Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Legkisebb négyzetek módszere

Legkisebb négyzetek módszere

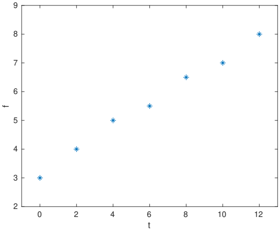
- Megfigyelünk egy folyamatot
- méréseket végzünk (melyek esetleg hibával terheltek)
- adott alakú modellek közül kiválasztjuk a mérésekre legjobban illeszkedőt

Példa

Egy fél méter magas, téglatest alakú víztartályt egyenletes sebességgel töltenek fel vízzel. Amikor a tartályban 3 cm magasan áll a víz Péter elhatározza, hogy megméri a vízszint változását az idő függvényében. A következő méréseket végezte:

t_i (min)	0	2	4	6	8	10	12
f_i (cm)	3	4	5	5.5	6.5	7	8

Becsülje meg milyen magasan lesz a víz 20 perccel azután, hogy Péter elindította a mérést! Mikor indították el a tartály feltöltését? Kb mikor lesz tele a tartály?



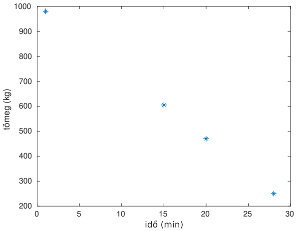
A modell: $F(t) = x_1 + x_2 t$

Példa

Egy ipari mérlegen egy nagyobb mennyiségű gabona van, amit valaki egyenletes sebességgel lapátol a mérlegről zsákokba. Miután elkezdte a munkát, időnként megnézzük mennyit mutat a mérleg. Az alábbi értékeket láttuk:

idő (min)	1	15	20	28
tömeg (kg)	980	605	470	250

Becsüljük meg mennyi ideig tart, amíg az összes gabonát zsákokba rakja, illetve eredetileg mennyi gabona volt a mérlegen.



A modell: $F(t) = x_1 + x_2 t$

Példa

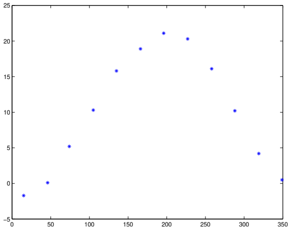
Havi középhőmérsékletek átlagai Budapesten (1901-1950)

t_i	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
f_i	-1.7	0.1	5.2	10.3	15.8	18.9	21.1	20.3	16.1	10.2	4.2	0.5

Illesszünk az adatokra

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos\left(2\pi \frac{t-14}{365}\right)$$

alakú modellt.



Legkisebb négyzetes közelítések

Adottak a
$t_1, t_2, \ldots, t_m$ időpillanatokban az
$f_1, f_2, \ldots, f_m$ megfigyelések.

A folyamatot leíró

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j(t)$$

modell paramétereit keressük úgy, hogy

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2$$

minimális legyen.

x_j: ismeretlen paraméterek ($j = 1, \ldots, n$)
$\varphi_j(t)$: adott függvények ($j = 1, \ldots, n$)

Példák a modellre:

1. $n = 2$ és $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$:

$$F(t) = x_1 + x_2 t$$

(egyenes illesztése)

2. $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$, ..., $\varphi_n(t) = t^{n-1}$:

$$F(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1}$$

(polinomiális modell)

3. $n = 3$ és $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = \sin(\pi t)$, $\varphi_3(t) = \cos(\pi t)$:

$$F(t) = x_1 + x_2 \sin(\pi t) + x_3 \cos(\pi t)$$

(trigonometrikus modell)

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) & \dots & \varphi_n(t_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

Ekkor

$$Ax = \begin{pmatrix} F(t_1) \\ F(t_2) \\ \vdots \\ F(t_m) \end{pmatrix}$$

A minimalizálandó függvény:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (F(t_i) - f_i)^2 = \|Ax - f\|_2^2$$

Minimum csak ott lehet, ahol

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ez az alábbi lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$A^T A x = A^T f$$

(**Gauss-féle normálegyenlet**)

Gauss-féle normálegyenlet

$$A^T A x = A^T f$$

- **a Gauss-féle normálegyenlet mindig megoldható**
- **A megoldás a legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő modell paramétereit adja.**
- **Ha az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor a Gauss-féle normálegyenletnek egyetlen megoldása van.**

  Ha az A oszlopvektorai függőek (az $A^T A$ mátrix szinguláris), akkor végtelen sok megoldás van.

