线性规划、单纯形法、对偶单纯形法

▪ **数学模型三要素**：决策变量、目标函数、约束条件

▪ **标准形式**：约束条件均化为等式，决策变量均大于等于0，决策变量原先没标明大小的用两个数替代，小于0的用相反数替代

▪ **单纯形法计算步骤**：

（1）列出初始单纯形表（观察是否存在单位矩阵，不存在需要使用大M法或者两阶段法）

（2）最优性检测，表中所有$\sigma_j \le 0$，计算结束；如果在所有的$\sigma_j > 0$中存在某个$\sigma_k > 0$对应的X_k的系数列向量$P_K \le 0$（即$a_{ik} \le 0$），则此问题无界。

（3）将$\sigma_k = \max\{\sigma_j | \sigma_j > 0\}$对应的$X_k$作为换入变量，将$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$

（4）将换入变量所在列转化为单位向量

▪ **对偶单纯形法计算步骤**：

（1）列出初始单纯形表（将标准形式乘以-1，使b初始为负）

（2）最优性检测，表中所有$b \ge 0$，计算结束；

（3）将$b_l = \min\{b_i | 1 \le i \le m\}$对应的$X_l$作为换入变量

（4）若$a_{lj} \ge 0 (j = 1,2,\ldots,n)$，则停止计算，原问题误无可行解

（5）将$\theta = \min\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0, 1 \le j \le n\right\} = \frac{\sigma_k}{a_{lk}}$

（6）以a_{lk}为主元，将主元素变为1，主元列变为单位向量

▪ **大M法**：

转化为标准形式后不存在单位矩阵时，添加新的人工变量

$$\max Z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

▪ **两阶段法**：

阶段1：求解辅助问题的最优基可行解得到原问题的初始基可行解

阶段2：求原问题的最优解

用两阶段法求解线性规划问题

原问题

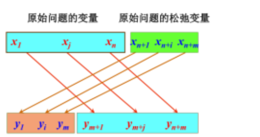
$$\max\ z = -3x_1 + x_3$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

辅助问题

$$\max\ z = -x_6 - x_7$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1,\cdots,5) \end{cases}$$

	$C_j \rightarrow$	
C_B	X_B	b
0	X_4	-5
0	X_5	-3
	σ_j	

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,7 \end{cases}$$



$x_j y_{m+j}=0$　$y_i x_{n+i}=0$　$(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个一定等于0

对偶关系对应表

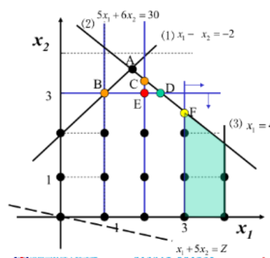
原始问题（对偶问题）		对偶问题（原始问题）	
目标函数 max		目标函数 min W	
系数矩阵 A		系数矩阵 A^T	
目标函数系数为 C		常数列向量为 C^T	
常数列向量为 b		目标函数系数为 b^T	
约束条件	m 个	m 个	对偶变量
	≤型(第i个)	$y_i \ge 0$	
	=型(第i个)	无限制	
	≥型(第i个)	$y_i \le 0$	
决策变量	n 个	n 个	约束条件
	$x_j \ge 0$	≥≤型(第j个)	
	$x_j \le 0$	≤≥型 (第j个)	
	无限制	=型(第j个)	

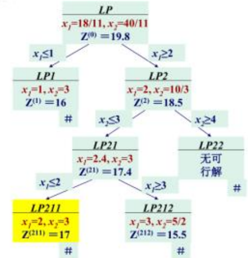
基	基解				是基可行解？	目标函数值
	x_1	x_2	x_3	x_4		
P_1 P_2	-4	5.5	0	0	×	
P_1 P_3	2/5	0	11/5	0	✓	43/5
P_1 P_4	-1/3	0	0	11/6	×	
P_2 P_3	0	1/2	2	0	✓	5 ✓
P_2 P_4	0	-1/2	0	2	×	
P_3 P_4	0	0	1	1	✓	5 ✓

