TP Simulation Variables Aléatoires Réelles
Modèles Probabilistes
Aissaoui Yanis
Renato Daniel Nascimento Ardiles
CY Tech GI ING1 Groupe 01
26 / 01 / 2023

Exercice 1)

Question 1.

Pour la simulation de la loi de Bernoulli, nous avons choisi le paramètre p = 0.5.

E[X] théorique = 0,5 et Var(X) = 0,25 par conséquent.

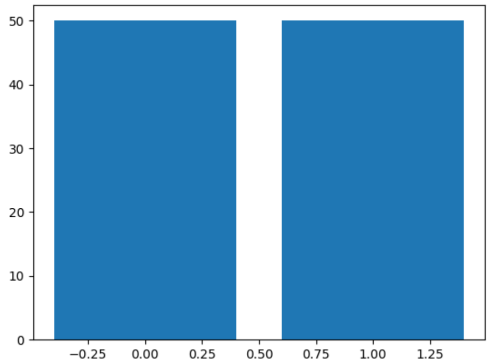

Figure : Loi de Bernoulli de paramètre p=0.5

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 0.497 et Var(X) calculée = 0.249.

Question 2.

Pour la simulation de la loi Binomiale, nous avons choisi le paramètre n = 10 et p = 0.5.
E[X] théorique = 5 et Var(X) = 2,5 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 4.9745 et Var(X) calculée = 2.446.

De plus avec n=100 et p=0.5 E[X] théorique = 50 et Var(X) théorique =25
Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 50.0 et Var(X) calculée = 26.556.

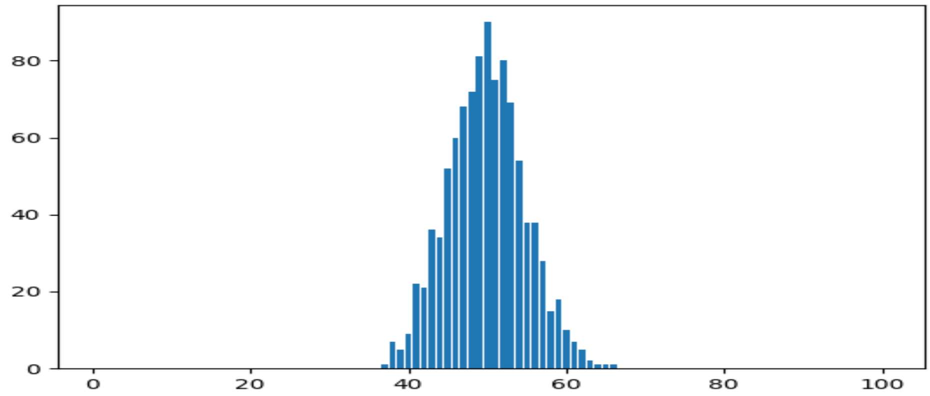

Figure : graphique de la loi Binomiale avec p = 0,5

Question 3.

Pour la simulation de la loi Géométrique, nous avons choisi le paramètre p = 0.7.
E[X] théorique = 1,428 et Var(X) théorique = 0,612 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 1.428 et Var(X) calculée = 0.531.

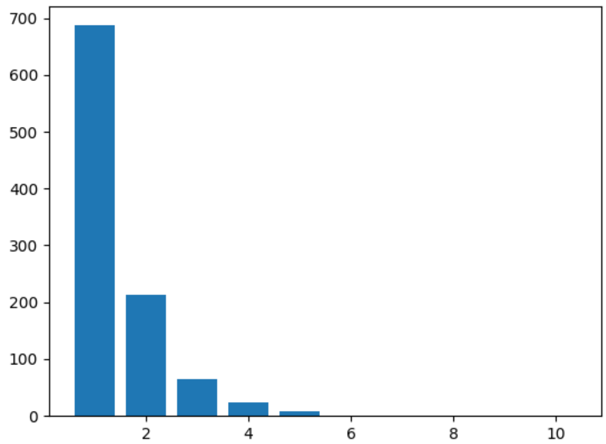

Figure : Graphique de la loi Géométrique avec p = 0,7

Question 4.

Pour la simulation de la loi Uniforme sur [| 1,k |] et k>=2, nous avons choisi de faire 1000 essais pour chaque simulation et avec k entre 2 et 5.

- k = 2

E[X] théorique = 1,5 et Var(X) théorique = 0.25 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 1.47 et Var(X) calculée = 0.25.

