1、试将下列问题改写成线性规划问题的标准形式。

$$\max\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$s.t.\ \begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\x_i\ge 0\quad i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

●解答如下：

解：令 $Y=\min\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\ \sum_{i=1}^{m}a_{i3}x_i,\ldots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right)$

∴原问题可化为： $\max Z=Y$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i\ge Y\\\sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i\ge Y\\\vdots\\\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\ge Y\\x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\x_i\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m\end{cases}$$

∴化为标准形式为： $\max Z=Y$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i+b_1=Y\\\sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i+b_2=Y\\\vdots\\\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i+b_n=Y\\x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\x_i\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m\end{cases}$$

2、若如下线性规划问题：

$\{\max S=C_1X, AX=b, X\ge 0\}$的最优解$X_1$，

$\{\max S=C_2X, AX=b, X\ge 0\}$的最优解是$X_2$，

证明： $(C_2-C_1)(X_2-X_1)\ge 0$

●解答如下：

2. 解：∵ $\{\max\ S=C_1X,\ AX=b,\ X\ge 0\}$ 的最优解为 X_1

∴ $C_1X_1\ge C_1X_2$ 即 $C_1X_1-C_1X_2\ge 0$ ①

同理可得： $C_2X_2-C_2X_1\ge 0$ ②

要证 $(C_2-C_1)(X_2-X_1)\ge 0$ 只需证 $C_2X_2-C_2X_1+C_1X_1-C_1X_2\ge 0$ ③

由①+②得： $C_2X_2-C_2X_1+C_1X_1-C_1X_2\ge 0$

∴③式得证 ∴ $(C_2-C_1)(X_2-X_1)\ge 0$ 成立

3、写出下列问题的标准型形式，并求对偶问题

(1) $\min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 \geq 8 \\ 12x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 9x_4 \leq 20 \\ x_1、x_2 \geq 0，x_3 \leq 0 \end{cases}$$

●解答如下：

3.解：(1) 标准型：

$$\max z' = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题：

$$\max w = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 2 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \leq 4 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

(2) 标准型：

$$\max z' = x_1 + 2x_2 - 3x_3' + 4(x_4' - x_4'')$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3' - 3(x_4' - x_4'') = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3' - 5(x_4' - x_4'') - x_5 = 8 \\ 12x_1 - 9x_2 + 9x_3' + 9(x_4' - x_4'') + x_6 = 20 \\ x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'', x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题：

$$\min w = 5y_1 + 8y_2 + 20y_3$$

$$\begin{cases} -y_1 + 6y_2 + 12y_3 \geq 1 \\ y_1 + 7y_2 - 9y_3 \geq 2 \\ -y_1 + 3y_2 - 9y_3 \leq 3 \\ -3y_1 - 5y_2 + 9y_3 = 4 \\ y_1\text{无限制},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

4、用对偶单纯形法求解下列线性规划问题

$$\min z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

●解答如下：

4. 解：原式化为标准形式为：

$$\max z' = -4x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

将标准形式~~两边同乘-1~~ 约束条件两边同乘-1

$$\max z' = -4x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

根据上式列表求解过程如下：

	$c_j \rightarrow$		-4	-1	-3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-5	-1	[-1]	-1	1	0
0	x_5	-3	-1	1	4	0	1
	σ_j		-4	-1	-3	0	0
-1	x_2	5	1	1	1	-1	0
0	x_5	-8	[-2]	0	3	1	1
	σ_j		-3	0	-2	-1	0
-1	x_2	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-4	x_1	4	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

最优解： $X^* = (4, 1, 0, 0, 0)^T$

最优值： $\min Z = -\max z' = -[(-4)\times 4 + (-1)\times 1] = 17$

5、请用单纯法求解下列 LP 问题的最优解

$$\max \quad z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$

$$s.t\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_{1,} \quad x_{2,} \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$$

●**解答如下：**

---

5. 解：将原式化为标准形式如下：

$$\max \quad z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_5 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

列表求解过程如下：

C_j			6	2	12	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	24	4	1	[3]	1	0
0	x_5	30	2	6	3	0	1
	σ_j		6	2	12	0	0
12	x_3	8	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
0	x_5	6	-2	5	0	-1	1
	σ_j		-10	-2	0	-4	0

