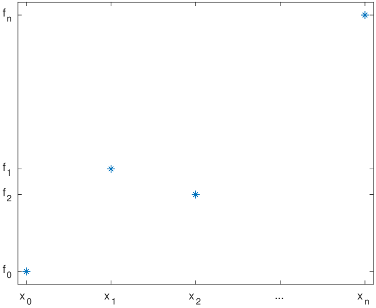
Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Interpoláció

Lagrange-interpoláció

Adottak az
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző pontokban az
$f_0, f_1, \ldots, f_n$ megfigyelések.

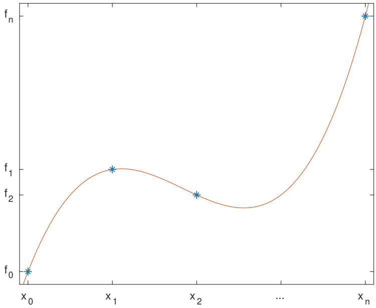


Lagrange-interpoláció

Adottak az

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző pontokban az

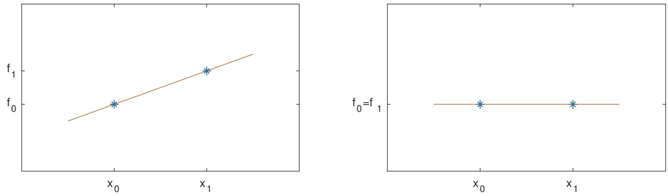
$f_0, f_1, \ldots, f_n$ megfigyelések.



Olyan minimális fokszámú $\varphi(x)$ polinomot keresünk melyre

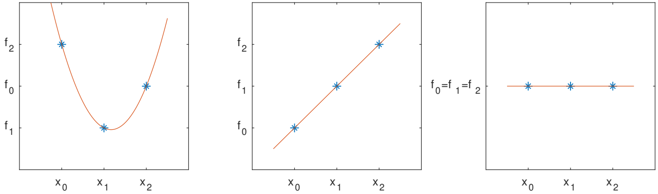
$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Ha két pont adott:



$\Longrightarrow$ legfeljebb elsőfokú polinom

Ha három pont adott:



$\Longrightarrow$ legfeljebb másodfokú polinom

A feladat:

Adottak az

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző pontokban az

$f_0, f_1, \ldots, f_n$ megfigyelések.

Olyan minimális fokszámú $\varphi(x)$ polinomot keresünk melyre

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Állítás

Egyértelműen létezik olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amely teljesíti a

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

illeszkedési feltételeket.

($n + 1$ **alappont** $\implies$ **legfeljebb** n**-edfokú polinom**)

A polinom konstrukciója

Legyen

$$\ell_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$

A polinom konstrukciója

Legyen

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

azaz

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i = 0,\ldots,n$$

Ekkor $\ell_i(x)$ egy n-edfokú polinom és

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq i, \\ 1, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

Legyen

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x)$$

Ekkor $\varphi(x)$ legfeljebb n-edfokú, és

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x_k) = f_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

azaz $\varphi(x)$ eleget tesz a követelményeknek.

Egyértelműség

Tfh $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ legfeljebb n-edfokú polinomok, melyek teljesítik az illeszkedési feltételeket:

$$\varphi(x_i) = f_i \quad \text{és } \psi(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Legyen $\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$

Ekkor Φ legfeljebb n-edfokú, és minden alappontban eltűnik
$\rightarrow$ a $\Phi(x)$ polinomnak legalább $n+1$ különböző gyöke van
$\rightarrow \quad \Phi(x) \equiv 0$

A Lagrange-polinom rekurzív előállítása (Newton-alak)

Jelölje $L_k(x)$ az (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k) adatokra illeszkedő Lagrange-polinomot.

- ha csak 1 adat ismert, (x_0, f_0):

  $L_0(x) \equiv f_0$

- ha 2 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1):

  $L_1(x) = L_0(x) + b_1(x - x_0)$

  Ekkor $L_1(x_0) = L_0(x_0) = f_0$. Ezután b_1-et úgy határozzuk meg, hogy $L_1(x_1) = f_1$ teljesüljön:

$$L_1(x_1) = f_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- ha 3 adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2):

  $L_2(x) = L_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

  Ekkor
  $L_2(x_0) = L_1(x_0) = f_0$ és
  $L_2(x_1) = L_1(x_1) = f_1$.

  b_2-t úgy határozzuk meg, hogy $L_2(x_2) = f_2$ teljesüljön:

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right)$$

- Ha $k+1$ adat ismert, (x_0, f_0), (x_1, f_1),..., (x_k, f_k):

  $L_k(x) = L_{k-1}(x) + b_k\omega_k(x)$,

  ahol $\omega_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$.

Ekkor
$L_k(x_0) = L_{k-1}(x_0) = f_0$,
$L_k(x_1) = L_{k-1}(x_1) = f_1$,
$\vdots$
$L_k(x_{k-1}) = L_{k-1}(x_{k-1}) = f_{k-1}$.

b_k-t úgy határozzuk meg, hogy $L_k(x_k) = f_k$ teljesüljön:

$$b_k = (f_k - L_{k-1}(x_k))/\omega_k(x_k)$$

Hogyan lehet egyszerűen előállítani a b_k együtthatókat?

Osztott differenciák

Tfh adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző alappontok és az $f_0, f_1, \ldots, f_n$ értékek.
Az x_i, x_{i+1} pontokra támaszkodó elsőrendű osztott differencia:

$$[x_i, x_{i+1}]f := \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Az $x_i, \ldots, x_{i+k}$ pontokra támaszkodó k-adrendű osztott differencia:

$$[x_i, \ldots, x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}$$

Legyen $[x_i]f = f_i$.

Állítás: A Lagrange-polinom Newton-alakjában

$$b_k = [x_0, \ldots, x_k]f$$

Számítási séma

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 & [x_0]f \searrow & & & & & & \\
 & & [x_0,x_1]f \searrow & & & & & \\
x_1 & [x_1]f \nearrow & & [x_0,x_1,x_2]f \searrow & & & & \\
 & \searrow & [x_1,x_2]f \nearrow & & \dots & & & \\
\vdots & & \vdots & & & \searrow & & \\
\vdots & & \vdots & & & & [x_0,\dots,x_n]f & \\
\vdots & & \vdots & & \dots \nearrow & & & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f \searrow & & & & & & \\
 & & [x_{n-1},x_n]f \nearrow & & & & & \\
x_n & [x_n]f \nearrow & & & & & &
\end{array}
$$

