

# Tutorial Diseño de redes de transporte

## Nodo de la Red Temática de Localización

### Universidad Politécnica de Madrid

profesor Ángel Marín Gracia

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos

Plaza Cardenal Cisneros, 3, Madrid 28040

Teléfono: 34 91 3366323/6, extensión 105

[amarin@dmae.upm.es](mailto:amarin@dmae.upm.es)

#### Resumen

Se trata del problema de localizar nodos y arcos formando un grafo, lo que se considera desde varios puntos de vista: temporal (estratégico, táctico y operativo), según las relaciones de red entre sus elementos (estrella, linea, árbol, general), oferta y (centralizada y en competencia), demanda(fija, elástica, determinista y estocástica), etc. Se emplean varios modelos matemáticos (de optimización, desigualdades variacionales, lineal, no lineal, discreta), y se utilizan diversos métodos matemáticos (de descomposición: Benders y Relajación Lagrangiana, Generación de columnas, Metaheurísticas, etc.). Se consideran diferentes aplicaciones de transporte: urbano (localización de intercambiadores multimodales, diseño de la red, logística de flota, asignación de tráfico), por ferrocarril (metro, suburbano y tren de mercancías), aéreo (gestión de aeropuertos). También se mencionan la posibilidad de utilizar estas técnicas en otra clase de aplicaciones (generación de energía, telecomunicaciones), aunque solo de pasada!. Si alguna de las palabras claves anteriores son de su interés siga adelante, no se desanime le espera un mundo apasionante. Bueno, se hará lo que se pueda!

## 1. Introducción

El diseño de redes estudia el problema de localización de los nodos de la red en un espacio discreto, en función de las relaciones admisibles entre ellos (localización de los arcos), teniendo en cuenta los costes de construcción y los de uso por parte de un flujo dado. Bueno de alguna manera había que empezar!. Otra cosa, el contenido de este Tutorial puede verse como un resumen del Capítulo 11, Diseño de Redes de Transporte, del libro de Blas Pelegrín. (9).

Al nivel de las relaciones entre nodos, la estructura más sencilla es la estrella, donde los nodos de los niveles inferiores se conectan directamente con los nodos del nivel superior. Una relación mas elaborada corresponde al establecimiento de relaciones en árbol entre los niveles superiores respecto de los inferiores, esta estructura nos permite establecer relaciones entre nodos del mismo nivel, lo que no era permitido en las relaciones en estrella. Estas dos primeras son típicas de telecomunicaciones. (15). Finalmente el nivel más complejo es el de red donde las relaciones entre las fuentes y sumideros se pueden establecer entre todos los nodos. Bueno, me he dejado la posibilidad de que estas relaciones (podemos llamarlas alineaciones) sean líneas,

muy interesante para hacer "metros". Estas dos las ampliaremos después. Seguro que me dejo alguna, pero estas son con las que he trabajado!

Las relaciones anteriores se pueden reproducir a diferentes niveles jerárquicos, así hablaremos de estructuras primarias y secundarias, las segundas servidoras de las primeras. Estos esquemas pueden extenderse a múltiples niveles jerárquicos, (15). Es una forma de quedar bien por poco dinero!

Bajo el punto de vista de la demanda esta puede ser de un solo artículo cuando el flujo representa un único tipo y el origen y el destino no forman un par dado. Un nivel de dificultad adicional se introduce cuando consideramos flujo multiartículo, donde cada flujo tiene un par origen y destino asociado. El nivel de desagregación multiartículo puede llegar a distinguir dentro de un mismo par origen-destino por tipo de artículo (mercancía, propósito, modo, etc.). Se nota, verdad?, que yo me he dedicado a multi-artículo!

La demanda también puede ser clasificada como fija o elástica. Fija es cuando su valor es un dato que no se modifica según el precio de la oferta del sistema. La demanda es elástica cuando su valor depende de la oferta, es decir, de los recursos asignados al sistema y de su localización. La demanda puede ser determinista o estocástica, es determinista si su valor se supone conocido de manera cierta, y es estocástica cuando su valor se conoce solo en términos de una distribución de probabilidad. Nos vamos entendiendo?. Véase la referencia de (14).

Finalmente digamos que las relaciones entre los usuarios (la demanda) o entre los operadores que gestionan la oferta pueden establecerse bajo un punto de vista centralizado o bajo condiciones de competencia. El sistema centralizado o normativo corresponde a la situación de monopolio donde las decisiones son tomadas por un único decisor. El sistema puede ser centralizado a nivel de los usuarios o de los operadores, aunque se modelan con frecuencia situaciones mixtas, donde el operador actúa de forma centralizada para asignar los recursos, pero los usuarios compiten entre sí para utilizar la capacidad. La que mas mola es la de competencia pero es una forma de complicarnos la vida como otra cualquiera!

Los sistemas en competencia se pueden establecer bajo el punto de vista de jugadores que interaccionan entre ellos al mismo nivel, equilibrio de Cournot Nash, visteis la película?, o bajo condiciones donde un jugador toma decisiones a nivel superior asumiendo que conoce las reacciones de los otros jugadores a sus propias decisiones (equilibrio de Stackelberg). El equilibrio es el resultado de la competencia entre jugadores con interés contrapuestos.

La modelización de estas situaciones de equilibrio ha motivado multitud de modelos matemáticos. La formas más usual es la modelización mediante optimización convexa y diferenciable, pero una generalización consiste en el empleo de desigualdades variacionales(DV), que para lo que no hayan oido hablar de ellas (hay mas de lo que parece!) podemos decir asi para quedar bien, que para problemas convexos si la función de la DV es el gradiente de la función objetivo del modelo de optimización, la DV se reduce a las condiciones de optimalidad. Quien lo iba a decir!.

Bueno, para entendernos, evitaremos las desigualdades variacionales si las funciones de coste en los arcos son simétricas. Por ejemplo, las desigualdades variacionales son la formulación matemática adecuada de un problema cuando el coste al atravesar un arco depende del flujo en otros arcos distintos al que estamos considerando y esa relación no es simétrica. El que quiera sacar buena nota ya se puede ir estudiando un buen tocho!.

## **2. El problema de trazar una linea de metro, ahi es na!**

Ya se que alguna piensa que para que sirve eso, si siempre pasan al lado de la casa del alcalde, pero algunos somos muy ingenuos y pensamos que nuestras investigaciones se usaran algún día!.

Se trata de establecer unas estaciones y unas líneas que nos permitan maximizar la proporción de usuarios que utilizan el transporte público, pero claro esto dentro de unos límites presupuestarios, que son los dineros disponibles, y de medio ambiente. Claro que como somos muy buenos, además queremos incluir en el modelo el comportamiento del usuario ante el proceso de localización (los hay buenos!) por lo que estableceremos este de forma sencilla mediante distribución modal todo o nada (que fuerte!, o todo el tráfico se va por público o por privado, nada de medias tintas), o si nos complicamos la vida utilizaremos una distribución Logit, que no solo reproduce mejor el comportamiento del personal, si no que además las rutas de los usuarios son de coste mínimo, como tiene que ser!. Claro que el coste de privado lo tomaremos como dato si acaso afectado por un factor de congestión, eso si, el coste de público dependerá de si realmente se contruyen las opciones de red que estamos considerando. Como el modelo que resulta es realmente complicado: restricciones de todo tipo (de localización de líneas, de conservación de flujo, de distribución modal todo o nada, mixtas) y variables binarias. Para resolver hemos empleado Ramificación y acotación”, el método de propósito general de este tipo de modelos. Ahora a estudiarse nuestras referencia (7).

## **3. El problema de gestionar una flota de autobuses urbanos**

Nos planteamos localizar los vehículos de una flota de autobuses urbanos en unas líneas prefijadas, donde nos planteamos simultáneamente la utilización de los mismos por parte de la demanda y en competencia con el modo privado, somos de originales!

Como todos estos problemas se pueden ver bajo una estructura binivel, ya os avise!, en el nivel superior tratamos de obtener la frecuencia óptima de las líneas de autobuses, donde se tienen en cuenta los intereses de la compañía operadora, y la consideración de las líneas que se mueven en un medio congestionado y en competencia con el vehículo privado, mientras que en el nivel inferior se consideran los intereses de los usuarios, que compiten entre sí para utilizar los medios de transporte que se les ofrecen, vaya que se dan de bofetadas hasta alcanzar el equilibrio!.

Permitaseme decir que en el nivel de la demanda tenemos un submodelo la asignación de tráfico multimodal, con modo incluso! combinado (viajes compuestos de varios modos, en esto hemos sido auténticos pioneros!), es decir, simulando la competencia entre usuarios para elegir el modo y el camino a utilizar (Modelo de equilibrio: Segundo Principio de Wardrop, vaya que cada usuario actúa por libre buscando únicamente su propio beneficio, egoistas!).

El problema se resuelve mediante el método de Benders Generalizado, con lo que al fijar la variable difícil, la frecuencia de las líneas, se obtiene un submodelo de asignación de tráfico, y el modelo maestro queda definido por los cortes de Benders (quien lo iba a decir! ) y las restricciones del operador. El modelo maestro se resuelve en términos de sus condiciones de optimalidad, (8).

## **4. Diseño estratégico de diseño de una red urbana de transporte multimodal**

En planificación estratégica nos ocupamos de la localización de paradas, aparcamientos e intercambiadores multimodales, mientras que a nivel táctico el interés se centra en localizar las capacidades de dichos elementos y el precio en su caso, por su utilización.

Abordaremos la localización de las paradas e intercambiadores de transporte público en un contexto de competencia multimodal y de congestión. Esta aproximación se diferencia de otras en que el propio modelo tiene en cuenta las reacciones de los usuarios frente a las decisiones de localización normativas a optimizar. A que no os habeis enterado?.

Un intercambiador multimodal urbano es una parada de transporte público dotada de ciertas facilidades: posibilidad de transbordo entre líneas, aparcamientos, facilidades para la comodidad y/o seguridad de los usuarios, precio por el uso del aparcamiento o de las facilidades, etc.

El problema de localización de los intercambiadores tiene una estructura binivel:

- Asignación de la demanda. Se asume una demanda potencial fija y determinista que en función del diseño de la red (nivel de servicio) se distribuye por modos, en los intercambiadores y en los aparcamientos, también entre las rutas posibles.
- Problema de diseño, en función de la demanda y de los costes de instalación y gestión de aparcamientos y paradas se plantea la localización de los intercambiadores, dimensionar los aparcamientos, diseñar las líneas secundarias de alimentación, etc.

Hemos asumido que cada valor de las variables de diseño define una función que nos determina la demanda en la red de transporte. Esta función se puede calcular resolviendo las condiciones de equilibrio. Para ello hemos adaptado un algoritmo tipo Gauss-Seidel.

Como somos muy espabilados hemos aplicado no uno ni dos, sino tres tipos de métodos heurísticos para gestionar las variables de diseño enteras: i) algoritmos golosos, que van ciegos a buscar la solución!, ii) algoritmo de intercambio, que va analizando los elementos del entorno en los que se puede mejorar la solución, permitiendo abrir o cerrar intercambiadores. Son algo más sensatos!, iii) Recocido Simulado para problemas discretos, que explora aleatoriamente los elementos del entorno, y mientras la cosa está caliente permite pasar a zonas no exploradas, no penseis mal!. (3).

## **5. Diseño táctico de una red urbana de transporte multimodal**

El diseño de una red de transporte se puede plantear de forma paramétrica, (5), analizando por separado cada opción de diseño, y resolviendo los submodelos de asignación de tráfico que resultan, o plantearse todas las opciones de forma continua, en este caso, cabe hacer dos tipos de orientaciones, una centralizada donde el enrutamiento de la demanda se hace sin tener en cuenta la congestión, y otra en juegos no cooperativos, donde se caracteriza el comportamiento de la demanda ante la congestión, en este caso, se incluyen ambos niveles de decisión en un solo modelo, que es la orientación de la Programación Binivel adoptada en nuestras investigaciones, (6).

En planificación estratégica nos ocupamos de la localización de paradas, aparcamientos e intercambiadores multimodales, mientras que a nivel táctico el interés se centra en establecer las capacidades de dichos elementos y el precio en su caso, por su utilización.

Ambos problemas se pueden formular con ayuda de la Programación Binivel, con un modelo superior donde se tiene en cuenta los intereses del planificador, usualmente el óptimo del sistema, y un nivel inferior donde el modelo es de asignación de tráfico, puede tomar la forma de un modelo de optimización o de una desigualdad variacional según los casos.

## 6. Diseño táctico de redes de transporte público.

En este caso supongo conocida la localización de la topología de la red, y se trata de establecer las prestaciones de la misma, todo lo anterior teniendo en cuenta el tráfico con congestión y la existencia de varios modos para realizar el viaje, (4).

En el nivel superior, la gestora de la infraestructura trata de minimizar el coste del sistema, y toma decisiones óptimas dentro de sus restricciones específicas (presupuestarias u otras), mientras que en el nivel inferior se representa el comportamiento de los usuarios frente a la oferta del sistema en relación a los cambios modelados en el nivel superior. A que os suena!

En el nivel inferior el comportamiento de los usuarios se tiene en cuenta mediante la formulación por DV de la asignación de tráfico. Como el equilibrio se formula bajo condiciones de congestión y competencia multimodal, la función a utilizar representa ambos aspectos. La congestión como suma de las relaciones no lineales en cada arco, y la competencia multimodal mediante funciones logit de distribución multimodal.

En el nivel superior, empleamos como variables de diseño la capacidad de cada aparcamiento y el precio por su utilización, el objetivo es minimizar el coste del sistema, con las restricciones de presupuesto, no negatividad, y equilibrio del usuario, es decir, suponemos conocidas las soluciones del modelo inferior, frente a cada decisión del nivel superior. Realmente complejo!.

Para resolver el modelo elegimos el método de Recocido Simulado. Al ser las variables continuas, una de las dificultades del método ha sido el establecimiento de la estrategia a emplear en el muestreo del entorno, que se define mediante matrices de paso. La topografía de la función objetivo se emplea en la definición de la estrategia de muestreo. El paseo aleatorio que define el método se calcula mediante las matrices de varianza y covarianza y su factorización de Choleski nos determina la matriz de paso. A que es precioso!

## 7. Diseño táctico de una red para el transporte de mercancías por ferrocarril

A nivel táctico donde se considera la asignación de vehículos en términos de la frecuencia media de las líneas consideradas, y a nivel operativo se toman decisiones relativas a los horarios de salida de trenes y vagones concretos.

El problema de diseño táctico de redes de mercancías por ferrocarril se formula a nivel superior de nuevo como un problema de flota, aunque en este caso los vehículos son los vagones y las locomotoras, así como la consideración de vagones vacíos, que deben ser movidos para su utilización en las estaciones origen de la demanda. Quien lo iba a decir!

Se trata de determinar la frecuencia óptima de las líneas y el enrutamiento óptimo de los vagones que transportan la demanda, esta última desagregada por origen-destino y por tipo de mercancía transportada. En este contexto toma gran importancia la decisión entre establecer trenes directos para atender la demanda, o proceder al establecimiento de agrupaciones de

vagones con destino común. Estos procesos de clasificación de vagones solo puede ser realizados en las estaciones que disponen de medios para ello.

El problema combinado de enrutamiento y agrupación de la demanda también fué considerado en el contexto de los problemas de diseño de redes de transmisión de sistemas de telecomunicación, (1). No nos amedranta nada!

Para la formulación del modelo os remito a nuestro artículo (11). Para resolverlo se ha utilizado Ramificación y Acotación pero como no fué capaz de resolver problemas de tamaño medio no obstante que fue mejorado con la introducción de un preproceso que permitía preselecciónar las rutas candidatas, así como la incorporación de cortes para mejora de la convergencia, tuvimos que usar diferentes métodos heurísticos o metaheurísticos de descomposición.

Entre los métodos heurísticos empleados cabe señalar el desarrollo de un método puramente heurístico donde introducimos la experiencia de los operadores en la toma de decisiones, lo que se traducía en la definición de conjunto de vecinos adecuados a las mismas. Igualmente se implementaron las metaheurísticas de Recocido Simulado y de Búsqueda Tabú, todos ellas recogidas en el artículo, (12). Si es que sabemos de to!

Es de destacar nuestro análisis mediante inferencia estadística para comparar los métodos anteriores, se trata de ajustar las muestras de los mínimos locales obtenidos por dichos métodos a una distribución de probabilidad de Weibull. A partir de la cual procedemos a la estimación puntual y por intervalos de confianza de la proximidad de los mínimos locales al mínimo del sistema. Este mecanismo permitía establecer criterios de robustez de los algoritmos, así como de ajuste de los parámetros más apropiados a cada método, igualmente, permite el establecimiento de comparaciones entre métodos heurísticos basadas en las hipótesis estadísticas de partida, (13). Lo nunca visto!

## 8. Gestión operativa: transporte de mercancías por ferrocarril

Se trata de establecer el horario de salida de los trenes teniendo en cuenta que la solución óptima operativa debe ser modulada por la solución táctica anterior dada en valores medios.

En este modelo buscábamos minimizar el retardo de los vagones, teniendo en cuenta las restricciones siguientes:

- en las decisiones de enrutamiento de la demanda: la conservación de flujo en los nodos, capacidad de las estaciones y no negatividad de dichas variables,
- restricciones de gestión donde consideramos la capacidad de las vías, la suma óptima de salidas de los trenes debía coincidir con la frecuencia óptima de la etapa táctica, la separación admisible entre salidas de trenes, el carácter entero y no negativo del horario de salidas,
- restricciones mixtas de capacidad de los servicios.

Estos modelos los resolvimos utilizando Relajación Lagrangiana y Descomposición de Benders. Mediante Relajación Lagrangiana relajamos la restricción difícil que es la restricción mixta de capacidad de los servicios, el submodelo resultante es descomponible en dos, uno para el enrutamiento de los vagones y otro para la asignación de la flota de trenes, ambos pueden ser resueltos eficientemente aprovechando sus estructuras. Ahí es na!

En la descomposición de Benders fijamos la variable difícil que es la asignación de los trenes de la flota a los servicios, con los que nos queda un submodelo en las variables de enrutamiento

de los vagones, que es un modelo de flujo multiartículo con restricciones de capacidad, unas fijas y otras (las mixtas) cuya capacidad varía en cada iteración, las variables duales de estas restricciones sirven para caracterizar los cortes de Benders del modelo maestro, (2).

La diferencia más importante entre estos problemas con la gestión de una flota de autobuses se produce en el modelo inferior, pues en el caso de los autobuses el comportamiento de la demanda se simula con un modelo de equilibrio Cournot-Nash, y en esta aplicación los vagones se enrutan a las líneas de forma normativa, bajo el punto de vista del sistema. Aunque pensaba hablaros de los modelos de asignación de tráfico y de sus métodos de resolución, me he apiadado de vosotros y lo dejaré para un tutorial específico para masoquistas!

## 9. Diseño de aeropuertos, que os parece?

Igual que en redes anteriores un aeropuerto es un lugar donde hay una topología por donde circulan flujos que producen congestión, así que también nos atrevemos con ellos. Centrándonos en lo que ocurre en el suelo y con los aviones se le llama "Taxi Planning", no me pregunteis por que?, pues bien, hemos sido los primeros, leis bien!, en modelizar el enrutamiento y secuenciación de los aviones dentro de la restricciones de capacidad del aeropuerto (calles, cruces, lugares de parada o de cola, etc.) y evitando los conflictos entre ellos (la seguridad es nuestro lema!).

Que como lo hemos modelizado?, pues muy sencillo, hemos replicado la red física temporalmente para introducir la secuenciación de las operaciones, así que nos ha permitido considerar las relaciones espacio temporales de conservación de flujo, restricciones de capacidad, y evitar los conflictos, el único problema es que a un problema multiartículo ya de gran tamaño, lo hemos multiplicado por los subperiodos del periodo de planificación, total que nos quedan problemas enteros de millones de variables y cientos de miles de restricciones, que exageración!. (10).

Que como lo hemos resuelto, pues con un muy buen preproceso y Ramificación y Acotación por un lado, pero como no nos quedamos satisfechos usamos Fijar y Relajar, pero como seguimos insatisfechos, nos metimos a utilizar Descomposición Lagrangiana, y Ramificación y Precio, total que al final después de dos años de investigaciones, conseguimos resolver problemas con datos reales en tiempos de cálculo de pocos segundos. Bien! somos los mejores! y no tenemos abuela!.

Os preguntareis y el diseño?, pues como lo anterior nos supo a poco, ahora andamos además teniendo en cuenta que la capacidad del aeropuerto es variable, los hay que están locos!, y ahí estamos considerando la elección de los puntos de entradas y salidas de pista, la configuración de rodadura de los terminales, el sentido de las calles de rodadura, y ya la ginda ha sido incluir que el número de intervenciones de los controladores para evitar conflcitos sea mínima, hay quien de mas?.

Ahora tendría que hablaros de la gestión de una flota de aviones, pero como me he pasado de espacio, y ya hemos visto que se hace con las flotas, pues os remito a esas secciones, que mas dara si son aviones, trenes, autobuses o conejos, hay perdón no quería decir eso!.

## Agradecimientos

Estas investigaciones se han desarrollado en parte gracias a la financiación de Aeropuertos Españoles y Navegación Aérea, del Plan Nacional de I+D del Ministerio de Ciencia y Tecnología, y el Plan de I+D en el Área de Transporte del Ministerio de Fomento.

## Referencias

- [1] Ayllón F., Galán J., Marín, A y Menéndez. A. Price decomposition applied to routing in telecommunication networks. *European Journal of Operational Research*, 91:587–599, 1996.
- [2] Gallo, G., Barbas J., Malucelli D. y Marín A. A scheduling problem arising from operational planning of the railway freight transportation. E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica Madrid, 1995.
- [3] García, R. y Marín A. Urban multimodal interchange design methodology. En M. Pursula y J. Niittymäki (Eds.), *Mathematical Methods on Optimization in Transportation Systems*, Volume 48 of *Applied Optimization*, pp. 49–79. Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 2001.
- [4] García, R. y Marín A. Parking capacity and pricing in park'n ride trips: A continuous equilibrium network design problem. *Annals of Operations Research*, 116:153–178, 2002.
- [5] García, R. y Marín A. Diseño de intercambiadores multimodales urbanos I: Análisis paramétrico. *Estudios de Construcción y Transporte*, 96:93–106, 2002.
- [6] García, R. y Marín A. Diseño de intercambiadores multimodales urbanos II: Localización de paradas e intercambiadores. *Estudios de Construcción y Transporte* 97, 2002.
- [7] Laporte, G., Marín, A., Mesa, J.A. y F. Ortega An integrated methodology for the rapid transit network design. *Aceptada en Lectures Notes in Computer Science*, 2005.
- [8] Marín, A. Contribuciones a la Teoría Matemática de la Planificación del Transporte y sus Aplicaciones. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, Univ. Politécnica Madrid, 1982.
- [9] Marín A. Diseño de Redes de Transporte. En Blas Pelegrín editor, *Avances en localización de servicios y sus aplicaciones*, Capítulo 11, Universidad de Murcia, pp. 277-299, 2004.
- [10] Marín, A. Airport Management: Taxi Planning Aceptada su publicación en *Annals of Operational Research*, 2005.
- [11] Marín, A., y Salmerón J. Tactical design of rail freight networks. Part I: exact and heuristic methods. *European J. of Op. Res.*, 90:26–44, 1996.
- [12] Marín, A., y Salmerón J. Tactical design of rail freight networks. Part II: local search methods with statistical analysis. *European J. of Op. Res.*, 94:43–53, 1996.
- [13] Marín, A., y Salmerón J. A Simulated Annealing Approach to the Railroad Freight Transportation Design Problem. *International Transactions in Op. Res.* 3, No. 2, 139–149, 1996.
- [14] Marín, A. y J. Salmerón. Electric Capacity Expansion Approach to the Railroad Freight Transportation Design Problem. *IEEE Transaction on Power Systems*, vol13, N2, pp. 333-339, 2004.
- [15] Nitchiporenko A., Barbas F. J., y A. Marín. Multilevel local access network design. ITC 15, Editado por V. Ramaswami y P.E. Wirth, Elsevier Science B.V., 1997.