

MAE0217 - Estatística Descritiva - Lista 2

Natalia Hitomi Koza¹
Rafael Gonçalves Pereira da Silva²
Ricardo Geraldies Tolesano³
Rubens Kushimizo Rodrigues Xavier⁴
Rubens Gomes Neto⁵
Rubens Santos Andrade Filho⁶
Thamires dos Santos Matos⁷

Maio de 2021

Sumário

Exercício 1	2
Exercício 12	2
Exercício 14	2
Exercício 15	3
Exercício 17	4
Exercício 19	5
Exercício 23	6
Exercício 28	7
Exercício 30	8
Exercício 33	9

¹Número USP: 10698432

²Número USP: 9009600

³Número USP: 10734557

⁴Número USP: 8626718

⁵Número USP: 9318484

⁶Número USP: 10370336

⁷Número USP: 9402940

Exercício 1

O arquivo `rehabcardio` contém informações sobre um estudo de reabilitação de pacientes cardíacos. Elabore um relatório indicando possíveis inconsistências na matriz de dados e faça uma análise descritiva de todas as variáveis do estudo, construindo distribuições de frequências para as variáveis qualitativas e obtendo medidas resumo para as variáveis qualitativas.

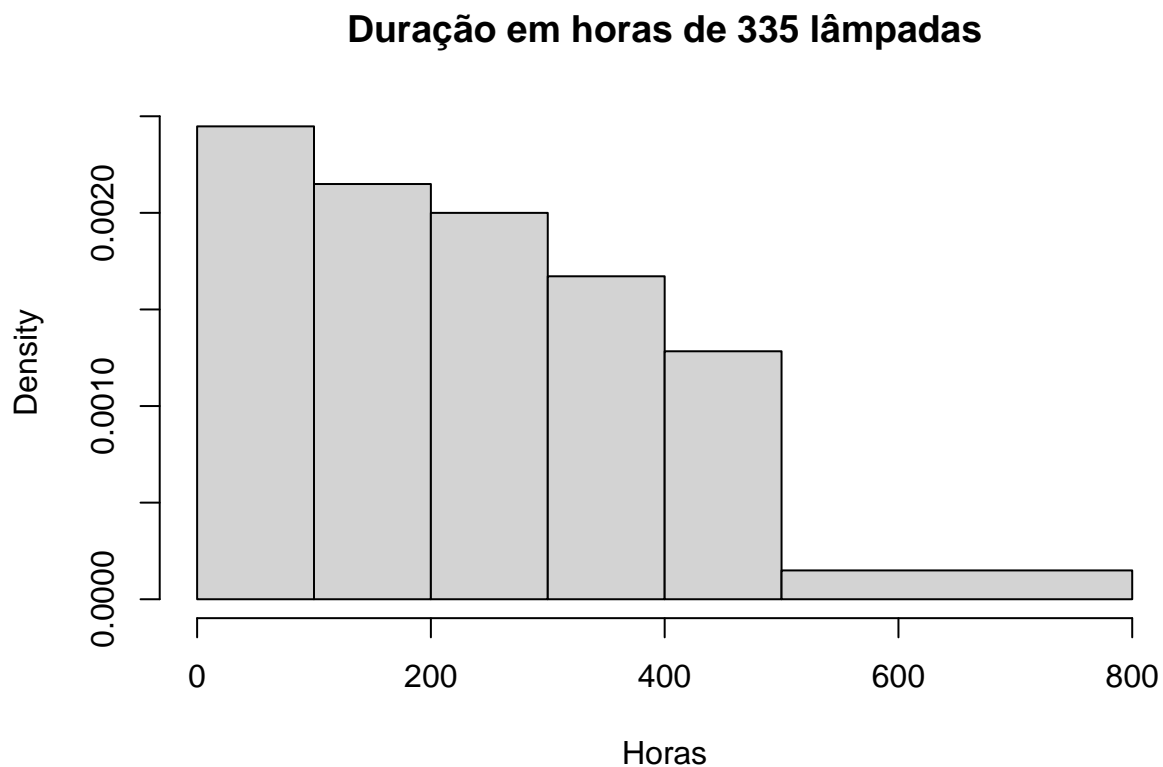
Exercício 12

Exercício 14

Na tabela abaixo estão indicadas as durações de 335 lâmpadas.

Duração(horas)	Número de Lâmpadas
0-100	82
100-200	71
200-300	68
300-400	56
400-500	43
500-800	15

- a) Esboce o histograma correspondente.



b) Calcule os quantis de ordem $p=0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ e $0,9$

Tabela 2: Quantis de Ordem.

Probabilidade	Quantil
0,1	38,5
0,3	121,0
0,5	214,0
0,7	328,0
0,9	456,0

Exercício 15

Os dados apresentados na Tabela 3 referem-se aos instantes nos quais o centro de controle operacional de estradas rodoviárias recebeu chamados solicitando algum tipo de auxílio em duas estradas num determinado dia.

Estrada 1	12 : 07 : 00AM	12 : 58 : 00AM	01 : 24 : 00AM	01 : 35 : 00AM	02 : 05 : 00AM
	03 : 14 : 00AM	03 : 25 : 00AM	03 : 46 : 00AM	05 : 44 : 00AM	05 : 56 : 00AM
	06 : 36 : 00AM	07 : 26 : 00AM	07 : 48 : 00AM	09 : 13 : 00AM	12 : 05 : 00PM
	12 : 48 : 00PM	01 : 21 : 00PM	02 : 22 : 00PM	05 : 30 : 00PM	06 : 00 : 00PM
	07 : 53 : 00PM	09 : 15 : 00PM	09 : 49 : 00PM	09 : 59 : 00PM	10 : 53 : 00PM
	11 : 27 : 00PM	11 : 49 : 00PM	11 : 57 : 00PM		
Estrada 2	12 : 03 : 00AM	01 : 18 : 00AM	04 : 35 : 00AM	06 : 13 : 00AM	06 : 59 : 00AM
	08 : 03 : 00AM	10 : 07 : 00AM	12 : 24 : 00PM	01 : 45 : 00PM	02 : 07 : 00PM
	03 : 23 : 00PM	06 : 34 : 00PM	07 : 19 : 00PM	09 : 44 : 00PM	10 : 27 : 00PM
	10 : 52 : 00PM	11 : 19 : 00PM	11 : 29 : 00PM	11 : 44 : 00PM	

Tabela 3: Planilha com instantes de realização de chamados solicitando auxílio em estradas.

