प्रमेय - 8.9

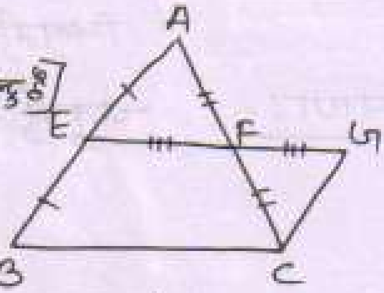
* मध्य-बिन्दु प्रमेय :- त्रिभुज के दो भुजाओ के मध्य-बिंदुओ को मिलाने वाली रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर तथा लम्बाई मे आधी होती है।

दिया है :- माना कि ΔABC मे,
भुजा AB तथा AC का मध्य-बिन्दु क्रमश: E एवं F है

सिद्ध करना है :- (i) $EF \parallel BC$
(ii) $EF = \frac{1}{2} BC$

रचना :- EF को G तक बढ़ाया ताकि $EF = FG$ और CG को मिला दिया ।

प्रमाण :- ΔAEF तथा ΔCFG में,



$AF = FC$ [F, AC का मध्य-बिन्दु है]
$EF = FG$ [रचना से]
$\angle AFE = \angle CFG$ [शीर्षाभिमुख कोण]
$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CFG$ [SAS से]
$\therefore AE = GC$ [CPCT] — (i)
$\angle EAF = \angle FCG$ (CPCT)

लेकिन,
$AE = EB$ — (ii) [E, AB का मध्य-बिन्दु है]

समी० (i) तथा (ii) से,
$AE = EB = GC$
$\because \angle EAF = \angle FCG$ [जो एकान्तर कोण]
$\therefore AB \parallel CG$ या $EB \parallel GC$ और $EB = GC$
$\therefore$ BCGE एक समांतर चतुर्भुज है
$\therefore BC = EG$, $BC \parallel EG$ — [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा]

या,
$BC \parallel EF$

तथा,
$BC = EG$
$\Rightarrow BC = EF + FG$
$\Rightarrow BC = EF + EF$
$\Rightarrow BC = 2EF$
$\therefore EF = \frac{1}{2} BC$
अतः $EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2} BC$

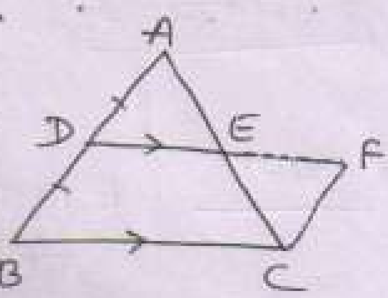
प्रमेय - 8.10

प्रमेय :- किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से एक अन्य भुजा के समांतर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा को उसके मध्य-बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

दिया है :- ΔABC में,

D, AB का मध्य-बिन्दु है।

$DE \parallel BC$



सिद्ध करना है :- $AE = EC$

अर्थात् E, AC का मध्य-बिन्दु है

रचना :- C से $BD \parallel CF$ खींचा, जो DE को बढ़ाने पर बिन्दु F पर मिलती है।

प्रमाण :- चतुर्भुज DBCF में,

$DF \parallel BC$

$BD \parallel CF$

$\therefore$ DBCF एक समांतर-चतुर्भुज है।

$\therefore \angle B = \angle F$ — (i) [सम्मुख कोण]

$DB = CF$ — (ii) [सम्मुख भुजा]

लेकिन,

$\angle ADE = \angle B$ — (iii) [संगत कोण]

समी० (i) तथा (iii) से,

$\angle ADE = \angle F$

अब,

ΔADE तथा ΔCEF में,

$AD = CF$ [$\because AD = DB = CF$]

$\angle ADE = \angle F$

$\angle AED = \angle CEF$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta CEF$ [ASA - से]

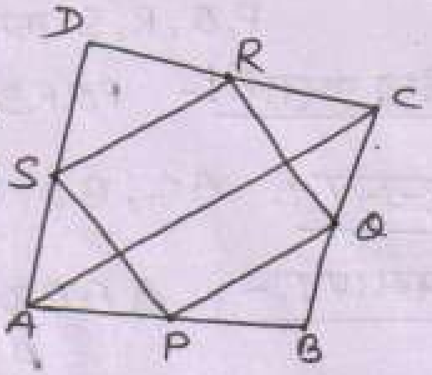
$\therefore AE = EC$

$\therefore$ E, AC का मध्य-बिन्दु है।

सिद्ध

EX - 8.2

1) दिया है:- चतुर्भुज ABCD में,
P, Q, R, S क्रमशः AB, BC, CD
और AD भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं
AC एक विकर्ण है



सिद्ध करना है:- (i) $SR \parallel AC$ और
$SR = \frac{1}{2} AC$
(ii) $PQ = SR$
(iii) PQRS एक समांतर-चतुर्भुज है

