13:10-14:40 БИСО-**1,2-16** Оптимальная фильтрация дискретных последовательностей. Метод наименьших квадратов.

Лекция + Практическое занятие по дисциплине "Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов"

*Кафедра КБ-**3** "Управление и моделирование систем" Института Комплексной Безопасности и Специального Приборостроения, МИРЭА, **2020**г.*

Дата проведения занятия: 11.04.2020.

Время: 13:10-14:40.

Место/Форма проведения занятия: Дистанционное обучение/Конференция **Skype.** Ссылка на видео-конференцию будет предоставлена непосредственно перед занятием по почте.

Постоянная ссылка: https://colab.research.google.com/drive/1tojkXx4sjpNIsMuQVm8oGWhYnlXGfymF

Цель: Постановка задачи оптимальной фильтрации. Освоение метода наименьших квадратов и его применение для оптимальной фильтрации дискретных случайных последовательностей.

Материал прошлых лекций: В прошлых лекциях изучались свойства случайных дискретных последовательностей. В частности, необходимо помнить, что при сложении случайных независимых последовательностей складываются их дисперсии, в то время как при сложении детерминированных последовательностей складываюся их амплитуды. Это свойство позволяет накапливать энергию полезного сигнала в N раз быстрее, чем накапливается энергия случайной составляющей. Помните, что **случайный сигнал нельзя предсказать,** следовательно, удаление случайной составляющей возможно только путем накопления энергии полезного сигнала при суммировании смеси (фильтрации).

*Рассмотрим задачу **1**:*

Заданы тренировочные данные в виде трех последовательностей (выборок случайных процессов):

1) $\vec{a}$,т.ч. $a_n = \alpha x_n + \eta_n$

2) $\vec{b}$,т.ч. $b_n = \beta x_n + \xi_n$

3) x_n, $n \in 1 \ldots N$ - полезный сигнал (считается известным на этапе обучения модели)

Требуется построить модель восстановления (оценивания) полезного ненаблюдаемого сигнала x_n по двум наблюдаемым последовательностям a_n и b_n в виде модели:

$$\hat{x}_n = c_1 a_n + c_2 b_n$$

Такую модель в литературе называют моделью линейной регрессии, a и b -регрессорами, но это не важно, сосредоточимся на решении задачи **1**.

Коэфициенты α,β не известны, параметры случайных последовательностей (шумов) η_n и ξ_n также не известны.

Далее будем предполагать, что статистические характеристики шумов η_n и ξ_n не изменяются во времени. Т.е. η и ξ - это стационарные в широком смысле случайные процессы.

В такой постановке задача сводится к поиску коэффициентов c_1,c_2. Пока не задан критерй качества решения, задачу решить невозможно. Вместо того, чтобы формально вводить такой критерий - рассмотрим геометрическую интерпретацию этой задачи и введем критерий осознанно, но перед этим сгенерируем данные.

Пример формирования таких последовательностей приведен ниже:

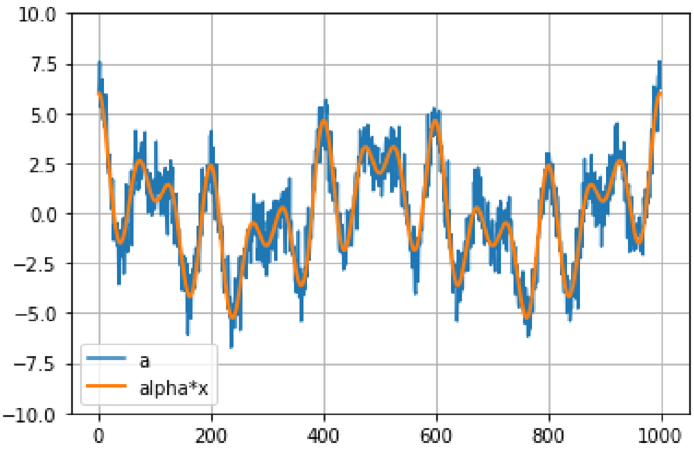
In [1]:

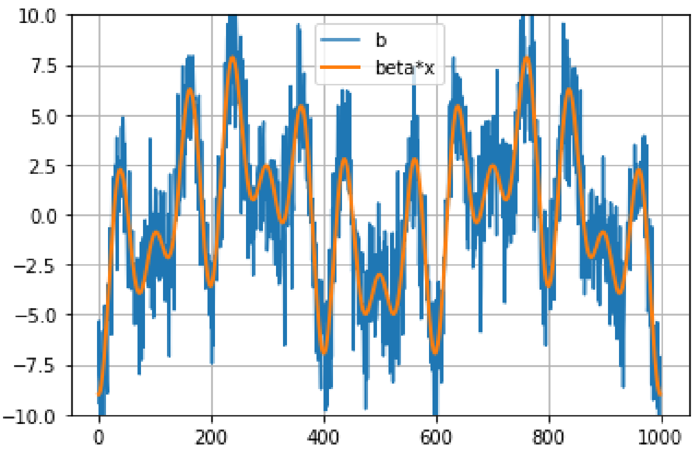
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
N      = 1000
alpha = 2
beta  = -3
x      = np.cos( np.pi/N*4*np.arange(0.,N) )+np.cos( np.pi/N*20*np.arange(0.,N) )+np.cos
( np.pi/N*30*np.arange(0.,N) )
eta    = 0.9 * np.random.randn( N )
xi     = 2.1 * np.random.randn( N )
a      = alpha*x + eta
b      = beta*x + xi

plt.figure()
plt.plot( a,label='a' )
plt.plot( x*alpha, label='alpha*x',linewidth=2 )
plt.ylim(-10,10)
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.figure()
plt.plot( b,label='b' )
plt.plot( x*beta,label='beta*x',linewidth=2 )
plt.ylim(-10,10)
plt.grid(True)
plt.legend()
```

Out[1]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f362fff1e10>
```





Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи **1.**

$$\hat{\vec{x}} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b}$$

Пусть, например, выборки a_n и b_n содержат по два элемента $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. В идеальном мире мы потребовали бы чтобы оценка была равна истинному вектору, т.е. $\hat{\vec{x}} = \vec{x}$. Такая наивная постановка приводит к системе из двух уравнений с двумя неизвестными $c_{1,2}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix}$$

$$+ c_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

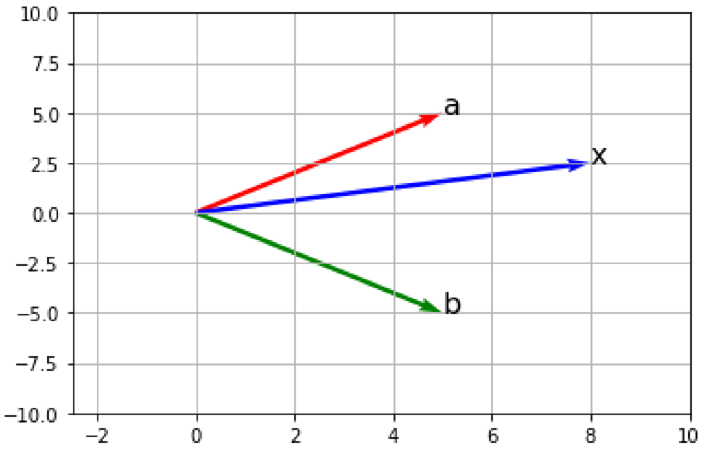
$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Эту задачу можно изобразить графически:

In [0]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a   = [5, 5]
b   = [5,-5]
x   = [8,2.5]