- k = 3

E[X] théorique = 2 et Var(X) théorique = 0,666 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 1.97 et Var(X) calculée = 0.684.

- k = 4

E[X] théorique = 2.5 et Var(X) théorique = 1.25 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 2.47 et Var(X) calculée = 1.213.

- k = 5

E[X] théorique = 3 et Var(X) théorique = 2 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 2.92 et Var(X) calculée = 2.03.

Question 5.

Pour la simulation de la loi Uniforme sur [-1,1].

E[X] théorique = 0 et Var(X) théorique = 1/3 par conséquent.

Avec 1000 essais, on obtient E[X] calculée = 0.021 et Var(X) calculée = 0.333.

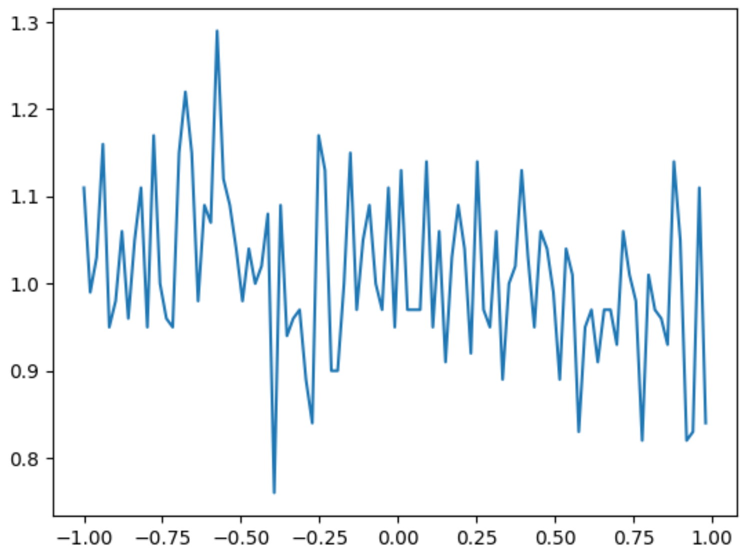

Figure : Graphique de la loi Uniforme sur [-1,1]

Après la simulation, on obtient le graphique ci dessus.

Exercice 2)

Question 1.

Pour la loi de Bernoulli, on a utilisé la méthode d'inversion de la fonction de répartition. Pour p = 0,5 et 100 essais, nous trouvons:

E[X] théorique = 0,5 et Var(X) théorique = 0,25.

Après calcul, E[X] = 0,59 et Var(X) = 0.2671. Les valeurs calculées sont approximativement proches de la théorie.

Question 2.

Pour la loi géométrique, on a utilisé p = 0,5 avec 1000 essais.
E[X] théorique = Var(X) théorique = 2.

l'espérance doit valoir 2.0 on trouve 1.9843222057034735 pour 10000 lancers
la variance doit valoir 2.0 on trouve 2.505473636960171 pour 10000 lancers

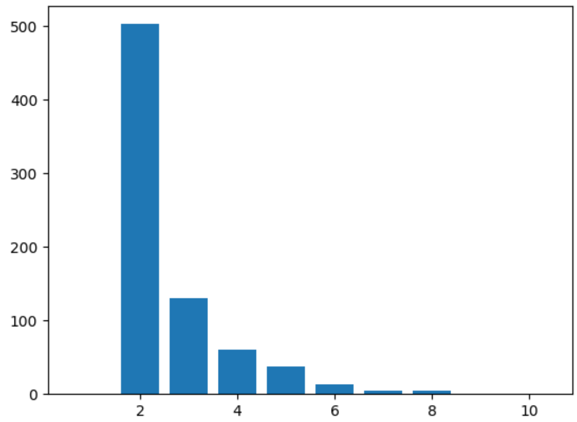

Figure : Graphique de la loi Géométrique avec p = 0,5 par méthode d'inversion

Question 3.

Pour la loi de Poisson de paramètre lambda= 0.7 , avec 1000 essais:
E[X] théorique = 0,7 et Var(x) théorique = 0,7.

On devrait théoriquement trouver E=0.7, on trouve E=0.8685714285714285
On devrait théoriquement trouver V=0.7, on trouve V=1.0356958612452547

Question 4.

Pour la loi Exponentielle, on a utilisée lambda = 0,5
E[X] theorique = 2 et Var(X) theorique = 4.