整数规划

▪**割平面法**：利用单纯形法的求解方式构造单纯形表，化简后的结果中存在分数则构造新的约束条件加入单纯形表中继续进行求解，直到最终的结果都为整数为止

▪**分支定界法**：画出约束条件的坐标图，根据x1，x2的取值范围一步步缩进到最优整数解





最终单纯形表

$c_j \rightarrow$			3	2	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_2	5/2	0	1	1/2	-1/2
3	x_1	13/4	1	0	-1/4	3/4
$c_j - z_j$			0	0	-1/4	-5/4

找出非整数解变量中分数部分最大的一个基变量，并写下这一行的约束

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2\frac{1}{2}$$

将上式中所有常数分写成整数与一个正分数之和得，

$$x_2 + (0 + \frac{1}{2})x_3 + (-1 + \frac{1}{2})x_4 = (2 + \frac{1}{2})$$

将整数、正分数进行分离，得

$$x_2 - x_4 - 2 = \frac{1}{2} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{2}$$

因左端为整数，故右端也需取整数

又 $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$，故 $\frac{1}{2} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{2} \le \frac{1}{2} < 1$

又右端必须取整数，故

$$\frac{1}{2} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{2} \le 0 \quad (I)$$

加上松弛变量后得

$$\frac{1}{2} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{2} + x_5 = 0 \quad (II)$$

$$G_1: \quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ -\frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{2} + x_5 = -\frac{1}{2} \\ x_j \ge 0 (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

动态规划

▪**概念**：阶段变量k、状态变量S_k、决策变量u_k

$$\max Z = 2x_1^2 + 3x_2 + 5x_3$$
$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

$S_1 = 8$　$S_2 = S_1 - 2X_1$　$S_3 = S_2 - 4X_2$

$0 \le X_1 \le \frac{S_1}{2}$　$0 \le X_2 \le \frac{S_2}{4}$　$0 \le X_3 \le S_3$

基本方程 $\begin{cases} f_k(S_k) = \max\limits_{0 \le X_k \le \frac{S_k}{d_k}} \{g_k(X_k) + f_{k+1}(S_{k+1})\} \\ f_4(S_4) = 0 \end{cases}$

例：求下面背包问题的最优解$(a=5)$

$$\max Z = 8x_1 + 5x_2 + 12x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 且为整数 \end{cases}$$

物品	1	2	3
重量（公斤）	3	2	5
使用价值	8	5	12

解：$a=5$，问题是求 $f_3(5)$

$$f_3(5) = \max_{\substack{0 \le x_3 \le \frac{5}{a_3} \\ x_3 整数}} \{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$f_k(y) = \max_{0 \le x_k \le \frac{y}{a_k}} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}$$

其中 $2 \le k \le n$

指派问题

▪**一般计算步骤**：

（1）减去行、列的最小值

（2）最少直线覆盖所有零，直线几条几个解

（3）未覆盖的元素减去其中最小的值，直线交点增加该值，继续画线直至得到满足条件的解

▪**特殊情况**：

（1）行列不相等时，需要添加行或者列使其数量一致

（2）求最大值时首先需要将原来矩阵中的**最大值**减去其余元素构造一个新的矩阵

装箱问题

▪ **NF**：按照物品顺序一直放，放不下时直接放到下一个箱子

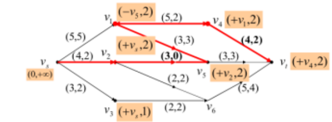
▪ **FF**：先将J_1放入B_1，若$w_1 + w_2 \le c$,则J_2放入B_1，否则放入B_2，若J_2已放入B_2，对于J_3则依次检查B_1、B_2，看其是否能放，能放则放下，否则使用新的箱子。

▪ **BF**：算法思想与FF相似，区别在于对于每个物品J_j是放在一个使得J_j放入之后，B_i所剩余的长度为最小者。

▪ **FFD**：该算法是先将物品按长度从大到小排序，然后用FF算法对物品装箱。

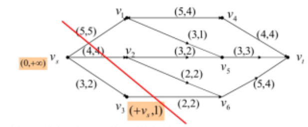
▪ **BFD**：该算法是先将物品按长度从大到小排序，然后用BF算法对物品装箱。

最大流问题



反向追踪

2）调整流量：从 v_s到 v_t所画出的红线即为可增广链。沿该可增广链，从 v_t倒推，标“+”号的在实际流量上加上该调整量，标“-”符号的在实际流量上减去该调整量。完成调整过程。



