

Alkalmazott matematika

Baran Ágnes

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Példa

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$-4x_1 - 10x_2 - 5x_3 = -12$$

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció (sorcsere nélküli):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & -5 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\ell_{21} = -1 \\ \ell_{31} = 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -13 & -18 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\ell_{32} = -4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

A visszahelyettesítés:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -2 & \rightarrow & x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 & \rightarrow & x_2 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 & \rightarrow & x_1 = 3 \end{aligned}$$

A sorcsere nélküli Gauss-elimináció pontosan akkor hajtható végre, ha $a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{nn}^{(n)} \neq 0$.

Műveletigény:

1 művelet $:=$ 1 összeadás + 1 szorzás

Az A mátrix átalakításához (eltekintve az ℓ_{ik} költségétől):

$$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

művelet.

A b vektor átalakításához és a visszahelyettesítéshez összesen:

$$n^2$$

művelet.

LU-felbontás

Példa

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\ell_{21} = -1 \\ \ell_{31} = 2}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_{32} = -4} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{L:=} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U:=}$$

Az A mátrix **LU-felbontása**:

$$A = LU$$

ahol

L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,

U felsőháromszög mátrix.

LU-felbontás

Az A mátrix LU-felbontása:

$$A = LU$$

ahol

L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,

U felsőháromszög mátrix.

Az eredeti feladat: $Ax = b$ megoldása.

$$LUx = b$$

A mátrix felbontása után a megoldás két lépésben történik:

1. $Ly = b$

2. $Ux = y$

Mindkét rendszer mátrixa háromszög alakú.

A mátrix determinánása

Ha $A = LU$, akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Háromszögmátrix determinánása a főátlóban álló elemek szorzata, így $\det(L) = 1$ és

$$\det(A) = \det(U)$$

Az A determinánása az U főátlóbeli elemeinek szorzata.

LU-felbontás

Példa (folytatás)

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

A mátrix felbontása:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

felülről lefelé visszahelyettesítve:

$$y_1 = 3$$

$$-y_1 + y_2 = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 4$$

$$2y_1 - 4y_2 + y_3 = -12 \quad \rightarrow \quad y_3 = -2$$

$$2. \quad Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alulról felfelé visszahelyettesítve:

$$-x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad x_3 = 2$$

$$2x_2 + 3x_3 = 4 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3$$

Az A determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = 4$$

Az **LU-felbontás műveletigénye** ugyanannyi, mint a Gauss-eliminációé:

A mátrix felbontása: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ művelet

A két visszahelyettesítés: összesen n^2 művelet

A **determináns kiszámítása** LU-felbontással: $\approx \frac{n^3}{3}$ művelet

Az LU-felbontás tárigénye:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & & & & & \\ 2 & & & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 4 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & & \\ 0 & -8 & -13 & & & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & & & & & \\ 2 & -4 & & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 4 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

tömören:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -13 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & -12 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & \boxed{-2} & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & \boxed{-1} & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

így

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

A két visszahelyettesítés:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -3$$

$$-2y_1 + y_2 = -5 \quad \rightarrow \quad y_2 = -11$$

$$3y_1 - y_2 + y_3 = 2 \quad \rightarrow \quad y_3 = 0$$

$$2y_1 - 2y_2 + 4y_3 + y_4 = 19 \quad \rightarrow \quad y_4 = 3$$

$$2. \quad Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3x_4 = 3 \quad \rightarrow \quad x_4 = 1$$

$$-x_3 - 2x_4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_3 = -2$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11 \quad \rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -3 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1$$

Az A mátrix determinánása:

$$\det(A) = \det(U) = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 3 = 12$$

1. feladat

Oldja meg LU-felbontással az $Ax = b$ egyenletrendszert! Határozza meg az A mátrix determinánsát!

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

2. feladat

Oldja meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ lineáris egyenletrendszereket LU-felbontással!

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés

Ha több lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol a rendszerek mátrixa azonos, akkor a mátrix felbontását elegendő egyszer elvégezni.

PLU-felbontás (Gauss-elimináció sorcserével)

A sorcserés Gauss-elimináció az A mátrix

$$A = PLU$$

felbontásának felel meg, ahol

P: egy permutációs mátrix (az egységmátrix sorainak permutálásával kapjuk)

L: alsóháromszögmátrix, átlójában 1-esek

U: felsőháromszög mátrix

Ezt a felbontást PLU-felbontásnak nevezzük.

Permutációs mátrix: az egységmátrix sorainak permutálásával

Pl. az i -edik és j -edik sor cseréjével ($i < j$):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \leftarrow i. \\ \vdots \\ e_i \leftarrow j. \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Ekkor

PA : az A mátrix i -edik és j -edik sora felcserélődik,

AP : az A mátrix i -edik és j -edik oszlopa felcserélődik.

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása:

$$A = PLU$$

$$LUx = P^{-1}b$$

- 1. $Ly = P^{-1}b$ megoldása
- 2. $Ux = y$ megoldása

Megjegyzés

$P^{-1} = P^T$, továbbá a gyakorlatban nem a P hanem a P^T mátrixot határozzuk meg, és egyetlen oszlopvektorba tömörítve tároljuk.

Lineáris algebra Octave/Matlab-bal

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Használjuk a backslash operátort!

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
```

```
>>b=[3; 1; -12];
```

```
>>x=A\b
```

```
x=
```

```
3
```

```
-1
```

```
2
```

Ügyeljünk rá, hogy a b oszlopvektorként legyen megadva!

Ha az egyenletrendszer kibővített mátrixával meghívjuk az `rref` függvényt:

```
>>rref([A b])
```

```
ans=
```

```
1 0 0 3
```

```
0 1 0 -1
```

```
0 0 1 2
```

akkor láthatjuk, hogy a Gauss-Jordan elimináció eredményeként valóban így állítható elő a b vektor az A oszlopvektoraiból, amelyek lineárisan függetlenek, tehát a megoldás egyértelmű.

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -2 & -7 & 3 \\ 2 & 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Próbálkozzunk ismét a backslash operátorral!

```
>>A=[-4 -4 2; -2 -7 3; 2 12 -5];
```

```
>>b=[-2; 6; -13];
```

```
>>x=A\b
```

Warning: Matrix is singular to working precision

```
x=
```

```
NaN
```

```
NaN
```

```
NaN
```

A Matlab arra figyelmeztetett, hogy a mátrix szinguláris (valóban, $\det(A) = 0$).

Próbálkozzunk az `rref` függvénnyel!

```
>>rref([A b])
```

```
ans=
```

```
1.0000    0 -0.1000    1.9000
      0 1.0000 -0.4000   -1.4000
      0      0      0      0
```

Azt látjuk, hogy a mátrix oszlopvektorai lineárisan függőek, de a b vektor benne van az oszlopvektorok által felfeszített térben. Tudjuk, hogy ilyenkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezek közül egy:

$$x = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha az egyenletrendszer összes megoldását szeretnénk tudni, akkor használjuk a null függvényt, amely előállítja a nulltér egy bázisát:

```
>>p=null(A,'r')
```

```
p=
```

```
1/10
```

```
2/5
```

```
1
```

(az 'r' opció hatására a vektor racionális alakban jelenik meg)

Ezek szerint a lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A backslash operátorral azt kapjuk, hogy

```
>>x=A\b
```

```
x=
```

```
1.0000
```

```
2.7000
```

Könnyen látható, hogy ez **nem megoldása** az egyenletrendszernek.

Az `rref` függvénnyel:

```
>>rref([A b])  
ans=  
    1  0  0  
    0  1  0  
    0  0  1  
    0  0  0
```

láthatjuk, hogy az alaplátrix rangja 2, a kibővített mátrixé 3, az egyenletrendszer **ellentmondásos**.

Ellentmondásos lineáris egyenletrendszerek esetén a backslash operátor egy olyan x vektort ad vissza, melyre az Ax és b vektorok eltérése euklideszi normában a legkisebb (azaz $\|Ax - b\|_2$ minimális). Ilyenkor azt mondjuk, hogy x az egyenletrendszer legkisebb négyzetes értelemben vett megoldása.

5. feladat

Oldja meg Octave/Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ -23 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -13 & 22 \\ 5 & -1 & 16 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 81 \\ -33 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Hasznos: ha az x racionális elemű vektor koordinátáit nem tizedestört alakban akarjuk látni, akkor használhatjuk a `rats(x)` utasítást, vagy a kiíratás formátumát állítsuk át: `format rat`

Több jobboldali vektor

Példa

Oldjuk meg az $Ax = b$ és $Ax = c$ egyenletrendszereket, ha

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ -42 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Mivel a két rendszer mátrixa azonos, ezért megoldhatjuk őket egyszerre.

