Class-8

CHAPTER-13

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन
Surface Area and Volume

* **ठोस (Solid) :-** वे वस्तुएँ जिनकी आकार एवं माप निश्चित होती है, ठोस वस्तुएँ कहलाती है।

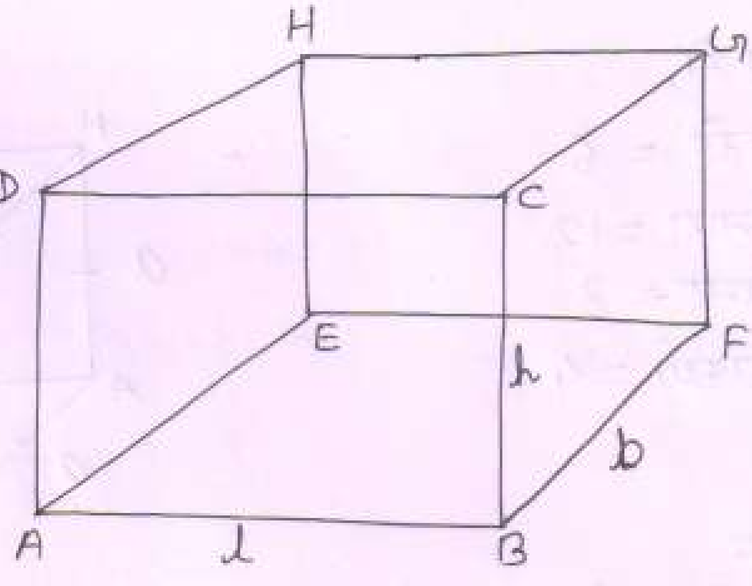
  ⇒ ठोस वस्तुएँ एक निश्चित स्थान भी घेरती है।

* **घनाभ (Cuboid) :-** छः आयताकार पृष्ठों से घिरी हुई आकृति को घनाभ कहते है।

  ⇒ वे ठोस वस्तुएँ जिनके फलक (faces) आयताकार होते है, वे घनाभ कहलाती है।

  जैसे :- माचिस, किताब, आलमीरा इत्यादि
  सलाई, बक्सा, कमरा (आयताकार)

सतहें = 6
किनारा = 12
कोना = 8
विकर्ण = 4



घनाभ में केवल लम्बाई = l
चौड़ाई = b
ऊँचाई = h

सुत्र (Formula) :-

(i) घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

(ii) घनाभ का विकर्ण = $d = \sqrt{l^2+b^2+h^2}$

(iii) घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb+bh+lh)$

(iv) घनाभ का वक्रपृष्ठ का क्षेत्र = घनाभ के पार्श्व फलकों का क्षेत्र
$= 2(l+b) \times h$

(v) घनाभ या कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्र = $2(l+b) \times h$

* घन (Cube) :- जिस घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई तीनों आपस में बराबर होती है, उसे घन कहते है

=> वे ठोस वस्तुएँ जिनके फलक वर्गाकार होते है, घन कहलाती है

जैसे :- पासा, चीनी के घन, वर्फ का घन इत्यादी ।

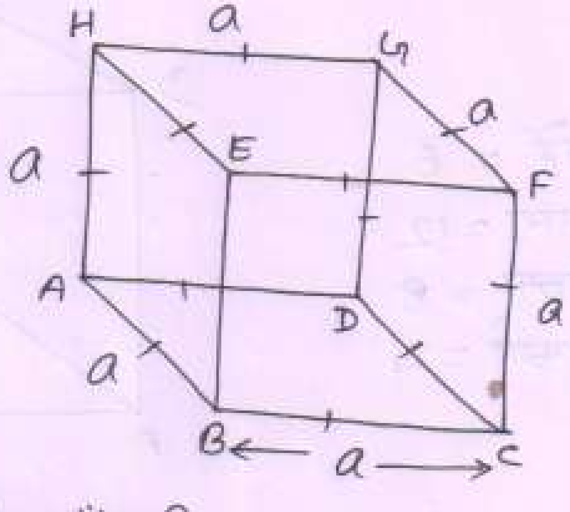
घन में;

सतहें = 6

किनारा = 12

कोना = 8

विकर्ण = 4



नोट :-

∵ घन में लम्बाई = चौड़ाई = ऊँचाई

∴ $l = b = h = a$ (माना कि)

सूत्र (Formula):-

(i) घन का आयतन $= (\text{भुजा})^3 = a^3$

(ii) घन का विकर्ण $= \sqrt{3} \times$ भुजा।
$= \sqrt{3}a$

(iii) घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4 \times \text{भुजा}^2$
$= 4a^2$

