

Geometría computacional y ubicaciones óptimas

Ferran Hurtado

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

ferran.hurtado@upc.edu

Resumen

En este artículo se describen diversos problemas estudiados por miembros del *Nodo de geometría computacional* que participa en la *Red Temática de Análisis de Localizaciones y sus Aplicaciones*, ilustrando tanto la interacción entre las disciplinas como la actividad propia.

1. Introducción

El *Nodo de geometría computacional* que participa en la *Red Temática de Análisis de Localizaciones y sus Aplicaciones* está integrado por miembros de diversos grupos de investigación en geometría computacional, cuya temática de investigación personal incide con cierta significación en los problemas de interacción entre ambas disciplinas.

La *geometría computacional*, también llamada *geometría algorítmica*, tiene como núcleo el desarrollo de algoritmos eficientes para resolver problemas geométricos. En general se intenta obtener algoritmos exactos para manejar datos en cantidades masivas, y su eficiencia se mide por comparación asintótica de funciones parametrizadas por el tamaño del *input*, que describen el comportamiento en el peor caso. Naturalmente, cuando sólo se dispone de heurísticas o se comparan implementaciones de un mismo algoritmo, la experimentación es también indispensable. El lector interesado en una descripción más amplia puede consultar si lo desea el artículo panorámico [35] o el libro de texto [21].

El carácter transversal de la geometría computacional le viene conferido de manera natural por la presencia de problemas de computación geométrica en multitud de aplicaciones, como por ejemplo la informática gráfica, el diseño y fabricación asistidos por ordenador (*CAD/CAM*), el reconocimiento de formas y patrones (*pattern recognition*), la morfología computacional, el diseño de circuitos integrados a gran escala (*VLSI*), la visión artificial, los sistemas de información geográfica y la robótica.

Como numerosos problemas de localización óptima pueden plantarse en términos geométricos, también en esta área es natural encontrar una presencia significativa de la geometría computacional (véase el artículo [42]). En este texto, en vez de describir esta interacción de forma abstracta, nos centramos en presentar los problemas estudiados en algunos de los trabajos de los miembros del nodo, ilustrando tanto la mencionada interacción como nuestra propia actividad. Aclaremos que aquí sólo se describen los problemas, por lo que respecta a sus soluciones remitimos al lector a los artículos que se citan. Varios de los trabajos provienen de las tesis doctorales [17, 18, 19, 41, 43], que constituyen también un ejemplo de la fecunda interrelación entre la geometría algorítmica y el estudio de los problemas de ubicación óptima.

2. Objetos recubridores

Si un conjunto S de n puntos del plano representa las ubicaciones de una serie de clientes o usuarios, el punto p del plano que minimiza la mayor de sus distancias a los elementos de S se llama el 1-centro euclídeo de S , y es la ubicación óptima, por ejemplo, para un servicio de naturaleza urgente, como puede ser un hospital. Hallar este punto p es equivalente a encontrar el círculo de menor radio que cubre el conjunto S y tomar su centro p , problema que en estos términos ya fue formulado por Sylvester en el siglo XIX (Figura 1, izquierda).

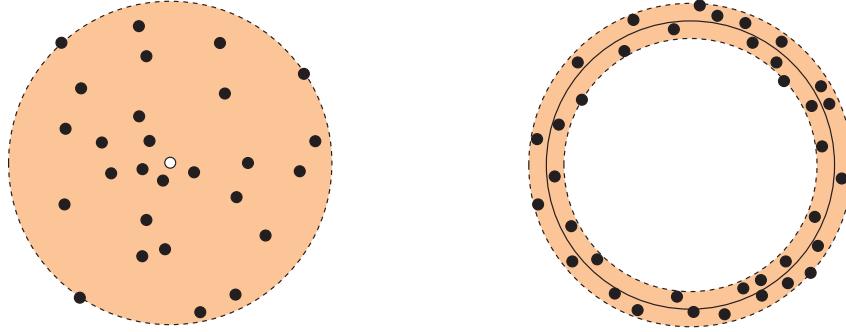


Figura 1: 1-centro euclídeo y corona recubridora mínima.

Aunque la búsqueda de p ha de hacerse en principio en todo el plano, es fácil discretizar el problema observando que su ubicación sólo puede ser la de un punto medio definido por dos elementos de S , o bien el centro de una de las circunferencias que pasan por tres puntos de S . Como esto nos da del orden de n^3 círculos candidatos, y comprobar cuáles realmente son círculos recubridores se hace en $O(n)$ operaciones por candidato, la selección del óptimo puede hacerse en tiempo proporcional a $O(n^4)$ mediante este algoritmo claro e intuitivo, pero muy costoso. La investigación en el problema condujo finalmente en los años setenta a algoritmos $O(n \log n)$ y en los ochenta a algoritmos óptimos $O(n)$ con métodos de geometría computacional (los detalles se pueden consultar en [42]).

Se han estudiado muchas variantes del problema anterior. Por ejemplo, en [38] se da un algoritmo óptimo para hallar el punto q del plano que minimiza la mayor de sus distancias a los elementos de S y además satisface m restricciones lineales dadas. En otras palabras, q es un 1-centro euclídeo que se halla dentro de cierta región convexa (posiblemente vacía). El algoritmo de [38] evita la construcción de la región, que se trata implícitamente con los métodos de [34], pues su construcción explícita daría necesariamente algoritmos menos eficientes.

El ejemplo anterior ilustra cómo diversos problemas de ubicación minimax se transforman en problemas de cubrimiento con objetos geométricos. Del mismo modo, hallar la recta que minimiza la máxima distancia a los puntos de S equivale a cubrir S con una franja (región comprendida entre dos rectas paralelas) lo más estrecha posible. En este problema, la recta puede interpretarse como una trayectoria, posiblemente de transporte.

En los trabajos [23, 24] se obtienen trayectorias poligonales óptimas con restricciones en su longitud o número de codos. En [22, 33] se dan algoritmos eficientes para el caso de una trayectoria circular (Figura 1, derecha), mientras que en [9] se hace lo propio para trayectorias (coronas) rectangulares paralelas a los ejes o de orientación libre y forma (*aspect ratio*) fija. Vale la pena destacar que estos últimos problemas también tienen sentido desde el punto de vista

de la *Metrología*, pues si la corona no es “suficientemente estrecha” se obtiene un criterio para descartar la presunta forma de una pieza u objeto.

En el artículo [2] se muestra cómo situar una corona de amplitud prefijada, de forma que cubra al máximo posible de puntos. La eficiencia del método requiere el estudio de los arreglos de círculos, tema que se trata en [3].

Naturalmente cabe considerar cubrimientos por más de un objeto. Por ejemplo, en [10] hay dos conjuntos de puntos S y T , linealmente separables, y se desea cubrirlos con sendos círculos lo más pequeños posible, pero de forma que la mediatrix de sus centros separe S y T ; esto garantiza cierta calidad en los centros como representantes de los conjuntos. En el trabajo [1] se ve cómo clasificar los puntos de un conjunto de forma que cualquier círculo que cubra al menos k puntos contenga k de ellos únicos en su clase, un problema cuya motivación y aplicación radica en la asignación de frecuencias de emisoras y de telefonía.

Algunos de estos problemas tienen cierto carácter estadístico, pues la elección de centros puede interpretarse como la elección de objetos representantes, y el descarte, en su caso, como eliminación de datos descentralizados o anómalos. En [4] se clasifica la internalidad/externalidad de los puntos de una nube a través de su triangulación de Delaunay, y un tema similar, los contornos de profundidad, se estudia en [39]. Finalmente, mencionaremos que en los trabajos [16] y [13] se obtienen rectas y puntos, respectivamente, de carácter centralizador.

3. Objetos vacíos

Cuando el servicio que se desea ubicar conlleva riesgo, como ciertas plantas industriales, o aspectos desagradables, como es el caso de un vertedero, lo que se desea es hacer máxima la distancia al cliente o usuario más cercano, por lo que estos problemas a menudo se describen como de búsqueda de *anticentros*. Geométricamente esto corresponde a encontrar el mayor objeto posible de cierto tipo que esté vacío de los puntos u objetos que modelen a los clientes o usuarios. A menudo se exigen restricciones adicionales en la posición del objeto, pues de otro modo se podría tomar “infinitamente” lejos y arbitrariamente grande, pero carecería de sentido con respecto a la aplicación.

Por ejemplo, en el trabajo [25] se busca la trayectoria poligonal de a a b , con longitud acotada y a lo sumo un codo q , que hace máxima la menor de las distancias a los puntos de un conjunto S . La cota en longitud se traduce en que q no puede ser externo a una elipse de focos a y b , y la optimidad en el “grosor” máximo de la región barrida por un disco cuyo centro describa la trayectoria. Esta región es llamada *boomerang* en [25] (Figura 2).

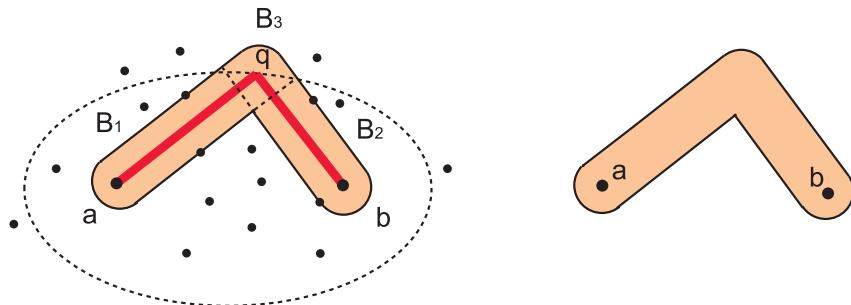


Figura 2: *Boomerang* vacío asociado a una trayectoria de un codo.

Problemas similares al anterior han sido objeto de una intensa cooperación entre miembros del *Nodo de geometría computacional* y miembros del *Nodo de la Universidad de Sevilla*. Así, por ejemplo, en [31] se trata un problema muy similar al anterior, una trayectoria poligonal anticentro de un codo, pero sin limitación de longitud ni puntos de anclaje. En el artículo [26] se dan algoritmos para la obtención de una trayectoria circular *nociva* de tamaño máximo. En [27] se estudia la ubicación óptima de varios objetos anticentro, particularmente segmentos. Finalmente mencionaremos que en [30] se calcula una recta maximin en el plano para obstáculos poligonales, y que en [28, 29] se obtiene el plano óptimo anticentro para un conjunto de puntos en el espacio tridimensional.

4. Diagramas de Voronoi

Dado un conjunto de puntos S en el plano euclídeo, su *diagrama de Voronoi* es la descomposición del plano en las regiones formadas por los puntos que son más cercanos a cada uno de los puntos de S (Figura 3).

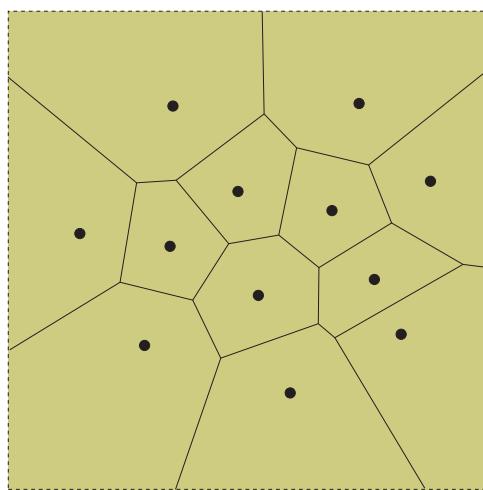


Figura 3: Diagrama de Voronoi del punto más cercano.

Estos diagramas admiten numerosas generalizaciones. Por ejemplo, pueden considerarse regiones asociadas a los k vecinos más cercanos en vez de a uno sólo, o formarse regiones según el punto de S más lejano, o tomar objetos que no sean puntos, posiblemente en dimensión superior a 2, o en presencia de métricas diferentes de la euclídea.

Como los diagramas de Voronoi “capturan” poderosamente la información sobre proximidad, se han constituido en la herramienta más ubicua de la geometría computacional, y la que se halla presente en mayor tipo y número de aplicaciones; una buena referencia sobre el tema es [40].

Estos diagramas tienen aplicación muy relevante en análisis locacional. Por ejemplo, es fácil ver que una trayectoria maximin para cruzar una nube de puntos se ha de hacer recorriendo aristas del diagrama de Voronoi del punto más cercano, y que el anticentro euclídeo ha de ser un vértice de dicho diagrama (si se busca dentro de una determinada región también podría hallarse en una intersección de su frontera con el diagrama). Similarmente, el 1-centro euclídeo se halla en un vértice del diagrama de Voronoi del punto más lejano.

En [6, 7] se estudia el problema siguiente: dados k conjuntos de puntos del plano, S_1, \dots, S_k , hallar el menor círculo que contiene al menos un punto de cada conjunto. Si pensamos, por ejemplo, que los elementos de S_1 corresponden a escuelas, los de S_2 a hospitales, los de S_3 a supermercados, etcétera, la interpretación en términos de ubicación óptima es inmediata. Este mismo problema se trata en [36] cuando el espacio de localización subyacente es una red o un grafo en vez del plano.

Otro tipo de problemas corresponden al caso en que la métrica es de tipo temporal -como por ejemplo en presencia de una red de transporte-, cuando lo que gobierna el comportamiento de los usuarios y el diseño de los servicios es el tiempo empleado en los desplazamientos, en vez de la distancia recorrida. Estos problemas han sido tratados en la serie de artículos [5, 11, 12, 37].

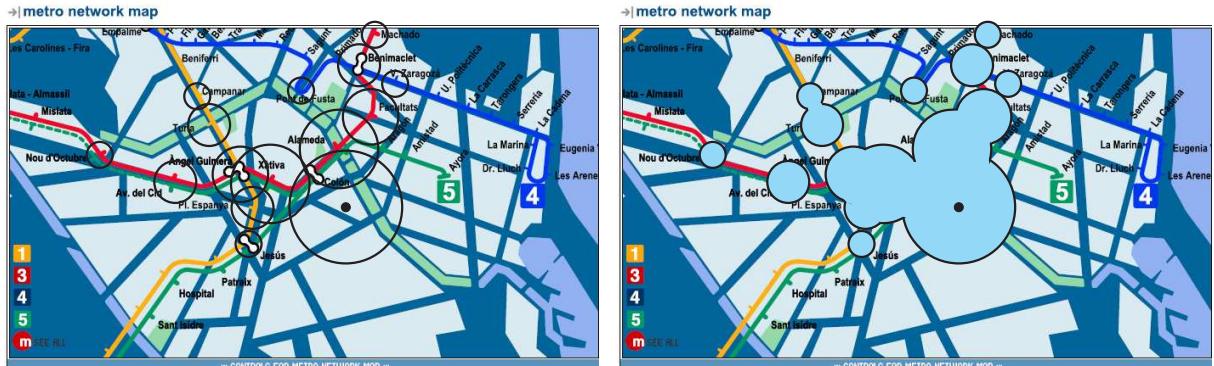


Figura 4: Una bola temporal (metro de Valencia).

Para comprender la dificultad de abordar eficientemente el tratamiento algorítmico de este grupo de problemas, consideremos el caso de una ciudad y una red de metro. Si en el plano euclídeo lo que puede cubrirse partiendo de un punto p y viajando a distancia 1 es simplemente un círculo de radio 1, cuando hay una red de metro, si es que se puede llegar a una estación, cabe la posibilidad de tomar el metro y salir de nuevo al exterior y seguir desplazándose. De este modo, una única *bola temporal* consiste en la reunión de muchas bolas euclídeas (Figura 4), y es fácil imaginar la complicación de obtener diagramas cuya construcción depende precisamente del manejo de las bolas temporales.

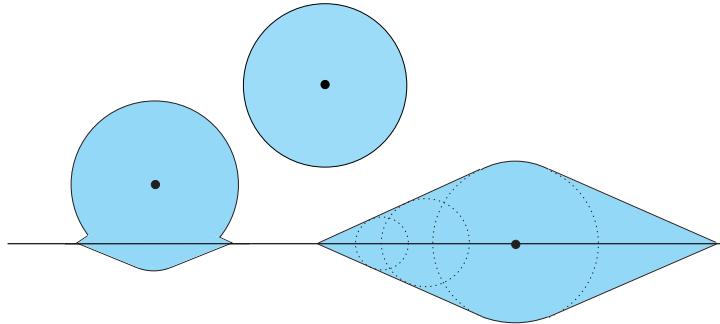


Figura 5: Bolas temporales relativos a una autopista ideal: la forma depende de la posición del centro de la bola con respecto a la recta-autopista.

Cuando el acceso a la red de transporte se puede hacer sólo en unos puntos determinados, como las estaciones del metro, el modelo se llama *discreto*, en oposición al *modelo continuo* en que se supone que la red es accesible en cualquier punto. Un tanto sorprendentemente, el modelo continuo presenta todavía más dificultades que el discreto por lo que respecta a la obtención de algoritmos eficientes. Por ejemplo, si consideramos una autopista ideal modelada por una recta, la forma de una bola temporal depende de la posición del punto de partida con respecto a la autopista (Figura 5). Este problema ha sido estudiado en los trabajos mencionados, donde se dan algoritmos óptimos para los diagramas de Voronoi asociados, cuyas formas son complejas (Figura 6), pero no se han podido desarrollar algoritmos subcuadráticos para estructuras presumiblemente más sencillas, como por ejemplo la envolvente convexa.

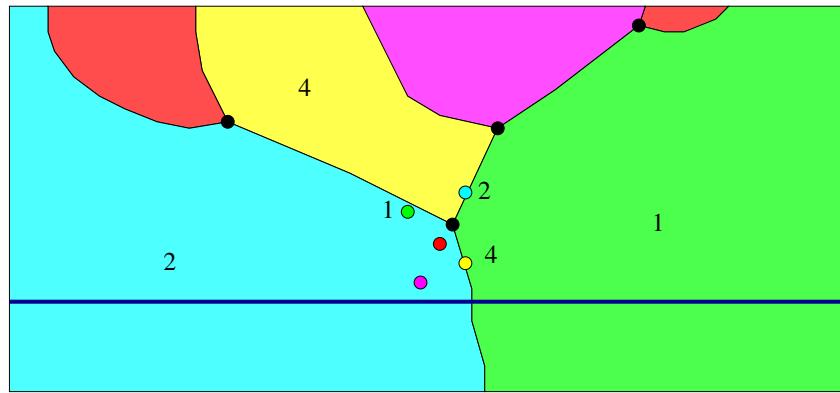


Figura 6: Diagrama de Voronoi temporal del punto más cercano para una autopista ideal.

Concluiremos mencionando que la diversidad de métricas, objetos y aplicaciones en torno a los diagramas de Voronoi es tanta, que a veces es necesario o preferible utilizar métodos que proporcionen diagramas aproximados. Esto es lo que se hace mediante secciones aleatorias en [20], y mediante técnicas de informática gráfica dirigidas a la visualización en [14] y [15].

Referencias

- [1] Manuel Abellanas, Jit Bose, Jesús García, Ferran Hurtado, Mariano Nicolás, Pedro Ramos, On properties of higher order Delaunay graphs with applications, *Proc. 20th European Conference on Computational Geometry*, 119-122, 2005.
- [2] Manuel Abellanas, Aymée Calatayud, Jesús García-López, Localización óptima de un anillo, *Proc. IX Encuentros de Geometría Computacional*, 55-64, 2001.
- [3] Manuel Abellanas, Aymée Calatayud, Jesús García-López, New bound for incremental constructing arrangements of curves, *Proc. 20th European Conference on Computational Geometry*, 213-216, 2004.
- [4] Manuel Abellanas, Mercè Claverol, Ferran Hurtado, Point set stratification and minimum weight structures, *Proc. 20th European Conference on Computational Geometry*, 101-106, 2004.

- [5] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Christian Icking, Elmar Langetepe, Rolf Klein, Lihong Ma, Belén Palop, Vera Sacristán, Voronoi Diagram for services neighboring a highway, *Information Processing Letters* 86, 283-288, 2003.
- [6] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Christian Icking, Elmar Langetepe, Rolf Klein, Lihong Ma, Belén Palop, Vera Sacristán, Furthest Color Voronoi Diagram and related problems, *Proc. 17th European Conference on Computational Geometry*, 113-116, 2001.
- [7] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Christian Icking, Elmar Langetepe, Rolf Klein, Lihong Ma, Belén Palop, Vera Sacristán, Smallest color-spanning objects, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag 2161, 278-289, 2001.
- [8] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Christian Icking, Elmar Langetepe, Rolf Klein, Lihong Ma, Belén Palop, Vera Sacristán, Proximity problems for time metrics induced by the L1 metric and isothetic networks, *Actas de los IX Encuentros de Geometría Computacional*, 175-182, 2001.
- [9] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Christian Icking, Lihong Ma, Belén Palop, Pedro A. Ramos, Best fitting rectangles, *Proc. 18th European Conference on Computational Geometry*, 147-150, 2003.
- [10] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Rolf Klein, Elmar Langetepe, Belén Palop, Vera Sacristán, Bichromatic 2-center problem, *Proc. X Encuentros de Geometría Computacional*, 131-137, 2003.
- [11] Manuel Abellanas, Ferran Hurtado, Belén Palop, Transportation networks and Voronoi Diagrams, *Proc. Int. Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, 203-212, 2004.
- [12] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, Belén Palop, Quickest paths, straight skeletons, and the city Voronoi diagram, *Discrete and Computational Geometry* 31, pp.17-35, 2004.
- [13] Boris Aronov, Franz Aurenhammer, Ferran Hurtado, Stefan Langerman, David Rappaport, Shakhar Smorodinsky, Small weak epsilon nets, *Proc. 17th Canadian Conf. on Computational Geometry*, xx-yy, 2005.
- [14] Immaculada Boada, Narcís Coll, Joan Antoni Sellàrs, Hierarchical Planar Voronoi Diagram Approximations, *Proc. 14th Canadian Conference on Computational Geometry* 27, 40-45, 2002.
- [15] Immaculada Boada, Narcís Coll, Joan Antoni Sellàrs, The Voronoi-Quadtree: construction and visualization, *Eurographics 2002 Short Presentation* 27, 349-355, 2002.
- [16] Sergio Cabello, J. Antoni Sellàrs, Computing a center-traversal line, *Proc. XI Encuentros de Geometría Computacional*, 133-140, 2005.
- [17] Aymée Calatayud, Problemas geométricos de localización, *Tesis doctoral* (Directores: Manuel Abellanas y Jesús García), Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
- [18] Mercè Claverol, Problemas geométricos en morfología computacional, *Tesis doctoral* (Directores: Manuel Abellanas y Ferran Hurtado), Universitat Politècnica de Catalunya, 2004.

- [19] Narcís Coll, Approximation and Visualization Methods for Bidimensional Geometric Objects, *Tesis doctoral* (Directores: Ferran Hurtado y J. Antoni Sellàrès), Universitat Politècnica de Catalunya, 2004.
- [20] Narcís Coll, Ferran Hurtado, Antoni Sellàrès, Approximating planar subdivisions and generalized Voronoi diagrams from random sections, *Proc. 18th European Conference on Computational Geometry*, 200-206, 2003.
- [21] Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, Ottfried Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 1997.
- [22] Olivier Devillers, Pedro A. Ramos, Computing roundness is easy if the set is almost round, *Int. J. Computational Geometry and Applications* 12, 229-248, 2002.
- [23] José Miguel Díaz-Báñez, Francisco Gómez, Ferran Hurtado, Approximation of point sets by 1-corner polygonal chains, *INFORMS Journal of Computing* 12, 317-328, 2000.
- [24] José Miguel Díaz-Báñez, Francisco Gómez, Ferran Hurtado, Localización de servicios poligonales con restricción en el número de codos, *Proc. VII Encuentros de Geometría Computacional* 27, 239-250, 1997.
- [25] José Miguel Díaz-Báñez, Ferran Hurtado, Computing obnoxious 1-corner polygonal chains, *Computers & Operations Research*, en prensa.
- [26] José Miguel Díaz, Ferran Hurtado, Henk Meijer, David Rappaport, Joan Antoni Sellàrès, The Largest Empty Annulus Problem, *International Journal of Computational Geometry and Applications* 13, 317-325, 2003.
- [27] José Miguel Díaz-Báñez, Ferran Hurtado, David Rappaport, Carlos Seara, Inmaculada Ventura, Locating obnoxious facilities with minimum interaction, *Proc. International Symposium on Locational Decisions X*, 119-122, 2005.
- [28] José Miguel Díaz-Báñez, Mario López and Joan Antoni Sellàrès, Computing Largest Empty Slabs, *Proc. ICCSA*, Lecture Notes in Computer Science 3046, Part III, 99-108, 2004.
- [29] José Miguel Díaz-Báñez, Mario López and Joan Antoni Sellàrès, Locating an obnoxious plane, *European Journal of Operational Research*, en prensa.
- [30] José Miguel Díaz Báñez, Pedro A. Ramos, Pilar Sabariego, Cálculo eficiente de una recta nociva en presencia de obstáculos poligonales, *Proc. IV Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica*, 231-238, 2004.
- [31] José Miguel Díaz-Báñez, Carlos Seara, Inmaculada Ventura, The siphon problem, *Proc. 20th European Conference on Computational Geometry*, 33-36, 2004.
- [32] José Miguel Díaz-Báñez, Inmaculada Ventura, Localización no puntual: una perspectiva desde la geometría computacional, en *Avances en localización de centros de servicio y sus aplicaciones*, Blas Pelegrín ed., 165-190, Universidad de Murcia, 2005.
- [33] Jesús García-López, Pedro A. Ramos, Jack Snoeyink, Fitting a set of points by a circle, *Discrete and Computational Geometry* 20, 389-402, 1998.

- [34] Francisco Gómez, Ferran Hurtado, Suneeta Ramaswami, Vera Sacristán, Godfried Toussaint, Implicit convex polygons, *J. of Mathematical Modelling and Algorithms* 1, 57-85, 2002.
- [35] Ferran Hurtado, Geometría computacional: una instantánea, *La Gaceta de la RSME* 14, 11-20, 1999.
- [36] Ferran Hurtado, Rolf Klein, Elmar Langetepe, Vera Sacristán, The weighted farthest color Voronoi diagram on trees and graphs, *Computational Geometry Theory and Applications* 27, 13-26, 2004.
- [37] Ferran Hurtado, Belén Palop, Vera Sacristán, Diagramas de Voronoi con distancias temporales, *Actas de los VIII Encuentros de Geometría Computacional*, 10-20, 1999.
- [38] Ferran Hurtado, Vera Sacristán, Godfried Toussaint, Some constrained minimax and maximin location problems, *Studies in Locational Analysis* 15, 17-35, 2000.
- [39] K. Miller, Suneeta Ramaswami, Peter Rousseeuw, Joan Antoni Sellàres, Diane Souvaine, Ileana Streinu and A. Struyf, Efficient computation of location depth contours by methods of computational geometry, *Statistics and Computing* 13, 153-162, 2003.
- [40] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, Sung Nok Chiu, *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*, Chichester: John Wiley, 2000 (2nd edition).
- [41] Belén Palop, Algorithmic problems on proximity and location under metric constraints, *Tesis doctoral* (Director: Ferran Hurtado), Universitat Politècnica de Catalunya, 2003.
- [42] Jean-Marc Robert, Godfried Toussaint, Computational Geometry and Facility location, *roc. International Conf. on Operations Research and Management Science*, B1-B19, 1990.
- [43] Vera Sacristán, Optimización geométrica y aplicaciones en visibilidad, *Tesis doctoral* (Director: Ferran Hurtado), Universitat Politècnica de Catalunya, 1999.