

Derivando equações de movimento para Pêndulo Duplo

Ruben Esteche
Mecânica Clássica Não Linear

June 25, 2022

Exercise . Encontre as equações de movimento de um pêndulo duplo utilizando formalismo Lagrangeano, e reescreva o sistema de solução num formato de primeira ordem para que o mesmo seja numericamente solúvel utilizando python.

Proof. Na mecânica clássica, um pêndulo duplo é um pêndulo preso à extremidade de outro pêndulo. Suas equações de movimento são frequentemente escritas usando a formulação lagrangeana da mecânica e resolvidas numericamente, visto a complexidade de comportamento de sua dinâmica extremamente sensível quanto as suas condições iniciais, devido a sua natureza não-linear.

Para a demonstração à seguir iremos utilizar o seguinte sistema de coordenadas

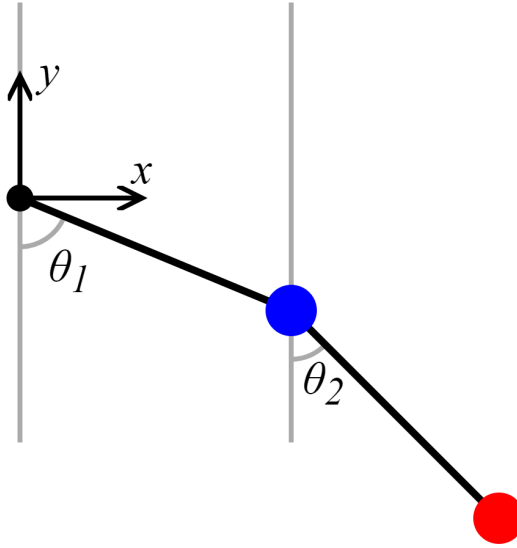


Figure 1: Centro do sistema de coordenadas escolhido em função do ponto fixo do pêndulo duplo. Destaque apenas para θ_n , a única variável independente do sistema em questão.

Os dois graus de liberdade são considerados θ_1 e θ_2 , o ângulo de cada haste do pêndulo em relação à vertical. Os componentes das posições e velocidades do sistema são

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (3)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (4)$$

A energia potencial e cinética podem então ser expressas no seguinte formato

$$V = m_1 g y_1 + m + 2g y_2 = -(m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 - m_2 l_2 g \cos \theta_2 \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \quad (7)$$

Logo, calculando a lagrangeana por definição, $L = T - V$, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 + m_2 l_2 g \cos \theta_2 \quad (8)$$

E aplicando a famosa relação de Euler-Lagrange por fim,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (9)$$

onde como falamos anteriormente, $q_i = \theta_1, \theta_2$. Ao efetuar as respectivas derivadas para estas coordenadas assim como estão na formula, iremos então obter

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \quad (10)$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad (11)$$

Nesse nível de simplificação, esse sistema de equações acopladas é suficiente para determinar a equação de movimento do pêndulo duplo da perspectiva da teoria física. Todavia, para implementar esse sistema no solucionador de equações diferenciais ordinárias do `*scipy*`, o `*integr.odeint*` precisa trabalhar com sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, nesse caso vamos fazer $u_1 \equiv \dot{\theta}_1 \rightarrow \ddot{\theta}_1 = \dot{u}_1$ e $u_2 \equiv \dot{\theta}_2 \rightarrow \ddot{\theta}_2 = \dot{u}_2$. Após rearranjar as equações substituindo nas relações 10 e 11, as expressões resultantes para \dot{u}_1 e \dot{u}_2 serão

$$\dot{u}_1 = \frac{m_2 g \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) [l_1 u_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 u_2^2] - (m_1 + m_2) g \sin \theta_1}{l_1 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (12)$$

$$\dot{u}_2 = \frac{(m_1 + m_2) [l_1 u_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_1 + g \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + m_2 l_2 u_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (13)$$

São essas as funções que podem ser utilizadas para a resolução numérica do problema.

□