Tarea 3

Fernando Márquez Pérez
Juan Antonio Jasso Oviedo
Emiliano Domínguez Cruz

Facultad de Ciencias
UNAM

15/11/2019

1. Sea $b > 0$. Usar el criterio de integrabilidad de f sobre $[a, b]$, para mostrar que:

a) $\displaystyle\int_0^b \frac{x}{3} dx = \frac{b^2}{6}$

Por demostrar que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P\ :\ U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$

Observaciones:

$$f(x) = \frac{x}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}$$

Como $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, f es creciente en todos los reales, en particular en el intervalo $[0, b]$. Debido a esto, el ínfimo y el supremo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ están determinados por $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$ respectivamente. (Porque, al ser creciente, si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$).

Consideraremos a la partición P una partición uniforme, por lo que cumple con las siguientes características (Presentadas en clase).

- La distancia entre cada intervalo $[b, a]$ es siempre la misma: $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$.
- El valor x de cada punto t_i en dicho intervalo está presentado como: $t_i = \dfrac{(b-a)}{n} i$

$$m_i = inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \qquad M_i = sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Prueba:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i)\right) \left(\frac{b}{n}\right)$$

Como $t_i = \dfrac{(b-0)}{n} i$, entonces $f(t_i) = f\left(\dfrac{(b-0)i}{n}\right) = \frac{\frac{(b)i}{n}}{3} = \frac{bi}{3n}$

Sustituyendo tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i)\right) \left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{bi}{3n}\right) \left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b^2 i}{3n^2}\right) = \left(\frac{b^2}{3n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} i$$

Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Asi que.

$$\left(\frac{b^2}{3n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{b^2}{3n^2}\right) \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \left(\frac{b^2}{3n}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$U(f,P) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_{i-1})\big)\left(\frac{b}{n}\right)$$

Analogo a $f(t_i)$, sabemos que $f(t_{i-1}) = \dfrac{b(i-1)}{3n}$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b(i-1)}{3n}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b^2(i-1)}{3n^2}\right) = \left(\frac{b^2}{3n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

Realizando un cambio de variable sobre $\sum_{i=1}^{n}(i-1)$, tenemos $\sum_{i=0}^{n-1} i$. Como la suma evaluada en $i=0$ es 0 y $0+n=n$, podemos comenzar la suma desde $i=1$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$

.

Sustituendo:

$$\left(\frac{b^2}{3n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \left(\frac{b^2}{3n^2}\right)\left(\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}\right) = \left(\frac{b^2}{3n^2}\right)\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^2}{3n}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$L(f,P) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Ahora buscamos la Particón P tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$$U(f,P) - L(f,P) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) - \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n+1-(n-1)}{n}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n+1-n+1}{n}\right)$$
$$= \left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{b^2}{3n}$$

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Longrightarrow \frac{b^2}{3n} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{b^2}{3\varepsilon} < n$$

Ahora obtenemos el $inf\{U(f,P)\}$ y el $sup\{L(f,P)\}$:

$$\begin{aligned} inf\{U(f,P)\} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{b^2}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)(1+0) = \frac{b^2}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sup\{L(f,P)\} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^2}{6}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} \\ &= \left(\frac{b^2}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{b^2}{6}\right)(1-0) = \frac{b^2}{6} \end{aligned}$$

$$sup\{L(f,P)\} = inf\{U(f,P)\} = \frac{b^2}{6}$$

$\therefore$ f **es integrable en [0,b] y** $\int_0^b \frac{x}{3}dx = \frac{b^2}{6}$ $\square$

b) $\int_0^b \frac{x^2}{2}dx = \frac{b^3}{6}$

Por demostrar que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P\ :\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Observaciones:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$$

Como $f'(x) > 0\ \forall x > 0$, f es creciente en todos los reales positivos, en particular en el intervalo $[0,b]$. Debido a esto, el ínfimo y el supremo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ están determinados por $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$ respectivamente. (Porque, al ser creciente, si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$).

Consideraremos a la partición P una partición uniforme, por lo que cumple con las siguientes características (Presentadas en clase).

- La distancia entre cada intervalo $[b,a]$ es siempre la misma: $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$.
- El valor x de cada punto t_i en dicho intervalo está presentado como: $t_i = \dfrac{(b-a)}{n}i$

$$m_i = inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \qquad M_i = sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Prueba:
$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right)$$

Como $t_i=\dfrac{(b-0)}{n}i$, entonces $f(t_i)=f\left(\dfrac{(b-0)i}{n}\right)=\frac{\left(\frac{(b)i}{n}\right)^2}{2}=\frac{b^2i^2}{2n^2}$

Sustituyendo tenemos que:
$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^2i^2}{2n^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^3i^2}{2n^3}\right)=\left(\frac{b^3}{2n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i^2$$

Sabemos que:
$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Asi que.

$$\left(\frac{b^3}{2n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i^2=\left(\frac{b^3}{2n^3}\right)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\left(\frac{b^3}{2n^2}\right)\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right)$$

$$U(f,P)=\left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right)$$
$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\big(f(t_{i-1})\big)\left(\frac{b}{n}\right)$$

Analogo a $f(t_i)$, sabemos que $f(t_{i-1})=\dfrac{b^2(i-1)^2}{2n^2}$

Entonces:
$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^2(i-1)^2}{2n^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^3(i-1)^2}{2n^3}\right)=\left(\frac{b^3}{2n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

Realizando un cambio de variable sobre $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$, tenemos $\sum_{i=0}^{n-1}i^2$. Como la suma evaluada en $i=0$ es 0 y $0+n=n$, podemos comenzar la suma desde $i=1$:

$$\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

.

Sustituendo:

$$\left(\frac{b^3}{2n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \left(\frac{b^3}{2n^3}\right)\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) = \left(\frac{b^3}{2n^2}\right)\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right)$$

$$L(f,P) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right)$$

Ahora buscamos la Particón P tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$$U(f,P) - L(f,P) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right) - \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2} - \frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1-(2n^2-3n+1)}{2n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1-2n^2+3n-1)}{2n^2}\right) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{6n}{2n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{b^3}{2n}$$

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Longrightarrow \frac{b^3}{2n} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{b^3}{2\varepsilon} < n$$

Ahora obtenemos el $inf\{U(f,P)\}$ y el $sup\{L(f,P)\}$:

$$inf\{U(f,P)\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(1+\frac{3}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{b^3}{6}$$

$$sup\{L(f,P)\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\right)\left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) = \left(\frac{b^3}{6}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^3}{6}\right)\left(1-\frac{3}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{b^3}{6}$$

$$sup\{L(f,P)\} = inf\{U(f,P)\} = \frac{b^3}{6}$$

$\therefore$ f **es integrable en [0,b] y** $\displaystyle\int_0^b \frac{x^2}{2}dx = \frac{b^3}{6}$ $\square$

c) $\displaystyle\int_0^b 3x^2 dx = b^3$

Por demostrar que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P\ :\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Observaciones:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$$

Como $f'(x) > 0\ \forall x > 0$, f es creciente en todos los reales positivos, en particular en el intervalo $[0,b]$. Debido a esto, el ínfimo y el supremo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ están determinados por $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$ respectivamente. (Porque, al ser creciente, si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$).

Consideraremos a la partición P una partición uniforme, por lo que cumple con las siguientes características (Presentadas en clase).

- La distancia entre cada intervalo $[b,a]$ es siempre la misma: $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$.
- El valor x de cada punto t_i en dicho intervalo está presentado como: $t_i = \dfrac{(b-a)}{n}i$

$$m_i = inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \qquad M_i = sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Prueba:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right)$$

Como $t_i = \dfrac{(b-0)}{n}i$, entonces $f(t_i) = f\left(\dfrac{(b-0)i}{n}\right) = 3 \cdot \left(\frac{bi}{n}\right)^2 = \frac{3b^2i^2}{n^2}$

Sustituyendo tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3b^2i^2}{n^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3b^3i^2}{n^3}\right) = \left(\frac{3b^3}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Asi que.

$$\left(\frac{3b^3}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{3b^3}{n^3}\right)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \left(\frac{3b^3}{n^2}\right)\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= b^3\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right)$$

$$U(f,P) = b^3\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right)$$
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(f(t_{i-1})\right)\left(\frac{b}{n}\right)$$

Analogo a $f(t_i)$, sabemos que $f(t_{i-1}) = \dfrac{3b^2(i-1)^2}{n^2}$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f(t_i)\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3b^2(i-1)^2}{n^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3b^3(i-1)^2}{n^3}\right) = \left(\frac{3b^3}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

Realizando un cambio de variable sobre $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$, tenemos $\sum_{i=0}^{n-1} i^2$. Como la suma evaluada en $i=0$ es 0 y $0+n=n$, podemos comenzar la suma desde $i=1$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

.

Sustituendo:

$$\left(\frac{3b^3}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \left(\frac{3b^3}{n^3}\right)\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) = \left(\frac{3b^3}{n^2}\right)\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right)$$
$$= b^3\cdot\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) = b^3\cdot\left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right)$$

$$L(f,P) = b^3\cdot\left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right)$$

Ahora buscamos la Particón P tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= b^3 \cdot \left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right) - b^3 \cdot \left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right) \\ &= b^3 \cdot \left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2} - \frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right) \\ &= b^3 \cdot \left(\frac{2n^2+3n+1-(2n^2-3n+1)}{2n^2}\right) \\ &= b^3 \cdot \left(\frac{2n^2+3n+1-2n^2+3n-1}{2n^2}\right) \\ &= b^3 \cdot \left(\frac{6n}{2n^2}\right) = \frac{3b^3}{n} \end{aligned}$$

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Longrightarrow \frac{3b^3}{n} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{3b^3}{\varepsilon} < n$$

Ahora obtenemos el $inf\{U(f,P)\}$ y el $sup\{L(f,P)\}$:

$$\begin{aligned} inf\{U(f,P)\} &= \lim_{n\to\infty} b^3 \left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}\right) = b^3 \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2} \\ &= b^3 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = b^3 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right) \\ &= b^3 \left(1 + \frac{3}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sup\{L(f,P)\} &= \lim_{n\to\infty} b^3 \left(\frac{2n^2-3n+1}{2n^2}\right) = b^3 \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{2n^2} \\ &= b^3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = b^3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right) \\ &= b^3 \left(1 - \frac{3}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = b^3 \end{aligned}$$

$$sup\{L(f,P)\} = inf\{U(f,P)\} = b^3$$

$\therefore$ f **es integrable en [0,b] y** $\displaystyle\int_0^b 3x^2dx = b^3$ $\square$

d) $\displaystyle\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$

Por demostrar que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P\ :\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Observaciones:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Como $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, f es creciente en todos los reales, en particular en el intervalo $[0,b]$. Debido a esto, el ínfimo y el supremo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ están determinados por $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$ respectivamente. (Porque, al ser creciente, si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$).

Consideraremos a la partición P una partición uniforme, por lo que cumple con las siguientes características (Presentadas en clase).

- La distancia entre cada intervalo $[b,a]$ es siempre la misma: $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$.
- El valor x de cada punto t_i en dicho intervalo está presentado como: $t_i = \dfrac{(b-a)}{n}i$

$$m_i = inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \qquad M_i = sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Prueba:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right)$$

Como $t_i = \dfrac{(b-0)}{n}i$, entonces $f(t_i) = f\left(\dfrac{(b-0)i}{n}\right) = \left(\frac{bi}{n}\right)^3 = \frac{b^3 i^3}{n^3}$

Sustituyendo tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(t_i)\big)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^3 i^3}{n^3}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^4 i^3}{n^4}\right) = \left(\frac{b^4}{n^4}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3$$

Sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Asi que.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{b^4}{n^4}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \left(\frac{b^4}{n^4}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{b^4}{n^4}\right)\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \\
&= \left(\frac{b^4}{n^2}\right)\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) = \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) \\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
U(f,P) = \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)
$$

$$
L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_{i-1})\right)\left(\frac{b}{n}\right)
$$

Analogo a $f(t_i)$, sabemos que $f(t_{i-1}) = \dfrac{b^3(i-1)^3}{n^3}$

Entonces:

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^3(i-1)^3}{n^3}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b^4(i-1)^3}{n^4}\right) = \left(\frac{b^4}{n^4}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3
$$

Realizando un cambio de variable sobre $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3$, tenemos $\sum_{i=0}^{n-1} i^3$. Como la suma evaluada en $i=0$ es 0 y $0+n=n$, podemos comenzar la suma desde $i=1$:

$$
\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \left(\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}\right)^2
$$

.

Sustituendo:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{b^4}{n^4}\right)\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 &= \left(\frac{b^4}{n^4}\right)\left(\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{b^4}{n^4}\right)\left(\frac{(n-1)^2n^2}{4}\right) \\
&= \left(\frac{b^4}{n^2}\right)\left(\frac{(n-1)^2}{4}\right) = \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
L(f,P) = \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)
$$

Ahora buscamos la Particón P tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)-\left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}-\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-(n^2-2n+1)}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-n^2+2n-1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{4n}{n^2}\right)=\frac{b^4}{n}
\end{aligned}
$$

$$
U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \Longrightarrow \frac{b^4}{n}<\varepsilon \Longrightarrow \frac{b^4}{\varepsilon}<n
$$

Ahora obtenemos el $inf\{U(f,P)\}$ y el $sup\{L(f,P)\}$:

$$
\begin{aligned}
inf\{U(f,P)\} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)=\left(\frac{b^4}{4}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)(1+2\cdot 0+0\cdot 0)=\frac{b^4}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sup\{L(f,P)\} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^4}{4}\right)\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)=\left(\frac{b^4}{4}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(\frac{b^4}{4}\right)(1-2\cdot 0+0\cdot 0)=\frac{b^4}{4}
\end{aligned}
$$

$$
sup\{L(f,P)\}=inf\{U(f,P)\}=\frac{b^4}{4}
$$

$\therefore$ f **es integrable en [0,b] y** $\displaystyle\int_0^b x^3dx=\frac{b^4}{4}$ $\square$

2. Explica por qué la función $f(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$ no es integrable.

Para poder demostrar que una función es integrable mediante el criterio de integración, esta debe de estar acotada en el intervalo a evaluar. Pero recordemos que $\frac{1}{x}$ no está acotada superiormente ($\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. Presentado una prueba más formal:

Supongamos que f(x) está acotada superiormente en el intervalo $(0, 1)$. Lo que significa que:

$$\exists M \in \mathbb{N} \ tq \ \forall x \in (0, 1) \Rightarrow |f(x)| < M$$

Pero si proponemos $x = \dfrac{1}{M+1}$ tenemos que:

$$f\left(\frac{1}{M+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{M+1}} = M + 1$$

Entonces: $M + 1 < M \Rightarrow\Leftarrow$. Así, por contradicción, $\dfrac{1}{x}$ no está acotada en el intervalo $(0, 1)$, por lo que la función no cumple con las hipótesis del criterio de integración.

