Problemas Resueltos

Rafael Guillermo Arias Michel

27 de marzo de 2015

Enunciado 1. Probar que el conjunto de las biyecciones $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ no es numerable.

Solución. Sea F el conjunto que contiene a todas las funciones biyectivas $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. Supóngase por absurdo que F es numerable, por tanto puede expresarse $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Se procurará hallar una función biyectiva $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $g \notin F$.

Sea $A \subset \mathbb{N}^*$ un conjunto auxiliar que, en cada iteración del proceso que se describirá, acumulará valores de la imagen de g. Inicialmente, $A = \emptyset$. Defínase inductivamente g de la siguiente forma:

1. $g(1)$ es el mínimo número en $\mathbb{N}^*$ tal que $g(1) \neq f_1(1)$. Agréguese $g(1)$ a A. Ahora, $A = \{g(1)\}$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, defínase $g(n)$ como el mínimo número en $\mathbb{N}^*$ tal que $g(n) \notin A$ y $g(n) \neq f_n(n)$. Después del siguiente proceso, redefínase $A := A \cup \{g(n)\}$.
3. Repítase el paso anterior infinitas veces.

Es evidente que g es inyectiva, por la construcción. Además, como hay infinitos valores de n tales que $f_n(n) \neq n$, se puede asegurar que que cualquier valor de $n \in \mathbb{N}^*$ pertenecerá, a partir de alguna iteración, a A. Luego, g es sobreyectiva, y por tanto, biyectiva. Pero como $g(n) \neq f_n(n) \forall n \in \mathbb{N}^*$, $g \notin A$, lo cual lleva a la contradicción buscada. □

Enunciado 2. Sean X e Y conjuntos finitos.

a) Probar que $\text{card}(X \cup Y) + \text{card}(X \cap Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y)$.

b) ¿Cuál sera la fórmula correspondiente para tres conjuntos?

c) Generaliza.

Solución. Definamos $|X| = \text{card}(X)$.

a) Demostremos por inducción. Supongamos inicialmente $X = \{x_1\}, Y = \{y_1\}$. Luego, $|X| = |Y| = 1 \Rightarrow |X| + |Y| = 2$.

- Si $x_1 = y_1$, $X \cup Y = \{x_1\}$ y $X \cap Y = \{x_1\}$. Luego, $|X \cup Y| + |X \cap Y| = 1 + 1 = 2$.
- Si $x_1 \neq y_1$, $X \cup Y = \{x_1, y_1\}$ y $X \cap Y = \emptyset$. Luego, $|X \cup Y| + |X \cap Y| = 2 + 0 = 2$.

Se verifica en ambos casos.

Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, $|X| = n, |Y| = m$, y luego $|X| + |Y| = n+m$. Por hipótesis de inducción, asumamos $|X \cup Y| + |X \cap Y| = n+m$. Sea $X' = X \cup \{x_{n+1}\}, x_{n+1} \notin X$. Como $|X'| = n+1$, $|X'| + |Y| = n+m+1$. Se dan los siguientes dos casos:

- Si $x_{n+1} \in Y$, $X' \cup Y = X \cup Y$ y $X' \cap Y = (X \cap Y) \cup \{x_{n+1}\}, x_{n+1} \notin X \cap Y$. Luego, $|X' \cup Y| + |X' \cap Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| + 1 = n + m + 1$.
- Si $x_{n+1} \notin Y$, $X' \cup Y = (X \cup Y) \cup \{x_{n+1}\}, x_{n+1} \notin X \cup Y$ y $X' \cap Y = X \cap Y$. Luego, $|X' \cup Y| + |X' \cap Y| = |X \cup Y| + 1 + |X \cap Y| = n + m + 1$.

Nuevamente, ambos casos verifican y queda demostrada la inducción (no se pierde generalidad al agregar un elemento a X en lugar de a Y).

