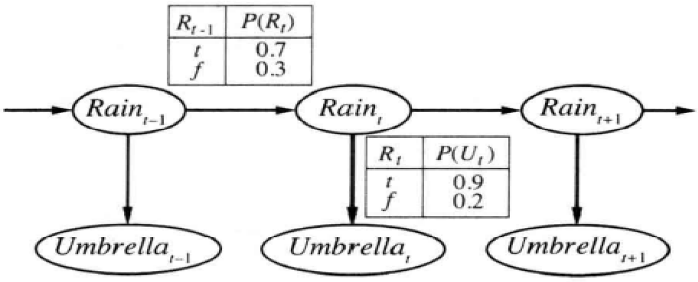
解答：



a) 关于 t 的筛选函数如下（filtering formula）：

$$P(R_t|u_{1:t}) = \alpha P(u_t|R_t)\sum_{R_{t-1}} P(R_t|R_{t-1})P(R_{t-1}|u_{1:t-1})$$

关于 fixed point 我们需要满足：

$P(R_t|u_{1:t}) = P(R_{t-1}|u_{1:t-1})$

假设我们概率的 fixed-point 是 p，则 true 的概率是 p，false 的概率是 1-p 则我们可以构造等式有：

$$\begin{aligned}[p, 1-p] &= \alpha[0.9,0.2]\big([0.7,0.3]p + [0.3,0.7](1-p)\big)\\ &= \alpha[0.9*(0.4p+0.3), 0.2*(-0.4p+0.7)]\\ &= \frac{[0.9*(0.4p+0.3), 0.2*(-0.4p+0.7)]}{0.9*(0.4p+0.3)+0.2*(-0.4p+0.7)}\end{aligned}$$

整理这个方程有，解得$p = 0.89$

b) 根据计算公式有：

$$P(R_{2+k}|U_1,U_2) = [0.7,0.3]P(r_{2+k-1}|U_1,U_2) + [0.3,0.7]P(\sim r_{2+k-1}|U_1,U_2)$$

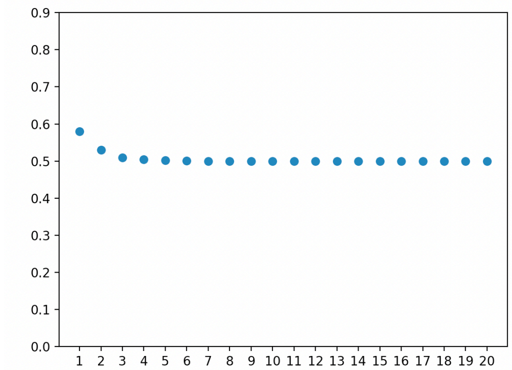
即有：

$$P(R_{2+k}|U_1,U_2) = 0.7*P(r_{2+k-1}|U_1,U_2) + 0.3*(1-P(r_{2+k-1}|U_1,U_2))$$

即：

$$P(R_{2+k}|U_1,U_2) = 0.4*P(r_{2+k-1}|U_1,U_2) + 0.3$$

用这个递推公式，我们可以画出下面的图（对于 k = 1,2,3…20）



我们反复变换初值，仍然有$P(R_{2+k}|U_1,U_2)$收敛于 0.5。

下面我们证明收敛于 0.5：

收敛条件为：$P(R_{2+k}|U_1,U_2) = P(r_{2+k-1}|U_1,U_2)$

即我们有：$0.6*P(R_{2+k}|U_1,U_2) = 0.3$　解得：$P(R_{2+k}|U_1,U_2) = 0.5$

即其 fixed point 是 0.5