3. Obtenga la cota de la forma $m(b-a) \leq \displaystyle\int_0^b f(x)dx \leq M(b-a)$, en los intervalos indicados de los siguientes incisos.

a) $\sin(x)$, en $-\pi \leq x \leq \pi$

Sabemos que $\sin(x)$ es continua en cualquier intervalo y además es periodica (el periodo es 2π). Sabemos, también, que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Como f es integrable en $[-\pi, \pi]$ entonces:

$$sup\{L(f, P)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx = inf\{U(f, P)\}$$

De lo anterior se sigue que como $\dfrac{\pi}{2} \in [\pi, -\pi]$ y $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ (que es el valor máximo posible), la cota superior M será 1.

Ahora para la cota inferior m: Sabemos que $\sin(x)$ es impar (Propiedad demostrada en clase), por lo que $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ (que es el valor mínimo posible) entonces $m = -1$.

Por lo tanto:

$$-1(\pi - (-\pi)) \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx \leq 1(\pi - (-\pi)) \Rightarrow -2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx \leq 2\pi$$

b) x^4, en $-4 \leq x \leq 4$

Al ser un polinomio x^4 es continua e integrable en todos los $\mathbb{R}$.

Como f es integrable en x^4, en -4 entonces:

$$sup\{L(f,P)\} = \int_{-4}^{4} x^4 dx = inf\{U(f,P)\}$$

Observaciones:

- f es par: $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.
- $x^4 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.
- Del punto anterior se infiere que el valor mínimo de f es 0.
- $f'(x) = 4x^3$, por lo que f es creciente cuando $4x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$.

Buscamos la cota superior M: Dado que la función es par y creciente en $x > 0$, M tiene que ser el valor más grande (más a la derecha del 0) de x, que en en intervalo $[-4, 4]$ es 4, así entonces $M = f(4) = 4^4 = 256$.

Ahora para la cota inferior m: Sabemos que el valor mínimo que puede obtener la función es $f(0) = 0$ y como $0 \in [-4, 4]$ entoces $m = 0$.

De lo anterior, se sigue que:

$$0(4-(-4)) \leq \int_{-4}^{4} x^4 dx \leq 256(4-(-4)) \Rightarrow 0 \leq \int_{-4}^{4} x^4 dx \leq 256(8)$$

c) $\tan(x)$, en $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

Sabemos que $\tan(x)$ es continua e integrable en $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ (Por definición de tangente).

Como $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (un intervalo conocido en el que tan es continua) entonces es integrable en el intervalo dado.

Con ellos sabemos que: $$sup\{L(f,P)\} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) = inf\{U(f,P)\}$$

NOTA: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ (Por el cuadrado y porque $1 > 0$) Lo que significa que tan siempre es creciente.

Con ello sabemos que la cota superior M va a ser el valor más grande de x, por lo que $M = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1$ (Porque, por la definición geométrica de sin y cos, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$).

De forma análoga a la cota superior, obtenemos la cota inferior m, como f es siempre creciente, el valor mínimo será la x más pequeña, es decir, $m = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(-\pi/4)}{\cos(-\pi/4)} = -1$ (Por lo mismo que el anteiror con la diferencia de que, al ser cos par $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4)$ y sin impar $\sin(-\pi/4) = -\sin(\pi/4)$, de ahí el signo negativo).

De lo anterior obtenemos:

$$-1\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx \leq 1\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx \leq \frac{\pi}{2}$$

4.

a) Mostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

Observaciones:

- $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$
- Como, por hipótesis, f es integrable sobre $[a, b]$:

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P)$$

Prueba: .

Consideremos P una partición de $[a, b]$ tal que $P = \{t_0 = a, t_1, ..., t_n = b\}$, entonces:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Con $m_i = inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$.

Dado que, por hipótesis, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, entonces $m_i \geq 0 \ \forall \ i \in [1, n]$

Sabemos también que, dada la construcción de P, $t_{i-1} \leq t_1 \ \forall \ i \in [1, n]$, por lo que $(t_i - t_{i-1}) \geq 0 \ \forall \ i \in [1, n]$

Considerando lo anterior podemos deducir que $m_i(t_i - t_{i-1}) \geq 0 \ \forall \ i \in [1, n]$ (Porque la multiplicación de dos positivos es positiva).

Por lo mismo $\left(L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})\right)\geq 0$ (Porque la suma de numeros positivos es siempre positiva).

Con ello y las observaciones tenemos que:

$$0 \leq L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P)$$

Por último, por transitivad, tenemos:

$$0 \leq \int_a^b f$$

$\square$

b) Mostrar que si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y $f(x)\geq g(x)\ \forall\ x\in[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Observaciones:

- $f(x)\geq g(x)\ \forall\ x\in[a,b]$
- Como, por hipótesis, f y g son integrables sobre $[a,b]$:

$$sup\{L(f,P)\} = \int_a^b f = inf\{U(f,P)\} \qquad sup\{L(g,P)\} = \int_a^b g = inf\{U(g,P)\}$$

Prueba: .

Consideremos P una partición de $[a,b]$ tal que $P=\{t_0=a,t_1,...,t_n=b\}$, entonces:

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}) \quad \text{y} \quad L(g,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i-t_{i-1})$$

Con $m_i = inf\{f(x)\mid t_{i-1}\leq x\leq t_i\}$ y $m_i' = inf\{g(x)\mid t_{i-1}\leq x\leq t_i\}$.

Dado que, por hipótesis, $f(x)\geq g(x)\ \forall x\in[a,b]$, entonces $m_i \geq m_i'\ \forall\ i\in[1,n]$

Asi: $\quad (t_{i-1}-t_i)=(t_{i-1}-t_i)\Longrightarrow m_i(t_{i-1}-t_i)\geq m_i'(t_{i-1}-t_i)\ \forall\ i\in[1,n]$

Tomando en cuenta lo anterior y recordando que si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i-t_{i-1}) \Longrightarrow L(f,P)\geq L(g,P)$$

$$\Longrightarrow sup\{L(f,P)\}\geq sup\{L(g,P)\} \quad (1)$$

Retomando la segunda observación:

$$sup\{L(f,P)\} = \int_a^b f = inf\{U(f,P)\} \qquad sup\{L(g,P)\} = \int_a^b g = inf\{U(g,P)\}$$

Y con el resultado (1), tenemos:

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

□

5. Mostrar que: $\displaystyle\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$

Demostración. .

Supongamos que $f(ct)$ es integrable sobre $[a,b]$, por lo que: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, P\ :\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon/c < \varepsilon$
Por definición, sabemos que:

$$L(f(ct),P) \leq \int_a^b f(ct)dt \leq U(f(ct),P)$$

$$\Longrightarrow sup\{L(f(ct),P)\} = \int_a^b f(ct)dt = inf\{U(f(ct),P)\} \quad (2)$$

y buscamos:

$$L(f,P') \leq \int_{ca}^{cb} f(t)dt \leq U(f,P') \Longrightarrow sup\{L(f,P')\} = \int_{ca}^{cb} f(t)dt = inf\{U(f,P')\} \qquad (3)$$

Siendo P, una partición definida como: $P = \{t_0 = a, t_1, ..., t_n = b\}$. Y P' una partición inducida de P trasa multiplicar cada t_i por c: $P'\{c \cdot t_0 = c \cdot a, c \cdot t_1, ..., c \cdot t_n = c \cdot b\}$

Considerando $c \geq 0$:

Multiplicamos (2) por c: $\quad c \cdot L(f(ct),P) \leq c \cdot \int_a^b f(ct)dt \leq c \cdot U(f(ct),P)$.

Calcularmos las sumas superiores y las inferiores de f con respecto a P y a P':

$$U(f(ct),P) = \sum_{i=0}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \qquad L(f(ct),P) = \sum_{i=0}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$
$$U(f,P') = \sum_{i=0}^{n} M'_i(c \cdot t_i - c \cdot t_{i-1}) \qquad L(f,P') = \sum_{i=0}^{n} m'_i(c \cdot t_i - c \cdot t_{i-1})$$

Con:

$$M_i = sup\{f(c\cdot x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \qquad m_i = inf\{f(c\cdot x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$
$$M'_i = sup\{f(x) \mid c\cdot t_{i-1} \leq x \leq c\cdot t_i\} \qquad m'_i = inf\{f(x) \mid c\cdot t_{i-1} \leq x \leq c\cdot t_i\}$$

(La igualdad entre $M_i = M'_i$, $m_i = m'_i$ es un hecho que me resulta particularmente dificil de explicar, trataré de abordarlo de la mejor forma posible).

Consideremos ahora un valor u cualquiera tal que $a \leq u \leq b \Longrightarrow t_0 \leq u \leq t_n$ y lo multiplicamos por c para obtener su equivalente en la partición P': $c\cdot a \leq c\cdot u \leq c\cdot b \Longrightarrow c\cdot t_0 \leq c\cdot u \leq c\cdot t_n$.Y comparamos sus imágenes en sus correspondientes funciones: m en $f(c\cdot x)$ y $c\cdot m$ en $f(x)$

$$f(c\cdot(u)) = f(c\cdot u) \quad \text{y} \quad f\big((c\cdot u)\big) = f(c\cdot u)$$

Tenemos, entonces, que $\forall u \in [a,b]$ y $\forall (c\cdot u) \in [ca, cb]$ (Valor inducido en la plartición P' por la partición P): $f(c\cdot(u)) = f\big((c\cdot u)\big)$.Asi, pues, si $f(c\cdot(u_1)) < f(c\cdot(u_2)) \Longrightarrow f\big((c\cdot u_1)\big) < f\big((c\cdot u_2)\big)$. Lo que, en otras palabras, significa que si $u_1 \in [a,b]$ es el valor más pequeño de $f(c\cdot x)$, entonces $c\cdot u_1 \in [ca, cb]$ es el valor más pequeño de $f(x)$. De forma añaloga sucede con el valor más grande.

Con lo anteior y la defición de $m_i,\ m'_i,\ M_i,\ M'_i$, tenemos que $M_i = M'_i$ y que $m_i = m'_i$ $\forall i \in [1,n]$
Si usamos ahora la ecuación (2) multiplicada por c y la desarrollamos tenemos que:

$$\begin{aligned} c\cdot L(f(ct),P) &= c\cdot \sum_{i=0}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot c(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} m_i(c\cdot t_i - c\cdot t_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} m'_i(c\cdot t_i - c\cdot t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\cdot U(f(ct),P) &= c\cdot \sum_{i=0}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot c(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} M_i(c\cdot t_i - c\cdot t_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} M'_i(c\cdot t_i - c\cdot t_{i-1}) \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} c\cdot(U(f(ct),P) - L(f(ct),P)) < c\cdot\varepsilon/c \Longrightarrow c\cdot U(f(ct),P) - c\cdot L(f(ct),P) < \varepsilon \\ \Longrightarrow U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon \end{aligned}$$

Lo que significa que si $f(ct)$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[ca, cb]$

Tenemos entonces:

$$L(f,P') \leq c \cdot \int_a^b f(ct)dt \leq U(f,P') \Longrightarrow$$

$$sup\{L(f,P')\} = c \cdot \int_a^b f(ct)dt = inf\{U(f,P')\}$$

Recordando la ecuación (3) tenemos: $sup\{L(f,P')\} = \displaystyle\int_{ca}^{cb} f(t)dt = inf\{U(f,P')\}$
Que nos da:

$$c \cdot \int_a^b f(ct)dt = \int_{ca}^{cb} f(t)dt$$

Considerando $c < 0$:

Multiplicamos (2) por c: $\quad c \cdot L(f(ct),P) \geq c \cdot \int_a^b f(ct)dt \geq c \cdot U(f(ct),P)$.

Como $c < 0$, al inducir la partición P' obtenemos que $t_{i-1} > t_i \ \forall i \in [1,n]$, lo que significa que ca es el valor más grande y cb es más pequeño.

Dada la conmutatividad de la suma y la definición de $L(f,P')$ y $U(f,P')$, es lo mismo cacularlar yendo del intervalo $[ct_n, ct_{n-1}]$ (el de las $t's$ más pequeñas) al intervalo $[t_1, t_0]$ (el de las $t's$ más grandes) que al revés (Desde los valores de t mas grandes a los más chicos).