Observación: Teniendo una biyección $f_n : I_n \to X$, es fácil construir una biyección $f_{n+1} : I_{n+1} \to X \cup \{x_{n+1}\}$ si $x_{n+1} \notin X$. Es por eso que añadiendo un elemento a un conjunto aumenta en 1 la cardinalidad.

b) Utilizando lo demostrado anteriormente, deducimos:

$$\begin{aligned} |(X \cup Y) \cup Z| + |(X \cup Y) \cap Z| &= |X \cup Y| + |Z| \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y| + |Z| \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} |(X \cup Y) \cap Z| &= |(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)| \\ &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |(X \cap Z) \cap (Y \cap Z)| \\ &= |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) y (2):

$$\begin{aligned} |X| + |Y| + |Z| &= |(X \cup Y) \cup Z| + |(X \cup Y) \cap Z| + |X \cap Y| \\ &= |X \cup Y \cup Z| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| + |X \cap Y| \\ &= |X \cup Y \cup Z| + |X \cap Z| + |X \cap Y| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| \end{aligned}$$

Que también puede expresarse como:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

c) La forma general es:

$$\begin{aligned}|X_1 \cup \ldots \cup X_n| &= \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |X_i \cap X_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|X_1 \cap \ldots \cap X_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n} |X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_i}|\right]\end{aligned}$$

Demostremos por inducción, asumiendo que se cumple la relación para n conjuntos. Entonces:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i\right| &= |(X_1 \cup \ldots \cup X_n) \cup X_{n+1}| \\ &= |X_1 \cup \ldots \cup X_n| + |X_{n+1}| - |(X_1 \cup \ldots \cup X_n) \cap X_{n+1}| \\ &= |X_1 \cup \ldots \cup X_n| + |X_{n+1}| - |(X_1 \cap X_{n+1}) \cup \ldots \cup (X_n \cap X_{n+1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{i} X_{n_j}\right|\right] + |X_{n+1}| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{i} (X_{n_j} \cap X_{n+1})\right|\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{i} X_{n_j}\right|\right] + |X_{n+1}| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n} |X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_i} \cap X_{n+1}|\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n} \left|\bigcap_{j=1}^{i} X_{n_j}\right|\right] + |X_{n+1}| \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n+1}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_{i-1}\le n} |X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_{i-1}} \cap X_{n+1}|\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |X_i| + \sum_{i=2}^{n}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n+1} |X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_i}|\right] + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i\right| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\left[(-1)^{i-1} \sum_{1\le n_1<\ldots<n_i\le n+1} |X_{n_1} \cap \ldots \cap X_{n_i}|\right]\end{aligned}$$

$\square$

Enunciado 3. La desigualdad entre la media aritmética y la geométrica vale para n números reales positivos $x_1, \ldots, x_n$. Sean $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ y $A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. Se tiene $G \leq A$. Esto es evidente cuando $x_1 = x_2 = \ldots x_n$. Para probar el caso general, considere la operación que consiste en sustituir el menor de los números dados, digamos x_i, y el mayor de ellos, digamos x_j, respectivamente por $x'_i = \frac{x_i \cdot x_j}{G}$ y $x'_j = G$. Esto no altera la media geométrica y no aumenta la media aritmética, pues, como fácilmente se ve, $x'_i + x'_j \leq x_i + x_j$. Pruebe que, repetida esta operación un máximo de n veces, obtenemos n números todos iguales a G y, por tanto, su media aritmética es G. Como en cada operación no aumentó la media aritmética, concluya que $G \leq A$, o sea $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Solución. Si $x_1 = \ldots = x_n$, $G = \sqrt[n]{x^n} = x$ y $A = nx/n = x$. Luego, $G = A$.

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^+$ Elegimos $x_i = \min X$ y $x_j = \max X$. Sustituyéndolos por $x'_i = \frac{x_i \cdot x_j}{G}$ y $x'_j = G$, observamos que $x'_i x'_j = x_i x_j / G \cdot G = x_i x_j$. Además, $x_i \leq G = x'_j \leq x_j$ (si $G < x_i$, ambas medias serían menores que G, y si $G > x_j$, ambas serían mayores que G). Como $x_i \leq x_i \cdot \frac{x_j}{G}$ y $\frac{x_i}{G} \cdot x_j \leq x_j$, entonces $x_i \leq x'_i \leq x_j$.