plt.quiver([0, 0, 0], [0, 0, 0], [a[0], b[0], x[0]], [a[1], b[1], x[1]], angles='xy', s
cale_units='xy', scale=1, color=['r','g','b'])
plt.text( *a, 'a', fontsize=16 )
plt.text( *b, 'b', fontsize=16 )
plt.text( *x, 'x', fontsize=16 )
plt.xlim(-2.5, 10)
plt.ylim(-10, 10)
plt.grid(True)
```



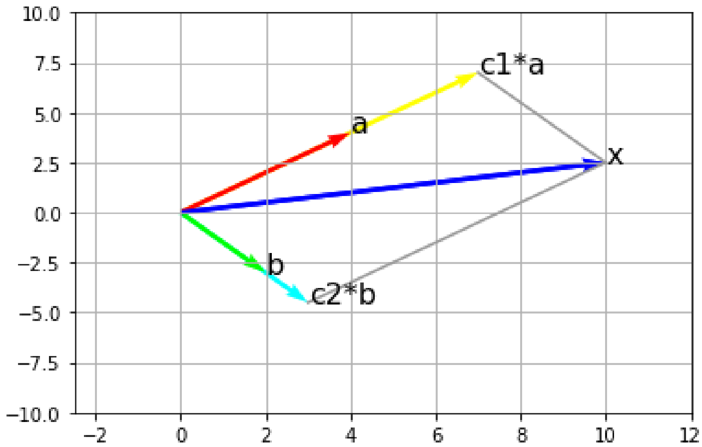
Требуется подобрать такие коэффициенты c_1 и c_2 для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы сумма $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} = \vec{x}$. Формальное решение этой задачи:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

In [0]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a          = np.array([[4.], [4.]])
b          = np.array([[2.],[-3.]])
```

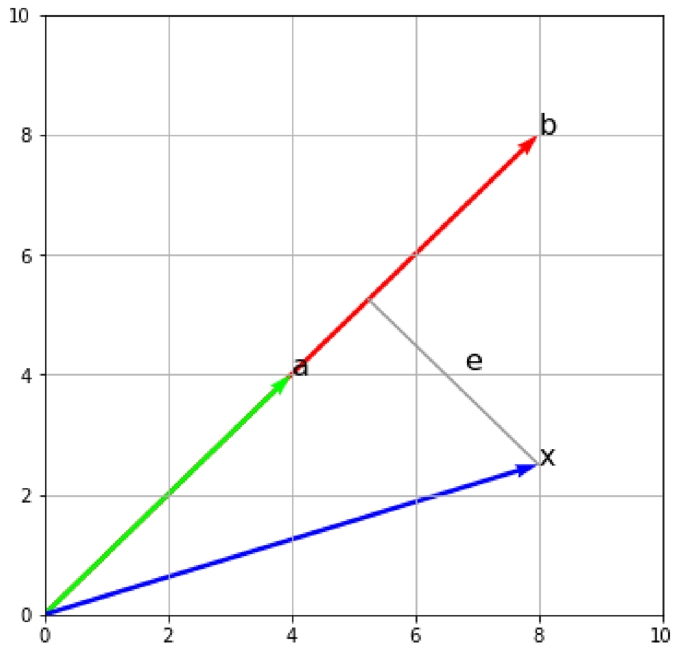
```
x          = np.array([[10.],[2.5]])

# solve c
c          = np.linalg.inv( np.hstack((a,b))) @ x
origin     = np.zeros((2,3))
vectors    = np.hstack((a,b,x))
vectorsc   = np.hstack((a*c[0],b*c[1],x))

plt.quiver( *origin,*vectorsc, angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color=[[1, 1, 0],
[0, 1, 1],[0,0,1]])
plt.quiver( *origin,*vectors, angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color=[[1, 0, 0],[
0, 1, 0],[0,0,1]])
plt.text( *a, 'a', fontsize=16 )
plt.text( *a*c[0], 'c1*a', fontsize=16 )
plt.text( *b*c[1], 'c2*b', fontsize=16 )
plt.text( *b, 'b', fontsize=16 )
plt.text( *x, 'x', fontsize=16 )
plt.xlim(-2.5, 12)
plt.ylim(-10, 10)
plt.plot( [c[0]*a[0], x[0]], [c[0]*a[1], x[1]],color=[0.6, 0.6, 0.6] )
plt.plot( [c[1]*b[0], x[0]], [c[1]*b[1], x[1]],color=[0.6, 0.6, 0.6] )
plt.grid(True)
```



В данном случае было получено точное решение. Теперь рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на одной прямой.

