Ministerul Educației și Cercetării

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Gabriel Popa
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VIII-a

8

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată
prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.

119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Ministerul Educației și Cercetării

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Gabriel Popa
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VIII-a

8

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin ordinul de ministru nr. 6400/22.09.2025.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2025-2026.

Inspectoratul Școlar . . . .

Școala / Colegiul / Liceul . . . .

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: ***nou***, ***bun***, ***îngrijit***, ***neîngrijit***, ***deteriorat***.
- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
- conf. univ. dr. Eugen Păltănea, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea „Transilvania" din Brașov
- prof. gradul I Vladimir Cerbu, Colegiul Național Militar „Ștefan cel Mare" din Câmpulung Moldovenesc

Coordonator redacție: Cătălin Georgescu
Redactor: Irina Munteanu
Corectură: Ana-Maria Stuparu
Copertă, coordonator tehnic și prepress: Florin Paraschiv
Tehnoredactor: Crenguța Rontea
Layout: Faber Studio
Activități digitale interactive și platformă e-learning: B-Side Tech Ltd. Website: https://bside-tech.com/
Înregistrare sunet și postprocesare: ML Sistems Consulting
Voce: Camelia Pintilie
Animații: S.C. Film Experience S.R.L.
Credite foto și video: Dreamstime

ISBN 978-630-358-033-3

Pentru comenzi puteți contacta Departamentul Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99
www.art-educational.ro

Cuvânt-înainte

Gândirea matematică este cea mai puternică formă de exprimare a spiritului uman, având o rază universală de acțiune. În consecință, matematica are dublă valență: este ***știință*** și ***artă*** deopotrivă. Astfel, prin matematică se construiesc realități în timp ce se modelează imaginația sau se găsesc răspunsuri ce dau naștere la noi întrebări.

În clasa a VIII-a, la algebră definitivăm studiul elementar al ***matematicii structurilor și a cantităților*** (*Unitatea 1: Intervale de numere reale. Inecuații în* $\mathbb{R}$) și transformăm ingeniozitatea în formule simple, pentru a valorifica forme abstracte în realitatea concretă (*Unitatea 2: Calcul algebric în* $\mathbb{R}$).

Prin *Unitatea 3: Funcții* deschidem un univers nou: ***matematica transformărilor și a interpretării datelor***, în care construim instrumente esențiale pentru studiul dependențelor dintre mărimi, atât în natură, cât și în societate.

Geometria plană, studiată în clasele anterioare, capătă *înălțime* prin adăugarea celei de-a treia dimensiuni. Cuvântul *teoremă* are, după etimologia sa greacă, semnificația de „spectacol”; astfel, configurațiile spațiale devin decorul unui teatru universal, iar lecțiile din *Unitatea 4: Elemente ale geometriei în spațiu* și din *Unitatea 5: Arii și volume ale unor corpuri geometrice* sunt tot atâtea *acte* în care punctele, dreptele, planele și corpurile geometrice își joacă rolul în piesa de teatru a ***matematicii spațiului***.

Așa cum este prezentată în această lucrare, matematica este o expresie a realității, în care idei, concepte, interacțiuni și aplicații practice asigură corelația cu alte discipline. Matematica apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie şi să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Autorii

Prezentarea manualului

Manualul cuprinde:
varianta tipărită
+
varianta digitală.
Varianta digitală este accesibilă pe platforma www.manuale.edu.ro.

Manualul este împărțit în cinci unități care acoperă integral conținutul prevăzut de programa școlară. Lecțiile care compun o unitate sunt prezentate în mod coerent, unitar, într-un stil consecvent.

Fiecare lecție debutează cu o problemă practică, pe baza căreia se introduc noile concepte. Acestea sunt conturate apoi într-un limbaj matematic care echilibrează nivelul descriptiv cu rigoarea specifică matematicii. Noțiunile noi sunt însoțite de exemple semnificative, comentarii și aplicații.

Manualul acordă o atenție sporită gândirii critice și dezvoltării calculului mintal, prin zone dedicate, încurajând în același timp activitățile de grup, independența în gândire și dezvoltarea încrederii în sine. Evaluarea se realizează prin forme și instrumente diversificate, orientate spre formarea și dezvoltarea competențelor matematice.

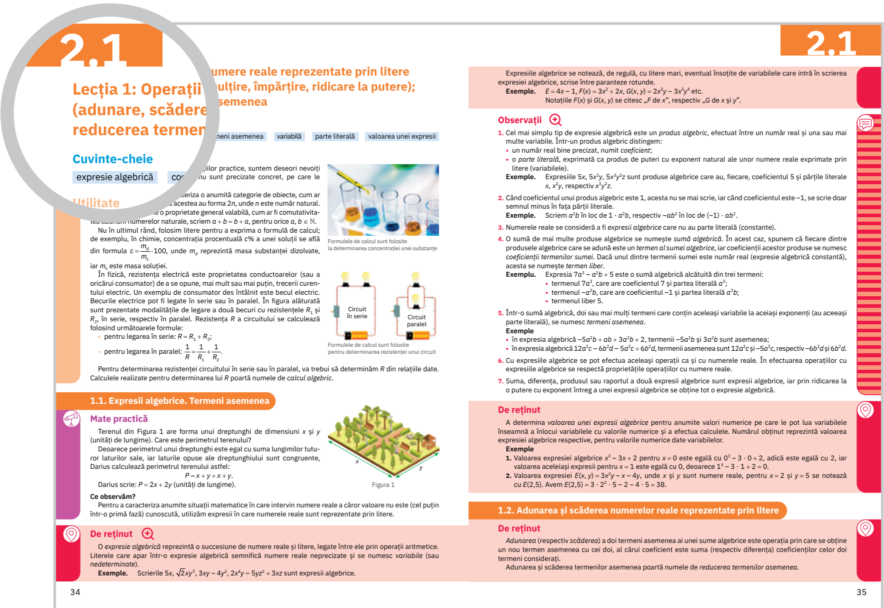
Instrucțiuni de utilizare a manualului digital

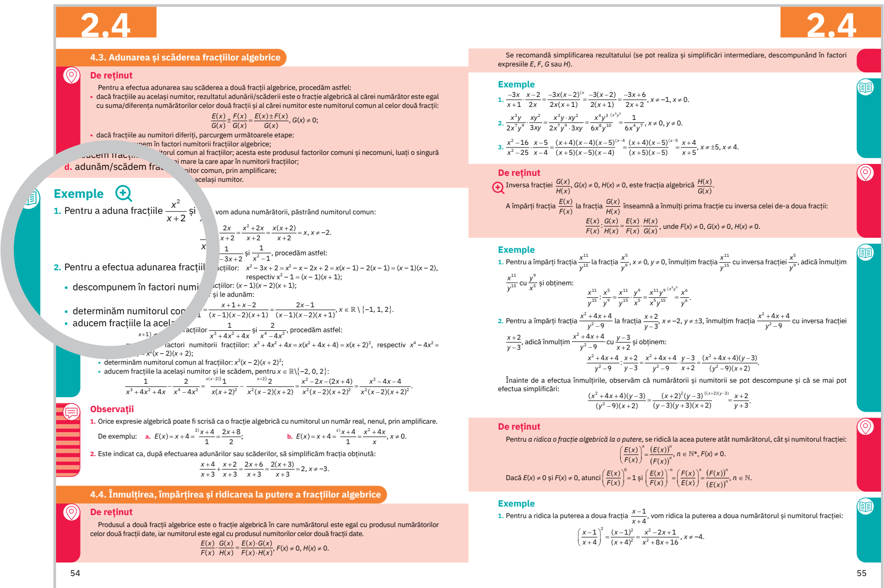
Varianta digitală a manualului este similară cu cea tipărită, având în plus 155 de AMII, activități multimedia interactive de învățare, cu rolul de a spori valoarea cognitivă. Activitățile multimedia interactive de învățare sunt de trei feluri, simbolizate pe parcursul manualului astfel:

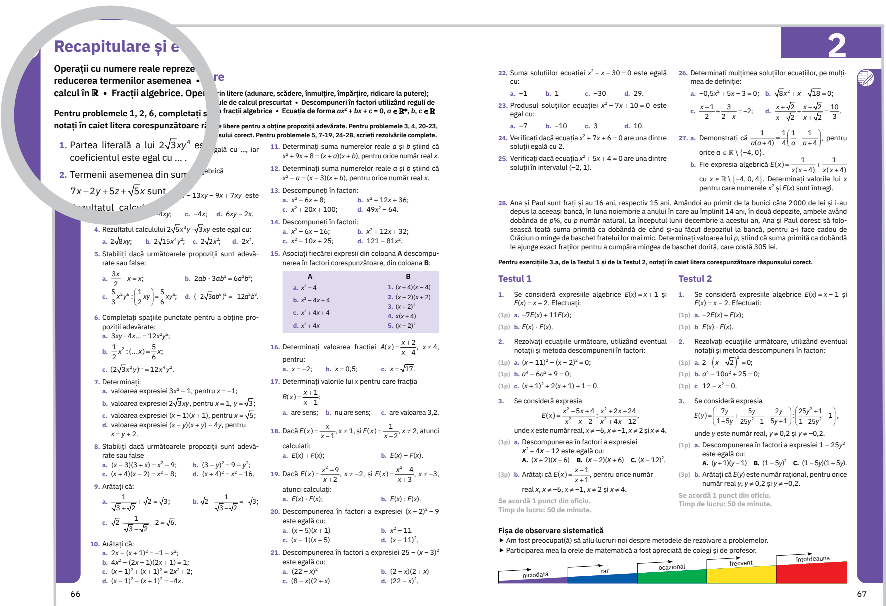
- **Activitate statică**, de ascultare activă și de observare dirijată a unei imagini semnificative;
- **Activitate animată**, filmuleț sau scurtă animație;
- **Activitate interactivă**, de tip exercițiu sau joc, în urma căreia elevul are feedback imediat.

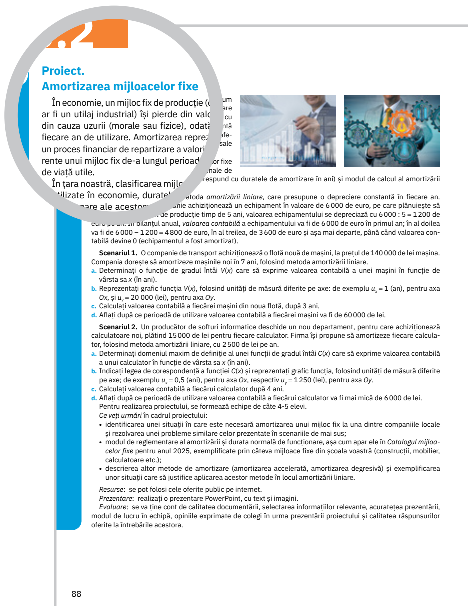
Manualul este structurat în 5 unități de învățare:

Structura unității de învățare









Butoane folosite în varianta digitală:

- Cuprins
- Ecran complet
- Mod de afișare 2 pagini (tip carte)
- Mod de afișare pagină lată (pagină sub pagină)
- Mod de afișare digital *responsive*
- Mod de afișare comutare automată
- Notițe
- Ajutor
- Navigare către pagina precedentă
- Navigare către pagina următoare

Cuprins

Competențe generale și specifice

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora
2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora
3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$
3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice
4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice
5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date
6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

U1 Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

Inecuațiile sunt utilizate pentru a compara două valori sau expresii și au diverse aplicații practice. De exemplu, nivelul maxim de poluare pe care îl poate tolera un râu poate fi reprezentat printr-o inegalitate, iar oamenii de știință care studiază mediul înconjurător pot folosi metode algebrice pentru a realiza cele mai bune politici pentru reducerea poluării.

1.1

Lecția 1: Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

Cuvinte-cheie

mulțime | proprietate comună | intersecție | reuniune | apartenență | incluziune

Utilitate

În clasele anterioare am considerat, fără a da o definiție riguroasă, că o mulțime este o colecție bine precizată de obiecte (numite elemente), privită ca un întreg.

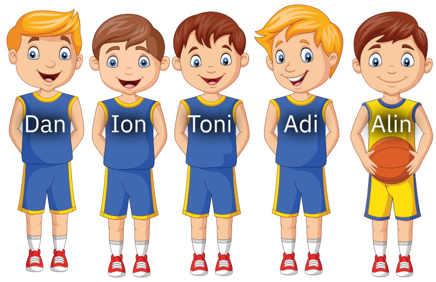
Activitatea umană, în toate formele sale, necesită adesea nu doar gruparea în mulțimi a unor obiecte, idei, acțiuni sau fenomene, ci și clasificarea acestora după diferite criterii.

Un exemplu la îndemână: observând lumea înconjurătoare, putem distinge imediat între *plante* și *animale*, deci putem considera mulțimea plantelor (regnul vegetal) și mulțimea animalelor (regnul animal). Analizând animalele după un anumit criteriu, de exemplu, după prezența sau absența coloanei vertebrale, constatăm că regnul animal este constituit din mulțimea animalelor *vertebrate* și mulțimea animalelor *nevertebrate*.

Matematic, un proces de clasificare, realizat pe baza unui criteriu, conduce la definirea unei mulțimi de obiecte cu o proprietate comună (criteriul dat).

1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

Situație problemă



Echipa de baschet a școlii este formată din 12 elevi. Patru dintre ei ne zâmbesc din imaginea alăturată, îmbrăcați în echipamentul albastru al echipei.

Mulțimea B, a componenților echipei, poate fi scrisă enumerând efectiv elementele sale, adică menționând numele tuturor elevilor: Dan, Adi, Ion, Toni și așa mai departe.

Mulțimea B poate fi identificată și în alt mod, ținând seama că fiecare element al ei are calitatea de membru al echipei de baschet. Aceasta este o proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii B și numai lor, nefiind verificată de elementele care nu aparțin mulțimii B (de exemplu, de Alin).

Mulțimea B se poate scrie și astfel:

$$B = \{x \mid x \text{ este membru al echipei de baschet a școlii}\}.$$

Citim: B este mulțimea elementelor x, cu proprietatea că x este membru al echipei de baschet a școlii.

De reținut

Dacă elementele unei mulțimi A au o proprietate comună, notată cu p, specifică lor și numai lor, mulțimea A se poate defini și astfel:

$$A = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: A este mulțimea formată din elementele x care au proprietatea p.

Proprietatea p trebuie formulată astfel încât să permită identificarea exactă a elementelor mulțimii (și numai a acestora). De exemplu, considerând mulțimea $A = \{x \mid x \text{ este cifră arabă}\}$, putem afirma, fără echivoc, că $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Nu orice mulțime se poate scrie însă folosind o proprietate comună a elementelor. De exemplu, mulțimea $T = \{7, 11, \text{elefant}, \text{contrabas}, \Delta, \bigcirc\}$ nu poate fi definită pe baza unei proprietăți specifice elementelor sale.