Con lo anteior, calcularmos las sumas superiores y las inferiores de f con respecto a P y a P':

$$U(f(ct),P) = \sum_{i=0}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \qquad L(f(ct),P) = \sum_{i=0}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$U(f,P') = \sum_{i=0}^{n} M_i'(c \cdot t_{i-1} - c \cdot t_i) \qquad L(f,P') = \sum_{i=0}^{n} m_i'(c \cdot t_{i-1} - c \cdot t_i)$$

Con:

$$M_i = sup\{f(c \cdot x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \qquad m_i = inf\{f(c \cdot x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i' = sup\{f(x) \mid c \cdot t_{i-1} \geq x \geq c \cdot t_i\} \qquad m_i' = inf\{f(x) \mid c \cdot t_{i-1} \geq x \geq c \cdot t_i\}$$

Analago al caso con $c \geq 0$: $M_i = M_i'$ y $m_i = m_i'$.
Usando la ecuación (2) multiplicada por c y la desarrollamos tenemos:

$$\begin{aligned}
c \cdot L(f(ct), P) &= c \cdot \sum_{i=0}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot c(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} m_i(c \cdot t_{i-1} - c \cdot t_i) && \text{Porque } c > 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n} m_i'(c \cdot t_{i-1} - c \cdot t_i) = L(f, P')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c \cdot U(f(ct), P) &= c \cdot \sum_{i=0}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot c(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} M_i(c \cdot t_{i-1} - c \cdot t_i) && \text{Porque } c > 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n} M_i'(c \cdot t_{i-1} - c \cdot t_i) = U(f, P')
\end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$L(f, P') \geq c \cdot \int_a^b f(ct)dt \geq U(f, P') \Longrightarrow$$

$$sup\{L(f, P')\} = c \cdot \int_a^b f(ct)dt = inf\{U(f, P')\}$$

Recordando la ecuación (3) tenemos: $sup\{L(f, P')\} = \int_{ca}^{cb} f(t)dt = inf\{U(f, P')\}$
Que nos da:

$$c \cdot \int_a^b f(ct)dt = \int_{ca}^{cb} f(t)dt$$

□

6. Sea $b > 0$. Supongase que f es una función integrable sobre $[-b, b]$.

a) Si f es una función par, demostrar que $\int_{-b}^{b} f(t)dt = 2\int_0^b f(t)dt$.

Observemos que $b > 0$ y f integrable en $[-b, b]$ por lo que podemos rescribir la integral de esta manera:

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_0^b f(t)dt$$

Y eso puede tambien ser rescrito:

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{0}^{b} f(t)dt - \int_{0}^{-b} f(t)dt$$

Como f es par por hipótesis: $f(t) = f(-t) = f((-1)t)$

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{0}^{b} f(t)dt + (-1)\int_{0}^{-b} f((-1)t)dt$$

Utilizando la propiedad demostrada en el ejercicio 5 tenemos que:

$$(-1)\int_{0}^{-b} f(t(-1))dt = \int_{0(-1)}^{-b(-1)} f(t) = \int_{0}^{b} f(t)$$

Sustituyendo en nuestra ecuación:

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{0}^{b} f(t)dt + \int_{0}^{b} f(t) = 2\int_{0}^{b} f(t)dt$$

b) Si f es una función impar, demostrar que $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$.

Observemos que $b > 0$ yf integrable en $[-b, b]$ por lo que podemos rescribir la integral de esta manera:

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{-b}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{b} f(t)dt$$

Y eso puede tambien ser rescrito:

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{0}^{b} f(t)dt - \int_{0}^{-b} f(t)dt$$

Como f es par por hipótesis: $f(t) = -f(-t) = (-1)f((-1)t)$

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b} f(t)dt &= \int_{0}^{b} f(t)dt + (-1)\int_{0}^{-b} (-1)f((-1)t)dt \\ &= \int_{0}^{b} f(t)dt + (-1)(-1)\int_{0}^{-b} f((-1)t)dt\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad demostrada en el ejercicio 5 tenemos que:

$$(-1)\int_{0}^{-b} f(t(-1))dt = \int_{0(-1)}^{-b(-1)} f(t) = \int_{0}^{b} f(t)$$

Sustituyendo en nuestra ecuación:

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = \int_{0}^{b} f(t)dt + (-1)\int_{0}^{b} f(t) = \int_{0}^{b} f(t)dt - \int_{0}^{b} f(t)dt = 0$$

7. Hallas las areas de las regiones limitadas por:

a) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$.

Observemos como se comportan las funciones. La funcion $f(x) = x^2$ tiene:

Continuidad: x^2 Es un polinomio, por lo que es continua.

Dominio: $\mathbb{R}$ ya que nunca se indetermina.

Imagen: $x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} \Rightarrow |x| \Rightarrow x \geq 0$

Raíces: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Paridad: $x^2 = (-x)^2 = x^2$ Es par

Derivadas: $f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$

Puntos y valores criticos:

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y sustituyendo en $f(x) \Rightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow 2 > 0$ $(0,0)$. Como $f''(x) > 0$ siempre, el punto es un mínimo

Crecencia:

$2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ y $2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ por lo que es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$

Concavidad y Convexidad: $f''(x) > 0$ Es Convexa.

La funcion $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$ tiene:

Dominio: $\mathbb{R}$ ya que nunca se indetermina

Imagen:

$$y = \frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = y - 2 \Rightarrow x^2 = 2y - 4 \Rightarrow x = \sqrt{2y-4} \Longrightarrow 2y - 4 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$$

$Img(f) : [2, \infty)$

Continuidad: Cociente de continuas es continua (y x o tiene restricciones), suma de continuas tambien lo es, por lo que f es continua.

Raices:

$$\frac{x^2}{2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = -2 \Rightarrow x^2 = -1$$

No tiene raices reales.

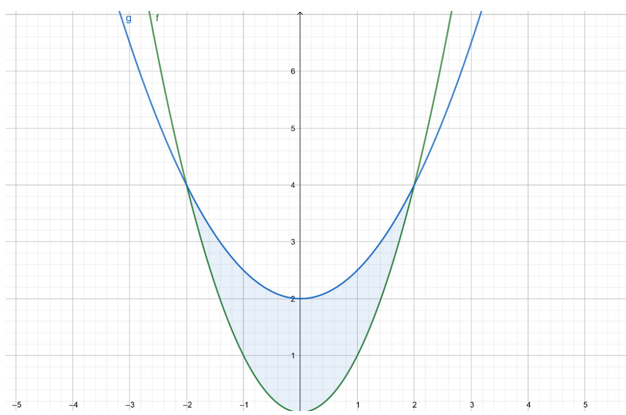
Paridad: $\dfrac{x^2}{2}+2=\dfrac{(-x)^2}{2}+2=\dfrac{x^2}{2}+2$ es par.

Derivadas: $g'(x)=x$ y $g''(x)=1$

Puntos y valores criticos:

$x=0$ como $g''(x)$ siempre es mayor a 0. es un mínimo **Crecencia:** Es decreciente cuando $x<0$ y decreciente cuando $x>0$ (Por $g'(x)$).

Concavidad y Convexidad: $g''(x)>0$ Es convexa.



Primero debemos observar donde se intersecan para entender que area esta contenida entre las funciones, $x^2=\dfrac{x^2}{2}+2$

$$2x^2=x^2+4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

Las funciones se cruzan en $(-2,4)$ y $(2,4)$ y sabemos, por su imagen, que $x^2<\dfrac{x^2}{2}+2$ en $[-2,2]$El area contenida entre dos funciones puede ser representada como la diferencia entre el area de la superior y el de la inferior.

La primitiva de x^n es $x^{n-1}/(n-1)$ y la de c es cx.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+2\right)dx-\int_{-2}^{2}x^2dx &= \int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}dx+\int_{-2}^{2}2dx-\int_{-2}^{2}x^2dx \\
&= \left[\frac{2^3}{6}-\frac{(-2)^3}{6}\right]+\left[2(2)-2(-2)\right]-\left[\frac{2^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right] \\
&= \left[\frac{8}{6}+\frac{8}{6}\right]+8-\left[\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right] \\
&= \frac{8}{3}+8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}+\frac{24}{3}-\frac{16}{3} \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

b) Las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=1-x^2$.

Observemos como funciona la funcion que aun no conocemos:

La funcion $1-x^2$ tiene:

Dominio: $\mathbb{R}$ ya que nunca se indetermina.

Imagen:

$$y=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y\Rightarrow x=\sqrt{1-y}\Rightarrow 1-y\geq 0\Rightarrow y\leq 1$$

$Img(f):[1,\infty]$

Continuidad: x no tiene restricciones y resta de continuas es continua.

Raices: $1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$ o $x=\pm 1$

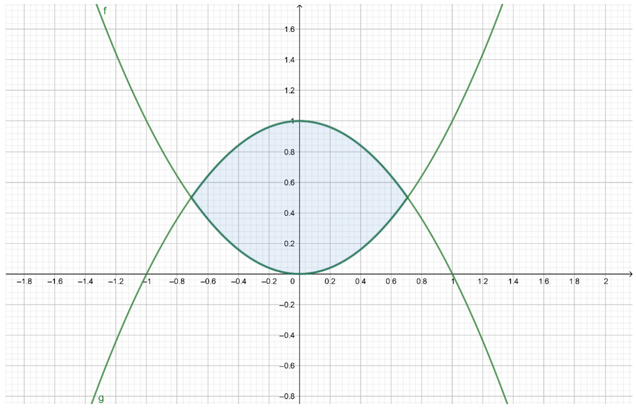
Paridad: $1-x^2=1-(-x)^2=1-x^2$ es par

Derivadas: $g'(x)=-2x \qquad g''(x)=-2$

Puntos y valores criticos: $-2x=0\Rightarrow x=0$ y sustituyendo en $g'(x)\Rightarrow -2(0)=0$ (No nos dice nada). Pero al evaluar en $f(0)=1-0^2=1$, $(0,1)$, por la imagen, es un máximo

Crecencia: $-2x>0\Rightarrow x<0$ Por lo que es Creciente en $x<0$. $-2x<0\Leftrightarrow x>0$ Por lo que es decreciente en $x>0$

Concavidad y Convexidad: $g''(x)<0$ es cóncava siempre y no tiene puntos de inflexión.



Veamos donde se intersecan las funciones $x^2 = 1 - x^2$

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Las funciones se cruzan en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ y por sus derivadas y sus puntos cíticos podremos saber que en el intervalo $1 - x^2$ es la funcion superior.

El area contenida entre dos funciones puede ser representada como la diferencia entre el area de la superior y el de la inferior.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-x^2)dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2dx &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 1dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2dx \\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 1dx - 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{3} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{3}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\left[\frac{2}{6\sqrt{2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{4}{6\sqrt{2}} \\
&= \frac{12-4}{6\sqrt{2}} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

NOTA: $(\sqrt{2})^3 = (2^{1/2})^3 = 2^{3(1/2)} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$

c) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$.

Observemos como se comporta la funcion que aun no conocemos

La funcion $h(x) = 2$ tiene:

Dominio: $\mathbb{R}$ ya que nunca se indetermina.

Imagen: $x = 2$

Continuidad: Toda constante, es continua.

Raices: $2 \neq 0$ No tiene.

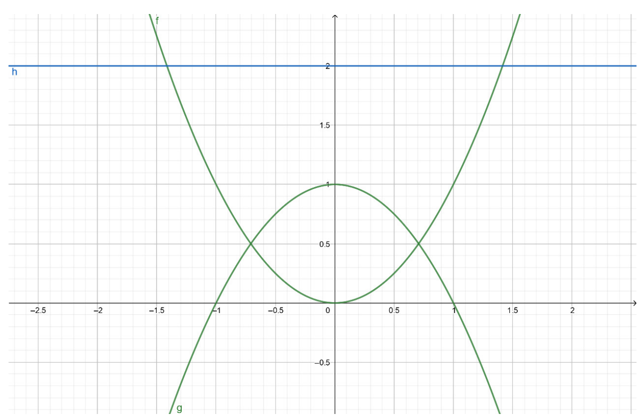
Paridad: $2 = 2$ Par.

Derivados: $h'(x) = 0 \qquad h''(x) = 0$

Puntos y valores criticos: Al ser constante todos sus puntos son máximos y mínimos.

Crecencia: Al ser constante no crece ni decrece.

Concavidad y Convexidad: Al ser constante no es Concava ni Convexa.



Como ya sabemos, f y g se intersecan en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$. Como $g(x) \leq 1$, nunca de encuentra con h, $f(x)$, por su par, si que se interseca con h en $(2, \sqrt{2})$, $(2, -\sqrt{2})$ (despejando x de $2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$).

Según la gráfica tenemos que el área qeu buscamos está denotada por:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx - \left[\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - x^2)dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 dx\right]$$

Entonces podemos usar el inciso b para decir que:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx - \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx - \frac{4}{3\sqrt{2}} &= [2(\sqrt{2}) - 2(-\sqrt{2})] - \left[\frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \frac{(-\sqrt{2})^3}{3}\right] - \frac{4}{3\sqrt{2}} && (4)\\
&= 4\sqrt{2} - \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right] - \frac{4}{3\sqrt{2}} && (5)\\
&= 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3\sqrt{2}} = 4\left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right] && (6)\\
&= 4\left[\frac{3\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^2 - 1}{3\sqrt{2}}\right] = 4\left[\frac{6-2-1}{3\sqrt{2}}\right] && (7)\\
&= 4\frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2^2}{2^{1/2}} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2} && (8)
\end{aligned}$$

d) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje vertical.

Observemos como se comporta la funcion que aun no conocemos.

La funcion $g(x) = x^2 - 2x + 4$ tiene:

Continuidad: Todo polinomio es continuo.

Dominio: $\mathbb{R}$ porque es un polinomio.

Imagen: $y = x^2 - 2x + 4 \Longrightarrow x^2 - 2x + (4 - y) = 0$

Aplicamos la fórmula general con $a = 1,\ b = -2,\ c = 4 - y$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4-y)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-12 + 4y}}{2}$$

Entonces..

$$-12 + 4y \geq 0 \Longrightarrow 4y \geq 12 \Longrightarrow y \geq 3 \qquad (9)$$

$Img(f) : [3, \infty]$

Raices: No tiene ya que $x \geq 3$.

Paridad: $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 4 = x^2 + 2x + 4$ No es ni par ni impar.

