关于模拟两个质点在平面上运动　　　-Resbi

设有一二维笛卡尔坐标系

$$xOy$$

其中有两个质点

$$A, B$$

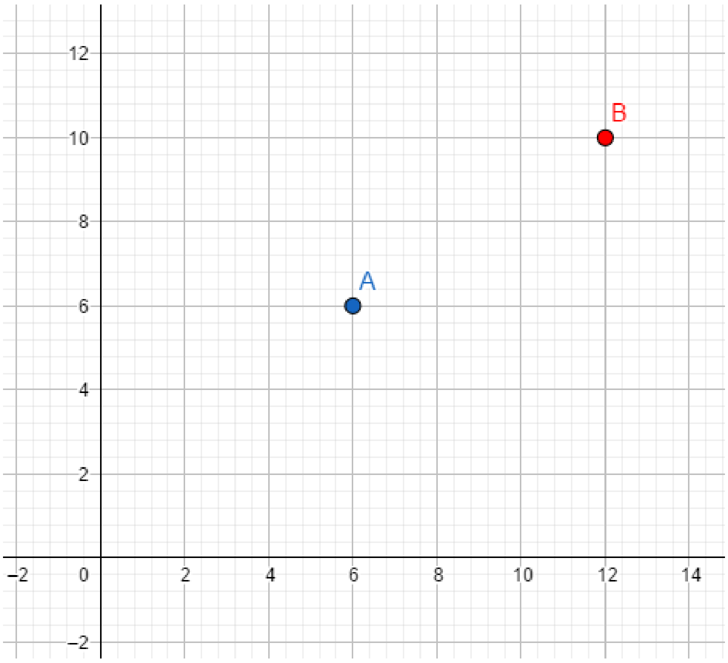


图 1　（坐标忽略）

设，有

$$A = (X_A, Y_A)$$
$$B = (X_B, Y_B)$$

$$A \text{ 的质量} M_A$$

$$B \text{ 的质量} M_B$$

根据牛顿万有引力公式:

$$F = G\frac{M_1 \cdot M_2}{R^2}$$

其中,G 为万有引力常数:

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$$

R为两个质点之间的距离。即:

$$R = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

代入质点 A，B 的数据 有:

$$R = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$$

$$F = G\frac{M_A \cdot M_B}{R^2}$$

引力 F 对于质点 A 的 X 轴 Y 轴分力$\overrightarrow{F_{XA}}$ 与$\overrightarrow{F_{YA}}$:

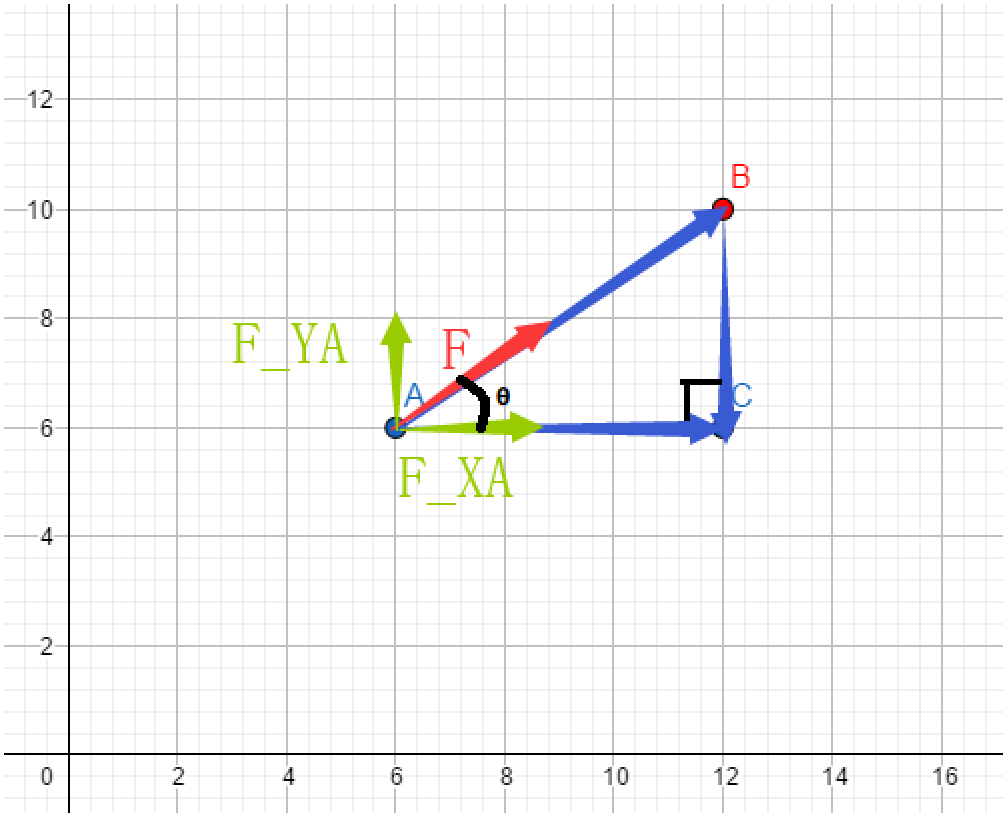


图 1-0

可知关于∠θ 有:

$$\tan\theta = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AC}}{AB}$$

$$\sin\theta = \frac{\overrightarrow{BC}}{AB}$$

其中,

$$\begin{cases} AB = R \\ \overrightarrow{BC} = Y_B - Y_A \\ \overrightarrow{AC} = X_B - X_A \end{cases}$$

则，关于F_{XA} ,F_{YA} 就有:

$$\overrightarrow{F_{XA}} = F \times \cos\theta = F \times \frac{\overrightarrow{AC}}{AB} = F \times \frac{X_B - X_A}{R}$$

$$\overrightarrow{F_{YA}} = F \times \sin\theta = F \times \frac{\overrightarrow{BC}}{AB} = F \times \frac{Y_B - Y_A}{R}$$

引力 F 对于质点 B 的 X 轴 Y 轴分力$\overrightarrow{F_{XB}}$ 与$\overrightarrow{F_{YB}}$

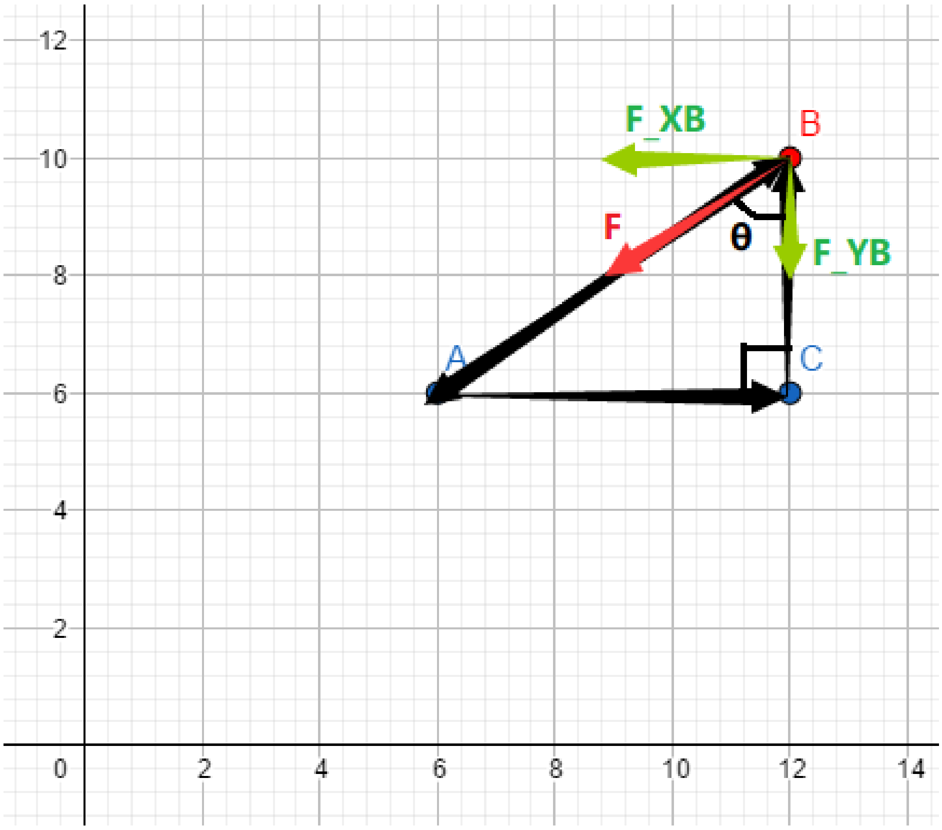


图 1-1

(质点 A 和 B 受到的互相吸引力 F 大小相同和大小相同和方向相反)

可知关于∠θ 有:

$$\tan\theta = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BC}}{AB}$$

$$\sin\theta = \frac{\overrightarrow{AC}}{AB}$$

其中,

$$\begin{cases} AB = R \\ \overrightarrow{BC} = Y_A - Y_B \\ \overrightarrow{AC} = X_A - X_B \end{cases}$$

则，关于F_{XA} 与F_{YA}就有:

$$\overrightarrow{F_{XB}} = F \times \sin\theta = F \times \frac{\overrightarrow{AC}}{AB} = F \times \frac{X_A - X_B}{R} = -\overrightarrow{F_{XA}}$$

$$\overrightarrow{F_{YB}} = F \times \cos\theta = F \times \frac{\overrightarrow{BC}}{AB} = F \times \frac{Y_A - Y_B}{R} = -\overrightarrow{F_{YA}}$$

根据牛顿第二定律:

物体的加速度跟物体所受的合外力成正比，跟物体的质量成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同。公式为:

$$\boldsymbol{a} = \frac{F}{m}$$

其中，a 为物体的加速度，F 为合外力，m 为物体的质量

那么就可以有 质点 A 在 Y 轴的加速度 $\overrightarrow{a_{YA}}$

$$\overrightarrow{a_{YA}} = \frac{\overrightarrow{F_{YA}}}{M_A}$$

在 X 轴的加速度$\overrightarrow{a_{XA}}$

$$\overrightarrow{a_{XA}} = \frac{\overrightarrow{F_{XA}}}{M_A}$$

同理，有质点 B 在 Y 轴的加速度 $\overrightarrow{a_{YB}}$

$$\overrightarrow{a_{YB}} = \frac{\overrightarrow{F_{YB}}}{M_B}$$

在 X 轴的加速度$\overrightarrow{a_{XB}}$

$$\overrightarrow{a_{XB}} = \frac{\overrightarrow{F_{XB}}}{M_B}$$

设 单位时间 $\boldsymbol{\Delta t}$ ***单位为 秒***(s)

设 质点 A 在 x 轴的分速度$(^{m}/_{s})$***：***

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{XA}}$$

在 y 轴的分速度：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{YA}}$$

设 质点 B 在 x 轴的分速度$(^{m}/_{s})$***:***

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{XB}}$$

在 y 轴的分速度：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{YB}}$$

经过一个单位时间后，有
质点 A 于 x 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta x_A} = \Delta t \times \overrightarrow{v_{XA}} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{XA}}$$

于 y 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta y_A} = \Delta t \times \overrightarrow{v_{YA}} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{YA}}$$

质点 B 于 x 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta \mathrm{x}_B} = \Delta \mathrm{t} \times \overrightarrow{v_{XB}} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{XB}}$$

于 y 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta \mathrm{y}_B} = \Delta \mathrm{t} \times \overrightarrow{v_{YB}} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{YB}}$$

于是，有:

两质点经过一个 单位时间 $\boldsymbol{\Delta t}$ 以后 分别的位置:

$$\mathrm{A}:\begin{cases} X_A = X_A + \overrightarrow{\Delta \mathrm{x}_A} \\ Y_A = Y_A + \overrightarrow{\Delta \mathrm{y}_A} \end{cases}$$

$$B:\begin{cases} X_B = X_B + \overrightarrow{\Delta \mathrm{x}_B} \\ Y_B = Y_B + \overrightarrow{\Delta \mathrm{y}_B} \end{cases}$$

两质点经过一个 单位时间 $\boldsymbol{\Delta t}$ 以后 分别的速度:

$$\mathrm{A}:\begin{cases} \overrightarrow{v_{XA}} = \overrightarrow{v_{XA}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{XA}} \\ \overrightarrow{v_{YA}} = \overrightarrow{v_{YA}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{YA}} \end{cases}$$

$$B:\begin{cases} \overrightarrow{v_{XB}} = \overrightarrow{v_{XB}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{XB}} \\ \overrightarrow{v_{YB}} = \overrightarrow{v_{YB}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{YB}} \end{cases}$$

