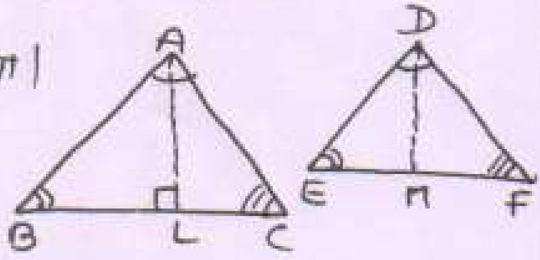
प्रमेय - (6.6) दो समरूप त्रिभुजो के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओ के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

दिया है:- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

सिद्ध करना है:- $\dfrac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2}$

रचना:- $AL \perp BC$ और $DM \perp EF$ खींचा।



प्रमाण:- $\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\angle A = \angle D$ —(I)

$\angle B = \angle E$ —(II)

$\angle C = \angle F$ —(III)

और,

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ —(IV)

अब,

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times EF \times DM} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AL}{DM} \quad \text{—(V)}$$

$\because$ ΔALB और ΔDME में,

$\angle B = \angle E$ [समी० (II) से]

$\angle ALB = \angle DME$ (90°)

$\therefore \Delta ALB \sim \Delta DME$ [AA-समरूपता से]

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AL}{DM} = \dfrac{BL}{EM}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AL}{DM}$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AL}{DM}$ —— (VI) [समी० (IV) से]

समी० (V) से,

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AL}{DM}$$

$$= \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF}$$

$$= \frac{BC^2}{EF^2} \quad \text{—— (VII)}$$

समी० (VII) और (IV) से,

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

सिद्ध

Ex-6.4

(2)

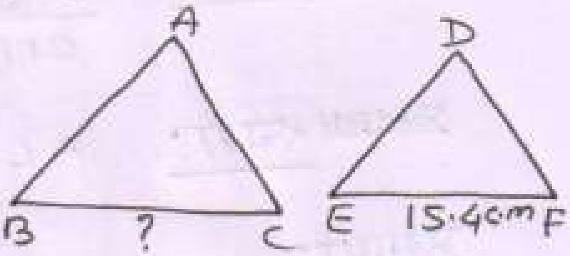
① दिया है:- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$ar(\Delta ABC) = 64\ cm^2$

$ar(\Delta DEF) = 121\ cm^2$

$EF = 15.4\ cm$

$BC = ?$



$\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\overset{1.4}{\cancel{15.4}} \times 8}{\cancel{11}}$$

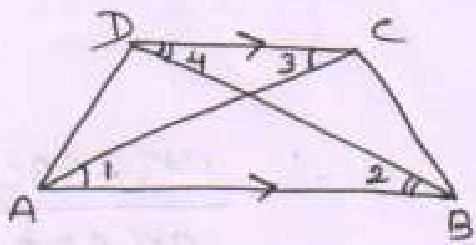
$\Rightarrow BC = 11.2\ cm$ Ans

② दिया है:- समलंब चतुर्भुज ABCD में,

$AB \parallel DC$

$AB = 2DC$

$$\frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = ?$$



$\because$ ΔAOB और ΔCOD में,

$\angle 1 = \angle 3$ [एकान्तर कोण]

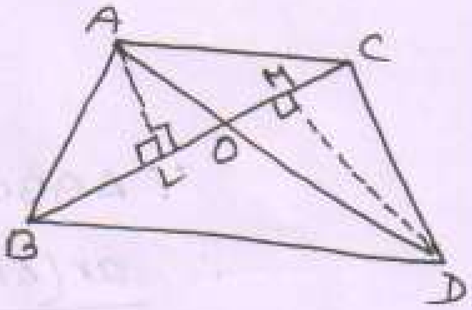
$\angle 2 = \angle 4$ [एकान्तर कोण]

$\therefore \Delta AOB \sim \Delta COD$ [AA- समरूपता से]

$$\frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{AB^2}{DC^2} = \frac{(2DC)^2}{DC^2} = \frac{4DC^2}{DC^2} = \frac{4}{1} = 4:1$$ Ans

3) दिया है:- ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC बना हुआ है AD, BC को 'O' पर प्रतिच्छेद करता है

सिद्ध करना है:- $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$



~~रचना~~ रचना:- $AL \perp BC$ और $DM \perp BC$ खींचा।

प्रमाण:- ΔALO तथा ΔDMO में,

$\angle ALO = \angle DMO$ $(90°)$

$\angle AOL = \angle DOM$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \Delta ALO \sim \Delta DMO$ [AA-समरूपता से]