रचना:- AC को मिलाया।

प्रमाण:- ∵ ΔDAC में,
R, CD का मध्य-बिन्दु है तथा S, DA का मध्य-बिन्दु है
∴ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,

$SR \parallel AC$ — (i)

$SR = \frac{1}{2} AC$ — (ii) सिद्ध

फिर,
ΔABC में,
P, AB का मध्य-बिन्दु है तथा Q, BC का मध्य-बिन्दु है
∴ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,

$PQ \parallel AC$ — (iii)

$PQ = \frac{1}{2} AC$ — (iv)

समी० (ii) तथा (iv) से,

$SR = PQ$ सिद्ध

समी० (i) तथा (iii) से,

$SR \parallel PQ$

∴ PQRS एक समान्तर-चतुर्भुज है

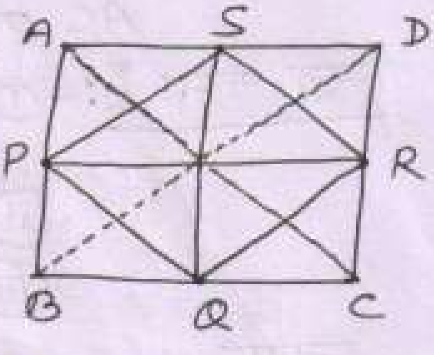
सिद्ध

2) दिया है:- ABCD एक समचतुर्भुज है।

P, Q, R, S क्रमशः AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है:- PQRS एक आयत है।

रचना:- AC, BD, PR, SQ को मिलाया।



प्रमाण:- ΔABD में,

P, AB का मध्य-बिन्दु है तथा

S, AD का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,

$PS = \frac{1}{2} BD$ और $PS \parallel BD$ — (I)

फिर,

ΔBCD में,

Q, BC का मध्य-बिन्दु है तथा R, CD का मध्य-बिन्दु

$\therefore$ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,

$QR = \frac{1}{2} BD$ और $QR \parallel BD$ — (II)

समी० (I) तथा (II) से,

$PS = QR$ तथा $PS \parallel QR$ — (III)

~~इसी प्रकार से~~,

$\therefore$ PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $PQ = SR$ तथा $PQ \parallel SR$ — (IV)

$\because$ ABCD एक समचतुर्भुज है।

$\therefore AD = BC$

$\Rightarrow \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$

$\Rightarrow AS = BQ$

अब,

$AS = BQ$ तथा $AS \parallel BQ$

$\therefore$ ABQS एक समांतर-चतुर्भुज है।

$\therefore AB = SQ$ — (V)

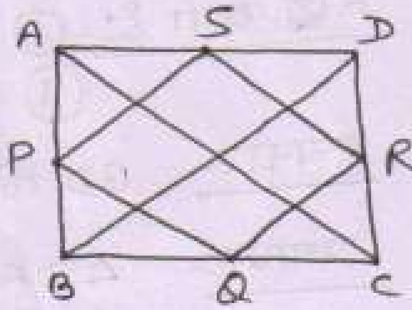
इसी प्रकार से,

$BC = PR$ — (VI)

(2.) ~~समीक [illegible]~~,
लेकिन, $AB = BC$ — (vii) [ABCD एक समचतुर्भुज है]
समी० (v), (vi) तथा (vii) से,
$SQ = PR$ — (viii)
∵ समांतर चतुर्भुज PQRS में,
विकर्ण $SQ = PR$
∴ PQRS एक आयत है।

सिद्ध

3.> दिया है:- ~~PQR~~ ABCD एक आयत है जिसमें P, Q, R, S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD, AD का मध्य-बिन्दु है।
सिद्ध करना है:- PQRS एक समचतुर्भुज है।
रचना:- AC तथा BD को मिलाया।



प्रमाण:- ∵ ABCD एक आयत है।
∴ विकर्ण $AC = BD$ — (1)
ΔABD में,
P, AB का मध्य-बिन्दु है तथा S, AD का मध्य-बिन्दु है
∴ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,
$PS = \frac{1}{2} BD$ और $PS \parallel BD$ — (ii)
फिर,
ΔBCD में,
Q, BC का मध्य-बिन्दु है तथा R, CD का मध्य-बिन्दु है
∴ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,
$QR = \frac{1}{2} BD$ और $QR \parallel BD$ — (iii)
समी० (ii) तथा (iii) से,
$PS = QR$ और $PS \parallel QR$ — (iv)

∵ PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

∴ $PQ = SR$ और $PQ \parallel SR$ —(v)

समी॰ (i) से,

$AC = BD$

$\Rightarrow \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BD$

$\Rightarrow PQ = QR$ —(vi)

समी॰ (iv) (v), (vi) से,

$PQ = QR = SR = PS$ और $PS \parallel QR$ तथा $PQ \parallel SR$

∴ PQRS एक समचतुर्भुज है।

सिद्ध

4) **दिया है:-** ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें

$AB \parallel DC$

E, AD का मध्य-बिन्दु है।

सिद्ध करना है:- (i) F भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

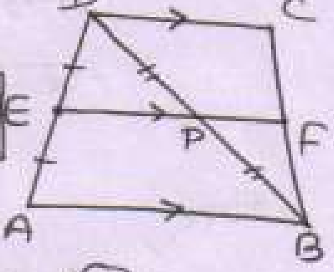
(ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