A Lagrange-polinom Newton-alakja

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
x_0 & [x_0]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_0,x_1]f & \searrow & & & & & \\
x_1 & [x_1]f & \nearrow & & & [x_0,x_1,x_2]f & \searrow & & & \\
 & & \searrow & [x_1,x_2]f & \nearrow & & & \dots & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \searrow & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & [x_0,\dots,x_n]f \\
\vdots & & \vdots & & & & & \dots & \nearrow & \\
x_{n-1} & [x_{n-1}]f & \searrow & & & & & & & \\
 & & & [x_{n-1},x_n]f & \nearrow & & & & & \\
x_n & [x_n]f & \nearrow & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L_n(x) = {} & [x_0]f + [x_0,x_1]f \cdot (x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f \cdot (x-x_0)(x-x_1) \\
& + \dots + [x_0,\dots,x_n]f \cdot (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$\begin{array}{r|r} -2 & -31 \\ & \\ -1 & -7 \\ & \\ 0 & -1 \\ & \\ 2 & 5 \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rl}
-2 & -31 & \\
 & & \frac{-7-(-31)}{-1-(-2)} = 24 \\
-1 & -7 & \\
 & & \frac{-1-(-7)}{0-(-1)} = 6 \\
0 & -1 & \\
 & & \frac{5-(-1)}{2-0} = 3 \\
2 & 5 &
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|r}
-2 & -31 \\
 & & \frac{-7-(-31)}{-1-(-2)} = 24 \\
-1 & -7 & & \frac{6-24}{0-(-2)} = -9 \\
 & & \frac{-1-(-7)}{0-(-1)} = 6 \\
0 & -1 & & \frac{3-6}{2-(-1)} = -1 \\
 & & \frac{5-(-1)}{2-0} = 3 \\
2 & 5
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rlll}
-2 & -31 & & & \\
 & & \frac{-7-(-31)}{-1-(-2)} = 24 & & \\
-1 & -7 & & \frac{6-24}{0-(-2)} = -9 & \\
 & & \frac{-1-(-7)}{0-(-1)} = 6 & & \frac{-1-(-9)}{2-(-2)} = 2 \\
0 & -1 & & \frac{3-6}{2-(-1)} = -1 & \\
 & & \frac{5-(-1)}{2-0} = 3 & & \\
2 & 5 & & &
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-31),(-1,-7),(0,-1),(2,5)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|cccc}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & 2 \\
0 & -1 & & -1 & \\
 & & 3 & & \\
2 & 5 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -31 + 24(x+2) - 9(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megjegyzés

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó "élét" is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -31 & & & \\
 & & 24 & & \\
-1 & -7 & & -9 & \\
 & & 6 & & \color{red}{2} \\
0 & -1 & & \color{red}{-1} & \\
 & & \color{red}{3} & & \\
2 & \color{red}{5} & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = \color{red}{5} + \color{red}{3}(x-2)\color{red}{-1} \cdot (x-2)x + \color{red}{2}(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$\begin{array}{r|r} -2 & -5 \\ \\ -1 & 3 \\ \\ 1 & -5 \\ \\ 2 & -9 \end{array}$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rl}
-2 & -5 & \\
 & & \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 \\
-1 & 3 & \\
 & & \frac{-5-3}{1-(-1)} = -4 \\
1 & -5 & \\
 & & \frac{-9-(-5)}{2-1} = -4 \\
2 & -9 &
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rll}
-2 & -5 & & \\
 & & \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 & \\
-1 & 3 & & \frac{-4-8}{1-(-2)} = -4 \\
 & & \frac{-5-3}{1-(-1)} = -4 & \\
1 & -5 & & \frac{-4-(-4)}{2-(-1)} = 0 \\
 & & \frac{-9-(-5)}{2-1} = -4 & \\
2 & -9 & &
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rccc}
-2 & -5 & & & \\
 & & \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 & & \\
-1 & 3 & & \frac{-4-8}{1-(-2)} = -4 & \\
 & & \frac{-5-3}{1-(-1)} = -4 & & \frac{0-(-4)}{2-(-2)} = 1 \\
1 & -5 & & \frac{-4-(-4)}{2-(-1)} = 0 & \\
 & & \frac{-9-(-5)}{2-1} = -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}
$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(1,-5),(2,-9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 4(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x-1)$$

Példa

Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző adatokon kívül a $(0, 9)$ pontra is illeszkedik!

Használjuk fel az előző feladat eredményét!

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -4 & \\
 & & -4 & & 1 \\
1 & -5 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
2 & -9 & & &
\end{array}$$

Egészítsük ki a táblázatot az új adattal és számítsuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & -5 & & & & \\
 & & 8 & & & \\
-1 & 3 & & -4 & & \\
 & & -4 & & 1 & \\
1 & -5 & & 0 & & 2 \\
 & & -4 & & 5 & \\
2 & -9 & & 5 & & \\
 & & -9 & & & \\
0 & 9 & & & &
\end{array}
$$

$$L_4(x) = L_3(x) + 2(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

1. feladat

Írja fel az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a) $(-3,-6)$, $(-2,-17)$, $(-1,-8)$, $(1,-2)$, $(2,19)$,

(b) $(-3,-31)$, $(-2,-8)$, $(1,1)$, $(2,24)$,

(c) $(-2,-13)$, $(-1,-4)$, $(1,2)$,

(d) $(-2,-5)$, $(-1,3)$, $(0,1)$, $(2,15)$,

(e) $(-1,4)$, $(1,2)$, $(2,10)$, $(3,40)$,

(f) $(-2,38)$, $(-1,5)$, $(1,-1)$, $(2,-10)$, $(3,-7)$,

(g) $(-2,-33)$, $(-1,-2)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,-18)$,

(h) $(-3,-209)$, $(-2,-43)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(2,-19)$.

Horner-algoritmus

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x^\star \in \mathbb{R}$ adott, $p(x^\star) =?$

$$p(x^\star) = (((\cdots(a_n x^\star + a_{n-1})x^\star + \cdots)x^\star + a_2)x^\star + a_1)x^\star + a_0$$

Az algoritmus:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_n \\
c_1 &= c_0 x^\star + a_{n-1} \\
c_2 &= c_1 x^\star + a_{n-2} \\
&\vdots \\
c_n &= c_{n-1} x^\star + a_0 = p(x^\star)
\end{aligned}$$

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x^\star$	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n

$p(x^\star) = c_n$

Példa

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \qquad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x^\star$	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n

$p(x^\star) = c_n$

Példa

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \qquad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

$p(-2) = -39$

Általánosított Horner-algoritmus

$$\begin{aligned} L_n(x) = & b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \cdots + b_n \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

ahol $b_k = [x_0, \ldots, x_k]f$. $L_n(x^\star) = ?$

$$\begin{aligned} c_0 &= b_n \\ c_1 &= c_0(x^\star - x_{n-1}) + b_{n-1} \\ c_2 &= c_1(x^\star - x_{n-2}) + b_{n-2} \\ &\vdots \\ c_n &= c_{n-1}(x^\star - x_0) + b_0 = L_n(x^\star) \end{aligned}$$

Megjegyzés

Ha nincs szükségünk a Lagrange-polinom együtthatóira, csak bizonyos helyeken a polinom értékeire, akkor nem érdemes a Newton-alakban kibontani a zárójeleket.

Lagrange-interpoláció Octave/Matlab-bal

A `polyfit` függvény

`polyfit(x,f,n-1)` Ha x és f n-elemű vektorok, akkor megadja annak a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomnak az együtthatóit, amely illeszkedik az (x_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$ adatokra.

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5), (-1,3), (0,1), (2,15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás.

```
>>x=[-2, -1, 0, 2];
>>f=[-5, 3, 1, 15];
>>p=polyfit(x,f,3)
p=
   2.0000 1.0000 -3.0000 1.0000
```

Ábrázoljuk a pontokat és az illesztett függvényt!

