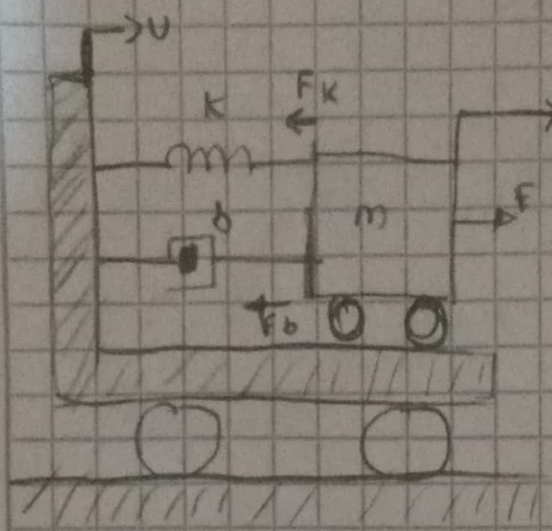
ejemplo 3.3 Ogata 5 ed



$$0 = m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + k(y - u)$$

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} + b\dot{u} - ky + ku$$

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

separando variables:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Aplicando Laplace

$$\left(s^2 - \frac{b}{m}s - \frac{k}{m}\right)Y(s) = \left(-\frac{b}{m}s - \frac{k}{m}\right)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left(-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{bs + k}{s^2 - \frac{b}{m}s - \frac{k}{m}}\right)$$

el sistema es de la forma

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

Donde

$$a_1 = \frac{b}{m} \quad a_2 = \frac{k}{m} \quad b_0 = 0 \quad b_1 = \frac{b}{m} \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

Por lo tanto, definiendo estados:

$$x_1 = y - \beta_0 u \qquad x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$\beta_0 = b_0 = 0 \qquad \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = b_1 = \frac{b}{m} \qquad \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u \qquad \dot{x}_1 = x_2 + \frac{b}{m}u$$

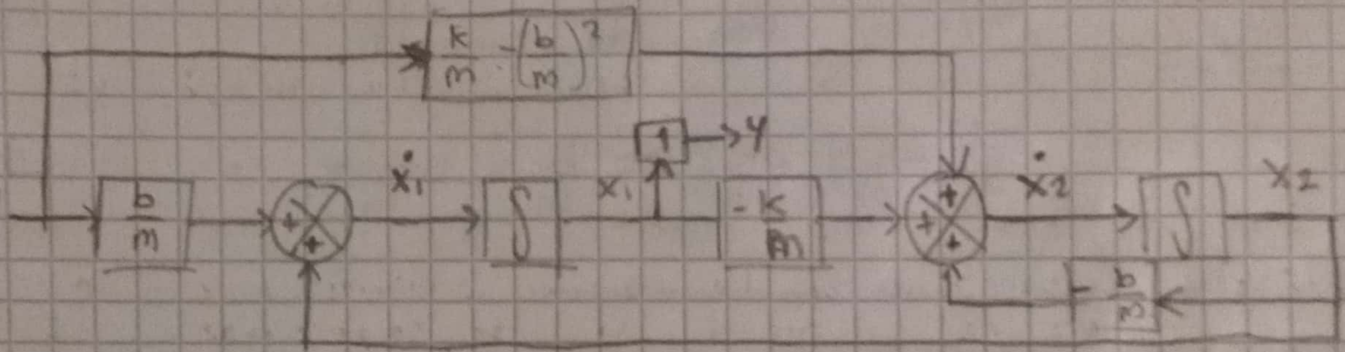
$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

Por lo tanto la representación en variables de estado es:

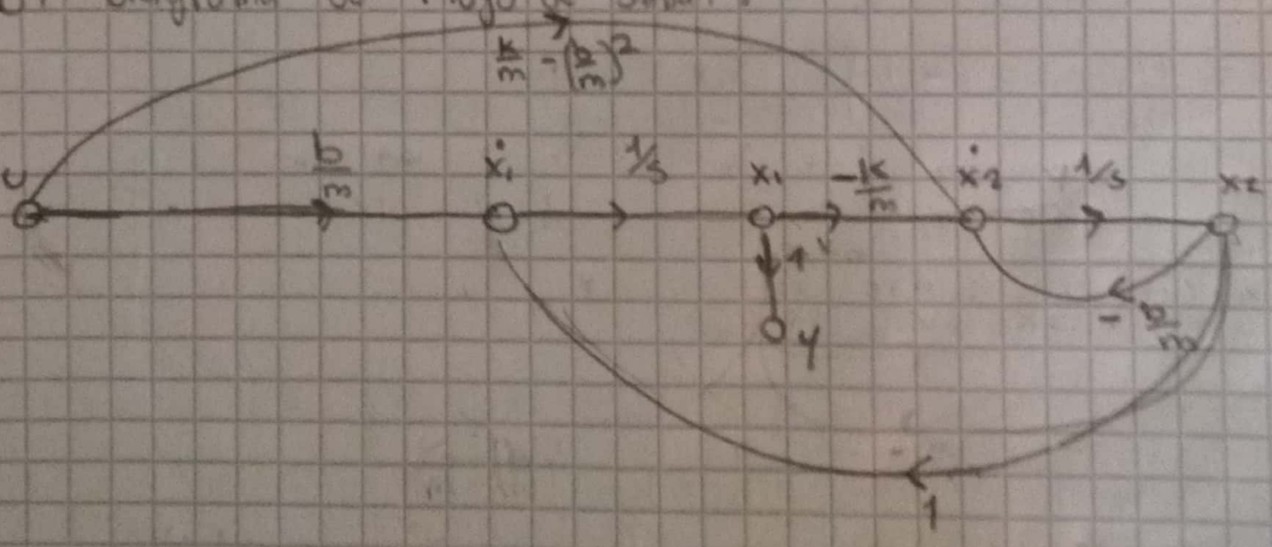
$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{0}\, u$$

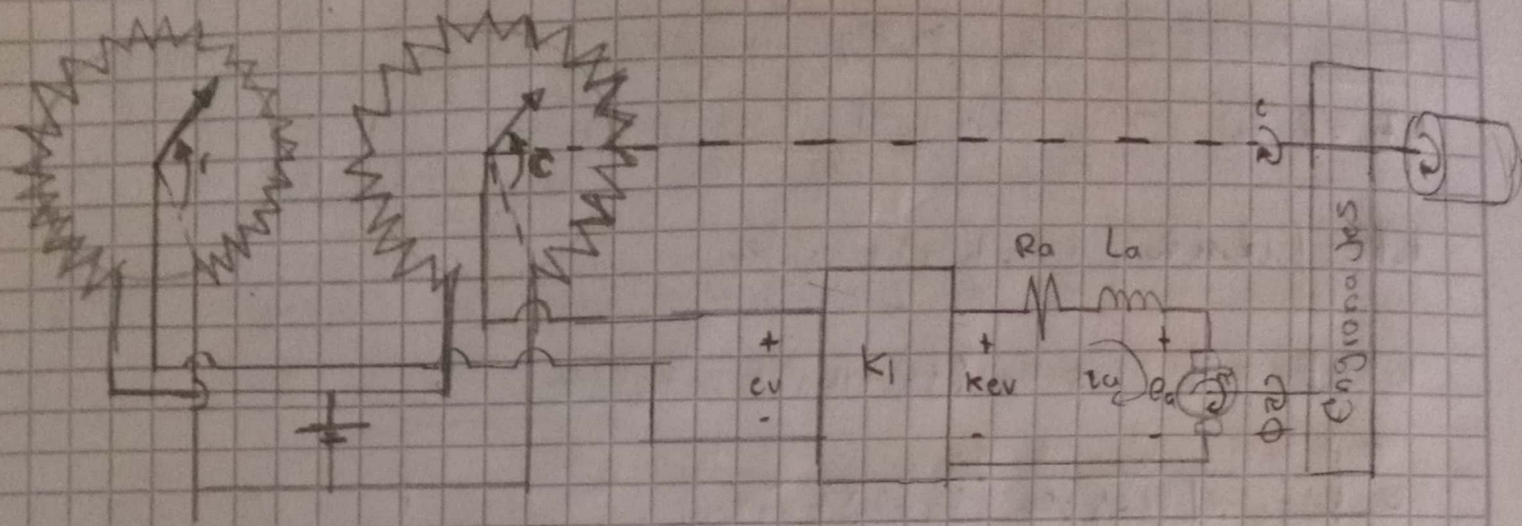
el Diagrama en bloques es:



El diagrama de flujo de señal:



Ejercicio A-3-9 Ogata



Los potenciometros convierten las posiciones angulares r y c en señales eléctricas proporcionales, er y ec respectivamente. Por lo tanto la señal de error está dada por:

$$e = r - c$$

y el error de voltaje es:

$$e_v = e_r - e_c = k_0 [r - c] \Rightarrow k_0 \text{ es una constante de proporcionalidad}$$