Derivados: $g'(x) = 2x - 2 \qquad g''(x) = 2$

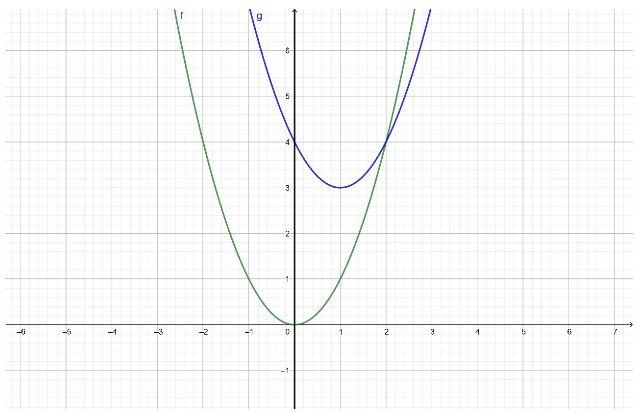
Puntos y valores criticos: $2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ y sustituyendo en $g(x) \Rightarrow 1^2 - 2 \cdot 1(1,3)$ es un mínimo porque $g''(x) > 0$

Crecencia:

$2x - 2 < 0 \Rightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1$, g es decreciente cuando $x < 1$.

$2x - 2 > 0 \Rightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$, g es creciente cuando $x > 1$.

Concavidad y Convexidad: $g''(x) > 0$ Es Convexa siempre.



Al usar el eje Y, tenemos uno de los extremos de nuestro rango $x = 0$, encontremos el otro $x^2 = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ Asi que nuestro intervalo es $[0, 2]$.

$0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ y $0 \leq 2x \leq 4 \Longrightarrow 0 \geq -2x \geq -4 \Longrightarrow 4 \geq 4 - 2x \geq 0$

Asi entonces $x^2 < x^2 + (4 - 2x)$ (Porque $4 - 2x$ es positivo en el intervalo a evaluar). entonces g es la función superior.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x^2 - 2x + 4)dx - \int_0^2 x^2 dx &= \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 2x dx + \int_0^2 4 dx - \int_0^2 x^2 dx \\
&= -2 \int_0^2 x dx + \int_0^2 4 dx = -2 \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] + 4(2) - 4(0) \\
&= -4 + 8 = 4
\end{aligned}$$

8. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \sin^3(t) dt$

Vemos a $F(x)$ como una composición de funciones:

$$g(x) = \int_a^x \sin^3(t)dt \qquad h(x) = x^3 \Longrightarrow F(x) = g(h(x))$$

Derivando $F(x)$ tenemos:

$$F'(x) = g'(h(x))h'(x)$$

$h'(x) = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$

$g'(x)$: seno es continua y derivable en todos los $\mathbb{R}$, por lo que $\sin(x)^3$ también lo es, además el intervalo va de $[a, x]$. Así podemos usar el primer teorema fundamental del cálculo para decir que:

$$g'(x) = sin^3(x)$$

Entonces: $F'(x) = g'(h(x))h'(x) = (sin^3(x^3))(3x^2) = 3x^2 \cdot \sin^3(x^3)$

b) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left(\int_1^x \sin^3(t)dt\right)} \frac{1}{1+\sin^6(t)+t^2}dt$

Vemos a $F(x)$ como una composición de funciones:

$$g(x) = \int_3^x \frac{1}{1+\sin^6(t)+t^2}dt \qquad h(x) = \int_1^x \sin^3(t)dt \Longrightarrow F(x) = g(h(x))$$

Derivando $F(x)$ tenemos:

$$F'(x) = g'(h(x))h'(x)$$

Con el inciso a obtenemos $h'(x) = \sin^3(x)$.

$g'(x)$: $\sin^6(x) \geq 0$ y $t^2 \geq 0$ (Por ser exponentes par) $\sin^6(x) + t^2 + 1 > \sin^6(x) + t^2 \geq 0$. Por lo que el denominador nunca es 0. seno es continuo y $t^2 + 1$ (polinomio) también. Así $\frac{1}{1+\sin^6(t)+t^2}$ es continua. Además el intervalo es $[3, x]$. Con lo que se puede usar el PTFC para afirmar que:

$$g'(x) = \frac{1}{1+\sin^6(x)+x^2}$$

Entonces: $F'(x) = g'(h(x))h'(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{1+\sin^6\left(\int_1^x \sin^3(t)dt\right) + \left(\int_1^x \sin^3(t)dt\right)^2}$

c) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+\sin^2(t)+t^2}dt\right) dy$

Analogo a como se demostró en el inciso b, $\dfrac{1}{1+\sin^2(t)+t^2}$ es continua. Así, su integral N cualquier intervalo es continua. Además el intervalo de la integral de $F(x)$ es $[15, x]$. Por lo que se puede utilizar el PTFC para decir que:

$$F'(x) = \int_8^x \frac{1}{1+\sin^2(t)+t^2} dt$$

9. Para cda una de las siguiente integrales impropias. Mostrar si es convergente o no según sea el caso.

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^r dx$ si $r < -1$

$$\int_0^\infty x^r dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^r dx$$

Como la función es continua e integrable, podemos obtener una primitiva: $g(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ (Como $r < -1$ nunca de indetermina). Así tenemos (Por el STFC) que:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b x^r dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{0^{r+1}}{r+1}\right] = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{r+1}}{r+1}$$

Como $r < -1 \implies r+1 < 0$, lo que significa que $r+1$ siempre es negativo, por lo que $a^{r+1} = 1/a^{-(r+1)}$:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{r+1}}{r+1} = \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{1}{b^{-(r+1)}}}{r+1} = \frac{1}{r+1} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{-(r+1)}} \Rightarrow \text{ Como } -(r+1) > 0 \Rightarrow \frac{1}{r+1} \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, como el límite existe y no es $\pm\infty$, la integral converge.

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$

(Resuleto en clase)

Sabiendo que $\displaystyle\int_1^{a^b} \frac{1}{x} dx = b \int_1^a \frac{1}{x} dx$. Podemos reescribir la inegral como $(a > 1)$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{a^b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} b \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

Como $a > 1$ (Por como construimos la integral), la integral es postivia, asi:

$$\lim_{b\to\infty} b \int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx \lim_{b\to\infty} b = \infty$$

Por lo tanto, la integral diverge.

c) $\displaystyle\int_0^a x^r dx$ si $-1 < r < 0$

Analogo al ejericicio a. La primitiva es $g(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$:

$$\int_0^a x^r dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{0^{r+1}}{r+1}$$

Como $-1 < r < 0 \Rightarrow 0 < r+1 < 1$, $\dfrac{0^{r+1}}{r+1} = 0$ por lo que:

$$\int_0^a x^r dx = \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Por lo tanto, la integral converge.

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

(Resuelto en el inciso 10)

10. Muestre que la región $A = \{(x, y) \mid x < 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ tiene área infinita. (Ejercicio realizado en clase).

Observaciones:

- A se refiere al área bajo la curva de $\dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[0, 1]$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx$
- Propiedad presentada en clase: $\displaystyle\int_1^{a^b} \frac{1}{x} dx = b \int_1^a \frac{1}{x} dx$

Por demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$

Prueba: .

Consideremos $b > 0$ en: $\displaystyle\lim_{b \to 0} \int_b^1 \frac{1}{x} dx$.

Nota: $\displaystyle\lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^b = \lim_{b \to \infty} \frac{1^b}{2^b} = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2^b} = 0$

Entonces podemos reescribir la fómula como:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)^b}^{1}\frac{1}{x}dx$$

Usando las propiedades de las integales y la propiedad de las observaciones tenemos que:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\left(\frac{1}{2}\right)^b}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}-\int_{1}^{\left(\frac{1}{2}\right)^b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}-b\cdot\int_{1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x}dx$$

Observación: $\displaystyle\int_{1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x}dx<0$ porque $1/2<1$. Entonces $\displaystyle-\int_{1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x}dx>0$

Por tanto:

$$\lim_{b\to\infty}-b\cdot\int_{1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}b\cdot-\int_{1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{x}dx=\infty$$

Por transitividad: $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx=\infty$

□

11. Encontrar la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\tan(x)-x$

Continuidad:

x es un polinomio, por lo que es continua en todos los $\mathbb{R}$, $\tan(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ porque es donde su denominador ($\cos(x)$) se iguala a 0. así entonces $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dominio:

Dada la continuidad de la función y debido al dominio de $tan(x)$:

$Dom(f):\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Imagen:

Analizamos la función en torno a $\tan(x)$ (Una funcíon ya definida en clase), y tenemos que:

$$\begin{aligned} \tan(x) - x &< \tan(x) \quad \text{si } x > 0 \\ \tan(x) - x &> \tan(x) \quad \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

Con lo anterior y sabiendo que $\tan(x)$ no está acotada, tenemos que $\tan(x)-x$ tampoco lo está, asi: $Img(f) : \mathbb{R}$

Raíces:

$$\tan(x) - x = 0 \Rightarrow \tan(x) = x \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x$$

Un punto en el que esto sucede es cuando $x = 0$: $\tan(0) - 0 = 0$

Esto ocurre cuando $\tan(x)$ está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. CAbe recordar que como la función es siempre creciente sólo puede tocar una vez el 0 por periodo.

Paridad:

Partimos sabiendo que $\sin(-x) = -\sin(x)$ (seno es impar) y que $\cos(-x) = \cos(x)$ (coseno es par).

$$\begin{aligned} f(-x) = \tan(-x) - (-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} + x \\ &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} + x = -\tan(x) + x \\ &= -(\tan(x) - x) = -f(x) \end{aligned}$$

f es impar.

Derivadas:

Sabiendo que: $\dfrac{d}{dx}\tan(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\tan(x) - \frac{d}{dx}x = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\tan^2(x)\cdot\frac{d}{dx}\tan(x) = 2\cdot\tan(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= 2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}
\end{aligned}
$$

Puntos y valores críticos:

$$
f'(x) = 0 \Longrightarrow \tan^2(x) = 0 \Longrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Longrightarrow \sin(x) = 0
$$

Sabemos, por la definición dada en clase, que $\sin(x) = 0$ en $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, así entonces

$$
f'(x) = 0 \quad \text{si } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
$$

Para los valores críticos tenemos que $\tan^2(x) = 0, \quad \text{si } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, asi:

$$
f(x) = \tan(x) - x \quad \text{con} \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
$$

Como en esos puntos $\tan(x) = 0$, entonces tendremos:

$$
f(x) = -x \quad \text{con} \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (k\pi, -k\pi) \quad \text{con} \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
$$

Crecencia:

Analizando $f'(x)$ tenemos que $\tan^2(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (Por el cuadrado), así, f siempre es creciente.

Puntos y valores de Inflexión:

$$
f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \Longrightarrow \sin(x) = 0
$$

Analogo al análisis de los puntos críticos (Pues en ambos casos llegamos $\sin(x) = 0$), tendremos que los valores de inflexión serán:

$$
(k\pi, -k\pi) \quad \text{con} \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
$$

Lo que tambiém significa que todos nuestros puntos crítcos son puntos de inflexión, por lo que la función no tiene nimínimos ni máximos.

Concavidad y Convexidad:

CONVEXIDAD:

$$\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} > 0 \begin{cases} 2\sin(x) > 0 \land \cos^3(x) > 0 & \sin(x) > 0 \land \cos(x) > 0 \quad \dots(1) \\ \\ 2\sin(x) < 0 \land \cos^3(x) < 0 & \sin(x) < 0 \land \cos(x) < 0 \quad \dots(2) \end{cases}$$

Analizando con $0 < x < 2\pi$

$$(1)\dots\ \sin(x) > 0 \land \cos(x) > 0 \Longrightarrow (0,\pi) \cap ([0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]) \Longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(2)\dots\ \sin(x) < 0 \land \cos(x) < 0 \Longrightarrow (\pi, 2\pi) \cap (\pi/2, 3\pi/2) \Longrightarrow \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Basados en que el periodo de $\tan(x)$ es π, extendemos el intervalo y obtenemos que f es cćonvexa en:

$$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\ k \in \mathbb{Z}$$

CONCAVIDAD:

$$\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} < 0 \begin{cases} 2\sin(x) > 0 \land \cos^3(x) < 0 & \sin(x) > 0 \land \cos(x) < 0 \quad \dots(1) \\ \\ 2\sin(x) < 0 \land \cos^3(x) > 0 & \sin(x) < 0 \land \cos(x) > 0 \quad \dots(2) \end{cases}$$

$$(1)\dots\ \sin(x) > 0 \land \cos(x) < 0 \Longrightarrow (0,\pi) \cap (\pi/2, 3\pi/2) \Longrightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$(2)\dots\ \sin(x) < 0 \land \cos(x) > 0 \Longrightarrow (\pi, 2\pi) \cap ([0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]) \Longrightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Al igual que con la convexidad usamos la propiedad periodica de $\tan(x)$ para extender el intervalo:

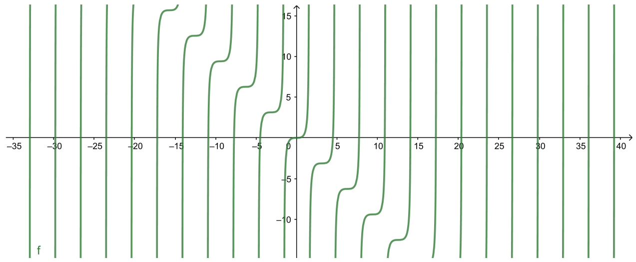
$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi + \pi\right)\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfica:

b) $f(x) = x + \sin(x)$

Continuidad:

x es una recta continua y $sin(x)$ es también continuo en todos los $\mathbb{R}$. Por lo que $f(x)$ es continua en todos los $\mathbb{R}$.



Dominio:

Como no hay nigún punto en el que la función esté indefinida: $Dom(f) : \mathbb{R}$

Imagen:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Longrightarrow x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1$$

Lo que significa que $f(x)$ está por debajo de $x+1$ (y $x+1$ no está acotada inferiormente) y por encima de $x-1$ (y $x-1$ no está acotada superiormente). $x+\sin(x)$ no está acotada, por lo que: $Img(f) : \mathbb{R}$

Raíces:

$x + 1$ tiene raíz en -1 ($(-1) + 1 = 0$) y $x - 1$ tiene raíz en 1 $1 - 1 = 0$. Como $f(x)$ está entre dichas funciones, sólo puede tener raíz en $[-1, 1]$, buscando la $x \in [-1, 1]$ tal que $f(x) = 0$, encontramos que el único punto posible es $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - \sin(0) = 0 - 0 = 0$ (Cosa que se respalda dado que la función es impar).