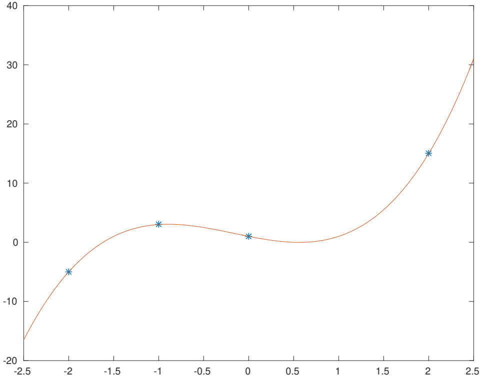
```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```

A `polyval` függvény:

`yy=polyval(p,xx);`

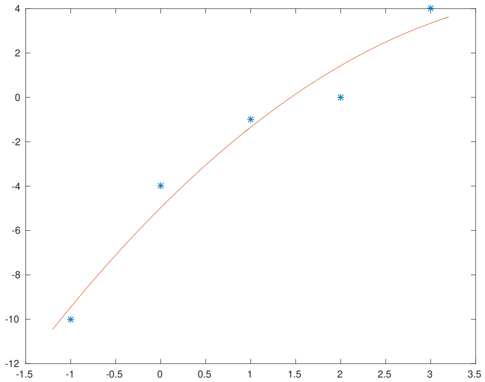
a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx` vektor koordinátáiban.
(p-ben a polinom együtthatói a főegyütthatóval kezdve szerepelnek)

```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```



Fontos! Ha a `polyfit` függvényben nem megfelelően írjuk elő a polinom fokszámát, akkor a polinom nem feltétlenül illeszkedik az adatokra.

```
x=[-1 0 1 2 3]; f=[-10 -4 -1 0 4]; p=polyfit(x,f,2);
xx=linspace(-1.2,3.2); ff=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,ff)
```



Megjegyzés

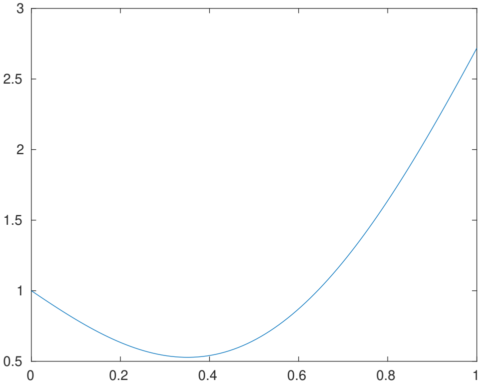
- A `polyfit` függvény harmadik argumentumában megadott érték az illesztendő polinom maximális fokszáma. Ha az adatok speciális elhelyezkedésűek, akkor előfordulhat, hogy a polinom fokszáma ennél a megadott értéknél kisebb.
- A Lagrange-polinom egyértelműségéből következik, hogy ha n adat esetén a `polyfit` függvény harmadik argumentumába egy $(n-1)$-nél nagyobb értéket adunk meg, akkor ugyanazt a polinomot kapjuk, mint $n-1$ esetén.

2. feladat

Közelítse az

$$f(x) = e^x - \sin(\pi x)$$

függvényt a $[0, 1]$ intervallumon egy másodfokú polinommal. Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös ábrán.



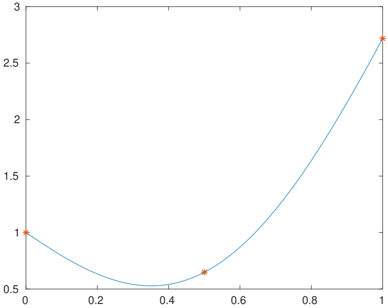
Az f függvény a $[0, 1]$ intervallum felett.

2. feladat

Közelítse az

$$f(x) = e^x - \sin(\pi x)$$

függvényt a $[0, 1]$ intervallumon egy másodfokú polinommal. Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös ábrán.



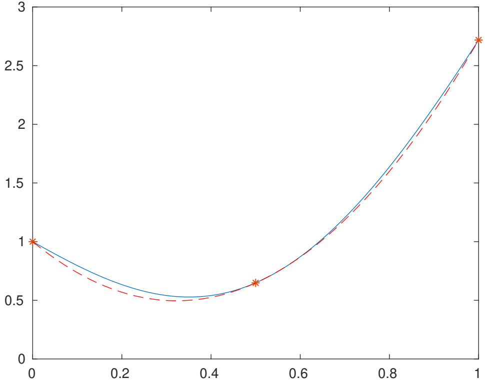
A közelítéshez használt pontok: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$.

2. feladat

Közelítse az

$$f(x) = e^x - \sin(\pi x)$$

függvényt a $[0, 1]$ intervallumon egy másodfokú polinommal. Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös ábrán.



Az f függvény és az illesztett polinom.

2. feladat

Közelítse az

$$f(x) = e^x - \sin(\pi x)$$

függvényt a $[0, 1]$ intervallumon egy másodfokú polinommal. Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös ábrán.

```
x=linspace(0,1);
f=@(x) exp(x)-sin(pi*x);
figure; plot(x,f(x))

xx=[0 0.5 1];
hold on; plot(xx,f(xx),'*')

p=polyfit(xx,f(xx),2);
z=polyval(p,x);
plot(x,z,'r--')
```

3. feladat

Tudjuk, hogy egy test méterben számolva s_0 utat tett meg, egyenletes v_0 (m/s) sebességgel, majd ezután egyenletesen gyorsítani kezdett a (m/s^2) gyorsulással. A gyorsulás kezdetétől számítva a 2., 4. és 5. másodperc végén az összes megtett út rendre 16, 38 és 52 m. Határozza meg s_0, v_0 és a értékét.

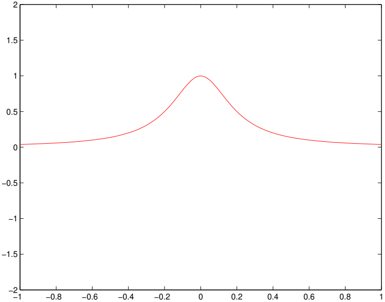
t: a gyorsulás kezdetétől eltelt idő
$s(t)$: a t-edik időpillanatig megtett összes út.

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

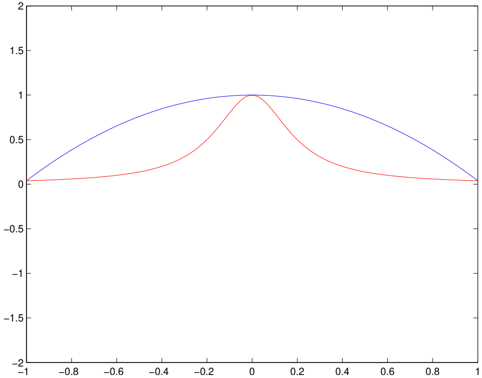
Megjegyzés

Ha egy függvényt szeretnénk közelíteni úgy, hogy elkészítjük adott alappontok esetén az illeszkedő Lagrange-polinomot, akkor az alappontok számának növelésével a hiba nem feltétlenül csökken, sőt akár tetszőlegesen naggyá válhat.