最优解 $X^* = (0, 0, 8, 0, 6)^T$

最优值 $z^* = 12 \times 8 + 0 \times 6 = 96$

6、试用对偶理论证明该问题的最优值不超过 25.

$$\max w = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

●解答如下：

6. 解：原问题的对偶问题为：

$$\min z = 10y_1 + 10y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 7 \\ y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

易知 $Y = (\frac{1}{2}, 2)$ 是对偶问题一个可行解

此时 $z = 10 \times \frac{1}{2} + 10 \times 2 = 25$

由对偶理论知原问题的解小于等于对偶问题的解

∴该问题的最优值不超过 25

7、试用线性规划最优解的性质，验证 X=(0, 2, 0, 0, 2)T 是否是下列问题的最优解。

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_j \ge 0;\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

●解答如下：

7. 假设 $X=(0,2,0,0,2)^T$ 是该问题的最优解

原问题标准式为：

$$\max\ z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

对偶问题为：

$$\min\ w = 4y_1 + 6y_2$$

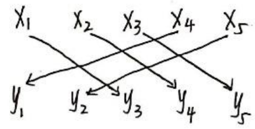
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_i \ge 0,\ i = 1,2 \end{cases}$$

对偶问题标准式为：

$$\min\ w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y_1 + 2y_2 - y_5 = 3 \\ y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

由~~对偶~~互补松弛定理得原问题与对偶问题解对应关系为：



$\therefore (y_2, y_4) = (0, 0)$

将其代入对偶问题标准式~~中~~可得：

$$\begin{cases} 2y_1 - y_3 = 1 \\ 2y_1 = 4 \\ y_1 - y_5 = 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_3 = 3 \\ y_5 = -1 \end{cases}$$

$\because y_5 = -1$ 不满足约束条件

$\therefore X = (0,2,0,0,2)^T$ 不是原问题的最优解.

8、试用对偶单纯形法求解下列问题的最优解

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3$$

●解答如下：

8.解：将原式化为标准形式

$$\max\ Z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

将标准形式约束条件两边同乘-1得：

$$\max\ Z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

列表求解过程如下：

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
	σ_j		-2	-3	-4	0	0
0	x_4	-1	0	$[-\frac{5}{2}]$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
-2	x_1	2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
	σ_j		0	-4	-1	0	-1
-3	x_2	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
-2	x_1	$\frac{11}{5}$	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
	σ_j		0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$

最优解 $X^* = (\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0)^T$　　最优值：$\min W = -\max Z = -\left[(-2)\times\frac{11}{5} + (-3)\times\frac{2}{5}\right] = \frac{28}{5}$

9、对于下列线性规划原问题，已知其对偶问题的最优解为 $y_1=1.2$，$y_2=0.2$ 试用对偶理论求出原问题的最优解.

$$\max z = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4 \leq 20 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4 \leq 20 \\ x_1,\cdots,x_4 \geq 0 \end{cases}$$

●解答如下：

9. 原问题标准形式为：

$$\max \ Z = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4+x_5=20 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_6=20 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geq 0 \end{cases}$$

对偶问题为：

$$\min \ W=20y_1+20y_2$$

$$\begin{cases} y_1+2y_2\geq 1 \\ 2y_1+y_2\geq 2 \\ 2y_1+3y_2\geq 3 \\ 3y_1+2y_2\geq 4 \\ y_1,y_2\geq 0 \end{cases}$$

对偶问题标准形式为：

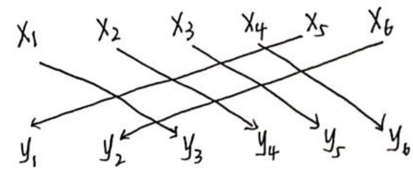
$$\min \ W=20y_1+20y_2$$

$$\begin{cases} y_1+2y_2-y_3=1 \\ 2y_1+y_2-y_4=2 \\ 2y_1+3y_2-y_5=3 \\ 3y_1+2y_2-y_6=4 \\ y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\geq 0 \end{cases}$$

$\because y_1=1.2 \quad y_2=0.2$ 代入上式得：

$$(y_3,y_4,y_5,y_6)=(0.6,0.6,0,0)$$

由互补松弛定理可知原问题解与对偶问题解对应关系如下：



$\therefore x_1=x_2=x_5=x_6=0$

将其代入原问题标准式中得：

$$\begin{cases} 2x_3+3x_4=20 \\ 3x_3+2x_4=20 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x_3=4 \\ x_4=4 \end{cases}$$