- Construa um histograma para a distribuição de frequências dos instantes de chamados em cada uma das estradas.
- Calcule os intervalos de tempo entre as sucessivas chamadas e descreva-os, para cada uma das estradas, utilizando medidas resumo e gráficos do tipo boxplot. Existe alguma relação entre o tipo de estrada e o intervalo de tempo entre as chamadas?
- Por intermédio de um gráfico do tipo QQ, verifique se a distribuição da variável “Intervalo de tempo entre as chamadas” em cada estrada é compatível com um modelo normal. Faça o mesmo para um modelo exponencial. Compare as distribuições de frequências correspondentes às duas estradas.

Exercício 17

Considere o seguinte resumo descritivo da pulsação de estudantes com atividade física intensa e fraca:

Atividade	N	Média	Mediana	DP	Min	Max	Q1	Q3
Intensa	30	79,6	82	10,5	62	90	70	85
Fraca	30	73,1	70	9,6	58	92	63	77

DP: desvio padrão, Q1: primeiro quartil, Q3: terceiro quartil

Indique se as seguintes afirmações estão corretas, justificando a sua respostas:

- 5% e 50% dos estudantes com atividade física intensa e fraca, respectivamente, tiveram pulsação inferior a 70 .

Essa afirmação não está correta. Dado que temos os quantis das amostras, podemos afirmar que:

- Na atividade intensa: usando que o primeiro quantil é 70, temos que pelo menos 25% dos estudantes obtiveram pulsação menor ou igual a 70, e não 5%.
- Na atividade fraca: considerando $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{30}$ a amostra ordenada e sabendo que a mediana é $\frac{x_{15}+x_{16}}{2} = 70$, temos duas opções:
 - $x_{15} < 70$ e $x_{16} > 70$: nesse caso 50% dos estudantes obtiveram pulsação menor que 70.
 - $x_{15} = x_{16} = 70$ já nessa situação temos que menos de 50% dos estudantes obtiveram pulsação menor que 70.

Logo, a afirmação não é verdadeira.

- b) A proporção de estudantes com fraca atividade física com pulsação inferior a 63 é menor que a proporção de estudantes com atividade física intensa com pulsação inferior a 70.

A afirmação é incorreta, pois não conseguimos deduzir essa informação. Para os estudantes com fraca atividade física, 63 equivale ao primeiro quantil, então 25% dos estudantes apresenta pulsação menor ou igual a esse valor, analogamente 70 é o primeiro quantil para a amostra da pulsações durante atividade física intensa, mas não temos dados que relacionam a proporção de uma com a outra.

- c) A atividade física não tem efeito na média da pulsação dos estudantes.

Esta afirmação é falsa. Analisando o segundo coeficiente de assimetria de Pearson para as atividades, temos:

- Atividade intensa: $sk_1 = 3 \cdot \frac{79,6-82}{10,5} \approx -0,229 < 0$
- Atividade fraca: $sk_2 = 3 \cdot \frac{73,1-70}{9,6} \approx 0,323 > 0$

O coeficiente negativo nos mostra que no caso das atividades físicas intensas os batimentos cardíacos se apresentam concentrados nos valores acima da mediana, enquanto que o coeficiente positivo das atividades físicas fracas nos mostra uma concentração em valores abaixo da mediana, acarretando que a média no primeiro caso tende a ser mais alta que no segundo.

- d) Mais da metade dos estudantes com atividade física intensa têm pulsação maior que 82 .

Essa afirmação está incorreta. Se considerarmos $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{30}$ as pulsações ordenadas, temos que a mediana é $\frac{x_{15}+x_{16}}{2} = 82$, assim, há duas possibilidades:

- $x_{15} < 82$ e $x_{16} > 82$: nesse caso $x_i \geq 82$ para $i \geq 16$, no máximo haveriam 15 alunos com pulsação superior a 82.
- $x_{15} = x_{16} = 82$: então $x_j \geq 82$ para $j \geq 17$, no máximo 14 alunos teriam pulsação superior a 82.

Obtemos então que no máximo metade dos alunos tem pulsação maior que 82 e não mais que isso.

Exercício 19

Os histogramas apresentados na Figura 3.35 mostram a distribuição das temperaturas ($^{\circ}\text{C}$) ao longo de vários dias de investigação para duas regiões (R1 e R2). Indique se as afirmações abaixo estão corretas, justificando as respostas:

- As temperaturas das regiões R1 e R2 têm mesma média e mesma variância.
- Não é possível comparar as variâncias.
- A temperatura média da regiões R2 é maior que a de R1.
- As temperaturas das regiões R1 e R2 têm mesma média e variância diferentes

Resposta: Apenas a alternativa **d)** está correta.

A seguir os cálculos que justificam a resposta:

```
# temperaturas
x<- c(10,12,14,16,18)

# freqs absolutas
Freq1<- c(6,4,1,4,6)
Freq2<- c(4,4,5,4,4)
# freqs relativas
f1 <- Freq1/sum(Freq1)
f2 <- Freq2/sum(Freq2)

# medias
EX_R1 <- sum(x*f1)
EX_R2 <- sum(x*f2)

# variancias
x2 <- x^2
EX2_R1 <- sum(x2*f1)
VARX_R1 <- EX2_R1 - (EX_R1)^2

EX2_R2 <- sum(x2*f2)
VARX_R2 <- EX2_R2 - (EX_R2)^2

# tabela resumo
tibble(
  `Região` = paste0("R",1:2),
  Média = c(EX_R1, EX_R2),
  Variância = c(VARX_R1, VARX_R2),
) %>% kable(caption = "Medidas Resumo.")
```

Tabela 4: Medidas Resumo.