रचना:- BD को मिलाया जो EF को P बिन्दु पर काटती है।

प्रमाण:- ΔDAB में,

E, AD का मध्य-बिन्दु है

P, BD का मध्य बिन्दु है। [मध्य-बिन्दु प्रमेय का विलोमतः]



∴ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,

$EP = \frac{1}{2} AB$ और $EP \parallel AB$ —(i)

फिर,

ΔBCD में,

P, BD का मध्य-बिन्दु है।

$PF \parallel DC$

∵ F, BC का मध्य बिन्दु है। [मध्य-बिन्दु प्रमेय के विलोमतः]

∴ मध्य-बिन्दु प्रमेय से,

$PF = \frac{1}{2} DC$ और $PF \parallel DC$ —(ii)

समी० (i) तथा (ii) से,

$EF \parallel AB \parallel CD$.

तथा

समी० (i) तथा (ii) को जोड़ने पर

$$EP + PF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$$

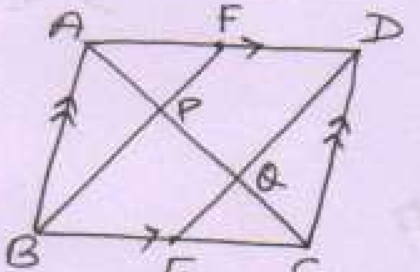
$$\Rightarrow EP + PF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

सिद्ध

5) दिया है:- समांतर-चतुर्भुज ABCD में,
E और F क्रमशः भुजाओं BC और AD
के मध्य-बिन्दु है।

सिद्ध करना है:- रेखाखंड BF और ED विकर्ण AC को समत्रिभाजित
करते है अर्थात्

$$AP = PQ = QC$$



प्रमाण:- ∵ E, BC का मध्य-बिन्दु है

∴ $EB = \frac{1}{2} BC$ —(I)

फिर,

∵ F, AD का मध्य-बिन्दु है

∴ $DF = \frac{1}{2} AD$ —(II)

लेकिन, $BC = AD$ —(III) [समांतर-चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ]

समी० (I), (II), (III) से,

$$EB = DF$$

अब, चतुर्भुज BEDF में,

$EB = DF$ और $EB \parallel DF$

∴ DEBF एक समांतर चतुर्भुज है।

अब,

ΔCPB में,

$QE \parallel PB$ तथा E, BC का मध्य बिन्दु है।

∴ Q, CP का मध्य बिन्दु होगा [मध्य-बिन्दु प्रमेय के विलोम से]

∴ $QC = PQ$ —(IV)

फिर,

ΔAQD में,

$PF \parallel QD$ और F, AD का मध्य बिन्दु है

∴ P, AQ का मध्य बिन्दु होगा। [मध्य-बिन्दु प्रमेय के विलोम से]

∴ $AP = PQ$ —(V)

समी० (IV) तथा (V) से,

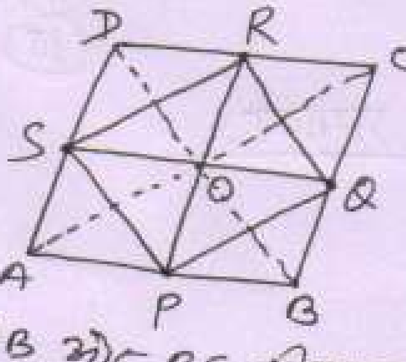
$AP = PQ = QC$ अतः BF और ED विकर्ण AC को समत्रिभाजित करते है।

(6) दिया है:- चतुर्भुज ABCD में,

P, Q, R, S क्रमश: भुजा AB, BC, CD, AD का मध्य-बिन्दु है तथा PR और QS बिन्दु O पर मिलते हो

सिद्ध करना है:- OP = OR

OS = OQ



रचना:- PQ, QR, RS, SP, AC तथा BD को मिलाया।

प्रमाण:- ΔABC में,

P और Q क्रमश: भुजाओं AB और BC की मध्य-बिन्दु है

∴ $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ —(1) [मध्य-बिन्दु प्रमेय से]

फिर,

ΔADC में,

R और S क्रमश: भुजाओं DC और AD की मध्य-बिन्दु है

∴ $RS \parallel AC$ और $RS = \frac{1}{2}AC$ —(11) [मध्य-बिन्दु प्रमेय से]

समी० (1) तथा (11) से,

$PQ \parallel RS$ और $PQ = RS$

∵ सम्मुख भुजाओं का युग्म बराबर तथा समांतर है

∴ ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हम जानते है कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को परस्पर समद्विभाजित करते है

∴ OP = OR

OS = OQ

सिद्ध