Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Normák, kondíciószámok

Példa

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. feladat

Írjon egy Matlab/Octave függvényt, mely adott n pozitív egész szám esetén előállítja azt az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, melyre

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

teljesül.

2. feladat

Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100\times100}$ mátrixot illetve $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a `backslash` operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert. Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Mit tapasztal?

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad b = (-98, -97, \ldots, 0, 1)^T.$$

Normák, kondíciószámok

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott.

Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

A kérdés: mekkora lehet $y - x$?

vektorokat kell mérnünk $\rightarrow$ normák

Norma

Legyen X egy lineáris tér $\mathbb{R}$ felett. Az $d : X \to \mathbb{R}$ leképezés **norma**, ha

1. $d(x) \geq 0$ minden $x \in X$ esetén
2. $d(x) = 0 \iff x = 0$
3. $d(\lambda x) = |\lambda| d(x)$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x \in X$ esetén
4. $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ minden $x, y \in X$ esetén (háromszög-egyenlőtlenség)

A továbbiakban $d(x)$ helyett $\|x\|$

Példák:

Legyen $X = \mathbb{R}^n$

1. Az 1-norma, vagy oktaéder norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. A 2-norma, vagy euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3. A ∞-norma, vagy maximum norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Általánosan:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ahol $p \geq 1$.

Példa.

Ha

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

akkor
$\|x\|_1 = |-3| + |0| + |1| = 4$
$\|x\|_2 = \left(|-3|^2 + |0|^2 + |1|^2\right)^{1/2} = \sqrt{10}$
$\|x\|_\infty = \max\{|-3|, |0|, |1|\} = 3$

3. feladat

Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben azokat az $x \in \mathbb{R}^2$ vektorokat, melyekre $\|x\| = 1$ teljesül $1-$, $2-$, illetve $\infty-$normában. Oldja meg a feladatot $x \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén is.

4. feladat

Írjon 1-1 Octave/Matlab függvényt az $1-, 2-, \infty-$vektornormák számítására.

5. feladat

Számítsa ki a 2. feladatban adott b és x vektorok $\infty-$normáját az eredeti és a perturbált rendszer esetén is.

6. feladat

Olvassa el a `norm` függvény help-jét.

Indukált mátrixnorma

Legyen $\|\cdot\|$ egy vektornorma $\mathbb{R}^n$-en és $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrix. Ekkor

$$d(A) := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

a **vektornorma által indukált mátrixnorma**.

Megjegyzés. Ez tényleg normát definiál $\mathbb{R}^{n\times n}$-en:

1. $d(A) \geq 0$ minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re
2. $d(A) = 0 \iff A = 0$
3. $d(\lambda A) = |\lambda| d(A)$
4. $d(A + B) = d(A) + d(B)$

A továbbiakban $d(A)$ helyett $\|A\|$

Az indukált mátrixnormák tulajdonságai

(1) $\|E\| = 1$

(2) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

(3) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ minden $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

Megjegyzés

Az indukált mátrixnormát definiálhattuk volna úgy is, hogy a legkisebb olyan M szám, melyre

$$\|Ax\| \leq M \cdot \|x\| \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén}$$

teljesül.

Milyen mátrixnormát indukálnak az általunk megismert vektornormák?

1. Az 1-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(oszlopnorma)}$$

2. A ∞-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(sornorma)}$$

3. A 2-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \qquad \text{(spektrálnorma)}$$

ahol $\lambda_{\max}(A^T A)$ az $A^T A$ mátrix legnagyobb sajátértéke

Példa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \|A\|_1 = ? \quad \|A\|_\infty = ?$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 7 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 2 & 8 \end{array} & \end{array}$$

$\|A\|_1 = 8$ és $\|A\|_\infty = 7$

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \|A\|_2 = ?$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

az $A^T A$ mátrix sajátértékei:

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & -7 \\ -7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(5-\lambda) - 49 = \lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 64}}{2} = 9 \pm \sqrt{65}$$

$\|A\|_2 = \sqrt{9 + \sqrt{65}} \approx 4.13$

7. feladat

Írjon 1-1 Matlab/Octave függvényt az $1-$ és $\infty-$mátrixnormák számítására.

8. feladat

Olvassa el a `normest` függvény help-jét.

9. feladat (szorgalmi)

Próbálja megbecsülni egy mátrix normáját olyan módon, hogy véletlen x vektorokat generálva képezze a $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ hányadosokat, majd vegye ezek maximumát.

