Class-IX

CHAPTER-5

युक्लिड की ज्यामिति का परिचय

* ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाएँ:-

i) **बिन्दु (Points):-** बिन्दु वह ज्यामिति आकृति है जिसमे न लम्बाई होती है, न ही चौड़ाई होती है और न ही मोटाई होती है।

अथवा,

बिन्दु वह छोटा-सा चिन्ह है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई एवं मोटाई कुछ भी नहीं होता है।

⇒ बिन्दु को A, B, C, D, ... इत्यादि से सूचित किया जा सकता है।

ii) **रेखा (LINE):→** रेखा वह है जिसमें केवल लम्बाई होती है, चौड़ाई एवं मोटाई नहीं होती है। इसे दोनो ही दिशाओं मे अनन्त तक बढ़ाया जा सकता है।

$\boxed{\overleftrightarrow{PQ} \rightarrow \text{रेखा } PQ}$

iii) **समतल (Plane):-** समतल वह है जिसमें लम्बाई एवं चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई नही होती है।

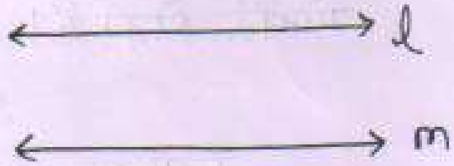
अथवा,

वह सतह जिस पर किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर के सभी बिन्दु उसी तल में होते है, समतल कहलाता है।

Example:- टेबुल की ऊपरी सतह
पन्ने की सतह, चिकनी दीवाल की सतह

iv) समानान्तर रेखाएँ (Parralel lines) :-

किसी समतल में स्थित दो या दो से अधिक वैसी सरल रेखाएँ जिनमें कोई भी बिन्दु उभयनिष्ठ न हो चाहे उन्हे दोनो ओर कितनी दूर भी बढ़ायी जाए, समानान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।



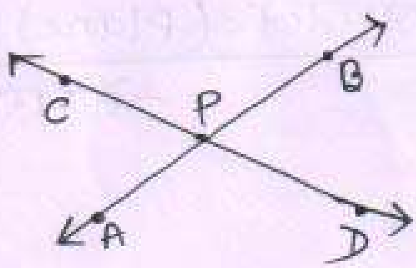
$\boxed{l \parallel m}$

v) संरेख बिन्दु (Collinear Points) :-

तीन या तीन से अधिक वैसे बिन्दु जिनसे होकर एक सरल रेखा गुजर सकती है, संरेख बिन्दु कहलाते हैं।

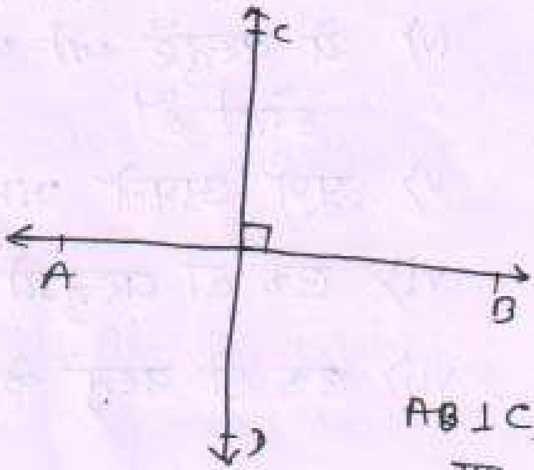
vi) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (Intersecting lines):-

एक ही तल में दो भिन्न रेखाएँ जिनमे एक बिन्दु उभयनिष्ठ हो, वे रेखाएँ प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।



vii) लम्ब रेखाएँ (Perpendicular lines):-

जब एक सीधी रेखा, दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी हो कि आसन्न कोण को एक-दूसरे के बराबर बने हो, तो प्रत्येक समान कोण समकोण (90°) होता है और सीधी रेखा जो दूसरी पर खड़ी है, उस पर लम्ब कहलाती है।



AB ⊥ CD

या

CD ⊥ AB

viii)