Observații

1. Pentru definirea unei mulțimi, se pot utiliza și două sau mai multe proprietăți pe care le verifică elementele sale.
Considerând mulțimea A din Figura 1, orice element $x \in A$ are proprietățile: x este număr natural, x este par, $x \le 16$. Scriem:
$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este număr par}, x \le 16\}.$$
Se observă că A poate fi definită și astfel: $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \le 8\}$.

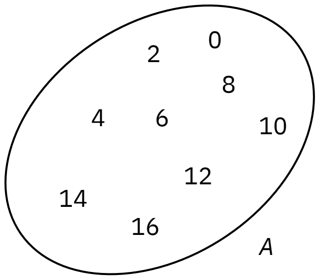


Figura 1

2. Dacă elementele mulțimii A aparțin unui domeniu dat (altfel spus, mulțimea A este submulțime a unei mulțimi definite anterior), putem indica acest lucru înainte de bara verticală.
De exemplu, pentru a defini mulțimea A a numerelor naturale cel mult egale cu 4, vom scrie: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$, în loc de $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \le 4\}$.
3. Pentru simplificarea scrierii, în special în cazul mulțimilor de numere reale, dacă elementele se pot determina printr-o formulă de calcul (au o formă comună), se poate scrie această formulă (proprietatea comună) înainte de bara verticală.
De exemplu, pentru a indica mulțimea numerelor naturale care dau restul 2 la împărțirea cu 6 (adică mulțimea numerelor de forma $6k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$), în loc de $A = \{x \mid x = 6k + 2, k \in \mathbb{N}\}$, vom scrie, mai simplu, $A = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
4. Pentru o mulțime finită, având un număr relativ mic de elemente, enumerarea elementelor între acolade sau utilizarea unei diagrame Venn-Euler oferă o imagine rapidă asupra mulțimii date. În schimb, mulțimile infinite se scriu indicând forma generală a elementelor lor.
Astfel, mulțimea multiplilor întregi ai unui număr natural n se scrie: $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Mulțimea numerelor raționale se scrie $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \ne 0\right\}$ sau $\mathbb{Q} = \left\{\pm\dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exemple

1. **Scrierea unei mulțimi date identificând o proprietate comună a elementelor**
Considerăm mulțimile:
a. $A = \{1, 3, 9, 27, 81\}$; **b.** $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$; **c.** $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
Vom identifica, pe rând, câte o proprietate comună a elementelor fiecărei mulțimi.
a. Se observă că $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$ și $81 = 3^4$. Așadar:
$$A = \{x \mid x = 3^k, k \in \mathbb{N}, k \le 4\} = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}, k \le 4\}.$$
b. Numerele 0, 1, 4, 9, 16, 25 și 36 sunt pătrate perfecte, mai precis pătratele numerelor 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6. În consecință:
$$B = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}, k \le 6\} = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}, k \le 6\}.$$
c. Elementele mulțimii sunt numerele întregi mai mari decât -5 și mai mici decât 5 (sau mai mari sau egale cu -4 și mai mici sau egale cu 4). Ca urmare:
$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \le x \le 4\}.$$
Folosind proprietățile modulului, putem scrie și $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ sau $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\}$.
2. **Enumerarea elementelor unei mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor**
Fie mulțimea $D = \{k + k^2 \mid k \in \mathbb{N}, 2 \le k \le 5\}$. Elementele sale sunt numerele naturale x care se obțin prin adunarea unui număr natural k, $2 \le k \le 5$, cu pătratul său. Astfel:
- pentru $k = 2$, obținem $x = 2 + 2^2 = 6$;
- pentru $k = 3$, obținem $x = 3 + 3^2 = 12$;
- pentru $k = 4$, obținem $x = 4 + 4^2 = 20$;
- pentru $k = 5$, obținem $x = 5 + 5^2 = 30$.

În concluzie, $D = \{6, 12, 20, 30\}$.
3. **Studiul apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor**
Considerăm mulțimile $A = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x = 2t + 1, t \in \mathbb{N}\}$. Se pun problemele:
a. Care dintre numerele naturale 122, 321, 305 aparține mulțimii A, respectiv mulțimii B?
b. Care sunt elementele comune mulțimilor A și B?
a. Observăm că $122 = 3 \cdot 40 + 2$, deci $122 \in A$. La fel, $321 = 2 \cdot 160 + 1$, adică 321 aparține mulțimii B.
Presupunând că $122 \in B$, ar trebui să existe $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $2t + 1 = 122$, absurd, deoarece $2t + 1$ este număr impar, iar 122 este par. Așadar, $122 \notin B$.

Analog, presupunând că $321 \in A$, ar rezulta că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $3k + 2 = 321$, adică $3k = 319$, de unde $k = \frac{319}{3} = 106\frac{1}{3}$, care nu este număr natural. Rezultă că $321 \notin A$.

Deoarece $305 = 3 \cdot 101 + 2 = 2 \cdot 152 + 1$, deducem că $305 \in A$ și $305 \in B$, adică $305 \in A \cap B$.

b. Fie x un element comun mulțimilor A și B, ales arbitrar. Atunci există $k, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = 3k + 2$ și $x = 2t + 1$, deci $2t = 3k + 1$. Ca urmare, $3k + 1$ este număr natural par, deci k este impar, adică are forma $2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $x = 3k + 2 = 3(2p + 1) + 2 = 6p + 5$.
Așadar, dacă $x \in A \cap B$, atunci x are forma $6p + 5$, $p \in \mathbb{N}$. Observând că:

$$6p + 5 = 3 \cdot (2p + 1) + 2 \in A \quad \text{și} \quad 6p + 5 = 2 \cdot (3p + 2) + 1 \in B,$$

rezultă că orice număr de forma $6p + 5$, $p \in \mathbb{N}$, aparține atât mulțimii A, cât și mulțimii B, deci $A \cap B = \{x \mid x = 6p + 5, p \in \mathbb{N}\}$.

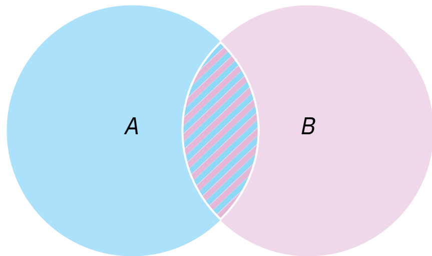
1.2. Reuniunea, intersecția și diferența a două mulțimi. Aplicații

Observație

Ne reamintim că intersecția a două mulțimi A și B, notată prin $A \cap B$, este mulțimea formată din elementele comune ale mulțimilor A și B.

Putem defini mulțimea $A \cap B$ folosind proprietatea elementelor sale de a aparține atât mulțimii A, cât și mulțimii B. Așadar:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$



Analog, elementele reuniunii $A \cup B$ au proprietatea că aparțin fie lui A, fie lui B, deci:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Similar, putem defini și diferența a două mulțimi printr-o proprietate comună a elementelor sale:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \quad \text{sau} \quad B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ și } x \notin A\}.$$

Investigație

Se împart elevii în patru grupe. În fiecare grupă se alege un purtător de cuvânt.
Fiecare grupă primește o coală de carton pe care sunt scrise mulțimile:

Grupa 1: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x \le 11\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \le x \le 15\}$.

Grupa 2: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 16 \le x \le 21\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \le x \le 24\}$.

Grupa 3: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 8\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \le x \le 14\}$.

Grupa 4: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x \le 13\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 < x \le 18\}$.

Cerințe comune:

1. Scrieți mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și reprezentați-le cu ajutorul diagramelor.

2. Determinați mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

3. Scrieți fiecare dintre mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$ folosind o proprietate comună a elementelor, exprimată, acolo unde este posibil, sub forma unei duble inegalități.

Cerință specifică:

4. Determinați mulțimile $E \cap F$ și $E \cup F$, unde $E = \{x \in \mathbb{N} \mid a \le x \le b\}$ și $F = \{x \in \mathbb{N} \mid c \le x \le d\}$, iar a, b, c, d sunt numere naturale care îndeplinesc condiția:

grupa 1: $a < c < b < d$; grupa 2: $a < b < d < c$;
grupa 3: $a < b < c < d$; grupa 4: $a < c < d < b$.

Cerințele se rezolvă pe coala de carton primită, în timp de 15 minute. După îndeplinirea sarcinilor, fiecare purtător de cuvânt prezintă în fața clasei activitățile efectuate și modul de rezolvare.

Se dezbat rezultatele obținute la cerința specifică, în funcție de ordonarea numerelor a, b, c, d. Suplimentar, se studiază cazurile în care unele dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Mulțimea $\mathcal{F}$ conține triunghiuri, cercuri și pătrate, care pot fi *pline* (colorate complet) sau *goale* (colorate doar pe contur), cu albastru, roșu sau cu verde (Figura 2). Reprezentați cu ajutorul unor diagrame Venn-Euler mulțimile:

a. $A = \{x \in \mathcal{F} \mid x \text{ este triunghi}\}$; **b.** $B = \{y \in \mathcal{F} \mid y \text{ colorat cu verde}\}$;

c. $C = \{z \in \mathcal{F} \mid z \text{ este plin}\}$; **d.** $D = \{u \in \mathcal{F} \mid u \in A \text{ și } u \in B \text{ și } u \in C\}$.

$\mathcal{F}$

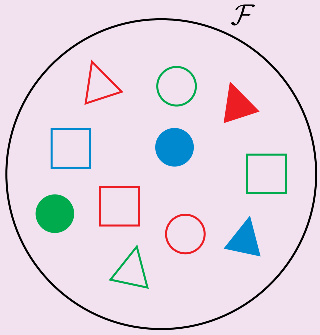
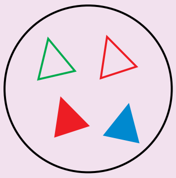


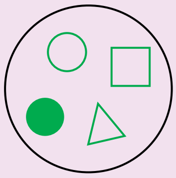
Figura 2

Rezolvare

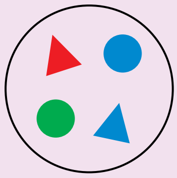
a.



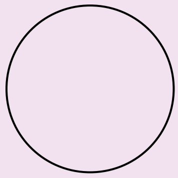
b.



c.



d.



2. Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unor proprietăți comune elementelor lor:

a. $A = \{40, 31, 22, 13\}$; **b.** $B = \{6, 4\sqrt{5}, 5\sqrt{6}, 6\sqrt{7}, 14\sqrt{2}\}$;

c. $C = \{10, 15, 20, ..., 95\}$; **d.** $D = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Rezolvare

a. Elementele mulțimii A sunt toate numerele de două cifre care au suma cifrelor egală cu 4: $A = \{\overline{ab} \mid a + b = 4\}$. Putem scrie mulțimea A și sub forma: $A = \{9n + 4 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$.

b. Numerele $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{6}$, $6\sqrt{7}$ au forma $n\sqrt{n+1}$, unde $n \in \{4, 5, 6\}$. Observând că $6 = 3\sqrt{4}$ și $14\sqrt{2} = 7\sqrt{8}$, putem scrie $B = \{n\sqrt{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 7\}$.

c. Elementele mulțimii C sunt toate numerele divizibile cu 5 formate din două cifre. Utilizând faptul că orice număr întreg divizibil cu 5 este de forma $5k$, unde $k \in \mathbb{Z}$, obținem $C = \{5k \mid k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq 19\}$.

d. Mulțimea D conține toți divizorii întregi ai lui 4, deci $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4 \vdots n\}$.

3. Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a. P_1: $\sqrt{7} \in \{x \mid 1 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$; **b.** P_2: $-4 \notin \{x \mid |x| \leq 6, x \in \mathbb{N}\}$; **c.** P_3: $237 \in \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$.

Rezolvare

a. Propoziția P_1 este adevărată, deoarece $1 = \sqrt{1} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$.

b. Deoarece $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 6, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, propoziția P_2 este adevărată.

c. Deoarece $15^2 < 237 < 16^2$, numărul 237 nu este pătrat perfect. P_3 este o propoziție falsă.

4. Arătați că elementele mulțimii $C = \{x \mid x = 6k + 13, k \in \mathbb{N}\}$ dau restul 1 la împărțirea cu 3.

Rezolvare

Un element oarecare al mulțimii C este de forma $x = 6k + 13 = 3 \cdot 2k + 3 \cdot 4 + 1 = 3 \cdot (2k + 4) + 1$. Cum $1 < 3$, din teorema împărțirii cu rest rezultă că restul împărțirii lui x la 3 este 1.

5. Fie a un număr natural. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid 7 < x \leq a, x \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x \vdots 5, x \in \mathbb{N}\}$. Determinați mulțimea $C = \{a \in \mathbb{N} \mid \text{mulțimea } A \cap B \text{ are 20 de elemente}\}$.

Rezolvare

Elementele comune celor două mulțimi sunt multipli de 5 mai mari ca 7, cel mai mic element comun fiind $10 = 5 \cdot 2$. Cele 20 de elemente ale mulțimii $A \cap B$ sunt 20 de multipli consecutivi ai lui 5 începând cu 10, adică numerele de la $5 \cdot 2$ la $5 \cdot 21$. Așadar, $A \cap B = \{10, 15, 20, ..., 105\}$, deci $a \geq 105$. Presupunând că $a \geq 110$, ar rezulta că $110 \in A \cap B$, adică $A \cap B$ ar avea cel puțin 21 de elemente. În concluzie, $a < 110$, de unde rezultă că $C = \{105, 106, 107, 108, 109\}$.

Probleme propuse

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 4\}$ și $B = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| \leq 2\}$.

a. Reprezentați mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

b. Reprezentați elementele mulțimii $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ într-un sistem de axe ortogonale xOy.

2. Scrieți mulțimile de mai jos folosind o proprietate comună a elementelor lor:

a. $A=\{0, 7, 14, 21, 28\}$; b. $B=\{0, 4, 8, 12, 16, 20, ...\}$; c. $C=\{1, 5, 9, 13, 17, 21, ...\}$.

3. Fie mulțimea $M=\left\{-2,(6); 0; 2\sqrt{3}; \pi; -\frac{15}{5}; \sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

a. $A=\{x \in M \mid x \geq 0\}$; b. $B=\{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$; c. $C=\{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; d. $D=\{x \in M \mid x \leq -3\}$.

4. Se consideră mulțimile $A=\{x \mid x=6k+3,\ k \in \mathbb{Z}\}$ și $B=\{x \mid x=3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

a. Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.

b. Verificați dacă numerele 112, 204 și 333 aparțin celor două mulțimi.

c. Arătați că $A \subset B$ și $B \not\subset A$.