Região	Média	Variância
R1	14	10,67
R2	14	7,62

Exercício 23

A tabela abaixo representa a distribuição do número de dependentes por empregado de uma determinada empresa.

Dependentes	Frequência
1	40
2	50
3	30
4	20
5	10
Total	150

Nenhuma das alternativas. De fato, a media é igual a 2.4 enquanto a mediana = 2 e moda = 2.

```
x <- x %>%
  mutate(freq=`Frequência`/sum(`Frequência`))

# média
x %>% summarise(media = sum(Dependentes * freq)) %>% pull
```

```
## [1] 2.4
```

```
# mediana
x <- x %>% mutate(freqacum = cumsum(freq))
x %>% summarise(mediana = Dependentes[findInterval(0.5, freqacum)+1]) %>% pull
```

```
## [1] 2
```

```
# moda
x %>% summarise(modas = Dependentes[which.max(freq)]) %>% pull
```

```
## [1] 2
```

Exercício 28

a)

Temos que $W_i = X_i + k$, $i = 1, \dots, n$, k é uma constante e $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ um conjunto de dados.

Além disso,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Então, calculemos a média \bar{W} do conjunto $\{W_i\}_{i=1, \dots, n}$,

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k = \bar{X} + k$$

De forma similar, calculemos a variância amostral S_W^2 de $\{W_i\}_{i=1,\dots,n}$,

$$S_W^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((X_i + k) - (\bar{X} + k))^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S_X^2$$

onde S_X^2 é a variância amostral de $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$.

b)

Temos agora que $V_i = kX_i$, $i = 1, \dots, n$, k é uma constante e $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ um conjunto de dados.

Então, calculemos a média \bar{V} do conjunto $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$,

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (kX_i) = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n X_i = k\bar{X}$$

De forma similar, calculemos a variância amostral S_V^2 de $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$,

$$S_V^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((kX_i) - (k\bar{X}))^2 = \frac{k^2}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = k^2 S_X^2$$

onde S_X^2 é a variância amostral de $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$.

Exercício 30

Considere os valores X_1, \dots, X_n de uma variável X , com média \bar{X} desvio padrão S . Mostre que a variável Z , cujos valores são $Z_i = (X_i - \bar{X})/S, i = 1, \dots, n$ tem média 0 e desvio padrão 1.

$$\bar{Z} = 1/n \sum_1^n Z_i$$

$$\bar{Z} = 1/n \sum_1^n (X_i - \bar{X})/S$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{S} (1/n \sum_1^n X_i - 1/n \sum_1^n \bar{X})$$

$$\bar{X} = 1/n \sum_1^n X_i \quad n\bar{X} = \sum_1^n X_i$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{S} (\bar{X} - \frac{n\bar{X}}{n})$$

$$\bar{Z} = 0$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\text{var}(Z)}$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n (Z_i - \bar{Z})^2}$$

$$\bar{Z} = 0$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n \frac{X_i - \bar{X}}{S}}$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\frac{1}{S^2} \frac{1}{n} \sum_1^n X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2}$$

$$\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i^2 \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \quad n\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n \bar{X}^2$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\frac{1}{S^2} (X_i^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2)}$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\frac{1}{S^2} (\bar{X}^2 - \bar{X}^2)}$$

$$\text{dp}(Z) = \sqrt{\frac{S^2}{S^2}}$$

$$\text{dp}(Z) = 1$$

Exercício 33

Com a finalidade de entender a diferença entre “desvio padrão” e “erro padrão”,

- a) Simule 10000 dados de uma distribuição normal com média 12 e desvio padrão 4. Construa o histograma correspondente, calcule a média e o desvio padrão amostrais e compare os valores obtidos com aqueles utilizados na geração dos dados.

```
exercise_a <- function(mean1, sd1, n) {

  normal <- rnorm(n, mean1, sd1)

  hist(normal, freq=FALSE,
       main=paste("Histograma de", n, "amostras da função normal"),
       xlab="Valor da amostra",
       ylab="Densidade",
       xlim = c(-10, 40),
       ylim = c(0, 0.3),
       #breaks = 50
  )
}
```

```

sd2 <- sd(normal)
mean2 <- mean(normal)

print(paste("Média amostral:", mean2))
print(paste("Desvio padrão amostral:", sd2))

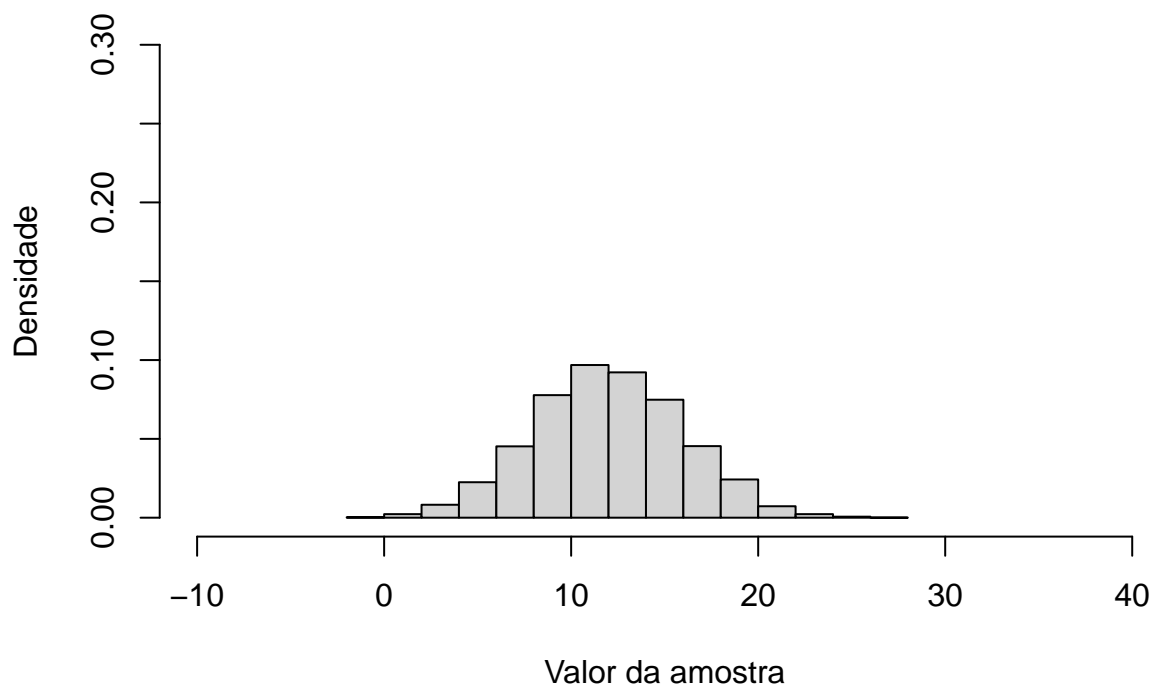
return(normal)
}

mean1 <- 12
sd1 <- 4
n <- 10000

normal <- exercise_a(mean1, sd1, n)

