

# БКБО-01/02-16, Технология обработки и передачи данных

Лекция 28 Марта 2020

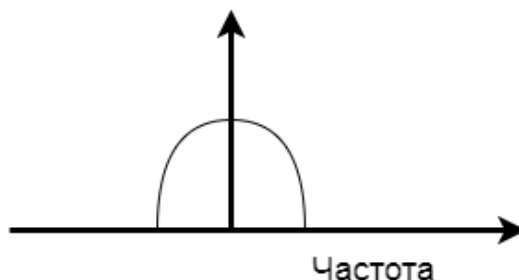
Тема *Перенос спектра на несущую частоту. Преобразование Гильберта. Аналитический сигнал.*

Цель: Освоение эффективных методов переноса спектра сигнала в цифровом домене.

Постоянная ссылка [Google Colab]:

<https://colab.research.google.com/drive/1YAR0O3qrN6eejllsK2FZhaGyK4Hmqayx>

Спектр в базовой полосе частот после обработки формирующим **RC** фильтром выглядит следующим образом:



Предположим, требуется передать сигнал с таким спектром через звуковой канал, так, чтобы весь спектр сигнала укладывался в интервал  $\omega_1 \dots \omega_2$ , где  $\omega_1 > 0$ . Тогда спектр должен выглядеть так:

Рассмотрим сигнал в базовой полосе на одной частоте  $\omega_k$ . Этот сигнал можно представить в виде  $Ae^{j\omega_k n}$ , где  $A = \alpha e^{j\phi}$  - комплексная амплитуда сигнала, которая содержит информационную часть сигнала. Для того чтобы перенести этот сигнал на частоту  $\omega_k + \omega_0$  достаточно умножить каждый отсчет сигнала в базовой полосе на  $e^{j\omega_0 n}$

$$Ae^{j\omega_k n} e^{j\omega_0 n} = Ae^{j(\omega_k + \omega_0)n}$$

Обобщая на весь сигнал  $x_n$  в базовой полосе, получаем окончательную формулу для переноса спектра из базовой полосы на несущую частоту  $\omega_0$ :

$$s_n = x_n e^{j\omega_0 n}$$

Полученный сигнал с информационной точки зрения идентичен исходному сигналу в базовой полосе частот. Т.е. перенос на несущую частоту *не изменяет информационное наполнение сигнала*. В то же время использовать сигнал  $s_n$  для формирования аналогового сигнала (в данном примере звукового сигнала) не представляется возможным, так как сигнал  $s_n$  - это комплексный сигнал (т.е. отсчеты этого сигнала являются комплексными числами).

Рассмотрим, что произойдет с сигналом  $s_n$  если отбросить его мнимую часть. С этой целью вновь рассмотрим

комплекснозначный сигнал на произвольной частоте  $\omega_k$ .

$$\Re[\alpha e^{j\omega_k n + \phi}] = \Re[\alpha \cos(\omega_k n + \phi) + j\alpha \sin(\omega_k n + \phi)] = \alpha \cos(\omega_k n + \phi)$$

Действительный сигнал  $\alpha \cos(\omega_k n)$  можно представить в виде суммы двух комплекснозначных последовательностей:

$$\cos(\omega_k n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_k n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_k n} = \frac{1}{2}e^{j\omega_k n} + \left(\frac{1}{2}e^{j\omega_k n}\right)^*$$

Таким образом, если сигнал имеет компактный спектр расположенный в правой полуплоскости, то отбрасывание его мнимой части во времени соответствует формированию зеркально отраженной части спектра в области отрицательных частот.

В этом случае сигнал  $s_n$  называют **аналитическим сигналом** для сигнала  $\Re[s_n]$ . С информационной точки зрения сигналы  $s_n$  и  $\Re[s_n]$  идентичны.

Аналитический сигнал перед формированием аналогового сигнала следует преобразовать в  $\Re[s_n]$  путем отбрасывания мнимой части.

Представление в виде аналитического сигнала позволяет упростить некоторые важные преобразования. Так, например, перенос спектра последовательности в форме аналитического сигнала представляется в виде умножения всех отсчетов на  $e^{j\omega_0}$ , для сигнала  $\Re[s_n]$  умножение на  $e^{j\omega_0}$  для переноса спектра применять нельзя. (объясните почему).

Для получения аналитического сигнала по действительному сигналу  $\Re[s_n]$  в частотной области достаточно обнулить значения спектра соответствующие всем отрицательным частотам, далее, для сохранения энергии, следует умножить все значения в спектре соответствующие положительным частотам, значение в спектре, соответствующее нулевой частоте следует оставить неизменным.

Для получения аналитического сигнала по действительному сигналу  $\Re[s_n]$  во временной области можно воспользоваться следующим представлением:

$$s_n = \Re[s_n] + jH(\Re[s_n])$$

Здесь  $H()$  - **преобразование Гильберта**. Преобразование  $H(x_n)$  формирует ортогональное дополнение к последовательности  $x_n$  таким образом, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n H(x_n) = 0$$

### Задание

- Сформировать последовательность из  $N$  символов **16QAM**.
- Повысить частоту дискретизации в **8** раз путем вставки нулей.
- Применить формирующий **RRC** фильтр с параметром  $\beta = 0.2$ .
- Построить СПМ полученного сигнала.
- Предполагая, что ширина базовой полосы составляет 4000Гц, перенести спектр сигнала на несущую частоту  $\omega_0 = 3000$ Гц.
- Построить СПМ полученного сигнала.

- Отбросить мнимую часть полученного сигнала.
- Построить СПМ сигнала без мнимой части.
- Воспроизвести полученный сигнал с помощью звуковой карты.
- Добавить к действительному сигналу белый гауссов шум в соотношении сигнал/шум **20dB**.
- Построить СПМ полученной смеси.
- Применить **RRC** фильтр к полученной смеси.
- Понизить частоту дискретизации полученного сигнала до **1SPS** путем прореживания.
- отобразить принятые символы на комплексной плоскости.

In [0]:

```
# Установка библиотеки CommPy - см. https://github.com/veeresht/CommPy
pip install scikit-commpy
```

In [5]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import signal
import numpy.matlib
from commpy.filters import rrcosfilter

N = 1000
# make N 16QAM symbols
x_re = (np.random.randint(3, size=(N,)), dtype='I') * 2) - 3*np.ones((N,))
x_im = (np.random.randint(3, size=(N,)), dtype='I') * 2) - 3*np.ones((N,))
x = np.vectorize(complex)(x_re, x_im)

# upsample to 8 SPS
y = np.vstack((x.transpose(), np.zeros((7, N))))
y = y.flatten()

# apply RRC
M = 64 # filter's length
beta = 0.2 # Roll-off factor
Ts = 1 # Baud period
Fs = 8 # Sampling frequency
time_idx, h = rrcosfilter(M, beta, Ts, Fs)
y_rc = np.convolve(h, y)

frex, Pxx = signal.welch(y_rc, return_onesided=False, nperseg=256, noverlap=210, fs=8*4000)
plt.semilogy(np.fft.fftshift(frex), np.fft.fftshift(Pxx))
#plt.ylim([0.5e-3, 100])
plt.grid('true')
plt.legend(['Спектральная плотность'])
plt.xlabel('Нормированная частота, w/B')
plt.title('Спектральная плотность')

#y_omega_0 = y_rc * ...
```

Out[5]:

Text(0.5, 1.0, 'Спектральная плотность')



