Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Lineáris programozás

Grafikus úton megoldható feladatok

1. példa

Egy céges karácsonyi partira a szervezők kétféle bólét készítenek, az egyikből 1 liter elkészítéséhez többek között 1 üveg habzóbor és 3 gyümölcskonzerv, a másikból 1 literhez 2 üveg habzóbor és 2 gyümölcskonzerv szükséges. Mennyit készítsenek az egyes fajtákból, ha az elkészített bólé összmennyiségét maximalizálni szeretnék, és habzóborból 20 üveg, gyümölcskonzervből 30 darab áll rendelkezésre?

Jelölje x_1 és x_2 az első-, illetve a másodikféle bólé mennyiségét literben.

Írjuk fel a korlátozó feltételeket:

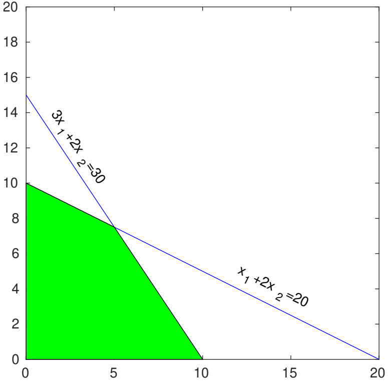
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ezen feltételek mellett keresett x_1 és x_2 úgy, hogy $\{x_1 + x_2\}$ maximális legyen.

Grafikus úton megoldható feladatok

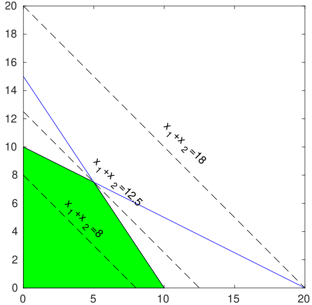
A korlátozó feltételek mindegyike egy zárt félsíkot határoz meg $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek metszete lesz a megengedett tartomány.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 20 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



Grafikus úton megoldható feladatok

Az $x_1 + x_2 = z$ egyenesek egymással párhuzamosak. A legnagyobb olyan z értéket keressük, melyre az egyenesnek még van közös pontja a megengedett tartománnyal.



Az $x_1 + 2x_2 = 20$ és $3x_1 + 2x_2 = 30$ egyenesek metszéspontja: $x = (5, 7.5)$.
Megoldás: 5 litert kell az első, 7.5 litert a második fajta bóléból készíteni.

2. példa

Egy cukrász kétféle forrócsokit árul: chilis étcsokit és tejcsokit. Egy adott napon a szükséges összetevők közül tejből már csak 40 doboznyi, csokoládérúdból 56 darab, chiliből 10 g van a raktárban. Egy liter chilis étcsoki előállításához 1 doboz tej, 5 csokoládérúd és 1 g chili szükséges, míg a tejcsokihoz 2 doboz tej és 1 csokoládérúd. Egy liter chilis étcsoki eladásából 10 Euro, míg egy liter tejcsoki eladásából 2 Euro haszna van. Melyikből mennyit állítson elő, ha maximalizálni szeretné a hasznát?

Jelölje x_1 és x_2 a chilis étcsoki és a tejcsoki mennyiségét literben.

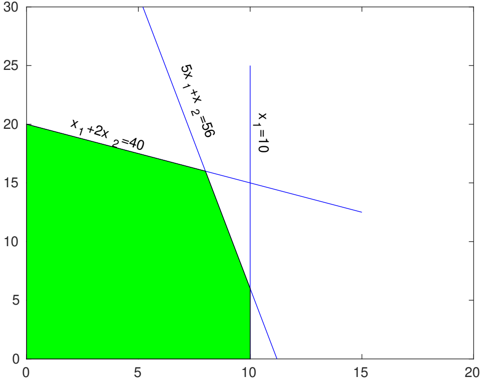
Írjuk fel a korlátozó feltételeket:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 56 \\ x_1 \qquad &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

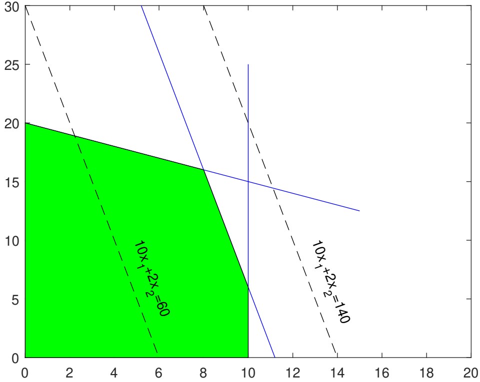
Ezen feltételek mellett keresett $\max\{10x_1 + 2x_2\}$

A megengedett tartomány:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 56 \\ x_1 \qquad &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



A $10x_1 + 2x_2 = z$ egyenesek párhuzamosak az $5x_1 + x_2 = 56$ egyenessel.



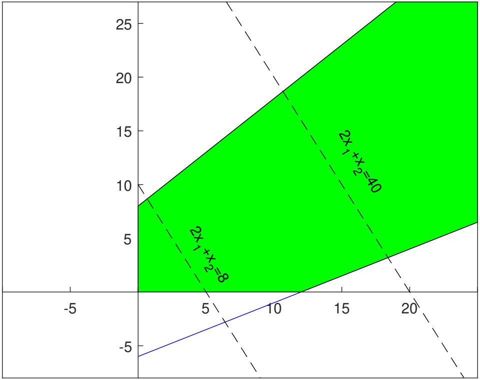
A $\binom{8}{16}$ és $\binom{10}{6}$ pontok közötti szakasz minden pontja optimális, ezekben a pontokban a célfüggvény értéke 112.

3. példa

Oldjuk meg grafikus úton a következő feladatot:

$$
\begin{array}{rcl}
-2x_1 + x_2 & \leq & 8 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 12 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
-2x_1 + x_2 & \leq & 8 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 12 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max
\end{array}
$$



A megengedett tartományon a célfüggvény felülről nem korlátos.

1. feladat

Oldjuk meg grafikus úton az alábbi feladatot!

Egy bútoripari vállalkozás kétféle bútort gyárt: tálalószekrényt és komódot. Egy tálalószekrény előállításához 2 egység faanyagra, 1 egység lakkra és 1 egység üvegre, míg egy komód előállításához 1 egység faanyagra és 1 egység lakkra van szükség. Egy tálalószekrényt 30 ezer, egy komódot 20 ezer Ft-ért lehet eladni. Határozza meg a maximális bevételt biztosító gyártási tervet, ha 100 egység faanyag, 80 egység lakk és 40 egység üveg áll rendelkezésre!

2. feladat

Oldja meg grafikus úton az alábbi feladatot!

Egy édesipari vállalatnál kétféle túródesszertet (natúr és kakaós) gyártanak. Egy egység natúr desszert előállításához 20 egység édesített túróra és 50 egység tejszínre van szükség, míg egy egység kakaós desszerthez 40 egység édesített túróra, 20 egység tejszínre és 2 egység kakaóra. A kakaós desszertet 300 Ft/egység, a natúrt 190 Ft/egység áron lehet értékesíteni, az előállítási költségük 100 Ft/egység (kakaós) és 90 Ft/egység (natúr). Milyen gyártási arány mellett érhető el a maximális nyereség, ha 280 egység édesített túró, 300 egység tejszín és 12 egység kakaó áll rendelkezésre?

3. feladat

Oldja meg grafikus úton az alábbi feladatokat!

(a)
$$
\begin{array}{rcl}
4x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\
3x_1 + x_2 & \leq & 3 \\
10x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = x_1 + x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & \leq & 7 \\
x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\
x_1 & \leq & 5 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = 8x_1 + 10x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

Normál alak

Az előző feladatok mindegyike

$$\begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\max_x \{c^T x\}} \end{array}$$

alakba írható, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Normál alak

$$\begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\max_x \{c^T x\}} \end{array}$$

ahol

a korlátozó feltételek:

$$Ax \leq b$$

a nemnegatívitási feltételek:

$$x \geq 0, \quad b \geq 0$$

a célfüggvény:

$$f(x) = c^T x$$

a feladat:

$$\max_x \{c^T x\}$$

Kanonikus alak

Az előző normál alak korlátozó feltételei új, nemnegatív változók bevezetésével átírhatók egyenletekké:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 \qquad\qquad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + y_2 \qquad &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + y_m &= b_m
\end{aligned}
$$

A nemnegatívitási feltételek:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \quad y_1, x_2, \ldots, y_m \geq 0$$

Mátrixos formában:

$$(A, E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$$

Szimplex módszer

A kiindulótábla normál alakból származó kanonikus alak esetén:

			c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	0	$\dots$	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	$\dots$	x_n	y_1	y_2	$\dots$	y_m
y_1	0	b_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0		0
y_2	0	b_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1		0
$\vdots$										
y_m	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0		1
	f(z)=0		Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_n	0	0		0

1. lépés: az alsó sorban válasszunk egy negatív elemet (legyen ez a Δ_j)
2. lépés: a kiválasztott elem oszlopában az összes $a_{ij} > 0$ elemre képezzük a $\frac{b_i}{a_{ij}}$ hányadost
3. lépés: legyen a_{kj} egy minimális hányadoshoz tartozó elem **(generáló elem)**
4. lépés: elemi sortranszformációkkal érjük el, hogy a j-edik oszlopban a k-adik egységvektor álljon

Szimplex módszer

Ha

- az alsó sorban álló minden negatív elem fölött van pozitív a_{ij} elem, akkor a célfüggvény értéke még növelhető, járjunk el az előzőekben megadott lépések szerint.
- az alsó sorban már nincs negatív elem, akkor a táblánk optimális
- az alsó sorban van olyan negatív elem, mely fölött minden a_{ij} elem negatív, akkor a célfüggvény a megadott tartomány felett nem korlátos

1. példa, folytatás

Oldjuk meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 & \leq & 20 \\
3x_1 + 2x_2 & \leq & 30 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = x_1 + x_2 & \to & \max
\end{array}$$

A kiindulótábla:

			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	20	1	2	1	0
y_2	0	30	3	2	0	1
f(z)=0			-1	-1	0	0

Most $\Delta_j < 0$, $j = 1, 2$ esetén. Válasszuk pl. Δ_1-et, ennek oszlopában most minden $a_{ij} > 0$, így képezzük az összes $\frac{b_i}{a_{i1}}$ hányadost:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{20}{1} = 20, \qquad \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{30}{3} = 10$$

Mivel a második a kisebb, ezért a_{12} lesz a generáló elem.

			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	20	1	2	1	0
y_2	0	30	$\boxed{3}$	2	0	1
	0		-1	-1	0	0

			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	10	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_1	1	10	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	10		0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Most csak $\Delta_2 < 0$, így a második oszlopban keressük a generáló elemet.

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{10}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{10}{\frac{2}{3}} = 15,$$

így a generáló elem az a_{12} lesz.

			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	10	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_1	1	10	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	10		0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
x_2	1	$\frac{15}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	1	5	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{25}{2}$		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

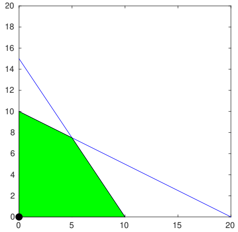
			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
x_2	1	$\frac{15}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	1	5	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{25}{2}$		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Az utolsó tábla optimális, az optimális megoldás: $x_1 = 5, x_2 = \frac{15}{2}$, a célfüggvény értéke: $\frac{25}{2}$.

Figyeljük meg hogy a megoldás során hogyan lépkedtünk bázismegoldásról bázismegoldásra:

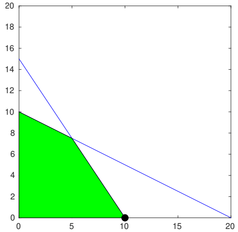
			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	20	1	2	1	0
y_2	0	30	3	2	0	1
	0		-1	-1	0	0

$x = (0, 0), \ f(x) = 0.$

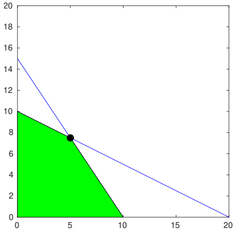


			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	10	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_1	1	10	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	10		0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$x = (10, 0), \ f(x) = 10.$



			1	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
x_2	1	$\frac{15}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	1	5	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{25}{2}$		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



$x = (5, 7.5)$,
$f(x) = 12.5$.

2. példa, folytatás

Oldjuk meg a következő feladatot szimplex-módszerrel.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 & \leq & 40 \\
5x_1 + x_2 & \leq & 56 \\
x_1 \qquad & \leq & 10 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = 10x_1 + 2x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

A kiindulótábla:

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_1	0	40	1	2	1	0	0
y_2	0	56	5	1	0	1	0
y_3	0	10	$\boxed{1}$	0	0	0	1
	0		-10	-2	0	0	0

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_1	0	30	0	2	1	0	-1
y_2	0	6	0	$\boxed{1}$	0	1	-5
x_1	10	10	1	0	0	0	1
	100		0	-2	0	0	10

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_1	0	18	0	0	1	-2	9
x_2	2	6	0	1	0	1	-5
x_1	10	10	1	0	0	0	1
	112		0	0	0	2	0

Az optimális megoldás: $x_1 = 10$, $x_2 = 6$, $f(x) = 112$

Ha a bázisváltozók közé y_1 helyett bevisszük y_3-at, a célfüggvény értéke nem változik:

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_1	0	18	0	0	1	-2	$\boxed{9}$
x_2	2	6	0	1	0	1	-5
x_1	10	10	1	0	0	0	1
	112		0	0	0	2	0

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_3	0	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	1
x_2	2	16	0	1	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0
x_1	10	8	1	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
	112		0	0	0	2	0

Ekkor az optimális megoldás: $x_1 = 8$, $x_2 = 16$, $f(x) = 112$.

3. példa, folytatás

Oldjuk meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

A kiindulótábla:

			2	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	8	-2	1	1	0
y_2	0	12	1	-2	0	1
	0		-2	-1	0	0

			2	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	8	-2	1	1	0
y_2	0	12	$\boxed{1}$	-2	0	1
	0		-2	-1	0	0

			2	1	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2
y_1	0	32	0	-3	1	2
x_1	2	12	1	-2	0	1
	24		0	-5	0	2

Mivel van olyan negatív érték az alsó sorban, amely fölött nem lehet generálóelemet választani, így célfüggvény felülről nem korlátos.

4. feladat

Oldja meg szimplex módszerrel az alábbi feladatokat!

(a)
$$\begin{array}{rcl} 10x_1 + 8x_2 & \leq & 800 \\ 13x_1 + 6.5x_2 & \leq & 845 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 50x_1 + 40x_2 & \to & \max \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 80 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 100 \\ x_1 \qquad & \leq & 40 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 3x_1 + 2x_2 & \to & \max \end{array}$$

5. feladat

Oldja meg szimplex módszerrel a 3. feladatban leírt lineáris programozási feladatokat.

Lineáris programozási feladatok Matlab-bal

A `linprog` függvényt használhatjuk.

```
x = linprog(c,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

Megoldja az

$$\begin{array}{c} \begin{array}{rcl} Ax & \leq & b \\ A_{eq}x & = & b_{eq} \end{array} \\ l_b \leq x \leq u_b \\ \hline \min\limits_{x}\{c^T x\} \end{array}$$

feladatot.

1. példa, folytatás

Matlab segítségével oldjuk meg a következő feladatot.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 20 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 30 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

Definiáljuk az A mátrixot, a b és c vektorokat. Mivel a Matlab a célfüggvény minimumát keresi meg, ezért c vektorként a feladatban adott vektor (-1)-szeresét kell megadni.

```
>> A=[1 2; 3 2];
>> b=[20;30];
>> c=[-1 -1];
```

Hívjuk meg a `linprog` függvényt. A változóink mindegyikére a 0 alsó korlát adott, míg felső korlát nincs, azt állítsuk ∞-re (vagy hagyjuk el).

```
>> A=[1 2; 3 2];
>> b=[20;30];
>> c=[-1 -1];
>> x=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])

Optimal solution found.



x =


    5.0000
    7.5000
```

2. példa, folytatás

Matlab segítségével oldjuk meg a következő feladatot.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 40 \\ 5x_1 + x_2 & \leq & 56 \\ x_1 \quad\quad & \leq & 10 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 10x_1 + 2x_2 & \to & \max \end{array}$$

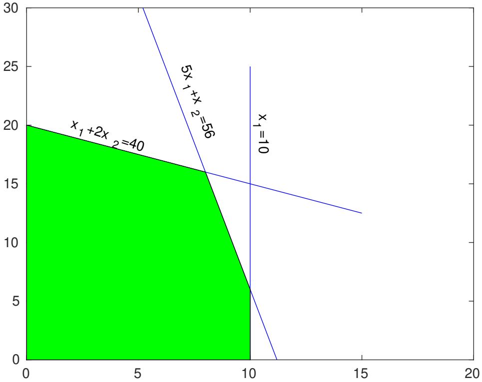
```
>> A=[1 2; 5 1; 1 0];
>> b=[40; 56; 10];
>> c=[-10; -2];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])
```

Ha a `linprog` függvényt két output változóval hívjuk, akkor a célfüggvény optimális értékét is megkapjuk (ami (-1)-szerese az eredeti feladatunkban szereplő értéknek)

```
>> A=[1 2; 5 1; 1 0];
>> b=[40; 56; 10];
>> c=[-10; -2];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])

Optimal solution found.


x =
   10.0000
    6.0000


fval =
 -112.0000
```

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\
5x_1 + x_2 &\leq 56 \\
x_1 \qquad &\leq 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Az $x = (10, 6)^T$ megoldás rajta van a 2. és 3. tartomány peremén, de az 1.-nek a belsejében van $\Longrightarrow$ ilyen gyártás mellett a 2. és 3. nyersanyagot teljesen elhasználjuk, az 1.- nem.



Mennyi nyersanyag marad?

```
>> b-A*x
ans =
   18.0000
   -0.0000
   -0.0000
```

Ha lehetőségünk van valamelyik nyersanyagkészletet bővíteni, akkor melyiket érdemes?

```
[x,fval,~,~,lambda]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0])
```

Ekkor a `lambda` struktúra mezőin találjuk a nyersanyagok ú.n. árnyékárait:

```
lambda.ineqlin
ans =
         0
    2.0000
         0
```

Ez megadja, hogy az egyes nyersanyagokból 1 egységnyit beszerezve még mennyivel növelhetjük a célfüggvény értékét.

$\Longrightarrow$ csak a második nyersanyagkészletet érdemes most bővíteni. (Természetesen a bővítés csak bizonyos határok között hozza ezt az eredményt.)

Ugyanez a megoldást adó szimplex táblából:

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_1	0	18	0	0	1	-2	9
x_2	2	6	0	1	0	1	-5
x_1	10	10	1	0	0	0	1
	112		0	0	0	2	0

Mennyit változtathatunk a nyersanyag mennyiségén úgy, hogy az optimális megoldásban szereplő bázisváltozók ugyanazok maradjanak?

A kiindulótábla:

			10	2	0	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
y_1	0	40	1	2	1	0	0
y_2	0	56	5	1	0	1	0
y_3	0	10	1	0	0	0	1
	0		-10	-2	0	0	0

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A megoldás:

$$x^* = B^{-1}b,$$

ahol B az A-nak a megoldásban szereplő bázisváltozókhoz tartozó oszlopaiból áll:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B^{-1} az optimális táblában a kiinduló bázisváltozók alatt található.

Innen megkapható, hogy a b egy koordinátáját milyen határok között változtathatjuk.

$$b = \begin{pmatrix} 40 \\ 56 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 56+\varepsilon \\ 10 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^* = B^{-1}b \quad \rightarrow \quad \tilde{x}^* = B^{-1}\tilde{b} = x^* + B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = x^* + \begin{pmatrix} -2\varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az új megoldás minden koordinátájának nemnegatívnak kell lenni, azaz

$$18 - 2\varepsilon \geq 0, \quad 6 + \varepsilon \geq 0$$

így

$$-6 \leq \varepsilon \leq 9$$

Általánosan: az k-adik nyersanyagot figyelve

Vegyük az optimális táblában az k-adik nyersanyag kiegészítőváltozójához tartozó oszlopot, legyenek ennek elemei e_{ik}, az optimális megoldás koordinátái pedig x_i^*, $i = 1, \dots n$.

Ekkor ahhoz, hogy az optimális megoldáshoz tartozó bázisváltozók ugyanezek legyenek, a k-adik nyersanyag mennyisége ε-nal változhat, ahol

$$\max_{\substack{1 \le i \le n \\ e_{ik} > 0}} \left\{ -\frac{x_i^*}{e_{ik}} \right\} \le \varepsilon \le \min_{\substack{1 \le i \le n \\ e_{ik} < 0}} \left\{ -\frac{x_i^*}{e_{ik}} \right\}$$

3. példa, folytatás

Oldjuk meg Matlab-bal a következő feladatot.

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \hline f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max \end{array}$$

```
>> A=[-2 1; 1 -2];
>> b=[8; 12];
>> c=[-2; -1];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])
```

```
>> A=[-2 1; 1 -2];
>> b=[8; 12];
>> c=[-2; -1];
>> [x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],[0;0],[inf,inf])

Problem is unbounded.


x =
     []

fval =
     []
```

Ahogy azt a grafikus és szimplex módszerrel történő megoldásnál is láttuk, a célfüggvény a megadott tartományon nem korlátos.

6. feladat

Matlab segítségével oldjuk meg a következő feladatot.
Egy konzervgyárnak 2 telephelye van és 3 termelőtől szerzi be a gyümölcsöket. Az egyes termelők a lenti mennyiségben képesek gyümölcsöt eladni, a megadott egységáron. Tonnánkénti szállítási költségeket (Euróban) a második táblázat mutatja.

T1	200 tonna	11 Euró/tonna
T2	310 tonna	10 Euró/tonna
T3	420 tonna	9 Euró/tonna

	I. telep	II. telep
T1	3	3.5
T2	2	2.5
T3	6	4

Az egyes telephelyek maximális kapacitása és a feldolgozás költsége:

	I. telep	II. telep
kapacitás	460 tonna	560 tonna
költség	26 Euró/tonna	21 Euró/tonna

A gyümölcskonzerv 50 Euró/tonna áron értékesíthető. Készítse el a maximális hasznot hozó termelési tervet!

Módosított normál feladat

Az

$$\begin{array}{rcl} A_1 x & = & b_1 \\ A_2 x & \leq & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{x \geq 0} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c^T x \rightarrow \max} \end{array}$$

feladatot, ahol $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$, módosított normál feladatnak nevezzük.

Az egyenlőtlenségeket a korábban látott módon alakítsuk egyenlőségekké, új, nemnegatív változók bevezetésével:

$$\begin{array}{rcl} A_1 x & = & b_1 \\ A_2 x + y & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{x \geq 0, y \geq 0} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c^T x \rightarrow \max} \end{array}$$

Példa

$$
\begin{array}{rcl}
x_2 \qquad + x_4 &=& 15 \\
x_3 + x_4 &=& 20 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &\le& 50 \\
4x_1 - x_2 \qquad + x_4 &\le& 60 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge& 0 \\
\hline
f(x) = x_1 + 2x_3 - 5x_4 &\to& \max
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &=& 15 \\
x_3 + x_4 \qquad\qquad &=& 20 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + y_1 \qquad &=& 50 \\
4x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad + y_2 &=& 60 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 &\ge& 0 \\
\hline
f(x) = x_1 + 2x_3 - 5x_4 &\to& \max
\end{array}
$$

Az egyenletrendszer együtthatómátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az A oszlopvektoraiból kellene előállítanunk a b vektort, nemnegatív együtthatókkal vett lineáris kombinációként.

A kiindulóbázis két tagjaként használhatjuk az y_1, y_2 változókhoz tartozó oszlopokat, de a bázis másik két tagjának megválasztása problémás lehet.

Abból a célból, hogy rendelkezésre álljon egy kiinduló bázis, vezessük be a z ismeretlen vektort is.

$$\begin{array}{rcl} A_1x+z & = & b_1 \\ A_2x+y & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c^Tx \to \max} \end{array}$$

Az így kapott feladatnak viszont csak olyan megoldásai elégítik ki az eredeti feltételrendszert, melyekre a z minden koordinátája 0. Ennek teljesülését egy ú.n. másodlagos célfüggvény bevezetésével biztosítjuk:

$$\hat{f} = \sum_i z_i \to min$$

A megoldást először a másodlagos célfüggvény minimalizálásával kezdjük (1. fázis), ha annak optimuma 0, akkor innen folytatjuk a megoldást az elsődleges célfüggvény optimalizálásával (2. fázis). Ha az első fázis végén $\hat{f} \neq 0$, akkor az eredeti feladatnak nincs megoldása.

Kétfázisú szimplex módszer

A példa folytatása:

$$\begin{array}{rcl}
x_2 + x_4 + z_1 &=& 15 \\
x_3 + x_4 + z_2 &=& 20 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 &=& 50 \\
4x_1 - x_2 + x_4 + y_2 &=& 60 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, z_1, z_2 &\geq& 0 \\
\hline
f(x) = x_1 + 2x_3 - 5x_4 &\to& \max \\
\hat{f}(z) = z_1 + z_2 &\to& \min
\end{array}$$

A másodlagos célfüggvénynek vegyük a (-1)-szeresét, hogy a feladat maximalizálás legyen:

$$-\hat{f}(z) = -z_1 - z_2 \to \max$$

1. fázis:

			0	0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z_1	z_2
z_1	-1	15	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0
z_2	-1	20	0	0	1	1	0	0	0	1
y_1	0	50	1	2	1	0	1	0	0	0
y_2	0	60	4	-1	0	1	0	1	0	0
	-35		0	-1	-1	-2	0	0	0	0

			0	0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z_1	z_2
x_4	0	15	0	1	0	1	0	0	1	0