```

Histograma de 10000 amostras da função normal



```

## [1] "Média amostral: 11.9837956676752"
## [1] "Desvio padrão amostral: 3.97516190644715"

```

A média e o desvio padrão amostrais se aproximam dos valores utilizados para gerar os dados, mas não são exatamente iguais. Isso pode ser explicado pelos valores amostrais serem aleatoriamente gerados.

- b) Simule 500 amostras de tamanho $n = 4$ dessa população. Calcule a média amostral de cada amostra, construa o histograma dessas médias e estime o correspondente desvio padrão (que é o erro padrão da média).

```

exercise_b <- function (normal, n_sample, n_per_sample) {

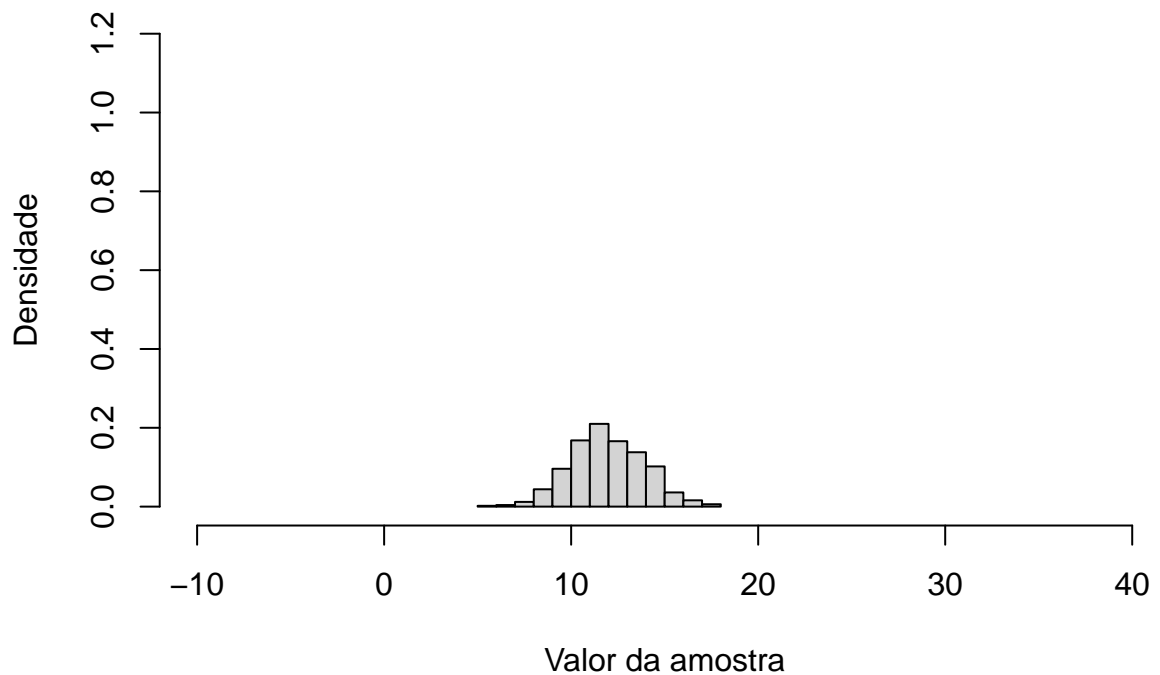
  samples <- replicate(n_sample, sample(normal, n_per_sample), simplify=FALSE)

  means <- as.numeric(lapply(samples, mean))
  hist(means, freq=FALSE,
       main=paste("Histograma das médias de", n_sample, "amostras de tamanho", n_per_sample),
       xlab="Valor da amostra",
       ylab="Densidade",
       xlim = c(-10, 40),
       ylim = c(0, 1.2),
       #breaks = 50
  )
  print(paste("Erro padrão da média:", sd(means)))
  return(means)
}

n_sample = 500
n_per_sample = 4
means <- exercise_b(normal, n_sample, n_per_sample)