Matlab 程序

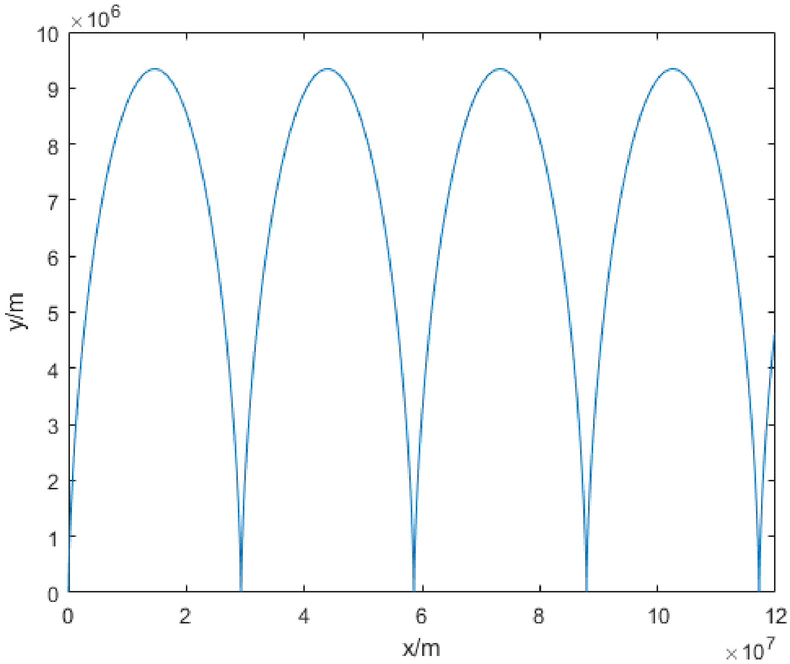
%配置建议:RAM 大于等于 8GB
%在此程序中，质点 A 模拟的是地球，质点 B 模拟的是月球。
%两质点间距离按照世界公认的地月距离，月球运行速度也是世界公认的月行速度
%本程序中，Δt **取值为 1s，一共循环迭代了**$10e6/\Delta t$**次。**

```
G = 6.67259e-11;
delta_t = 1;

totalTime = 10e6;
rools = totalTime / delta_t;

Recording_v_XA = 1:rools;
Recording_v_YA = 1:rools;

Recording_v_XB = 1:rools;
Recording_v_YB = 1:rools;

Recording_X_A = 1:rools;
Recording_Y_A = 1:rools;

Recording_X_B = 1:rools;
Recording_Y_B = 1:rools;

X_A = 0;
Y_A = 0;

X_B = 0;
Y_B = 384403.9e3;

v_XA = 0;%-12.6;
v_YA = 0;

v_XB = 1023; %1.023e3 m/s
v_YB = 0;

M_A = 5.965e24; %Earth
M_B = 7.349e22; %Luna

for rool = 1:rools
    R = sqrt((X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2);
    F = G * (M_A * M_B) / R^2;

    F_XA = F * ((X_B - X_A) / R);
```