重新开始标号，寻找可增广链。

当标到$(+v_s,1)$ 时，v_s与 v_3，相邻接的点 v_1，v_2，v_6 都不满足标号条件，标号无法继续，且v_t没有完成标号。此时最大流量即为所求。

$$w = f^*_{s1} + f^*_{s2} + f^*_{s3} = 5 + 4 + 2 = 11$$

标号点集$V = \{v_s, v_3\}$；　割集$(V,\bar{V}) = \{(v_s,v_1),(v_s,v_2),(v_3,v_6)\}$

未标号集$\bar{V} = \{v_1,v_2,v_4,v_5,v_6,v_t\}$；　割集容量$C(V,\bar{V}) = c_{s1} + c_{s2} + c_{36} = 11$

作业调度问题

▪ **损失最少** $1||\sum w_j C_j$

$$\frac{t_{r_1}}{w_{r_1}} \le \frac{t_{r_2}}{w_{r_2}} \le \ldots \le \frac{t_{r_n}}{w_{r_n}}$$

为问题 $1||\sum w_j C_j$ 的最优调度.

▪ **最少延误时间** $1||\sum L_{max}$

Example 7　考虑调度问题 $1||L_{max}$，其中

$n = 6$，$t = (3, 1, 4, 1, 3, 2)$，$d = (2, 10, 6, 4, 11, 12)$

由*EDD*规则可以求得最优调度

$$(T_1, T_4, T_3, T_2, T_5, T_6)$$

最大延误为 $L_{max} = 2$

▪ **最少延误数量** $1||\sum U_j$

Solution：按*EDD*规则，重新调度得右表.

此时，任务 T_7 延误，而在前六项任务中，T_6 的加工时间最长，所以将 T_6 放至最后，得一新表.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{ri}	T_5	T_4	T_3	T_2	T_6	T_7	T_1	T_8
t_{ri}	4	1	3	6	8	7	10	6
C_{ri}	4	5	8	14	22	29	39	45
d_{ri}	6	8	11	20	25	28	35	9

▪ **平行机调度** $P_m||C_{max}$

*LS*算法的思想是按任务给定的顺序，将每一个工件分给最早空闲的机器（也即使该工件最早完工的机器）加工，在安排当前任务的加工时，**不要求知道下一个工件的信息**，所以特别适用于在线调度问题.

2、*LPT* 算法（*Largest Processing Time*）

LPT 算法思想是先将任务按其加工时间从大到小的顺序排列，然后用*LS*算法调度。这也是*Graham* 给出的，它要求任务的信息全部已知后才开始加工。

▪ **车间作业调度** $F_m||C_{max}$

Example 12　考虑调度 $F2 || C_{max}$　其中 $n = 5$

$$t = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 30 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 30 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution：由 *Johnson* 算法可得：

$J1 = \{J_1, J_4, J_5\}$，$J2 = \{J_2, J_3\}$.

J1 中的作业按 t_{1j}不减排列：J_5, J_1, J_4; J2 中的作业按 t_{2j} 不增排列：J_3, J_2，所以最优调度为 $[J_5, J_1, J_4, J_3, J_2]$，时间表长为 $C_{max} = 47$.

J_1：$x_{11} + 8 \le x_{13}$　$x_{13} + 1 \le x_{14}$

J_2：$x_{21} + 5 \le x_{22}$　$x_{22} + 9 \le x_{24}$　J_3：$x_{32} + 2 \le x_{33}$

线性规划、单纯形法、对偶单纯形法

定理 4： LP 问题的可行解集 $D=\{X \mid AX=b, X\ge 0\}$ 是凸集。

证明： 设C表示线性规划问题的可行域 $\max z = CX$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b\\ X\ge 0\end{cases}$$

$\forall X_1=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n}),\ X_2=(x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n})\in C$

则有 $\sum_{j=1}^{n}P_j x_{1j}=b,\ \sum_{j=1}^{n}P_j x_{2j}=b,\ X_1\ge 0,\ X_2\ge 0$

令 $X=aX_1+(1-a)X_2\in C\,(0<a<1)$

即 $x_j=ax_{1j}+(1-a)x_{2j}\,(0<a<1, j=1,\cdots,n)$

则有 $\sum_{j=1}^{n}P_j x_j=\sum_{j=1}^{n}P_j[ax_{1j}+(1-a)x_{2j}]$

$$=a\sum_{j=1}^{n}P_j x_{1j}+\sum_{j=1}^{n}P_j x_{2j}-a\sum_{j=1}^{n}P_j x_{2j}=ab+b-ab=b$$