Paridad:

Sabiendo que $\sin(-x) = -\sin(x)$ (seno es impar):

$$f(-x) = (-x) + \sin(-x) = -x - \sin(x) = -(x + \sin(x)) = -f(x) \quad \text{(es impar)}$$

Derivadas:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x + \sin(x)] = 1 + \cos(x)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[1 + \cos(x)] = -\sin(x)$$

Puntos y valores críticos:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 + \cos(x) = 0 \Longrightarrow \cos(x) = -1$$

Sabemos que $\cos(x) = -1$ en $[0, 2\pi]$ sólo cuando $x = \pi$ (Por la definición geométrica de coseno) y su que s periodo es 2π, por lo que los puntos críticos de f son:

$$x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Evaluando $f(\pi) = \pi + \sin(\pi) = \pi + 0 = \pi$ y otro pnto crítico: $f(-\pi) = -\pi + \sin(-\pi) = -\pi + 0 = -\pi$

Por lo que los valores críticos de f son (considerando el periodo de seno (2π)):

$$([2k+1]\pi, [2k+1]\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Crecencia:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Longrightarrow 1 - 1 \leq 1 + \cos(x) \leq 1 + 1 \Longrightarrow 0 \leq 1 + \cos(x) \leq 2$$

Habiendo acotado $f'(x) = x + \cos(x)$ nos damos cuenta de que $f'(x) > 0$ en todos los puntos en los que no es 0 (Los puntos críticos), por lo que la función es siempre creciente.

Puntos y valores de Inflexión:

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow -\sin(x) = 0 \Longrightarrow \sin(x) = 0$$

Sabemos, por la definición de seno, que $\sin(x) = 0$ cuando $x = \pi\ \vee x = 0 \vee x = 2\pi$, lo que, aplicando el periodo de $\sin(x)$, se reescribe como:

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{(Puntos de inflexión)}$$

Valores de inflexión:

$$f(k\pi) = k\pi + \sin(k\pi) = k\pi + 0 = k\pi \Longrightarrow (k\pi, k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Concavidad y Convexidad:

CONCAVIDAD:

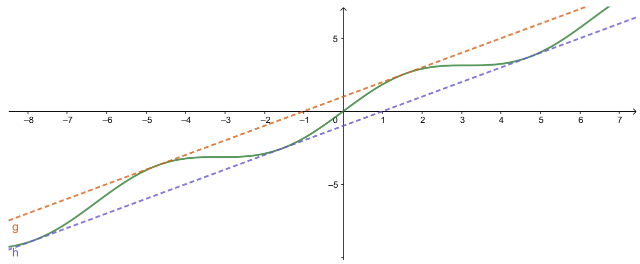
$$f''(x) > 0 \Longrightarrow -\sin(x) > 0 \Longrightarrow \sin(x) < 0$$

Sabemos, por definición, que $\sin(x) < 0$ en $(\pi, 2\pi)$, que aplicando el periodo de $\sin(x)$ nos proporciona los intervalos:

$$(2k\pi + \pi,\ 2k\pi + 2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

CONVEXIDAD:

$$f''(x) < 0 \Longrightarrow -\sin(x) < 0 \Longrightarrow \sin(x) > 0$$



Sabemos, por definición, que $\sin(x) > 0$ en $(0, \pi)$, que aplicando el periodo de $\sin(x)$ nos proporciona los intervalos:

$$(2k\pi,\ 2k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z}$$

Gráfica:

c) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$

Continuidad:

$\sin(x)$ y $\sin(2x)$ son funciones continuas en todos los $\mathbb{R}$, por lo que su suma $(\sin(x) + \sin(2x))$, también es continua en todos los $\mathbb{R}$.

Dominio:

Como no hay nugún punto en el que la función no esté definida: $Dom(f) : \mathbb{R}$

Imagen:

$$-1 \leq < sin(2x) \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Asi que:

$$-1 - 1 < \sin(x) + \sin(2x) < 1 + 1 \Longrightarrow -2 < \sin(x) + \sin(2x) < 2$$

La imagen que obtenemos es: $I : [-2, 2]$. Pero resulta no ser exacta, ps $\sin(x_0)$ no es igual que $\sin(x_0)$. Por lo que resulta es un desface en la suma de las funciones, por lo que, en realidad, la imagen de f es un subconunto de I.

Raíces:

$$\sin(x) + \sin(2x) = \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = \sin(x)(1 + 2\cos(x))$$

Así entonces, $f(x) = 0$ cuando $\sin(x) = 0 \Longrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ y cuando $1+2\cos(x) = 0$

Sabemos que $f(\pi/2) = 1+2\cos(\pi/2) = 1+0 = 1$ y que $f(\pi) = 1+2\cos(\pi) = 1-2 = -1$, por lo que, por el TVI (Porque la función es continua), sabemos que hay una raíz en $(\pi/2, \pi)$

Usando el método de Newton-Raphson:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(2\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2}) + 2\cos(2\frac{\pi}{2})} = \frac{\pi}{2} + \frac{1+0}{0+2(-1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Resulta ser una buena aproximación a la raíz que, probando numeros, queda $f(2\pi/3) = 0$ y $\dfrac{2\pi}{3} \approx \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}$ (No la usaremos en la descripción pues se obtuvo con calculos no permitidos).

Así, las raices de f son:

$$x = 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Paridad:

Sabiendo que $\sin(x)$ es par:

$$f(-x) = \sin(-x) + \sin(-2x) = -\sin(x) - \sin(2x) = -(\sin(x) + \sin(2x)) = -f(x)$$

Derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[\sin(x) + \sin(2x)] = \cos(x) + 2\cos(2x) \\ &= \cos(x) + 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \cos(x) + 2(\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) \\ &= \cos(x) + 2(2\cos^2(x) - 1) = 4\cos^2(x) + \cos(x) - 2 \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[\cos(x) + 2\cos(2x)] = -\sin(x) - 2 \cdot 2\sin(2x) = -\sin(x) - 4\sin(2x)$$

Puntos y valores críticos:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4\cos^2(x) + \cos(x) - 2 = 0$$

Sustituendo con $u = \cos(x)$ tenemos que:

$$4u^2 + u - 2 = 0 \quad \text{a=4, b=1, c=-2}$$

$$\cos(x) = u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(4(-2))}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Acotando lo obtenido tenemos dos casos:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 25 < 33 < 36 \Longrightarrow \sqrt{25} < \sqrt{33} < \sqrt{36} \Longrightarrow 5 < \sqrt{33} < 6 \\ & \Longrightarrow 4 < -1 + \sqrt{33} < 5 \\ & \Longrightarrow 0 < \frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} < \frac{5}{8} < 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & 25 < 33 < 36 \Longrightarrow \sqrt{25} < \sqrt{33} < \sqrt{36} \Longrightarrow -5 > -\sqrt{33} > -6 \\
& \Longrightarrow -6 > -1 - \sqrt{33} > -7 \\
& \Longrightarrow 0 > -\frac{3}{4} > \frac{-1-\sqrt{33}}{8} > -\frac{7}{8} > -1
\end{aligned}
$$

Entonces los puntos críticos en $[-1, 1]$:

$$\cos(x_0) = \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \Longrightarrow x = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) \text{ y}$$

$$\cos(x_1) = \frac{-1-\sqrt{33}}{8} \Longrightarrow x = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

Donde $\arccos(0) < x_0 < \arccos(1) \Longrightarrow \frac{3\pi}{2} < x_0 < 2\pi$ y $\arccos(-1) < x_1 < \arccos(0) \Longrightarrow \frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.

Al extender ambos puntos por el periodo tendremos:

$$x_0 = \pm \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2k\pi \ , \ x_1 = \pm \arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2k\pi + \pi \ , \ k \in \mathbb{R}$$

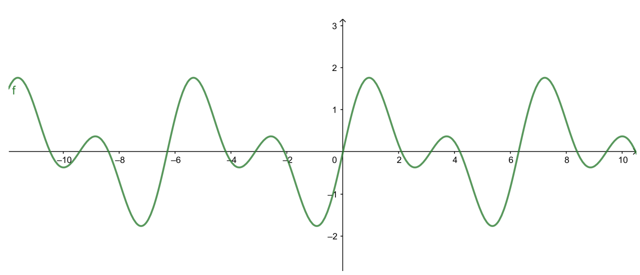
NOTA: El $\pm$ se debe a que $\cos(-x) = \cos(x)$

Como la derivada de $\cos(x)$ es $-\sin(x)$ y $\frac{3\pi}{2} < x_0 < 2\pi$. En dicho intervalo $\sin(x) < 0$, por lo que el punto que observamos es un máximo cuando tomamos el positivo y un mínimo cuando tomamos el negativo (porque lo tomamos del cuadrante contrario, sonde seno (por se impar) es poitivo).

Analogo es el caso de $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$. Intervalo donde $\sin(x) < 0$. Por lo que si tomamos el positivo el punto es in máximo y si tomamos el negativo un mínimo

Analizamos la función en base a los puntos críticos obtenidos con respecto a $\cos(x)$ y a $\sin(x)$ para obtener los datos restantes.

Gráfica:



12.

a) Partiendo de la fórmula para $\cos(2x)$, deducir las fórmulas para $\sin^2(x)$ y $\cos^2(x)$ en términos de $\cos(2x)$.

Sabemos que: $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.Desarrollando lo anterior para tener a $\cos(x)$ en términos de $\cos(2x)$:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 0\\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos^2(x)\\ &= \cos^2(x) + \cos^2(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1\end{aligned}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Longrightarrow \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ahora para $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 0\\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + \sin^2(x) - \sin^2(x)\\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x) - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Longrightarrow \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

b) Mostrar que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$ y $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.Por el inciso anterior sabemos que: $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

Proponemos un cambio de variable tal que $t = 2x$, con lo que tenemos:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \Longrightarrow \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1 + \cos(t)}{2}$$

Como, por hipótesis, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq \dfrac{t}{2} < \dfrac{\pi}{4}$. Por lo que $1 \geq \cos(t) \geq 0$ y $\dfrac{1 + \cos(2t)}{2} > 0$ por lo que podemos sacar raíz cuadrada a ambos lados, asi:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(t)}{2}}$$

NOTA: Aunque la raź denota un $\pm$, como ya especificamos que, dado el intervalo, $\cos(x)$ es mayor a 0, podemos dar por especificado el signo positivo. El caso será el mismo para $\sin(x)$.

Ahora con seno: $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Proponemos un cambio de variable tal que $t = 2x$, con lo que tenemos:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \Longrightarrow \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos(t)}{2}$$

Como, por hipótesis, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \frac{t}{2} < \frac{\pi}{4}$. Por lo que $0 \leq \sin(t) \leq 1$ y $\frac{1-\cos(2t)}{2} > 0$ (por que $1 = \cos(0) \leq \cos(2t) \leq \cos(\pi) = -1 \Longrightarrow 1-\cos(2t) > 0$ por lo que podemos sacar raíz cuadrada a ambos lados, asi:

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}}$$

c) Usar el primer inciso para calcular $\displaystyle\int_a^b \sin^2(x)dx$ y $\displaystyle\int_a^b \cos^2(x)dx$.

NOTA: Obtenemos $\displaystyle\int_a^b \cos(2x)dx$:

Buscamos una primitiva cuya derivada sea $\cos(2x)$. Sabemos que $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, y, por ende, que $\frac{d}{dx}\sin(2x) = \frac{d}{dx}\sin(2x) \cdot \frac{d}{dx}2x = 2\cos(2x)$. Como ese dos no figura en la integral, dividimos entre dos la primitiva al inicio: $\frac{d}{dx}\sin(2x)/2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}\sin(2x) \cdot \frac{d}{dx}2x = \frac{2\cos(2x)}{2} = \cos(2x)$.

Asi: $\displaystyle\int_a^b \cos(2x)dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c.$

Observaciones:

- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2(x)dx &= \int_a^b \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int_a^b (1-\cos(2x))dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^b 1dx - \int_a^b \cos(2x)dx\right] = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{2x - \sin(2x)}{4} \\
&= \frac{2x - 2\sin(x)\cos(x)}{4} = \frac{2(x - \sin(x)\cos(x))}{4} \\
&= \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \cos^2(x)dx &= \int_a^b \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int_a^b (1+\cos(2x))dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^b 1dx + \int_a^b \cos(2x)dx\right] = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right] \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{2x + \sin(2x)}{4} \\
&= \frac{2x + 2\sin(x)\cos(x)}{4} = \frac{2(x + \sin(x)\cos(x))}{4} \\
&= \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}
\end{aligned}
$$

13. Mostrar que:

a) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, si $-1 < x < 1$

Observaciones:

- $\frac{d}{dx}\left(h^{-1}(x)\right) = \frac{1}{h'(h^{-1})}$
- $\sin'(x) = \cos'(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(\arcsin(x)) = x \Longrightarrow \sin^2(\arcsin(x)) = x^2$

Prueba: .

Considerando que arcsin es la inversa de sin tenemos que su derivada esta denotada por la fórmula anterior (Aplicando las observaciones):

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Despejando $\cos(x)$ de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, tenemos que: $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Sustituyendo lo obtenido en la ecuación:

$$\frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Finalmente, por transitividad:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\square$

b) $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, si $-1 < x < 1$

Observaciones:

- $\dfrac{d}{dx}\left(h^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{h'(h^{-1})}$
- $\cos'(x) = -\sin'(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\cos(\arccos(x)) = x \Longrightarrow \cos^2(\arccos(x)) = x^2$

Prueba: .