5. Se dau mulțimile $A=\left\{\frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in \mathbb{N}^*,\ x \leq 20\right\}$ și $B=\left\{\frac{x+1}{x+3} \,\middle|\, x \in \mathbb{N},\ x \leq 20\right\}$.

a. Stabiliți câte elemente au mulțimile A și B.

b. Comparați produsul elementelor mulțimii A cu produsul elementelor mulțimii B.

6. Determinați mulțimile:

a. $A=\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy+5=0\}$; b. $B=\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x+5y=40\}$;

c. $C=\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+2y=9 \text{ și } 2x-y=8\}$; d. $D=\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy+3x+3y=12\}$.

7. Determinați numărul elementelor mulțimilor:

a. $A=\{\overline{abc} \mid a+c=3\}$; b. $B=\{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid a<b\}$; c. $C=\{z \in \mathbb{Z} \mid |z|<18\}$; d. $D=\{x \mid x^2 \leq 11,\ x \in \mathbb{Z}\}$.

8. Stabiliți care dintre mulțimile $A=\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^{100}\}$ și $B=\{x \in \mathbb{N} \mid 2^{100} \leq x \leq 2^{101}\}$ are mai multe elemente.

9. Se consideră mulțimile $A=\{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$, $B=\{2, 5, 8, 11, 14, ...\}$ și $C=\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

a. Scrieți fiecare dintre mulțimile A și B cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor.

b. Identificați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii $A \cap C$.

c. Arătați că mulțimile B și C sunt disjuncte.

d. Demonstrați că $A \cap B=\varnothing$.

10. Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea punctelor planului și fixăm două puncte $A, B \in \mathcal{P}$. Determinați mulțimile $\mathcal{M}_1=\{X \in \mathcal{P} \mid XA=XB\}$ și $\mathcal{M}_2=\{X \in \mathcal{P} \mid AX=AB\}$, apoi reprezentați-le geometric.

Autoevaluare

1. Scrieți fiecare dintre mulțimile A, B, C cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor:

a. $A=\{0, 1, 8, 27, 64, 125\}$; b. $B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$; c. $C=\{-30, -25, -20, -15\}$. (3p)

2. Se consideră mulțimile $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 25\}$ și $B=\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq 25\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a. P_1: $A \subset B$; b. P_2: $B \subset A$; c. P_3: $A=B$. (3p)

3. Determinați mulțimea $M=\left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-5}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 2: Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor

Cuvinte-cheie

interval de numere reale	interval deschis	interval închis
interval mărginit	infinit	interval nemărginit
reprezentare geometrică	intersecție	reuniune

Utilitate

Fenomenele sau procesele din viața de zi cu zi se derulează deseori între anumite limite. În vorbirea curentă, spunem că un astfel de eveniment (proces, fenomen) se desfășoară într-un anumit *interval*, definit de condițiile specifice evenimentului respectiv.

În timpul unei etape de raliu, o mașină parcurge o distanță bine delimitată (intervalul dintre start și sosire), într-o perioadă măsurată cu precizie (un interval de timp).

Evenimentele hidrologice desfășurate în amonte determină ca nivelul apei dintr-un râu să se modifice între anumite limite – astfel, nivelul apei variază într-un anumit interval.

Să observăm că toate aceste procese sunt *continue*: mașina de raliu nu poate ajunge de la start la sosire fără să treacă prin toate punctele de pe traseu, după cum nivelul apei nu poate crește de la 8 cm la 12 cm fără să fi ajuns la 9,12 cm, la 10,243 cm sau la orice altă valoare cuprinsă între 8 cm și 12 cm.

Pentru a studia astfel de procese, este nevoie să descriem mulțimile de numere reale care, odată cu orice două valori ale lor, *a* și *b*, conțin toate valorile intermediare cuprinse între *a* și *b*.

2.1. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

Mate practică

Meteorologia este disciplina care se ocupă cu studiul fenomenelor atmosferice și prognoza lor. Majoritatea activităților umane depind de condițiile meteo, iar prognoza fenomenelor atmosferice ne ajută în planificarea acestor activități.

Dimineața, la ora 6^{00}, Rareș observă că termometrul arată –3 °C.

Măsurând temperaturile din oră în oră, Rareș obține valorile:

6^{00}	7^{00}	8^{00}	9^{00}	10^{00}	11^{00}	12^{00}	13^{00}	14^{00}
–3 °C	–2,2 °C	–1 °C	1,5 °C	3 °C	4,2 °C	6 °C	7,4 °C	9 °C

În ce interval orar s-a atins temperatura de 0 °C? Dar cea de 5 °C?

Ce temperaturi s-au înregistrat până la ora 14^{00}?

Pe măsură ce afară se încălzește, temperatura nu poate ajunge de la o valoare mai mică la una mai mare fără să treacă prin valorile intermediare.

Astfel, temperatura de 0 °C s-a atins între ora 8^{00} și ora 9^{00}, iar cea de 5 °C între 11^{00} și 12^{00}.

Temperaturile înregistrate între orele 6^{00} și 14^{00} sunt cuprinse între –3 °C și 9 °C sau, așa cum citește Rareș în aplicația *Vremea* de pe telefonul său mobil, sunt situate în intervalul de la –3 °C la 9 °C.

De reținut

Un interval de numere reale este o mulțime I de numere reale cu proprietatea că, pentru orice două numere reale $a, b \in I$, cu $a < b$, orice număr real cuprins între a și b aparține mulțimii I.

Cu alte cuvinte, o mulțime $I \subset \mathbb{R}$ este interval dacă:

$$\text{pentru orice } a, b \in I,\ a < b, \text{ și orice } x \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } a < x < b, \text{ rezultă } x \in I.$$

Având în vedere corespondența dintre mulțimea numerelor reale și axa numerelor, *intervalele de numere reale se reprezintă geometric* sub formă de segment, semidreaptă sau dreaptă (întreaga axă).

Intervalele se clasifică în:

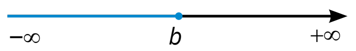
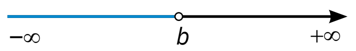
- *intervale mărginite* – a căror reprezentare geometrică este un segment;
- *intervale nemărginite* – a căror reprezentare geometrică este fie o semidreaptă, fie axa numerelor.

În tabelul de mai jos sunt prezentate atât toate tipurile de intervale de numere reale, denumirile, cât și reprezentarea geometrică a acestora pe axa numerelor. Spunem că un segment este *închis* dacă își conține capetele, *deschis* dacă nu le conține, respectiv *semideschis* dacă doar unul dintre capete aparține segmentului. Similar, vom numi o semidreaptă *închisă* dacă aceasta își conține originea, și *deschisă*, în caz contrar. Pentru a reprezenta geometric o extremitate a unui interval care aparține acestuia, se folosește un punct plin sau o paranteză dreaptă, iar pentru capetele care nu aparțin intervalului, se utilizează un punct gol sau o paranteză rotundă. Simbolurile $-\infty$ (*minus infinit*) și $+\infty$ (*plus infinit*) nu sunt numere reale; acestea se utilizează pentru a scrie intervale nemărginite de numere reale.

Intervale mărginite

Reprezentarea geometrică	**Figura geometrică**	**Definiția intervalului**	**Denumirea intervalului**
	segment închis	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	interval închis: $a, b \in [a, b]$
	segment deschis	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	interval deschis: $a, b \notin (a, b)$
	segment semideschis	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	interval deschis la stânga și închis la dreapta: $a \notin (a, b]$, $b \in (a, b]$
	segment semideschis	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	interval închis la stânga și deschis la dreapta: $a \in [a, b)$, $b \notin [a, b)$

Intervale nemărginite

Reprezentarea geometrică	**Figura geometrică**	**Definiția intervalului**	**Denumirea intervalului**
	semidreaptă închisă	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	interval închis la stânga: $a \in [a, +\infty)$
	semidreaptă deschisă	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	interval deschis la stânga: $a \notin (a, +\infty)$
	semidreaptă închisă	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	interval închis la dreapta: $b \in (-\infty, b]$
	semidreaptă deschisă	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	interval deschis la dreapta: $b \notin (-\infty, b)$
	dreaptă	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	mulțimea numerelor reale

Observații

1. Folosind paranteze rotunde/paranteze drepte pentru a marca extremitățile, intervalele $[a, b]$, (c, d), $[m, \infty)$, $(-\infty, n)$ se reprezintă astfel:

2. Notațiile $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $[a, +\infty]$ sau $(a, +\infty]$ nu au sens. Mulțimile notate cu (a, a), $(a, a]$ sau $[a, a)$ nu conțin numere reale: $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$. Mulțimea notată cu $[a, a]$ se reduce la un punct (interval degenerat): $[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le a\} = \{a\}$.
3. Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -3 < x \le 2\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \le 2\}$. Dintre acestea, doar mulțimea A reprezintă un interval de numere reale; mai exact, $A = (-3, 2]$. Mulțimea B conține elementele -1 și 1, dar nu conține elementul 0, care este cuprins între -1 și 1, deci nu este interval. Totuși, mulțimea B se poate scrie ca o reuniune de două intervale distincte: $B = (-3, 0) \cup (0, 2]$. Mulțimea C este intersecția intervalului $(-3, 2]$ cu mulțimea numerelor întregi: $C = (-3, 2] \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Justificați de ce C nu este un interval!

Exemple

1. Considerăm următoarele mulțimi de numere reale, definite prin câte o proprietate a elementelor:

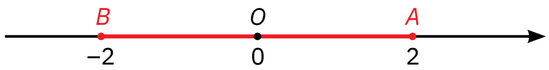
a. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<3\}$; **b.** $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -4{,}5\le x\le 2\}$; **c.** $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, -\frac{1}{2}\le x<\frac{4}{3}\right\}$;

d. $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>\sqrt{2}\}$; **e.** $E=\{x\in\mathbb{R}\mid -4{,}5\le x\}$; **f.** $F=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\sqrt{3}\}$.

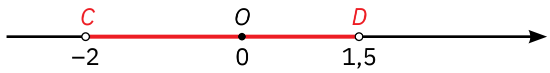
Dintre acestea:

- A, B și C sunt intervale mărginite: $A=(-2,\ 3)$, $B=[-4{,}5;\ 2]$, $C=\left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$;
- D, E și F sunt intervale nemărginite: $D=\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $E=[-4{,}5;\ +\infty)$, $F=\left(-\infty, \sqrt{3}\right]$.

2. O mulțime de numere reale reprezentată pe axa numerelor printr-un segment este un interval mărginit:

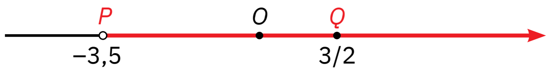


Mulțimea reprezentată prin segmentul închis BA este intervalul închis $[-2,\ 2]$.



Mulțimea reprezentată prin segmentul deschis CD este intervalul deschis $(-2;\ 1{,}5)$.

3. O mulțime de numere reale care se reprezintă pe axa numerelor sub forma unei semidrepte este un interval nemărginit.

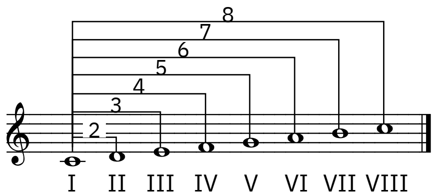


Semidreapta deschisă PQ este reprezentarea pe axă a intervalului $(-3{,}5;\ +\infty)$.

Semidreapta închisă RS este reprezentarea pe axă a intervalului $(-\infty,\ 1]$.

Cultură matematică

În muzică, un interval este raportul dintre înălțimile a două note. Intervalul muzical constituie elementul de construcție fundamental în orice alcătuire melodică sau armonică. Muzica pe care o ascultăm este o înșiruire, interesantă și creativă, de intervale muzicale.



2.2. Intersecția și reuniunea intervalelor

Situație problemă

Lunea, elevii clasei a VIII-a A dintr-o școală au ore în intervalul orar 8-13, iar elevii clasei a VIII-a B au ore de la 9 la 14.

a. În ce interval orar au fost prezente în același timp la cursuri ambele clase?

b. În ce interval orar au fost prezenți la cursuri elevii de clasa a VIII-a?

Ora	a VIII-a A	a VIII-a B
8:00	Istorie	
9:00	Franceză	Engleză
10:00	Matematică	Română
11:00	Fizică	Matematică
12:00	Desen	Muzică
13:00		Geografie
14:00		

Asociem perioadelor de timp petrecute la școală de cele două clase intervalele $[8,\ 13]$, respectiv $[9,\ 14]$.

Întrucât intervalele sunt mulțimi de numere, putem efectua cu acestea operațiile de intersecție, respectiv reuniune.

Cele două clase au fost simultan la cursuri de la ora 9 la ora 13. Așadar, $[8,\ 13]\cap[9,\ 14]=[9,\ 13]$.

Elevii de clasa a VIII-a, fie de la o clasă, fie de la cealaltă, se află în școală între orele 8 și 14. Putem scrie $[8,\ 13]\cup[9,\ 14]=[8,\ 14]$.

De reținut

Se consideră două intervale de numere reale, I și J. Atunci:

- mulțimea $I\cup J=\{x \mid x\in I \text{ sau } x\in J\}$ se numește *reuniunea intervalelor I și J*;
- mulțimea $I\cap J=\{x \mid x\in I \text{ și } x\in J\}$ se numește *intersecția intervalelor I și J*.

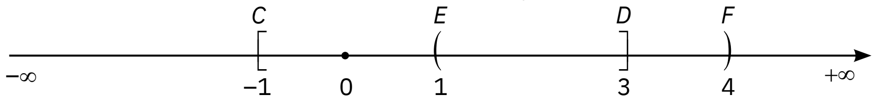
Pentru determinarea intersecției și a reuniunii a două sau mai multe intervale, se poate utiliza reprezentarea lor geometrică pe axa numerelor.

Exemplu

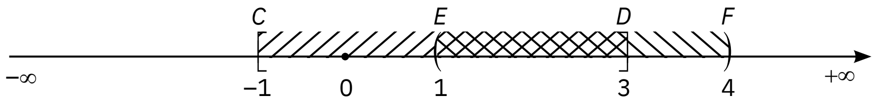
Fie intervalele $I=[-1, 3]$ și $J=(1, 4)$. Pentru a determina mulțimile $I \cap J$ și $I \cup J$, parcurgem pașii:

Pasul 1: Reprezentăm pe axă numerele -1, 3, 1 și 4 (capetele intervalelor I și J) și obținem punctele $C(-1)$, $D(3)$, $E(1)$ și $F(4)$.

Intervalului I îi corespunde, pe axă, segmentul închis CD, iar lui J îi corespunde segmentul deschis EF. Marcăm corespunzător aceste intervale pe axa numerelor, folosind notația cu paranteze:



Pasul 2: Hașurăm segmentul CD într-un anumit sens și segmentul EF în alt sens.