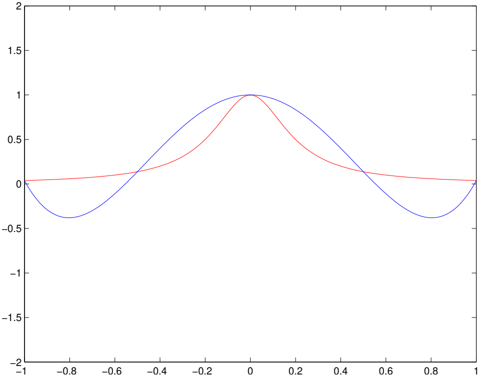
Példa: Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény $[-1, 1]$ fölött



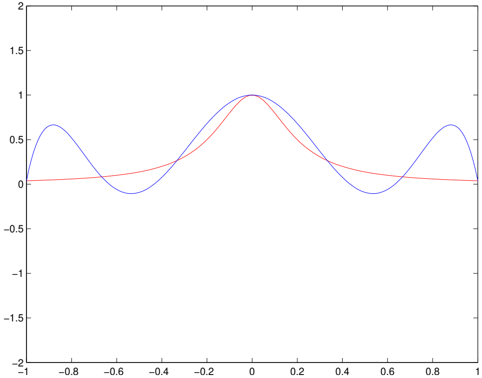
Lagrange-interpoláció, $n = 2$



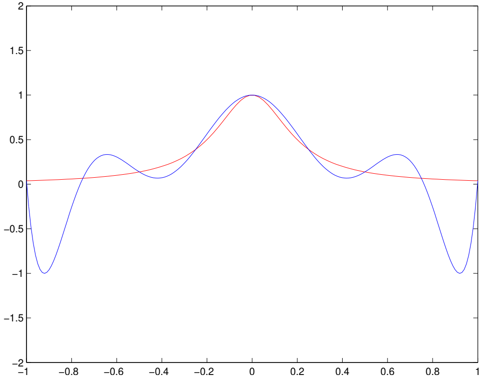
Lagrange-interpoláció, $n = 4$



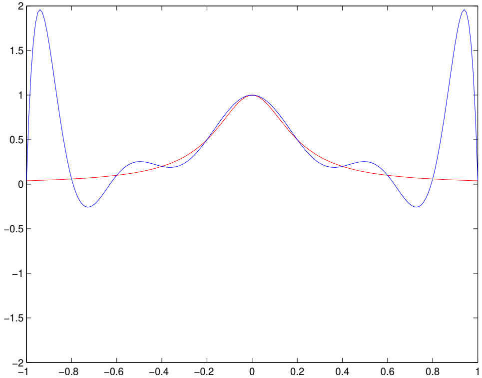
Lagrange-interpoláció, $n = 6$



Lagrange interpoláció, $n = 8$



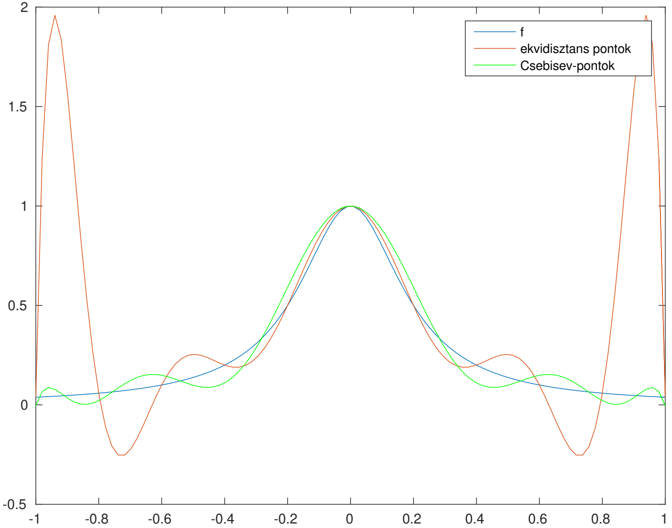
Lagrange-interpoláció, $n = 10$



4. feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 11$$
alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.


f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Megjegyzés

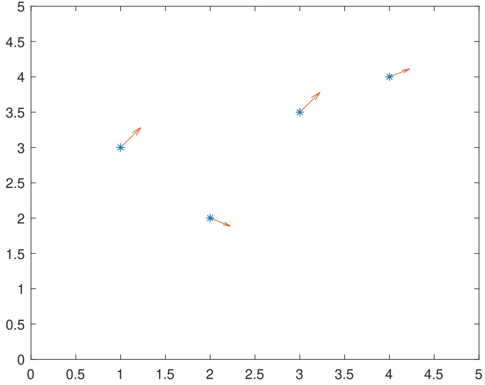
Ha az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre n helyen illeszkedő Lagrange-polinomot szeretnénk elkészíteni, akkor az

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

alappontok (Csebisev-pontok) esetén lesz minimális a polinom és a függvény legnagyobb eltérése.
Ha f nem a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett, akkor megfelelő lineáris transzformációval leképezzük a pontokat a megadott intervallumra.

Hermite-interpoláció

Előfordulhat, hogy az alappontokban nem csak a függvény értéke van előírva, hanem az is, hogy a polinom a megadott pontokon ,,milyen irányban" haladjon át, azaz az alappontokban az első derivált értéke is, vagy esetleg további deriváltértékek is.



Hermite-interpoláció

A feladat:

Adottak

$$
\begin{array}{rccccccl}
\text{az} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \text{alappontok } (x_i \neq x_j, \text{ ha } i \neq j) \\
\text{és az} & f_{00} & f_{10} & f_{20} & \dots & f_{n0} & \\
 & f_{01} & f_{11} & f_{21} & \dots & f_{n1} & \\
 & f_{02} & f_{12} & f_{22} & \dots & f_{n2} & \\
 & \vdots & & & & & \\
 & f_{0,m_0-1} & f_{1,m_1-1} & f_{2,m_2-1} & \dots & f_{n,m_n-1} & \text{értékek}
\end{array}
$$

Olyan $H(x)$ polinomot keresünk, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m_i - 1.$$

Legyen $m = \sum_{i=0}^{n} m_i$, az illeszkedési feltételek száma

Állítás: Az Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható a legfeljebb $(m-1)$-edfokú polinomok körében.

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-1	1
$f(x_i)$	3	1
$f'(x_i)$	9	-7
$f''(x_i)$		-18

$$
\begin{array}{r|llllll}
-1 & 3 & & & & \\
 & & 9 & & & \\
-1 & 3 & & -5 & & \\
 & & -1 & & 1 & \\
1 & 1 & & -3 & & -2 \\
 & & -7 & & -3 & \\
1 & 1 & & -9 & & \\
 & & -7 & & & \\
1 & 1 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
-1 & 3 & & & & & & & & \\
 & & & 9 & & & & & & \\
-1 & 3 & & & & -5 & & & & \\
 & & & -1 & & & & 1 & & \\
1 & 1 & & & & -3 & & & & -2 \\
 & & & -7 & & & & -3 & & \\
1 & 1 & & & & -9 & & & & \\
 & & & -7 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$H(x) = 3 + 9(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^2(x-1) - 2(x+1)^2(x-1)^2$$

Hermite-interpoláció

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	1	6	-2
$f'(x_i)$	74	-12	-4
$f''(x_i)$		16	

Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

Az adatok:

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	1	6	-2
$f'(x_i)$	74	-12	-4
$f''(x_i)$		16	

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a hiányzó értékeket!