Après simulation, on obtient E[X] calculée = 2,04 et Var(X) calculée = 3,64

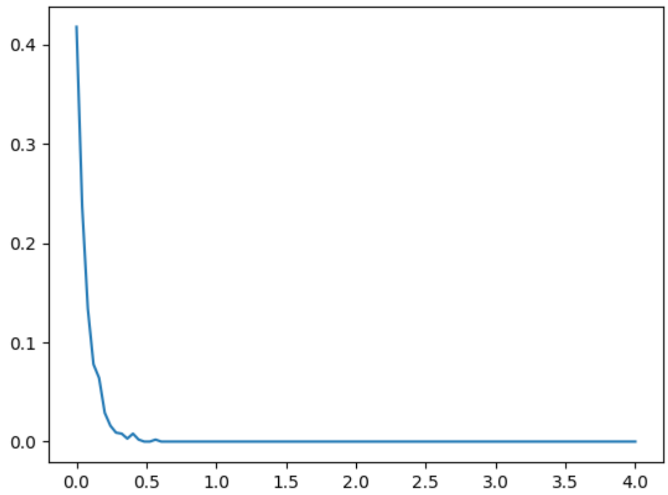

Figure : Graphique de la loi Exponentielle avec lambda = 0,5 en utilisant la méthode d’inversion

Exercice 3)

Question 1.

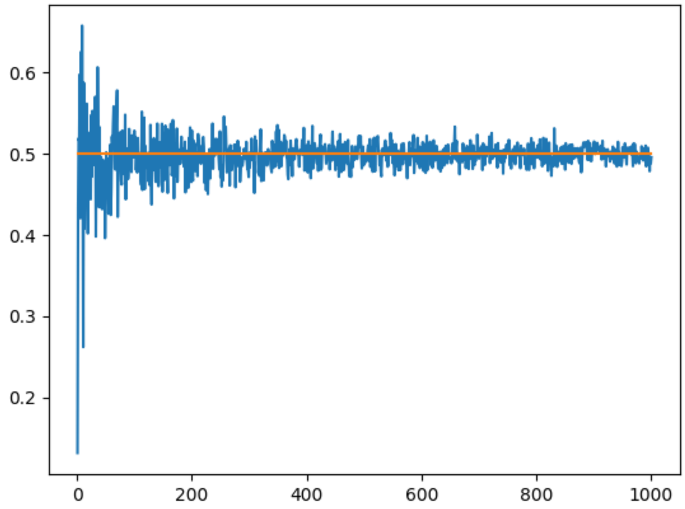

Figure : Graphique de la courbe représentative de Sn/n en fonction de n

Pour n = 1000, nous obtenons le graphique ci-dessus.

On remarque que la suite converge vers m=E[Xn] quand n tend vers + l'infini. Or d'après la loi des grands nombres si m< + l'infini La suite Sn/n converge presque sûrement et de plus en cas de convergence, cette dernière converge vers m ce que l'on observe bien expérimentalement.

Question 2.

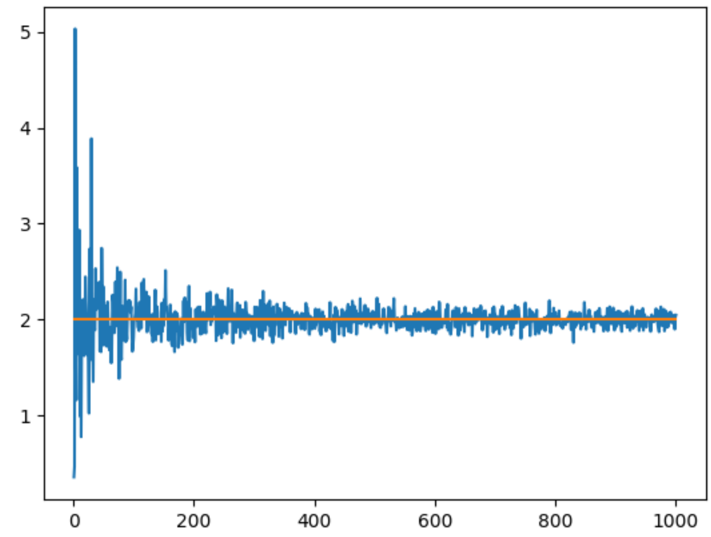

Figure : Graphique de la courbe représentative de Sn/n en fonction de n pour la loi exponentielle.

