Problemas Resueltos

Rafael Guillermo Arias Michel

10 de febrero de 2015

Enunciado 1.

a) Probar que si $a_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ y $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n = L\ \forall n \geq n_0$.

b) Probar que $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} | a_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ y } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\}$ es numerable.

Solución.

a) Por la definición,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*; n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Como $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$, $L \in \mathbb{Z}$ y $|a_n - L| \in \mathbb{Z}$ por ser una resta de enteros. Luego, si $\varepsilon \leq 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*; n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < 1 \implies |a_n - L| = 0 \implies a_n = L\ \forall n \geq n_0 + 1$.

b) Sea $A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} | a_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ y } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\}$.

$\forall (a_n) \in A\ \exists n_a \in \mathbb{N}^*; n \geq n_a + 1 \Rightarrow a_n = 0$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_a} a_n$ converge. Para cada sucesión (a_n), podemos considerar sus primeros n_a términos.

Sea p_n el n-ésimo número primo positivo. Luego, podemos definir $f : A \to \mathbb{N}^*$ y $g : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ del siguiente modo:

$$g(a,i) = \begin{cases} p_{2n-1} & \text{si } a \geq 0 \\ p_{2n} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$f\big((a_n)\big) = \prod_{i=1}^{\infty} g(a_i, i)$$

Si $a_n = 0\ \forall n > n_a$, es evidente que $f\big((a_n)\big) = \prod_{i=1}^{n_a} g(a_i, i)$. Luego, $f\big((a_n)\big) = f\big((b_n)\big) \Leftrightarrow g(a_i, i) = g(b_i, i) \forall i \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_i = b_i \forall i \in \mathbb{N}^*$ por el teorema de la factorización única, lo cual concluye que f es inyectiva y, por tanto, A es numerable.

$\square$

Enunciado 2. Suponga que $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ y $\sum_{n=1} \infty a_n$ converge. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, sea $r_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$.

1. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/r_n$ diverge.
2. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/\sqrt{r_n}$ converge.

Solución. Para ambas partes, tendremos en cuenta que $\exists s \in \mathbb{R}; s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Luego, $r_n = s - s_{n-1}$ y

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s - s_n = \lim_{n\to+\infty} s - \lim_{n\to+\infty} s_n = s - s = 0.$$

Además, $r_n - r_{n+1} = a_n > 0 \Rightarrow r_n > r_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. También, $r_n = a_n + a_{n+1} + \ldots > a_n$.

a)

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_i}{r_i} = \sum_{i=m}^{n} \frac{r_i - r_{i+1}}{r_i} > \sum_{i=m}^{n} \frac{r_i - r_{i+1}}{r_m} = \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$

Luego:

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{a_i}{r_i} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=m}^{n} \frac{a_i}{r_i} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{r_n}{r_m}\right) = 1$$

Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*; n > n_0 \Rightarrow \sum_{i=m_0}^{n} \frac{a_i}{r_i} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, tomamos $m_k = n_{k-1}+1$ y hallamos $n_k \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > n_k \Rightarrow \sum_{i=m_k}^{n} \frac{a_i}{r_i} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Así, obtenemos una suma infinita de partes de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/r_n$ (sin repetir elementos), y cada una de las partes es mayor a $1-\varepsilon$. Si hacemos $\varepsilon < \frac{1}{2}$ tenemos una suma infinita de expresiones mayores a $\frac{1}{2}$, la cual diverge. Con esto se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/r_n$ diverge.

b)

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{a_n(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}})}{\sqrt{r_n}(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}})} = \frac{1}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \left(a_n + \frac{a_n\sqrt{r_{n+1}}}{\sqrt{r_n}}\right)$$
$$< \frac{2a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{2(r_n - r_{n+1})}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$

Si $m < n$, entonces $\sum_{i=m}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{r_i}} < \sum_{i=m}^{n} 2(\sqrt{r_i} - \sqrt{r_{i+1}}) = 2(\sqrt{r_m} - \sqrt{r_n})$. Luego:

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{a_i}{\sqrt{r_i}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=m}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{r_i}} \leq \lim_{n\to+\infty} 2(\sqrt{r_m} - \sqrt{r_n})$$
$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{a_i}{\sqrt{r_i}} \leq 2 \lim_{n\to+\infty} \sqrt{r_m} - 2 \lim_{n\to+\infty} \sqrt{r_n} = 2\sqrt{r_m}$$

En particular, para $m = 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\sqrt{r_i}} \leq 2\sqrt{r_1}$ converge.

$\square$

Enunciado 3. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto arbitrario. Pruebe que todo recubrimiento de X por abiertos posee un subrecubrimiento numerable.

Solución. Sea $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ tal que $A_\lambda = \operatorname{int}(A_\lambda)$ $\forall \lambda \in L$ y $X \subset A$ (A es un recubrimiento de X).

$$x \in X \Rightarrow \exists \lambda \in L; x \in A_\lambda = \operatorname{int}(A_\lambda) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0; (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_\lambda$$

Luego, sean $p_x, q_x \in \mathbb{Q}$ tales que $(p_x, q_x) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Así, podemos definir $B = \{\langle p_x, q_x \rangle | x \in X\}$. De $B \subset \mathbb{Q}^2$ se deduce que B es numerable.

