 cm है।




वृत्त के चतुर्थांश का व्यास = 2cm

त्रिज्या $(r) = \frac{2}{2}$

$= 1cm$

वर्ग का क्षे० $(A_1)$ = भुजा$^2$

$= (4)^2$

$= 4 \times 4$

$= 16\ cm^2$

चारों त्रिज्य खण्डों का क्षे० $(A_2)$

$= 4 \times \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= 4 \times \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times (1)^2$

$= \cancel{4} \times \frac{\cancel{90}}{\cancel{360}_{\cancel{4}}} \times \frac{22}{7} \times 1 \times 1$

$= \frac{22}{7}\ cm^2$

(ii) छोटे वृत्त का क्षे० $(A_3) = \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times (1)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 1 \times 1$$

$$= \frac{22}{7} \text{ cm}^2$$

अतः वर्ग के शेष भाग का क्षे०

$$= A_1 - (A_2 + A_3)$$

$$= 16 - \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7}\right)$$

$$= 16 - \left(\frac{22 + 22}{7}\right)$$

$$= \left(16 - \frac{44}{7}\right)$$

$$= \frac{112 - 44}{7}$$

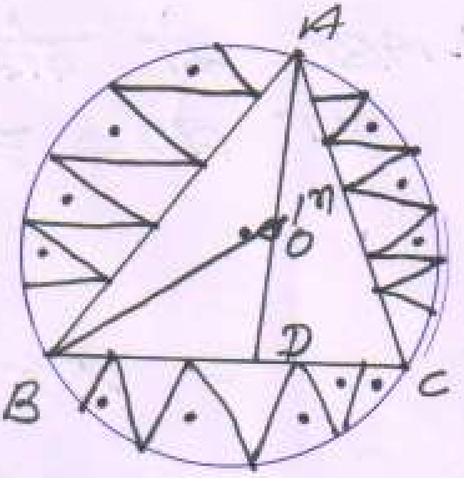
$$= \frac{68}{7} \text{ cm}^2$$

(6) एक वृत्ताकार मेजपोश, जिसकी त्रिज्या 32cm है, बीच में एक समबाहु $\triangle ABC$ छोड़ते हुए एक डिजाइन बना हुआ है। इस छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल

माना कि ABC एक समबाहु $\triangle$ है।

$AD \perp BC$




इस त्रिभुज की माध्यिकाओं का कटान बिंदु m है।

$$Am : mD = 2:1$$

$$32 : mD = \frac{2}{1}$$

$$\frac{32}{mD} = \frac{2}{1}$$

$$2 \times mD = 32$$

$$mD = \frac{32}{2} = \underline{16\ Cm}$$

$$Bm = Am = Cm = 32\ Cm = r$$

समकोण $\triangle BDm$ में

$$BD^2 = Bm^2 - mD^2$$

$$= (32)^2 - (16)^2$$

$$= 1024 - 256$$

$$= 768$$

$$BD^2 = 768$$

$$BD = \sqrt{768} = \sqrt{16 \times 16 \times 3}$$

$$= \underline{16\sqrt{3}\ Cm}$$

$BC = 2 \times BD$

$= 2 \times 16\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$ cm

अतः $\Delta ABC$ को छोड़कर शेष छायांकित का क्षे० = वृत्त का क्षे० − समबाहु $\Delta ABC$ का क्षे०