$\therefore \frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO}$ — (1)

अब,

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{BC} \times AL}{\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{BC} \times DM}$$

$$= \frac{AL}{DM}$$

$$= \frac{AO}{DO} \quad [\text{समी (1) से}]$$

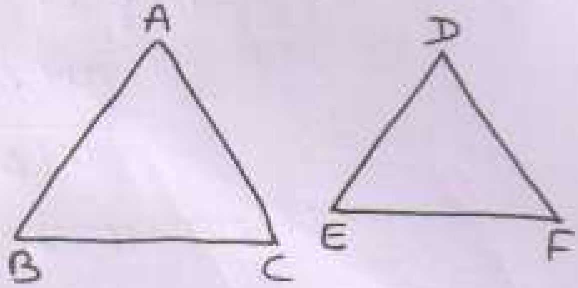
$$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$$

सिद्ध

4) दिया है :- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$ar(\Delta ABC) = ar(\Delta DEF)$

सिद्ध करना है :- $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



प्रमाण :- $\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{ar(\Delta ABC)}}{\cancel{ar(\Delta ABC)}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\because \frac{AB^2}{DE^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = 1$$

$$\Rightarrow AB = DE$$

इसी प्रकार से,

$BC = EF$

$AC = DF$

ΔABC तथा ΔDEF में,

$AB = DE$

$BC = EF$

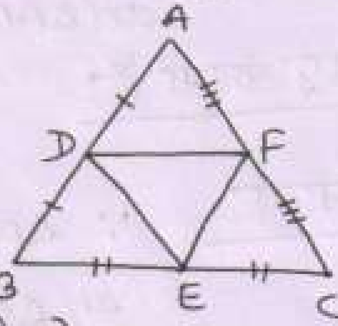
$AC = DF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ [SSS-सर्वांगसमता से]

सिद्ध

5) दिया है:- ΔABC में,

D, E, F क्रमशः ΔABC की भुजाओं AB, BC, CA का मध्य-बिन्दु है।



$\therefore \frac{ar(\Delta DEF)}{ar(\Delta ABC)} = ?$

$\because$ हम जानते है कि,

Δ की किन्ही दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं मिलाने वाली रेखाखंड तीसरी भुजा के समान्तर तथा आधी होती है।

~~D, AB का मध्य-बिन्दु है~~

$\because$ D एवं E ~~क्रमशः~~ क्रमशः AB एवं BC का मध्य-बिन्दु है

$\therefore DE \parallel AC$

$DE = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{1}{2}$ —(1)

फिर,

D एवं F क्रमशः AB एवं AC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore DF \parallel BC$

$DF = \frac{1}{2} BC$

$\Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{1}{2}$ —(II)

फिर,

E एवं F क्रमशः BC एवं AC का मध्य-बिन्दु है

$\therefore EF \parallel AB$

$EF = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}$ —(III)

समी० (I), (II), (III) से,

$\frac{DE}{AC} = \frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AB}$

$\therefore \Delta DEF \sim \Delta ABC$ [SSS-समरूपता से]

$\therefore \frac{ar(\Delta DEF)}{ar(\Delta ABC)} = \frac{DE^2}{AC^2}$

$= \left(\frac{DE}{AC}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2$

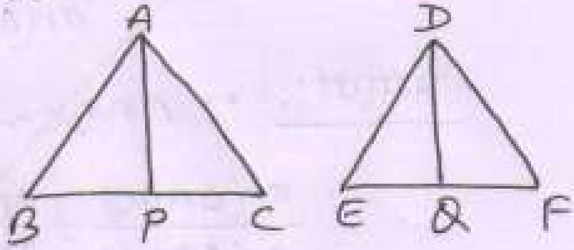
$= \frac{1}{4}$

$= 1:4$ Ans

6.) दिया है:- $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

AP और DQ क्रमशः ΔABC और ΔDEF की माध्यिकाएँ हैं।

सिद्ध करना है:- $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AP^2}{DQ^2}$



प्रमाण:- $\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F \end{array}\right\} \text{—(I)}$$

और,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad \text{—(II)}$$

फिर,

$\because \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} \quad \text{—(III)}$$

लेकिन, समी० (II) से,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2BP}{2EQ}$$ [∵ P, BC का मध्य-बिन्दु है; Q, EF का मध्य-बिन्दु है]

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BP}{EQ}$$

ΔABP और ΔDEQ में,

$\frac{AB}{DE} = \frac{BP}{EQ}$ एवं $\angle B = \angle E$ (समी० (I) से)