La señal de error ev es amplificada por K_1, por lo tanto para la parte eléctrica se tiene que:

$$k_1 e_v = R_a i_a + L \frac{d i_a}{dt} + e_a$$

Para un flujo magnetico constante en el motor, el voltaje inducido ea es proporcional a la velocidad angular

$$k_1 e_v = R_a i_a + L_a \frac{d i_a}{dt} + k_3 \frac{d\theta}{dt} \quad [1]$$

Para la parte mecánica, se tiene que:

$$T_a = j \frac{d^2\theta}{dt} + b\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \text{el torque es proporcional a la corriente de armadura}$$

$$k_2 i_a = j \frac{d^2\theta}{dt} + b\frac{d\theta}{dt} \; [2]$$

despejando la de [2] y aplicando Laplace

$$I_a = \left[\frac{J}{K_2}s^2 + \frac{bs}{K_2}\right]\theta$$

Reemplazando en [1] y aplicando Laplace

$$K_1 E_V = R_a\left[\frac{J}{K_2}s^2 + \frac{bs}{K_2}\right]\theta + L_a s\left[\frac{Js^2}{K_2} + \frac{bs}{K_2}\right]\theta + K_3 s\theta$$

$$K_1 E_V = \left[(L_a s + R_a)\left(\frac{Js^2}{K_2} + \frac{b}{K_2}s\right) + K_3 s\right]\theta$$

$$K_1 K_2 E_V = \left[(L_a s + R_a)(Js^2 + bs) + K_2 K_3 s\right]\theta$$

$$\frac{\theta(s)}{E_V(s)} = \frac{K_1 K_2}{s\left[(L_a s + R_a)(Js + b) + K_2 K_3\right]}$$

Debido al tren de engranajes, el eje de salida gira n veces en cada revolución del eje del motor, entonces

$$C(s) = n\theta(s)$$

El error de voltaje está dado por

$$E_V(s) = K_0\left[R(s) - C(s)\right] = K_0 E(s)$$

Por lo tanto $\dfrac{C(s)}{E(s)} = \dfrac{E_V}{E} \cdot \dfrac{\theta}{E_V} \cdot \dfrac{C}{\theta} = \dfrac{nK_0 K_1 K_2}{s\left[(L_a s + R_a)(Js + b) + K_2 K_3\right]}$

A partir de [1] y [2] se pueden definir los estados:

$x_1 = \theta \qquad x_2 = \dot{x}_1 \qquad x_3 = I_a \qquad u = e \qquad y = C = n x_1$

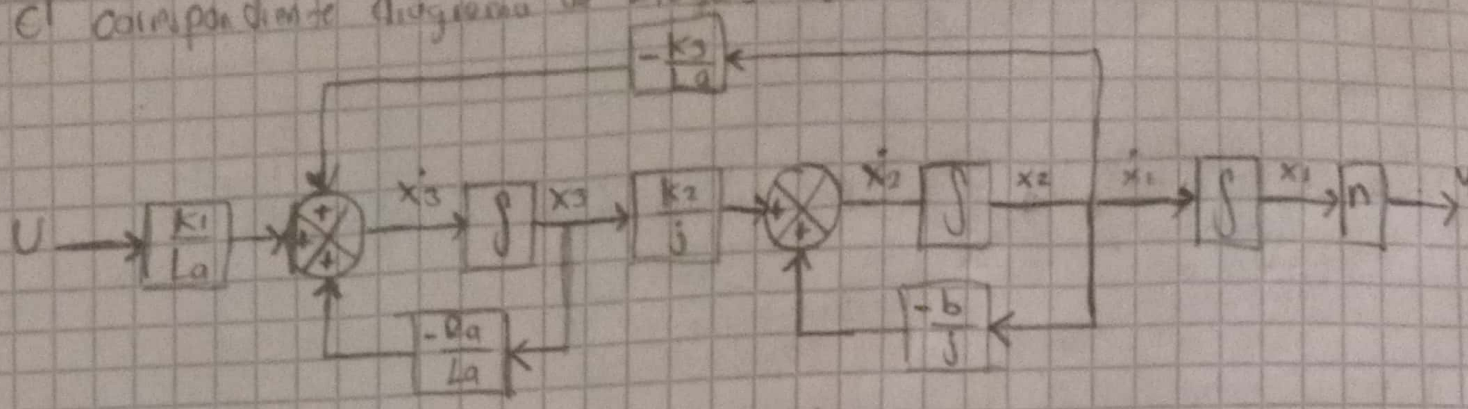
$K_0 K_1 u = R_a x_3 + L_a \dot{x}_3 + K_3 x_2 \qquad\qquad K_2 x_3 = J\dot{x}_2 + b x_2$