Considerando que $\arccos$ es la inversa de $\cos$ tenemos que su derivada esta denotada por la fórmula anterior (Aplicando las observaciones):

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$$

Despejando $\sin(x)$ de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, tenemos que: $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$. Sustituyendo lo obtenido en la ecuación:

$$-\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arcsin(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Finalmente, por transitividad:

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\square$

c) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, para toda x.

Observaciones:

- $\dfrac{d}{dx}\big(h^{-1}(x)\big) = \dfrac{1}{h'(h^{-1})}$
- $\tan'(x) = \sec^2(x)$
- $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$
- $\tan(\arctan(x)) = x \Longrightarrow \tan^2(\arctan(x)) = x^2$

Prueba: .

Considerando que arctan es la inversa de tan tenemos que su derivada esta denotada por la fórmula anterior (Aplicando las observaciones):

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Por transitividad:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$\square$

14. Aplicar la derivación logarítmica para obtener la derivada $f'(x)$ de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (1+x)(1+e^{x^2})$

Aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la igualdad:

$$\ln(f(x)) = \ln((1+x)(1+e^{x^2}))$$

Por las propiedades del ln tenemos: $\quad \ln(f(x)) = \ln(1+x) + \ln(1+e^{x^2})$

Derivando:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln(f(x)) &= \frac{d}{dx}(\ln(1+x)+\ln(1+e^{x^2}))\\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{d}{dx}(1+x)}{1+x}+\frac{\frac{d}{dx}(1+e^{x^2})}{1+e^{x^2}} = \frac{1}{1+x}+\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\\
&= \frac{(1+e^{x^2})+(2xe^{x^2})(1+x)}{(1+x)(1+e^{x^2})}\\
&= \frac{1+e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{(1+x)(1+e^{x^2})}\\
f'(x) &= (1+x)(1+e^{x^2})\left[\frac{1+e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{(1+x)(1+e^{x^2})}\right]\\
&= 1+e^{x^2}+2xe^{x^2}+2x^2e^{x^2}
\end{aligned}$$

b) $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)} + (\sin(x))^{\cos(x)}$

Sabiendo que $e^{\ln(a)} = a$, lo aplicamos a cada operando de la suma:

$$f(x) = e^{\ln(\cos(x)^{\sin(x)})} + e^{\ln(\sin(x)^{\cos(x)})}$$

Usando la propiedad logarítmica de los exponene tenemos:

$$f(x) = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} + e^{\cos(x)\ln(\sin(x))}$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} + e^{\cos(x)\ln(\sin(x))}\right] = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}\right) + \frac{d}{dx}\left(e^{\cos(x)\ln(\sin(x))}\right)\\
&= \left[e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}\cdot\frac{d}{dx}[\sin(x)\ln(\cos(x))]\right] + \left[e^{\cos(x)\ln(\sin(x))}\cdot\frac{d}{dx}[\cos(x)\ln(\sin(x))]\right]
\end{aligned}$$

Desarrolando las derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sin(x)\ln(\cos(x))] &= \frac{d}{dx}\sin(x)\cdot\ln(\cos(x)) + \sin(x)\cdot\frac{d}{dx}(\ln(\cos(x)))\\
&= \cos(x)\cdot\ln(\cos(x)) + \sin(x)\cdot\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\\
&= \cos(x)\cdot\ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\cos(x)\ln(\sin(x))] &= \frac{d}{dx}\cos(x)\cdot\ln(\sin(x)) + \cos(x)\cdot\frac{d}{dx}(\ln(\sin(x))) \\
&= -\sin(x)\cdot\ln(\sin(x)) + \cos(x)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= -\sin(x)\cdot\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}
$$

Recordando que $e^{\ln(a)} = a$, resustitumos todo:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \cos(x)^{\sin(x)} &\left[\cos(x)\cdot\ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}\right] + \\
&\sin(x)^{\cos(x)}\left[-\sin(x)\cdot\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right] \\
= &\left[\cos(x)^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\cdot\ln(\cos(x)) - \cos(x)^{\sin(x)}\cdot\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}\right] + \\
&\left[-\sin(x)^{\cos(x)}\cdot\sin(x)\cdot\ln(\sin(x)) + \sin(x)^{\cos(x)}\cdot\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \cos(x)^{\sin(x)+1}\cdot\ln(\cos(x)) - \cos(x)^{\sin(x)-1}\sin^2(x) \\
- \sin(x)^{\cos(x)+1}\cdot\ln(\sin(x)) + \sin(x)^{\cos(x)-1}\cos^2(x)
\end{aligned}
$$

c) $f(x) = \dfrac{(3-x)^{1/3}x^3}{(1-x)(3+x)^{2/3}}$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{(3-x)^{1/3}x^3}{(1-x)(3+x)^{2/3}} &\Longrightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{(3-x)^{1/3}x^3}{(1-x)(3+x)^{2/3}}\right) \\
\ln(f(x)) &= \ln((3-x)^{1/3}) + \ln(x^3) - (\ln(1-x) + \ln((3+x)^{2/3})) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\ln(3-x) + 3\ln(x) - \ln(1-x) - \frac{2}{3}\cdot\ln(3+x) \\
\ln(f(x))' &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\cdot\ln(3-x) + 3\ln(x) - \ln(1-x) - \frac{2}{3}\cdot\ln(3+x)\right] \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{-1}{3(3-x)} + \frac{3}{x} - \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{3(3+x)} \\
f'(x) &= f(x)\left[\frac{-1}{3(3-x)} + \frac{3}{x} - \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{3(3+x)}\right] \\
&= \frac{(3-x)^{1/3}x^3}{(1-x)(3+x)^{2/3}}\left[\frac{-1}{3(3-x)} + \frac{3}{x} - \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{3(3+x)}\right] \\
f'(x) &= \frac{(3-x)^{1/3}x^3}{(1-x)(3+x)^{2/3}}\left[-\frac{1}{9-3x} + \frac{3}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{9+3x}\right]
\end{aligned}
$$

d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)} \Longrightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)}\right) \\
\ln(f(x)) &= \ln(e^x - e^{-x}) - [\ln(e^{3x}) + \ln(1+x^3)] \\
\ln(f(x))' &= \frac{d}{dx}\left[\ln(e^x - e^{-x}) - \ln(e^{3x}) - \ln(1+x^3)\right] \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} - \frac{\frac{d}{dx}e^{3x}}{e^{3x}} - \frac{3x^2}{1+x^3} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{3e^{3x}}{e^{3x}} - \frac{3x^2}{1+x^3} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{3x^2}{1+x^3} - 3 \\
f'(x) &= f(x)\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{3x^2}{1+x^3} - 3\right] \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{3x^2}{1+x^3} - 3\right] \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)} \cdot \frac{3x^2}{1+x^3} - \frac{3(e^x - e^{-x})}{e^{3x}(1+x^3)} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{e^{3x}(1+x^3)} - \frac{3x^2(e^x - e^{-x})}{e^{3x}(1+x^3)^2} - \frac{3(e^x - e^{-x})}{e^{3x}(1+x^3)} \\
&= \frac{(1+x^3)(e^x + e^{-x}) - 3x^2(e^x - e^{-x}) - 3(e^x - e^{-x})(1+x^3)}{e^{3x}(1+x^3)^2} \\
f'(x) &= \frac{(1+x^3)(e^x + e^{-x}) - 3(e^x - e^{-x})(x^3 + x^2 + 1)}{e^{3x}(1+x^3)^2}
\end{aligned}$$

15. Hallar la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{1+x}$

Continuidad:

$1+x$ es un polimonio, por lo que es continuo en todos los $\mathbb{R}$. e^x es una función continua también, y la composición de dos funciones continuas es continua, por lo que e^{1+x} es continua en todos los $\mathbb{R}$

Dominio:

Por el punto anteior y por el hecho de que x no tiene ningún tipo de restricción: $Dom(f) : \mathbb{R}$

NOTA: Dos puntos útiles para graficar la función son: $f(0) = e^{1+0} = e$, y $f(-1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

Imagen:

$$1 + x > x \Longrightarrow e^{1+x} > e^x > 0 \tag{10}$$

Sabiendo que: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{1+x} = \lim_{x\to-\infty} e \cdot e^x = e \lim_{x\to-\infty} e^x = e \cdot (0) = 0 \tag{11}$$

Por la ecuación (11) y por la definición de la exponencial, sabemos que $f(x) > 0$. Luego, por la ecuación (10), sabemos que e^{1+x} está por encima de e^x, sabemos también que e^x no está acotada superiormente, por lo que e^{1+x} tampoco lo está. Así entonces, la imagen de f es:

$$Img(f) : \mathbb{R}^+$$

Paridad:

$$f(-x) = e^{1+(-x)} = e^{1-x} \qquad \text{(No es ni par ni impar)}$$

Derivadas:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{1+x} = \frac{d}{dx}e^{1+x} \cdot \frac{d}{dx}(1+x) = e^{1+x}(1) = e^{1+x}$$

Por lo anterior $f''(x) = e^{1+x}$

Puntos y valores críticos:

Como $f'(x) = f(x)$ y ya demostramos en la imagen de la función que ésta nunca toca el 0, asi pues, la función no tiene puntos críticos.

Crecencia:

De nuevo, como $f'(x) = f(x)$ y $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la función es siempre creciente.

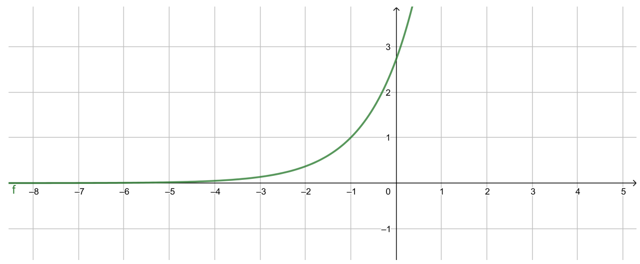
Puntos y valores de Inflexión:

Analogo a los puntos crt́icos ($f''(x) = f(x)$), la función no tiene puntos de inflexión porque $f''(x)$ nunca es 0.

Concavidad y Convexidad:

Como $f''(x) = f(x)$ y $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la función es siempre convexa.

Gráfica:



b) $f(x) = e^{\sin(x)}$

Continuidad:

$\sin(x)$ y e^x son continuas en todos los $\mathbb{R}$, por lo que su compocisión ($e^{\sin(x)}$), es continua en todos los reales.

Dominio:

Como no hay nigún punto en el que la función esté indefinida: $Dom(f) : \mathbb{R}$

Imagen:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Longrightarrow e^{-1} \leq e^{\sin(x)} \leq e^{1} \Longrightarrow Img(f) : \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

Raíces:

Como $\frac{1}{e} > 0$, $f(x)$ nunca es 0. Por lo que f no tiene raíces.

Paridad:

Sabiendo que seno es par $\sin(-x) = \sin(x)$

$$f(-x) = e^{\sin(-x)} = e^{\sin(x)} = f(x) \quad \text{(es par)}$$

Derivadas:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx} \sin(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\right) = \frac{d}{dx} e^{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx} \sin(x) \cdot \cos(x) + e^{\sin(x)} \cdot \frac{d}{dx} \cos(x) \\ &= e^{\sin(x)} \cdot \cos^2(x) - e^{\sin(x)} \cdot \sin(x) \\ &= e^{\sin(x)}\left(\cos^2(x) - \sin(x)\right) \end{aligned}$$

Puntos y valores críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) = 0$$

Como sabemos que $e^{\sin(x)} > \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ sólo será 0 cuando $\cos(x) = 0$ que sabemos, por la definición de coseno dada en clase, que eso sucede en: $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Sabemos también que $\cos(\pi/2) = 0 \ \wedge \ \sin(\pi/2) = 1 \Rightarrow e^{\sin(\pi/2)} = e$ y que $\cos(3\pi/2) = 0 \ \wedge \ \sin(3\pi/2) = -1 \Rightarrow e^{\sin(3\pi/2)} = e^-1$

Comparamos $f''(x)$ en cada punto para saber si es un mínimo o un máximo:

$$f''(\pi/2) = e^{\sin(\pi/2)}\big(\cos^2(\pi/2) - \sin(\pi/2)\big) = e^1(0-1) = -e < 0$$

$$f''(3\pi/2) = e^{\sin(3\pi/2)}\big(\cos^2(3\pi/2) - \sin(3\pi/2)\big) = e^{-1}(0-(-1)) = e^-1 > 0$$

Por lo que $\pi/2$ es un punto máximo y $\pi/2$ es un punto mínimo.

Al final usamos el periodo de seno (2π) y su paridad para encontrar todos los máximos y mńimos.

Crecencia:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) > 0$$

Como $e^{\sin(x)}$ es mayor a o siempre, $f'(x)$ será mayor a 0 cuando $\cos(x) > 0$

Sabemos, por la definición de $\cos(x)$, que este es mayor a 0 en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y que eso se repite cada 2π (Por su periodo).

Analogo a lo anterior, $f'(x) < 0$ sólo cuando $\cos(x) < 0$, que, por definición, sucede en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ y se repite cada 2π. Entonces:

f es creciente en: $\quad \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

f es decreciente en: $\quad \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

Puntos y valores de Inflexión:

Considerando el intervalo $0 < x < 2\pi$:

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow e^{\sin(x)}\big(\cos^2(x) - \sin(x)\big) = 0$$

Como $e^{\sin(x)} > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ sólo va a ser 0 cuando $\cos^2(x) - \sin(x) = 0$. Así entonces:

$$\cos^2(x) - \sin(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \sin^2(x) - \sin(x) \Longrightarrow -\sin^2(x) - \sin(x) + 1$$

Propodenos un cambio de variable tal que: $\sin(x) = u$: $\quad -u^2 - u + 1 = 0 \Longrightarrow u^2 + u - 1 = 0$Usamos la fórmula general con $a = 1, \ b = 1, \ c = -1$:

$$u = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} 4 < 5 < 9 &\Longrightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Longrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \\ &\Longrightarrow 1 < -1 + \sqrt{5} < 2 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 < 5 < 9 &\Longrightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Longrightarrow -2 > -\sqrt{5} > -3 \\ &\Longrightarrow -3 < -1 - \sqrt{5} < -4 \Longrightarrow -\frac{3}{2} < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -2 \Rightarrow\!\Leftarrow \end{aligned}$$

El segundo caso no es posbile porque seno sólo está definido entre -1 y 1

Como el caso 1 está en el dominio del arcsen $[-1, 1]$. Así tendremos que:

$$\arcsin(0) < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) < \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < \arcsin(1)$$

Buscando valores de $\sin(x)$ que nos den los resultados del $\arcsin(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) < \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < \pi \\ \frac{3\pi}{2} < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) < -\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < 2\pi \end{aligned}$$

NOTA: El negativo del segundo arcsin se debe a que analizamos la otra posibilidad del $\sin(x)$ (En el cuadrante negativo).