$\therefore$ 原问题最优解为 $X^*=(0,0,4,4)^T$

最优值为：$Z^*=3\times 4+4\times 4=28$

10、用动态规划方法求下列非线性问题的最优解：

$$\max Z = x_1^2 x_2 x_3^3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

●解答如下：

10. 解：$a=6$ 问题是求 $f_3(6)$

$$f_3(6) = \max_{\substack{0\le x_3 \le \frac{6}{a_3} \\ x_3\text{为整数}}} \{x_3^3 \cdot f_2(6-x_3)\} = \max_{\substack{0\le x_3\le 6 \\ x_3\text{为整数}}} \{x_3^3 \cdot f_2(6-x_3)\} = \max\{0, f_2(5), 8f_2(4), 27f_2(3), 64f_2(2), 128f_2(1), 216f_2(0)\}$$

$$f_2(5) = \max_{\substack{0\le x_2\le 5 \\ x_2\text{为整数}}} \{x_2 \cdot f_1(5-x_2)\} = \max\{0, f_1(4), 2f_1(3), 3f_1(2), 4f_1(1), 5f_1(0)\} = \max\{0, 16, 18, 12, 4, 0\} = 18$$

$$8f_2(4) = 8 \cdot \max_{\substack{0\le x_2\le 4 \\ x_2\text{为整数}}} \{x_2 \cdot f_1(4-x_2)\} = 8 \cdot \max\{0, f_1(3), 2f_1(2), 3f_1(1), 4f_1(0)\} = 8 \cdot \max\{0, 9, 8, 3, 0\} = 72$$

$$27f_2(3) = 27 \cdot \max_{\substack{0\le x_2\le 3 \\ x_2\text{为整数}}} \{x_2 \cdot f_1(3-x_2)\} = 27 \cdot \max\{0, f_1(2), 2f_1(1), 3f_1(0)\} = 27 \cdot \max\{0, 4, 2, 0\} = 108$$

$$64f_2(2) = 64 \cdot \max_{\substack{0\le x_2\le 2 \\ x_2\text{为整数}}} \{x_2 \cdot f_1(2-x_2)\} = 64 \cdot \max\{0, f_1(1), 2f_1(0)\} = 64 \cdot \max\{0, 1, 0\} = 64$$

$$125f_2(1) = 125 \cdot \max_{\substack{0\le x_2\le 1 \\ x_2\text{为整数}}} \{x_2 \cdot f_1(1-x_2)\} = 125 \cdot \max\{0, f_1(0)\} = 0$$

综上所述，该题最优解为 $X^* = (2,1,3)$ 最优解值为 $Z^* = 108$

11、设 x^*是线性规划问题：$\{\max S = cx; Ax = b; x \ge 0\}$ 的最优解，最优值为 S^*，$k\ge 0$ 为某一常数，分别在讨论以下情况时，求解线性规划问题的最优解和最优值，用 x^*或 S^*表示。（15 分）

（1）目标函数变为 $\max S = k(cx)$，约束条件不变；

（2）目标函数不变，约束条件变为 $Ax = kb$ ；

（3）目标函数变为 $\max S = \frac{1}{k}(cx)$，约束条件变为 $Ax = kb$。

●解答如下：

11. (1) 最优解：X^*；最优值：KS^*

(2) 最优解：KX^*；最优值：KS^*

(3) 最优解：KX^*；最优值：S^*

12、若线性规划问题存在可行解的集合 D={ X | AX=B x≥0}，证明集合 D 是凸集。

解答如下：

12. 证明：设线性规划问题为：

$$\max\ Z = CX$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} P_j X_j = b \\ X \geq 0\end{cases}$$

C表示LP问题的可行域

$\forall X_1=(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$ $X_2=(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}) \in C$

则有 $\sum_{j=1}^{n} P_j X_{1j} = b$ $\sum_{j=1}^{n} P_j X_{2j} = b$ $X_1 \geq 0$ $X_2 \geq 0$

令 $X = aX_1 + (1-a)X_2 \in C$ $(0<a<1)$

$\because$ $x_j = ax_{1j} + (1-a)x_{2j}$ $(0<a<1, j=1, \ldots, n)$ $\therefore x_j \geq 0$

$\therefore \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \sum_{j=1}^{n} P_j[ax_{1j} + (1-a)x_{2j}] = a\sum_{j=1}^{n} P_j X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} P_j X_{2j} - a\sum_{j=1}^{n} P_j X_{2j} = ab + b - ab = b$

$\therefore$ 集合D是凸集

13、利用对偶理论证明下列线性规划问题无最优解

$$\min\ z = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1 \qquad - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{cases}$$

●**解答如下：**

13. 原问题的对偶问题为：

$$\max\ W = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases}y_1 + y_2 \leq 1 \\ -y_2 \leq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0\end{cases}$$

易知对偶问题无可行解，更无最优解

$\therefore$ 原问题也无最优解

14、用动态规划方法求解下列问题：

$$\max Z = 2x_1^2 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

●解答如下：

14.解：令 $g_1(x_1) = 2x_1^2 \quad g_2(x_2) = 3x_2 \quad g_3(x_3) = 5x_3$

指标函数为 $V_{k,3} = \sum_{i=k}^{3} g_i(x_i)$

基本方程 $\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le \frac{s_k}{a_k}} \{ g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \} \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$

其中 $s_1 = 8 \quad s_2 = s_1 - 2x_1 \quad s_3 = s_2 - 4x_2$

$0 \le x_1 \le \frac{s_1}{2} \quad 0 \le x_2 \le \frac{s_2}{4} \quad 0 \le x_3 \le s_3$

当k=3 $\quad f_3(s_3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le s_3} \{5x_3\} = 5s_3$

当k=2 $\quad f_2(s_2) = \max\limits_{0 \le x_2 \le \frac{s_2}{4}} \{3x_2 + f_3(s_3)\} = \max\limits_{0 \le x_2 \le \frac{s_2}{4}} \{3x_2 + 5(s_2 - 4x_2)\}$

$= \max\limits_{0 \le x_2 \le \frac{s_2}{4}} \{-17x_2 + 5s_2\} = 5s_2$

当k=3 $\quad f_1(s_1) = \max\limits_{0 \le x_1 \le \frac{s_1}{2}} \{2x_1^2 + f_2(s_2)\} = \max\limits_{0 \le x_1 \le \frac{s_1}{2}} \{2x_1^2 + 5(s_1 - 2x_1)\}$

$= \max\limits_{0 \le x_1 \le 4} \{2x_1^2 - 10x_1 + 40\}$

∵ $2x_1^2 - 10x_1 + 40$ 是凸函数

∴ 极值点在端点处取

∴ 当 $x_1 = 0$ 时 $\quad 2x_1^2 - 10x_1 + 40 = 40$

当 $x_1 = 4$ 时 $\quad 2x_1^2 - 10x_1 + 40 = 32$

∴ 该问题最优解为 $X^* = (0, 0, 8)$

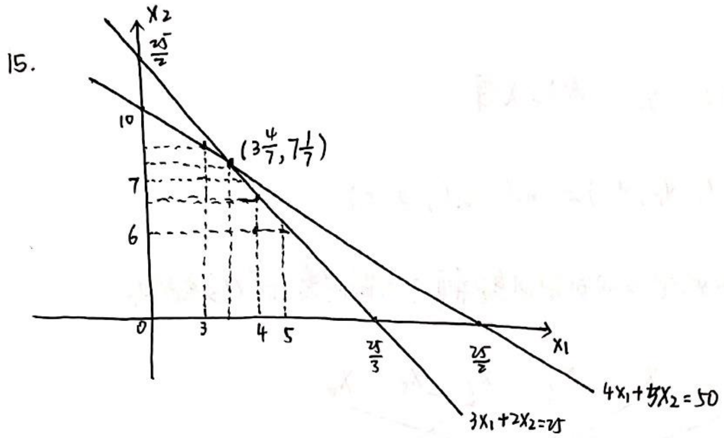
最优值为 $Z^* = 40$

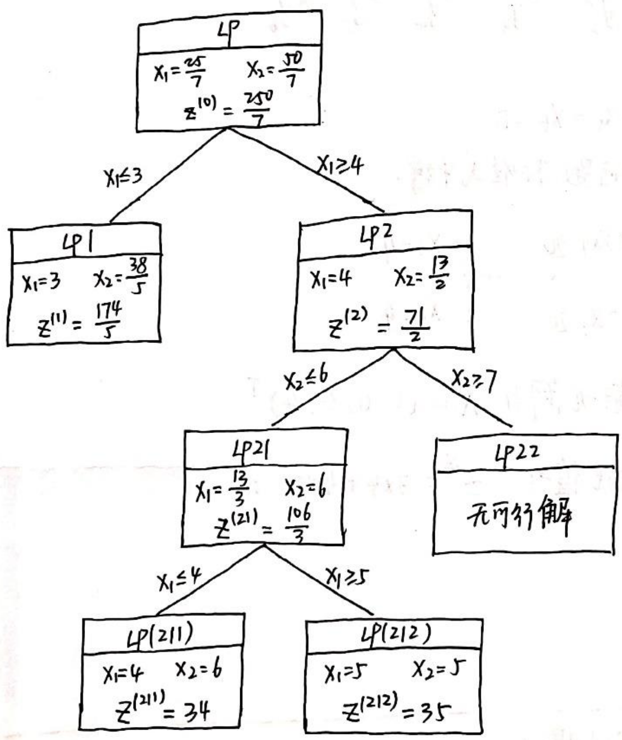
15、用分支定界法求下列整数规划问题的最优解和最优值。

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 25 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 50 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数} \end{cases}$$

●解答如下：





∴ 该问题最优解为：$x_1=5$ $x_2=5$

最优值为：$Z=35$

16、假设某地需要建设 5 个厂房 B1、B2、B3、B4、B5，指派三个建筑公司 A1、A2、A3 完成厂房的建设，每家建筑公司最多承建 2 个厂房。求使总费用最少的指派方案。

$$
\begin{array}{c}
\\
A_1 \\
A_2 \\
A_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\
7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\
6 & 9 & 12 & 8 & 7
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

●解答如下：

16. 解：每家建筑公司最多承建 2个厂房，可将公司复制成 2份，并增加 B_6 厂房

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\
\hline
A_{11} & 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\
A_{12} & 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\
A_{21} & 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\
A_{22} & 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\
A_{31} & 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \\
A_{32} & 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0
\end{array}
\xrightarrow[\text{减去列最小}]{\text{减去行最小}}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \\
3 & (1) & 10 & 6 & 3 & 0 \\
3 & 1 & 10 & 6 & 3 & 0 \\
2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 1 \\
2 & 0 & 9 & 5 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 9 & 5 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
(0) & 0 & 0 & 7 & 5 & 1 \\
0 & 0 & (0) & 7 & 5 & 1 \\
2 & (0) & 9 & 5 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 9 & 5 & 2 & (0) \\
2 & 1 & 5 & 0 & (0) & 0 \\
2 & 1 & 5 & (0) & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

∴ 指派方案如下：

A1 ： B1, B3

A2 ： B2

A3 ： B4, B5

∴ 总费用为：$4+7+9+7+8=11+9+15=35$

17、设有 8 个工件 A_1，A_2，…，A_8 要在一台机器上加工，加工时间 t_i 和交货日期 d_i 如下表所示：

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
t_i	**5**	**10**	**2**	**2**	**4**	**6**	**7**	**3**
d_i	**34**	**18**	**10**	**8**	**6**	**22**	**28**	**9**

试求：（1）对于 $1 \parallel L_{max}$ 问题，求最优调度序列。

（2）对于 $1 \parallel \sum U_j$ 问题，求调度序列，使得误期交货的工件最少。

●解答如下：

17. (1) 根据EDD规则可得最优调度为：(A_5, A_4, A_8, A_3, A_2, A_6, A_7, A_1)

(2) 根据EDD规则初始化建表

A_i	A_5	A_4	A_8	A_3	A_2	A_6	A_7	A_1
t_i	4	2	3	2	10	6	7	5
C_i	4	6	9	11	21	27	34	39
d_i	6	8	9	10	18	22	28	34

将A_5移出得新表：

A_i	A_4	A_8	A_3	A_2	A_6	A_7	A_1	A_5
t_i	2	3	2	10	6	7	5	4
C_i	2	5	7	17	23	30	35	39
d_i	8	9	10	18	22	28	34	6

将A2移出得新表：

A_i	A_4	A_8	A_3	A_6	A_7	A_1	A_5	A_2
t_i	2	3	2	6	7	5	4	10
C_i	2	5	7	13	20	25	29	39
d_i	8	9	10	22	28	34	6	18

此时前6项都不误期，是最优方案

调度序列为 (A_4, A_8, A_3, A_6, A_7, A_1, A_5, A_6)

误期为2件：A_5、A_2 .

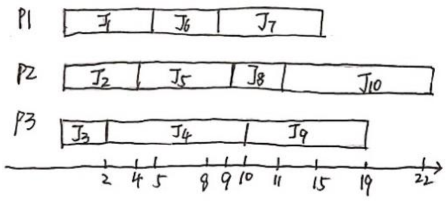
18、对于调度问题 $P_m \| C_{\max}$，其中，m = 3，n = 9， t = (5, 4, 2, 8, 6, 3, 7,1,9,11) . 求最优调度。

●解答如下：

18. 解：令 $J_1=5$ $J_2=4$ $J_3=2$ $J_4=8$ $J_5=6$ $J_6=3$

$J_7=7$ $J_8=1$ $J_9=9$ $J_{10}=11$

① 采用LS算法：

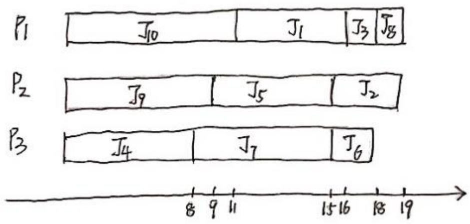


$\therefore f_{LS}=22$

② 采用LST算法，先排序后结果为：

$J=(J_{10}, J_9, J_4, J_7, J_5, J_1, J_2, J_6, J_3, J_8)$

相应 $t=(11, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$



$\therefore f_{LST}=19$

$\therefore$ 最优调度为：P_1上依次进行 J_{10}、J_1、J_3、J_8；P_2上依次进行 J_9、J_5、J_2；P_3上依次进行 J_4, J_7, J_6

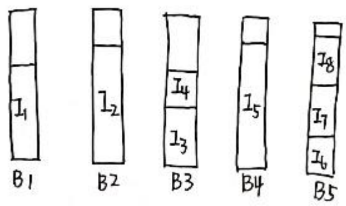
19 、有如下表的 8 件物品，有容积均为 20 的相同箱子若干，请分别用 NF、BF、FF、BFD、FFD 算法求装入下列 8 件物品所需最少箱子数。

物品	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
w_j	12	14	8	4	16	6	10	2

●解答如下：

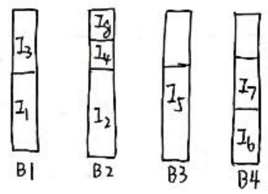
19. 解:设需要箱子数为 N

① NF算法:



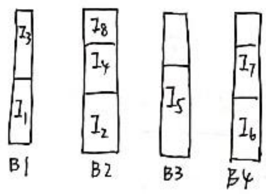
N=5

② BF算法:



N=4

③ FF算法:

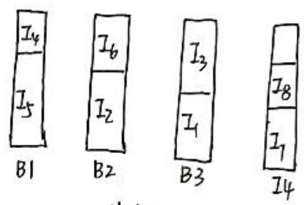


N=4

将物品重量从大到小进行排序得表:

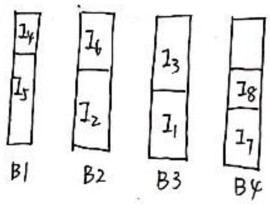
物品	I_5	I_2	I_1	I_7	I_3	I_6	I_4	I_8
W_j	16	14	12	10	8	6	4	2

④ BFD算法:



N=4

⑤ FFD算法:



N=4

20、求下列最小指派问题的最优分配，有 1 人要做 2 项工作，其余 3 人每人做 1 项工作。

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
甲	**26**	**38**	**41**	**52**	**27**
乙	**25**	**33**	**44**	**59**	**21**
丙	**20**	**30**	**47**	**56**	**25**
丁	**22**	**31**	**45**	**53**	**20**