显然 $x_j\ge 0, j=1,\cdots,n$ 证毕

定理2（弱对偶定理）

若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D)的任意可行解，则有 $CX\le Yb$ 成立。

证明：

$$\begin{cases}AX_0\le b\\ Y_0A\ge C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y_0AX_0\le Y_0b\\ Y_0AX_0\ge CX_0\end{cases}\Rightarrow CX_0\le Y_0b$$

定理3： 若 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的可行解，且有 $CX^*=Y^*b$，则 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的最优解.

证明： 设 X 是原始问题的任一可行解

由推论1可得 $CX\le Y^*b$

又已知 $CX^*=Y^*b$ $\Big\}\Rightarrow CX\le CX^*$

由 X 的任意性可知，X^* 是原始问题的最优解.

同理可证 Y^* 是对偶问题的最优解.

说明： 原问题和对偶问题的最优值相等，$CX^*=Y^*b$.

定理 4：（强对偶定理） 如果原问题P有最优解，那么对偶问题D也有最优解，且目标函数值相等。

证明： 假设有原问题P和对偶问题D：

(P) $\max\ Z=CX$ $\quad s.t\begin{cases}AX\le b\\ X\ge 0\end{cases}$

(D) $\min\ W=Yb$ $\quad s.t\begin{cases}YA\ge C\\ Y\ge 0\end{cases}$

设 X^* 是原始问题的最优解，它对应的最优基为 B，则相应的基变量为：$X^*_B=B^{-1}b$,

最优值为 $\max S=CX^*=C_BB^{-1}b$ 检验数为：$C-C_BB^{-1}A\le 0$

令 $Y^*=C_BB^{-1}$ 则 $Y^*A\ge C$ 即 Y^* 是对偶问题的一个可行解,

而 $Y^*b=C_BB^{-1}b=CX^*$ 由定理3知, Y^* 是对偶问题的最优解

定理6（互补松弛性） 若 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的可行解，且 X_s 和 Y_s 分别为它们的松弛变量和剩余弛变量，则 $Y^*X_s=0$ 和 $Y_sX^*=0$ 当且仅当 X^* 和 Y^* 分别为它们的最优解.

证明：必要性

$$AX^*\le b\Rightarrow AX^*+X_s=b\Rightarrow Y^*AX^*+Y^*X_s=Y^*b$$

$$Y^*A\ge C\Rightarrow Y^*A-Y_s=C\Rightarrow Y^*AX^*-Y_sX^*=CX^*$$

两式相减得：$Y^*X_s+Y_sX^*=CX^*-Y^*b$

若 $Y^*X_s=Y_sX^*=0$，则有 $CX^*=Y^*b$

由定理可知，X^*、Y^* 分别是原问题和对偶问题的最优解.

下证充分性.

若 X^*、Y^* 分别是原问题和对偶问题的最优解，

则 $CX^*=Y^*b$

由必要性证明可知：$Y^*X_s+Y_sX^*=CX^*-Y^*b$ $\Big\}\Rightarrow Y^*X_s+Y_sX^*=0$

又 X^*、Y^*、X_s、$Y_s\ge 0$

故 $Y^*X_s=0,\ Y_sX^*=0.$

指派问题

定理1： 如果从指派问题效率矩阵 $[c_{ij}]$ 的每一行元素中分别减去(或加上)一个常数 u_i(被称为该行的位势)，从每一列分别减去(或加上)一个常数 v_j(称为该列的位势)，得到一个新的效率矩阵 $[b_{ij}]$，若其中 $b_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$，则 $[b_{ij}]$ 的最优解的结构等价于 $[c_{ij}]$ 的最优解的结构.