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó elsőrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & \\
 & & 5 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó másodrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & & \\
 & & 74 & \\
-2 & 1 & & -69 \\
 & & 5 & \\
-1 & 6 & & -17 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 8 \\
 & & -12 & \\
-1 & 6 & & 4 \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & & 0 \\
 & & -4 & \\
1 & -2 & &
\end{array}
$$

A harmadrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & & & \\
 & & 74 & & \\
-2 & 1 & & -69 & \\
 & & 5 & & 52 \\
-1 & 6 & & -17 & \\
 & & -12 & & 25 \\
-1 & 6 & & 8 & \\
 & & -12 & & -2 \\
-1 & 6 & & 4 & \\
 & & -4 & & -2 \\
1 & -2 & & 0 & \\
 & & -4 & & \\
1 & -2 & & &
\end{array}
$$

A negyedrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & & & & \\
 & & 74 & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & \\
 & & 5 & & 52 & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 \\
 & & -12 & & 25 & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 \\
 & & -12 & & -2 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 \\
 & & -4 & & -2 & \\
1 & -2 & & 0 & & \\
 & & -4 & & & \\
1 & -2 & & & &
\end{array}
$$

Az ötödrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
-2 & \color{red}{1} & & & & & \\
 & & \color{red}{74} & & & & \\
-2 & \color{red}{1} & & -69 & & & \\
 & & 5 & & 52 & & \\
-1 & \color{red}{6} & & -17 & & -27 & \\
 & & \color{red}{-12} & & 25 & & 6 \\
-1 & \color{red}{6} & & \color{red}{8} & & -9 & \\
 & & \color{red}{-12} & & -2 & & 3 \\
-1 & \color{red}{6} & & 4 & & 0 & \\
 & & -4 & & -2 & & \\
1 & \color{red}{-2} & & 0 & & & \\
 & & \color{red}{-4} & & & & \\
1 & \color{red}{-2} & & & & &
\end{array}
$$

A hatodrendű osztott differencia:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & 1 & & & & & & \\
 & & 74 & & & & & \\
-2 & 1 & & -69 & & & & \\
 & & 5 & & 52 & & & \\
-1 & 6 & & -17 & & -27 & & \\
 & & -12 & & 25 & & 6 & \\
-1 & 6 & & 8 & & -9 & & -1 \\
 & & -12 & & -2 & & 3 & \\
-1 & 6 & & 4 & & 0 & & \\
 & & -4 & & -2 & & & \\
1 & -2 & & 0 & & & & \\
 & & -4 & & & & & \\
1 & -2 & & & & & &
\end{array}
$$

-2	**1**						
		74					
-2	1		**-69**				
		5		**52**			
-1	6		-17		**-27**		
		-12		25		**6**	
-1	6		8		-9		**-1**
		-12		-2		3	
-1	6		4		0		
		-4		-2			
1	-2		0				
		-4					
1	-2						

$$
\begin{aligned}
H(x) =& \mathbf{1} + \mathbf{74}(x+2) - \mathbf{69}(x+2)^2 + \mathbf{52}(x+2)^2(x+1) \\
& - \mathbf{27}(x+2)^2(x+1)^2 + \mathbf{6}(x+2)^2(x+1)^3 \\
& - \mathbf{1}(x+2)^2(x+1)^3(x-1)
\end{aligned}
$$

5. feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

(a)

x_i	-1	1
$f(x_i)$	7	3
$f'(x_i)$	-8	-4

(b)

x_i	-1	1
$f(x_i)$	3	1
$f'(x_i)$	9	-7
$f''(x_i)$		-18

(c)

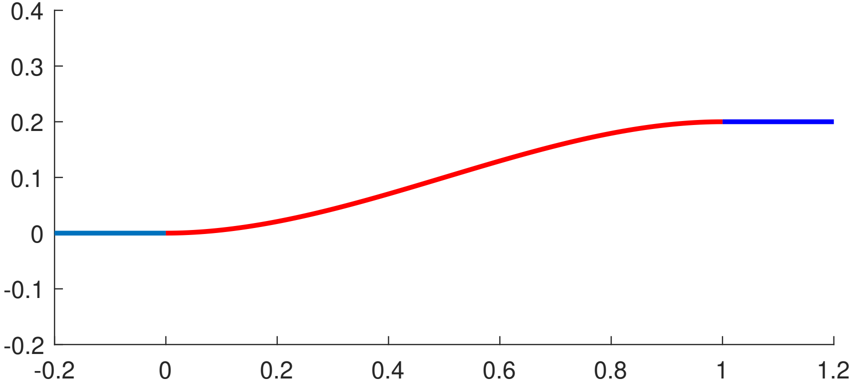
x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	6	94
$f'(x_i)$	9	17	213

(d)

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	13	3	7
$f'(x_i)$	-31	14	18
$f''(x_i)$		-40	

6. feladat

Egy garázs bejárata az úttól 1 méterre, az úttest szintje felett 20 cm-rel van. Tervezze meg az úttestet a bejárattal összekötő útszakaszt úgy, hogy a bejutás a garázsba minél simább legyen.



Az adatok:

x_i	0	1
$f(x_i)$	0	0.2
$f'(x_i)$	0	0

Az osztott differenciák:

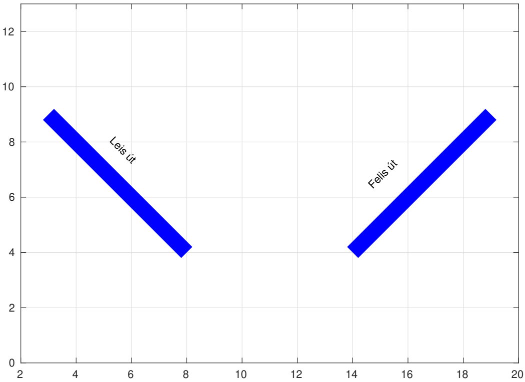
$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & & & \\
 & & 0 & & \\
0 & 0 & & 0.2 & \\
 & & 0.2 & & -0.4 \\
1 & 0.2 & & -0.2 & \\
 & & 0 & & \\
1 & 0.2 & & &
\end{array}
$$

A polinom:

$$H(x) = 0.2x^2 - 0.4x^2(x-1)$$

7. feladat

Az ábrán látható két útszakasz (Leis út, Felis út) egymáshoz közelebbi végei között szeretnénk utat építeni úgy, hogy az így kapott út menetében ne legyen törés. Adja meg a hiányzó útszakasz nyomvonalát leíró függvényt!



Alkalmazások

Példa

Legyen az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban. Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az f függvény x_0-beli értintőjének egyenletét!

