夹生饭

一、高等数学

0x00 函数、极限、连续

1. 常用等阶无穷小链

x

x^2

x^3

5. 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数

(3) 介值定理

0x01 一元函数微分学

4. 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线

对于 $f(x)$：

- 斜渐近线：若

  则 $y = mx + b$ 就是斜渐近线

0x02 一元函数积分学

1. 熟悉度较低的不定积分公式

(3) 其他

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} =$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

3. 定积分的性质

(1) 可积的判断条件

(5) 柯西-施瓦茨不等式

4. 无穷限反常积分审敛法

(1) 比较审敛法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$

- 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$，使得 ，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
- 如果存在常数 $N>0$ ，使得 ，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

(2) 极限审敛法

设函数函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$

- 如果存在常数 $p>1$，使得 那么，反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛
- 如果 那么，反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

(3) 绝对值审敛

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果

收敛，那么

收敛

5. 无界函数反常积分审敛法

(1) 比较审敛法

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0, x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，如果存在常数 $M>0, q<1$，使得

那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N > 0$，使得

那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

(2) 极限审敛法

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续，且 $f(x) \geq 0, x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，如果存在常数 $0 < q < 1$，使得：

存在，那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，如果

存在，那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

0x03 向量代数和空间解析几何

3. 旋转曲面的方程

给定 yOz 面上的一条曲线 $C : f(y, z) = 0$，那么这个曲线环绕Z轴形成的旋转曲面的方程为：

0x04 多元函数微分学

1. 有界闭区域 D 上连续函数的性质

- **介值定理**：
- **一致连续性定理**：

6. 空间曲线的切线和法平面

(1) 参数方程组的情形

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

记点 M 对应的参数为 t_0，则曲线 Γ 在 M 处的切线方程为：

法平面方程为：

(2) 普通方程组的情形

设空间曲线 Γ 的方程为：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

则其切向量就是：

其法平面方程就是：

8. 二阶泰勒公式

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内连续且有 $(n+1)$ 阶连续偏导数，(x_0+h,y_0+k) 为此邻域内任一点，则有：

这个公式称作二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的 n **阶泰勒公式**，其中，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0,y_0)=$$

其形式就是二项展开式，例如：

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 f(x_0,y_0)=$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)=$$

拉格朗日余项如下所示：

这个公式也称作**二元函数的拉格朗日中值公式**

10. 拉格朗日乘数法求条件极值

要找函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可以联立以下方程：

从方程组中求解 x,y,λ，得到的 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点。

0x05 多元函数积分学

6. 应用公式

(2) 转动惯量

设点 (x,y) 处的指点的密度为 $\mu(x,y)$，那么这个质点系对 x 轴与对 y 轴的转动惯量分别为：

$I_x=$

$I_y=$

同样的，对于一个物体，其对 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量为：

$I_x=$

$I_y=$

$I_z=$

(3) 引力

空间一物体对某一质点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处单位质量的质点的引力
设这个物体在 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$
则合力 F 在三个坐标轴上的分量为：

$F_x=$

$F_y =$

$F_z =$

0x06 无穷级数

2. 交错级数的莱布尼茨审敛法

设 $\{a_n\}$ 是正项级数，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

收敛的条件是：

4. 傅里叶级数

对于周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$，其傅里叶级数展开形式为：

$f(x) =$

其中，傅里叶系数的计算公式为：

$a_0 =$

$a_n =$

$b_n =$

展开成正弦级数和余弦级数

若 $f(x)$ 是定义在 $[0, l]$ 上的函数，我们可以通过奇延拓将其扩展到 $[-l, l]$，并将其傅里叶级数仅表示为正弦项。这时的傅里叶级数称为**正弦级数**：

$f(x) =$

其中：

$b_n =$

若 $f(x)$ 是定义在 $[0, l]$ 上的函数，我们可以通过偶延拓将其扩展到 $[-l, l]$，并将其傅里叶级数仅表示为余弦项。这时的傅里叶级数称为**余弦级数**：

$f(x) =$

其中：

$a_0 =$

$a_n =$

狄利克雷收敛定理

如果函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，并且满足以下条件：

1.
2.

那么傅里叶级数在**连续点**处收敛于

在**间断点**处收敛于

0x07 常微分方程

8. 二阶非齐次常系数线性微分方程的解法

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ **型**

推荐的演算步骤：

$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$ **型**

其中，$P_l(x), Q_n(x)$ 分别为 l 次多项式，n 次多项式

推荐的演算步骤：

三、概率论与数理统计

0x02 多维随机变量及其分布

2. 二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的概率密度函数为：

$$f(x, y) =$$

0x03 随机变量的数字特征

1. 数学期望

随机变量的函数的期望

设 Y 是随机变量 X 的函数：$Y = g(X)$

- 离散型的情况；$E(Y) =$
- 连续型的情况：$E(Y) =$

推广到多个随机变量的函数的情况：
设 $Z = g(X, Y)$，且二维随机变量 X, Y 的概率密度为 $f(x, y)$，则：

$$E(Z) =$$

如果是离散型的情况，则：

$$E(Z) =$$

4. 矩与协方差矩阵

利用协方差矩阵 $C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))$ 表示多维正态分布 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度：

其中，$X - \mu = (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, \cdots, x_n - \mu_n)$

0x05 数理统计的基本概念

2. χ^2, t, F 分布的性质

(2) t 分布的性质

设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 相互独立，则称随机变量

$t =$

为服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $t \sim t(n)$

(3) F 分布的性质

设 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ 且相互独立，则称随机变量

$F =$

为服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布

$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) =$

0x06 参数估计

1. 单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本
- $\overline{X}, S^2$ 分别为**样本均值**和**样本方差**
- 置信水平均设为 $1-\alpha$

(2) 方差 σ^2 的置信区间

(a) μ 未知

枢轴量：

置信区间：

2. 两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的情况

- 设两个总体的样本分别为 $\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$
- **样本均值**分别为 $\overline{X}, \overline{Y}$
- **样本方差**分别为 S_1^2, S_2^2
- 置信水平均为 $1-\alpha$

(1) $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

(a) σ_1^2, σ_2^2 已知时

枢轴量:

置信区间:

(b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$，但 σ 未知时

枢轴量:

置信区间:

(2) σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

(a) μ_1, μ_2 未知时

枢轴量:

置信区间: