1. 填空 (20 分)

a) 设随机过程 $X(t)=A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t), -\infty<t<+\infty$, 其中 $A\sim N(0,\sigma^2), B\sim N(0,\sigma^2)$,

二者相互独立。则 $X(t)$的

均值函数 $m_X(t)=$ __0__，相关函数 $R_X(s,t)=$ __$\sigma^2\cos\beta(t-s)$__，

协方差函数 $C_X(s,t)=$ __$\sigma^2\cos\beta(t-s)$__，方差函数 $D_X(t)=$ __σ^2__，

b) 一台计算机有 2 个终端，假定存储空间无限，每个终端计算一个题目的时间服从（负）指数分布，平均 30 分钟；题目到达是平均每小时 5 个的泊松过程。则 $t\to\infty$ 时，计算机空闲的概率为__0__，有积压题目的概率__1__，平均积压的题目数为__∞__，计算完毕的题目离开计算机的输出过程是平均每小时__4__个的__泊松__过程。

2. (12分) 设$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，求:

(1) $E(N(s)N(t+s))$;

(2) $0<s<t$ 时的条件概率 $P\{N(s)=k \mid N(t)=n\}$;

(3) $P\{N(t+s)=j \mid N(s)=i\}$。

解 (1) $E(N(s)N(t+s))=R_N(s,t+s)=C_N(s,t+s)+m(s)m(t+s)$

$$=\lambda s+\lambda s\cdot\lambda(s+t)=\lambda s+\lambda^2(s^2+st)$$

(2) $P\{N(s)=k \mid N(t)=n\}=\dfrac{P\{N(s)=k,N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}\xlongequal{k\leqslant n}C_n^k\left(\dfrac{s}{t}\right)^k\left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-k}$

(3) $P\{N(t+s)=j \mid N(s)=i\}=\dfrac{P\{N(t+s)=j,N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}$

$$=\frac{P\{N(t+s)-N(s)=j-i\}\cdot P\{N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}$$

$\ldots(t+s)=j \mid N(s)=i\}$。

解 (1) $E(N(s)N(t+s))=R_N(s,t+s)=C_N(s,t+s)+m(s)m(t+s)$

$$=\lambda s+\lambda s\cdot\lambda(s+t)=\lambda s+\lambda^2(s^2+st)$$

(2) $P\{N(s)=k \mid N(t)=n\}=\dfrac{P\{N(s)=k,N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}\xlongequal{k\leqslant n}C_n^k\left(\dfrac{s}{t}\right)^k\left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-k}$

(3) $P\{N(t+s)=j \mid N(s)=i\}=\dfrac{P\{N(t+s)=j,N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}$

$$=\frac{P\{N(t+s)-N(s)=j-i\}\cdot P\{N(s)=i\}}{P\{N(s)=i\}}$$

$$=P\{N(t+s)-N(s)=j-i\}\xlongequal{j\geqslant i}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}$$

注 此题说明在 $N(t)=n$ 的条件下，$N(s)(0<s<t)$的条件分布为二项分布 $B\left(n,\dfrac{s}{t}\right)$.

3. （15 分）设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\ldots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，其一步状态转移矩阵和 $X(1)$ 的分布律如下：

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

$X(1)$	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(1) 论其遍历性；

(2) 求平稳分布；

(3) 求 $P\{X(4)=3 \mid X(1)=1, X(2)=2\}$；

(4) 求 $P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\}$；

(5) 求 $X(2)$ 的分布律。

解 （1）因为

$$P^2=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{13}{30} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{15} & \frac{6}{25} & \frac{47}{75}\end{pmatrix}$$

由 $p_{ij}(2)>0$，可知此 Markov 链是遍历的.

$$\begin{cases}V=VP\\ \sum v_i=1\end{cases}$$

得

$$V=\left(\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{5}{10}\right)$$

(3) $P\{X(4)=3 \mid X(1)=1, X(2)=2\}=P\{X(4)=3 \mid X(2)=2\}=p_{23}(2)=\frac{2}{5}$

(4) ① $P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\}$

$=P\{X(1)=1\}\cdot P\{X(2)=2 \mid X(1)=1\}\cdot P\{X(3)=3 \mid X(1)=1, X(2)=2\}$

$=P\{X(1)=1\}\cdot P\{X(2)=2 \mid X(1)=1\}\cdot P\{X(3)=3 \mid X(2)=2\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

②

$$\tilde{P}_2=\tilde{P}_1\cdot P=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\left(\frac{13}{36},\frac{19}{60},\frac{29}{90}\right)$$

4. （12 分）设齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \cdots\}$的状态空间$E=\{1,2,3,4,5\}$，一步状态转移矩阵

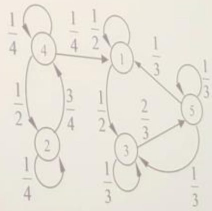
$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

（1）画出状态转移图；

（2）讨论各状态性质；

（3）分解状态空间。

解：（1）状态转移图：



(2) 状态性质：

$f_{22}(1)=\frac{1}{4}$，$f_{22}(2)=\frac{3}{8}$，$f_{22}(n)=\frac{3}{8}\times(\frac{1}{4})^{n-2}$，$(n>2)$，$f_{22}=\frac{3}{4}<1$，故状态 2 为非常返状态。由于状态 2、4 互通，因此具有相同的状态性质。

有限马氏链必有正常返状态，而状态 1、3、5 互通，因此具有相同的状态性质，故状态 1、3、5 均为正常返状态。因为 $p_{11}(1)=1>0$，所以状态 1 是非周期的。

(3) 状态空间分解为 $E=N+C=\{2,4\}+\{1,3,5\}$。

5. （5 分）设 $X(1), X(2), \cdots$ 是一个独立同分布的随机变量序列，其分布律为

$X(n)$	-1	1	
P	0.3	0.7	n≥1

令 $Y(n)=\sum_{k=1}^{n}X(k)$，n≥1，求概率：$P\{X(1)\geq 0, Y(2)\geq 0, Y(3)\geq 0, Y(4)\geq 0\}$

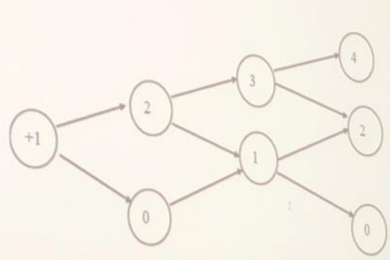
解 因 $X(1), X(2), \ldots$ 是独立同分布的随机变量序列，所以和过程 $Y(n)$, $(n\geq 1)$ 是平稳独立增量过程，从而是齐次马氏链。

又因 $Y(n)=Y(n-1)+X(n)$，且 $Y(n-1)$ 和 $X(n)$ 相互独立，故对 $n=1, 2, 3, \ldots$

$$p_{ij}=P\{Y(n)=j \mid Y(n-1)=i\}=P\{Y(n-1)+X(n)=j \mid Y(n-1)=i\}$$
$$=P\{Y(n-1)+X(n)=j \mid Y(n-1)=i\}=P\{X(n)=j-i \mid Y(n-1)=i\}$$
$$=P\{X(n)=j-i\}=\begin{cases}0.3, & j=i-1;\\ 0.7, & j=i+1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P\{X(1)\geq 0,\ Y(2)\geq 0,\ Y(3)\geq 0,\ Y(4)\geq 0\}=$$
$$P\{Y(1)\geq 0,\ Y(2)\geq 0,\ Y(3)\geq 0,\ Y(4)\geq 0\}=$$
$$P\{Y(1)=1,\ \bigcup_{i_2=0,2}Y(2)=i_2, \bigcup_{i_3=1,3}Y(3)=i_3, \bigcup_{i_4=0,2,4}Y(4)=i_4\}=$$
$$\sum_{i_2=0,2}\sum_{i_3=1,3}\sum_{i_4=0,2,4}P\{Y(1)=1,\ Y(2)=i_2, Y(3)=i_3, Y(4)=i_4\}$$

状态转移如图所示：



所以

$$P\{X(1)\geq 0,\ Y(2)\geq 0,\ Y(3)\geq 0,\ Y(4)\geq 0\}=$$
$$\sum_{i_2=0,2}\sum_{i_3=1,3}\sum_{i_4=0,2,4}P\{Y(1)=1\}p_{1i_2}p_{i_2i_3}p_{i_3i_4}=0.7^2\times 1.3=0.637$$

6. （12 分）病人以每小时 3 人的泊松流到达医院，假设该医院只有一个医生服务，他的服务时间服从负指数分布，平均服务一个病人时间为 15 分钟。

a) 医生空闲时间的比例？

b) 有多少病人等待看医生？

c) 病人的平均等待时间？

d) 一个病人等待超过一个小时的概率？

由题设知，该系统按M/M/1/∞型处理，λ＝3(人/小时)，μ＝4(人/小时)，$\rho=\frac{3}{4}<1$。

a) P{医生空闲}＝P{系统空闲}＝$p_0=1-\rho=\frac{1}{4}$＝0.25。

b) 平均等待对长 $\overline{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{(3/4)^2}{1-3/4}=\frac{9}{4}=2.25$

即平均有2.25个病人等待看医生

c) 平均等待时间 $\overline{W}_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{3/4}{4(1-3/4)}=\frac{3}{4}=0.75$

即病人的平均等待时间为0.75小时，即45分钟。

d) P{等待超过一个小时}

$=P\{W_q>1\}$

$=1-P\{W_q\leqslant 1\}$

$=1-W_q(1)$ $\qquad$ $W_q(t)=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t},\qquad t>0$

$=\rho e^{-\mu(1-\rho)}$

$=\frac{3}{4}e^{-4(1-\frac{3}{4})}=\frac{3}{4}e^{-1}$

≈ 0.276

即病人等待超过一个小时的概率约为0.276。

的概率均为0.276。

7. （12 分）某实验室有 2 名管理员共同管理 4 台高档仪器，仪器故障和修复时间都服从指数分布。假定每台仪器每小时出现故障 1 次，每次修复故障平均需要 15 分钟，求：

（1） 需要修复的仪器的平均数；

（2） 每台仪器等待修复的平均时间；

（3） 该实验室平均正常运行的仪器数。

解 由题意，按 M/M/c/m/m 系统处理，其中 $c=2$，$m=4$，$\lambda=1$(台/小时)，$\mu=4$(台/小时)，$\rho=1/4$，$\rho_c=1/8$。

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum_{i=c}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right]^{-1}=[1+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{16}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{64}+\frac{12}{4}\times\frac{1}{256}]^{-1}$$

$$=[1+1+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\frac{3}{256}]^{-1}=\frac{256}{635}$$

$$p_j=\begin{cases}C_m^j\rho^j p_0, & j=0,1,2,\cdots,c-1\\ C_m^j\dfrac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,m\end{cases}$$

$$p_1=C_m^1\rho^1 p_0=4\times\frac{1}{4}\times\frac{256}{635}=\frac{256}{635},\qquad p_2=C_m^2\frac{2!}{c!c^{2-c}}\rho^2 p_0=6\times(\frac{1}{4})^2\times\frac{256}{635}=\frac{96}{635},$$

$$p_1=C_m^1\rho^1 p_0=4\times\frac{1}{4}\times\frac{256}{635}=\frac{256}{635},\qquad p_2=C_m^2\frac{2!}{c!c^{2-c}}\rho^2 p_0=6\times(\frac{1}{4})^2\times\frac{256}{635}=\frac{96}{635},$$

$$p_3=C_m^3\frac{3!}{c!c^{3-c}}\rho^3 p_0=4\times\frac{3}{2}\times(\frac{1}{4})^3\times\frac{256}{635}=\frac{24}{635}$$

$$p_4=C_m^4\frac{4!}{c!c^{4-c}}\rho^4 p_0=3\times(\frac{1}{4})^4\times\frac{256}{635}=\frac{3}{635}$$

（1） 需要修复的仪器的平均数

$$\overline{N}=E(N)=\sum_{j=0}^{m}jp_j=\frac{256}{635}+\frac{192}{635}+\frac{72}{635}+\frac{12}{635}=\frac{532}{635}(台)$$

（2） 需要修复的仪器的平均数 $\overline{N}_q=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j=\frac{24}{635}+2\times\frac{3}{635}=\frac{6}{127}$(台)

每台仪器等待修复的平均时间 $\overline{W}_q=\dfrac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})}=\dfrac{6/127}{4-532/635}=\dfrac{15}{1004}$(小时)

（3） 该实验室平均正常运行的仪器数 $\overline{N}_m=m-\overline{N}=4-\frac{532}{635}=\frac{2008}{635}$(台)

8. （12 分）5 辆卡车担任运输任务，在生产车间与仓库之间来回运输。假定卡车从车间到仓库的路途时间及在车间的装卸时间之和服从指数分布，平均 2 辆/小时，而仓库到车间的路途时间及在仓库的装卸时间之和也服从指数分布，平均 3 辆/小时，它们相互独立。求：车辆到达车间立即装卸的概率、车辆到达仓库立即装卸的概率、平均有多少辆车在车间、车辆在车间等待装卸的平均时间。

解：由题意，按二阶段循环排队系统处理，其中 $n = 5$ 辆，将车间作为 I 号台，$\mu_1 = 2$ 辆/小时，$\mu_2 = 3$ 辆/小时，因此

$$p_0 = \left[1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right] \Big/ \left[1-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}\right] = \left[1-\frac{3}{2}\right] \Big/ \left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{5+1}\right] = \frac{32}{665}$$