Azt a $H(x)$ legfeljebb elsőfokú Hermite-polinomot keressük, melyre $H(x_0) = f(x_0)$ és $H'(x_0) = f'(x_0)$

$$
\begin{array}{c|cc}
x_0 & f(x_0) & \\
 & & f'(x_0) \\
x_0 & f(x_0) &
\end{array}
$$

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Példa

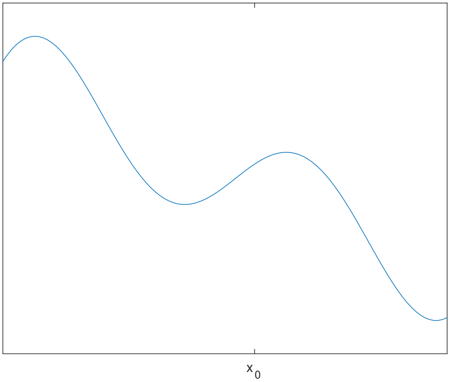
Írjuk fel az x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ...,$f^{(n)}(x_0)$ adatokra illeszkedő Hermite-polinomot!

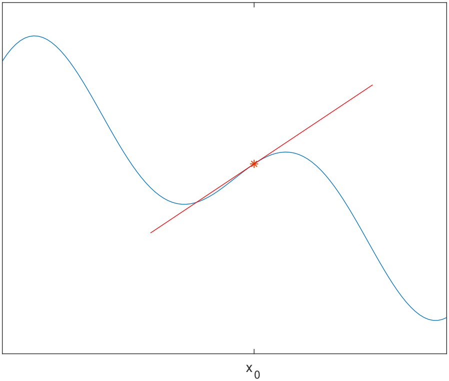
$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & & \\
 & & f'(x_0) & & \frac{f'''(x_0)}{3!} & & \\
x_0 & f(x_0) & & \frac{f''(x_0)}{2!} & & \ddots & \\
 & & f'(x_0) & & & & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
 & & f'(x_0) & & & & \\
x_0 & f(x_0) & & & & &
\end{array}
$$

Ekkor

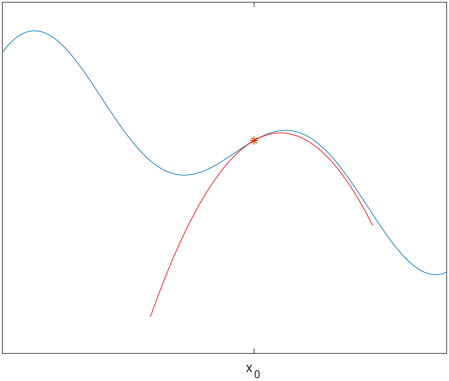
$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

az f függvény x_0 körüli Taylor-polinomja.

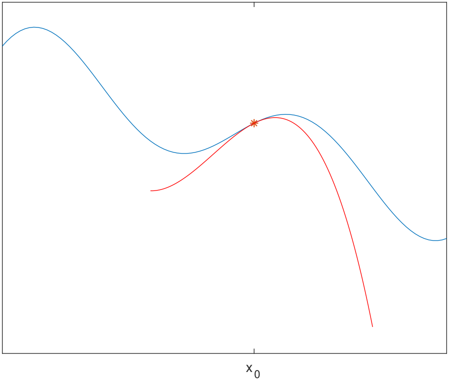

x_0



Egy függvény és az x_0 pont körüli Taylor-polinom első két tagig (az érintő)



Egy függvény és az x_0 pont körüli Taylor-polinom első három tagig



Egy függvény és az x_0 pont körüli Taylor-polinom első négy tagig

Szakaszonkénti interpoláció

Az alappontok számának növelésével nő az illesztett polinom fokszáma, de a közelítés hibája nem feltétlenül csökken.

Egyetlen magas fokszámú polinom illesztése helyett részintervallumonként alacsonyabb fokszámú polinomok

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m darab részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon végezzük el a Lagrange-interpolációt!

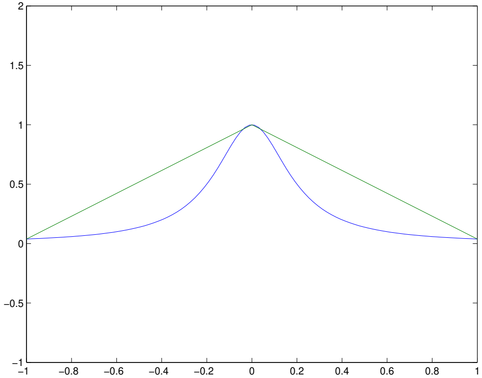
Ha az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon csak az $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ adatok ismertek, akkor **szakaszonkénti lineáris interpoláció** (töröttvonal interpoláció)

Ha $h := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, m$, és f kétszer folyt. diff.ható $[a, b]$-n, akkor az $L_{m\times 1}(x)$ töröttvonalra:

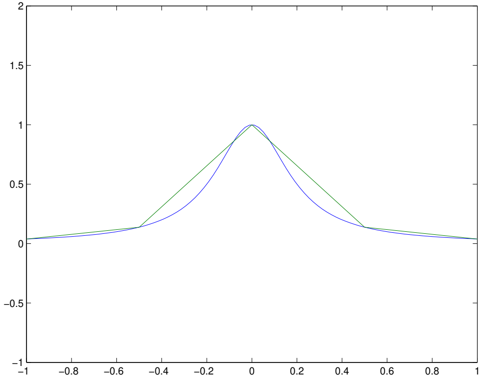
$$|f(x) - L_{m\times 1}(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \qquad x \in [a, b]$$

Ez tart 0-hoz, ha $h \to 0$

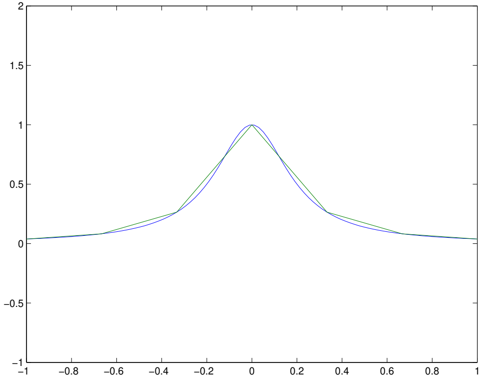
Szakaszonként lineáris interpoláció, 2 részintervallum



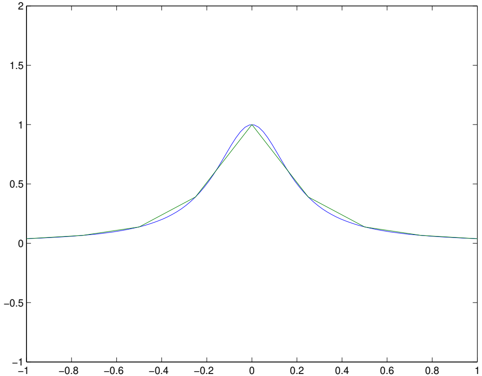
Szakaszonként lineáris interpoláció, 4 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 6 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 8 részintervallum



Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

A töröttvonal interpolációval illesztett függvény folytonos, de az osztópontokban "törik", azaz nem differenciálható.

Sima (folytonosan differenciálható) függvény illesztése: az osztópontokban előírjuk az 1. derivált értékét is.