$= \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times BC^2$

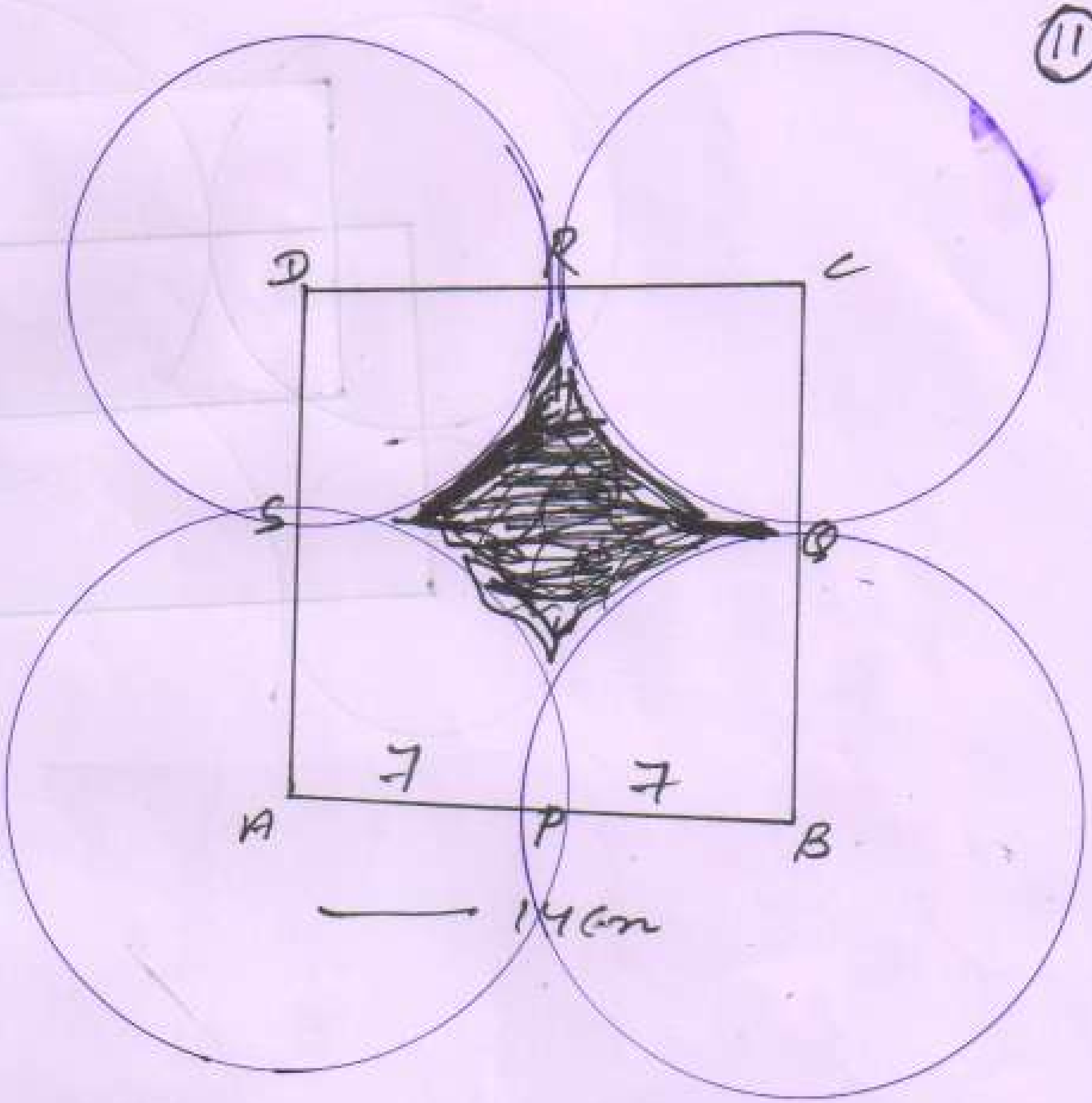
$= \frac{22}{7} \times (32)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (32\sqrt{3})^2$

$= \frac{22}{7} \times 32 \times 32 - \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \times \cancel{32}^{8}\sqrt{3} \times 32\sqrt{3}$

$= \left(\frac{22}{7} \times 1024 - 768\sqrt{3}\right)$ cm²

$= \left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right)$ cm² उत्तर

(7) ABCD भुजा वाला एक वर्ग है। A, B, C व D को केन्द्र मानकर चार वृत्त इस प्रकार खींचे गये हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।




हल

ABCD एक वर्ग है। जिसमें

$AB = BC = CD = DA = 14$ cm

प्रत्येक त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या (r)

$= \frac{14}{2}$

$= 7$ cm

चार समान त्रिज्यखण्डों का क्षे० ($A_1$)