  Szingularitás esetén javasolható:
  - több adat felvétele
  - a modell egyszerűsítése

Példa

Egyenes illesztése: $F(t) = x_1 + x_2 t$, akkor $\varphi_1(t) \equiv 1$ és $\varphi_2(t) = t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_m \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \end{pmatrix}, \qquad A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i f_i \end{pmatrix}$$

szingularitás: az A oszlopvektorai lineárisan függőek, azaz

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_m$$

Példa

Polinom illesztése: $F(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1}$

azaz $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = t$, ..., $\varphi_n(t) = t^{n-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_m & t_m^2 & \dots & t_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^m t_i^{n-1} \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^m t_i^n \\ \sum_{i=1}^m t_i^2 & \sum_{i=1}^m t_i^3 & \dots & \dots & \\ \vdots & & & & \\ \sum_{i=1}^m t_i^{n-1} & & & \dots & \sum_{i=1}^m t_i^{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$A^T f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_i t_i \\ \sum_{i=1}^{m} f_i t_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} f_i t_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

a feladat egyértelműen megoldható, ha a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ értékek között legalább n különböző van

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

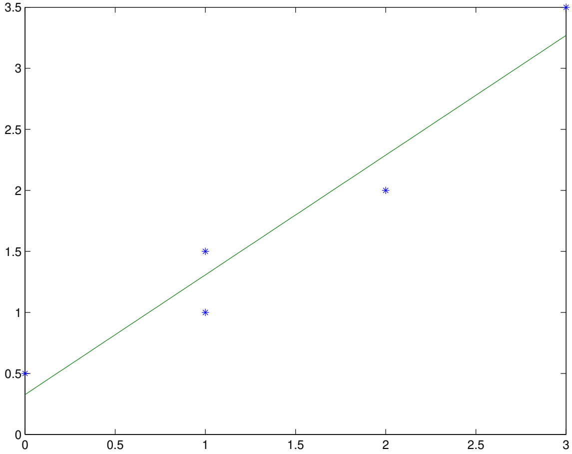
t_i	0	1	1	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{2}$

A modell: $F(t) = x_1 + x_2 \cdot t$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{52} \\ \frac{51}{52} \end{pmatrix}$$

Az illesztett modell: $F(t) = \frac{17}{52} + \frac{51}{52} t$


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	2	2	2	2	2
f_i	1	1	2	2	2

A modell: $F(t) = x_1 + x_2 \cdot t$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$5x_1 + 10x_2 = 8$$

$$x_2 = s \in \mathbb{R}, \qquad x_1 = \frac{8}{5} - 2s$$

Ha $s = 0$, akkor $F(t) \equiv \frac{8}{5}$

Legkisebb négyzetes közelítések Octave/Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest!

t_i	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
f_i	8	8.9	9	9.8	10	11	11.5	11.5	12.5	13	13.7	14

Megoldás. Használjuk a `polyfit` függvényt!

```
p=polyfit(t,f,m)
```

megadja a (t_i, f_i) adatokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb m-edfokú polinom együtthatóit a főegyütthatóval kezdve.

```
>> t=[1 1.1 1.1:0.1:2];
>> f=[8 8.9 9 9.8 10 11 11.5 11.5 12.5 13 13.7 14];
>> p=polyfit(t,f,1)
p=
  5.8235     2.5338
```

