Derivando equações de movimento para Pêndulo Duplo

Ruben Esteche
Mecânica Clássica Não Linear

June 27, 2022

Exercise . Encontre as equações de movimento de um pêndulo duplo utilizando formalismo Lagrangeano, e reescreva o sistema de solução num formato de primeira ordem para que o mesmo seja numericamente solúvel utilizando python.

Proof. Na mecânica clássica, um pêndulo duplo é um pêndulo preso à extremidade de outro pêndulo. Suas equações de movimento são frequentemente escritas usando a formulação lagrangeana da mecânica e resolvidas numericamente, visto a complexidade de comportamento de sua dinâmica extremamente sensível quanto as suas condições iniciais, devido a sua natureza não-linear.

Para a demonstração à seguir iremos utilizar o seguinte sistema de coordenadas

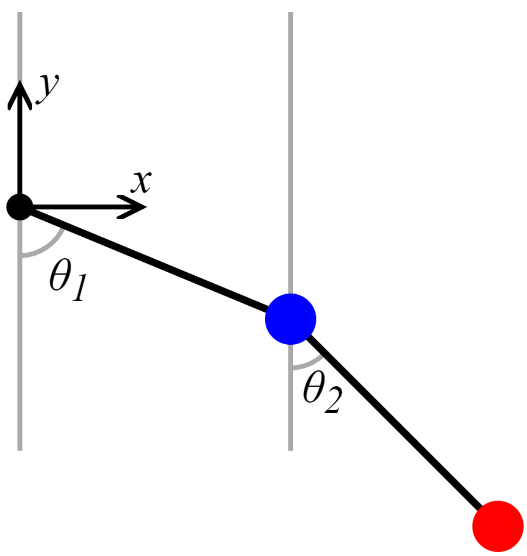

Figure 1: Centro do sistema de coordenadas escolhido em função do ponto fixo do pêndulo duplo. Destaque apenas para θ_n, a única variável independente do sistema em questão.

Os dois graus de liberdade são considerados θ_1 e θ_2, o ângulo de cada haste do pêndulo em relação à vertical. Os componentes das posições e velocidades do sistema são

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \implies \dot{x_1} = l_1\dot{\theta_1}\cos\theta_1 \tag{1}$$
$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \implies \dot{y_1} = l_1\dot{\theta_1}\sin\theta_1 \tag{2}$$
$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \implies \dot{x_2} = l_1\dot{\theta_1}\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta_2}\cos\theta_2 \tag{3}$$
$$y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2 \implies \dot{y_2} = l_1\dot{\theta_1}\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta_2}\sin\theta_2 \tag{4}$$

A energia potencial e cinética podem então ser expressas no seguinte formato

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) l_1 g \cos\theta_1 - m_2 l_2 g \cos\theta_2 \tag{5}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x_1^2} + \dot{y_1^2}) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x_2^2} + \dot{y_2^2}) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta_1^2} + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta_1^2} + l_2^2 \dot{\theta_2^2} + 2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)] \tag{7}$$

Logo,calculando a lagrangeana por definição, $L = T - V$, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta_1^2} + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta_1^2} + l_2^2 \dot{\theta_2^2} + 2 l_1 l_2 \dot{\theta_1} \dot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) l_1 g \cos\theta_1 + m_2 l_2 g \cos\theta_2 \tag{8}$$

E aplicando a famosa relação de Euler-Lagrange por fim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{9}$$

onde como falamos anteriormente, $q_i = \theta_1, \theta_2$. Ao efetuar as respectivas derivadas para estas coordenadas assim como estào na formula, iremos então obter

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta_1} + m_2 l_2 \ddot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin\theta_1 = 0 \tag{10}$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta_2} + m_2 l_1 \ddot{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin\theta_2 = 0 \tag{11}$$

Nesse nível de simplificação, esse sistema de equações acopladas é suficiente para determinar a equação de movimento do pêndulo duplo da perspectiva da teoria física. Todavia, para implementar esse sistema no solucionador de equações diferenciais ordinárias do *scipy*, o *integr.odeint* precisa trabalhar com sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, nesse caso vamos fazer $u_1 \equiv \dot{\theta}_1 \rightarrow \ddot{\theta}_1 = \dot{u_1}$ e $u_2 \equiv \dot{\theta}_2 \rightarrow \ddot{\theta}_2 = \dot{u_2}$. Após rearranjar as equações substituindo nas relações 10 e 11, as expressões resultantes para $\dot{u_1}$ e $\dot{u_2}$ serão

$$\dot{u_1} = \frac{m_2 g \sin\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)[l_1 u_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 u_2^2] - (m_1 + m_2) g \sin\theta_1}{l_1 [m_1 + m_2 sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \tag{12}$$

$$\dot{u_2} = \frac{(m_1 + m_2)[l_1 u_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin\theta_1 + g \sin\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + m_2 l_2 u_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_2 [m_1 + m_2 sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \tag{13}$$

São essas as funções que podem ser utilizadas para a resolução numérica do problema.

□