* युक्लिड की अभिगृहीत :-

i) वे वस्तु जो एक वस्तु के बराबर हो एक-दुसरे के बराबर होती है।

ii) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए तो प्राप्त पूर्ण भी बराबर होते है।

iii) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो प्राप्त शेषफल भी बराबर होते है।

iv) वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक-दुसरे के बराबर होती है।

v) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।

vi) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते है।

vii) एक ही वस्तु के आधे परस्पर बराबर होते है।

* युक्लिड की अभिधारणाएँ :-

i) एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

ii) एक सांत रेखा, जिसका दो अन्त बिन्दु हो, को अनिश्चित रुप से बढ़ाया जा सकता है।

iii) किसी बिन्दु को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

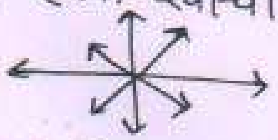
iv) सभी समकोण एक-दुसरे के बराबर होते है।

v) यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओ पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंतः कोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग दो समकोण से कम होता है तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रुप से बढाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोण से कम होता है।

Exercise-5.1

1.> निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य है और कौन -से कथन असत्य है? अपने उत्तरों के कारण दीजिए।

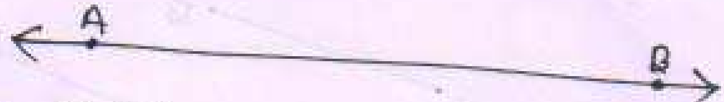
(i) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है। → असत्य



कारण:- एक दिए हुए बिन्दु से असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती है।

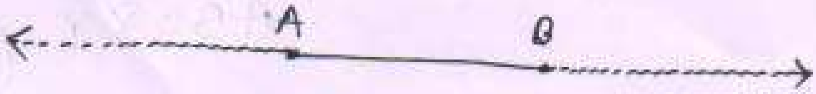
(ii) दो भिन्न बिंदुओ से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ है। → असत्य

कारण:- दो भिन्न बिन्दुओं से केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।



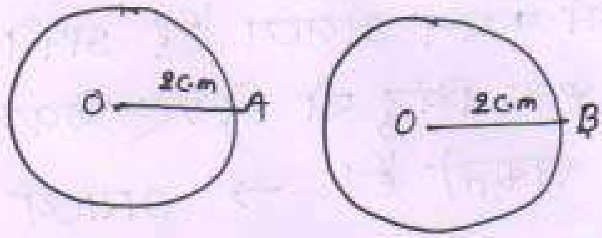
(iii) एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है। → सत्य

कारण:- युक्लिड ने रेखाखण्ड (line segment) को सांत रेखा कहा था। अतः युक्लिड की दूसरी अभिधारणा यह बताती है कि एक रेखाखण्ड को दोनों ओर बढ़ाकर एक रेखा बनाई जा सकती है।



(iv) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं। → सत्य

कारण :-



∵ दो वृत्त बराबर होते हैं जब दोनों वृत्त एक-दूसरे के संपाती होते हैं।

∴ संपाती वृत्त की त्रिज्याएँ भी बराबर होती हैं।

(v) आकृति में, यदि AB = PQ और PQ = XY है, तो AB = XY होगा। → सत्य

कारण :- युक्लिड के प्रथम अभिगृहीत से पता चलता है कि वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती हैं तो वे एक-दूसरे के बराबर भी होती हैं।

∴ $AB = PQ$ —(I)

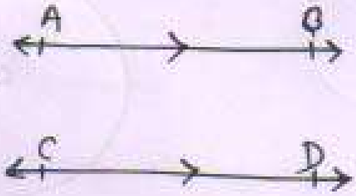
$PQ = XY$ —(II)

समी० (I) तथा (II) से

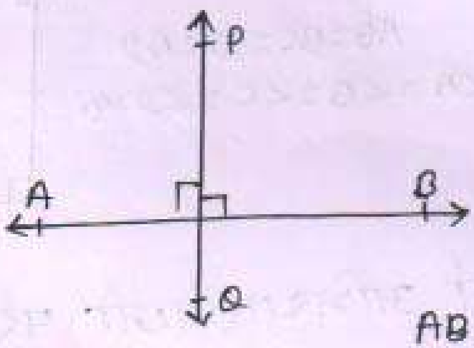
$AB = XY$ सिद्ध

2.) निम्नलिखित पदों में से प्रत्येक की परिभाषा दीजिए -

(i) समांतर रेखाएँ :- दो रेखाएँ समान्तर कहलाती है यदि उनमें कोई भी बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं हो।



(ii) लम्ब रेखाएँ - दो रेखाएँ लम्ब कही जाती है यदि दोनों रेखाएँ समकोण पर प्रतिच्छेद करती है।