```

Histograma das médias de 500 amostras de tamanho 4



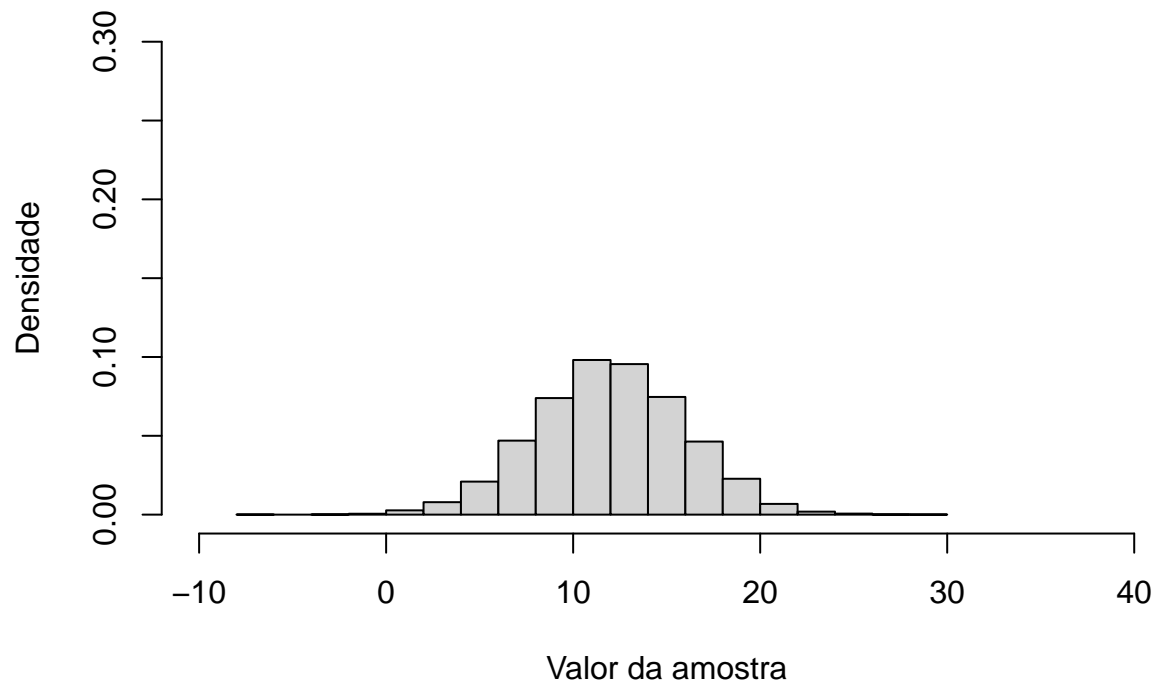
```
## [1] "Erro padrão da média: 1.95238404918627"
```

c) Repita os passos a) e b) com amostras de tamanhos $n = 9$ e $n = 100$. Comente os resultados

comparando-os com aqueles preconizados pela teoria.

```
normal <- exercise_a(mean1, sd1, n)
```

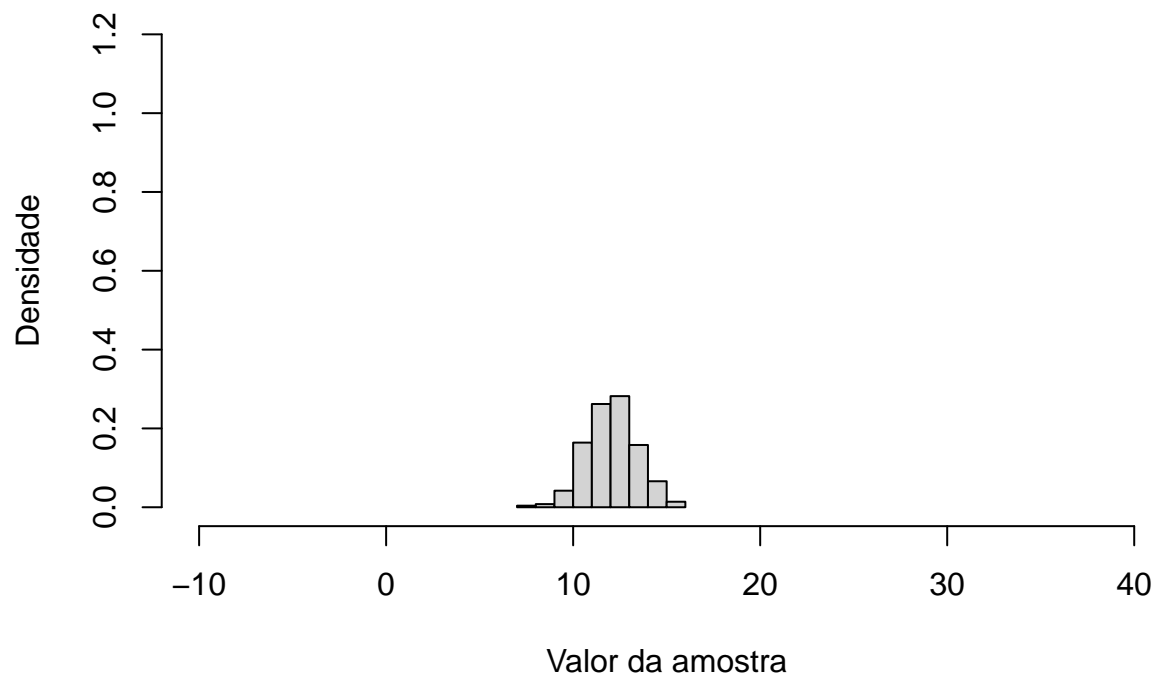
Histograma de 10000 amostras da função normal



```
## [1] "Média amostral: 11.9858755058147"  
## [1] "Desvio padrão amostral: 3.97812503536467"
```

```
n_per_sample = 9  
means <- exercise_b(normal, n_sample, n_per_sample)
```