Ekkor az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az

x_{i-1}	x_i
$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$
$f'(x_{i-1})$	$f'(x_i)$

adatok ismertek. 4 illeszkedési feltétel $\rightarrow$ legfeljebb harmadfokú polinom

Példa

Határozzuk meg azt a folytonosan differenciálható, szakaszonként harmadfokú

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha} \quad x \in [-1, 1] \\ H_2(x), & \text{ha} \quad x \in (1, 3] \end{cases}$$

polinomot, melyre $H(-1) = 4$, $H(1) = 6$, $H(3) = 12$, $H'(-1) = -3$, $H'(1) = 13$, $H'(3) = 9$ teljesül!

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$
\begin{array}{r|lllll}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & 2 \\
1 & 6 & & 6 & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
$$

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

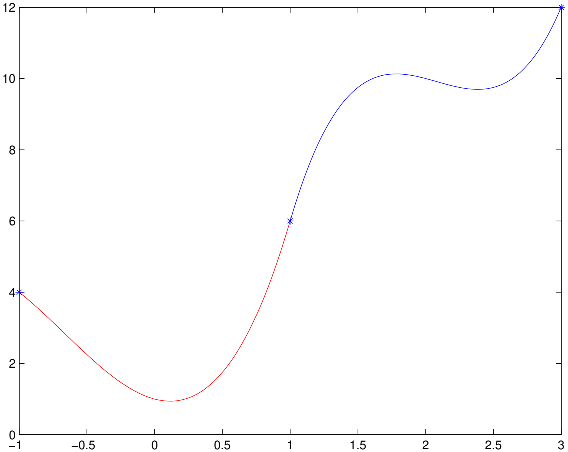
$$H_1(x) = 6 + 13(x-1) + 6(x-1)^2 + 2(x-1)^2(x+1)$$

$$
\begin{array}{r|lllll}
1 & 6 & & & \\
 & & 13 & & \\
1 & 6 & & -5 & \\
 & & 3 & & 4 \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

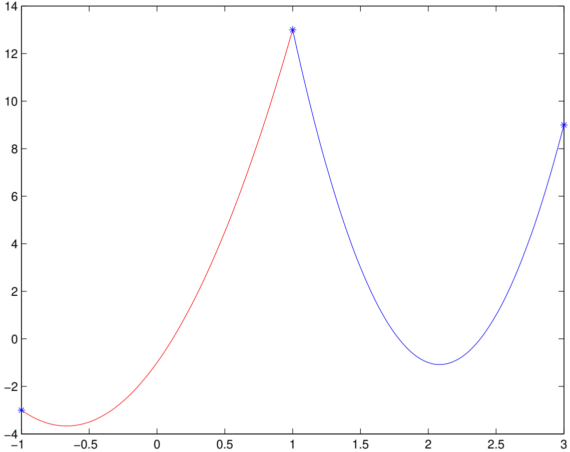
x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	13	9

$$H_2(x) = 6 + 13(x-1) - 5(x-1)^2 + 4(x-1)^2(x-3)$$

A H_1 és H_2 polinomok:



A H_1 és H_2 első deriváltja:



Harmadfokú spline-interpoláció

Ha a részintervallumok találkozásánál megköveteljük az 1. derivált folytonosságát, de nem írjuk elő a derivált értékét, akkor marad 1 szabad paraméterünk:

x_i	-1	1	3
$H(x)$	4	6	12
$H'(x)$	-3	α	9

$$
\begin{array}{r|cccc}
-1 & 4 & & & \\
 & & -3 & & \\
-1 & 4 & & 2 & \\
 & & 1 & & \frac{\alpha-5}{4} \\
1 & 6 & & \frac{\alpha-1}{2} & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccc}
1 & 6 & & & \\
 & & \alpha & & \\
1 & 6 & & \frac{3-\alpha}{2} & \\
 & & 3 & & \frac{3+\alpha}{4} \\
3 & 12 & & 3 & \\
 & & 9 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

$$H_1(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha - 1}{2}(x-1)^2 + \frac{\alpha - 5}{4}(x-1)^2(x+1)$$
$$H_2(x) = 6 + \alpha(x-1) + \frac{3 - \alpha}{2}(x-1)^2 + \frac{3 + \alpha}{4}(x-1)^2(x-3)$$

A szabad paraméter lehetőséget ad még egy feltétel állítására: követeljük meg a 2. derivált folytonosságát is!

$$H_1''(1) = 2\alpha - 6$$
$$H_2''(1) = -2\alpha$$

Ekkor $H_1''(1) = H_2''(1)$-ből

$$2\alpha - 6 = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}$$

Harmadfokú spline-interpoláció alapötlete

Adottak

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$					$f'(x_n)$

Olyan $S(x)$ függényt keresünk, melyre

- $S(x_i) = f(x_i)$
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ és $S'(x_n) = f'(x_n)$
- $S|_{[x_{i-1},x_i]} = S_i$ harmadfokú polinom, $i = 1, \dots, n$
- S kétszer folytonosan differenciálható

1. Bevezetjük az $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ ismeretleneket:

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
$f'(x_0)$	α_1	α_2	$\ldots$	α_{n-1}	$f'(x_n)$

2. Felírjuk az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok fölött az $S_i(x)$ harmadfokú Hermite-polinomokat.

3. Felírjuk az $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ egyenleteket ($i = 1, \ldots, n-1$). Ezek az α_i ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszert adnak.

4. Megoldjuk az egyenletrendszert. (Az egyenletrendszer mátrixa tridiagonális.)

Spline interpoláció Octave/Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Megoldás. Használjuk a `spline` függvényt!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt `x` az alappontok vektora, az `y` vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
p =
      form: 'pp'
    breaks: [-2 -1 0 1 2 3]
     coefs: [5x4 double]
    pieces: 5
     order: 4
       dim: 1
```

A spline együtthatói:

```
>> p.coefs


ans =
   19.0000  -37.0000   15.0000    4.0000
  -12.0000   20.0000   -2.0000    1.0000
   11.0000  -16.0000    2.0000    7.0000
  -12.0000   17.0000    3.0000    4.0000
   15.0000  -19.0000    1.0000   12.0000
```

Figyeljünk arra, hogy a polinomok együtthatóit a részintervallumok kezdőpontjaihoz viszonyítva kapjuk!

Az 5 illesztett polinom:

$$p_1(x) = 19(x+2)^3 - 37(x+2)^2 + 15(x+2) + 4$$
$$p_2(x) = -12(x+1)^3 + 20(x+1)^2 - 2(x+1) + 1$$
$$p_3(x) = 11x^3 - 16x^2 + 2x + 7$$
$$p_4(x) = -12(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 3(x-1) + 4$$
$$p_5(x) = 15(x-2)^3 - 19(x-2)^2 + (x-2) + 12$$

Ellenőrizzük az illeszkedési feltételeket!

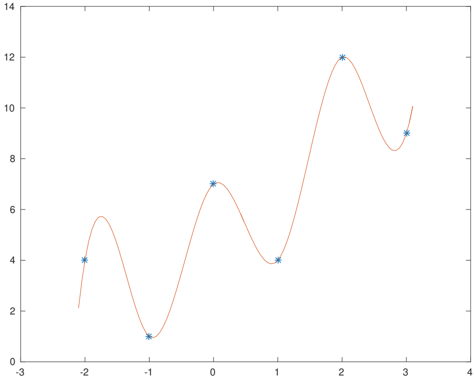
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

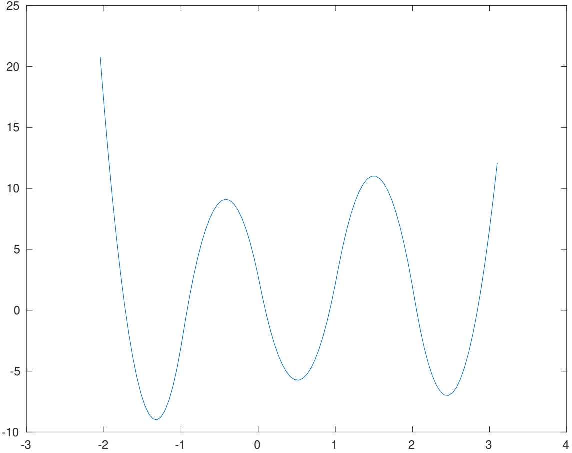
ahol `x` és `y` az előbbi vektorok, `xx` azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor `yy`-ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
>> xx=linspace(-2.1,3.1);
>> yy=spline(x,y,xx);
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

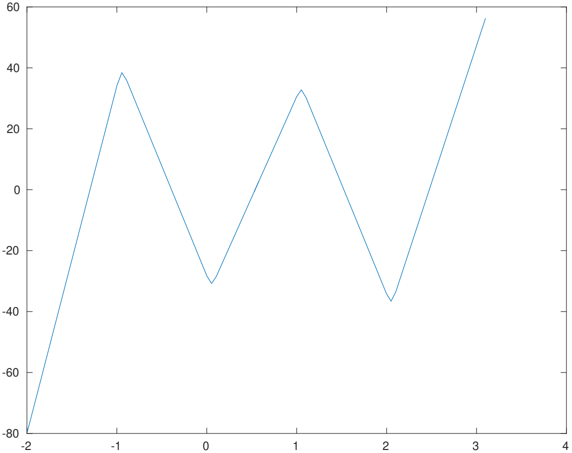
```
x=-2:3;
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:



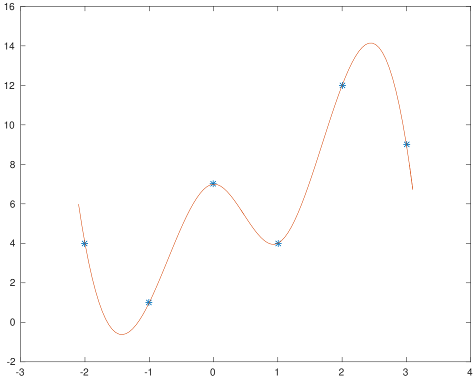
Ez még mindig folytonos, de a részintervallumok határainál töréspontja van.

Megj.

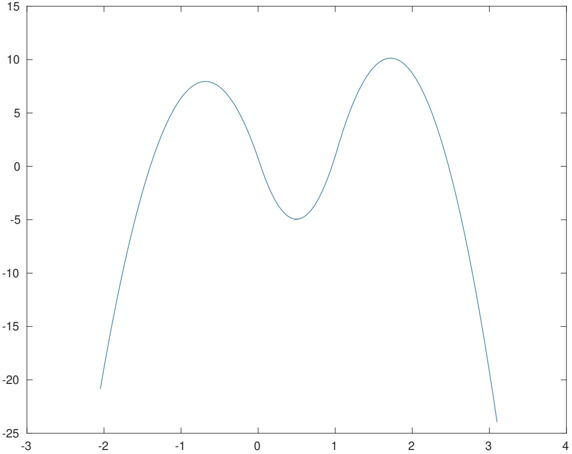
Ha a `spline` függvényt olyan `x` és `y` vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt a Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

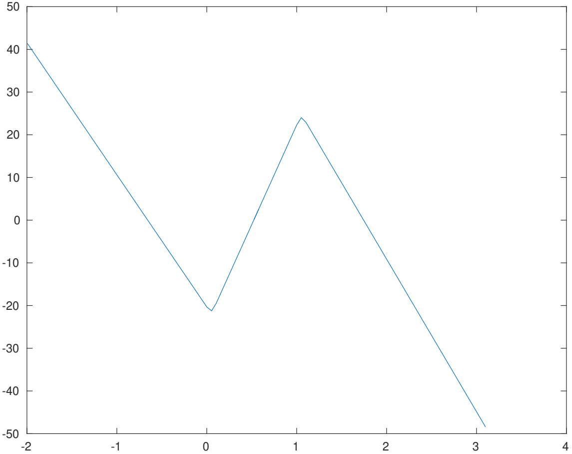
```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:

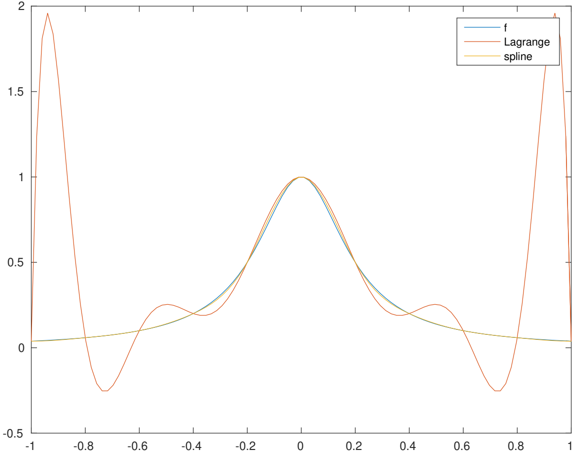


Most az első és utolsó osztópontban (-1-ben és 2-ben) már nincs töréspontja.

8. feladat

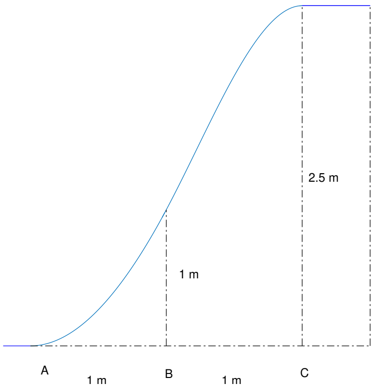
Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintsük 0-nak.)


f
Lagrange
spline
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

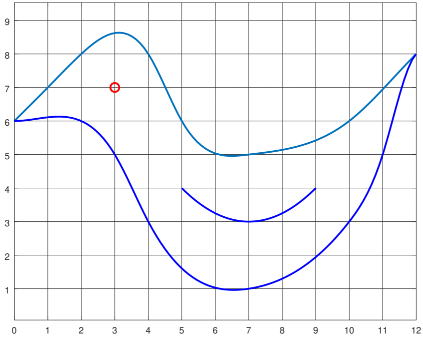
9. feladat

Az ábrán látható csúszda csúszófelületét szeretnénk elkészíteni két darabból úgy, hogy az A és C helyeken simán csatlakozzon a vízszintes felületekhez, illetve a két lemez is minél simábban csatlakozzon egymáshoz B-ben. Írja fel azt a függvényt, ami a csúszófelület lefutását modellezi!



10. feladat (szorgalmi)

Készítse el Matlabbal az ábrán látható rajzot.



Útmutatás: használja a bejelölt (egész koordinátájú) pontokat és a `spline` függvényt.