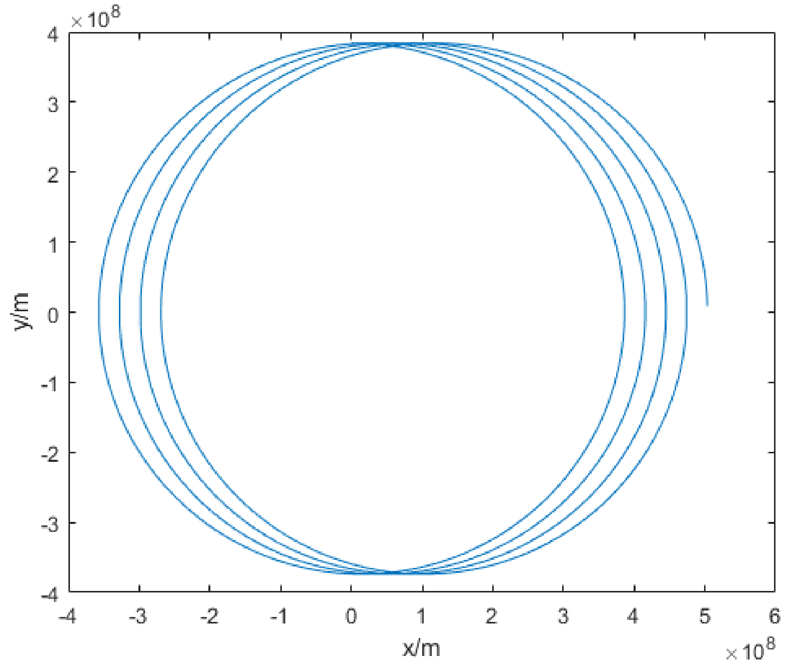
```
    F_YA = F * ((Y_B - Y_A) / R);

    F_XB = -F_XA;
    F_YB = -F_YA;

    a_XA = F_XA / M_A;
    a_YA = F_YA / M_A;

    a_XB = F_XB / M_B;
    a_YB = F_YB / M_B;

    %Caculating the changed data.
    delta_X_A = (delta_t * v_XA) + ((delta_t^2) * a_XA)/2;
    delta_Y_A = (delta_t * v_YA) + ((delta_t^2) * a_YA)/2;

    delta_X_B = (delta_t * v_XB) + ((delta_t^2) * a_XB)/2;
    delta_Y_B = (delta_t * v_YB) + ((delta_t^2) * a_YB)/2;

    X_A = X_A + delta_X_A;
    Y_A = Y_A + delta_Y_A;

    X_B = X_B + delta_X_B;
    Y_B = Y_B + delta_Y_B;

    v_XA = v_XA + (delta_t * a_XA);
    v_YA = v_YA + (delta_t * a_YA);

    v_XB = v_XB + (delta_t * a_XB);
    v_YB = v_YB + (delta_t * a_YB);

    %Record the data.
    Recording_v_XA(rool) = v_XA;
    Recording_v_YA(rool) = v_YA;

    Recording_v_XB(rool) = v_XB;
    Recording_v_YB(rool) = v_YB;

    Recording_X_A(rool) = X_A;
    Recording_Y_A(rool) = Y_A;

    Recording_X_B(rool) = X_B;
    Recording_Y_B(rool) = Y_B;
end
plot(Recording_X_B,Recording_Y_B,Recording_X_A,Recording_Y_A);
```

运行结果:

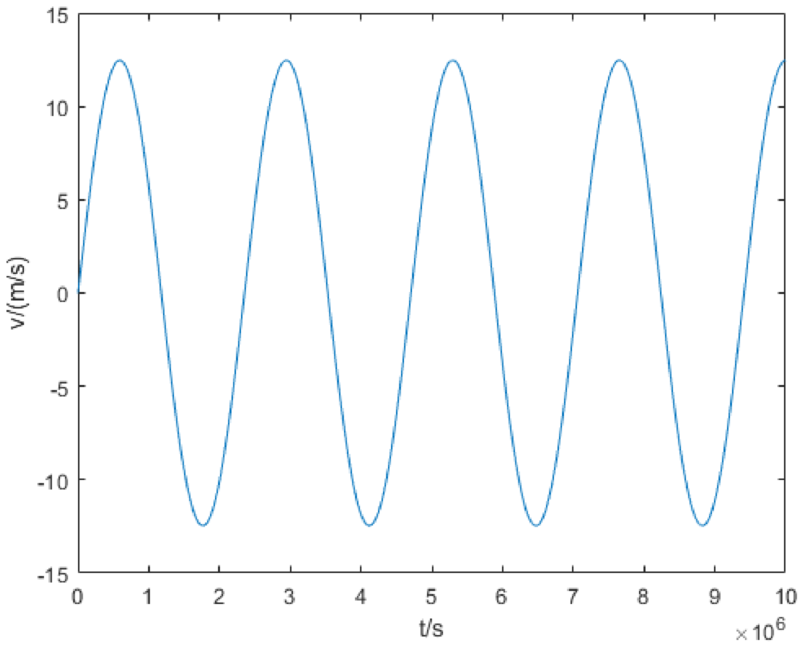
质点 A 运行轨迹（地球）:



质点 B 行轨迹（月球）:



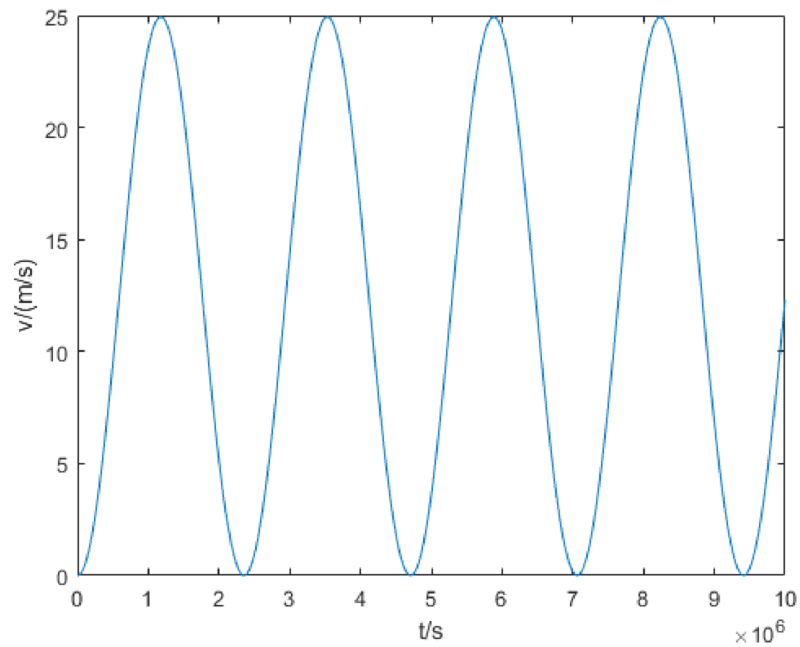
质点 A 的 Y 轴速度图:



$$\mathrm{Max} = 12.4698$$

$$\mathrm{Min} = -12.4697$$

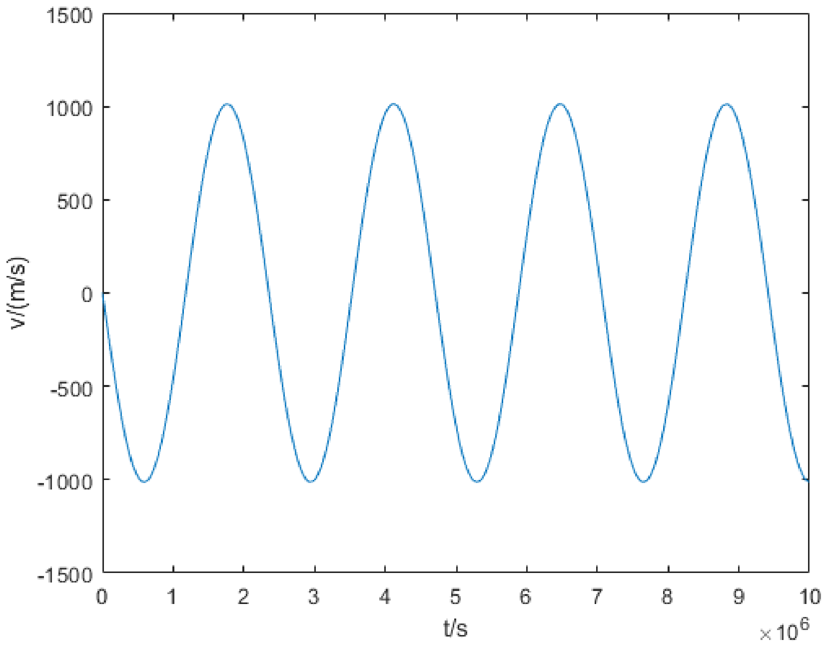
质点 A 的 X 轴速度图:



$$\mathrm{Max} = 24.9395$$

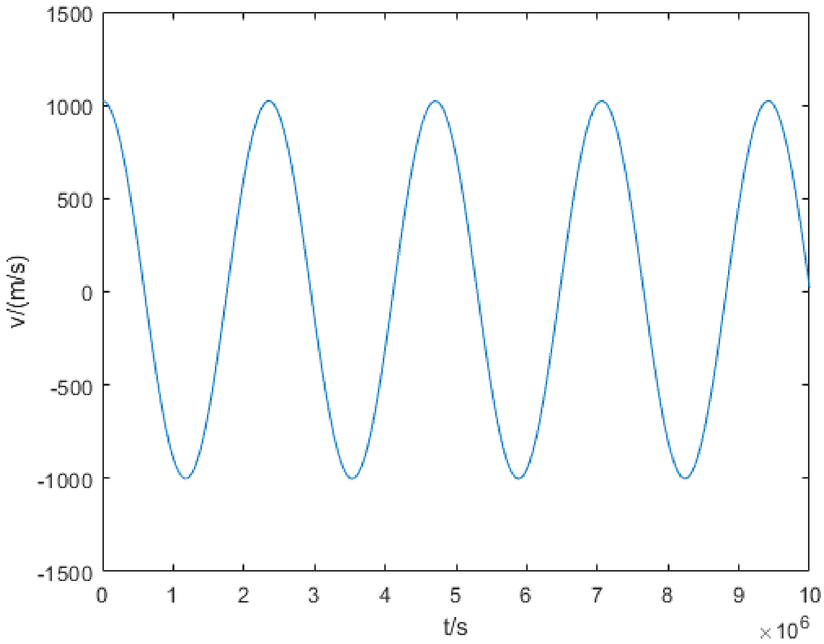
$$\mathrm{Min} = 0$$

质点 B 的 Y 轴速度图:



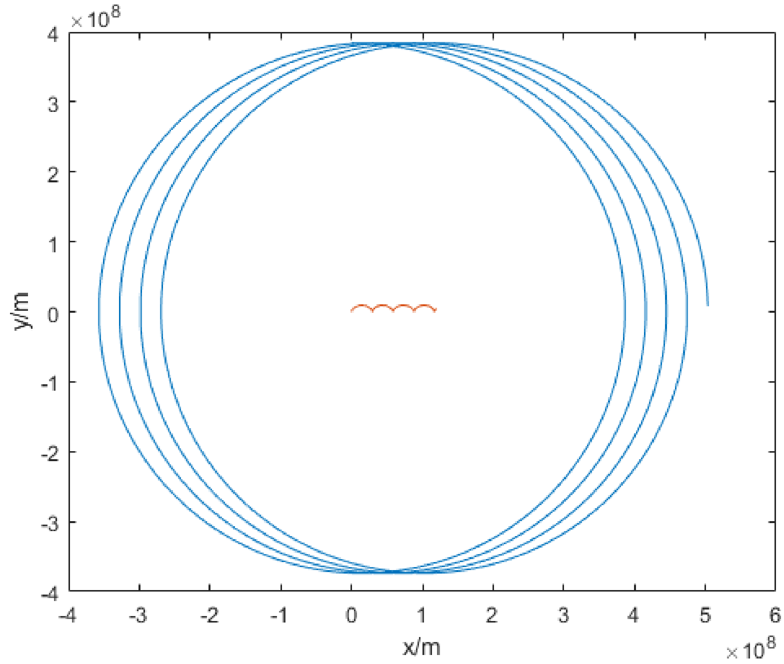
$$\mathrm{Max} = 1.0121\mathrm{e}+03$$
$$\mathrm{Min} = -1.0121\mathrm{e}+03$$

质点 B 的 X 轴速度图:



$$\mathrm{Max} = 1023$$
$$\mathrm{Min} = -1.0013\mathrm{e}+03$$

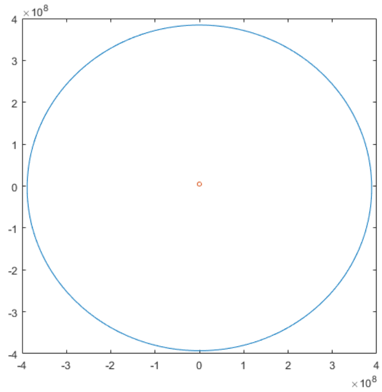
两质点运动轨迹合并图:



红色：质点 A

蓝色：质点 B

特殊轨道（近似圆环形）:



红色：质点 A

蓝色：质点 B

参数:

```
X_A = 0;

Y_A = 0;

X_B = 0;

Y_B = 384403.9e3;

v_XA = -12.6;

v_YA = 0;

v_XB = 1023; %1.023e3 m/s

v_YB = 0;

M_A = 5.965e24; %Earth

M_B = 7.349e22; %Luna
```

由计算结果可看出，这套算法”看起来”可行。

总结：

我发现的这套算法，使用了迭代法

然而世界上已经有可以给出精确解的算法

所以这套算法不足的是在误差方面可能会比较爆炸

但是优点是：

任何一个充分学习过必修一和必修二部分知识的高中生

应该都能理解这套算法每一步的意思

这也是我个人的本意

<u>后经查重发现，本算法与韦尔莱积分法雷同，故本文不当做正式论文发表</u>

Resbi 著于 9/15/2018

软件使用：

作图：Matlab R2018a

GeoGebraGeometry,

微软画图工具,

QQ 截图工具

文献引用：

《自然哲学的数学原理》艾萨克·牛顿 著

百度