$= 4 \times \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= 4 \times \frac{\theta}{360} \times \frac{22}{7} \times (7)^2$$

$$= \cancel{4} \times \frac{90}{\cancel{360}_{\cancel{4}}} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 7$$

$$= \underline{154 \text{ cm}^2}$$

वर्ग ABCD का क्षे० $(A_2)$ = भुजा$^2$

$$= (14)^2$$

$$= 14 \times 14$$

$$= \underline{196 \text{ cm}^2}$$

अछायांकित भाग का क्षे०

$$= A_1 - A_2$$

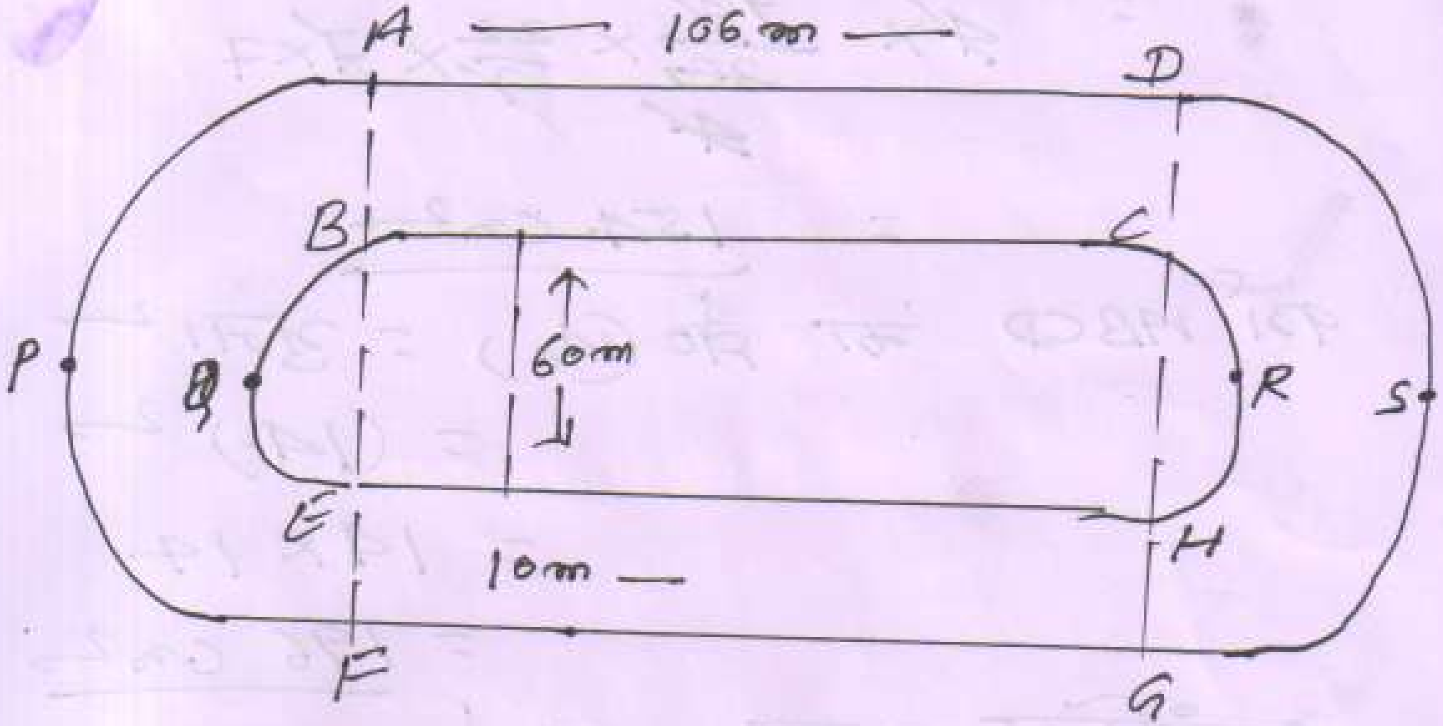
$$= 196 - 154$$

$$= \underline{42 \text{ cm}^2} \text{ Ans}$$

(8) आकृति 12.26 एक दौड़ने का पथ दर्शाती है, जिसके बायें तथा दायें सिरे अर्धवृत्ताकार है।
दोनों आंतरिक समान्तर रेखाखण्डों के बीच की दूरी 60 cm है। प्रत्येक रेखाखण्ड 106 m लंबा है। यदि यह पथ 10 m चौड़ा है। ज्ञात करें
(1) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर

भगाने में चली गयी दूरी

(ii) पथ का क्षेत्रफल




हल

BE = 60m

छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = 30 m

पथ की चौड़ाई = 10 m

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R)

= 30 + 10

= 40 m

(i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर भगाने में तय की गयी दूरी

$= BC + EH + \overset{\frown}{BQE} + \overset{\frown}{CRH}$

$= 106 + 106 + \pi r + \pi r$

$= 212 + 2\pi r$

$= 212 + 2 \times \frac{22}{7} \times 30$

$= 212 + \frac{1320}{7} = \frac{1484+1320}{7}$

$= \frac{2804}{7}$ मी²

(ii) पथ का कुल क्षेत्रफल

= आयत ABCD का क्षे० + आयत EFGH का क्षे० + वृत्ताकार वलय का क्षे०

$= (106 \times 10) + (106 \times 10) + \pi(R^2 - r^2)$

$= 1060 + 1060 + \frac{22}{7}(R+r)(R-r)$

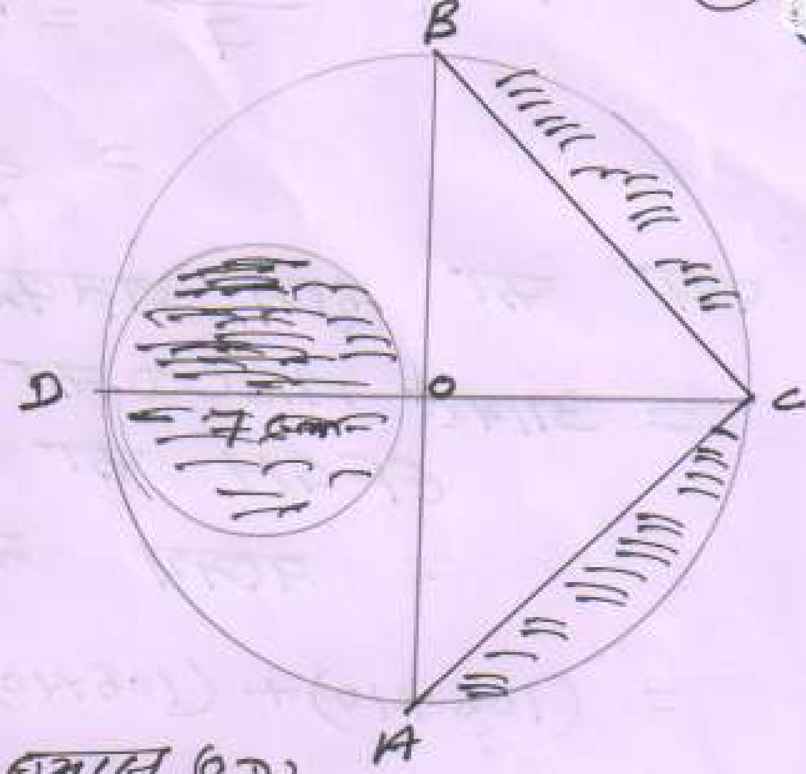
$= 2120 + \frac{22}{7}(40+30)(40-30)$

$= 2120 + \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{70}^{10} \times 10$

$= 2120 + 2200$

$= 4320\ cm^2$ A

(9) आकृति 12.27 में AB और CD केन्द्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7cm तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।




हल

छोटे वृत्त का व्यास (OD) $= 7$ cm

बड़े वृत्त का व्यास (DC) $= 2\times 7$

$= 14$ cm

छोटे वृत्त की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ cm

बड़े वृत्त की त्रिज्या $(R) = \frac{14}{2}$

$= 7$ cm

छोटे वृत्त का क्षे० $(A_1) = \pi r^2$

$= \frac{22}{7}\times\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$= \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}\times 7}{\cancel{2}\times 2}$

