* अंकगणित का आधारभूत प्रमेय :-

प्रत्येक भाज्य या यौगिक संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखंड अभाज्य गुणनखंडो के आनेवाले क्रम के बिना अद्वितीय है"

* अभाज्य या रूढ़ संख्या :- (Prime Number) →

अभाज्य या रूढ़ संख्या एक धन पूर्णांक होता है जो 1 या स्वयं से ही विभाज्य होता है।

जैसे,- 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

⇒ सबसे छोटी अभाज्य या रूढ़ संख्या = 2

* यौगिक संख्या (Composite Number) :-

जो संख्याएँ अभाज्य नहीं हो उन्हे यौगिक संख्या कहते हैं, अर्थात् 1 या स्वयं को छोड़कर उसके अन्य गुणनखंड हों।

जैसे – 4, 6, 8, 9, 10, ...

अर्थात्

$4 = 2 \times 2$

$6 = 2 \times 3$

$10 = 2 \times 5$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

$9 = 3 \times 3$

* सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Number) :-

दो पूर्णांकों को सह-अभाज्य कहते हैं यदि दोनो पूर्णांकों का म॰स॰ = 1 हो।

जैसे – (3, 4) (7, 15) इत्यादि

* म०स० (HCF) तथा ल०स० (LCM) के बीच संबंध

दो संख्याओ का गुणनफल = म०स० × ल०स०

$$\text{म०स०} = \frac{\text{दो संख्याओ का गुणनफल}}{\text{ल०स०}}$$

$$\text{ल०स०} = \frac{\text{दो संख्याओ का गुणनफल}}{\text{म०स०}}$$

$$\text{दुसरी संख्या} = \frac{\text{म०स०} \times \text{ल०स०}}{\text{एक संख्या}}$$

यदि दो संख्याएँ a तथा b हो तो

$$a \times b = LCM \times HCF$$

$$LCM = \frac{a \times b}{HCF}$$

$$HCF = \frac{a \times b}{LCM}$$

यदि तीन संख्याएँ a, b तथा c हो तो —

~~a×b×c~~

$$LCM = \frac{abc \times HCF(a,b,c)}{HCF(a,b) \times HCF(b,c) \times HCF(c,a)}$$

$$HCF = \frac{abc \times LCM(a,b,c)}{LCM(a,b) \times LCM(b,c) \times LCM(c,a)}$$

Ex-1.2

1.) निम्नलिखित संख्याओ को अभाज्य गुणखंडो के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए —

(i) 140

2	140
2	70
5	35
7	7
	1

$\therefore 140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

$= 2^2 \times 5 \times 7$ Ans

(ii) 156

2	156
2	78
3	39
13	13
	1

$\therefore 156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$= 2^2 \times 3 \times 13$

Ans

(iii) 3825

3	3825
3	1275
5	425
5	85
17	17
	1

$\therefore 3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

$= 3^2 \times 5^2 \times 17$

Ans

(iv) 5005

5	5005
7	1001
13	143
11	11
	1

$\therefore$ ~~5005 = 5×1001~~

$5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

(v) 7429

$$\begin{array}{r|l} 17 & 7429 \\ \hline 19 & 437 \\ \hline & 23 \end{array}$$

$\therefore 7429 = 17 \times 19 \times 23$

2.) (i) 26, 91

$$\begin{array}{r|l} 2 & 26 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 91 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$26 = 2 \times 13$

$91 = 7 \times 13$

$\therefore$ HCF = 13

LCM = $13 \times 2 \times 7 = 182$

जाँच,

~~[illegible]~~,

~~[illegible]~~.

दो संख्याओ का गुणनफल = HCF × LCM

$\Rightarrow 26 \times 91 = 13 \times 182$

$\Rightarrow 2366 = 2366$

जाँच

(ii) 510 और 92

$$\begin{array}{r|l} 2 & 510 \\ \hline 3 & 255 \\ \hline 5 & 85 \\ \hline 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 92 \\ \hline 2 & 46 \\ \hline 23 & 23 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23 = 2^2 \times 23$

HCF = 2 Ans

LCM $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

जाँच,

दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

$\Rightarrow 510 \times 92 = 2 \times 23460$

$\Rightarrow 46920 = 46920$

जाँच

(iii) 336 और 54

$$\begin{array}{r|l} 2 & 336 \\ \hline 2 & 168 \\ \hline 2 & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^4 \times 3 \times 7$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$

HCF $= 2 \times 3 = 6$ A

LCM $= 2^4 \times 3^3 \times 7 = 3024$

जाँच,

दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

$\Rightarrow 336 \times 54 = 6 \times 3024$

$\Rightarrow 18144 = 18144$

जाँच

3) (i) 12, 15 और 21

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 21 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$21 = 3 \times 7$

HCF = 3 A

LCM = $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

= 420 A

(ii) 17, 23 और 29

$$\begin{array}{r|l} 17 & 17 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 23 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 29 & 29 \\ \hline & 1 \end{array}$$

HCF = 1 A

LCM = $17 \times 23 \times 29 = 11339$ A

(iii) 8, 9, 25

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$25 = 5 \times 5 = 5^2$

HCF = 1 A

LCM = $2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$ A

1

4·) $HCF(306, 657) = 9$

$LCM(306, 657) = ?$

सूत्र,

$$LCM = \frac{\text{दो संख्याओ का गुणनफल}}{HCF}$$

$$= \frac{306 \times \cancel{657}^{73}}{\cancel{9}}$$

$$= 306 \times 73$$

$$= 22338$$

5·) $\because 6^n = (2\times3)^n$

पुनः हम जानते है कि किसी संख्या का अंत शून्य तभी हो सकती है जब 2 और 5 के धनात्मक घात इसके गुणनखंड हो लेकिन,

$6^n = 2^n \times 3^n$ यह गुणनखंड अद्वितीय है।

पुनः अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 6^n के गुणनखंड में 2 और 3 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है।

अतः ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके 6^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

6.) $7 \times 11 \times 13 + 13$

$= 13(7 \times 11 + 1)$

$= 13 \times 78$

$= 13 \times 2 \times 3 \times 13$

$= 2 \times 3 \times 13^2$

अतः $7 \times 11 \times 13 + 13$ एक भाज्य संख्या है।

फिर,

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

$= 5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$

$= 5(1008 + 1)$

$= 5 \times 1009$

अतः $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ एक भाज्य संख्या है।

7.) सोनिया और रवि चक्कर प्रारम्भ के बाद पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलने में लगा समय = 18 और 12 का LCM होगा

$$\begin{array}{r|l} 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$LCM = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$ मिनट

उदाहरण- 5 (Page-11):- जाँचे कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए 4^n के अंत में 0 आ सकता है।

Ans:. यहाँ,

$$4^n = 4^1 = 4 = 2\times2$$
$$= 4^2 = 4\times4 = 2\times2\times2\times2$$
$$= 4^3 = 4\times4\times4 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$$
$$= 4^4 = 4\times4\times4\times4 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$$

इस प्रकार हम पाते है कि 4^n के गुणनखंड में अभाज्य संख्याएँ 2 है फिर

अंकगणित के आधारभूत प्रमेय से, 4^n कोई दूसरा अभाज्य गुणनखंड संभव नहीं है।

∵ 4^n के अन्त में 0 तब होगा जब 2 के अलावा अभाज्य संख्या 5 से विभाज्य हो अर्थात् 4^n के अभाज्य गुणनखंडन में 5 रहना चाहिए। किन्तु ऐसा नहीं है।

अत: किसी प्राकृत संख्या n के लिए 4^n के अंत में शून्य नहीं होगा।