证明： 将从 $[b_{ij}]$ 中得到的解代入分配问题模型的目标函数式，有

$$z'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}u_i\sum_{j=1}^{m}x_{ij}-\sum_{j=1}^{m}v_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}u_i-\sum_{j=1}^{m}v_j$$

Theorem 8.3 $\dfrac{z_{NF}(I)}{z_{opt}(I)}\le 2$

Proof：设 I 为任一实例，$z_{opt}(I)=k$.（要证 $z_{NF}(I)\le 2k$）

显然，由 $k=z_{opt}(I)\ge\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}w_i$ 得 $\sum_{i=1}^{n}w_i\le Ck$

反证 如果 $z_{NF}(I)>2k$，则对任意 $i=1,2,\ldots,k$

由于起用第 $2i$ 个箱子是因为第 $2i-1$ 个箱子放不下第 $2i$ 个箱子中第一个物品,因此这两个箱子中物品的总长度大于 C，所以前 $2k$ 个箱子中物品的总长度大于 Ck .

这与 $\sum_{i=1}^{n}w_i\le Ck$ 矛盾． $\therefore\ \dfrac{z_{NF}(I)}{z_{opt}(I)}\le 2$.

比较 *NF* 算法、*FF*(*BF*) 算法、*FFD* 算法，它们的近似程度一个比一个好，但这并不是说 *NF*、*FF(BF)* 就失去了使用价值．

1、*FF(BF)*、*FFD* 算法都要将所有物品全部装好后，所有箱子才能一起运走，而 *NF* 算法无此限制，很适合装箱场地小的情形；

2、*FFD* 算法要求所有物品全部到达后才开始装箱，而 *NF*、*FF(BF)* 算法在给某一物品装箱时，可以不知道下一个物品的长度如何，适合在线装箱．

装箱问题

§2 装箱问题的最优解值下界

Theorem 8.1 *BP* 最优值的一个下界为 $L_1=\left\lceil\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}w_i\right\rceil$

$\lceil a\rceil$ 表示不小于 a 的最小整数.

Theorem 8.2

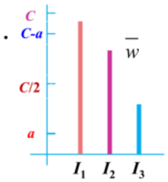
对于 *BP* 的任一实例 I,设 a 是任意满足 $w=\min\{w_j\mid w_j\in I\}$ $0\le a\le\frac{C}{2}, a\le w$ 的整数

记 $I_1=\{物品\ j\mid w_j>C-a\}$, $I_2=\{物品\ j\mid C-a\ge w_j>\frac{C}{2}\}$,

$I_3=\{物品\ j\mid \frac{C}{2}\ge w_j\ge a\}$,

则 $L(a)=|I_1|+|I_2|+\max\left\{0,\left\lceil\frac{1}{C}(\sum_{j\in I_3}w_j-(|I_2|C-\sum_{j\in I_2}w_j))\right\rceil\right\}$

是最优解的一个下界．



Proof：仅考虑对 I_1,I_2,I_3 中物品的装箱．

$\because$ $I_1\cup I_2$ 中物品的长度大于 $C/2$，每个物品需单独放入一个箱子，这就需要 $|I_1|+|I_2|$ 个箱子．

又 $\because$ I_3 中每个物品长度至少为 a，

$\therefore$ 它不能与 I_1 中的物品共用箱子, 但可能与 I_2 中的物品共用箱子，由于放 I_2 中物品的 $|I_2|$ 个箱子的剩余总长度为 $\bar{C}=|I_2|C-\sum_{j\in I_2}w_j$

在最好的情形下，$\bar{C}$ 被 I_3 中的物品全部充满，故剩下总长度 $\bar{w}=\sum w_j-\bar{C}$ 将另外至少 $\left\lceil\frac{\bar{w}}{C}\right\rceil$ 个附加的箱子．

$\therefore$ $L(a)=|I_1|+|I_2|+\max\left\{0,\left\lceil\frac{1}{C}(\sum_{j\in I_3}w_j-(|I_2|C-\sum_{j\in I_2}w_j))\right\rceil\right\}$

是最优解的一个下界．

问 $L(a)\ge L_1=\left\lceil\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}w_i\right\rceil$ ？

Corollary 8.1 记 $L_2=\max\{L(a)\mid 0\le a\le\frac{C}{2}, a 为整数\}$

则 L_2 是装箱问题的最优解的一个下界，且 $L_2\ge L_1$.

