

Example

उदाहरण - (2) → Page (33) :- द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यकों की जाँच और शून्यकों तथा गुणोक्तों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:-

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2 + 7x + 10 \\&= x^2 + 5x + 2x + 10 \\&= x(x+5) + 2(x+5) \\&= (x+2)(x+5)\end{aligned}$$

$$\therefore (x+2)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x+2 = 0 \quad \text{और} \quad x+5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \quad \Rightarrow x = -5$$

$$\therefore x = -2, -5$$

$$\therefore \text{माना कि } \alpha = -2, \beta = -5$$

फिर,

$$P(x) = x^2 + 7x + 10$$

$$\text{माना कि } x^2 \text{ का गुणोक्त} = a = 1$$

$$x \text{ का गुणोक्त} = b = 7$$

$$\text{अचर पद} = c = 10$$

$$\alpha + \beta = -2 + (-5)$$

$$= -2 - 5$$

$$= -\frac{7}{1}$$

$$= -\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणोक्त}}{x^2 \text{ का गुणोक्त}}$$

$$\alpha\beta = -2 \times (-5)$$

$$= \frac{10}{1}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} \quad \underline{\text{जाँच}}$$

उदाहरण - (3) \rightarrow Page (33) :- बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यकों को जान
कीजिए और शून्यकों तथा गुणकों के बीच के संबंध की सत्यता
की जाँच कीजिए।

हल:- $P(x) = x^2 - 3$
 $= x^2 - (\sqrt{3})^2$
 $= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

$$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{3} = 0 \quad \text{और} \quad x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}$$

माना कि $\alpha = -\sqrt{3}, \beta = \sqrt{3}$

फिर, $P(x) = x^2 - 3$

माना कि, x^2 का गुणांक $= a = 1$

x का गुणांक $= 0$

अचर पद $= -3$

Example

$$\begin{aligned}\therefore \alpha + \beta &= -\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= -\frac{b}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= -\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{-3}{1} \\ &= \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}\end{aligned}$$

जॉय

उदाहरण - (4) → Page (34) :- एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योगफल तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल:- $\therefore \alpha$ और β द्विघात बहुपद के शून्यक हैं।

$$\therefore \alpha + \beta = -3$$

$$\alpha\beta = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{द्विघात बहुपद} &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - (-3)x + 2 \\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

✍

उदाहरण-(5) → Page (35) :- जाँच कीजिए कि त्रिघात बहुपद

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 \text{ के शून्यक } 3, -1, -\frac{1}{3} \text{ हैं।}$$

इसके पश्चात् शून्यकों तथा गुणकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल:-

$$\therefore P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$$

$$P(3) = 3 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 11 \times 3 - 3$$

$$= 3 \times 27 - 5 \times 9 - 33 - 3$$

$$= 81 - 45 - 33 - 3$$

$$= 81 - 81$$

$$= 0$$

$$P(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3$$

$$= 3 \times (-1) - 5 \times 1 + 11 - 3$$

$$= -3 - 5 + 11 - 3$$

$$= -11 + 11$$

$$= 0$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= 3 \times \left(-\frac{1}{27}\right) - 5 \times \frac{1}{9} + \frac{11}{3} - 3$$

$$= -3 \times \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$$

$$= \frac{-1 - 5 + 33 - 27}{9}$$

$$= \frac{-33 + 33}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

$\therefore 3, -1, -\frac{1}{3}$ त्रिघात बहुपद $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक हैं।

$$\therefore \alpha = 3$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma = -\frac{1}{3}$$

फिर,

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 \text{ में,}$$

$$x^3 \text{ का गुणांक} = a = 3$$

$$x^2 \text{ का गुणांक} = b = -5$$

$$x \text{ का गुणांक} = c = -11$$

$$\text{अचरपद} = d = -3$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9 - 3 - 1}{3}$$

$$= \frac{9 - 4}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-(-5)}{3}$$

$$= -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -3 + 1 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - 1$$

$$= \frac{-9+1-3}{3}$$

$$= \frac{-12+1}{3}$$

$$= \frac{-11}{3}$$

$$= \frac{C}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{3}$$

$$= \frac{-(-3)}{3}$$

$$= -\frac{d}{a} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

जॉन

Example

उदाहरण - (6) \rightarrow Page (37) :- $2x^2 + 3x + 1$ को $(x+2)$ से भाग दीजिए

हल:-

$$\begin{array}{r} x+2 \overline{) 2x^2 + 3x + 1} \quad (2x-1) \\ \underline{2x^2 + 4x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x - 2} \\ +3 \end{array}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \text{भागफल} = 2x-1 \\ \text{शेषफल} = +3 \end{array} \right\} \text{ } \cdot$$