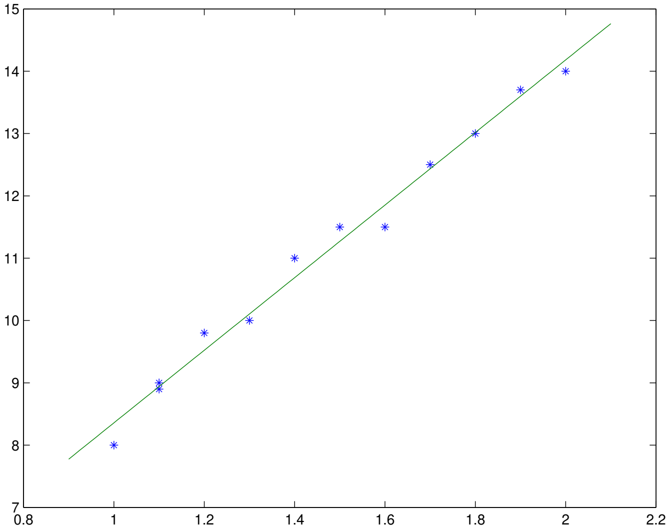
A keresett egyenes egyenlete:

$$f(t) = 5.8235t + 2.5338$$

Ha ábrázolni szeretnénk az adatokat és az illesztett egyenest:

```
>> xx=linspace(0.9,2.1);
>> yy=polyval(p,xx);
>> figure; plot(t,f,'*',xx,yy)
```

A `polyval` függvény a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx`-ben adott helyeken.


15
14
13
12
11
10
9
8
7
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2

1. feladat

Egy fél méter magas, téglatest alakú víztartályt egyenletes sebességgel töltenek fel vízzel. Amikor a tartályban 3 cm magasan áll a víz Péter elhatározza, hogy megméri a vízszint változását az idő függvényében. A következő méréseket végezte:

t_i (min)	0	2	4	6	8	10	12
f_i (cm)	3	4	5	5.5	6.5	7	8

Becsülje meg milyen magasan lesz a víz 20 perccel azután, hogy Péter elindította a mérést! Mikor indították el a tartály feltöltését? Kb mikor lesz tele a tartály?

2. feladat

Egy ipari mérlegen egy nagyobb mennyiségű gabona van, amit valaki egyenletes sebességgel lapátol a mérlegről zsákokba. Miután elkezdte a munkát, időnként megnézzük mennyit mutat a mérleg. Az alábbi értékeket láttuk:

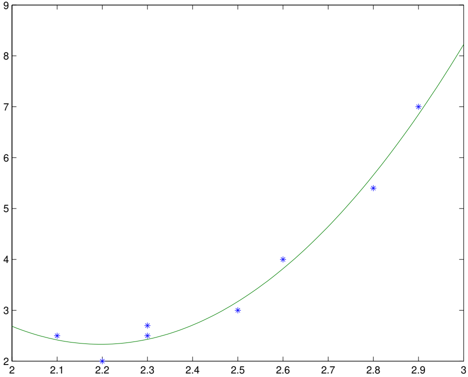
idő (min)	1	15	20	28
tömeg (kg)	980	605	470	250

Becsüljük meg mennyi ideig tart, amíg az összes gabonát zsákokba rakja, illetve eredetileg mennyi gabona volt a mérlegen.

3. feladat

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő másodfokú polinomot!

t_i	2.1	2.2	2.3	2.3	2.5	2.6	2.8	2.9
f_i	2.5	2	2.5	2.7	3	4	5.4	7



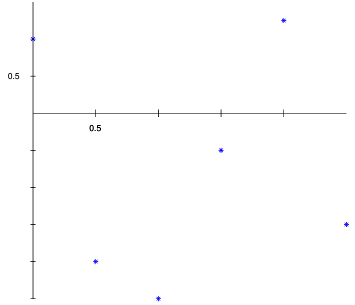
Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modellt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
f_i	1	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$



