

* वास्तविक संख्याएँ (Real Number) :-

परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को वास्तविक संख्या कहते हैं।

अर्थात्, सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का संग्रह वास्तविक संख्याओं का समुच्चय कहलाता है।

* परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

किसी भी परिमेय संख्या को दशमलव के रूप में लिखा जा सकता है और यह दशमलव रूप केवल दो तरह का हो सकता है —

- (i) जिसमें दशमलव के बाद अंकों की संख्या सीमित हो - [सांत या अवसानी दशमलव (terminating decimal)]
- (ii) जिसमें दशमलव के बाद अंकों की संख्या सीमित न हो और सांच-ही अंकों के एक समूह की क्रमानुसार पुनरावृत्ति हो।
[आवर्ती (recurring)]
- (iii) परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण अवसानी तभी होता है जब इसके हर का गुणनखंड केवल 2 या केवल 5 या केवल 2 और 5 हो :-

$$\text{जैसे: - } \frac{5}{4} = \frac{5}{2 \times 2}$$

$$\text{or } \frac{3}{25} = \frac{3}{5 \times 5}$$

$$\text{or } \frac{5}{50} = \frac{5}{2 \times 5 \times 5}$$

अतः प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत (terminating) होता है या अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring) होता है - परिमेय संख्या (Rational Number)

* अपरिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण :-

प्रत्येक अपरिमेय संख्या का दशमलव निरूपण अनन्त तथा अनावर्ती या असांत (non-terminating and non-recurring) होता है।

$$\sqrt{2} = 1.4142135 \dots$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508 \dots$$

$$\sqrt{5} = 2.2360679 \dots$$

* परिमेय संख्याओं के दशमलव रूप के सांत या असांत होने की पहचान :-

(i) यदि किसी परिमेय संख्या के हर का अभाज्य गुणनखंड केवल 2 या 5 या दोनों हो तो इसका दशमलव प्रसार सांत या अवसानी (terminating) होगा।

(ii) यदि किसी परिमेय संख्या के हर का अभाज्य गुणनखंड 2 या 5 के अलावा अन्य अभाज्य गुणनखण्ड हो तो इसका दशमलव प्रसार असांत या अवसानी आवर्ती होगा।

Note:- यदि दशमलव रूप आवर्ती हो तो -

परिमेय संख्या = $\frac{\text{आवर्त दशमलव अंशों को उली क्रम में लिखने पर प्राप्त संख्या} - \text{प्रथम आवर्त अंक के पहले तक के अंकों से बनी संख्या}}{\text{दशमलव बिंदु के बाद अंशों की संख्या}}$

परिमेय संख्या =

(10) $\frac{\text{दशमलव बिंदु के बाद अंशों की संख्या}}{\text{दशमलव बिंदु के बाद अंशों की संख्या}}$

जैसे. ① $7.478 = \frac{7478 - 7}{10^3 - 10^0}$

$$= \frac{7471}{1000 - 1} = \frac{7471}{999}$$

जैसे: (ii)

$$2.4\bar{7} = \frac{247 - 24}{10^2 - 10^1}$$

$$= \frac{223}{100 - 10}$$

$$= \frac{223}{90}$$

(iii)

$$4.53\bar{2} = \frac{4532 - 453}{10^3 - 10^2}$$

$$= \frac{4079}{1000 - 100}$$

$$= \frac{4079}{900}$$

(iv)

$$7.324\bar{5} = \frac{73245 - 732}{10^4 - 10^2}$$

$$= \frac{72513}{10000 - 100}$$

$$= \frac{72513}{9900}$$

(v)

$$13.756\bar{8} = \frac{137568 - 137}{10^4 - 10^1}$$

$$= \frac{137431}{10000 - 10}$$

$$= \frac{137431}{9990}$$

Example:- निम्नलिखित को परिमेय संख्या के रूप में बदलें- (23)

(i) $2.\bar{4} = 2.444\ldots$

माना कि $x = 2.444\ldots$ — (i)

