

设有一二维笛卡尔坐标系

xOy

其中有两个质点

A, B

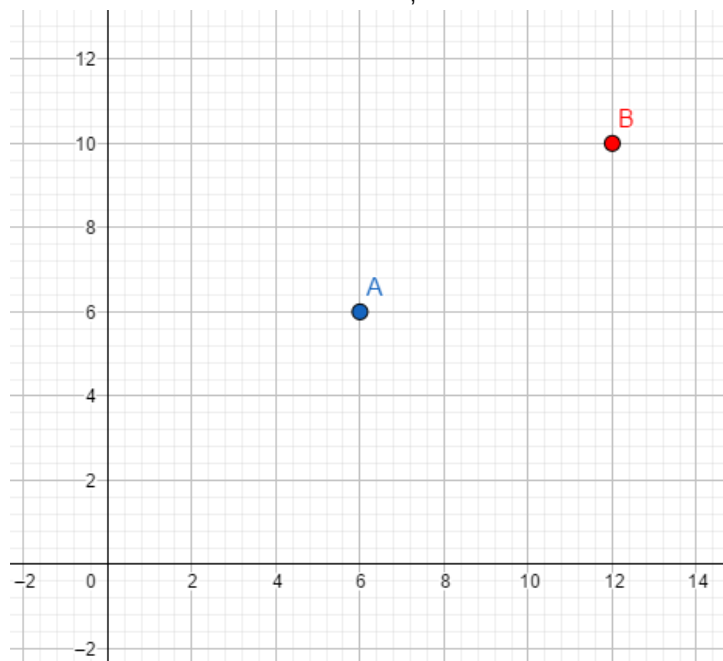


图 1

设, 有

(坐标忽略)

$$A = (X_A, Y_A)$$

$$B = (X_B, Y_B)$$

A 的质量 M_A

B 的质量 M_B

根据牛顿万有引力公式:

$$F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{R^2}$$

其中, G 为万有引力常数:

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

R 为两个质点之间的距离。即:

$$R = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

代入质点 A, B 的数据 有:

$$R = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$$

$$F = G \frac{M_A \cdot M_B}{R^2}$$

引力 F 对于质点 A 的 X 轴 Y 轴分力 $\overrightarrow{F_{XA}}$ 与 $\overrightarrow{F_{YA}}$:

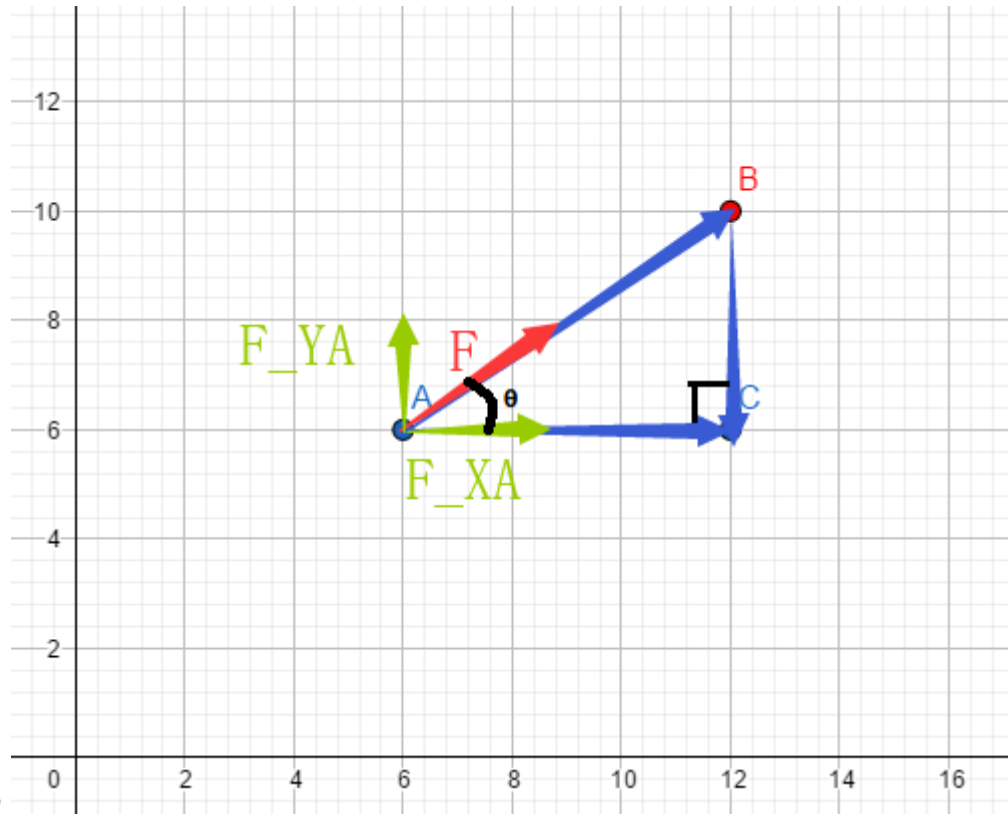


图 1-0

可知关于 $\angle \theta$ 有:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} \\ \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} \\ \sin \theta &= \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}}\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{cases} AB = R \\ \overrightarrow{BC} = Y_B - Y_A \\ \overrightarrow{AC} = X_B - X_A \end{cases}$$

则, 关于 F_{XA}, F_{YA} 就有:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{XA}} &= F \times \cos \theta = F \times \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = F \times \frac{X_B - X_A}{R} \\ \overrightarrow{F_{YA}} &= F \times \sin \theta = F \times \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}} = F \times \frac{Y_B - Y_A}{R}\end{aligned}$$

引力 F 对于质点 B 的 X 轴 Y 轴分力 $\overrightarrow{F_{XB}}$ 与 $\overrightarrow{F_{YB}}$

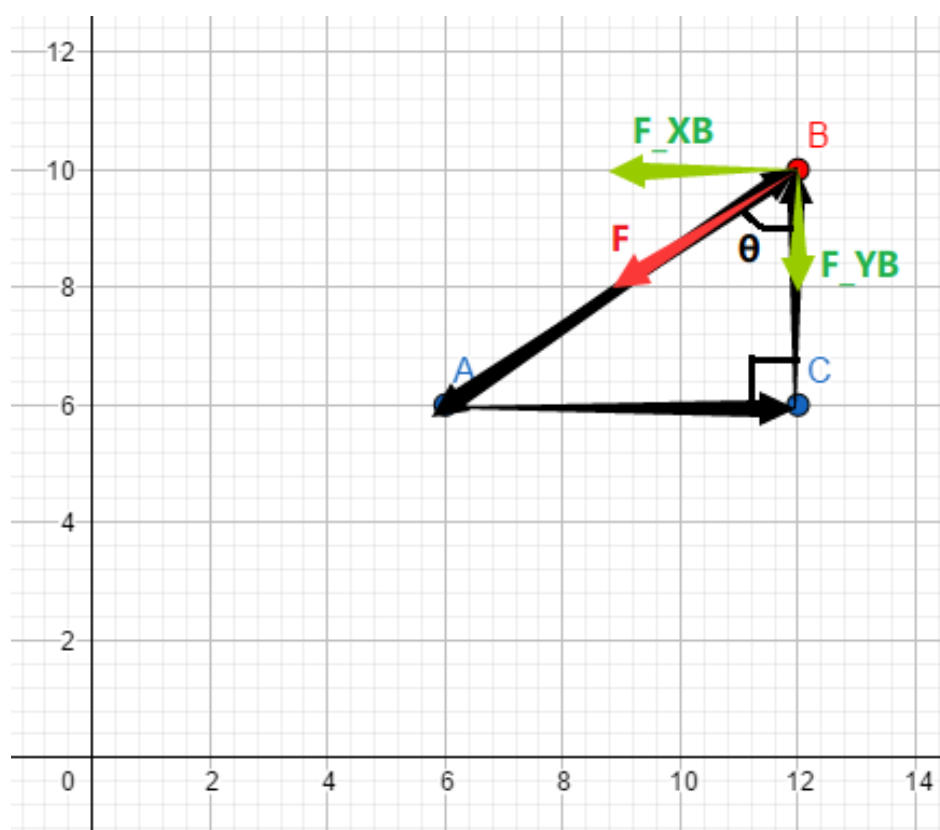


图 1-1

(质点 A 和 B 受到的互相吸引力 F 大小相同和大小相同和方向相反)