Après simulation, nous obtenons le graphique ci-dessus.

Question 3.

On calcule l'Espérance et la Variance théorique:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 * x^2 \mathbb{1}_{[0,1]} dx = \int_0^1 2 * x^2 dx = [\frac{2x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$$
$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 * x^3 \mathbb{1}_{[0,1]} dx = [\frac{x^4}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{18}$$

On trouve E[X] théorique = 2/3 et Var(X) theorique = 1/18

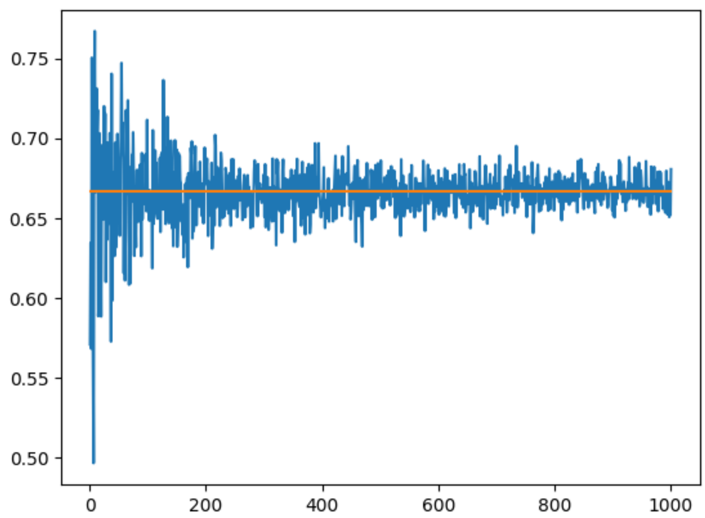

Figure : Graphique de la courbe représentative de Sn/n en fonction de n pour la loi ayant pour fonction densité f(x) = 2x définie sur [0;1].

Après simulation, on obtient le graphique ci-dessus.

Exercice 4)

Question 1.

Pour la réalisation de cette question, nous avons calculée 1000 points compris entre -20 et 20.

On remarque que le tracé de la loi de Zn est semblable à une Gaussienne caractéristique de la loi normale.

On trouve une espérance expérimentale de -0.007287287287286811 ainsi que une Variance expérimentale de 12.784323155086879

Il ne s'agit donc pas exactement de la loi normale centrée réduite car bien que l'espérance soit proche de 0 on obtient une variance de 12 soit bien supérieur au 1 attendu

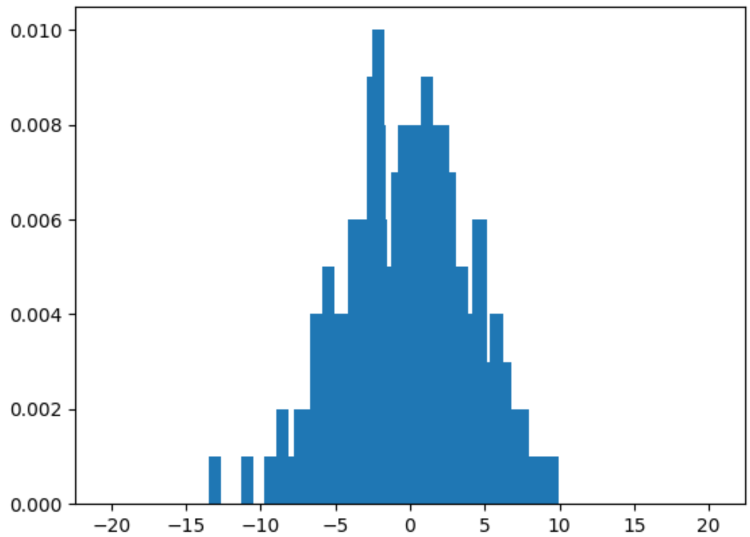

Figure : TCL avec X suivant une loi uniforme sur [0,1]

Question 2.

Pour la réalisation de cette question, nous avons calculée 1000 points compris entre -20 et 20.

On remarque de même que le tracé de la loi de Zn est semblable à une Gaussienne caractéristique de la loi normale.