In [0]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a          = np.array([[4.], [4.]])
b          = np.array([[8.],[8.]])
x          = np.array([[8.],[2.5]])

# solve c
origin     = np.zeros((2,3))
vectors    = np.hstack((b,a,x))

Y          = np.hstack((a,b))

c          = np.linalg.pinv( Y.transpose() @ Y ) @ Y.transpose() @ x
y          = Y@c

plt.figure(figsize=(6,6))
plt.quiver( *origin,*vectors, angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color=[[1, 0, 0],[
0, 1, 0],[0,0,1]])
plt.text( *a, 'a', fontsize=16 )
plt.text( *b, 'b', fontsize=16 )
plt.text( *x, 'x', fontsize=16 )
plt.text( 6.8,4.1, 'e', fontsize=16 )
plt.plot( [x[0], y[0]], [x[1], y[1]],color=[0.6, 0.6, 0.6] )
plt.xlim(0, 10)
plt.ylim(0, 10)
plt.grid(True)
```



В этом случае точное решение получить не представляется возможным. Результат сложения векторов $c_1\vec{a} + c_2\vec{b}$ будет сонаправлен с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, т.е. решение будет лежать на прямой совпадающей с этими векторами.

Множество элементов векторного пространства, образованное линейной формой вида $c_1\vec{a} + c_2\vec{b}\ \forall c_1, c_2$ называется **линейной оболочкой** для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$. В данном случае, линейная оболочка - это прямая совпадающая с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Т.е. линейная оболочка - это множество всех выходов которые может сформировать линейная модель. В нашем примере линейная оболочка геометрически определяет одномерное пространство - для точного определения положения на прямой достаточно одного числа. Требуемое решение x лежит вне этого одномерного пространства в двумерном пространстве.

Эта ситуация, когда линейная оболочка модели не охватывает требуемое решение - довольно типичная. Мы часто пытаемся сделать модель как можно более компактной, с небольшим количеством регрессоров (векторов, подобных $\vec{a}$, $\vec{b}$). В то же время размерность этих векторов может быть гораздо больше их используемого в модели количества. При этом возникает **переопределенная** система линейных уравнений, т.е. количество уравнений (равная количеству элементов в в векторах) превышает количество неизвестных коэффициентов c_k (количество векторов-регрессоров).

Несмотря на то, что получить точное решение в такой постановке нельзя, можно найти ближайшую к $\vec{x}$ точку линейной оболочки. Из школьного курса геометрии известно, что кратчайшее расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром от конца вектора $\vec{x}$ к прямой определяющей линейную оболочку.