उदाहरण - (7) \rightarrow Page (37) :- $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए ।

$$\begin{aligned} \text{हल:- } P(x) &= 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ g(x) &= 1 + 2x + x^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{array}{r} x^2+2x+1 \overline{) 3x^3 + x^2 + 2x + 5} \quad (3x-5) \\ \underline{3x^3 + 6x^2 + 3x} \\ -5x^2 - x + 5 \\ \underline{-5x^2 - 10x - 5} \\ + + + \\ 9x + 10 \end{array}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \text{भागफल} = 3x-5 \\ \text{शेषफल} = 9x+10 \end{array} \right\} \text{ } \cdot$$

उदाहरण - (8) → Page (38) :- $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल :-

$$P(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

$$g(x) = x - 1 - x^2$$

$$= -x^2 + x - 1$$

$$\therefore \begin{array}{r} -x^2 + x - 1 \overline{) -x^3 + 3x^2 - 3x + 5} \quad (x - 2) \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \\ 2x^2 - 2x + 5 \\ \underline{2x^2 - 2x + 2} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore \text{भागफल} = q(x) = x - 2$$

$$\text{शेषफल} = r(x) = +3$$

\therefore विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

$$P(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

$$\Rightarrow -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 = (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$

$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

जाँच

Example

उदाहरण - (9) \rightarrow Page (39) :- $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि आपको इसके दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ ज्ञात हों।

हल:- $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

शून्यक $= \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$\therefore x = \sqrt{2}$ और $x = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow x - \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow x + \sqrt{2} = 0$

अतः $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखंड होगा।

$\therefore (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$= x^2 - (\sqrt{2})^2$

$= x^2 - 2$

$\therefore x^2 - 2$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखंड होगा।

अब,

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \quad (2x^2 - 3x + 1 \\
 \underline{2x^4} \\
 - 4x^2 \\
 + 6x \\
 - 2 \\
 \underline{+ 2} \\
 0
 \end{array}$$

$\therefore 2x^2 - 3x + 1$ भी बहुपद $P(x)$ का गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-1) - 1(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x-1) = 0$$

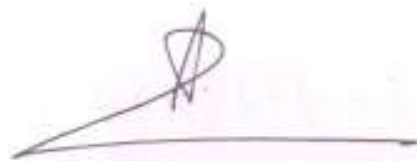
$$\Rightarrow 2x-1=0 \quad \text{और} \quad x-1=0$$

$$\Rightarrow 2x=1$$

$$\Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$



Important Question

* यदि α और β द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के शून्यांक हों, तब

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

* आवश्यक सूत्र से,

$$(i) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$(ii) (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$(iii) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$(iv) \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ = (\alpha + \beta)\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

Q → यदि बहुपद $2x^2 - 3x + 1$ के शून्यांक α और β हों, तो निम्नलिखित के मान बताइए :-

हल :- $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

माना कि,

$$x^2 \text{ का गुणांक} = a = 2$$

$$x \text{ का गुणांक} = b = -3$$

$$\text{अचरपद} = c = 1$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{i} \quad \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\
 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{9}{4} - 1 \\
 &= \frac{9-4}{4} \\
 &= \frac{5}{4} \quad \underline{\quad}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{ii} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\
 &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{9}{4} - 1}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{9-4}{4}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{5}{4} \times \frac{2}{1} \\
 &= \frac{5}{2} \quad \underline{\quad}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{iii} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 &= \alpha\beta(\alpha + \beta) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \\
 &= \frac{3}{4} \quad \underline{\quad}
 \end{aligned}$$

H.W

① यदि α और β द्विघात बहुपद $x^2 + 5x + 4$ के शून्यक हों निम्न ज्ञात करें -

① $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ [Ans $\rightarrow \left(-\frac{5}{4}\right)$]

② $\alpha^3 + \beta^3$ [Ans $\rightarrow (-60)$]

③ $\alpha - \beta$ [Ans $\rightarrow (\pm 3)$]