

# Problemas combinados de localización y rutas.

María Albareda Sambola  
Dpto. Estadística  
Universidad Carlos III. Madrid  
[malbared@est-econ.uc3m.es](mailto:malbared@est-econ.uc3m.es)

Juan Antonio Díaz  
Dpto. Ingeniería Industrial y Textil  
Universidad de las Américas. Puebla. México  
[juana.diazg@udlap.mx](mailto:juana.diazg@udlap.mx)

Elena Fernández  
Dpto. Estadística e Investigación Operativa  
Universitat Politècnica de Catalunya  
[e.fernandez@upc.edu](mailto:e.fernandez@upc.edu)

Carlos Martínez Ojea  
Dpto. Estadística e Investigación Operativa  
Universitat Politècnica de Catalunya  
[carlos.martinez-ojea@upc.edu](mailto:carlos.martinez-ojea@upc.edu)

## Resumen

En este trabajo ofrecemos una breve perspectiva de los problemas combinados de localización y rutas. Tanto los problemas de localización como los de rutas tienen numerosas aplicaciones reales, frecuentemente relacionadas con el diseño y la utilización de sistemas logísticos. Tradicionalmente, ambos problemas se han tratado de forma independiente por diversos motivos, entre los que cabe resaltar la dificultad inherente a cada uno de los problemas. Sin embargo, es sabido que la localización de los centros de servicio puede afectar de forma considerable a los costes de las rutas. Por tanto, es conveniente estudiar estos problemas desde una perspectiva conjunta en la que hay que tener en cuenta tanto aspectos de modelación como los referentes a las técnicas de resolución para tratar los diferentes modelos, que son muy variadas. En este trabajo comentaremos algunos trabajos previos relacionados y describiremos las características básicas de estos problemas.

## 1. Introducción

El diseño de sistemas logísticos requiere tomar una serie de decisiones estratégicas. Una de ellas se refiere a la ubicación de los centros de servicio (plantas) desde las que se realizarán las actividades del sistema. Estas plantas deben situarse de forma que se minimicen los costes de operación del sistema, los cuales pueden incluir los costes de instalación de las plantas y los derivados del servicio a los clientes, entre otros. Adicionalmente, el nivel operacional requiere tomar decisiones sobre la asignación de clientes dentro del conjunto de plantas abiertas. En algunas situaciones, el servicio se realiza en las propias plantas, de manera que los clientes deben acudir a ellas. Esto ocurre cuando los centros de servicio son hospitales, escuelas, oficinas de correo, etc. En estos casos la decisión sobre el servicio a clientes da lugar a problemas de localización-asignación que se han estudiado en una gran variedad de contextos como se describe,

por ejemplo, en (24). Sin embargo, en otras situaciones el servicio se realiza donde se sitúan los clientes. En estos casos, cuando la naturaleza de los servicios admite que se realice una secuencia de ellos sin volver a la planta, será necesario abordar decisiones adicionales referentes a la gestión de las rutas a nivel operacional, dando lugar a problemas combinados de localización-rutas (LR). Además de las características mencionadas, los problemas LR deben tener en cuenta las distancias entre los clientes así como diversas características de los sistemas como el número de vehículos disponibles, sus capacidades, etc.

Los problemas de rutas también se han estudiado en una gran variedad de contextos. Las condiciones impuestas normalmente están relacionadas con la forma en la que se desea satisfacer la demanda de un determinado servicio. Habitualmente, estos problemas se formulan en términos de problemas en grafos y pueden clasificarse en dos grandes familias según se sitúe la demanda de los clientes sobre los arcos o los nodos del grafo, respectivamente. Las aplicaciones de los problemas de *rutas por arcos* son numerosas e incluyen las relacionadas con la distribución/recogida de correo, recogida de desperdicios, limpieza de carreteras, etc., así como el trazado y mantenimiento de líneas eléctricas, de comunicación y otros. Ejemplos de problemas de *rutas por nodos* son todos aquellos en los que los vehículos realizan el servicio sobre los nodos del grafo, como ocurre en problemas de distribución/recogida de mercancías que aparecen casi siempre en el sector privado. Diferentes problemas de transporte público pertenecen tanto al primer como al segundo grupo. Los libros (20; 7) son monografías de problemas de rutas por nodos y por arcos, respectivamente.