可知关于 $\angle \theta$ 有:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \\ \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}} \\ \sin \theta &= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{cases} AB = R \\ \overrightarrow{BC} = Y_A - Y_B \\ \overrightarrow{AC} = X_A - X_B \end{cases}$$

则, 关于 F_{XA} 与 F_{YA} 就有:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{XB}} &= F \times \sin \theta = F \times \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = F \times \frac{X_A - X_B}{R} = -\overrightarrow{F_{XA}} \\ \overrightarrow{F_{YB}} &= F \times \cos \theta = F \times \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}} = F \times \frac{Y_A - Y_B}{R} = -\overrightarrow{F_{YA}}\end{aligned}$$

根据牛顿第二定律:

物体的加速度跟物体所受的合外力成正比, 跟物体的质量成反比, 加速度的方向跟合外力的方向相同。公式为:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

其中, \mathbf{a} 为物体的加速度, \mathbf{F} 为合外力, m 为物体的质量

那么就可以有 质点 A 在 Y 轴的加速度 $\overrightarrow{a_{YA}}$

$$\overrightarrow{a_{YA}} = \frac{\overrightarrow{F_{YA}}}{M_A}$$

在 X 轴的加速度 $\overrightarrow{a_{XA}}$

$$\overrightarrow{a_{XA}} = \frac{\overrightarrow{F_{XA}}}{M_A}$$

同理, 有质点 B 在 Y 轴的加速度 $\overrightarrow{a_{YB}}$

$$\overrightarrow{a_{YB}} = \frac{\overrightarrow{F_{YB}}}{M_B}$$

在 X 轴的加速度 $\overrightarrow{a_{XB}}$

$$\overrightarrow{a_{XB}} = \frac{\overrightarrow{F_{XB}}}{M_B}$$

设 单位时间 Δt 单位为 秒(s)

设 质点 A 在 x 轴的分速度(m/s):

$$\overrightarrow{v_{XA}}$$

在 y 轴的分速度:

$$\overrightarrow{v_{YA}}$$

设 质点 B 在 x 轴的分速度(m/s):

$$\overrightarrow{v_{XB}}$$

在 y 轴的分速度:

$$\overrightarrow{v_{YB}}$$

经过一个单位时间后, 有
质点 A 于 x 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta x_A} = \Delta t \times \overrightarrow{v_{XA}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{XA}}$$

于 y 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta y_A} = \Delta t \times \overrightarrow{v_{YA}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{YA}}$$

质点 B 于 x 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta x_B} = \Delta t \times \overrightarrow{v_{XB}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{XB}}$$

于 y 轴的位移:

$$\overrightarrow{\Delta y_B} = \Delta t \times \overrightarrow{v_{YB}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \times \overrightarrow{a_{YB}}$$

于是, 有:

两质点经过一个 单位时间 Δt 以后 分别的位置:

$$A: \begin{cases} X_A = X_A + \overrightarrow{\Delta x_A} \\ Y_A = Y_A + \overrightarrow{\Delta y_A} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} X_B = X_B + \overrightarrow{\Delta x_B} \\ Y_B = Y_B + \overrightarrow{\Delta y_B} \end{cases}$$

两质点经过一个 单位时间 Δt 以后 分别的速度:

$$A: \begin{cases} \overrightarrow{v_{XA}} = \overrightarrow{v_{XA}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{XA}} \\ \overrightarrow{v_{YA}} = \overrightarrow{v_{YA}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{YA}} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \overrightarrow{v_{XB}} = \overrightarrow{v_{XB}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{XB}} \\ \overrightarrow{v_{YB}} = \overrightarrow{v_{YB}} + \Delta t \times \overrightarrow{a_{YB}} \end{cases}$$

Matlab 程序

%配置建议:RAM 大于等于 8GB

%在此程序中, 质点 A 模拟的是地球, 质点 B 模拟的是月球。

%两质点间距离按照世界公认的地月距离, 月球运行速度也是世界公认的月行速度

%本程序中, Δt 取值为 **1s**, 一共循环迭代了 $10^6/\Delta t$ 次。

$G = 6.67259 \times 10^{-11}$;

$\Delta t = 1$;

totalTime = 10^6 ;

rools = totalTime / Δt ;

Recording_v_XA = 1:rools;

Recording_v_YA = 1:rools;

Recording_v_XB = 1:rools;

Recording_v_YB = 1:rools;

Recording_X_A = 1:rools;

Recording_Y_A = 1:rools;

Recording_X_B = 1:rools;

Recording_Y_B = 1:rools;

$X_A = 0$;

$Y_A = 0$;

$X_B = 0$;

$Y_B = 384403.9 \times 10^3$;

$v_{XA} = 0$;

$v_{YA} = 0$;

$v_{XB} = 1023$; % 1.023×10^3 m/s

$v_{YB} = 0$;

$M_A = 5.965 \times 10^{24}$; %Earth

$M_B = 7.349 \times 10^{22}$; %Luna

for rool = 1:rools

$R = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$;

$F = G * (M_A * M_B) / R^2$;

$F_{XA} = F * ((X_B - X_A) / R)$;

```

F_YA = F * ((Y_B - Y_A) / R);

F_XB = -F_XA;
F_YB = -F_YA;

a_XA = F_XA / M_A;
a_YA = F_YA / M_A;

a_XB = F_XB / M_B;
a_YB = F_YB / M_B;

%Calculating the changed data.
delta_X_A = (delta_t * v_XA) + ((delta_t^2) * a_XA);
delta_Y_A = (delta_t * v_YA) + ((delta_t^2) * a_YA);

delta_X_B = (delta_t * v_XB) + ((delta_t^2) * a_XB);
delta_Y_B = (delta_t * v_YB) + ((delta_t^2) * a_YB);

X_A = X_A + delta_X_A;
Y_A = Y_A + delta_Y_A;

X_B = X_B + delta_X_B;
Y_B = Y_B + delta_Y_B;

v_XA = v_XA + (delta_t * a_XA);
v_YA = v_YA + (delta_t * a_YA);

v_XB = v_XB + (delta_t * a_XB);
v_YB = v_YB + (delta_t * a_YB);

%Record the data.
Recording_v_XA(rool) = v_XA;
Recording_v_YA(rool) = v_YA;

Recording_v_XB(rool) = v_XB;
Recording_v_YB(rool) = v_YB;

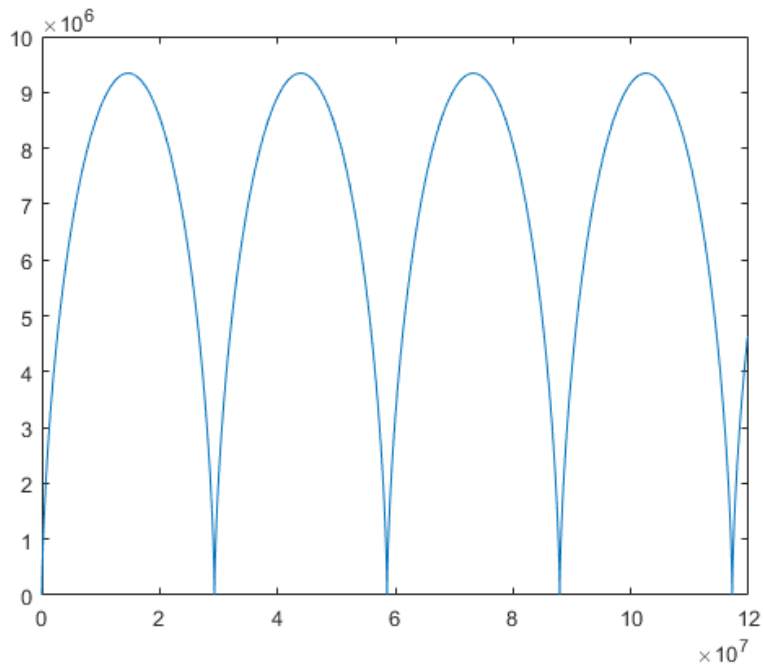
Recording_X_A(rool) = X_A;
Recording_Y_A(rool) = Y_A;

Recording_X_B(rool) = X_B;
Recording_Y_B(rool) = Y_B;
end
plot(Recording_X_B,Recording_Y_B,Recording_X_A,Recording_Y_A)

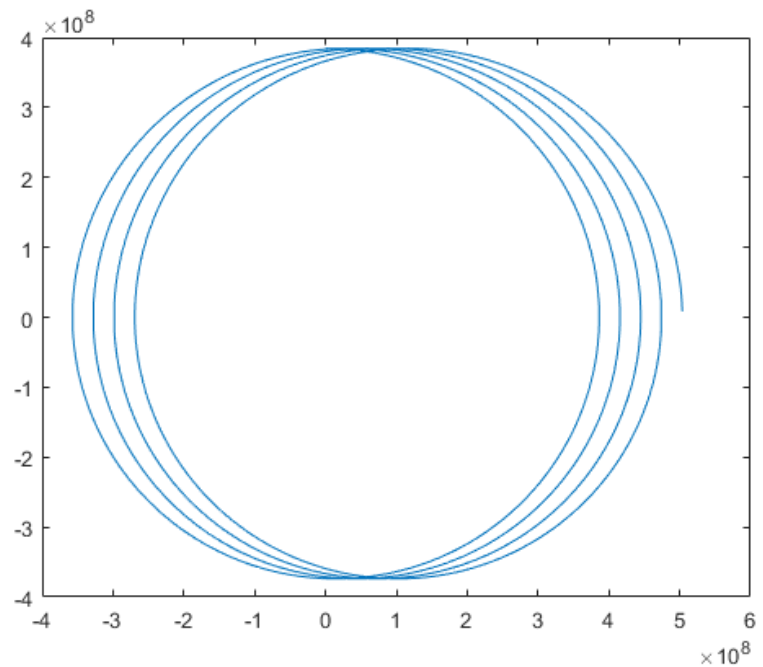
```

运行结果:

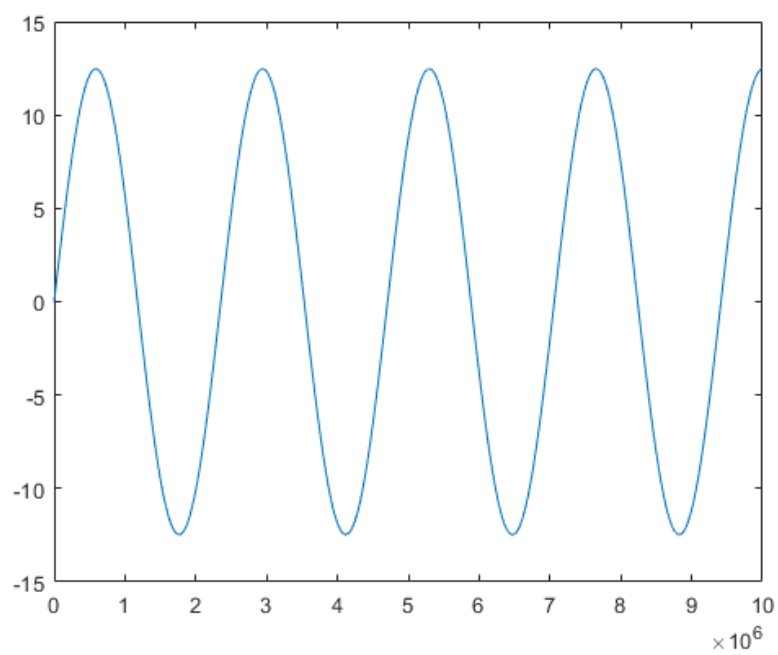
质点 A 运行轨迹（地球）:



质点 B 行轨迹（月球）:



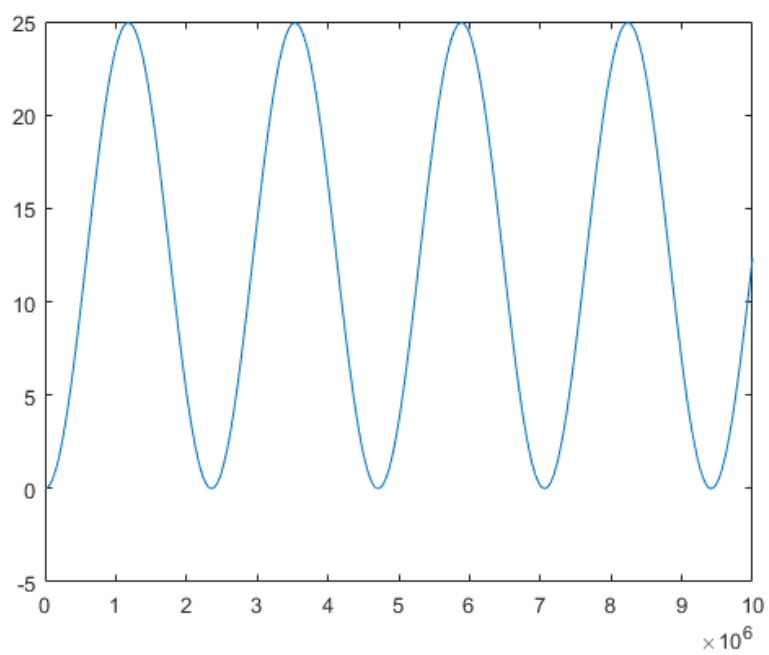
质点 A 的 Y 轴速度图：



Max = 12.4698

Min = -12.4698

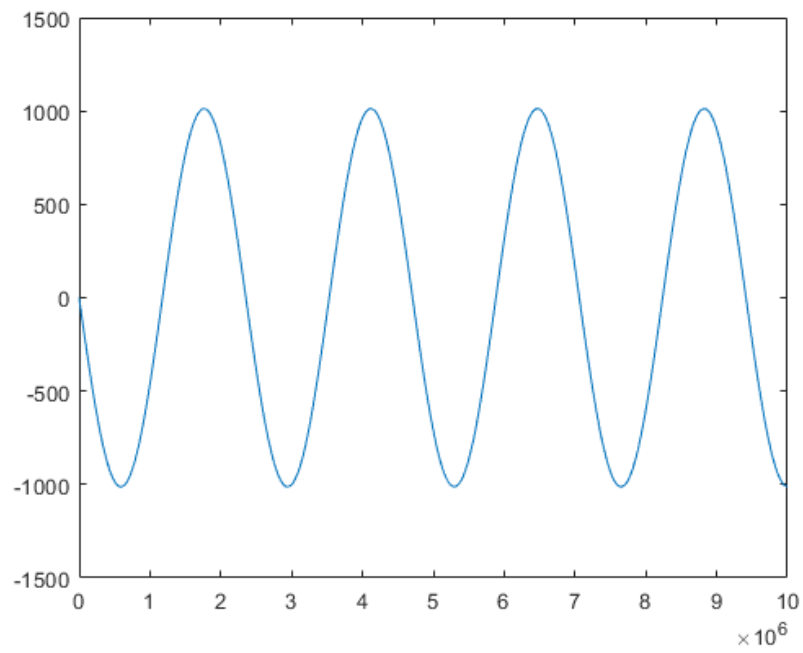
质点 A 的 X 轴速度图：



Max = 24.9396

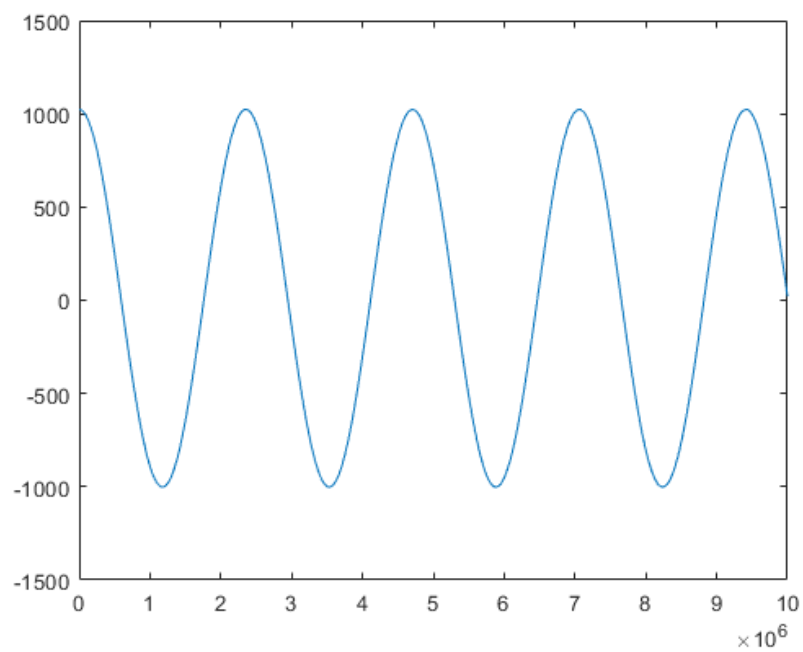
Min = -5.4235e-12

质点 B 的 Y 轴速度图:

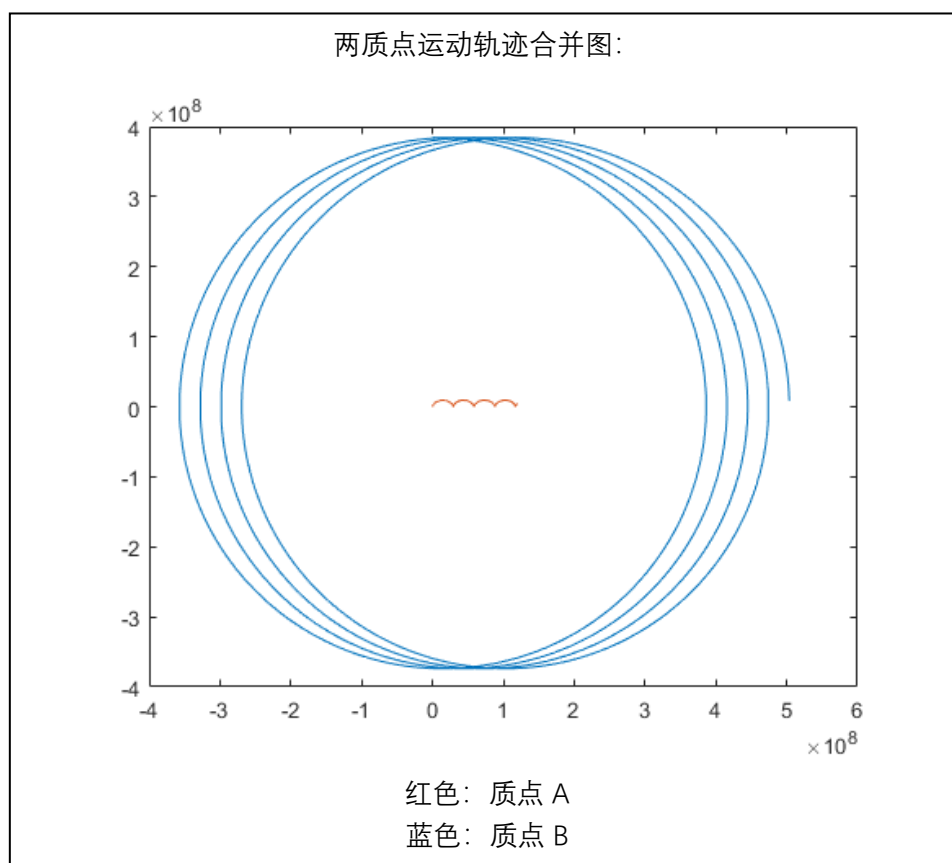


Max = $1.0121e + 03$
Min = $-1.0121e + 03$

质点 B 的 X 轴速度图:



Max = $1.0230e + 03$
Min = $-1.0013e + 03$



由计算结果可看出，这套算法“看起来”可行。

总结：

我发现的这套算法，使用了迭代法

然而世界上已经有可以给出精确解的算法

所以这套算法不足的是在误差方面可能会比较爆炸

但是优点是：

任何一个充分学习过必修一和必修二部分知识的高中生

应该都能理解这套算法每一步的意思

这也是我个人的本意

Resbi 著于 9/15/2018

软件使用：

作图：Matlab R2018a

GeoGebraGeometry,

微软画图工具,

QQ 截图工具

文献引用：

《自然哲学的数学原理》艾萨克·牛顿 著

百度