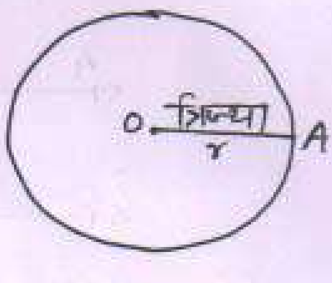


$AB \perp PQ$ या $PQ \parallel AB$

(iii) रेखाखंड - एक रेखा का वह भाग जिसके दो अन्त बिन्दु हो, एक रेखाखण्ड कहलाता है

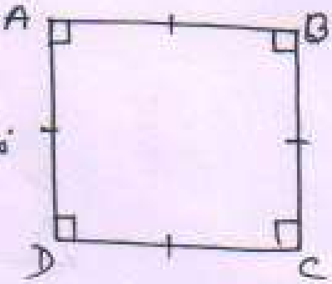
अर्थात् एक असिमित रेखा का एक भाग रेखाखण्ड कहलाता है

(iv) **वृत की त्रिज्या :-** एक रेखाखंड जिसका एक अन्त बिन्दु वृत का केन्द्र है तथा दूसरा वृत की परिधि पर स्थित है।



(v) **वर्ग :-** एक चतुर्भुज जिसके चारो भुजाएँ तथा चारो कोण बराबर होते है।

$AB = BC = CD = AD$
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$



Q.7 नीचे दी हुई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए -

(i) दो भिन्न बिन्दु A और B दिए रहने पर, एक तीसरा बिन्दु C ऐसा विद्यमान है जो A और B के बीच स्थित होता है।

(ii) यहाँ कम से कम ऐसे तीन बिन्दु विद्यमान है कि वे एक रेखा पर स्थित नही है।

Ans. ऐसे बहुत से अपरिभाषित शब्द है जिनकी जानकारी होनी चाहिए। ये संगत है, क्योंकि इनमें दो अलग-अलग स्थितियों का अध्ययन किया जाता है अर्थात्

(i) यदि दो बिन्दु A और B दिए हुए हो, तो उनके बीच मे स्थित एक बिन्दु C होता है।

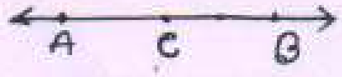
(ii) यदि A और B दिए गए हो तो हम एक ऐसा बिन्दु C ले सकते है जो A और B से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित नही होता है।

4.) दो बिन्दुओं A और B के बीच एक बिन्दु C ऐसा स्थित है कि $AC = BC$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2} AB$ है। एक आकृति खींच कर इसे स्पष्ट कीजिए —

Ans:

$\because$ C बिन्दु AB पर स्थित है।

$\therefore AC + CB = AB \quad —(1)$



लेकिन

$AC = BC$ (दिया है)

समी० (1) से,

$\therefore AC + AC = AB$

$\Rightarrow 2AC = AB$

$\Rightarrow AC = \frac{1}{2} AB$

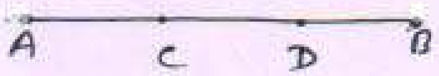
सिद्ध

5.) प्रश्न '4' में, C रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखण्ड का एक और केवल एक ही मध्य-बिन्दु होगा।

दिया है:- माना कि AB एक रेखाखण्ड है।

सिद्ध करना है:- AB का एक ही मध्य-बिन्दु है।

प्रमाण:- यदि संभव है तो माना कि रेखाखण्ड AB का दो मध्य-बिन्दु C तथा D है।



प्रश्न 4 में,

$AC = \frac{1}{2} AB \quad —(i)$

तथा

$AD = \frac{1}{2} AB \quad —(ii)$

समी० (i) तथा (ii) से, $AC = AD$ — (iii)

$\because$ C और D दोनों रेखाखण्ड AB पर स्थित हैं तथा ये दोनों A के एक ही तरफ हैं।

अत: समी० (iii) से,

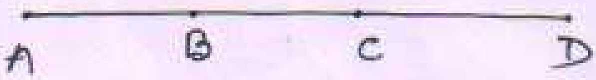
C और D एक ही बिन्दु होंगे।

अत: किसी रेखाखण्ड का केवल एक मध्य-बिन्दु होता है।

सिद्ध

6.) आकृति 5.10 में, यदि $AC = BD$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$

हल:



$\because AC = BD$

$\Rightarrow AB + \cancel{BC} = \cancel{BC} + CD$

$\Rightarrow AB = CD$

सिद्ध