z_2	-1	5	0	-1	$\boxed{1}$	0	0	0	-1	1
y_1	0	50	1	2	1	0	1	0	0	0
y_2	0	45	4	-2	0	0	0	1	-1	0
	-5		0	1	-1	0	0	0	2	0

			0	0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z_1	z_2
x_4	0	15	0	1	0	1	0	0	1	0
x_3	0	5	0	-1	1	0	0	0	-1	1
y_1	0	45	1	3	0	0	1	0	1	-1
y_2	0	45	4	-2	0	0	0	1	-1	0
	0		0	0	0	0	0	0	1	1

Az első fázis vége, a másodlagos célfüggvény értéke 0

2. fázis:

			1	0	2	-5	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
x_4	-5	15	0	1	0	1	0	0
x_3	2	5	0	-1	1	0	0	0
y_1	0	45	1	$\boxed{3}$	0	0	1	0
y_2	0	45	4	-2	0	0	0	1
	-65		-1	-7	0	0	0	0

			1	0	2	-5	0	0
B	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
x_4	-5	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_3	2	20	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0
x_2	0	15	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
y_2	0	75	$\frac{14}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1
	40		$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{7}{3}$	0

Megoldás: $x_1 = 0,\ x_2 = 15,\ x_3 = 20,\ x_4 = 0,\ f(x) = 40$

Általános feladat

Az

$$\begin{array}{rcl} A_1 x & = & b_1 \\ A_2 x & \leq & b_2 \\ A_3 x & \geq & b_3 \\ \multicolumn{3}{c}{x \geq 0} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c^T x \to \max} \end{array}$$

feladatot, ahol $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, b_3 \geq 0$, általános feladatnak nevezzük.

Ekkor egy nemnegatív vektor levonásával a $\geq$ egyenlőtlenségeket átírjuk egyenlőségekké, majd a módosított normál feladatnál leírtak szerint járunk el.

7. feladat

Oldjuk meg az alábbi feladatot!

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 & \geq & 60 \\
x_1 - x_2 & \geq & 1 \\
x_1 & \leq & 10 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{f(x) = x_1 + x_2 \to \max}
\end{array}
$$

8. feladat

Oldja meg az alábbi lineáris programozási feladatokat!

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\
2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max}
\end{array}
$$

9. feladat

Oldja meg az alábbi lineáris programozási feladatot grafikus úton és szimplex módszerrel is.

$$
\begin{array}{rcl}
4x_1 + x_2 & \geq & 4 \\
x_1 + x_2 & \geq & 2 \\
4x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{2x_1 + x_2 \to \max}
\end{array}
$$

10. feladat

Oldja meg grafikusan, illetve Matlab-bal az alábbi feladatot!

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 & \geq & 6 \\
-x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
5x_1 + 8x_2 & \leq & 40 \\
x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
\hline
f(x) = 2x_1 + x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

11. feladat

Oldja meg az előző feladatot az alábbi célfüggvényekkel is!

(a) $10x_1 + 16x_2 \to \max$

(b) $10x_1 + 16x_2 \to \min$

(c) $10x_1 - 5x_2 \to \min$

12. feladat

Grafikus úton, illetve Matlab segítségével oldja meg az alábbi feladatot!

Egy állattartó telepen az állatok etetésére kétféle (A és B jelű) tápot használnak. A tápok négyféle alapanyagot (I., II., III., IV.) tartalmaznak a táblázat szerinti arányban. Az állatoknak az egyes tápanyagokból a napi minimális szükséglete szintéén a táblázatban adott. Az A táp egységára 30 Ft/kg, míg a B tápé 40 Ft/kg. Határozzuk meg a leggazdaságosabb tápanyagösszetételt!

	A táp (1kg)	B táp (1kg)	Napi min. szükséglet
I.	0.2kg	0kg	0.2kg
II.	0kg	0.2kg	0.4kg
III.	0.1kg	0.2kg	1kg
IV.	0.7kg	0.6kg	4.2kg

13. feladat

Matlab segítségével oldja meg az alábbi feladatot!

Egy folyamatosan működő vegyi üzemben a hét minden napján 3 műszakban zajlik a termelés. Az egyes napokon az egyes műszakok ellátásához minimálisan szükséges létszám:

	H	K	Sze	Cs	P	Szo	V
Éjszaka	5	3	2	4	3	2	2
Délelőtt	7	8	9	5	7	2	5
Délután	9	10	10	7	11	2	2

Az üzemnek 60 dolgozója van, minden dolgozó 4 egymásutáni munkanap+ 3 egymásutáni szabadnap beosztás szerint dolgozik, és a 4 munkanapján végig ugyanabban a műszakban. Hogyan lehet beosztani a munkásokat úgy, hogy az együttes munkaerő igénybevételt minimalizáljuk?

Útmutató: a `linprog` függvény helyett az `intlinprog` függvényt használja, mely egész értékű megoldások keresésére alkalmas.
Az együtthatómátrix előállításához használhatja a `toeplitz` és `kron` függvényeket.