A kondíciószám

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott. Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

vagy

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\underline{Ax} + A \cdot \delta x = \underline{b} + \delta b$$

$$A \cdot \delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1} \delta b$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1} \delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Másrészt: $Ax = b$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|}$$

Így

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{cond(A):=} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

Megjegyzés

A fenti egyenlőtlenség éles.

Kondíciószám

Legyen A egy invertálható mátrix. A

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

számot a mátrix **kondíciószám**ának nevezzük.

A kondíciószám tulajdonságai

(1) függ a mátrixnormától

(2) $cond(A) \geq 1$

(3) ha $A = Q$ ortogonális mátrix (azaz $Q^T Q = E$), akkor $cond_2(A) = 1$

(4)
$$\left|\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right| \leq cond(A)$$

ahol $\lambda_{\max}$ és $\lambda_{\min}$ az A absz.értékben legnagyobb és legkisebb sajátértéke

Megjegyzés

A kondíciószám felső becslést ad arra, hogy hibás jobboldallal adott lin. egy.rendszer esetén a megoldás relatív hibája a jobboldal relatív hibájának hányszorosa lehet.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}, \quad cond_\infty(A) = ?$$

Ekkor $\det(A) = 10^{-4}$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10001 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 2.0001$ és $\|A^{-1}\|_\infty = 20001$, azaz

$cond_\infty(A) = 2.0001 \cdot 20001 \approx 40000.$

Az A mátrix a jobboldal relatív hibájának kb 40000-szeresére tudja növelni a megoldás relatív hibáját.

Megjegyzés

A kondíciószám nem függ a determinánstól: legyen $0 \neq c \in \mathbb{R}$, ekkor $\det(cA) = c^n \det(A)$, ugyanakkor $cond(cA) = cond(A)$.

10. feladat

Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mátrixot illetve $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a `backslash` operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad b = (-98, -97, \ldots, 0, 1)^T.$$

Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Számítsa ki az A kondíciószámát, továbbá az x, illetve a b vektor relatív hibáját ∞-normában.

11. feladat

Oldja meg Octave/Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy b helyett

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}$$

ismert. Oldja meg az $Ay = b + \delta b$ egyenletrendszert is. Számítsa ki a megoldásvektor, illetve a jobboldali vektor relatív hibáját ∞-normában. Határozza meg $cond_\infty(A)$ értékét!

Példa (Hilbert-mátrix)

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

12. feladat

Számítsa ki a 6×6-os Hilbert-mátrix kondíciószámát! (Használja a `cond` és `hilb` beépített függvényeket!) Legyen B egy 6×6-os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciószámát is (végezzen több kísérletet)!

Megjegyzés

Nagy mátrixok esetén a `cond` függvény helyett használjuk a `condest` függvényt, amely az $1-$normában vett kondíciószám becslését adja (anélkül, hogy kiszámítaná A^{-1}-et.)

Legyen b relatív hibája $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \approx \varepsilon_1$ (inputhiba nagyságrendű).
Ekkor ha

$$cond(A) \geq \frac{1}{\varepsilon_1}$$

akkor

$$cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \geq 1$$

azaz a megoldásra rakódó hiba ugyanakkora lehet, mint maga a megoldás.
Az egyenletrendszer **rosszul kondícionált**.

Ahhoz, hogy a megoldásnak legalább 1 helyes számjegye legyen

$$cond(A) \leq \frac{1}{a\varepsilon_1}$$

kell, mert ekkor

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{a}$$

Példa

Legyen A egy szürkeskálás kép, $x = A(:)$.
D: egy torzítási mátrix, a főátlójában $\frac{1}{6}$-ok, az $5-5$ szomszédos mellékátlóban $\frac{1}{12}$-ek. $cond_1(D) \approx 10^9$.
$y_1 = Dx$ a torzított kép
$y_2 = y_1 +$ egy 0 várható értékű 0.01 szórású normális zaj.

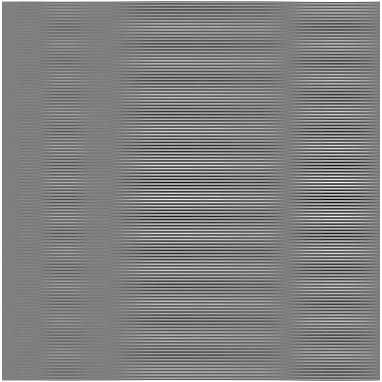
Az eredeti kép

A torzított kép

Torzítás + zaj

A helyreállított képek

$x = D\backslash y_1$



$x = D\backslash y_2$