Dados $a \leq a', b' \leq b$ tales que $ab = a'b'$, se sabe que $\sqrt{a} \leq \sqrt{a'}, \sqrt{b'} \leq \sqrt{b}$. Luego:

$$|\sqrt{b} - \sqrt{a}| \geq |\sqrt{b'} - \sqrt{a'}| \Rightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 \geq (\sqrt{b'} - \sqrt{a'})^2 \Rightarrow b + a \geq b' + a'$$

Reemplazando $a = x_i, b = x_j, a' = x'_i, b' = x'_j$, se concluye que $x'_i + x'_j \leq x_i + x_j$. Esto significa que, al efectuar la sustitución, $G' = G$ y $A' \leq A$, donde G' y A' son los nuevos valores de la media geométrica y la aritmética, después de efectuar la sustitución.

Para la siguiente iteración, diremos que $x'_j = G$ no se puede elegir (ni como x_i ni como x_j). Será posible hallar un nuevo par x_i, x_j, pues $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = G$. Entonces, en cada iteración, nos aseguramos de que un elemento es reemplazado por G.

Después de $n-2$ iteraciones, tenemos $n-2$ términos iguales a G. Sin pérdida de generalidad, digamos que la sucesión es de la forma x_1, x_2 y $x_i = G\ \forall i \in \mathbb{N}^*; 2 < i \leq n$. Por las deducciones anteriores, sabemos que $\{x_i, x_j\} = \{x_1, x_2\}$. $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 G^{n-2}} \Rightarrow G^n = x_1 x_2 G^{n-2} \Rightarrow x_1 x_2 = G^2$. Efectuando el reemplazo, $x'_1 = x_1 x_2 / G = G^2/G = G$ y $x'_2 = G$ y la nueva sucesión es $x_i = G\ \forall i \in \mathbb{N}^*; 1 \leq i \leq n$, donde $G = A$.

Como A nunca aumentó en cada iteración, concluimos que $G \leq A$. □

Enunciado 4. Un conjunto G denúmeros reales es un *grupo aditivo* cuando $0 \in G$ y $x, y \in G \Rightarrow x - y \in G$. Entonces, $x \in G \Rightarrow -x \in G$ y $x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$. Sea entonces $G \subset \mathbb{R}$ un grupo aditivo de números reales. Indiquemos con G^+ al conjunto de números reales positivos pertenecientes a G. Exceptuando el caso trivial $G = \{0\}$, G^+ es no vacío. Supongamos entonces $G \neq \{0\}$. Pruebe que:

I) Si $\inf G^+ = 0$, entonces G es denso en $\mathbb{R}$.

II) Si $\inf G^+ = a > 0$, entonces $a \in G^+$ y $G = \{\pm a, \pm 2a, \ldots\}$.

III) Concluya que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional, los números reales de la forma $m+n\alpha$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, constituyen un subconjunto denso en $\mathbb{R}$.

Solución.

I) $\inf G^+ = 0$. Entonces, $x > 0 \Rightarrow \exists y \in G^+; 0 < y < x$ (sino, $0 < x \leq \inf G^+$).

Sean $r > 0$ y $a_1 \in G^+; a_1 < r$. $b_1 := r - a_1 > 0$. Luego, $\exists c_1 \in G^+; c < b_1/2$ y $\exists n \in \mathbb{N}^*; a_1 + (n-1)c_1 < a + b_1/2 \leq a_1 + nc_1 := a_2$. Sabiendo que $a_1, c_1 \in G^+$, fácilmente se deduce que $a_2 \in G^+$. Además, $a_2 = a_1 + nc_1 = a_1 + (n-1)c_1 + c_1 < a + b_1/2 + c_1 < a + b_1/2 + b_1/2 = a + b_1 = r$, y $b_2 = r - a_2 \leq b_1/2$.

Iterando sucesivamente, obtenemos una sucesión $(a_n), donde |r - a_n| \leq b_1/2^{n-1}$. Luego, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*; n > n_0 \Rightarrow |a_n - r| = |r - a_n| \leq b_1/2^{n-1} < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = r \Rightarrow r \in \overline{G}$.