$\dot{x}_3 = -\dfrac{K_3}{L_a}x_2 - \dfrac{R_a}{L_a}x_3 + \dfrac{K_0 K_1}{L_a}u \qquad\qquad \dot{x}_2 = -\dfrac{b}{J}x_2 + \dfrac{K_2}{J}x_3$

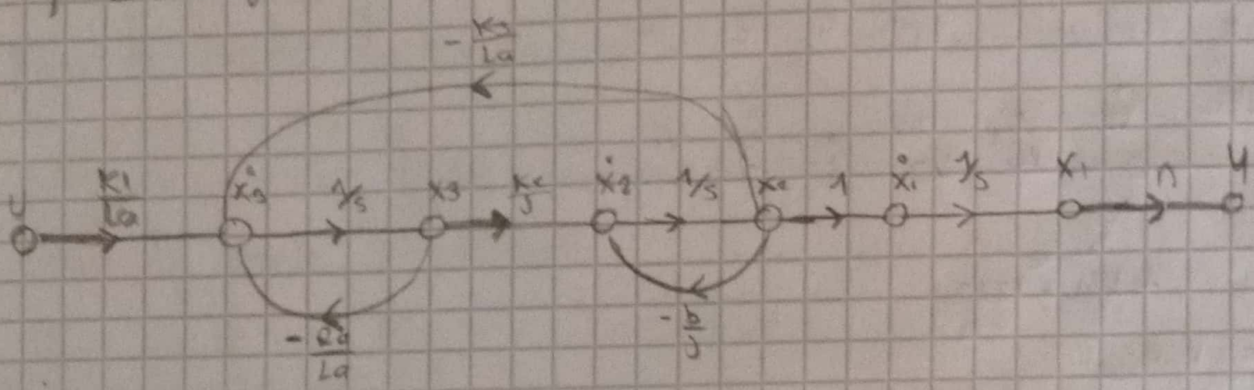
El espacio de estados es:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_2}{J} \\ 0 & -\frac{K_3}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_0 K_1}{L_a} \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \end{bmatrix}\vec{x} + \vec{0}\,u$$

el correspondiente diagrama de bloques así



y el diagrama de flujo de señales es



si La se hace despreciable entonces [1] se modifica de la siguiente manera:

$$K_1 e_v = R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} \qquad [3]$$

y los estados se pueden definir mediante [3] y [2] de la siguiente manera:

$$x_1 = \theta \qquad x_2 = \dot{x}_1 \qquad U = e \qquad y = n x_1$$

$$k_o K_1 U = R_a I_a + K_3 x_2 \qquad K_2 I_a = j\dot{x}_2 + b x_2$$

$$I_a = \frac{j}{K_2}\dot{x}_2 + \frac{b}{K_2}x_2$$

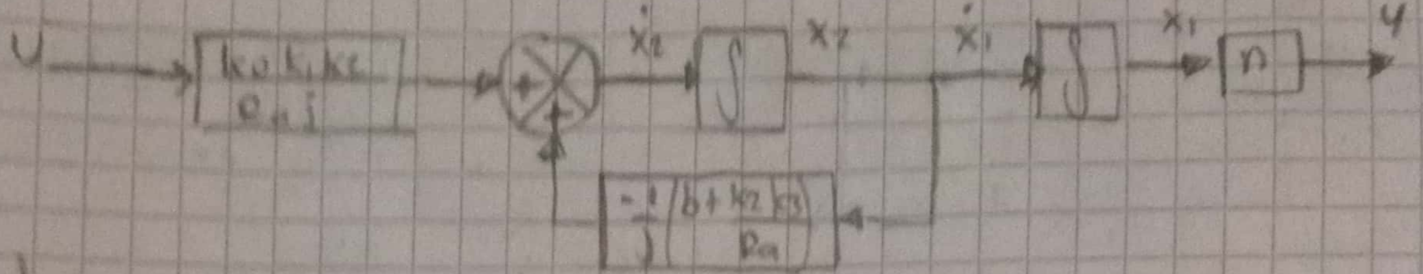
$$k_o K_1 U = \frac{R_a j}{K_2}\dot{x}_2 + \frac{R_a b}{K_2}x_2 + K_3 x_2$$

$$k_o K_1 K_2 U = R_a j\dot{x}_2 + (R_a b + K_2 K_3)x_2$$

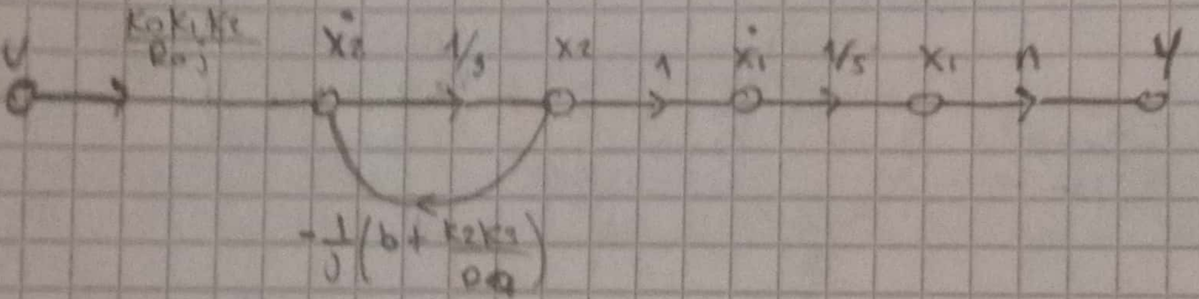
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{R_a j}(R_a b + K_2 K_3)x_2 + \frac{k_o K_1 K_2}{R_a j}U = -\frac{1}{j}\left(b + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) + \frac{k_o K_1 K_2}{R_a j}U$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{j}\left(b + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_o K_1 K_2}{R_a j} \end{bmatrix}U \qquad y = [n \;\; 0]\vec{x} + \vec{0}\,U$$

El diagrama en bloques es:

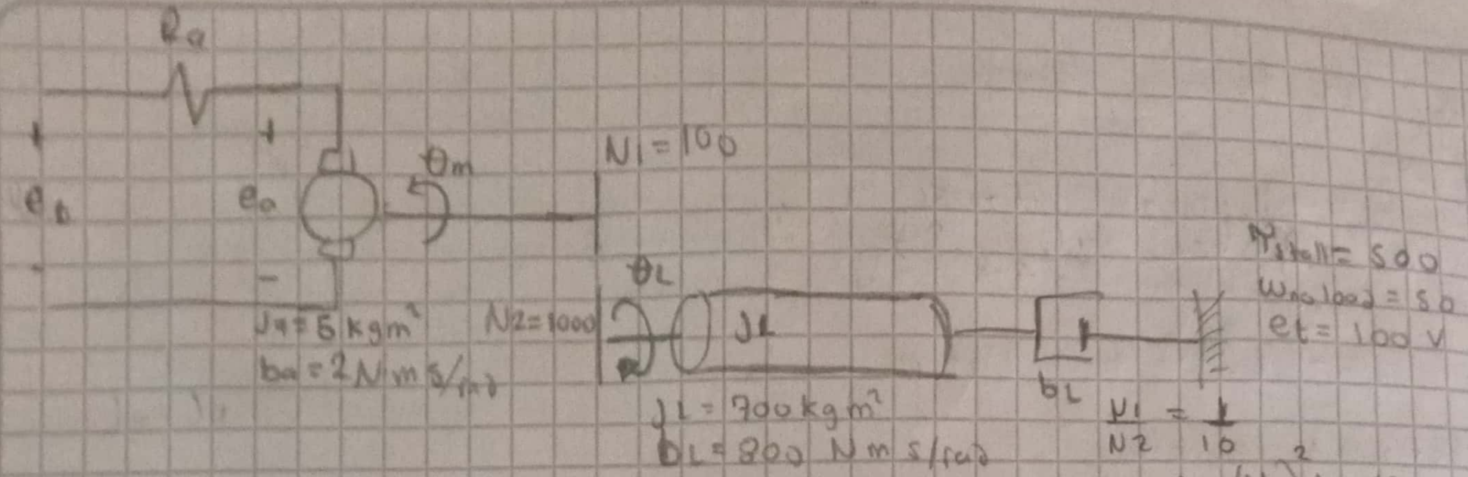


El diagrama del flujo de señal:



Su función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{n k_0 k_1 k_2}{s[R_a(Js+b)+k_2k_3]} = \frac{n k_0 k_1 k_2}{R_a J s\left[s+\frac{1}{J}\left(b+\frac{k_2k_3}{R_a}\right)\right]}$$