Definimos ahora $f : B \to A$ tal que $f(\langle p_x, q_x \rangle) = A_\lambda$ si $x \in A_\lambda$ (en caso de que más de un A_λ cumpla la condición, se elegirá uno de ellos arbitrariamente). Inmediatamente concluimos que $f(B)$ es un subrecubrimiento numerable de X. $\square$

Enunciado 4. Pruebe que si $F_n \subset \mathbb{R}$ es cerrado e $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ entonces $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n\right) = \emptyset$.

Solución. Primero, demostraremos que, si C es un conjunto cerrado con interior vacío y A cualquier conjunto abierto, entonces existe un intervalo abierto $I \in A$ tal que $I \cap C = \emptyset$.

Supongamos, por absurdo, que todo intervalo abierto $I \in A$ tiene al menos un punto en C. Como A es abierto, $c \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_c > 0; (c - \varepsilon_c, c + \varepsilon_c) \subset A$. Como $\operatorname{int}(C) = \emptyset$, no existe un intervalo abierto completamente contenido en C (sino, todo punto en el interior del invervalo sería un punto en el interior de C). Entonces, $\exists a \in (c - \varepsilon_c, c + \varepsilon_c) - C$. Sea ε tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (c - \varepsilon_c, c + \varepsilon_c)$. Ahora, construimos la sucesión (a_n) tal que $a_n \in (a - \varepsilon/n, a + \varepsilon/n) \cap C$. Inmediatamente, $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, pero como C es cerrado y $a_n \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, se llega a la contradicción de que $a \in C$. Así concluimos que A tiene al menos un intervalo abierto sin puntos en común con C.

Sabemos ahora que A contiene un intervalo abierto I_1 tal que $I_1 \cap F_1 = \emptyset$. Inductivamente, I_n contiene un intervalo abierto I_{n+1} tal que $I_{n+1} \cap F_{n+1} = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}^*$. Luego, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \emptyset$. Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \neq \emptyset$, $\exists c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ y $c \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$.

Obtenemos así que cualquier conjunto abierto A tiene al menos un punto no perteneciente a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$, por tanto, para $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$, $\nexists \varepsilon; (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$, lo cual concluye que $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n\right) = \emptyset$. $\square$

Enunciado 5. Sea $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ una función acotada en cada intervalo acotado. Pruebe que si $\lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$ entonces $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

Solución. Sea $g : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Luego, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$. Por definición, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > 0; x > A \Rightarrow g(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Sea $x > A$. Existe $r \in (0;1]$ tal que $x - A - r \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sum_{y=A+r}^{x-1} [f(y+1) - f(y)] + f(A+r)}{x} \\ &= \frac{\sum_{y=A+r}^{x-1} g(y) + f(A+r)}{x} \end{aligned}$$

De $L - \varepsilon < g(y) < L + \varepsilon \ \forall y > A$ se deduce

$$(x - A - r)(L - \varepsilon) < \sum_{y=A+r}^{x-1} g(y) < (x - A - r)(L + \varepsilon).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{(x-A-r)(L-\varepsilon) - f(A+r)}{x} &< \frac{f(x)}{x} < \frac{(x-A-r)(L+\varepsilon) - f(A+r)}{x} \\ \frac{(x-A-r)}{x} \cdot (L-\varepsilon) - \frac{f(A+r)}{x} &< \frac{f(x)}{x} < \frac{(x-A-r)}{x} \cdot (L+\varepsilon) - \frac{f(A+r)}{x} \end{aligned} \tag{1}$$

para cualquier $x > A$.

f es una función acotada en cada invervalo acotado. Entonces, también lo es $f(x)/x$. Por tanto, para todo $a \in \mathbb{R}$, existen $\mathcal{I}_a := \liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$ y $\mathcal{S}_a := \limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{x}$

Volviendo a la desigualdad (1), sea (x_n) una secuencia de números en $(A, +\infty)$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \mathcal{I}_{+\infty}$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{x_n} &> \frac{(x_n - A - r)}{x_n} \cdot (L - \varepsilon) - \frac{f(A+r)}{x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} &\geq \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(x_n - A - r)}{x_n} \cdot (L - \varepsilon) - \frac{f(A+r)}{x_n} \right] \\ \mathcal{I}_{+\infty} &\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{(x_n - A - r)}{x_n} \cdot \lim_{n\to+\infty} (L - \varepsilon) - \lim_{n\to+\infty} \frac{f(A+r)}{x_n} \\ \mathcal{I}_{+\infty} &\geq L - \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

Análogamente, tomando otra secuencia (x_n) de números en $(A, +\infty)$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \mathcal{S}_{+\infty}$ obtenemos

$$\mathcal{S}_{+\infty} \leq L + \varepsilon. \tag{3}$$

De (2) y (3) deducimos $L - \varepsilon \leq \mathcal{I}_{+\infty} \leq \mathcal{S}_{+\infty} \leq L + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Luego,

$$L \leq \mathcal{I}_{+\infty} \leq \mathcal{S}_{+\infty} \leq L \Rightarrow \mathcal{I}_{+\infty} = \mathcal{S}_{+\infty} = L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

□