Problem 1

设矩阵 $K \in R^{N\times N}$ 为实对称矩阵，证明以下三个命题两两等价：
（1）K 可以分解为WW^T;
（2）K 的特征值非负;
（3）对任意 $x \in R^N$，有$x^T Kx \geq 0$恒成立。

证明：上述三个命题两两互相推导如下所示：

1. （2）和（3）互相推导

   由（3）推（2）:
   我们设$Kx = \lambda x$，其中λ为矩阵 K 的特征值。
   两边同时乘以x^T，有$x^T Kx = \lambda x^T x$
   而由（3）有：$x^T Kx \geq 0$，且$x^T x \geq 0$
   即$\lambda \geq 0$

   由（2）推（3）:
   由于（2）有 K 的所有特征值非负，即对于所有的：$Kx = \lambda x$，有$\lambda \geq 0$
   两边同时乘以x^T，有：$x^T Kx = \lambda x^T x$
   由于$x^T x \geq 0$以及$\lambda \geq 0$，所以有$\lambda x^T x \geq 0$
   即$x^T Kx \geq 0$

2. （1）和（2）互相推导

   由（1）推（2）:
   由（1）得存在实矩阵 W，满足$K = WW^T$，
   我们设$Kx = \lambda x$，其中λ为 K 的特征值。
   代入$K = WW^T$，有$WW^T x = \lambda x$
   两边同时乘以x^T有，$x^T WW^T x = \lambda x^T x$,即有$(W^T x)^T W^T x = \lambda x^T x$
   由于$(W^T x)^T W^T x \geq 0$且$x^T x \geq 0$,即有$\lambda \geq 0$

   由（2）推（1）:
   由（2）我们知道：K 的所有特征值$\lambda \geq 0$
   由于 K 为对称矩阵，所有特征值非负$(\lambda \geq 0)$，所以其与一个非负对角矩阵 D 相似，
   即$K = UDU^T$,其中 U 是正交矩阵，D 是非负对角矩阵$D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ $(d_i \geq 0)$。
   所以我们有$A = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^T$,其中$\sqrt{D} = diag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3}, \ldots, \sqrt{d_n})$，仍为对角矩阵。

   即$A = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^T = U\sqrt{D}\sqrt{D}^T U^T = \left(U\sqrt{D}\right)\left(U\sqrt{D}\right)^T = WW^T$,其中$W = U\sqrt{D}$

3. （1）和（3）互相推导

   由（1）推（3）:
   由于存在实矩阵 P，满足$K = WW^T$
   我们对任意的实矩阵 x 有：$x^T Kx = x^T WW^T x = (W^T x)^T (W^T x) \geq 0$

   由（3）推（1）:
   由上面的证明，我们可以由（3）推出（2），且能够由（2）推出（1），所以结合两者的推导步骤即可以由（3）推出（1）。

Problem 2

证明核函数$k(x,y) = (x^T y)^2$是良定义的，其中 $x, y \in R^N$

证明：

由$K_1(x,y) = x^T y$、$k_2(x,y) = x^T y$是 well-defined 的，

即$k_3(x,y) = k_1(x,y)k_2(x,y) = x^T y x^T y = (x^T y)^2$也是 well-defined 的。