On trouve une espérance expérimentale de -0.029949949949949994
On trouve une Variance expérimentale de 0.23135303149122471

De nouveau l'espérance est proche du 0 attendu pour une loi normale centrée réduite mais cette fois ci la variance est de 0.2 soit bien inférieur au 1 attendu

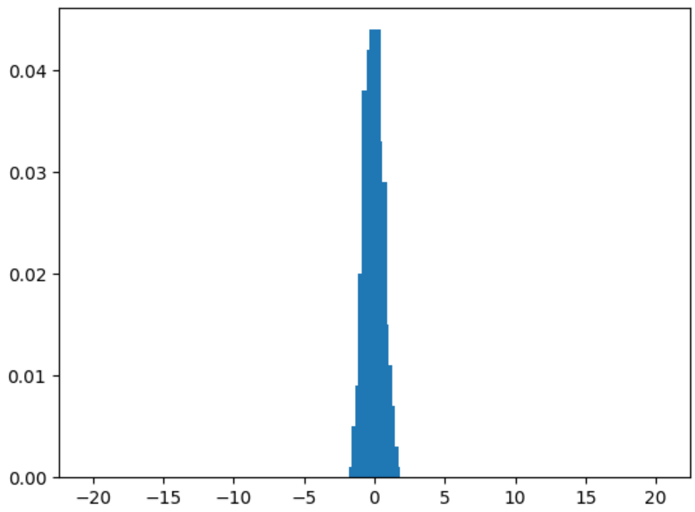

Figure : TCL X suivant une loi exponentielle de paramètre lambda=0.5

Question 3.

On trouve une espérance expérimentale de 0.0037237237237237636
On trouve une Variance expérimentale de 0.22199018511654983

De nouveau l'espérance est proche du 0 attendu pour une loi normale centrée réduite mais cette fois ci la variance est de 0.2 soit inférieur au 1 attendu

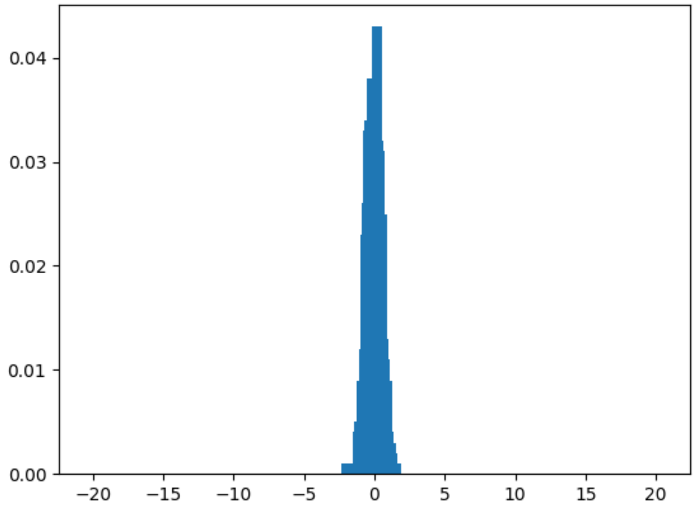

Figure: TCL avec X suivant une la loi de f

Exercice 5)

Avec la méthode de Box-Muller,

On trouve une espérance expérimentale de 0.01182364729458867
On trouve une Variance expérimentale de 1.0162713346684598

Ces caractéristiques sont bien celle d'une loi normale centrée réduite.On en conclut que la méthode de Box Muller est plus efficace que les précédentes méthodes pour représenter la loi normale centrée réduite notamment quant à la précision de la variance. Qui présente une erreur de 1% au lieu de 80%

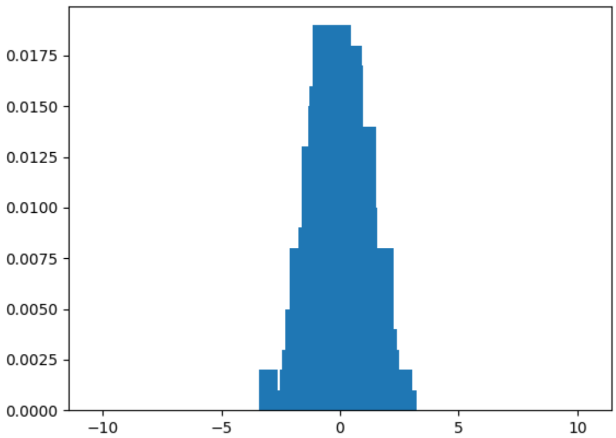

Figure : Graphique par la méthode de Box-Muller