Análogamente, $-r \in \overline{G}$, pues $G^- = \{-a : a \in G^+\}$ y $\sup G^- = 0$. Como $0 \in G \subset \overline{G}$, se concluye que $\mathbb{R} \subset \overline{G}$.

II) Si $a \in G$, es fácil deducir inductivamente que $na \in G\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Como $G \neq \{0\}$, $\exists x \in G, x \neq 0$.

Demostremos primero que $a \in G$. Si $\inf G^+ = a \notin G$, entonces $\forall x \in R^+, \exists y \in G^+; a < y < x$ (sino, $a < x \leq \inf G^+$). Luego, $\exists x, y \in G^+$ tales que $a < x < a + a/2$ y $a < y < x$, por tanto, $a > a/2 > x - y \in G^+$, lo cual contradice el enunciado, y $a \in G$.

Queda considerar si existen elementos no múltiplos de a. Sin pérdida de generalidad, consideremos $x > 0$. Si x no es múltiplo de a, entonces $\exists n \in \mathbb{Z}; na < x < (n+1)a \Rightarrow 0 < x - na < a$, pero $x - na \in G$ y nuevamente se llega a la contradicción.

III) Dado $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, sea $X = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Como $0 = 0 + 0\alpha$, $0 \in X$. Si $m_1 + n_1\alpha, m_2 + n_2\alpha \in X$, entonces $(m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\alpha \in X$ porque $m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$. Luego, X es un grupo aditivo de reales.

Sea $X^+ = \{x \in X : x > 0\}$, y $a = \inf X^+ >= 0$. Si $a > 0$, entonces $X = \{\pm a, \pm 2a, \ldots\} = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$. Sabemos que $1 \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pertenecen a X. Pero no existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = n\alpha$ o $\alpha = n \cdot 1$. Luego, es imposible que $a > 0$, y se deduce que $\inf X^+ = 0$.

Así, queda demostrado que X es denso en $\mathbb{R}$.

$\square$

Enunciado 5. Sean a, b números reales positivos. Defina inductivamente las secuencias $(x_n), (y_n)$ con $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a+b)/2$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Pruebe que x_n e y_n convergen para el mismo límite, llamado la *media aritmético-geométrica* entre a y b.

Solución. Por la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica, sabemos que $x_1 = \sqrt{ab} \leq (a+b)/2 = y_1$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leq (x_n + y_n)/2 = y_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Sin pérdida de generalidad, considérese $a \leq b$. Como $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ y $a/2 \leq b/2$, deducimos $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ y $a \leq (a+b)/2 \leq b$.

Luego, $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}^*$, y ambas sucesiones están acotadas. Así, sean $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$. Para $n \to +\infty$, $y = (x+y)/2 \Rightarrow 2y = x+y \Rightarrow x = y$, ambos límites son iguales. $\square$

Enunciado 6. Sea (a_n) una secuencia decreciente (no estrictamente) con $\lim a_n = 0$. Demostrar que la serie $\sum a_n$ converge si y solamente si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Solución. Para demostrar la bicondicional, se considerarán los dos casos presentados a continuación.

Caso 1: $\sum a_n = s$ converge.

Como a_n es decreciente, puede observarse que $2^{n-1} a_{2^n} \leq a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n} := b_n$. Se construye así la sucesión (b_n). Es evidente que $\sum b_n = \sum a_n = s$. Como $2^n a_{2^n} \leq 2b_n \forall n \in \mathbb{N}^*$, por el criterio de comparación, $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Caso 2: $\sum 2^n a_{2^n} = t$ converge.

Obsérvese que $2^n a_{2^n} \geq a_{2^n} + \ldots + a_{2^{n+1}-1} := c_n$. Al construir la sucesión (c_n), se observa que $\sum c_n = \sum a_n - a_1 \Rightarrow \sum a_n = \sum c_n + a_1$. Como $c_n \leq 2^n a_{2^n}$, por el criterio de comparación, $\sum c_n = c$ converge. Luego, $\sum a_n = c + a_1$, y también converge. $\square$