●解答如下：

20.解：

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}26&38&41&52&27\\25&33&44&59&21\\20&30&47&56&25\\22&31&45&53&20\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}26\\21\\20\\20\\0\end{array}\longrightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}(0)&12&15&26&1\\4&12&23&38&(0)\\\cancel{0}&10&27&36&5\\2&11&25&33&\cancel{0}\\\cancel{0}&(0)&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}\\\begin{array}{ccccc}0&0&0&0&0\end{array}\end{array}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&2&5&16&1\\4&2&13&28&0\\0&0&17&26&5\\2&1&15&23&0\\10&0&0&0&10\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}0&2&0&11&1\\4&2&8&23&0\\0&0&12&21&5\\2&1&10&18&0\\15&5&0&0&15\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&2&0&11&1\\4&2&8&23&0\\0&0&12&21&5\\2&1&10&18&0\\15&5&0&0&15\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\cancel{0}&2&(0)&11&2\\3&1&7&22&(0)\\(0)&\cancel{0}&12&21&6\\1&(0)&9&17&\cancel{0}\\15&5&\cancel{0}&(0)&16\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0&2&(0)&11&2\\3&1&7&22&(0)\\(0)&0&12&21&6\\1&(0)&9&17&0\\15&5&0&(0)&16\end{bmatrix}&\begin{array}{c}甲\\乙\\丙\\丁\\ \end{array}\\\begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}&\end{array}$$

∴任务分配如下：

甲：CD

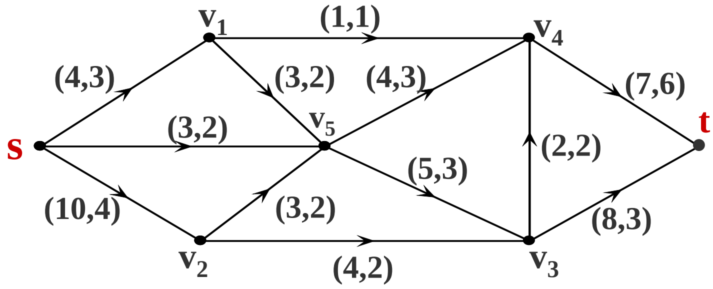
乙：E

丙：A

丁：B

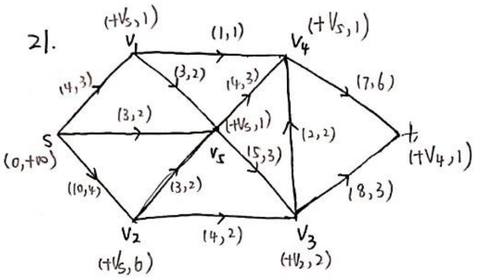
所用时间最短为：20+31+41+52+21=165

21、用标号算法求下图中 s→t 的最大流量，并找出最小割。

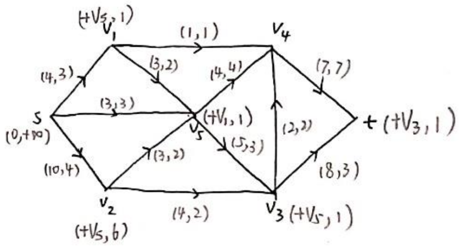


●解答如下：

21.

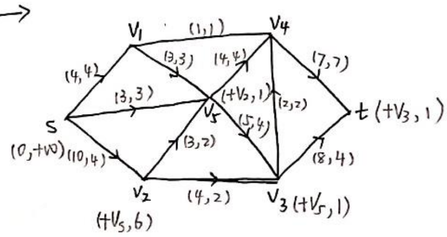


选取增广链为：$s\to v_5\to v_4\to t$，反向追踪结果如下：



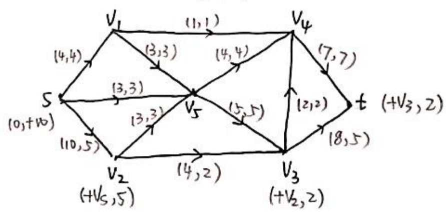
选取增广链：$s\to v_1\to v_5\to v_3\to t$

反向追踪结果如下：



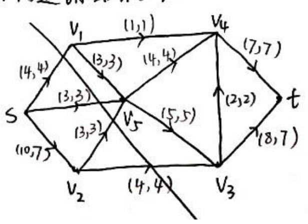
选取增广链为：$s\to v_2\to v_5\to v_3\to t$

反向追踪结果如下：



选取增广链：$s\to v_2\to v_3\to t$

反向追踪结果如下：



此时标号无法继续，产生的割集 $(V,\bar{V})=\{(s,v_1),(s,v_5),(v_2,v_5),(v_2,v_3)\}$

$\therefore$ 割集容量 $C(V,\bar{V})=C_{s1}+C_{s5}+C_{25}+C_{23}=4+3+3+4=14$