Así podemos decir que los puntos de inflexión de $f(x)$ son:

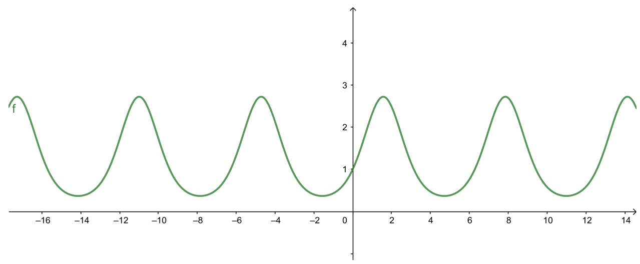
$$x_0 = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{y} \quad x_1 = -\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Sabiendo que: $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$ y $\frac{3\pi}{2} < x_1 < 2\pi$.

Los valores de inflexión serían:

$$f(x_0) = e^{\sin\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)} = e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$f(x_1) = e^{\sin\left(-\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)} = e^{-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$



Extendiendo lo obtenido con el periodo de $\cos(x)$ tendremos:

$$x_0 = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi \quad \text{y} \quad x_1 = -\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfica:

c) $f(x) = e^x + e^{-x}$

Continuidad:

e^x y e^{-x} son funciones continuas en todos los $\mathbb{R}$, por lo que su suma $(e^x + e^{-x})$, también lo es.

Dominio:

Como no hay valores donde $f(x)$ esté indefinida: $Dom(f) : \mathbb{R}$

Imagen:

Como $e^{-x} > 0$, podemos decir que $0 < e^x < e^x + e^{-}x$, lo que significa que e^x está por debajo de f y, como e^x no está acotada superiormente, f tampoco lo está. Analogo es el caso con $0 < e^{-x} < e^x + e^{-}x$. Por lo que sabemos que f no está acotada superiormente y que está entre e^x y e^{-x}.

En los puntos críticos demostraremos que: $Img(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

Raíces:

Como ya se dijo anteriormente, f está entre e^x y e^{-x} y como cambas con mayores a 0, $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que f no tiene raíces.

Paridad:

$$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = f(x) \qquad \text{(es par)}$$

Derivadas:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) = e^x(1) + e^{-x}(-1) = e^x - e^{-x}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = e^x(1) - e^{-x}(-1) = e^x + e^{-x}$$

Puntos y valores críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \Rightarrow x = -x$$

NOTA: Podemos aplicar logaritmo por ambos lados de la ecucación son siempre positivos.

Como en los realies la premisa $x = -x$ sólo se cumple con $x = 0$, por lo que 0 es el único punto crítico de f

$$f(0) = e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2 \Longrightarrow (0, 2) \quad \text{Valor crítico}$$

Analizamos $f''(0)$: $\quad f''(0) = e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2 > 0$ $x = 0$ es un mínimo.

Sabiendo que $(0, 2)$ es el único punto crítico que obtenemos, que la función está entre e^x y e^{-x} (lo que significa que es mayor a 0), y que es par, podemos afirmar que el mínimo valor de $f(x)$ es 2, así entocnes la imagen de f es: $[2, \infty)$.

Crecencia:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} > 0 \Rightarrow e^x > e^{-x} \Rightarrow \ln(e^x) > \ln(e^{-x}) \Rightarrow x > -x$$

Si $x < 0 \Rightarrow x > -x \Rightarrow\Leftarrow$ Porque $-x > 0$ y un negativo no puede ser mayor a un positivo.

Si $x > 0 \Rightarrow x > -x$ La premisa se cumple. Por lo que f es creciente en $x > 0$ y, como la función es par, es decreciente en $x < 0$.

Puntos y valores de Inflexión:

Sabemos que $f''(x) = e^x + e^{-x} = f(x)$ y que $f(x) \geq 2 > 0$, por lo que $f''(x)$ nunca es 0, asi entonces, la función no tiene puntos de inflexión.

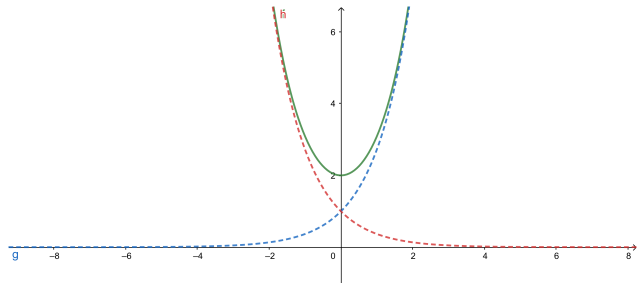
Concavidad y Convexidad:

Analogo a los puntos de inflexión. Como $f''(x) = f(x)$ y $f(x) \geq 2 > 0$, entonces $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo que la función es siempre convexa.

Gráfica:

d) $f(x) = e^x - e^{-x}$

Continuidad:



e^x y e^{-x} son funciones continuas en todos los $\mathbb{R}$, por lo que su resta $(e^x - e^{-x})$, también lo es.

Dominio:

Como no hay valores donde $f(x)$ esté indefinida: $Dom(f) : \mathbb{R}$

Imagen:

(Como más adelante demostramos que la función es impar, nos centraremos solo en las $x > 0$) Notemos que si $x > 0 \Rightarrow x > -x \Rightarrow e^x > e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} > 0$

Sabiendo que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, obtenemos su límite al infinito:

$$\lim_{x\to\infty} e^x - e^{-x} = \lim_{x\to\infty} e^x - \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^x - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^x - 0 = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Lo que significa que $x \to 0 \Rightarrow f(x) \to 0$, por lo que la función no está acotada en $x > 0$ y tiende a infinito. Dada la paritdad de la función, sabemos que tampoco está acotada inferiormente y que tiene a $-\infty$.

Raíces:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \Rightarrow x = -x$$

NOTA: Podemos aplicar logaritmo por ambos lados de la ecucación son siempre positivos.

Como en los realies la premisa $x = -x$ sólo se cumple con $x = 0$, f tiene una única raíz en $x = 0$.

$$f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0 \Longrightarrow (0, 0) \quad \text{Raíz}$$

Paridad:

$$f(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)} = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x) \qquad \text{(es impar)}$$

Derivadas:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = e^x(1) - e^{-x}(-1) = e^x + e^{-x}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) = e^x(1) + e^{-x}(-1) = e^x - e^{-x}$$

Puntos y valores críticos:

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0$ Definimos $e^x + e^{-x}$ en el ejercicio c y demostramos que $e^x + e^{-x} \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo que $f'(x)$ nunca es 0, así entonces, la función no tiene puntos críticos.

Crecencia:

Analogo al anterior, como en el ejericico c demostramos que $e^x + e^{-x} \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$, así $f'(x) > 0$, por lo que la función siempre es creciente.

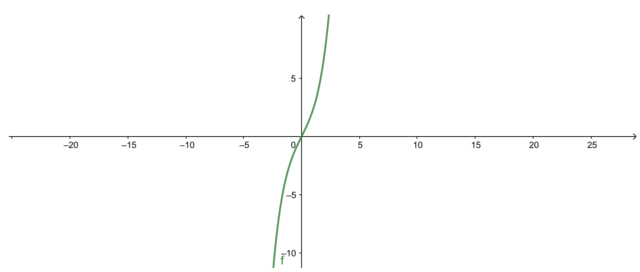
Puntos y valores de Inflexión:

Como $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$ y ya demostramos que $f(x) = 0$ cuando $x = 0 \Rightarrow (0,0)$, $(0,0)$ es un valor de inflexión.

Concavidad y Convexidad:

Como $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$ y ya demostramos que cuando $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, la función es convexa en $(0, \infty)$, y, como es impar, es cóncava en $x < 0$.

Gráfica:



e) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x} + 1}$

Continuidad:

Como f es una fracción, el denominador no puede ser 0, es decir $e^x + e^{-x} \neq 0$, pero ya demostramos, en el inciso c, que $e^x + e^{-x} \geq 2 > 0$, por lo que la función, al ser una composición de funciones continuas (demostrado en los incisos c y d) y no tener resstricciones, es continua en todos los $\mathbb{R}$.

Dominio:

Como no hay valores donde $f(x)$ esté indefinida: $Dom(f) : \mathbb{R}$

Imagen:

Sabemos que $e^{2x} > 0 \Rightarrow e^{2x}+1 > 1 > 0$ y, por lo tanto, que $\dfrac{1}{e^{2x}+1} > 0$. Así:

$$\begin{aligned} & e^{2x}+1 > 1 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{e^{2x}+1} < \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow 0 < \frac{2}{e^{2x}+1} < 2 \\ & \Longrightarrow 0 > -\frac{2}{e^{2x}+1} > -2 \Longrightarrow 1+0 > 1-\frac{2}{e^{2x}+1} > 1-2 \\ & \Longrightarrow 1 > 1-\frac{2}{e^{2x}+1} > -1 \Longrightarrow \left|1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right| < 1 \end{aligned}$$

Así, f está acotada por $M=1$, por lo que: $Img(f) : [-1,1]$

Raíces:

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = 0 \Longrightarrow e^{x}-e^{-x} = 0$$

Sabemos, por el inciso d, que $e^{x}-e^{-x}=0$ en $x=0$. Por lo que tenemos una raíz en ese punto.

$f(0) = \frac{e^{0}-e^{-0}}{e^{0}+e^{-0}} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \Longrightarrow (0,0)$ Raíz

Paridad:

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{-(e^{x}-e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}} = -f(x) \quad \text{(impar)}$$

Derivadas: Utilizando derivación logarítmica:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Longrightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \\
\frac{d}{dx}\ln(f(x)) &= \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{d}{dx}\left[\ln(e^x - e^{-x}) - \ln(e^x + e^{-x})\right] \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} - \frac{\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{(Incisos c y d)} \\
f'(x) &= f(x)\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} \\
f'(x) &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\right] = 4\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}\right] = 4\frac{d}{dx}\left[(e^x + e^{-x})^{-2}\right] \\
&= 4\frac{d}{dx}\left[(e^x + e^{-x})^{-2}\right]\frac{d}{dx}\left[(e^x + e^{-x})\right] = 4 \cdot -2(e^x + e^{-x})^{-3} \cdot (e^x - e^{-x}) \\
&= -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}
\end{aligned}
$$

Puntos y valores críticos:

$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = 0 \Longrightarrow 4 = 0 \Rightarrow\Leftarrow$ f no tiene puntos críticos porque $f'(x)$ nunca es 0.

Crecencia:

$f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. Como $4 > 0$ y $(e^x + e^{-x})^2 > 0$ (Por el cuadrado) $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo que f es siempre creciente.

Puntos y valores de Inflexión:

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} = 0 \Longrightarrow 8(e^x - e^{-x}) = 0 \Longrightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

Por el inciso d sabemos que $e^x - e^{-x} = 0$ cuando $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, así pues, f tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

Concavidad y Convexidad:

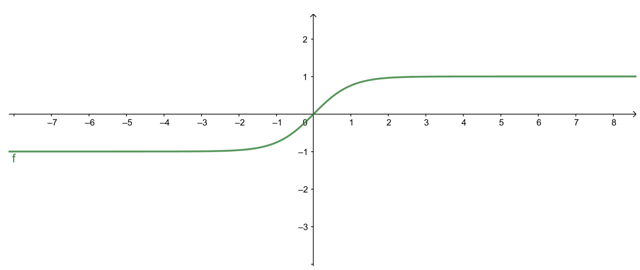
$$f''(x) > 0 \Longrightarrow -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} > 0 \Longrightarrow \frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} < 0$$

Sabemos, por el inciso c, que $e^x + e^{-x} > 0 \Longrightarrow (e^x + e^{-x})^3 > 0$, por lo que $f''(x)$ será mayor a 0 sólo cuando $8(e^x - e^{-x}) < 0 \Longrightarrow e^x - e^{-x} < 0$.

Sabemos también, por el inciso d, que $e^x - e^{-x} < 0$ cuando $x < 0$. Por lo que $f''(x) > 0$ (f es convexa) cuando $x < 0$.

Como la función es impar, es cóncava en $x > 0$.