Proof：L_2 为最优解的下界是显然的．

（若证明 $L(0)\ge L_1$，则可得 $L_2\ge L_1$ ）

$$L(a)=|I_1|+|I_2|+\max\left\{0,\left\lceil\frac{1}{C}(\sum_{j\in I_3}w_j-(|I_2|C-\sum_{j\in I_2}w_j))\right\rceil\right\}$$

当 $a=0$ 时，$I_1=\varnothing$，$I_2\cup I_3$ 是所有物品．

$$L(0)=0+|I_2|+\max\left\{0,\left\lceil\frac{1}{C}(\sum_{j=1}^{n}w_j-|I_2|C)\right\rceil\right\}$$

$$=|I_2|+\max\{0,L_1-|I_2|\}=\max\{|I_2|,L_1\}\ge L_1$$

$\therefore$ $L_2\ge L(0)\ge L_1$

作业调度问题

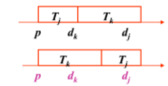
Theorem 2：对于问题 $1\|L_{\max}$,*EDD* 规则可以得到最优调度．

Theorem 2 的证明

只需证明任何不满足 *EDD* 规则的调度，均可转化为满足 *EDD* 规则而目标函数不增。

设某一调度 s 违反了 *EDD* 规则，则在此调度中，至少有两个相邻任务

T_j、T_k，T_j 排在 T_k 之前，而 $d_j>d_k$



设 T_j 在时间 p 时开始加工，则

$L_j=p+t_j-d_j$, $L_k=p+t_j+t_k-d_k$

对调 T_j T_k 的位置，其余任务位置不变，得一排序 S'.

在这排序中 $L_j'=p+t_j+t_k-d_j$, $L_k'=p+t_k-d_k$

因为 $d_j>d_k$，所以 $L_k>L_j', L_k>L_k'$ 从而 $L_{\max}\ge L_{\max}'$

Theorem 6 $R_{LS}=2-\dfrac{1}{m}$

Theorem 6 的证明

Proof：分两步

(1) 证明对任意的实例 I, $\dfrac{f_{LS}(I)}{f_{opt}(I)}\le 2-\dfrac{1}{m}$

(2) 说明该界不可改进．

（1）用反证法证明 $\dfrac{f_{LS}(I)}{f_{opt}(I)}\le 2-\dfrac{1}{m}$

假设该结论不成立，则存在反例 I 使 $\dfrac{f_{LS}(I)}{f_{opt}(I)}>2-\dfrac{1}{m}$,

考虑反例中任务数最少的一个（称为最小反例）.

由于 I 为最小反例，具有性质 $f_{LS}(I)$ 等于最后一个任务 J_n 的完工时间．

下面证明最小反例的该性质成立。

因为若不然，设 J_k 的完工时间等于 $f_{LS}(I)$, $k<n$.

考虑新的任务集 $J_1, J_2, \ldots, J_k$, 则对由此任务得到的新实例 I^* 有 $f_{LS}(I^*)=f_{LS}(I)$，而且 $f_{opt}(I^*)\le f_{opt}(I)$,

因此 有 $\dfrac{f_{LS}(I^*)}{f_{opt}(I^*)}\ge\dfrac{f_{LS}(I)}{f_{opt}(I)}>2-\dfrac{1}{m}$

说明 I^* 是一个更小的反例．

由 s 为开始加工 J_n 时刻，则 $f_{LS}(I)=s+t_n$.

由 *LS* 规则，J_n 是分给最早空闲的机器加工，$s\le\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n-1}t_i$

由 *Th* 5 知 $f_{opt}(I)\ge t_n$ 及 $f_{opt}(I)\ge\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}t_i$

因此

$$\frac{f_{LS}(I)}{f_{opt}(I)}=\frac{s+t_n}{f_{opt}(I)}\le\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n-1}t_i+t_n}{f_{opt}(I)}=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}t_i+(1-\frac{1}{m})t_n}{f_{opt}(I)}$$

$$\le 1+(1-\frac{1}{m})=2-\frac{1}{m}$$

这与 I 是反例矛盾，此矛盾说明 $R_{LS}\le 2-\frac{1}{m}$.

（2）考虑任务集 $\{J_1, J_2, \ldots, J_{m^2-m+1}\}$，其加工时间分别为：$t_1=t_2=\ldots=t_{m^2-m}=1$，$t_{m^2-m+1}=m$，

需分给 m 台机器加工，易证 $f_{LS}(I)=2m-1, f_{opt}(I)=m$.

故 $\dfrac{f_{LS}(I)}{f_{opt}(I)}=2-\dfrac{1}{m}$

因此 有 $R_{LS}=2-\dfrac{1}{m}$ □