$\therefore \Delta ABP \sim \Delta DEQ$ {SAS-समरूपता से}

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BP}{EQ} = \frac{AP}{DQ}$$

समी० (III) से

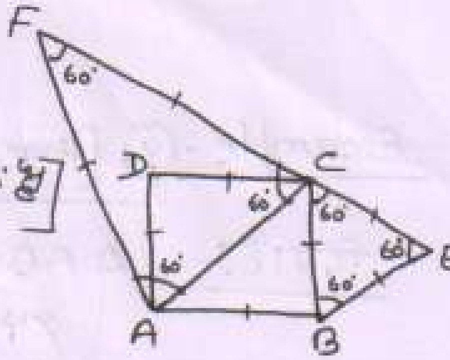
$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AP}{DQ}\right)^2 = \frac{AP^2}{DQ^2}$$ सिद्ध

7.) दिया है:- वर्ग ABCD में,

ΔBCE तथा ΔACF समबाहु त्रिभुज क्रमशः भुजा BC और कर्ण AC पर बनाये गये है।

सिद्ध करना है:- $ar(\Delta BCE) = \frac{1}{2} ar(\Delta ACF)$

प्रमाण:- वर्ग का विकर्ण $= AC = \sqrt{2} BC$



$\because \Delta BCE \sim \Delta ACF$ [प्रत्येक कोण 60° है]

$$\therefore \frac{ar(\Delta BCE)}{ar(\Delta ACF)} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

$$= \frac{BC^2}{(\sqrt{2}BC)^2}$$

$$= \frac{\cancel{BC^2}}{2\cancel{BC^2}}$$

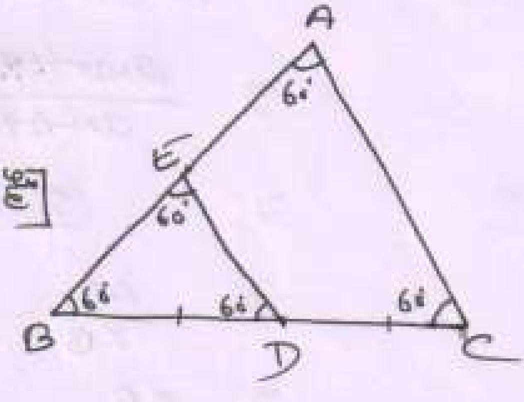
$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore ar(\Delta BCE) = \frac{1}{2} ar(\Delta ACF)$$

सिद्ध

8> $\because$ ΔABC और ΔBDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार है कि D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore BD = DC = \frac{1}{2} BC$



$\because \Delta ABC \sim \Delta BDE$ [समकोणिक है]

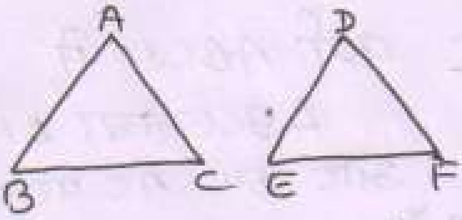
$$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta BDE)} = \frac{BC^2}{BD^2}$$

$$= \frac{(2BD)^2}{BD^2}$$

$$= \frac{4\cancel{BD^2}}{\cancel{BD^2}}$$

$$= \frac{4}{1} = 4:1$$ (c) A

9) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{4}{9}$

$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} = 16:81$

(D)

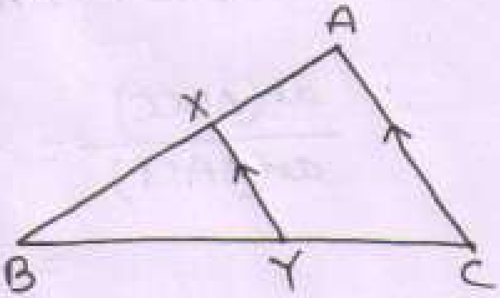
Example - 9 [Page - 157]

दिया है:- ΔABC में,

$XY \parallel AC$

$ar(\Delta ABC) = 2ar(\Delta XBY)$

$\frac{AX}{AB} = ?$



$\because XY \parallel AC$

$\therefore \angle BXY = \angle A$ [संगत कोण].

$\angle BYX = \angle C$ [संगत कोण]

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta XBY$ [A-A समरूपता से]

$\therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta XBY)} = \frac{AB^2}{XB^2}$

$\Rightarrow \frac{2 \times \cancel{ar(\Delta XBY)}}{\cancel{ar(\Delta XBY)}} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{2}{1} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{AB}{XB} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$\Rightarrow \frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}$