Pasul 3: Intersecția intervalelor I și J este mulțimea punctelor hașurate în ambele sensuri:

$$I \cap J=(1, 3].$$

Reuniunea intervalelor I și J este mulțimea punctelor hașurate cel puțin o dată.

$$I \cup J=[-1, 4).$$

Observații

Intersecția a două intervale poate fi:

un interval	un punct	mulțimea vidă
$(2, 6) \cap (-1, 4)=(2, 4)$	$[0, 2] \cap [2, 5]=\{2\}$	$(-2, 1) \cap (2, 4)=\varnothing$
$[-2, 3] \cap [1, \infty)=[1, 3]$	$(-1, 1] \cap [1, \infty)=\{1\}$	$(-\infty, 2) \cap [2, 4]=\varnothing$

Reuniunea a două intervale poate fi:

un interval	o mulțime care nu este interval
$[0, 2] \cup [2, 5]=[0, 5]$	$(-2, 1) \cup (3, 5)$
$(-\infty, 1) \cup (0, 4)=(-\infty, 4)$	$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
$(-\infty, 5) \cup (-1, \infty)=\mathbb{R}$	$[0, 4] \cup (8, \infty)$

Portofoliu

1. Folosiți reprezentările grafice ale intervalelor pe axa numerelor pentru a efectua operațiile cu intervalele indicate la rubrica Observații, de mai sus, punând în evidență legătura dintre:
   - operațiile de intersecție și de reuniune a intervalelor;
   - intersecția și reuniunea segmentelor sau a semidreptelor.
2. Dați câte două exemple pentru fiecare tip de mulțime care poate fi obținută ca rezultat al intersecției, respectiv reuniunii a două intervale.

2.3. Modulul unui număr real

Activitate pe echipe

Se împarte clasa în două grupe, colegii de bancă fiind în grupe diferite.

Fiecare elev trebuie să scrie pe o foaie de hârtie numere reale cu modulul mai mic sau egal cu 4, respectând următoarele condiții:

Grupa 1:
- **A1** trei numere naturale;
- **B1** trei numere raționale negative;
- **C1** trei numere iraționale pozitive.

Grupa 2:
- **A2** trei numere întregi negative;
- **B2** trei numere raționale pozitive;
- **C2** trei numere iraționale negative.

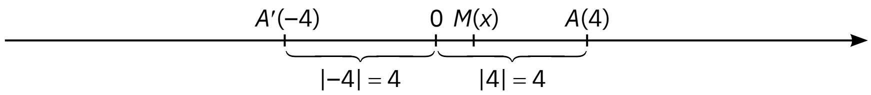
Numerele scrise sunt prezentate la tablă, însoțite de justificările necesare.

Ce observăm?

Există o mulțime finită, alcătuită din numere naturale și întregi negative, care au modulul mai mic sau egal cu 4. În același timp, există o infinitate de numere raționale și iraționale care au modulul mai mic sau egal cu 4. Intuim că numerele reale cu modulul mai mic sau egal cu 4 se află în intervalul $[-4, 4]$.

Într-adevăr, să ne amintim că modulul unui număr real x este egal cu distanța de la originea axei numerelor la punctul de abscisă x.

Un număr real x având modulul mai mic sau egal cu 4 se reprezintă pe axă într-un punct M cu $OM \le 4$.

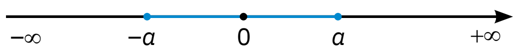


Întrucât $OA = OA' = 4$, condiția $OM \le 4$ este verificată dacă și numai dacă punctul M aparține segmentului AA'. Deducem că numerele reale x cu proprietatea $|x| \le 4$ sunt numerele din intervalul $[-4, 4]$.

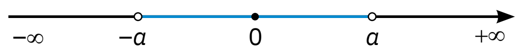
De reținut

Se consideră un număr real a, $a > 0$. Atunci:

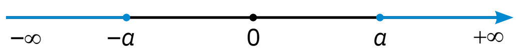
1. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le a\} = [-a, a]$



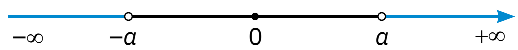
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = (-a, a)$



3. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$



4. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$



Exemple

a. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} = (-3, 3)$;

b. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 6\} = [-6, 6]$;

c. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$;

d. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge \sqrt{7}\} = (-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, +\infty)$;

e. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge -1\} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

f. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Verificați dacă numerele reale -4; $2{,}4$; $\sqrt{3}$; $3{,}(6)$; $\frac{4}{5}$ aparțin intervalului $I = (-3, 3)$.

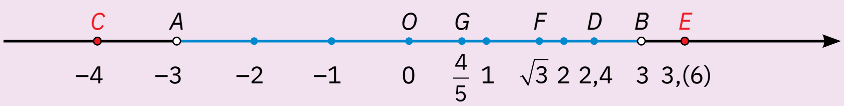
Rezolvarea 1: folosind definiția intervalului

Un număr real x aparține intervalului $(-3, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ dacă verifică relația $-3 < x < 3$. Vom compara numerele date cu -3 și cu 3. Putem organiza datele într-un tabel:

x	-4	$2{,}4$	$\sqrt{3}$	$3{,}(6)$	$\frac{4}{5}$
compararea	$-4 < -3$	$-3 < 2{,}4 < 3$	$-3 < \sqrt{3} < \sqrt{9} = 3$	$3{,}(6) > 3$	$-3 < \frac{4}{5} < \frac{15}{5} = 3$
concluzia	$-4 \notin (-3, 3)$	$2{,}4 \in (-3, 3)$	$\sqrt{3} \in (-3, 3)$	$3{,}(6) \notin (-3, 3)$	$\frac{4}{5} \in (-3, 3)$

Rezolvarea 2: folosind reprezentarea pe axa numerelor

Reprezentăm intervalul $I = (-3, 3)$ pe axa numerelor prin segmentul AB și numerele reale -4; $2{,}4$; $3{,}(6)$; $\sqrt{3}$; $\frac{4}{5}$ prin punctele C, D, E, F, respectiv G.



Se observă că punctele G, F și D aparțin segmentului AB, deci numerele $\frac{4}{5}$, $\sqrt{3}$ și 2,4 aparțin lui I.

Punctele C și E nu aparțin segmentului AB, deci numerele -4 și $3{,}(6)$ nu sunt în intervalul I.

2. Determinați cel mai mic și cel mai mare număr natural din intervalul $\left[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}\right]$.

Rezolvare

Deoarece $3=\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}=4$ și $\sqrt{25}=5<\sqrt{32}=4\sqrt{2}<\sqrt{36}=6$, rezultă că cel mai mic număr natural din intervalul $\left[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}\right]$ este 4, iar cel mai mare număr natural din intervalul $\left[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}\right]$ este 5.

3. Determinați mulțimile:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\le\frac{11}{3}\right\};\qquad B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,|x|\le\frac{11}{3}\right\};\qquad C=\left\{x\in\mathbb{Z}^*\,\middle|\,|x|\le\frac{11}{3}\right\}.$$

Rezolvare

a. Condiția $|x|\le\frac{11}{3}$ este echivalentă cu $-\frac{11}{3}\le x\le\frac{11}{3}$. Cum A conține toate numerele reale cu această proprietate, înseamnă că $A=\left[-\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right]$.

b. Observăm că $B=A\cap\mathbb{N}$. Cum $\frac{11}{3}=3,(6)$, rezultă că $B=\{0, 1, 2, 3\}$.

c. Întrucât $C=A\cap\mathbb{Z}^*$, avem $C=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

4. Dacă x și y sunt numere reale astfel încât $x\in(-4, 2)$, iar $y\in(1, 3)$, demonstrați că $|x+y-1|<4$.

Rezolvare

Avem: $x\in(-4, 2)\Leftrightarrow -4<x<2$, iar $y\in(1, 3)\Leftrightarrow 1<y<3$. Adunând aceste inegalități membru cu membru, obținem că $-3<x+y<5$, deci $-4<x+y-1<4$, altfel spus $|x+y-1|<4$.

5. Determinați numărul întreg a, știind că intersecția intervalelor $I=(-\infty, 2]$ și $J=\left[\frac{7a-1}{5}, \sqrt{5}\right)$ conține un singur număr întreg.

Rezolvare

Unicul număr întreg din $I\cap J$ este, în mod necesar, 2. Impunem, așadar, condiția $1<\frac{7a-1}{5}\le 2$. Cum a este număr întreg, rezultă că $a=1$.

Probleme propuse

1. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a. $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<x<5\}$; **b.** $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\le x<7\}$; **c.** $\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x\le 13\}$; **d.** $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-4\le x\}$;
e. $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1\le x\le 8\}$; **f.** $\{x\in\mathbb{R}\,|\,5<x\}$; **g.** $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<9\}$; **h.** $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 5\}$.

2. Reprezentați pe axa numerelor intervalele:

a. $(-1, 5)$; **b.** $[2, 6]$; **c.** $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$; **d.** $\left[1{,}25; \frac{7}{2}\right)$;
e. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$; **f.** $\left(-\infty, \sqrt{5}\right)$; **g.** $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$; **h.** $\left[2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

3. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

p1: $\sqrt{5}\in[2, 6]$; **p2:** $\frac{\sqrt{5}}{2}\in(-1, 3)$; **p3:** $2,(3)\in[2, 3)$; **p4:** $2,3\in\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$;
p5: $2\sqrt{2}\notin[2, 3]$; **p6:** $\frac{4}{3}\in[1{,}2; 1{,}3]$; **p7:** $\sqrt{5}\in\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right]$; **p8:** $11\in(-11, 11)$;
p9: $-\frac{2}{3}\in[-3, -2]$; **p10:** $1\in\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$; **p11:** $\sqrt{12}-\sqrt{2}\in\left[\sqrt{2}, \infty\right)$; **p12:** $\sqrt{7}+\sqrt{3}\in\left(-\infty, 2\sqrt{5}\right)$.

4. Reprezentați pe axa numerelor:

a. intervalul deschis la stânga în $-\sqrt{2}$ și nemărginit la dreapta;

b. intervalul închis la dreapta în -4 și deschis la stânga în -6;

c. intervalul închis la stânga în 3 și închis la dreapta în 7;

d. intervalul deschis la stânga în 0 și deschis la dreapta în 2.

5. Dați câte un exemplu de:

a. număr natural din intervalul $\left(-3, 3\sqrt{3}\right)$;
b. număr întreg din intervalul $\left[-\sqrt{7}, 2\right]$;
c. număr rațional din intervalul $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;
d. număr irațional din intervalul $[2, 3]$.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a. $\mathbb{Z} \cap (-1, 5) = \varnothing$;
b. $\mathbb{N} \subset (-2, +\infty)$;
c. $\{-3, 3\} \not\subset [-3, 3]$;
d. $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{13}\right) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.

7. Copiați pe caiet tabelul alăturat și asociați fiecărei cifre din coloana **A** o literă din coloana **B**, astfel încât numărul din dreapta cifrei să aparțină intervalului din dreapta literei.

A	B
1. -3	a. $(0, 11)$
2. 4	b. $(-5, -3)$
	c. $(-\infty, -4]$
3. 0	d. $(-4, -1]$
4. -5	e. $[0, 3]$

8. Copiați pe caiet și completați spațiile punctate, pentru a obține propoziții adevărate:

a. $5 \in [\dots, 11]$;
b. $\dots \in (1; 7{,}25)$;
c. $\frac{2}{5} \in (0, \dots)$;
d. $\dots \in (-5, \dots)$;
e. $a^2 \in (-1, \dots)$;
f. $\frac{1}{3} \in (\dots, \dots)$.

9. Se consideră intervalul $I = \left(-\frac{11}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$. Determinați:

a. cel mai mare număr întreg negativ care nu aparține lui I;
b. cel mai mare număr întreg care aparține lui I.

10. Determinați, în fiecare caz, reuniunea și intersecția intervalelor I și J indicate:

a. $I = (-\infty, 2), J = [0, +\infty)$;
b. $I = [-2, 3], J = (0, 5)$;
c. $I = [-1, 2], J = [2, +\infty)$;
d. $I = \left(-\infty, \sqrt{9}\right], J = (3, +\infty)$;
e. $I = (-\infty, 8), J = (4, 6)$;
f. $I = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), J = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{7} - 1\right)$.

11. Determinați numărul real m, pentru care intersecția intervalelor $\left(-\infty, -\frac{m-1}{3}\right]$ și $\left[\frac{2m+1}{5}, \infty\right)$ este o mulțime cu un singur element.

12. Se consideră numerele reale $x = \left|\sqrt{6} - 3\right|$ și $y = \left|\sqrt{2} - 1\right|$. Dați exemple de intervale $I = [a, b]$, unde a și b sunt numere reale cu $b - a = 1$, astfel încât:

a. $x \in I, y \in I$;
b. $x \in I, y \notin I$;
c. $x \notin I, y \in I$;
d. $x \notin I, y \notin I$.

13. Scrieți cu ajutorul intervalelor următoarele mulțimi:

a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 3\}$;
b. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \ge 3\}$;
c. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$;
d. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -x\}$.

14. Demonstrați că $|x + 3| + |1 - x| = 4$, pentru orice număr real $x \in [-3, 1]$.

Autoevaluare

1. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -13 < x \le 15\}$;
b. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 2\}$;
c. $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \le x \le 2\right\}$. (3p)

2. Dacă $A = (-4, 3)$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le x < \frac{15}{4}\right\}$, atunci precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a. $B = \left[-1, \frac{15}{4}\right)$;
b. $A \cap B = (-1, 3)$;
c. $A \cup B = \left(-4, \frac{15}{4}\right]$. (3p)

3. a. Reprezentați pe axa numerelor intervalele $A = \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$, $B = \left[\frac{5}{4}, \sqrt{5}\right)$ și $C = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

b. Determinați mulțimile $A \cap C$, $B \cup C$ și $A \cap B$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

1.3

Lecția 3: Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $>$, $<$), $a, b \in \mathbb{R}$

Cuvinte-cheie

inegalitate | inecuație | coeficienți | necunoscută | soluție | inecuații echivalente

Utilitate

În practică, pentru a caracteriza situațiile descrise de o serie de valori (și nu neapărat de o singură valoare), se folosesc inegalități.

Un autoturism circulă legal pe sectorul de drum pe care este montat un indicator rutier pentru limitare de viteză, precum cel din imagine, dacă viteza sa (notată cu v) verifică relația $v \leq 80$ km/h.

Pentru a fi admisă la o școală de vară, Sonia trebuie să obțină, după patru teste, o medie de cel puțin 90 de puncte din 100 posibile. Cu alte cuvinte, Sonia este admisă dacă media ei de admitere m verifică inegalitatea $m \geq 90$.

Dacă la primele trei teste a obținut 87, 93, respectiv 88 de puncte, condiția pentru ca Sonia să fie admisă se poate exprima printr-o nouă inegalitate: nota n a ultimului test trebuie să satisfacă relația:

$$\frac{87+93+88+n}{4} \geq 90.$$

Pentru soluționarea unei situații practice se impune deseori rezolvarea unei inecuații, adică determinarea valorilor unui termen variabil (o necunoscută), care verifică o relație matematică exprimată printr-o inegalitate.

Mate practică

Pe pârtia de schi, închirierea unui echipament costă 70 de lei, iar un tichet de urcare cu telescaunul până în vârful pârtiei costă 8 lei.

Poate Rareș să închirieze un echipament și să cumpere 20 de tichete de telescaun dintr-un buget de 200 de lei?

Care este numărul maxim de coborâri pe care le poate face Rareș într-o zi petrecută pe pârtie, cu acest buget?

Ce observăm?

Prețul a n urcări cu telescaunul este de $8n$ lei, deci cheltuielile pentru o zi de schi (echipament + urcări) se ridică la $8n + 70$ lei.

Condiția de încadrare în buget se scrie $8n + 70 \leq 200$.

Pentru 20 de urcări, vom verifica dacă $n = 20$ satisface condiția obținută anterior.

Obținem $8 \cdot 20 + 70 \leq 200$, adică $230 \leq 200$, fals, deci Rareș nu poate cumpăra 20 de urcări.

Numărul de coborâri (egal cu numărul de urcări), se găsește observând că relația $8n + 70 \leq 200$ este echivalentă cu $8n \leq 200 - 70$, adică $8n \leq 130$. Deducem că $n \leq \frac{130}{8}$, de unde $n \leq 16{,}25$.

Calculele de mai sus corespund următorului raționament: după închirierea echipamentului, Rareș dispune de 200 lei – 70 lei = 130 lei. Împărțind suma rămasă la 8 lei (prețul unui tichet de telescaun), obținem $130 : 8 = 16{,}25$.

Cum numărul de tichete n este număr natural, Rareș poate face cel mult 16 coborâri.

3.1. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (≤ 0, > 0, < 0), unde $a, b \in \mathbb{R}$

De reținut

O inecuație având una dintre formele:

1. $ax + b \geq 0$ **2.** $ax + b \leq 0$ **3.** $ax + b > 0$ **4.** $ax + b < 0$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește *inecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale a și b se numesc *coeficienții inecuației*, iar x se numește *necunoscuta* sau *variabila inecuației*.

În general, o inegalitate între două expresii algebrice în care apare un termen necunoscut se numește *inecuație cu o necunoscută*.

Un număr real se numește *soluție a unei inecuații* dacă, prin înlocuirea necunoscutei cu acest număr în inecuația dată, se obține o propoziție adevărată.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor inecuației* date și se notează, de regulă, cu S.

Dacă o inecuație în necunoscuta x este urmată de o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea valorilor admisibile ale lui x (sau mulțimea în care ia valori necunoscuta).

Exemple

1. Numărul real 2 este soluție a inecuației $3x - 9 < 0$, deoarece înlocuind x cu 2 se obține propoziția $3 \cdot 2 - 9 < 0$, care este adevărată.
2. Numărul real -2 nu este soluție a inecuației $4x + 5 > 0$, deoarece propoziția $4 \cdot (-2) + 5 > 0$ este falsă.
3. Orice număr natural n verifică inegalitatea $5n + 3 > 0$, deci este soluție a inecuației $5x + 3 > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Inegalitatea $5n + 3 > 0$, valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, justifică și următoarele afirmații:
   - mulțimea soluțiilor inecuației $5n + 3 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, este mulțimea numerelor naturale: $S = \mathbb{N}$;
   - mulțimea soluțiilor inecuației $5n + 3 < 0$, $n \in \mathbb{N}$, este mulțimea vidă: $S = \varnothing$.

Observații

Două inecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime a soluțiilor. De exemplu, inecuațiile care se rezolvă în $\mathbb{R}$:

$$(1)\ \ x - 3 > 0 \qquad \text{și} \qquad (2)\ \ 2x - 6 > 0$$

sunt echivalente, întrucât, dacă un număr real verifică inecuația (1), atunci verifică și inecuația (2) și reciproc. Mulțimea soluțiilor fiecăreia dintre cele două inecuații este $(3, +\infty)$.

Pentru a rezolva o inecuație, adică pentru a afla toate soluțiile sale, vom folosi *proprietățile relației de ordine*, obținând inecuații echivalente cu inecuația dată.

Proprietatea relației de ordine	Cum se aplică proprietatea
1. Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$.	Adunăm același număr în ambii membri ai inecuației.
2. Dacă $a < b$, atunci $a - c < b - c$.	Scădem același număr din ambii membri ai inecuației.
3. Dacă $a + c < b$, atunci $a < b - c$. Dacă $a < b + c$, atunci $a - c < b$.	Trecem un termen dintr-un membru în celălalt, cu semn schimbat.
4. Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci: **a.** $a \cdot c < b \cdot c$; **b.** $a : c < b : c$.	Înmulțim/împărțim ambii membri ai inecuației cu un număr pozitiv, păstrând sensul inegalității.
5. Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci: **a.** $a \cdot c > b \cdot c$; **b.** $a : c > b : c$.	Înmulțim/împărțim ambii membri ai inecuației cu un număr negativ, schimbând sensul inegalității.

Remarcăm faptul că proprietățile indicate la **3** decurg din proprietățile **1** și **2**. Proprietățile din tabel rămân valabile atunci când se înlocuiește semnul $<$ cu semnul $\leq$ și se adaptează corespunzător dacă în loc de $\leq$ se utilizează semnele $\geq$, respectiv $>$.

De reținut

Algoritm pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $ax + b < 0$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Pasul 1: Îl scădem pe b din ambii membri ai inecuației și obținem inecuația echivalentă $ax < -b$.

Pasul 2: Împărțim ambii membri ai inecuației la numărul real a. Avem două cazuri:

a. dacă $a > 0$: $x < -\dfrac{b}{a}$; **b.** dacă $a < 0$: $x > -\dfrac{b}{a}$.

Pasul 3: Scriem inegalitatea obținută sub forma unei relații de apartenență a lui x la un interval:

a. dacă $a > 0$: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$; **b.** dacă $a < 0$: $x \in \left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $ax+b<0$ este intervalul determinat la pasul 3:

a. dacă $a>0$: $S=\left(-\infty,-\dfrac{b}{a}\right)$; **b.** dacă $a<0$: $S=\left(-\dfrac{b}{a},+\infty\right)$.

Inecuațiile de forma $ax+b\le 0$, $ax+b>0$, $ax+b\ge 0$ ($x\in\mathbb{R}$) se rezolvă în mod asemănător.

Exemple

Inecuația	Pasul 1	Pasul 2	Pasul 3	Mulțimea soluțiilor
$4x+16<0$	$4x<-16$	$x<-4$	$x\in(-\infty,-4)$	$S=(-\infty,-4)$
$2x-\sqrt{3}\le 0$	$2x\le\sqrt{3}$	$x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$x\in\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$	$S=\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$
$-6x+\dfrac{5}{7}>0$	$-6x>-\dfrac{5}{7}$	$x<\dfrac{5}{42}$	$x\in\left(-\infty,\dfrac{5}{42}\right)$	$S=\left(-\infty,\dfrac{5}{42}\right)$
$9x-27\ge 0$	$9x\ge 27$	$x\ge 3$	$x\in[3,+\infty)$	$S=[3,+\infty)$

Observații

1. În modelarea matematică a unor situații practice este necesar uneori să studiem inecuații de forma $ax+b<0$, pentru toate valorile lui a dintr-un anumit set de valori.

Dacă printre aceste valori se găsește și 0, pentru $a=0$, inecuația $ax+b<0$ devine $0x+b<0$, iar mulțimea soluțiilor depinde de valoarea de adevăr a propoziției $b<0$.
Dacă $b<0$, orice număr real x verifică relația $0x+b<0$, deci mulțimea soluțiilor este $S=\mathbb{R}$.
Dacă $b=0$ sau $b>0$, niciun număr real nu satisface condiția $0x+b<0$, deci $S=\varnothing$.

2. Pentru a rezolva o inecuație de gradul I într-o submulțime A a mulțimii numerelor reale, putem rezolva mai întâi inecuația în mulțimea $\mathbb{R}$, după care selectăm din mulțimea soluțiilor acele elemente care aparțin lui A (intersectăm intervalul găsit cu A).

Să rezolvăm inecuația $5x-23<0$ în mulțimea numerelor naturale ($x\in\mathbb{N}$). Avem succesiv:

$5x-23<0\Leftrightarrow 5x<23\Leftrightarrow x<\dfrac{23}{5}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{23}{5}\right)$, deci $S=\left(-\infty,\dfrac{23}{5}\right)\cap\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4\}$.

3. Folosind proprietățile relației de ordine, putem rezolva și inecuații *reductibile* la inecuații de gradul I, adică inecuații care pot fi aduse la una dintre formele $ax+b\ge 0$, $ax+b>0$, $ax+b\le 0$ sau $ax+b<0$, ca în exemplele următoare:

a. $7x-11<2x-6\Leftrightarrow 7x-2x-11+6<0\Leftrightarrow 5x<5$, pentru care $S=(-\infty,1)$;

b. $\dfrac{2x-6}{5}\ge\dfrac{x-4}{3}\Leftrightarrow 3(2x-6)\ge 5(x-4)\Leftrightarrow 6x-18\ge 5x-20\Leftrightarrow x+2\ge 0$, cu $S=[-2,\infty)$.

4. O inecuație de forma $\dfrac{a}{bx+c}<0$ (respectiv ≤ 0, >0 sau ≥ 0), unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, cu $a,b\ne 0$, este reductibilă la o inecuație de gradul I. Ținând cont de regula semnelor, avem două cazuri:

a. dacă $a>0$, inecuația $\dfrac{a}{bx+c}<0$ este echivalentă cu $bx+c<0$;

b. dacă $a<0$, inecuația $\dfrac{a}{bx+c}<0$ este echivalentă cu $bx+c>0$.

Exemple

1. Pentru a rezolva inecuația $\dfrac{5}{3x-7}<0$, să observăm mai întâi că numărătorul este pozitiv: $5>0$.

Inecuația se scrie echivalent: $3x-7<0\Leftrightarrow x<\dfrac{7}{3}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right)$, adică $S=\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right)$.

2. Numărătorul fracției din membrul stâng al inecuației $\frac{-202}{2x-18} \le 0$ este negativ: $-202 < 0$.

Ținând cont de faptul că numitorul unei fracții nu poate fi egal cu 0, avem: $\frac{-202}{2x-18} \le 0 \Leftrightarrow 2x-18>0 \Leftrightarrow x>9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (9, +\infty) \Leftrightarrow S = (9, +\infty)$.

3. $\frac{32}{-5x+12} > 0 \overset{32>0}{\Leftrightarrow} -5x+12>0 \Leftrightarrow -5x > -12 \Leftrightarrow x < \frac{12}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{12}{5}\right)$, adică $S = \left(-\infty, \frac{12}{5}\right)$.

3.2. Inecuații de forma $|ax+b| \le c$ sau $|ax+b| < c$

Gândire critică

Fie $c > 0$ un număr real. Din lecția precedentă ne amintim că:
- mulțimea numerelor reale care verifică relația $|x| < c$ este intervalul $(-c, c)$;
- mulțimea numerelor reale care verifică relația $|x| \le c$ este intervalul $[-c, c]$.

Au loc echivalențele:

1. $|x| < c$ dacă și numai dacă $-c < x < c$; **2.** $|x| \le c$ dacă și numai dacă $-c \le x \le c$.

Inecuația $|x| < c$ este un caz particular al inecuației de forma $|ax+b| < c$, pentru $a = 1$ și $b = 0$.

De reținut

Algoritm pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $|ax+b| < c$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$, $c > 0$

Pasul 1: Rescriem inecuația $|ax+b| < c$ sub forma dublei inecuații $-c < ax+b < c$.

Pasul 2: Scădem b din fiecare membru și obținem $-c-b < ax < c-b$.

Pasul 3: Împărțim fiecare membru prin a, ținând cont de proprietățile relației de ordine:

a. dacă $a > 0$: $\frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}$; **b.** dacă $a < 0$: $\frac{-c-b}{a} > x > \frac{c-b}{a}$.

Pasul 4: Scriem inegalitățile obținute sub forma unei relații de apartenență a lui x la un interval:

a. dacă $a > 0$: $x \in \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$; **b.** dacă $a < 0$: $x \in \left(\frac{c-b}{a}, \frac{-c-b}{a}\right)$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $|ax+b| < c$ este intervalul determinat la pasul 4:

a. dacă $a > 0$: $S = \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$; **b.** dacă $a < 0$: $S = \left(\frac{c-b}{a}, \frac{-c-b}{a}\right)$.

Inecuația de forma $|ax+b| \le c$ se rezolvă asemănător, soluțiile fiind aceleași intervale obținute pentru inecuația $|ax+b| < c$, însă închise la capete.

Exemple

Inecuația	Pasul 1	Pasul 2	Pasul 3	Pasul 4	Mulțimea soluțiilor
$\|3x-11\| < 9$	$-9 < 3x-11 < 9$	$2 < 3x < 20$	$\frac{2}{3} < x < \frac{20}{3}$	$x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right)$	$S = \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right)$
$\|2x-17\| \le 5$	$-5 \le 2x-17 \le 5$	$12 \le 2x \le 22$	$\frac{12}{2} \le x \le \frac{22}{2}$	$x \in [6, 11]$	$S = [6, 11]$
$\|-4x+6\| \le 7$	$-7 \le -4x+6 \le 7$	$-13 \le -4x \le 1$	$\frac{-13}{-4} \ge x \ge \frac{1}{-4}$	$x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right]$	$S = \left[-\frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right]$

Observații

1. Dacă $c < 0$, inecuațiile $|ax+b| < c$ și $|ax+b| \le c$ nu au soluții.

De exemplu, inecuația $|3x-11| < -11$ nu are soluții, deoarece $|3x-11| \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $-11 < 0$. Ca urmare, $S = \varnothing$.

2. Dacă $c = 0$, inecuația $|ax + b| < 0$ nu are soluții, deoarece modulul oricărui număr real este mai mare sau egal cu 0. În acest caz, $S = \varnothing$.

Inecuația $|ax + b| \leq 0$ se verifică doar în cazul $|ax + b| = 0$, deci are soluție unică: $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Considerând, de exemplu, inecuația $|7x - 21| \leq 0$ și ținând cont că $|7x - 21| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, obținem $|7x - 21| = 0$, de unde $7x - 21 = 0$, adică $x = 3$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{3\}$.