Gráfica:



16. Las siguientes funciones reciben el nombre de seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica, respectivamente.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ y \ \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Mostrar que:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Prueba:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{4e^{x-x}}{4} = \frac{4e^0}{4} = \frac{4(1)}{4} = 1\end{aligned}$$

$\square$

b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$

Prueba:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sinh(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x(1) - e^{-x}(-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)\end{aligned}$$

$\square$

c) $\cosh'(x) = \sinh(x)$

Prueba:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x(1) + e^{-x}(-1)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)\end{aligned}$$

$\square$

d) $\tanh^2(x) + \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1$

Prueba:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\cdot\frac{1/2}{1/2} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2(x)}$$
$$= \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} + \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{\sinh^2(x)+1}{\cosh^2(x)}$$

Recordando el inciso a: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Si despejamos $\cosh^2(x)$ obtenemos:

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{\sinh^2(x)+1}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1$$

□

e) $\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$

Prueba:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \text{(Demostrado en el inciso c)}$$

Usando derivación logarítmica:

$$\begin{aligned}
\ln(\tanh(x)) &= \ln\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \ln(\sinh(x)) - \ln(\cosh(x)) \\
\frac{d}{dx}\big(\ln(\tanh(x))\big) &= \frac{d}{dx}\big[\ln(\sinh(x)) - \ln(\cosh(x))\big] \\
\frac{\tanh'(x)}{\tanh(x)} &= \frac{\sinh'(x)}{\sinh(x)} - \frac{\cosh'(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} - \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
\tanh'(x) &= \tanh(x)\left[\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} - \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right] = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\left[\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} - \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right] \\
&= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \cdot \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} - \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \cdot \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \text{(Por el inciso a)}
\end{aligned}$$

□

f) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$

Prueba:

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^x e^y - 2e^{-x}e^{-y} + 0 + 0}{4} \\
&= \frac{2e^x e^y - 2e^{-x}e^{-y} + (e^{x-y} - e^{x-y}) + (e^{y-x} - e^{y-x})}{4} \\
&= \frac{(e^x e^y - e^{-x}e^{-y} + e^{x-y} - e^{y-x}) + (e^x e^y - e^{-x}e^{-y} - e^{x-y} + e^{y-x})}{4} \\
&= \frac{(e^x e^y - e^{-x}e^{-y} + e^x e^{-y} - e^y e^{-x}) + (e^x e^y - e^{-x}e^{-y} - e^x e^{-y} + e^y e^{-x})}{4} \\
&= \frac{[e^x(e^y + e^{-y}) - e^{-x}(e^y + e^{-y})] + [e^x(e^y - e^{-y}) + e^{-x}(e^y - e^{-y})]}{4} \\
&= \frac{[(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})] + [(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})]}{4} \\
&= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

$\square$

g) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\sinh(x)$

Prueba:

$$
\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x}e^{y}+2e^{-x}e^{-y}+0+0}{4} \\
&= \frac{2e^{x}e^{y}+2e^{-x}e^{-y}+(e^{x-y}-e^{x-y})+(e^{y-x}-e^{y-x})}{4} \\
&= \frac{(e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}+e^{x-y}+e^{y-x})+(e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}-e^{x-y}-e^{y-x})}{4} \\
&= \frac{(e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}+e^{x}e^{-y}+e^{y}e^{-x})+(e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}-e^{x}e^{-y}-e^{y}e^{-x})}{4} \\
&= \frac{[e^{x}(e^{y}+e^{-y})+e^{-x}(e^{y}+e^{-y})]+[e^{x}(e^{y}-e^{-y})-e^{-x}(e^{y}-e^{-y})]}{4} \\
&= \frac{[(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})]+[(e^{x}-e^{-x})(e^{y}-e^{-y})]}{4} \\
&= \frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})}{4}+\frac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}-e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \\
&= \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)
\end{aligned}
$$

□

17. ELIMINADO.

18. Evalua los límites usando la regla de L'Hôpital.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2}}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Como el límite se indetermina en $\dfrac{0}{0}$, comprobamos el límite de las derivadas para poder utilizar L'Hôpital:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = e^x - 1 - \frac{1}{2}\cdot 2x = e^x - 1 - x \qquad \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \frac{e^0 - 1 - 0}{2(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Dado que el límite de volvio a indeterminar en $\frac{0}{0}$, volvemos a probar el límite de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x) = e^x - 1 \qquad \frac{d}{dx}2x = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = \frac{e^0 - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Como el límite de las derivadas existe, podemos decir que el límite existe y que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{6}}{0^3} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Como el límite se indetermina en $\frac{0}{0}$, comprobamos el límite de las derivadas para poder utilizar L'Hôpital:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = e^x - 1 - \frac{1}{2}\cdot 2x - \frac{1}{6}\cdot 3x^2 = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \qquad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2}}{2(0)^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Dado que el límite de volvio a indeterminar en $\frac{0}{0}$, volvemos a probar el límite de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}) = e^x - 1 - x \qquad \frac{d}{dx}3x^2 = 6x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \frac{e^0 - 1 - 0}{6(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

De nuevo, el límite indeterminó en $\frac{0}{0}$, por lo que volvemos a probar el límite de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x) = e^x - 1 \qquad \frac{d}{dx}6x = 6$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6} = \frac{e^0 - 1}{6} = \frac{1-1}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

Como el límite de las derivadas existe, podemos decir que el límite existe y que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6} = 0$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2}}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Como el límite se indetermina en $\frac{0}{0}$, comprobamos el límite de las derivadas para poder utilizar L'Hôpital:

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}) = e^x - 1 - (\frac{1}{2} \cdot 2x) = e^x - 1 - x \qquad \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \frac{e^0 - 1 - 0}{2(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Dado que el límite de volvio a indeterminar en $\frac{0}{0}$, volvemos a probar el límite de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x) = e^x - 1 \qquad \frac{d}{dx}2x = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = \frac{e^0 - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Como el límite de las derivadas existe, podemos decir que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0$$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{\ln(1+0) - 0 - \frac{0^2}{2}}{0^2} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$$

Como el límite se indetermina en $\dfrac{0}{0}$, comprobamos el límite de las derivadas para poder utilizar L'Hôpital:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{1+x} - 1 - x \qquad \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 - x}{2x} = \frac{\frac{1}{1+0} - 1 - 0}{2(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Dado que el límite de volvio a indeterminar en $\dfrac{0}{0}$, volvemos a probar el límite de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x} - 1 - x\right) = -\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \qquad \frac{d}{dx}2x = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{(1+0)^2} - 1}{2} = \frac{-1-1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Como el límite de las derivadas existe, podemos decir que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 - x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{2} = -1$$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{\ln(1+0) - 0 - \frac{0^2}{2}}{0^3} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$$

Como el límite se indetermina en $\dfrac{0}{0}$, comprobamos el límite de las derivadas para poder utilizar L'Hôpital:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{1+x} - 1 - x \qquad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 - x}{3x^2} = \frac{\frac{1}{1+0} - 1 - 0}{3(0)^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Dado que el límite de volvio a indeterminar en $\frac{0}{0}$, volvemos a probar el límite de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}-1-x\right)=-\frac{1}{(1+x)^2}-1 \qquad \frac{d}{dx}3x^2=6x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-1}{6x}=\frac{-\frac{1}{(1+0)^2}-1}{6(0)}=\frac{-1-1}{0}\Rightarrow\!\Leftarrow$$

El límite de las derivadas no existe, por lo que no podemos usar L'Hôpital.

19. Sin usar la regla de L'Hôpital, hallar los siguientes límites.

a) $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$

Manipulando algebraicamente el límite tenemos que:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)+0}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)+\ln(1)}{y}$$

Que resulta corresponder con la definición de la derivada de $\ln(x)$ evaluada en 1. Sabemos que $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, así que la evaluamos en $x=1$: $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$.

Así entonces:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\ln'(1)=1$$

b) $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Proponemos un cambio de base tal que $y=1/x$, asi:

- $x=1/y$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$
- Por lo anterior: $x\to\infty\Rightarrow 1/x\to 0\Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$$

Por el inciso a sabemos que $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$, por lo que:

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$$

c) $e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Sabiendo que $e^{\ln(a)} = a$, manipulamos algebraicamente el límite con las propiedades del ln:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Como e es una función continua en todos los $\mathbb{R}$, el límite puede introducirse en la función:

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Por el inciso b sabemos que: $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$, así: $\quad e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$

Por lo tanto (Por transitividad): $\qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

d) $e^a = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

Analogo al anterior, manipulamos el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}$$

Proponemos un cambio de variable tal que $y = x/a$, así:

- $a/x = 1/y$
- $x = ay$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{a} = \infty$
- Por lo anteior $x \to \infty \Rightarrow \frac{x}{a} \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = \lim_{y\to\infty} e^{ay\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}$$

Como e es una función continua en todos los $\mathbb{R}$, el límite puede introducirse en la función:

$$\lim_{y\to\infty} e^{ay\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)} = e^{\lim\limits_{y\to\infty} ay\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)} = e^{a\lim\limits_{y\to\infty} y\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}$$

Por el inciso b sabemos que: $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$, así (sustituyendo x por y):

$$e^{a\lim\limits_{y\to\infty} y\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)} = e^{a\cdot 1} = e^a$$

Por lo tanto (Por transitividad): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$

20. Use el hecho que la población mundial en 1950 era de 2560 millones y 3040 millones en 1960 y un modelo de crecimiento poblacional, para responder las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativa?

Para calcularla primero obtendremos el modelo poblacional (Que nos rservirá para encontrar la solución y para los incisos posteriores).

Sabemos que:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = a \Longrightarrow \frac{dP(t)}{dt} = a\cdot P(t)$$

Con $P'(x)$ la tasa de crecimiento poblacional, $P(x)$ el tamaño poblacional y a la tasa de crecimiento relativa.

Sabemos también, por lo demostrado en clase, que: $\dfrac{dP(t)}{dt} = a\cdot P(t) \Longrightarrow P(t) = c\cdot e^{at}$

Buscamos la constrante c con el caso al que consideraremos $t=0$, que será la población de 1950: $2560 = P(0) = e^{0\cdot a}\cdot c = e^0\cdot c = c$, así tenemos: $P(t) = 2560\cdot e^{at}$

Ahora, para calcular a, usaremos el otro dato que tenemos, que es la población de 1960 (Como $t=0$ es la población de 1950, tendremos que tomar $t=10$) y despejaremos a:

$$3040 = P(10) = 2560\cdot e^{10a} \Longrightarrow 0 < e^{10a} = \frac{3040}{2560} = \frac{19}{16} > 0$$
$$\Longrightarrow \ln\left(e^{10a}\right) = \ln\left(\frac{19}{16}\right) \Longrightarrow 10a = \ln\left(\frac{19}{16}\right) \Longrightarrow a = \frac{\ln\left(\frac{19}{16}\right)}{10}$$

Así tenemos que nuestra fórmula será: (Con t en años y P en millones de persona)

$$P(t) = 2560\cdot e^{\frac{\ln(19/16)}{10}t}$$

Por lo que la tasa de crecimiento relativa será: $a = \dfrac{\ln\left(\frac{19}{16}\right)}{10}$

b) Use el modelo de crecimiento poblacional para estimar cuánta gente habrá en 2020.

Evaluamos la fórmula en $2020 - 1950 = 70$:

$$P(70) = 2560 \cdot e^{\frac{\ln(19/16)}{10}(70)} = 2560 \cdot e^{7\ln(19/16)} \approx 8524{,}62 \text{ millones de personas}$$

c) Indague y diga si ese número se acerca a la población actual. Cite la fuente.

La población actual es de 7750 millones, lo que significa que la diferencia entre el dato y lo obtenido por la fórmula es de 774 millones de personas

Fuente: https://www.worldometers.info/world-population/

21. La vida media del radio-226 es de 1590 años.

a) Una muestra e radio-226 tiene una masa de $100mg$. Encontrar una fórmula para la masa de la muestra que queda después de t años.

Conocemos la órmula del decaimiento radioactivo y sabemos que $\dfrac{dA(t)}{dt} = Ak \Longrightarrow A(t) = e^{kt} \cdot c$ (Demostrado en clase).

Como lo que buscamos es una función de $m(t)$ sustituimos A por m:

$$m(t) = e^{kt} \cdot c$$

Para encontrar nuestra constante, evaluamos la fórmula en un caso "base"dado por el problema: $m(0) = 100$:

$$100 = m(0) = e^{k \cdot 0} \cdot c \Longrightarrow 100 = e^0 \cdot c = 1 \cdot c = c \Longrightarrow c = 100$$

Ahora, para encontrar la constante de proporcionalidad evaluamos la fórmula en otro caso, el de la vida media del radio-226:

Como conocemos la vida media del elemento, la denotamos como: $m(1590) = 100/2 = 50$, evaluanto la fŕomula con lo anterior:

$$50 = m(1590) = 100 \cdot e^{k \cdot 1590} \Longrightarrow e^{k \cdot 1590} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Como $1/2 > 0$ y $e^{k \cdot 1590}$ también es siempre mayor a 0 (por la definicón de exponencial), podemos operar ln de ambos lados:

$$e^{k \cdot 1590} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \ln\left(e^{k \cdot 1590}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Usando las propiedades de los logaritmos...

$$\ln\left(e^{k\cdot 1590}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow k\cdot 1590 = \ln(2^{-1}) = -(1)\ln(2) \Longrightarrow k = -\frac{\ln(2)}{1590}$$

Así entonces nuestra fórmula para calcular la masa restante en función del tiempo es (Con t en años y m en mg):

$$m(t) = 100\cdot e^{-\frac{\ln(2)}{1590}t}$$

b) Diga cuál es la masa después de 1000 años, dé su resultado en mg.

Usando la fŕomula del inciso a evaluada en 1000 tenenmos que:

$$m(1000) = 100\cdot e^{-\frac{\ln(2)}{1590}(1000)} \approx 64{,}66$$

Así entonces, la masa despues de 1000 años sería $100\cdot e^{-\frac{1000\ln(2)}{1590}} \approx 64{,}66$ (Haciendo uso de calculadora con el único fin de dar un resultado más numérico).

c) En qué tiempo la masa de la muestra se reducirá a $30mg$.

Sustituimos en la fórmula del inciso $m = 30$ y despejamos t:

$$30 = 100\cdot e^{-\frac{\ln(2)}{1590}t} \Longrightarrow 0 < e^{-\frac{\ln(2)}{1590}t} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} > 0 \Longrightarrow \ln\left(e^{-\frac{\ln(2)}{1590}t}\right) = \ln\left(\frac{3}{10}\right)$$
$$\Longrightarrow -\frac{\ln(2)}{1590}t = \ln\left(\frac{3}{10}\right) \Longrightarrow \ln(2)t = -1590\cdot\ln\left(\frac{3}{10}\right) \Longrightarrow t = -\frac{1590\cdot\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{\ln(2)}$$

Entonces, el tiempo en el que la masa de la muestra se reducirá a $30mg$ es: $t = -\frac{1590\cdot\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{\ln(2)} \approx 2761{,}77$ años. (Haciendo uso de calculadora con el único fin de dar un resultado más numérico).