समीक (i) में 10 से गुणा करने पर

$\Rightarrow 10x = 24.444\ldots$ — (ii)

समीक (ii) में से (i) को घटाने पर

$\Rightarrow 9x = 22$

$\Rightarrow x = \frac{22}{9}$ Δ

(ii) $6.\bar{46} = 6.46 = 6.464646\ldots$

माना कि $x = 6.464646\ldots$ — (i)

समीक (i) में 100 से गुणा करने पर

$\Rightarrow 100x = 646.464646\ldots$ — (ii)

समीक (ii) में से (i) को घटाने पर

$\Rightarrow 99x = 640$

$\Rightarrow x = \frac{640}{99}$ Δ

(iii) $2.\bar{346} = 2.346346346\ldots$

माना कि $x = 2.346346346\ldots$ — (i)

समीक (i) में 1000 से गुणा करने पर

$\Rightarrow 1000x = 2346.346346346\ldots$ — (ii)

समीक (ii) में से (i) को घटाने पर

$\Rightarrow 999x = 2346 - 2 = 2344$

$\Rightarrow x = \frac{2344}{999}$ Δ

(iv)

$$1.43\overline{2} = 1.43222 \dots$$

माना कि $x = 1.43222 \dots$ — (i)

समीक (i) में 100 से गुणा करने पर

$$\Rightarrow 100x = 143.222 \dots \text{ --- (ii)}$$

फिर,

समीक (i) में 1000 से गुणा करने पर

$$\Rightarrow 1000x = 1432.222 \dots \text{ --- (iii)}$$

समीक (iii) में से (ii) को घटाने पर

$$\Rightarrow 900x = 1432 - 143$$

$$\Rightarrow 900x = 1289$$

$$\Rightarrow x = \frac{1289}{900}$$

- 4) ① $\frac{36}{100} = 0.36$, इसका दशमलव प्रसार सांत है ✓
- ② $\frac{1}{11} = 0.0909\ldots$, अनवसानी पुनरावर्ती ✓
- ③ $4\frac{1}{8} = 4.125$, सांत ✓
- ④ $\frac{3}{13} = 0.230769$, अनवसानी पुनरावर्ती ✓
- ⑤ $\frac{2}{11} = 0.18$, अनवसानी पुनरावर्ती ✓
- ⑥ $\frac{329}{400} = 0.8225$, सांत ✓

2) $\therefore \frac{1}{7} = 0.142857$, सांत

$\therefore \frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 2 \times 0.142857 = 0.285714$ सांत ✓

$\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 3 \times 0.142857 = 0.428571$ सांत ✓

$\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 4 \times 0.142857 = 0.571428$ सांत ✓

$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 5 \times 0.142857 = 0.714285$ सांत ✓

$\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 6 \times 0.142857 = 0.857142$ सांत ✓

3) (i) $0.\bar{6} = 0.666\ldots$

माना कि $x = 0.666\ldots$ — (i)

समीक (i) में 10 से गुणा करने पर

$\Rightarrow 10x = 6.666\ldots$ — (ii)

समीक (ii) में से (i) को घटाने पर

$\Rightarrow 9x = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ✓

(ii) $0.4\bar{7} = 0.4777\ldots$

माना कि $x = 0.4777\ldots$ — (i)

समीक (i) में 10 से गुणा करने पर

$\Rightarrow 10x = 4.777\ldots$ — (ii)

फिर,

समीक (i) में 100 से गुणा करने पर

$\Rightarrow 100x = 47.777\ldots$ — (iii)

समीक (iii) में से (ii) को घटाने पर

$\Rightarrow 90x = 43$

$\Rightarrow x = \frac{43}{90}$ ✓

(iii)

$$0.\overline{001} = 0.001001001\ldots$$

(24)

माना कि $x = 0.001001001\ldots$ — (i)

समी० (i) में 1000 से गुणा करने पर

$$\Rightarrow 1000x = 1.001001001\ldots$$
 — (ii)

समी० (ii) में से (i) को घटाने पर

$$\Rightarrow 999x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{999}$$

4.)