Investigație

Care este cea mai avantajoasă metodă de a verifica dacă mai multe numere reale sunt soluții ale unei inecuații?

Considerați inecuațiile (1) $2x - 1 < 3$ și (2) $|2x - 1| < 3$.

Lucrați în echipă cu colegul de bancă, împărțindu-vă sarcinile de lucru, timp de 15 de minute, după următorul plan:

1. Verificați, prin înlocuire directă, dacă numerele -11, $-\frac{5}{2}$, -1, 0, 2, $\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}$ și $1-\sqrt{2}$ sunt soluții ale celor două inecuații.
2. Rezolvați inecuațiile (1) și (2) și verificați dacă numerele anterioare fac parte din mulțimea soluțiilor.
3. Comparați rezultatele obținute și corectați erorile apărute, dacă este cazul.
4. Comparați avantajele și dezavantajele celor două metode.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Rezolvați inecuațiile:

a. $3-\frac{4}{3}x > -\frac{5}{2}$; **b.** $\frac{4-x}{5}+\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{10}$; **c.** $1-\frac{x-4}{3} \leq \frac{x}{2}$.

Rezolvare

a. Înmulțind inecuația cu 6, obținem succesiv:

$$18 - 8x > -15 \Leftrightarrow -8x > -15 - 18 \Leftrightarrow -8x > -33 \Leftrightarrow x < \frac{33}{8} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{33}{8}\right).$$

b. $\frac{4-x}{5}+\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{10} \Big| \cdot 10 \Leftrightarrow 2(4-x)+5 \leq x-1 \Leftrightarrow 8-2x+5 \leq x-1 \Leftrightarrow -3x \leq -14 \Leftrightarrow x \geq \frac{14}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{14}{3}, +\infty\right).$

c. $1-\frac{x-4}{3} \leq \frac{x}{2} \Big| \cdot 6 \Leftrightarrow 6-2(x-4) \leq 3x \Leftrightarrow 6-2x+8 \leq 3x \Leftrightarrow -5x \leq -14 \Leftrightarrow x \geq \frac{14}{5} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{14}{5}, +\infty\right).$

2. Scrieți sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 < 2x + 3 < 5\}$.

Rezolvare

$-11 < 2x + 3 < 5 \mid -3 \Leftrightarrow -14 < 2x < 2 \mid : 2 \Leftrightarrow -7 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-7, 1) = A.$

3. Determinați numărul natural nenul cu proprietatea că suma dintre sfertul, treimea și jumătatea sa este un număr rațional mai mic decât 2.

Rezolvare

Notând numărul natural cu n, obținem inecuația $\frac{n}{4}+\frac{n}{3}+\frac{n}{2} < 2$. Înmulțind ambii membri cu 12, rezultă $3n + 4n + 6n < 24$, de unde $n < \frac{24}{13}$. Cum n este natural nenul, deducem că $n = 1$.

4. O bancă oferă pentru depozitele pe un an o dobândă de 10%. Calculați suma minimă (în lei, fără diviziuni ale leului) pe care trebuie să o depună un client, astfel încât peste doi ani să poată retrage 10 000 de lei.

Rezolvare

Notăm cu x suma depusă (în lei). Avem: $\frac{110}{100}\cdot\left(\frac{110}{100}x\right) \geq 10\,000 \Leftrightarrow x \geq 8\,264{,}46.$

Clientul trebuie să depună suma minimă de 8 265 de lei.

5. Rezolvați inecuația $\frac{x-1}{x-3}<1$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$.

Rezolvare

$$\frac{x-1}{x-3}<1 \Big| -1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x-1-(x-3)}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3).$$

Probleme propuse

1. Verificați dacă numărul 3 este soluție a următoarelor inecuații:

   a. $11x-5<0$; b. $\frac{x-5}{3}<0$; c. $4x-5 \geq 0$; d. $-x+\sqrt{10}<0$.

2. Determinați elementele mulțimii $A=\left\{-4, -\frac{5}{4}, 1-\sqrt{3}, \frac{2}{3}, 3, \pi\right\}$, care sunt soluții ale inecuației:

   a. $x-1 \leq 0$; b. $3x \geq 2$.

3. Rezolvați inecuațiile:

   a. $2x-6<4$, $x \in \mathbb{N}$; b. $3x-6>9$, $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

   c. $6+2x<4$, $x \in [-3, \infty)$; d. $4x+8<4$, $x \in \mathbb{Z}$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

   a. $11x-5<0$; b. $\frac{x-5}{3}<0$; c. $4x-5 \geq 0$; d. $-x+\sqrt{10}<0$.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

   a. $3x-1<x+5$; b. $6x-11 \leq 3x+7$; c. $1-2x \leq 4-x$; d. $2x-4\sqrt{2}<0$.

6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

   a. $2(4x-2)<3(3x+1)$; b. $4(3x-1) \leq 2(6x-3)$;

   c. $6(-2+3x) \geq 2(9x-7)$; d. $3x-5>2(x+1)$.

7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

   a. $\frac{x+2}{3}-\frac{2x-1}{2} \leq \frac{x+3}{6}$; b. $\frac{5-3x}{-4}+\frac{5x-1}{-2} \geq x+2$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

   a. $\frac{3}{2x+6} \leq 0$; b. $\frac{-7}{3x-1} \geq 0$; c. $\frac{4}{4-2x}>0$; d. $\frac{2x-1}{x+3}<2$.

9. Precizați care dintre inecuațiile de mai jos este echivalentă cu inecuația $-3x-4<0$:

   a. $3x<4$; b. $3x>-4$; c. $3x-4>0$; d. $6x+8<0$.

10. Scrieți trei inecuații echivalente cu inecuația $\frac{x}{2}-3 \geq 0$.

11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

    a. $|x-5| \leq 2$; b. $|3x+2|<2$; c. $|5-2x| \leq 3$; d. $|x+1|+1<1$.

12. Determinați mulțimile:

    a. $A=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2}<3x-1<5\right\}$; b. $B=\{x \in \mathbb{N} \mid -3<4x-11<9\}$;

    c. $C=\{x \in \mathbb{Z} \mid -12<2x+4<16\}$; d. $D=\{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x-2| \leq 3\}$.

13. a. Determinați cele mai mici trei numere naturale consecutive cu suma cel puțin egală cu 202.

    b. Aflați cele mai mari trei numere naturale impare consecutive cu suma mai mică decât 149.

14. Aflați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $M(5m-2, 1-m)$, din planul raportat la un sistem ortogonal de axe xOy, să fie:

    a. sub axa Ox; b. la dreapta axei Oy.

15. Fie intervalele $I = (-\infty, m+3)$ și $J = [2m-7, \infty)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Aflați valorile lui m pentru care:

a. $I \cap J = \varnothing$; **b.** $I \cap J \neq \varnothing$.

16. George execută serii de câte 30 de aruncări la coșul de baschet. În primele trei serii a înscris de 21, 26, respectiv de 19 ori. Care este numărul minim de coșuri pe care trebuie să le înscrie în a patra serie, pentru a avea o medie de cel puțin 23 de aruncări reușite pe serie?

17. Aflați valorile numărului natural n știind că numerele $4n+2$, 6 și 8 sunt lungimile laturilor unui triunghi.

18. La un concurs de matematică, de tip grilă, sunt 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scade 1 punct. Baremul minim de calificare la etapa următoare este de 70 de puncte. Care este numărul maxim de răspunsuri greșite pe care poate să le dea Matei, astfel încât să se califice mai departe?

19. Un grup de prieteni dorește să închirieze o mașină, pe o perioadă de șase zile, pentru a vizita o stațiune. O companie de închirieri auto oferă două opțiuni: 30 de lei pe zi, plus 4 lei pe kilometru parcurs, respectiv 60 de lei pe zi plus 2,5 lei pe kilometru.

a. Care opțiune este mai avantajoasă, dacă stațiunea se află la 150 km distanță?

b. La ce distanță maximă față de compania de închirieri se poate afla stațiunea, astfel încât prima opțiune să fie mai avantajoasă?
Atenție! Mașina trebuie adusă înapoi!

Autoevaluare

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a. $x - \dfrac{1}{2} > 3$; **b.** $1 - 3x \geq \dfrac{1}{3}$; **c.** $2x - 5 \leq 11$. (3p)

2. Rezolvați inecuația $|3x - 12| \leq 3$, $x \in \mathbb{Z}$. (3p)

3. La un curs de formare profesională, scorul final se calculează după formula $S = \dfrac{3 \cdot m + n}{4}$, unde m este media aritmetică a notelor de la activitățile practice (cu două zecimale exacte), n este nota de la examenul scris, iar rezultatul final se rotunjește. Notele obținute de Maria la activitățile practice sunt: 7, 8, 8, 9 și 10. Care este nota minimă pe care trebuie s-o ia Maria la examenul scris, ca să obțină un scor egal cu 9? (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Proiect. Identifică greșeala

A înțelege modalitatea de rezolvare a unui tip de exerciții nu este întotdeauna sinonim cu rezolvarea corectă a acelor exerciții. În aplicarea directă a unor strategii de rezolvare pot să apară erori. Uneori, învățăm să rezolvăm exerciții și insistăm mai puțin pe verificarea rezultatelor sau pe verificarea efectivă, pas cu pas, a rezolvării.

Realizând acest proiect, veți învăța strategii de evitare a greșelilor ce pot apărea în rezolvarea unor inecuații. Proiectul se va derula pe parcursul mai multor zile și se va realiza de către cinci echipe de elevi.

Activitatea 1. Prezentarea de către profesor a unor tipuri clasice de greșeli de calcul/raționament

Unul dintre subiectele din cadrul unui test de la lecția *Inecuații*, propus unei clase în anii anteriori a fost:

O inecuație echivalentă cu $\frac{x}{5} > 6$ este: **A.** $x < 1$; **B.** $x > 30$; **C.** $x > \frac{6}{5}$; **D.** $x > 1$; **E.** $x < 30$.

Elevii care au ales greșit varianta **A** au efectuat operații **diferite** în cei doi membri ai inecuației: au înmulțit cu 5 membrul stâng, au scăzut 5 din membrul drept și au și schimbat semnul inegalității; elevii care au ales în mod corect varianta **B** au efectuat înmulțirea inegalității cu 5, obținând astfel o inecuație echivalentă; variantele **C** și **D** au fost alese eronat, deoarece s-au efectuat operații diferite în cei doi membri ai inecuației. Cei care au ales varianta **E** au schimbat sensul inegalității echivalente, cu toate că au înmulțit membrii acesteia cu numărul pozitiv 5.

Fiecare grupă va trebui să rezolve cerințele din activitățile următoare:

Activitatea 2. Realizarea unei prezentări despre aplicarea corectă sau incorectă a unor proprietăți ale relației de ordine

Fiecare grupă va avea de realizat și prezentat un material care să facă referire la o proprietate a relației de ordine, însoțită de două exemple de aplicare corectă a acelei proprietăți și două exemple de aplicare incorectă.

Se poate folosi modelul:

„Proprietate: $a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$."

Aplicare corectă: **1.** $\frac{x}{3} < 11 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \cdot 3 < 11 \cdot 3 \Leftrightarrow x < 33$; **2.** $2x < 16 \Leftrightarrow 2x \cdot \frac{1}{2} < 16 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 8$.

Aplicare incorectă: **1.** $\frac{x}{3} < 11 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \cdot 3 > 11 \cdot 3 \Leftrightarrow x > 33$; **2.** $2x < 16 \Leftrightarrow 2x \cdot \frac{1}{2} < 16 \cdot 2 \Leftrightarrow x < 32$.

Activitatea 3. Propunerea unor rezolvări corecte sau incorecte ale unor ecuații

Fiecare grupă va pregăti pentru celelalte patru grupe rezolvările a câte două inecuații. Fiecare inecuație va fi însoțită de câte trei „rezolvări", dintre care doar una corectă. Fiecare grupă va analiza materialele propuse de către colegii din alte grupe, iar profesorul va consemna și valida justificarea alegerii corecte.

Se pot folosi modelele:

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația: $2x - 1 < 4$.

„Rezolvarea 1: inecuația se scrie echivalent: $2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow S = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$."

„Rezolvarea 2: inecuația se scrie echivalent: $2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow S = \left[0, \frac{5}{2}\right)$."

„Rezolvarea 3: $2x - 1 < 4 \Leftrightarrow 2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$; cum x este natural, obținem mulțimea soluțiilor: $S = \{0, 1, 2\}$."

2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația: $1 - 3x < 7$.

„Rezolvarea 1: inecuația se scrie echivalent: $3x < 6 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow S = (-\infty, 2)$."

„Rezolvarea 2: inecuația se scrie echivalent: $-3x < 6 \Leftrightarrow x < -2 \Leftrightarrow S = \varnothing$."

„Rezolvarea 3: $1 - 3x < 7 \Leftrightarrow 3x > -6 \Leftrightarrow x > -2$; mulțimea soluțiilor naturale ale inecuației este: $S = \mathbb{N}$."

Activitatea 4. Realizarea unui minitest

Fiecare grupă va concepe câte un minitest format din patru inecuații, pe care îl va propune spre rezolvare colegilor din celelalte echipe. Elevii vor corecta testele, vor identifica greșelile și le vor utiliza la realizarea materialului de la activitatea 5.

Activitatea 5. Crearea unei baze de date cu greșeli tipice

Fiecare grupă va realiza o „bază de date" cu greșeli tipice întâlnite în rezolvarea inecuațiilor și cu greșeli posibile ce pot apărea din aplicarea incorectă a unor proprietăți sau din efectuarea eronată a unor calcule cu numere reale.

După validarea de către profesor, „baza de date" poate fi publicată online sau în revista școlii.

Recapitulare și evaluare

Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor • Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor • Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $>$, $<$), $a, b \in \mathbb{R}$

Pentru problemele 5 și 6, alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Scrieți mulțimea $A = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$ cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor ei.

2. Reprezentați pe axa numerelor intervalele:
a. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; **b.** $\left(2{,}5; \frac{7}{2}\right)$; **c.** $\left[2, \sqrt{5}\right]$.

3. Determinați:
a. cel mai mare număr natural din intervalul $\left(-\infty, 3\sqrt{3}\right)$;
b. cel mai mic număr natural din intervalul $\left[4\sqrt{2}, +\infty\right)$.

4. Dacă $A = (-3, 4)$ și $B = [-1, 8)$, determinați $A \cup B$ și $A \cap B$.

5. Dintre numerele de mai jos, precizați care este element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| < 2\}$:
a. 2 **b.** -2 **c.** 4 **d.** 0.

6. Dintre numerele de mai jos, precizați care nu este element al mulțimii $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$:
a. 0 **b.** 3 **c.** -2 **d.** 1.