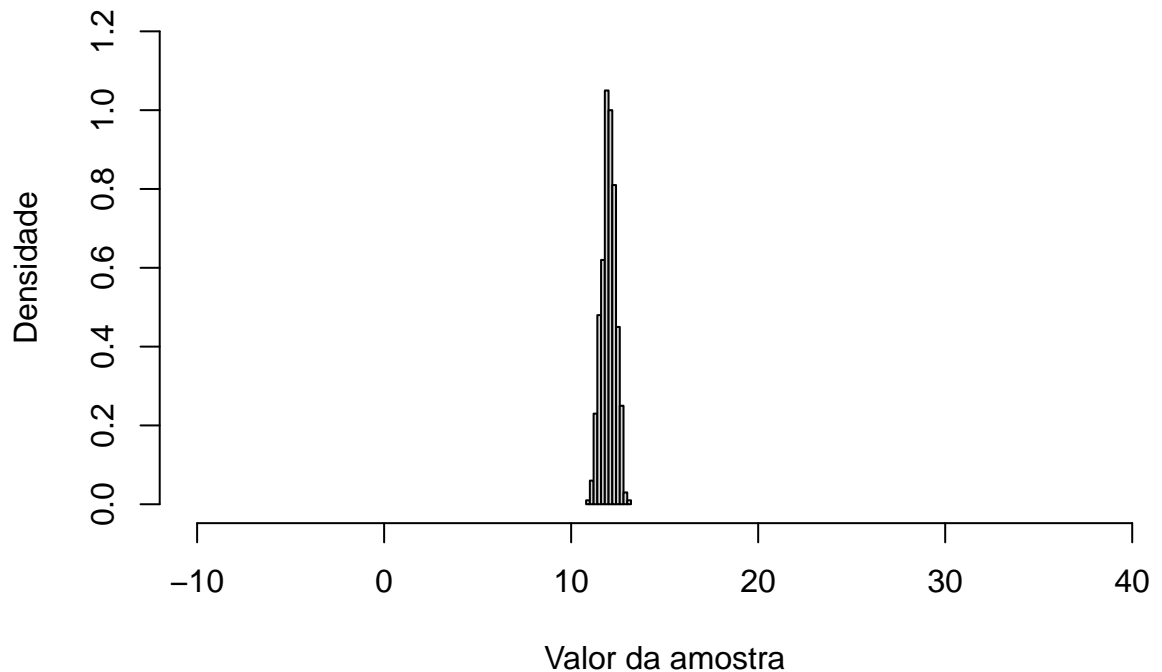
Histograma das médias de 500 amostras de tamanho 9



```
## [1] "Erro padrão da média: 1.32805811751036"
```

```
n_per_sample = 100  
means <- exercise_b(normal, n_sample, n_per_sample)
```

Histograma das médias de 500 amostras de tamanho 100



```
## [1] "Erro padrão da média: 0.376605706965425"
```

Com o aumento do tamanho das amostras, a distribuição das médias se assemelhou a uma distribuição normal. O erro padrão da média diminuiu. Isso pode ser visualmente averiguado nos histogramas das médias, cujos valores ficam cada vez mais próximos do centro conforme n aumenta. Todos esses resultados são previstos em teoria.

d) Repita os passos a) - c) simulando amostras de uma distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade.

Passo a)

```
exercise_a <- function(degrees_of_freedom, n) {  
  chisq <- rchisq(n, degrees_of_freedom)  
  
  hist(chisq, freq=FALSE,  
       main=paste("Histograma de", n, "amostras da distribuição qui-quadrado"),  
       xlab="Valor da amostra",  
       ylab="Densidade",  
       xlim = c(0, 30),  
       ylim = c(0, 0.3),  
       #breaks = 50  
  )  
  sd2 <- sd(chisq)
```

```

mean2 <- mean(chisq)

print(paste("Média amostral:", mean2))
print(paste("Desvio padrão amostral:", sd2))

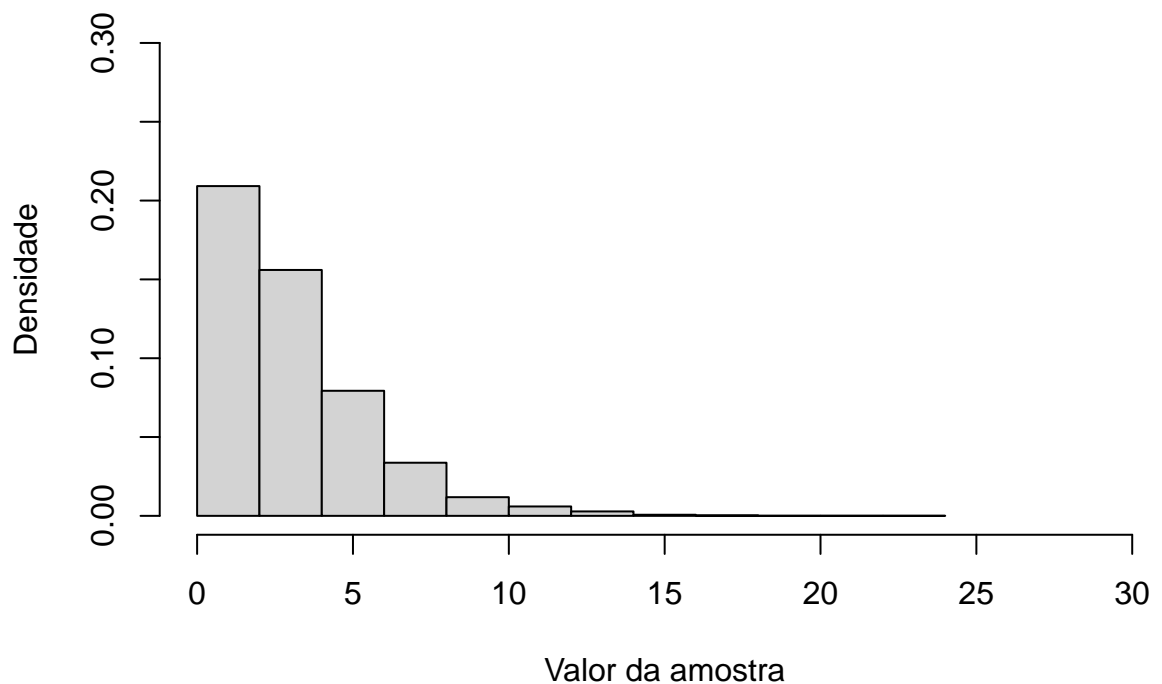
return(chisq)
}

degrees_of_freedom <- 3
n <- 10000

chisq <- exercise_a(degrees_of_freedom, n)

```

Histograma de 10000 amostras da distribuição qui-quadrado



```

## [1] "Média amostral: 3.01919087044448"
## [1] "Desvio padrão amostral: 2.43380722757027"

```

Novamente, a média e o desvio padrão amostrais se aproximam dos valores utilizados para gerar os dados, mas não são exatamente iguais dado que os valores amostrais são aleatoriamente gerados.