(iv) घन का कुल पृष्ठीय क्षे० $= 6 \times \text{भुजा}^2$
$= 6a^2$

* बेलन/लम्ब वृत्तीय बेलन (Right circular cylinder):-

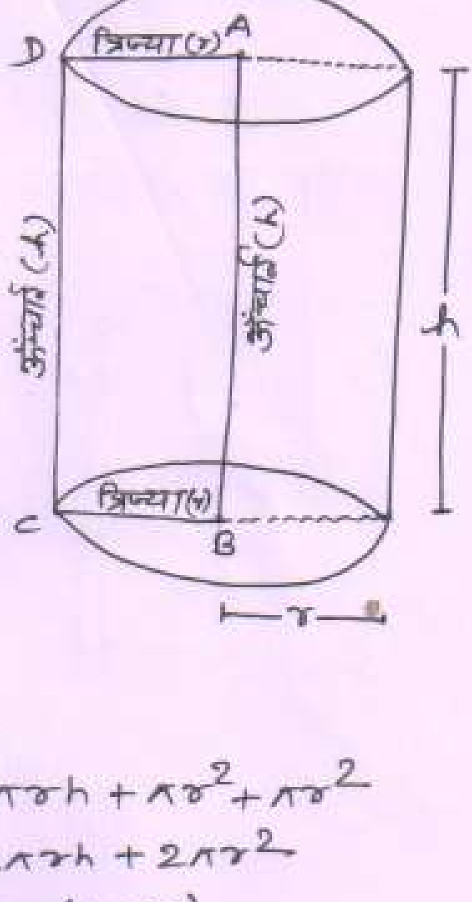
एक आयत को उसकी किसी भुजा के परितः घुमाने पर जो ठोस आकृति बनता है उसे लम्ब वृत्तीय बेलन कहते है,
जैसे:- रोलर, गैस सिलिंडर, वृत्ताकार पाईप इत्यादि।

आकृति में,

AB = बेलन की ऊँचाई = h

AD = BC = बेलन की त्रिज्या = r

∵ बेलन के दोनो आधार (base) सर्वांगसम होते है तथा आकार में वृत्ताकार होते है। बिन्दु A तथा B क्रमशः दोनो आधारो के केन्द्र है।



सूत्र (Formula):-

(i) बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

(ii) बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षे० $= 2\pi r h$

(iii) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे० $= 2\pi r h + \pi r^2 + \pi r^2$
$= 2\pi r h + 2\pi r^2$
$= 2\pi r(h + r)$

(iv) बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r$

(v) बेलन के आधार का क्षे० $= \pi r^2$

* खोखला बेलन (Hollow cylinder) :-

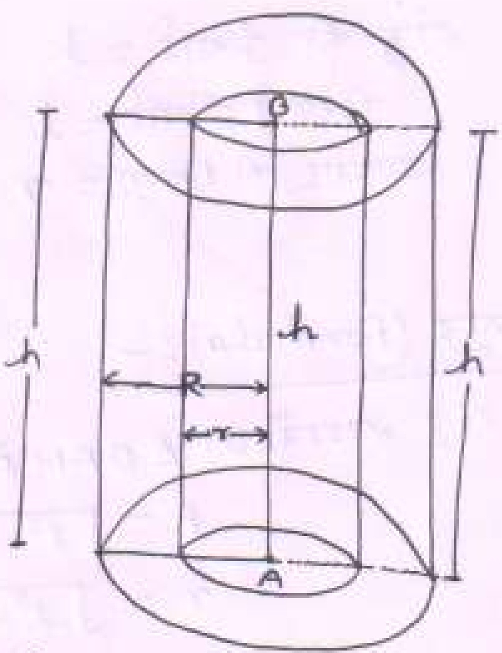
Example :- लोहे का पाइप, रबर की नली इत्यादि ।

माना कि,

खोखले बेलन की बाहरी त्रिज्या = R

भीतरी त्रिज्या = r

ऊँचाई = h



(i) खोखले बेलन का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्र

$= 2\pi Rh$

(ii) खोखले बेलन का भीतरी पृष्ठीय क्षेत्र

$= 2\pi rh$

(iii) खोखले बेलन की मोटाई = $R-r$

∴ बेलन में प्रयुक्त धातु की मोटाई = $R-r$

(iv) खोखले बेलन में प्रयुक्त धातु का आयतन $= \pi R^2h - \pi r^2h$

$= \pi h(R^2 - r^2)$

$= \pi h(R+r)(R-r)$

(v) खोखले बेलन के आधार का क्षेत्र $= \pi R^2 - \pi r^2$

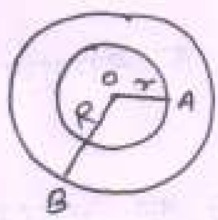
$= \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi(R+r)(R-r)$