En numerosas aplicaciones relacionadas con la ubicación de servicios, la localización de los centros de servicio no sólo afecta a los costes de localización, sino que también tiene un impacto considerable en los costes de las rutas (33; 28). En estas situaciones el problema conjunto de localización-rutas es de hecho un problema binivel que debería abordarse de forma conjunta, lo que requeriría un modelo combinado LR. No obstante, dada la dificultad tanto de los problemas de localización como de los de rutas, en la práctica estos dos problemas se tratan a menudo de forma independiente. Cabe resaltar, sin embargo, que en los últimos años, varios trabajos han abordado problemas combinados de LR de diversas características. A pesar de ello, a medida que el modelo es más general, la metodología de resolución que se aplica recurre frecuentemente a métodos heurísticos en los que en cada iteración se resuelve de forma independiente un problema de localización y un problema de rutas.

A continuación hacemos un breve resumen de trabajos previos relacionados y abordamos ciertos aspectos relacionados con el modelado y la resolución de un tipo de problemas combinados LR desde una perspectiva conjunta.

## 2. Trabajos relacionados

Hay muchos aspectos que caracterizan los distintos tipos de problemas LR. En (14) se describen ejemplos, aplicaciones y algoritmos para problemas LR deterministas. Un trabajo más reciente en el que también se consideran modelos estocásticos es (23). En este trabajo nos

centramos en problemas deterministas estáticos (una etapa). En general los problemas LR deterministas estáticos difieren unos de otros en:

- el tipo de centros de servicios a localizar: *primarios* si son el origen y el destino de los itinerarios de los vehículos, *secundarios* cuando únicamente pueden ser depósitos intermedios;
- el número de plantas a localizar y si tienen o no capacidad limitada;
- la ubicación de la demanda de los clientes, lo cual condiciona el tipo de ruta a realizar. Si la demanda se sitúa de forma puntual la ruta será del tipo llamado *por nodos*, mientras que cuando la demanda se sitúe en calles, carreteras o similares, la ruta será del tipo llamado *por arcos*.
- el número de vehículos disponibles y si éstos tienen o no una capacidad limitada.

Podemos encontrar en la literatura distintos trabajos que se sobre problemas LR con rutas por nodos. Para problemas con un único centro de servicio primario y vehículos sin capacidad limitada se han propuesto algoritmos exactos en (10; 32; 4). El caso de vehículos con capacidad limitada ha sido tratado de forma heurística en (6). El problema con un centro de servicio secundario y vehículos con capacidad limitada ha sido abordado de forma exacta en (16).

El caso de centros de servicio múltiples con vehículos sin capacidad limitada ha sido también estudiado. Las localizaciones primarias han sido abordadas de forma heurística en (30) y de forma exacta en (35; 22; 29). En (18) y (15) se han propuesto algoritmos exactos para centros de servicio secundarios.

El caso de problemas con múltiples plantas y vehículos con capacidad limitada es más complejo. Los centros de servicio primarios se han tratado en (25) y más recientemente en (21; 34; 13; 2). El problema con centros de servicio secundarios ha sido abordado de forma heurística tanto en el caso sin capacidad limitada (11; 12; 31) como en el caso de que las plantas tengan capacidad limitada (26; 27; 5). Que nosotros sepamos, el caso con centros de servicio secundarios con capacidad limitada sólo ha sido abordado en (17) y en (19).

Hasta el momento los problemas LR con rutas por arcos han recibido muy poca atención y sólo conocemos un trabajo (9) en el que éstos se describen, pero ningún trabajo en el que se proponga un método de solución para alguna de sus versiones.

### 3. Modelos para problemas de Localización-Rutas por nodos

En esta sección presentamos un modelo para formular problemas LR en términos de problemas que consisten en encontrar conjuntos de caminos en una red que satisfagan condiciones adicionales. El modelo es para problemas en los que la demanda se sitúa de forma puntual y, por tanto, las rutas son *por nodos*, que han sido estudiados en (1; 2). Sin embargo la construcción puede extenderse para el caso en que la demanda obligue a recorrer ciertas líneas (calles, carreteras, etc.) y, por tanto, las correspondientes rutas sean del tipo *por arcos* (8).

Sea  $I$  el conjunto de índices para las ubicaciones potenciales para las plantas. Para cada  $i \in I$  sean  $f_i$  el coste de apertura de la planta en la ubicación  $i$  y  $b_i$  su capacidad en caso de ser abierta. Para cada  $j \in J$ ,  $d_j$  denota la demanda del cliente  $j$ . Sea también  $C = (c_{ij})$ ,  $i, j \in I \cup J$  la matriz de los costes de desplazamiento entre los clientes y las plantas y entre pares de clientes. Queremos encontrar un conjunto de plantas a abrir y un conjunto de rutas para satisfacer la demanda de los clientes, que empiecen y acaben en cada una de las plantas abiertas, de forma que se minimicen los costes de apertura más los costes de las rutas. El coste de una ruta viene definido por la suma de los costes de desplazamiento en cada ruta. Añadimos las siguientes hipótesis adicionales: *i*) se realiza una única ruta desde cada una de las plantas abiertas; *ii*) las rutas empiezan y terminan en la misma planta; *iii*) la capacidad de una planta abierta también representa la capacidad del vehículo para la ruta asociada a la planta; y *iv*) la demanda de cada cliente debe satisfacerse desde una única planta; es decir, exactamente una ruta debe visitar cada cliente.

Se trata de construir una red auxiliar y reformular el problema en términos de encontrar un conjunto de caminos en la red auxiliar que satisfagan un conjunto de restricciones adicionales. La red auxiliar tiene dos tipos de vértices, unos asociados a las plantas potenciales y otros asociados a los clientes. El detalle de la construcción de la red auxiliar y de la notación utilizada para construir el modelo puede encontrarse en (3). La idea básica de la correspondencia, puede apreciarse en la figura 1.

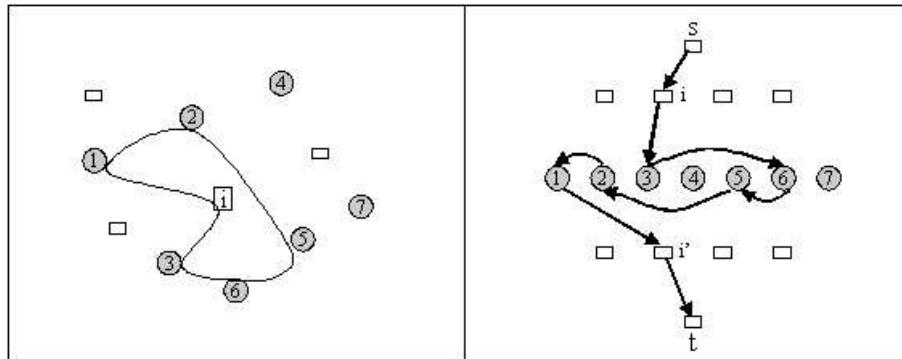


Figura 1: Solución típica en ambos esquemas

Para modelar el problema en términos de encontrar un conjunto de caminos en la red que satisfagan un conjunto de restricciones adicionales, definimos las variables de decisión  $x_a^k, a \in A, k \in I$  con valor 1 si el arco  $a$  se utiliza en la ruta  $k$  y 0 en otro caso. Denotaremos por  $x^k \in \mathbb{R}^k$  al vector de variables correspondientes a la ruta  $k$ . El modelo resultante es:

(LRN1)

$$\min \sum_{k \in I} \sum_{a \in A} \tilde{c}_a x_a^k \quad (1)$$

$$\sum_{k \in I} x^k(\delta^+(s)) = |I| \quad (2)$$

$$x^k(\delta^+(v)) = x^k(\delta^-(v)) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}, \forall k \in I \quad (3)$$

$$\sum_{k \in I} x^k(\delta^-(t)) = |I| \quad (4)$$

$$x_{(s,i)}^k = x_{(i',t)}^k \quad \forall i, k \in I \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} d_j x^k(\delta^+(j)) \leq \sum_{i \in I} b_i x_{(s,i)}^k \quad \forall k \in I \quad (6)$$

$$\sum_{k \in I} x^k(\delta^-(j)) = 1 \quad \forall j \in J \quad (7)$$

$$\sum_{k \in I} x^k(A(S)) \leq |S| - \left\lceil \frac{\sum_{j \in S} d_j}{b_{max}} \right\rceil \quad \forall S \subseteq J \quad (8)$$

$$x_{(s,i)}^k = 0 \quad \forall i \neq k; i, k \in I \quad (9)$$

$$x_a^k \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A, k \in I. \quad (10)$$