Формально можем записать так:

$$\min_{c_1, c_2} \|\vec{e}\|_2 =$$

$$\min_{c_1, c_2} \vec{e}^T \vec{e}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e_n^2$$

$$\vec{e}(c_1, c_2) = (c_1\vec{a}$$
$$+ c_2\vec{b}) - \vec{x}$$

Можно найти градиент функции $\nabla\left(\vec{e}^T\vec{e}\right)$ и приравнять его к нулевому вектору (*объясните почему*).

$$= \left(\frac{\partial e^T e}{\partial c_1}, \frac{\partial e^T e}{\partial c_2} \right)$$

Тогда получим систему так называемых **нормальных уравнений.**

Упростим наши рассуждения, нам известно, что вектор ошибки $\vec{e}$ должен быть перпендикулярен линейной оболочке, т.е. скалярные произведения каждого из векторов-регрессоров с вектором ошибки должны быть равны нулю (*Почему?*):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Преобразуем

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Получим:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Такой способ нахождения параметров модели (способ решения переопределенной линейной системы) называется **методом наименьших квадратов (МНК).** Впервые этот метод был предложен Гауссом, но в дальнейшем был переоткрыт рядом ученых. Наиболее распространенной формулой, представляющей сегодня метод МНК является:

$$\vec{c} = (V^T V)^{-1} V^T x$$

где матрица V составлена из векторов-регрессоров (таких как $\vec{a}, \vec{b}$).

При этом матрица

$$(V^T V)^{-1} V^T$$

называется *псевдообратной матрицей* или матрицей *Мура-Пенроуза*.

Если матрица V -квадратная и не содержит линейно связанных столбцов, то

$$(V^TV)^{-1}V^T = V^{-1}$$

Пользуясь МНК решим нашу самую первую задачу **1:**

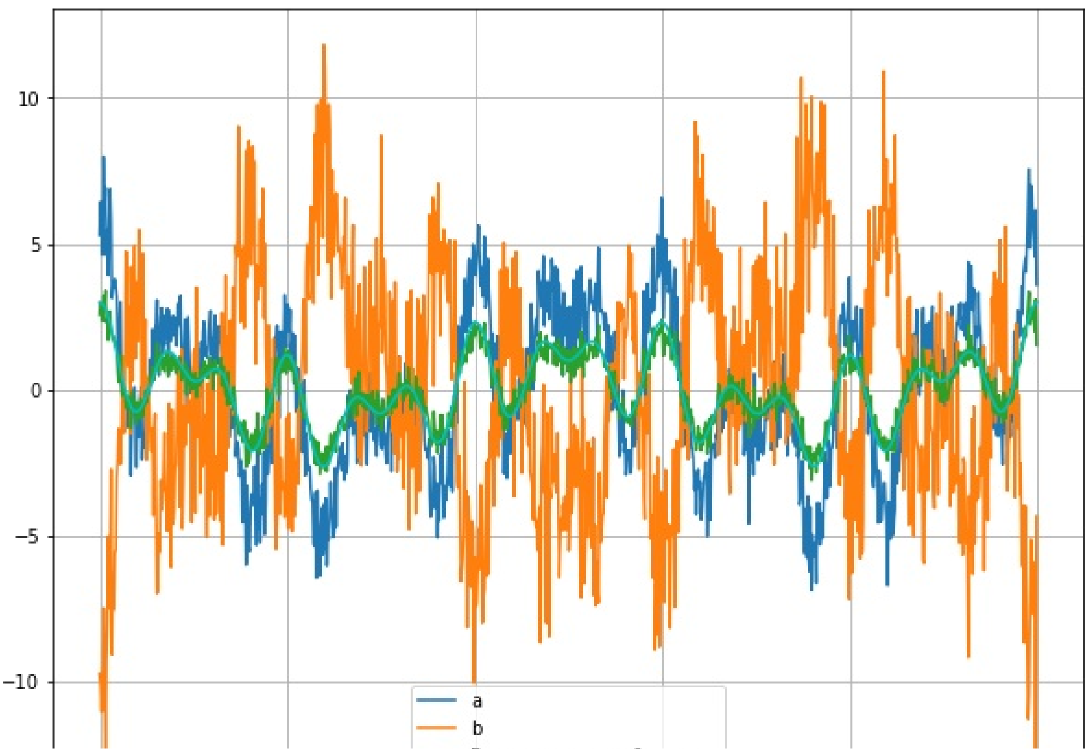
In [0]:

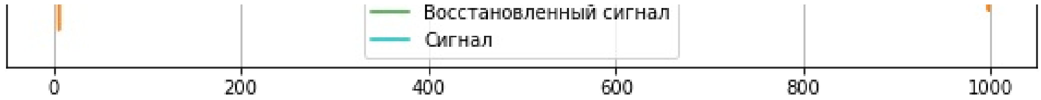
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N     = 1000
alpha = 2
beta  = -3
x     = np.array([np.cos( np.pi/N*4*np.arange(0.,N) )+np.cos( np.pi/N*20*np.arange(0.,N
) )+np.cos( np.pi/N*30*np.arange(0.,N) )]).transpose()
eta   = 0.9 * np.random.randn( N,1 )
xi    = 2.1 * np.random.randn( N,1 )
a     = alpha*x + eta
b     = beta*x + xi


V     = np.hstack((a,b))
c     = np.linalg.inv(V.transpose()@V)@V.transpose()@x
print('c={0}'.format(c))

sol_x = V@c

plt.figure(figsize=(10,8))
plt.plot( a,label='a' )
plt.plot( b,label='b' )
plt.plot( sol_x,label='Восстановленный сигнал' )
plt.plot( x,color='c',label='Сигнал' )
plt.grid(True)
plt.legend()
```

```
shape of V=(1000, 2)
c=[[ 0.31772502]
 [-0.09157239]]
```

Out[0]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f7801363320>
```





Следующая лекция будет посвящена анализу остаточной **(**неустранимой**)** ошибки**.**