```
>>A=[-2 -1 4; 2 3 -1; -4 -10 -5];
```

```
>>b=[3; 1; -12]; c=[17; 1; -42];
```

```
>>x=A\[b c]
```

```
x=
```

```
    3    -2  
   -1     3  
    2     4
```

Több jobboldali vektor

Nagyméretű mátrixok esetén a futási időt jelentősen befolyásolhatja, hogy az azonos mátrixszal adott rendszereket egyszerre, vagy külön-külön oldjuk meg:

```
>> A=rand(10000);  
>> b=ones(10000,1);  
>> c=zeros(10000,1);  
>> tic;x=A\[b,c];toc  
Elapsed time is 6.116513 seconds.  
>> tic;x=A\b; x2=A\c; toc  
Elapsed time is 11.571959 seconds.
```

(A fenti eredmény egy Intel Core i5-4590 processzorral, 7.7 GiB memóriával rendelkező gépen született).

LU-felbontás

$$[L, U, P] = \text{lu}(A)$$

Ekkor

- L: alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es
- U: felsőháromszög mátrix
- P: permutációs mátrix

úgy, hogy $PA = LU$.

$$[L1, U1] = \text{lu}(A)$$

Ekkor $A = L1 \cdot U1$ úgy, hogy $U1$ megegyezik az előző U mátrixszal és $L1 = P^T L$.

Több jobboldali vektor

Ha több lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol a mátrix azonos, a jobboldali vektorok különbözőek, de a jobboldali vektorok nem állnak egyszerre rendelkezésre, akkor a következő utasításokat használjuk:

Egyetlen egyszer, a rendszerek megoldása előtt készítsük el a mátrix LU-felbontását:

```
>> [L,U]=lu(A);
```

Ahányszor egy újabb b jobboldali vektor rendelkezésünkre áll, adjuk ki az

```
>> x=U\ (L\b);
```

utasítást, amivel megkapjuk az adott jobboldali vektor esetén a rendszer megoldását.

Feladat

Tekintse az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ennek megoldásához először alkalmazza a

$$c = A(2,2) - A(1,2) * A(2,1) / A(1,1);$$

$$d = b(2) - b(1) * A(2,1) / A(1,1);$$

$$x(2) = d / c$$

$$x(1) = (b(1) - A(1,2) * x(2)) / A(1,1)$$

utasításokat (amik a sorcsere nélküli Gauss-eliminációnak felelnek meg a 2×2 -es $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer esetén), majd ezek után a $x = A \backslash b$ utasítást. Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

Mátrix inverze Octave/Matlab-bal

Az `inv` függvénnyel számítható. Ha a mátrix nem négyzetes, vagy a determinánsa 0 (vagy 0-hoz közeli), akkor hibaüzenetet, illetve figyelmeztetést kapunk.

**Nagyméretű mátrixok inverzének kiszámítása túl költséges lehet.
Csak akkor számoljuk ki, ha ténylegesen szükségünk van az inverzre.**

Pl. az $Ax = b$ négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldása $x = A^{-1}b$ módon kb háromszor annyi műveletbe kerül, mint az $x = A \backslash b$ megoldás.

Ritka mátrixok

A sparse függvény

```
>> A=[-1.1 0 0 2; 0 0 2 0; 0 -1 0 1;0 0 0 3]
```

```
A =
```

-1.1000	0	0	2.0000
0	0	2.0000	0
0	-1.0000	0	1.0000
0	0	0	3.0000

```
>> S=sparse(A)
```

```
S =
```

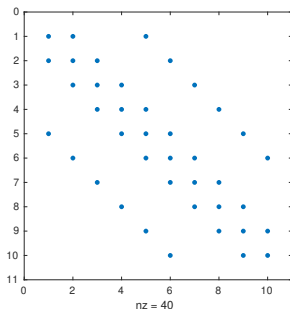
(1,1)	-1.1000
(3,2)	-1.0000
(2,3)	2.0000
(1,4)	2.0000
(3,4)	1.0000
(4,4)	3.0000

Definiáljunk egy olyan 10×10 -es ritka mátrixot, melyben csak 5 átlóban vannak 0-tól különböző elemek:

```
>> d=ones(10,1);  
>> S=spdiags([d d -4*d d d],[-4 -1 0 1 4],10,10);
```

Megnézhetjük a nemnulla elemek elhelyezkedését:

```
>> spy(S)
```



A nemnulla elemek száma: `nnz(S)`

Hasonlítsuk össze egy nagyméretű ritka mátrix esetén a tárigényt a különböző tárolási módok esetén:

```
>> d=ones(10000,1);  
>> S=spdiags([d d -4*d d d],[-4000 -1 0 1 4000],10000,10000);  
>> F=full(S);  
>> whos S F
```

Vizsgáljuk meg egy mátrix-vektor szorzás futási idejét:

```
>> x=rand(10000,1);  
>> tic;b=S*x;toc  
>> tic;b=F*x;toc
```

és egy lineáris egyenletrendszer megoldásának futási idejét

```
>> tic;y=F\b;toc  
>> tic;y=S\b;toc
```