(vi) खोखले बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्र $= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi(R^2 - r^2)$

(vii) वलय का क्षेत्र $= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi(R^2 - r^2)$

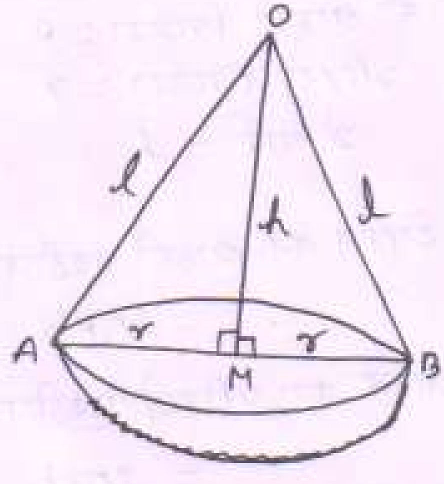


* **शंकु (Cone):-** किसी समकोण त्रिभुज को उसकी किसी एक भुजा के परितः घुमाने पर बनी हुई ठोस आकृति लम्बवृत्तीय शंकु या शंकु कहलाती है।

शंकु की ऊँचाई = h

तिरछी ऊँचाई = l

आधार की त्रिज्या = r



सूत्र (formula):-

(i) समकोण ΔOAM में,

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$\therefore$ शंकु की तिरछी ऊँचाई $= l = \sqrt{h^2 + r^2}$

शंकु की ऊँचाई $= h = \sqrt{l^2 - b^2}$

शंकु की त्रिज्या $= r = \sqrt{l^2 - h^2}$

(ii) शंकु के आधार का क्षे० $= \pi r^2$

(iii) शंकु के आधार की परिधि $= 2\pi r$

(iv) शंकु का वक्रपृष्ठ का क्षे० $= \frac{1}{2} \times$ आधार की परिधि $\times$ तिरछी ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l$$

$$= \pi r l$$

(v) शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे० $= \pi r l + \pi r^2$

$$= \pi r (l + r)$$

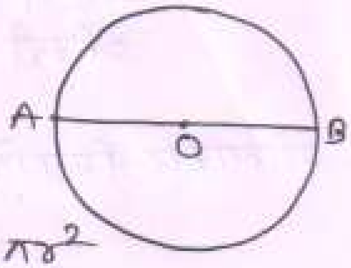
(vi) शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

* **गोला (sphere) :-** गोला एक ठोस आकृति है जो किसी वृत्त को उसके व्यास के चारो ओर घुमाने पर बनता है तथा वृत्त का केन्द्र ही गोले का केन्द्र कहलाता है।

जैसे:- क्रिकेट बॉल, फुटबॉल, कंचे की गोली

सूत्र (formula) :-

∵ गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ वक्राकार होता है।



(i) गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्र = $4\pi r^2$

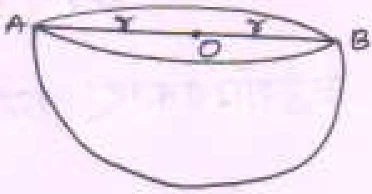
(ii) गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

* **अर्द्धगोला (Hemispher) :-** जब किसी गोले को एक समतल के द्वारा उसके केन्द्र के अनुदिश काटा जाता है तो वह दो समान भागों में बँट जाता है। प्रत्येक भाग अर्द्धगोला कहलाता है।

∴ अर्द्धगोले की त्रिज्या = r

(i) अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ का क्षेत्र = $2\pi r^2$

(ii) अर्द्धगोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्र



$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

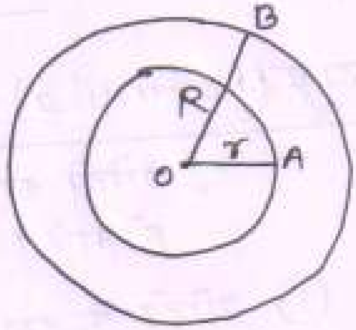
(iii) अर्द्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^2$

(iv) अर्द्धगोले की परिमाप = $2\pi r + 2r$

$= 2r(\pi + 2)$

* गोलाकार छिलका (Spherical shell):-

गोलाकार छिलका एक ठोस आकृति होता है जो दो संकेन्द्रीय वृत्तो से बनता है।



गोलाकार छिलके में,

बाहरी त्रिज्या $= R$

भीतरी त्रिज्या $= r$

∴ गोलाकार छिलके का आयतन

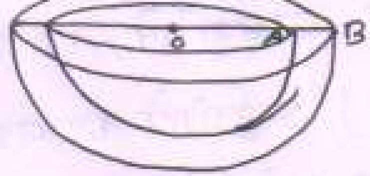
$=$ बड़े गोले का आयतन - छोटे गोले का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