7. Precizați valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a. $(-\infty, 4) \cup [2, +\infty) = [2, 4)$;
b. $\left(-\sqrt{2}, 3\right) \cap (0, 5) = (0, 3)$;
c. $[-3, 11] \cup (12, 14) = \varnothing$;
d. $(0, 7) \cup [1, 9) = (0, 9)$.

8. Completați spațiile punctate, pentru a obține propoziții adevărate:
a. $2{,}5 \in (2, ...)$;
b. $\sqrt{...} \in \left(2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}\right)$;
c. $\frac{1}{...} \in (0{,}2; 0{,}5)$.

9. Determinați numărul elementelor fiecărei mulțimi:
a. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$; **b.** $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 3\}$;
c. $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3 + \sqrt{2}\right\}$; **d.** $D = \left\{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq \sqrt{2}\right\}$.

10. Scrieți:
a. un număr rațional din mulțimea $(3, 4)$;
b. un număr irațional din mulțimea $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$;
c. un număr întreg din mulțimea $\left(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\right)$;
d. un număr natural din mulțimea $\left(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$.

11. Scrieți mulțimile sub formă de interval:
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 11\}$;
b. $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{3}\right\}$;
c. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$;
d. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

12. Scrieți intervalele sub formă de mulțimi, folosind o proprietate comună a elementelor lor:
a. $A = (-2, 3]$; **b.** $B = (1, 5)$;
c. $C = (-\infty, 2]$; **d.** $D = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$.

13. Stabiliți dacă numărul $\frac{13}{2}$ se află în intervalul $\left[\frac{\sqrt{143}}{2}, \frac{\sqrt{197}}{2}\right]$.

14. Demonstrați că numărul $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$ se află în intervalul $\left(3, 2\sqrt{3}\right)$.

15. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a. $\mathbb{N} \subset [-11, +\infty)$; **b.** $(1, 2) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$;
c. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \subset \mathbb{Q}$; **d.** $(4, 5) \cap [4, 5] = \{4, 5\}$.

16. Asociați fiecărei litere din coloana **A** cifra corespunzătoare din coloana **B**, astfel încât numărul din dreapta literei să aparțină intervalului din dreapta cifrei:

A	B
a. 2	**1.** $(-3, 1]$
b. -3	**2.** $[2, 4)$
c. 4	**3.** $[-3, 0)$
d. 1	**4.** $[3, 44)$
	5. $[-2{,}5; 1)$

17. Rezolvați inecuațiile:
a. $6x - 11 > 23$;
b. $4 < 3x + 12$;
c. $\frac{3x}{2} + 1 \geq \frac{2}{3}$.

18. Verificați, în fiecare caz, dacă 3 este soluție a inecuației:
a. $\frac{6 - x}{2} \leq 11$; **b.** $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$; **c.** $3 - \frac{x}{5} \leq 4$.

19. Verificați, în fiecare caz, dacă -3 este soluție a inecuației:
a. $\frac{1}{x - 2} \geq 0$; **b.** $\frac{1}{2 - x} \geq 0$; **c.** $\frac{2\sqrt{3}}{11 - 2x} < 0$.

20. Determinați mulțimile:
a. $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 \leq \frac{2x - 1}{3} < 5\right\}$;
b. $B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{2} < \frac{3x + 4}{5} < 7\right\}$.

21. Rezolvați inecuațiile:

a. $|x-11|<3$;

b. $|3x+4|\le 5$;

c. $|x-3|\le 0$.

22. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a. $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=y+2,\ y\in(-1,2)\}$;

b. $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=2z,\ z\in(-2,3)\}$;

c. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=2-t,\ t\in(-2,3)\}$.

23. Determinați numărul real a în fiecare dintre următoarele situații:

a. inecuația $|3x-a|<4$ are soluția $S=\left(-\dfrac{2}{3},2\right)$;

b. inecuațiile $1-x\le a$ și $2x-1\ge 0$ sunt echivalente;

c. reuniunea soluțiilor inecuațiilor $2x+a\ge 4$ și $3x-10<-4$ este mulțimea numerelor reale.

24. Determinați numărul $x\in[-2;1]$, pentru care $\dfrac{|x|}{|x-1|+|x+2|}=0,(4)$.

25. Dacă $x\in[-1,2]$, demonstrați că

$$a=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$$

este un număr natural.

26. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x-5|<5\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|2x-5|\ge 5\}$.

a. Determinați mulțimea A.

b. Observând că $A\cup B=\mathbb{R}$ și $A\cap B=\varnothing$, determinați mulțimea B.

27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a. $(x^2+1)\cdot|x-1|\le 0$;

b. $|x|\cdot(x-1)\ge 0$;

c. $|2x+4|+|3x+6|<10$.

28. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x\sqrt{2}+\sqrt{12}\ge x\sqrt{3}+\sqrt{8}$.

Testul 1

1. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,4\}$. Determinați elementele mulțimilor:

(1p) **a.** $B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{a+b}{2},\ a,b\in A\right\}$;

(1p) **b.** $C=\{y\,|\,y=\sqrt{ab},\ a,b\in A\}$;

(1p) **c.** $D=\left\{z\,\middle|\,z=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}},\ a,b\in A\right\}$.

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

(1p) **a.** $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1{,}5<x<7\}$;

(1p) **b.** $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1\le x\le 0\}$;

(1p) **c.** $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x+1|<3\}$.

3. Rezolvați inecuațiile:

(1p) **a.** $3x-11<7$;

(1p) **b.** $|3x-11|<7$;

(1p) **c.** $\dfrac{-2}{3x-11}<0$.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Testul 2

1. Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\ldots,47\}$. Determinați elementele mulțimilor:

(1p) **a.** $B=\{x\in A\,|\,x=2k,\ k\in\mathbb{N}\}$;

(1p) **b.** $C=\{y\in A\,|\,y=5k,\ k\in\mathbb{N}\}$;

(1p) **c.** $D=\{z\in A\,|\,z=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\}$.

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

(1p) **a.** $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x\right\}$;

(1p) **b.** $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|\le 2\}$;

(1p) **c.** $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|<5\}$.

3. Rezolvați inecuațiile:

(1p) **a.** $2x+4>2$;

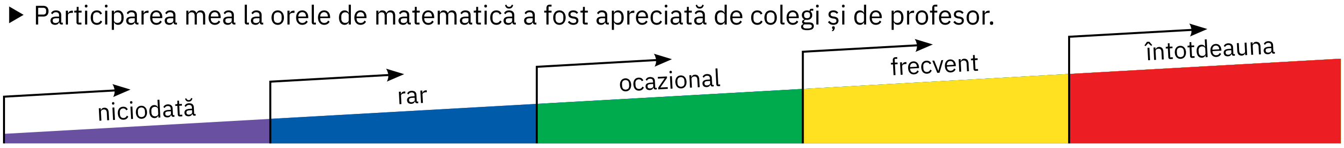
(1p) **b.** $|2x+4|\le 2$;

(1p) **c.** $\dfrac{-2}{2x+4}<0$.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevilor

- Am fost preocupat(ă) să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U2 Calcul algebric în $\mathbb{R}$

Lecția 1	Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere); reducerea termenilor asemenea
Lecția 2	Formule de calcul prescurtat
Lecția 3	Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$
Lecția 4	Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice
Lecția 5	Ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
Proiect	
Recapitulare și evaluare	

Calculul algebric este utilizat într-o gamă largă de domenii, pentru a rezolva probleme matematice, a analiza relații între variabile și a face predicții.
De exemplu, în fizică și inginerie ajută la modelarea și analiza fenomenelor naturale, cum ar fi mișcarea corpurilor, circuitele electrice, forțele și energia. În medicină și biologie, analiza datelor medicale, modelarea creșterii populației și studiul reacțiilor chimice din corp se realizează cu ajutorul calculelor algebrice.

2.1

Lecția 1: Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere); reducerea termenilor asemenea

Cuvinte-cheie

expresie algebrică | coeficient | termeni asemenea | variabilă | parte literală | valoarea unei expresii

Utilitate

În modelarea matematică a situațiilor practice, suntem deseori nevoiți să lucrăm cu numere reale care nu sunt precizate concret, pe care le notăm, de regulă, cu litere.

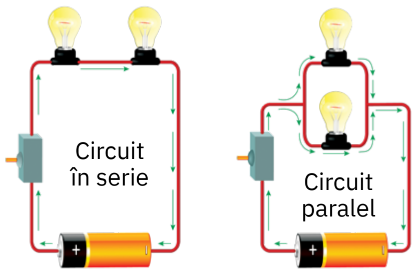
De exemplu, pentru a caracteriza o anumită categorie de obiecte, cum ar fi numerele pare, scriem că acestea au forma $2n$, unde n este număr natural. La fel, pentru a descrie o proprietate general valabilă, cum ar fi comutativitatea adunării numerelor naturale, scriem $a + b = b + a$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$.

Nu în ultimul rând, folosim litere pentru a exprima o formulă de calcul; de exemplu, în chimie, concentrația procentuală $c\%$ a unei soluții se află din formula $c = \frac{m_d}{m_s} \cdot 100$, unde m_d reprezintă masa substanței dizolvate, iar m_s este masa soluției.

Formulele de calcul sunt folosite la determinarea concentrației unei substanțe

În fizică, rezistența electrică este proprietatea conductoarelor (sau a oricărui consumator) de a se opune, mai mult sau mai puțin, trecerii curentului electric. Un exemplu de consumator des întâlnit este becul electric. Becurile electrice pot fi legate în serie sau în paralel. În figura alăturată sunt prezentate modalitățile de legare a două becuri cu rezistențele R_1 și R_2, în serie, respectiv în paralel. Rezistența R a circuitului se calculează folosind următoarele formule:

- pentru legarea în serie: $R = R_1 + R_2$;
- pentru legarea în paralel: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.



Formulele de calcul sunt folosite pentru determinarea rezistenței unui circuit

Pentru determinarea rezistenței circuitului în serie sau în paralel, va trebui să determinăm R din relațiile date. Calculele realizate pentru determinarea lui R poartă numele de *calcul algebric*.

1.1. Expresii algebrice. Termeni asemenea

Mate practică

Terenul din Figura 1 are forma unui dreptunghi de dimensiuni x și y (unități de lungime). Care este perimetrul terenului?

Deoarece perimetrul unui dreptunghi este egal cu suma lungimilor tuturor laturilor sale, iar laturile opuse ale dreptunghiului sunt congruente, Darius calculează perimetrul terenului astfel:

$$P = x + y + x + y.$$

Darius scrie: $P = 2x + 2y$ (unități de lungime).

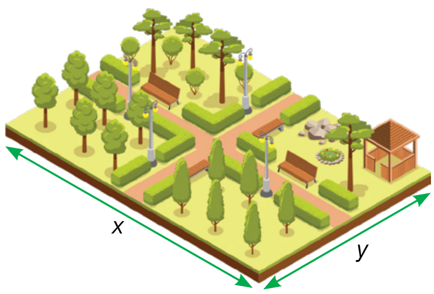


Figura 1

Ce observăm?

Pentru a caracteriza anumite situații matematice în care intervin numere reale a căror valoare nu este (cel puțin într-o primă fază) cunoscută, utilizăm expresii în care numerele reale sunt reprezentate prin litere.

De reținut

O *expresie algebrică* reprezintă o succesiune de numere reale și litere, legate între ele prin operații aritmetice. Literele care apar într-o expresie algebrică semnifică numere reale neprecizate și se numesc *variabile* (sau *nedeterminate*).

Exemple. Scrierile $5x$, $\sqrt{2}xy^2$, $3xy - 4y^2$, $2x^4y - 5yz^2 + 3xz$ sunt expresii algebrice.

Expresiile algebrice se notează, de regulă, cu litere mari, eventual însoțite de variabilele care intră în scrierea expresiei algebrice, scrise între paranteze rotunde.

Exemple. $E = 4x - 1$, $F(x) = 3x^2 + 2x$, $G(x, y) = 2x^2y - 3x^3y^4$ etc.
Notațiile $F(x)$ și $G(x, y)$ se citesc „F de x”, respectiv „G de x și y”.

Observații

1. Cel mai simplu tip de expresie algebrică este un *produs algebric*, efectuat între un număr real și una sau mai multe variabile. Într-un produs algebric distingem:
   - un număr real bine precizat, numit *coeficient*;
   - o *parte literală*, exprimată ca produs de puteri cu exponent natural ale unor numere reale exprimate prin litere (variabilele).

   Exemple. Expresiile $5x$, $5x^2y$, $5x^3y^2z$ sunt produse algebrice care au, fiecare, coeficientul 5 și părțile literale x, x^2y, respectiv x^3y^2z.
2. Când coeficientul unui produs algebric este 1, acesta nu se mai scrie, iar când coeficientul este -1, se scrie doar semnul minus în fața părții literale.

   Exemple. Scriem a^2b în loc de $1 \cdot a^2b$, respectiv $-ab^2$ în loc de $(-1) \cdot ab^2$.
3. Numerele reale se consideră a fi *expresii algebrice* care nu au parte literală (constante).
4. O sumă de mai multe produse algebrice se numește *sumă algebrică*. În acest caz, spunem că fiecare dintre produsele algebrice care se adună este un *termen al sumei algebrice*, iar coeficienții acestor produse se numesc *coeficienții termenilor sumei*. Dacă unul dintre termenii sumei este număr real (expresie algebrică constantă), acesta se numește *termen liber*.

   Exemplu. Expresia $7a^3 - a^2b + 5$ este o sumă algebrică alcătuită din trei termeni:
   - termenul $7a^3$, care are coeficientul 7 și partea literală a^3;
   - termenul $-a^2b$, care are coeficientul -1 și partea literală a^2b;
   - termenul liber 5.
5. Într-o sumă algebrică, doi sau mai mulți termeni care conțin aceleași variabile la aceiași exponenți (au aceeași parte literală), se numesc *termeni asemenea*.

   Exemple
   - în expresia algebrică $-5a^2b + ab + 3a^2b + 2$, termenii $-5a^2b$ și $3a^2b$ sunt asemenea;
   - în expresia algebrică $12a^3c - 6b^2d - 5a^3c + 6b^2d$, termenii asemenea sunt $12a^3c$ și $-5a^3c$, respectiv $-6b^2d$ și $6b^2d$.
6. Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleași operații ca și cu numerele reale. În efectuarea operațiilor cu expresiile algebrice se respectă proprietățile operațiilor cu numere reale.
7. Suma, diferența, produsul sau raportul a două expresii algebrice sunt expresii algebrice, iar prin ridicarea la o putere cu exponent întreg a unei expresii algebrice se obține tot o expresie algebrică.

De reținut

A determina *valoarea unei expresii algebrice* pentru anumite valori numerice pe care le pot lua variabilele înseamnă a înlocui variabilele cu valorile numerice și a efectua calculele. Numărul obținut reprezintă valoarea expresiei algebrice respective, pentru valorile numerice date variabilelor.