$= \frac{77}{2}$ cm$^2$

अर्धवृत्त ACBOA का क्षे० $(A_2) = \frac{1}{2}\pi R^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 7$

$= \underline{77\ cm^2}$

समकोण $\triangle ACB$ का क्षे० $(A_3) = \frac{1}{2} \times AB \times OC$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{7}{\cancel{14}} \times 7$

$= \underline{77\ cm^2}$

अतः छायांकित भाग का क्षे०

$= A_1 + A_2 - A_3$

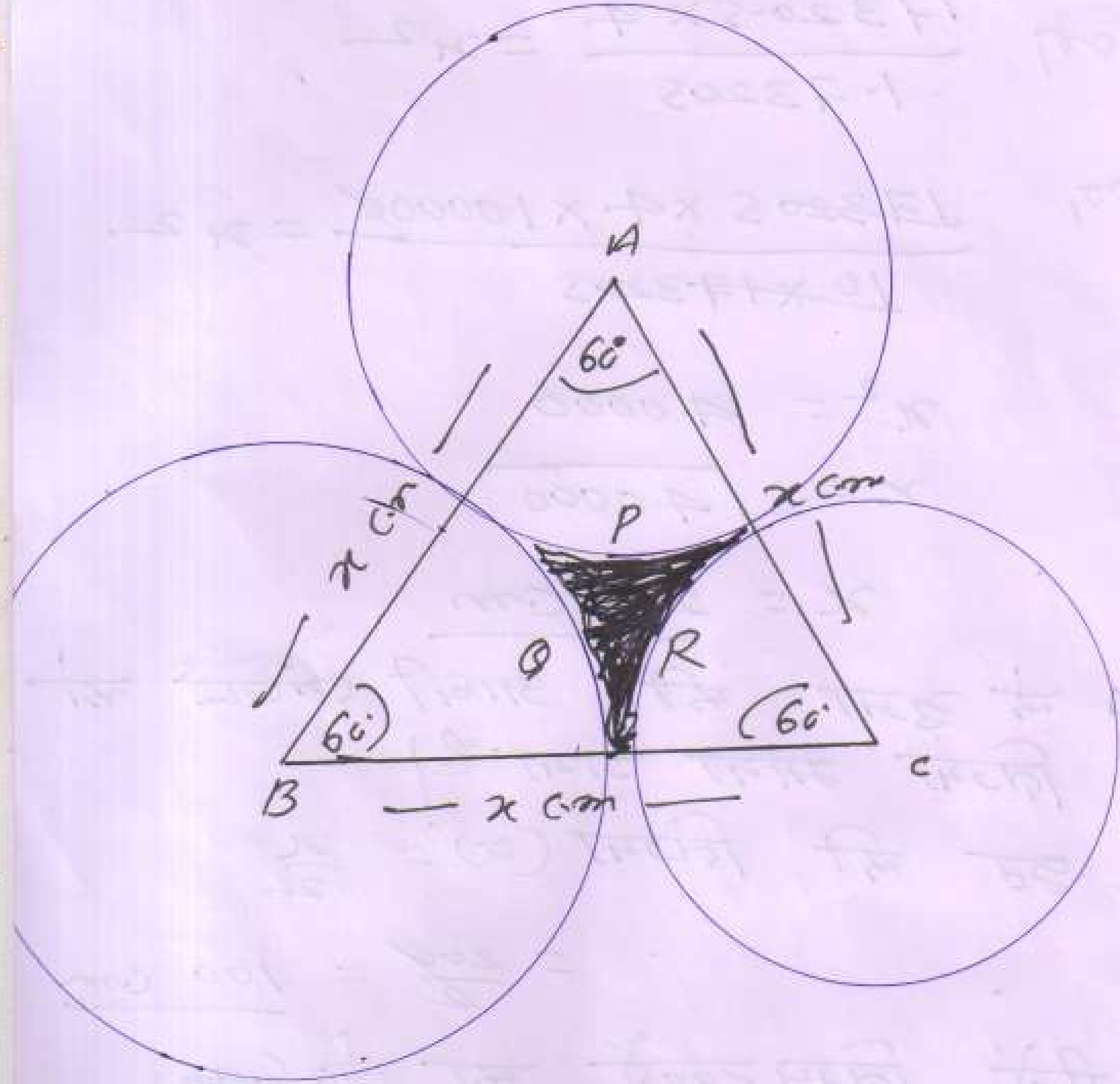
$= \frac{77}{2} + \cancel{77} - \cancel{77}$