Las restricciones de conservación de flujo (2)-(4) garantizan que la solución define  $|I|$  caminos entre  $s$  y  $t$ . Las ecuaciones (5) garantizan que las rutas comienzan y terminan en la misma planta, mientras que las desigualdades (6) aseguran que no se viola la capacidad de los vehículos y que no se atiende a ningún cliente desde una planta que no esté abierta. Las igualdades (7) requieren que cada cliente sea visitado exactamente por una ruta. Las restricciones (8) prohíben las rutas que no estén conectadas con ninguna planta. Aquí  $b_{max}$  denota el máximo de las capacidades de todas las plantas. Finalmente, las restricciones (9) se utilizan para asociar cada camino con una planta específica, prohibiendo que el camino comience y/o termine en una planta que no sea la elegida.

Cabe resaltar que LRN1 puede adaptarse fácilmente a contextos más generales de otros problemas LR en los que haya más de un vehículo por planta, la capacidad de los vehículos no coincida con la capacidad de la planta, o la flota de vehículos sea heterogénea.

## 4. Métodos de resolución

Para resolver LRN1 puede utilizarse cualquiera de las técnicas clásicas de programación lineal entera. Dada la complejidad del problema, que es NP-hard, la obtención de soluciones factibles mediante métodos heurísticos, como p.ej. los utilizados en (2), está plenamente justificada. Sin embargo, para obtener las soluciones óptimas de los problemas o, simplemente, para contrastar la calidad de las soluciones obtenidas, éstos deberán complementarse con relajaciones. La estructura

del modelo LRN1 sugiere la utilización de métodos de generación de columnas (1), a pesar de que también puede ser conveniente estudiar distintos tipos de desigualdades válidas para el problema, como se ha hecho en (8) para el caso de problemas combinados de localización-rutas por arcos. Una descripción detallada de la aplicación de estos métodos a algunos problemas combinados de localización y rutas puede encontrarse en (3).

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la red temática Análisis y Aplicaciones de Decisiones sobre Localización de Servicios y Problemas Relacionados (MTM2004-22566-E).

## Referencias

- [1] Albareda-Sambola, M. *Models and Algorithms for Location-Routing and Related Problems*. PhD thesis, Dpt. Estadística i Investigació Operativa, Universitat Politècnica de Catalunya, 2003.
- [2] Albareda-Sambola, M., Díaz, J.A. y Fernández, E. A compact model and tight bounds for a combined location-routing problem. *Computers and Operations Research*, 32:407–428, 2005.
- [3] Albareda-Sambola, M., Díaz, J.A., Fernández, E. y Martínez-Ojea, C. Problemas combinados de localización de plantas y rutas de vehículos: modelos y algoritmos. *Avances en Localización de Servicios y sus Aplicaciones* Blas Pelegrín (ed.). Servicio de publicaciones de Universidad de Murcia ISBN: 84-8371-495-7, 2004
- [4] Averbakh, I. y Berman, O. Routing and location-routing p-delivery men problems on a path. *Transportation Science*, 28:162–166, 1994.
- [5] Bookbinder, J. H. y Reece, K. E. Vehicle routing considerations in distribution system design. *European Journal of Operational Research*, 37:204–213, 1988.
- [6] Chien, T. W. Heuristic procedures for practical sized uncapacitated location-capacitated routing problems. *Decision Sciences*, 24:995–1021, 1993.
- [7] Dror, M. (ed.). *ARC Routing: Theory, Solutions and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [8] Fernández, E., Garfinkel, R., Martínez-Ojea, C. y Meza, O. A network flow formulation for the capacitated arc routing problem. Technical Report DR2002/11, Departament d'Estadística i Investigació Operativa, Universitat Politècnica de Catalunya, 2002.
- [9] Ghiani, G. y Laporte, G. Location-arc routing problems. *Opsearch*, 38(2):151–159, 2001.
- [10] Ghosh, J. K. A generalized reduced gradient based approach to round-trip location problem. In Jaiswal, N. K., editor, *Scientific Management of Transport Systems*, pages 209–213. North-Holland, Amsterdam, 1981.