Passo b)

```

exercise_b <- function (chisq, n_sample, n_per_sample) {
  samples <- replicate(n_sample, sample(chisq, n_per_sample), simplify=FALSE)
}

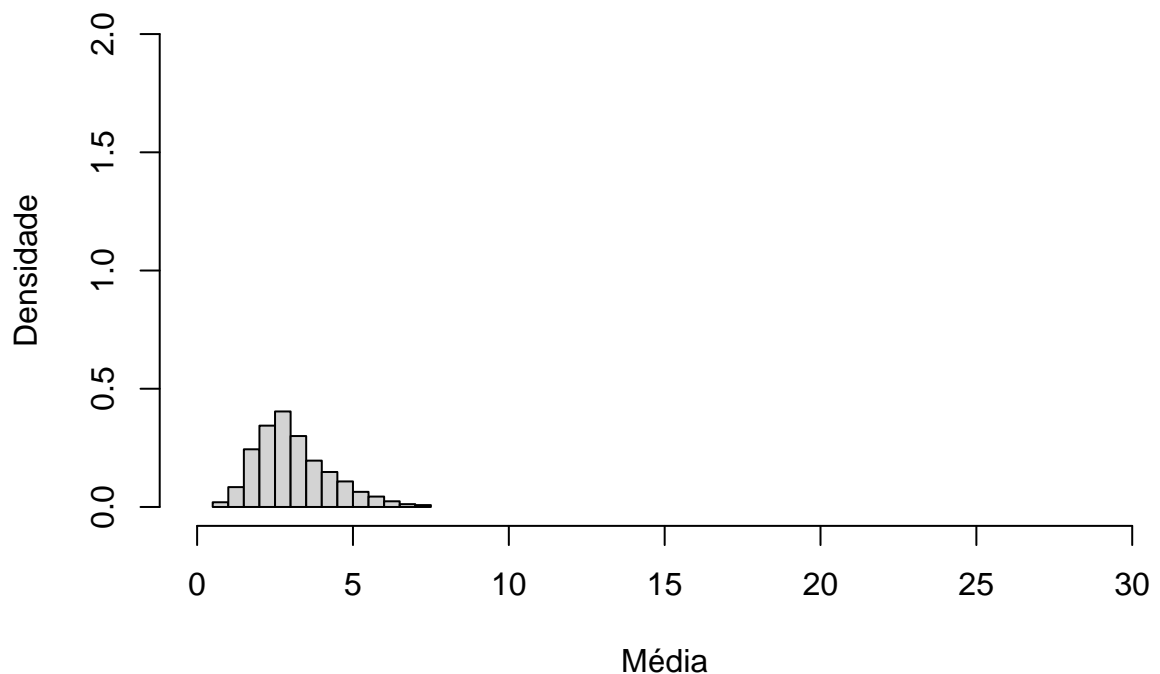
```

```

means <- as.numeric(lapply(samples, mean))
hist(means, freq=FALSE,
     main=paste("Histograma das médias de", n_sample, "amostras de tamanho", n_per_sample),
     xlab="Média",
     ylab="Densidade",
     xlim = c(0, 30),
     ylim = c(0, 2.0),
     #breaks = 50
)
print(paste("Erro padrão da média:", sd(means)))
return(means)
}
n_sample = 500
n_per_sample = 4
means <- exercise_b(chisq, n_sample, n_per_sample)

```

Histograma das médias de 500 amostras de tamanho 4

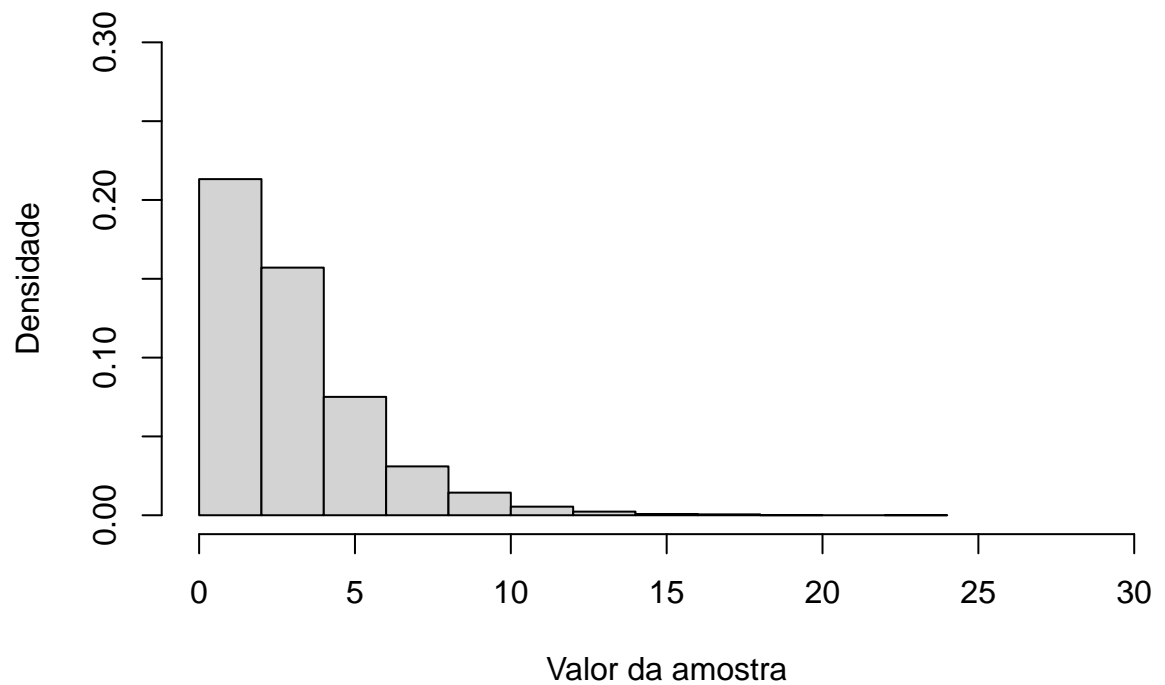


```
## [1] "Erro padrão da média: 1.18747945161632"
```

Passo c)