$= \frac{77}{2}\ cm^2$ <u>An</u>

(10) एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $17320.5\ cm^2$ है। इस त्रिभुज के प्रत्येक ~~कोणीय~~ शीर्ष को केन्द्र मानकर तथा त्रिभुज की भुजा की आधी लंबाई को त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

$(\pi = 3.14)$

$\sqrt{3} = 1.73205$




माना कि ABC एक समबाहु $\Delta$ है।
जिसकी प्रत्येक भुजा x cm है।
दिया है—
समबाहु $\Delta ABC$ का क्षे० $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2$

$$17320.5 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2$$

या, $17320.5 = \frac{1.73205}{4} \times x^2$

या, $\frac{17320.5 \times 4}{1.73205} = x^2$

या, $\frac{\cancel{173205} \times 4 \times 10000\cancel{0}}{\cancel{10} \times \cancel{173205}} = x^2$

$x^2 = 40000$

$x = \sqrt{40000}$

$x = \underline{200 \text{ cm}}$

$\Delta$ के भुजा की आधी लंबाई को त्रिज्या माना गया है।

वृत्त की त्रिज्या $(r) = \frac{x}{2}$

$= \frac{20\cancel{0}}{\cancel{2}} = \underline{100 \text{ cm}}$

तीनों त्रिज्यखण्डों का क्षेत्र ~~[illegible]~~

$= 3 \times \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \cancel{3} \times \frac{60}{\cancel{360}_{\cancel{6}\,2}} \times \overset{1.57}{\cancel{3.14}} \times (100)^2$

$= 1.57 \times 100 \times 100$

$= 15700 \text{ cm}^2$

छायांकित भाग का क्षे०

= $\Delta ABC$ का क्षे० − तीनों त्रिज्यखण्डों का क्षे०

$= 17320.5 - 15700$

$= 1620.5\ cm^2$

(11) एक वर्गाकार रूमाल, नौ वृत्ताकार डिजाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 cm है। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

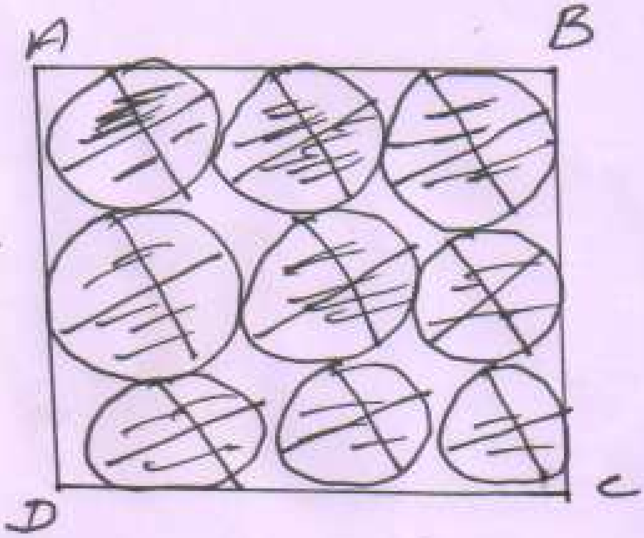
हल

प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या (r) = 7 cm

प्रत्येक वृत्ताकार डिजाइन का व्यास

$= 2 \times 7$

$= 14\ cm$




तीन वृत्ताकार डिजाइन का व्यास

$= 3 \times 14$

$= 42\ cm$

वर्गाकार रूमाल की एक भुजा

$= 42\ cm$

अतः रूमाल का क्षे० $(A_1)$ = भुजा$^2$

$= (42)^2$