- [11] Gillett, B. y Johnson, J. Multi-terminal vehicle-dispatch algorithm. *Omega*, 4:711–718, 1976.
- [12] Jacobsen, S. K. y Madsen, O. B. G. A comparative study of heuristics for a two-level location-routing problem. *European Journal Operational Research*, 5:378–387, 1980.
- [13] Labbé, M., Rodríguez Mart'in, I. y Salazar González, J.J. A branch-and-cut algorithm for the plant-cycle location problem. Technical Report [citeseer.nj.nec.com/584677.html](http://citeseer.nj.nec.com/584677.html), 2003.
- [14] Laporte, G. Location-routing problems. In Golden, B. L. y Assad, A. A., editors, *Vehicle routing: Methods and Studies*, pages 163–198. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [15] Laporte, G. y Dejax, P. J. Dynamic location-routing problems. *Journal of the Operational Research Society*, 40:471–482, 1989.
- [16] Laporte, G. y Nobert, Y. An exact algorithm for minimizing routing and operating costs in depot location. *European Journal of Operational Research*, 6:224–226, 1981.
- [17] Laporte, G., Nobert, Y. y Arpin, D. An exact algorithm for solving a capacitated location-routing problem. *Annals of Operations Research*, 6:293–310, 1986.
- [18] Laporte, G., Nobert, Y. y Pelletier, P. Hamiltonian location problems. *European Journal of Operational Research*, 12:82–89, 1983.
- [19] Laporte, G., Nobert, Y. y Taillefer, S. Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems. *Transportation Science*, 22:161–172, 1988.
- [20] Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G. y D.B. Shmoys, (eds.). *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. John Wiley, 1985.
- [21] Lin, C. K. Y., Chow, C. K. y Chen, A. A location-routing-loading problem for bill delivery services. *Computers and Industrial Engineering*, 43(1-2):5–25, 2002.
- [22] List, G. F. y Mirchandani, P. An integrated network/planar multiobjective model for routing and siting for hazardous materials and wastes. *Transportation Science*, 25:146–156, 1991.
- [23] Min, H., Jayaraman, V. y Srivastava, R. Combined location-routing problems: A synthesis and future research directions. *European Journal of Operational Research*, 108:1–15, 1998.
- [24] Mirchandani, P. B. y Francis, R. L. *Discrete Location Theory*. Wiley, Chichester, 1990.
- [25] Nambiar, J. M., Gelders, L. F. y Van Wassenhove, L. N. A large scale location-allocation problem in the natural rubber industry. *European Journal of Operational Research*, 6:183–189, 1981.
- [26] Perl, J. y Daskin, M. S. A unified warehouse location-routing methodology. *Journal of Business Logistics*, 5:92–111, 1984.
- [27] Perl, J. y Daskin, M. S. A warehouse location-routing model. *Transportation Research*, 19B:381–396, 1985.
- [28] Salhi, S. y Rand, G. K. The effect of ignoring routes when locating depots. *European Journal of Operational Research*, 39:150–156, 1989.

- [29] ReVelle, C. S., Cohon, J. y Shobrys, D. Simultaneous siting and routing in the disposal of hazardous wastes. *Transportation Science*, 25:138–145, 1991.
- [30] Srivastava, R. Alternate solution procedures for the location-routing problem. *Omega*, 21:497–506, 1993.
- [31] Srivastava, R. y Benton, W. C. The location-routing problem: Consideration in a physical distribution design. *Computers and Operations Research*, 6:427–435, 1990.
- [32] Stowers, C. L. y Palekar, U. S. Location models with routing considerations for a single obnoxious facility. *Transportation Science*, 27:350–362, 1993.
- [33] Webb, M. H. J. Cost functions in the location of depot for multiple delivery journeys. *Operational Research Quarterly*, 19:311–320, 1968.
- [34] Wu T.-H., C. Low y J.-W. Bai. Heuristic solutions to multi-depot location-routing problems. *Computers and Operations Research*, 29(10), 2002.
- [35] Zografos, K. G. y Samara, S. Combined location-routing model for hazardous waste transporation and disposal. *Transportation Research Record*, 1245:52–59, 1989.