$$0.\overline{999999} = 0.\overline{9}$$

माना कि $x = 0.\overline{999999}$ — (i)

समी० (i) में 10 से गुणा करने

$$\Rightarrow 10x = 9.\overline{999999}$$
 — (ii)

समी० (ii) में से (i) को घटाने पर

$$\Rightarrow 9x = 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{9} = 1$$

इससे स्पष्ट है कि किसी दशमिक को भी अनवसानी आवर्ती शमलक रूप में लिखा जा सकता है।

5.)

$$\frac{1}{17} =$$

$$17 \overline{) 100} 0.0588235294117647$$

$$\underline{85}$$

$$150$$

$$\underline{136}$$

$$140$$

$$\underline{136}$$

$$xx40$$

$$34$$

$$\underline{}$$

$$x60$$

$$51$$

$$\underline{}$$

$$x90$$

$$85$$

$$\underline{}$$

$$x50$$

$$34$$

$$\underline{}$$

$$160$$

$$\underline{153}$$

$$xx70$$

$$68$$

$$\underline{}$$

$$x20$$

$$17$$

$$\underline{}$$

$$x30$$

$$17$$

$$\underline{}$$

$$130$$

$$\underline{119}$$

$$x110$$

$$102$$

$$\underline{}$$

$$xx80$$

$$68$$

$$\underline{}$$

$$120$$

$$\underline{119}$$

$$xx1$$

$$\therefore \frac{1}{17} = 0.0588235294117647$$

स्पष्ट: $\frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार के पुनरावृत्ति खण्ड में 16 अंक हैं।



6.) हम $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) के रूप की परिमेय संख्याओं का (29)

उदाहरण —

$$(i) \frac{3}{20} = \frac{3}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3}{2^2 \times 5}$$

$$(ii) \frac{27}{40} = \frac{27}{2 \times 2 \times 2 \times 5} = \frac{27}{2^3 \times 5}$$

$$(iii) \frac{13}{25} = \frac{13}{5 \times 5} = \frac{13}{5^2}$$

$$(iv) \frac{9}{8} = \frac{9}{2 \times 2 \times 2} = \frac{9}{2^3}$$

∴ हमने अवलोकन/अनुमान लगाया कि निम्न परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार सांत है साथ-ही-साथ इन सभी परिमेय संख्याओं के हर $2^m \times 5^n$ के रूप का है।

अतः परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत होगा यदि हर अभाज्य गुणनखण्ड 2 और 5 के अलावा कोई अन्य अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है।

7.) तीन संख्याएँ जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हैं—

$$\text{पहली संख्या} = 0.10110111011110 \dots$$

$$\text{दूसरी संख्या} = 0.1211211121112 \dots$$

$$\text{तीसरी संख्या} = 0.23223222322223 \dots$$

8

माना कि,

$$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$$

$$\frac{9}{11} = 0.\overline{81}$$

∴ $\frac{5}{7}$ तथा $\frac{9}{11}$ के बीच एक संख्या 0.72 लेंगे।

∴ पहली अपरिमेय संख्या = $0.72121121112\ldots$ $\left[\begin{smallmatrix} x=1 \\ y=2 \end{smallmatrix} \right]$

दूसरी अपरिमेय संख्या = $0.72131131113\ldots$ $\left[\begin{smallmatrix} x=1 \\ y=3 \end{smallmatrix} \right]$

तीसरी अपरिमेय संख्या = $0.72141141114\ldots$ $\left[\begin{smallmatrix} x=1 \\ y=4 \end{smallmatrix} \right]$



9)

(i) $\sqrt{23} =$ अपरिमेय संख्या ✓

(ii) $\sqrt{225} = 15 \rightarrow$ परिमेय संख्या ✓

(iii) $0.3796 =$ परिमेय संख्या ✓

(iv) $7.478478\ldots \rightarrow$ परिमेय संख्या ✓

(v) $1.101001000100001\ldots$ — अपरिमेय संख्या



समाप्त