* अर्द्धगोलाकार कटोरा (Hemispherical bowl):-

बाहरी त्रिज्या $= R$ भीतरी त्रिज्या $= r$



(i) अर्द्धगोलाकार कटोरे वक्रपृष्ठ का क्षेत्र $= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

$$= 2\pi (R^2 + r^2)$$

(ii) अर्द्धगोलाकार कटोरे का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्र

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi (R^2 - r^2)$$

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi R^2 - \pi r^2$$

$$= 3\pi R^2 + \pi r^2$$

$$= \pi (3R^2 - r^2)$$

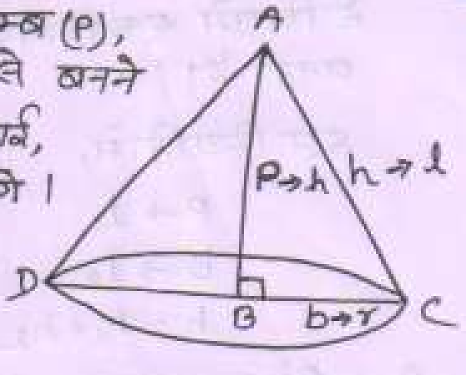
(iii) कटोरे में प्रयुक्त धातु का आयतन $= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

⇒ एक समकोण त्रिभुज को उसके भुजाओं के परितः तीन प्रकार से घुमाया जाता है।

(i) <u>लम्ब के चारो ओर घूर्णन (Rotation about the perpendicular)</u>

यहाँ, समकोण ΔABC के लम्ब (p), आधार (b) एवं कर्ण (h) इससे बनने वाले शंकु के क्रमशः ऊँचाई, त्रिज्या एवं तिरछी ऊँचाई होंगे।



अर्थात्

$p \to h$

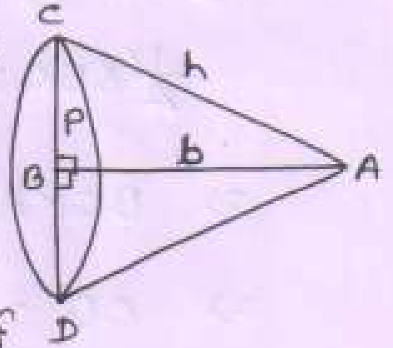
$b \to r$

$h \to l$

(ii) <u>आधार के चारो ओर घूर्णन (Rotation about the base)</u>

यहाँ,

समकोण ΔABC के आधार AB के परितः घुमाया गया है इस स्थिति में समकोण ΔABC के लम्ब, आधार एवं कर्ण, इससे बने हुए शंकु के क्रमशः त्रिज्या, ऊँचाई एवं तिरछी ऊँचाई को निरूपित करेंगे।



अर्थात्

$p \to r$

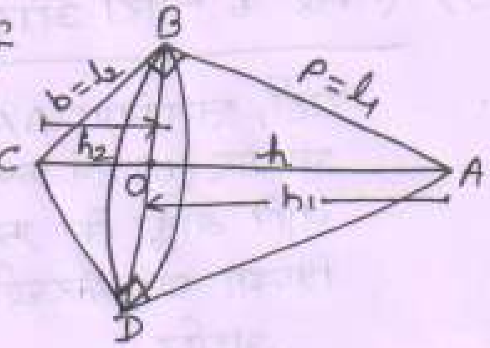
$b \to h$

$h \to l$

(iii) कर्ण के चारो ओर घूर्मन (Rotation about the hypotenuse)

यहां,

समकोण ΔABC को उसके कर्ण AC के चारों ओर घूमाया गया है जिसमें एक द्विशंकु आकृति बनती है।



इस स्थिति में,

$P \rightarrow l_1$

$b \rightarrow l_2$

$h = h_1 + h_2$

दी गई आकृति से त्रिज्या (r) ज्ञात करना :-

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} \times BC \times AB \quad \text{——} (I)$$

पुनः

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} \times AC \times OB \quad \text{——} (II)$$

समी० (I) तथा (II) से,

$$\frac{1}{2} \times BC \times AB = \frac{1}{2} \times AC \times OB$$

$$\Rightarrow BC \times AB = AC \times OB$$

$$\Rightarrow OB = \frac{BC \times AB}{AC}$$

$$\Rightarrow r = \frac{BC \times AB}{AC}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l_2 \times l_1}{h_2 + h_1}$$