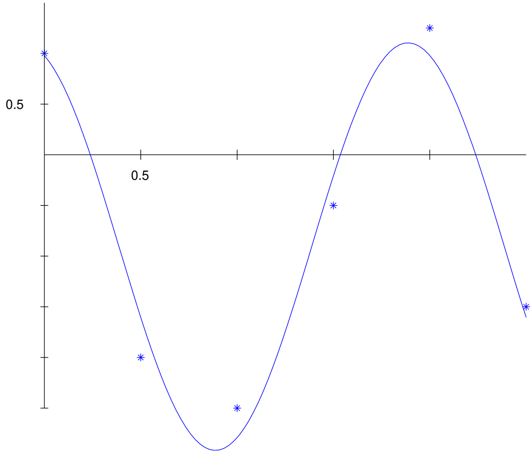
$\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = \cos(\pi t)$, $\varphi_3(t) = \sin(\pi t)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & & \\ 1 & \cos(\pi t_6) & \sin(\pi t_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^T f = \begin{pmatrix} -\frac{17}{4} \\ \frac{19}{4} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Az $A^T A x = A^T f$ Gauss-féle normálegyenlet megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{29}{32} \\ \frac{181}{96} \\ -\frac{67}{96} \end{pmatrix}$$



0.5
0.5

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modellt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
f_i	1	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Az A oszlopai lineárisan függőek $\to$ $A^T A$ szinguláris

A szingularitás kezelése:
1. több adat felvétele (ld. előző példa)
2. a modell egyszerűsítése:

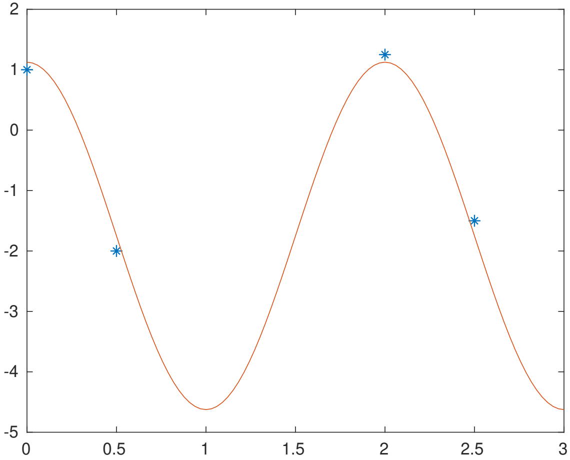
$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t)$$

Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Az $A^T A x = A^T f$ Gauss-féle normálegyenlet megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} -1.7500 \\ 2.8750 \end{pmatrix}$$


2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Legkisebb négyzetes közelítések Octave/Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	3.9	2.6	-0.8	0.3	3.2	3.8	3.2	-0.7	-0.9

Megoldás. A paramétereket az

$$A^T A x = A^T f$$

Gauss-féle normálegyenlet megoldása szolgáltatja.

$$A^T A x = A^T f$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & & \\ 1 & \cos(\pi t_9) & \sin(\pi t_9) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Állítsuk elő a megadott adatokból az A mátrixot:

```
>> t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';
>> f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';
>> A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
```

Ügyeljünk rá, hogy a t és az f oszlopvektor legyen!

Oldjuk meg a normálegyenletet!

```
>> x=(A'*A)\(A'*f)
x =

    1.4372
    2.0310
    1.1711
```

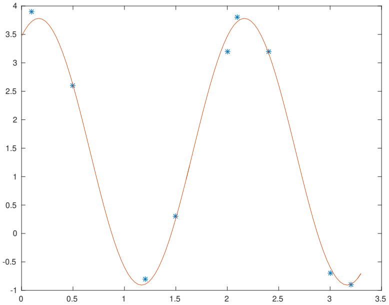
A legjobban illeszkedő adott alakú modell tehát:

$$F(t) = 1.4372 + 2.0310\cos(\pi t) + 1.1711\sin(\pi t)$$

Ábrázoljuk az adatokat és az illesztett modellt!

```
>> xx=linspace(0,3.3);
>> yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
>> figure; plot(t,f,'*',xx,yy)
```

```
t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';
f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';
A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
x=(A'*A)\(A'*f);
xx=linspace(0,3.3);
yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
figure; plot(t,f,'*',xx,yy)
```



Feladatok

(4) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2
f_i	6.2	7	8	7.9	8.4	9.2	10	10.6

(5) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő harmadfokú polinomot!