$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{10}$

$J_m = J_a + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_L = 12$

$b_m = b_a + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_L = 10$

$\frac{k_2}{R_a} = \frac{T_{stall}}{e_t} = 5$

$k_1 = \frac{e_t}{\omega_{noload}} = 2$

Para la parte electrica

$$e_t = R_a i_a + e_a = R_a i_a + k_1 \dot{\theta}_m \quad [1]$$

Para la parte mecanica:

$$T_m = J_m \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} \Rightarrow T_m = k_2 i_a$$

Reemplazando en [1]

$$e_t = \frac{R_a}{k_2} J_m \ddot{\theta} + \left(\frac{R_a}{k_2} b_m + k_1\right) \dot{\theta}_m$$

$$\frac{k_2}{R_a} e_t = J_m \ddot{\theta}_m + \left(b_m + \frac{k_1 k_2}{R_a}\right) \dot{\theta}_m \quad [2]$$

aplicando Laplace:

$$\frac{k_2}{J_m R_a} E_t = \left[s^2 + \frac{1}{J_m}\left(b_m + \frac{k_1 k_2}{R_a}\right) s\right] \Theta_m$$

$$\frac{\Theta_m}{E_t} = \frac{k_2}{R_a J_m s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(b_m + \frac{k_1 k_2}{R_a}\right)\right]}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\Theta_m}{E_t} = \frac{0.417}{s(s+1,667)}$$

$$\frac{\Theta_L}{E_t} = \frac{\frac{N_1}{N_2} k_2}{R_a J_m s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(b_m + \frac{k_1 k_2}{R_a}\right)\right]}$$

$$\frac{\Theta_L}{E_t} = \frac{0.0417}{s(s+1,667)}$$

De [2] tenemos que:

$$\ddot{\theta}_m = -\frac{1}{J_m}\left(b_m + \frac{k_1 k_2}{R_a}\right)\dot{\theta} + \frac{k_2}{R_a J_m} e_t$$

$$\ddot{\theta}_m = -1,667\dot{\theta} + 0.417\, e_t$$

Definiendo estados

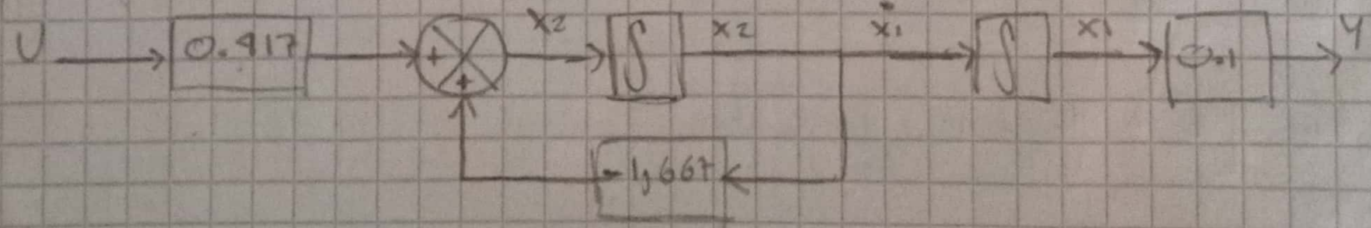
$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{x}_1 \quad u = e_t \quad y = 0.1\, x_1 = \theta_L$

$$\dot{x}_2 = -1,667\, x_2 + 0.417\, u$$

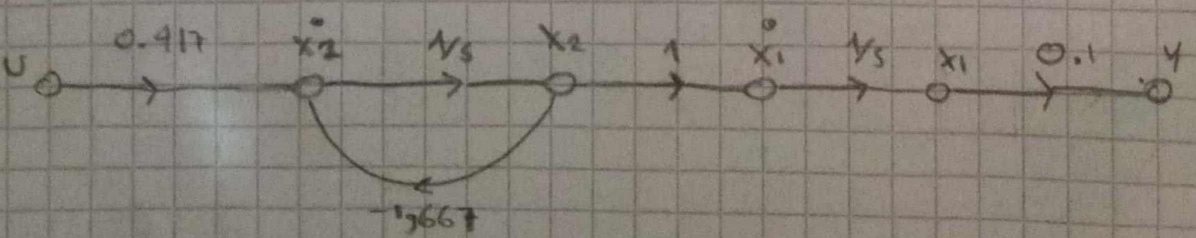
$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,667 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.417 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{0}\, u$$

El diagrama en bloques es:



El diagrama de flujo de señal correspondiente



aunque abordan los ejercicios 2 y 3 de manera diferente, los autores llegan a la misma forma de función de transferencia, por lo que son sistemas equivalentes.