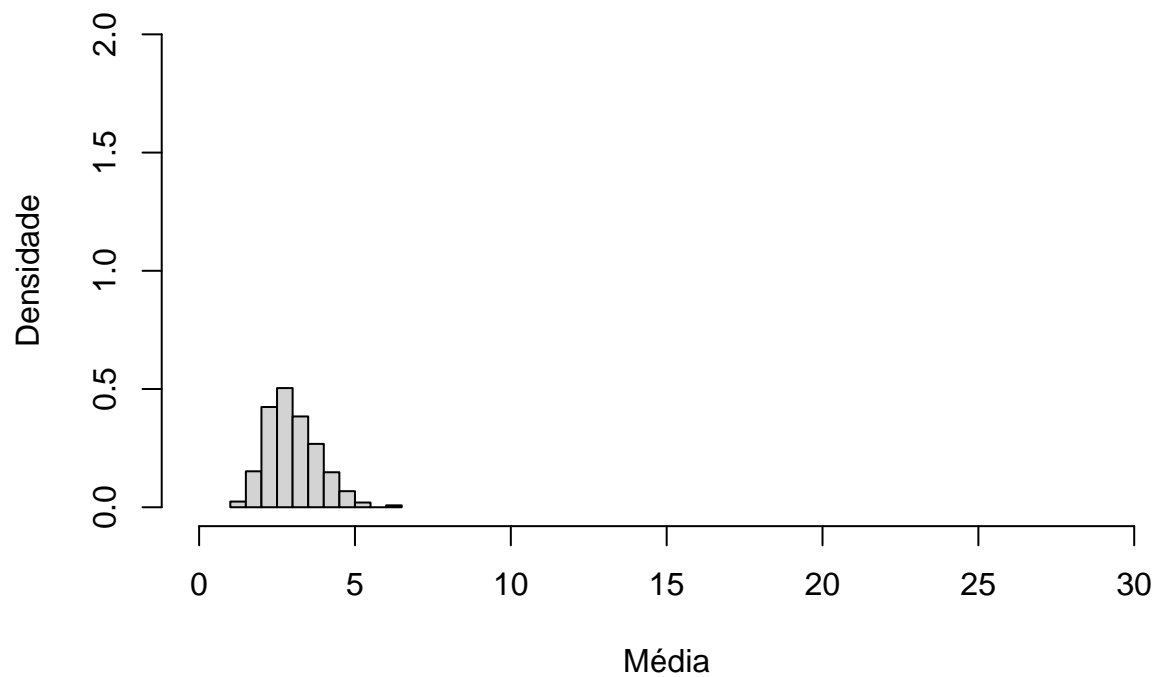
```
chisq <- exercise_a(degrees_of_freedom, n)
```


Histograma de 10000 amostras da distribuição qui-quadrado



```
## [1] "Média amostral: 2.98720840398482"  
## [1] "Desvio padrão amostral: 2.44207100807584"  
  
n_per_sample = 9  
means <- exercise_b(chisq, n_sample, n_per_sample)
```

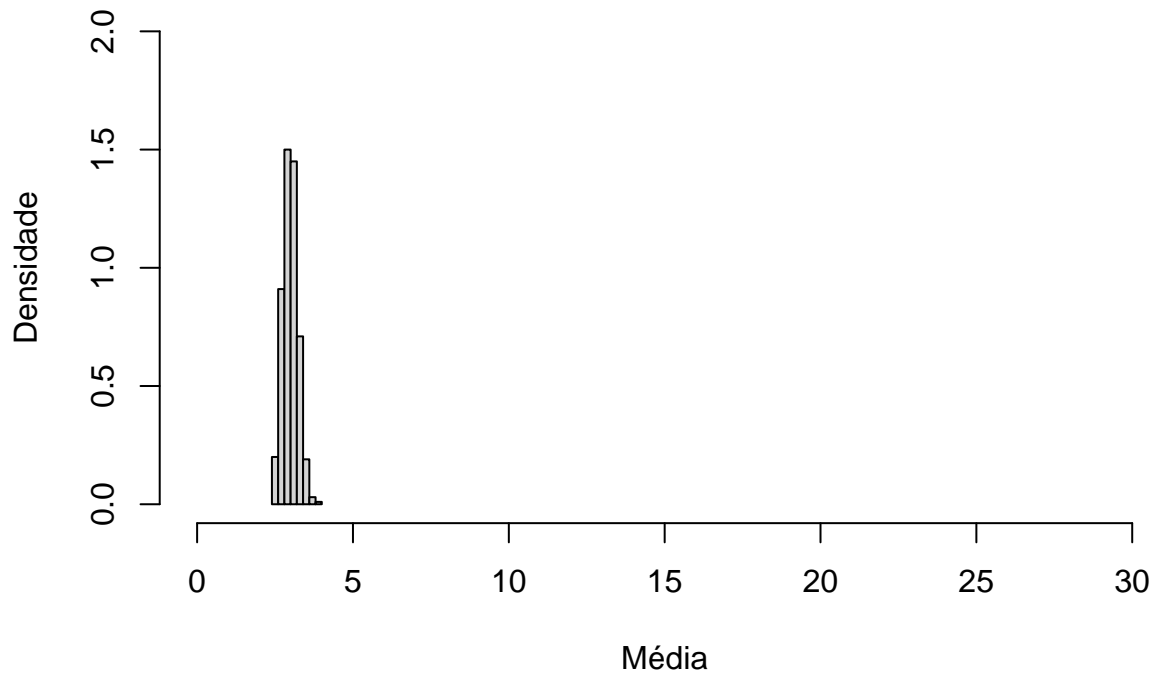
Histograma das médias de 500 amostras de tamanho 9



```
## [1] "Erro padrão da média: 0.833426165952932"
```

```
n_per_sample = 100  
means <- exercise_b(chisq, n_sample, n_per_sample)
```

Histograma das médias de 500 amostras de tamanho 100



```
## [1] "Erro padrão da média: 0.236589242276623"
```

Com o aumento do tamanho das amostras, a distribuição das médias se assemelhou a uma normal, mesmo quando as amostras são geradas a partir da distribuição χ^2 -quadrado. Novamente, o erro padrão da média diminuiu. Isso pode ser visualmente averiguado nos histogramas das médias, cujos valores ficam cada vez mais próximos do centro conforme n aumenta. Todos esses resultados são previstos em teoria.