t_i	0.5	0.8	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
f_i	2.5	2.3	1.8	1.3	0.9	0.4	0.1	-0.05	-0.01

(6) Határozza meg az alábbi adatokat legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + \frac{x_2}{t}$$

alakú modell paramétereit!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2	2.1	2.2
f_i	4.2	3.8	3.4	3.3	3.3	3	2.8	2.8	2.75	2.7

Feladatok

(7) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 \sin(t) + x_2 \sin(2t) + x_3 \sin(3t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2	3.4	3.8	4	4.2	4.6	5
f_i	1	4.1	3	1	-1.5	-1.6	-1.7	-0.4	0.1	0.7	1.6	1.8	1.6	0.2	-2.5

(8) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 ln(t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	-0.6	1.5	2.5	2.9	3.2	3.3	3.5	3.8	3.9

Feladatok

(9) Havi középhőmérsékletek átlagai Budapesten (1901-1950)

t_i	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
f_i	-1.7	0.1	5.2	10.3	15.8	18.9	21.1	20.3	16.1	10.2	4.2	0.5

Határozzuk meg az adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos\left(2\pi \frac{t-14}{365}\right)$$

alakú modell paramétereit.

Feladatok

(10) Határozza meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenes egyenletét.

t_1	0	1	2	3
f_i	0.5	1.5	2	3

(11) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	0	1	1	2	3
f_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

Feladatok

(12) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + \frac{x_2}{t}$$

alakú függvényt!

t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
f_i	8	6	4	$\frac{5}{2}$

(13) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cdot \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

alakú függvényt!

t_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
f_i	$\frac{1}{2}$	1	1	0

Nemlineáris legkisebb négyzetek

Amikor a modell a paramétereknek nem lineáris függvénye.

Példa

Havi középhőmérsékletek átlagai Budapesten (1901-1950)

t_i	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
f_i	-1.7	0.1	5.2	10.3	15.8	18.9	21.1	20.3	16.1	10.2	4.2	0.5

Határozzuk meg az adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos\left(2\pi \frac{t - x_3}{365}\right)$$

alakú modell paramétereit.

Oldjuk meg a Matlab `lsqnonlin` függvényét használva.

Ha

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

akkor `xopt=lsqnonlin(g,x0)`
meghatározza azt a paramétervektort, mellyel

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2$$

minimális.
Így

$$g(x) = \begin{pmatrix} F(t_1) - f_1 \\ \vdots \\ F(t_m) - f_m \end{pmatrix}$$

választással éppen a kívánt négyzetösszeget minimalizálhatjuk.

Az `lsqnonlin` függvény argumentumában az g-nek ú.n. function handle típusú változónak kell lennie. Ilyen függvényeket a következő módon adhatunk meg (akár parancssorban is), pl.:

```
g=@(x) x(1)^2+x(2)^3-1;
```

ami az $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3 - 1$ függvény definiálja. Hívása, pl.: `g([-1,2])`

Az `lsqnonlin` a legkisebb négyzetes feladat megoldását egy iterációval közelíti, így kezdőértékre is szüksége van, ez kerül az `x0` vektorba

Írjunk egy függvényt, mely az $F(t)$ modell értékét számolja adott x paramétervektor és $t = (t_1, \ldots, t_m)$ vektor esetén.

```
function y=Ffv(x,t)
   y=x(1)+x(2)*cos(2*pi*(t-x(3))/365);
end
```

Ezután végezzük el az optimalizálást:

```
t=[15 46 74 105 135 166 196 227 258 288 319 349];
f=[-1.7 0.1 5.2 10.3 15.8 18.9 21.1 20.3 16.1 10.2 4.2 0.5];
g=@(x) Ffv(x,t)-f;
x0=[1 1 14];
xopt=lsqnonlin(g,x0)
```

Eredményül az `xopt=[10.1251, -11.2576, 14.2783]` vektort kapjuk.

Ábrázoljuk a mérési eredményeket és az illesztett függvényt!

```
figure; plot(t,f,'*')
tt=linspace(0,365);
hold on; plot(tt,Ffv(xopt,tt))
```