Exemple

1. Valoarea expresiei algebrice $x^3 - 3x + 2$ pentru $x = 0$ este egală cu $0^3 - 3 \cdot 0 + 2$, adică este egală cu 2, iar valoarea aceleiași expresii pentru $x = 1$ este egală cu 0, deoarece $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.
2. Valoarea expresiei $E(x, y) = 3x^2y - x - 4y$, unde x și y sunt numere reale, pentru $x = 2$ și $y = 5$ se notează cu $E(2,5)$. Avem $E(2,5) = 3 \cdot 2^2 \cdot 5 - 2 - 4 \cdot 5 = 38$.

1.2. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

De reținut

Adunarea (respectiv *scăderea*) a doi termeni asemenea ai unei sume algebrice este operația prin care se obține un nou termen asemenea cu cei doi, al cărui coeficient este suma (respectiv diferența) coeficienților celor doi termeni considerați.

Adunarea și scăderea termenilor asemenea poartă numele de *reducerea termenilor asemenea*.

Observații

1. Termenii asemenea *se adună* (*se reduc*) pe baza proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor reale în raport cu adunarea/scăderea.

Exemple: **1.** $3x^2 - 2x^2 = (3-2)x^2 = 1x^2 = x^2$;
2. $12x - 9y + 5x - 15x + 7y = (12 + 5 - 15)x + (-9 + 7)y = 2x - 2y$.

2. La eliminarea parantezelor (de exemplu, când se adună/se scad două sume algebrice), se aplică următoarele reguli:
• semnul plus din fața unei paranteze lasă semnele termenilor din paranteză neschimbate:
$$a + (b - c) = a + b - c;$$
• semnul minus din fața unei paranteze transformă termenii din paranteză în termenii opuși (spunem că semnul minus din fața unei paranteze *schimbă semnele* tuturor termenilor din paranteză):
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Exemple: **1.** $(2x^2 - 3x + 4z) - (3x^2 + 4x - z) = 2x^2 - 3x + 4z - 3x^2 - 4x + z = -x^2 - 7x + 5z$;
2. $2 - (-8b^2 + 3a + 2) + (-2b^2 + 5a) = 2 + 8b^2 - 3a - 2 - 2b^2 + 5a = 6b^2 + 2a$.

1.3. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere

De reținut

Înmulțirea a două produse algebrice este operația prin care se obține un nou produs algebric, în care:
• coeficientul este egal cu produsul coeficienților celor doi factori;
• partea literală este formată din fiecare variabilă a celor doi factori, luată o singură dată, ridicată la o putere egală cu suma exponenților acelei variabile din termenii dați.

Exemple

1. $2x \cdot (-7y) = -14xy$; **2.** $(-2abc) \cdot (-4bc) = 8ab^2c^2$; **3.** $(-3xy^2z^3) \cdot (xyz^2) = -3x^2y^3z^5$;

4. $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \left(-2\frac{4}{3}x\right) \cdot \left(3ab^2x\right) = \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \left(-\frac{10}{3}x\right) \cdot \left(3ab^2x\right) = 5a^3b^3x^2$.

Observații

1. Produsul dintre un factor (număr real sau produs algebric) și o sumă algebrică se efectuează folosind proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare, înmulțind factorul respectiv cu fiecare termen al sumei algebrice.

Exemple: **1.** $3(x - 2y + 5z) - 2(3x - 2y + 1) = 3x - 6y + 15z - 6x + 4y - 2 = -3x - 2y + 15z - 2$;
2. $2x(-a + b) - a(3x + b) = -2ax + 2bx - 3ax - ab = -5ax + 2bx - ab$.

2. Produsul a două sume algebrice se efectuează adunând termenii obținuți prin înmulțirea fiecărui termen al primei sume cu fiecare termen al celei de-a doua sume, respectând regula semnelor la fiecare înmulțire, urmată de reducerea termenilor asemenea.

Exemple: **1.** $(x + 2a)(x^2 + a^2) = x(x^2 + a^2) + 2a(x^2 + a^2) = (x \cdot x^2 + x \cdot a^2) + (2a \cdot x^2 + 2a \cdot a^2) = x^3 + xa^2 + 2ax^2 + 2a^3$;
2. $(2x^2 + 3x)(4x^2 - 6x - 3) = (2x^2 \cdot 4x^2 - 2x^2 \cdot 6x - 2x^2 \cdot 3) + (3x \cdot 4x^2 - 3x \cdot 6x - 3x \cdot 3) =$
$= 8x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 12x^3 - 18x^2 - 9x = 8x^4 - 24x^2 - 9x$.

De reținut

Împărțirea a două produse algebrice, dintre care deîmpărțitul conține toate variabilele împărțitorului, la puteri cel puțin egale, este operația prin care se obține un nou produs algebric, în care:
• coeficientul este egal cu câtul coeficienților celor două produse;
• partea literală este formată din fiecare variabilă a celor două produse, luate o singură dată, ridicată la o putere egală cu diferența exponenților acelei variabile din termenii dați.

Când sunt respectate condițiile referitoare la exponenți menționate mai sus, împărțirea unei sume algebrice cu un factor nenul revine la a împărți fiecare termen al sumei la acel factor:
$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Exemple

1. $12x^2y : (-3x^2y) = -4$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$; **2.** $\frac{3}{5}x^4y : \left(-\frac{1}{5}x^2y\right) = -3x^2$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$;

3. $(20x^2 - 5x) : (-5x) = 20x^2 : (-5x) - 5x : (-5x) = -4x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}^*$;
4. $(16x^2y^3 - 8x^3y^2) : (-4xy) = 16x^2y^3 : (-4xy) - 8x^3y^2 : (-4xy) = -4xy^2 + 2x^2y$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$.

1.4. Ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere

De reținut

Ridicarea la o putere a unui produs algebric este operația prin care se obține un nou produs algebric, în care:
- coeficientul este egal cu coeficientul inițial ridicat la acea putere;
- partea literală este formată din aceleași variabile ca ale produsului inițial, fiecare fiind ridicată la o putere egală cu produsul dintre exponentul inițial și puterea la care s-a ridicat termenul.

Exemple

1. $(-3x^2y)^4 = (-3)^4 \cdot (x^2)^4 \cdot y^4 = 81 \cdot x^8 \cdot y^4 = 81x^8y^4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
2. $\left(-\frac{1}{5}x^2y\right)^3 = -\frac{1}{125}x^6y^3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Învățare prin cooperare

Elevii vor fi grupați câte cinci. În cadrul fiecărei grupe, ei vor avea desemnată câte o literă de la A la E.

Activitatea 1 – individual

Fiecare elev va primi o coală de hârtie, pe care este scrisă una dintre literele A, B, C, D sau E. Fiecare elev din grupă va scrie pe foaie un termen asemenea cu termenul $\frac{3}{2}x^2y$, apoi va preciza coeficientul termenului și partea literală.

Activitatea 2 – pe grupe, reunite în baza literelor

La indicația profesorului, elevii se vor regrupa după litera primită. În cadrul grupelor astfel constituite, fiecare elev va prezenta informațiile scrise pe foaia proprie. După discuții, vor fi validate acele informații care au fost confirmate de toți membrii fiecărei grupe. Validarea finală va fi realizată de către profesor.

Fiecare elev va transcrie pe foaia sa toți termenii asemenea validați.

Activitatea 3 – individual

Elevii din fiecare grupă vor efectua operații cu termenii scriși pe foaie, astfel:
- elevii din grupa **A** vor efectua adunări de câte trei termeni;
- elevii din grupa **B** vor efectua scăderi între doi termeni;
- elevii din grupa **C** vor efectua înmulțiri de câte trei termeni;
- elevii din grupa **D** vor efectua împărțiri între doi termeni;
- elevii din grupa **E** vor efectua ridicări la puteri numere naturale nenule, cel mult egale cu 5.

Activitatea 4 – pe grupe reunite

Fiecare grupă va analiza corectitudinea calculelor și va selecta două-trei exemple, care vor fi prezentate de către un reprezentat al grupei. Calculele vor fi validate de către profesor.

Elevii vor realiza, la final, un test de evaluare format din cinci cerințe de lucru, asemănătoare cu cele din activitățile anterioare.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Efectuați: a. $(2a - 5b)^{101} + (5b - 2a)^{101}$; b. $(2a - 6b)^3 + 8(3b - a)^3$.

Rezolvare

a. $(2a - 5b)^{101} + (5b - 2a)^{101} = (2a - 5b)^{101} + [-(2a - 5b)]^{101} = (2a - 5b)^{101} - (2a - 5b)^{101} = 0$;
b. $(2a - 6b)^3 + 8(3b - a)^3 = [2(a - 3b)]^3 + 8[-(a - 3b)]^3 = 8(a - 3b)^3 - 8(a - 3b)^3 = 0$.

2. Demonstrați că:
a. $(3x - 2)(3x + 2) = 9x^2 - 4$; b. $(3x + 2)(3x + 2) = 9x^2 + 12x + 4$.

Rezolvare

a. $(3x - 2)(3x + 2) = 3x \cdot 3x + 3x \cdot 2 - 2 \cdot 3x - 2 \cdot 2 = 9x^2 + 6x - 6x - 4 = 9x^2 - 4$;
b. $(3x + 2)(3x + 2) = 3x \cdot 3x + 3x \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 2 \cdot 2 = 9x^2 + 6x + 6x + 4 = 9x^2 + 12x + 4$.

3. a. Determinați valoarea expresiei $3x^2 + 11x + 32$, pentru $x = 2$ și apoi pentru $x = 0$.
b. Determinați valoarea expresiei $(x - y)(x + y) - (x + y)^2$, pentru $x = 3$ și $y = 2$.

Rezolvare

a. Înlocuim în expresia $3x^2 + 11x + 32$ variabila x cu 2 și obținem $3 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 + 32 = 12 + 22 + 32 = 66$.
Înlocuim în expresia $3x^2 + 11x + 32$ variabila x cu 0 și obținem $3 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 + 32 = 32$.
b. Înlocuim în expresia $(x - y)(x + y) - (x + y)^2$ variabila x cu 3 și variabila y cu 2. Obținem:
$(3 - 2)(3 + 2) - (3 + 2)^2 = 5 - 25 = -20$.

4. Termenii $7x^{\frac{a+2b}{2}}y^{2b}$ și $2\sqrt{3}x^5y^{2b}z^{b^2-1}$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, sunt asemenea. Calculați $a + b$.

Rezolvare

Cei doi termeni sunt asemenea dacă fiecare dintre variabilele x, y și z au exponenții egali în acești termeni.
Ca urmare, $\frac{a+2b}{2} = 5$ și $b^2 - 1 = 0$, de unde rezultă $b = 1$ și $a = 8$, deci $a + b = 9$.

5. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a. $(3x - 4)(4x + 1) - (4x - 3)(3x + 3)$;
b. $\left(x\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(x\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) - (3x - 2)(x + 1)$.

Rezolvare

a. $(3x - 4)(4x + 1) - (4x - 3)(3x + 3) = 12x^2 + 3x - 16x - 4 - (12x^2 + 12x - 9x - 9) =$
$= 12x^2 + 3x - 16x - 4 - 12x^2 - 12x + 9x + 9 = (12x^2 - 12x^2) + (3x - 16x - 12x + 9x) + (9 - 4) = -16x + 5$.
b. $\left(x\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(x\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) - (3x - 2)(x + 1) = 3x^2 + x\sqrt{6} - x\sqrt{6} - 2 - (3x^2 + 3x - 2x - 2) =$
$= 3x^2 + x\sqrt{6} - x\sqrt{6} - 2 - 3x^2 - 3x + 2x + 2 = -x$.

Probleme propuse

1. Copiați în caiet, apoi completați tabelul următor:

Termenul expresiei algebrice	$-6x^2$	$3\sqrt{2}a^4b$	$-x^{27}yz^2$	$-0,(8)x^3y^2z$	$-\frac{9}{4}a^2b^2c^5$
Coeficientul					
Partea literală					

2. Copiați în caiet, apoi completați tabelul următor:

Expresia algebrică	$5x^2 + 6 - 2x^2 + 8$	$\frac{2}{5}ab + ab - 1 + 3b - \frac{ab}{5}$	$17xy - 43x^2y - 12 + 31x^2y - 10xy$
Termeni asemenea			

3. Scrieți trei termeni asemenea cu termenul $-7x^4y^2$.

4. Priviți cu atenție tabelul alăturat și asociați fiecărui termen din coloana **A** termenul corespunzător din coloana **B**, astfel încât termenul din stânga să fie asemenea cu termenul din dreapta.

A	B
1. $\frac{9}{2}xt^2$	a. $7xt^2y^2$
2. $5xy^2t^2$	b. tx^3
3. x^2y^2	c. $11xt^2$
4. $\sqrt{5}x^3t$	d. $-2x^3t^2$
	e. $2\sqrt{2}x^2y^2$

5. Efectuați:
a. $-2x + 3x + 5x$;
b. $\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}x$;
c. $5abc - 7abc + abc$;
d. $7x + 5 - x - 3$;
e. $4x^2 + 4x - 2 + 5x - x^2 + 3$;
f. $3x^2 + 2x - 1 + x - 2x^2 + 4$.

6. Calculați:
a. $(3a - 6b) + (4a + 3b) - (5a - 5b)$;
b. $-(4x - 5y) - 2(-7x + 3y) + (-10x + 4y)$;
c. $x^2 + 3(2x^2 - 3x + 4) - (3x^2 - x - 7)$;
d. $-x^3 + 4 - 2(2x^2 - x + 2) - 2(-x^3 - 2x^2 - 5x)$.

7. Efectuați:
a. $-3x - \{3 - 4x + [x - 2(3x - 1)] - 4x\}$;
b. $9x - \{-7x - 3[2x - 3(2x - 3)] - 4x\} \cdot 2$.

8. Calculați:
a. $4x \cdot (3x + 2)$;
b. $(x - 4) \cdot (x + 4)$;
c. $(x^2y - 5x) \cdot (x^2y - 5x)$;
d. $\left(2x - \sqrt{2}y^2z\right) \cdot \left(2x + \sqrt{2}y^2z\right)$;
e. $(3x - 2)(3x + 8)$;
f. $(x + 2)(x + 2)$.

9. Calculați:

a. $25xy^5 : (-5xy^2)$; **b.** $12a^6b^7c^3 : (4a^2b^2c)$; **c.** $(64x^2a - 16x) : (-4x)$;

d. $(48x^2y^3 + 36x^2y^2) : (-6xy)$; **e.** $2\sqrt{2}x^5y : (\sqrt{5}xy)$; **f.** $27x^3y^2z : (7x^2yz + 2x^2yz)$.

10. Calculați:

a. $(-\sqrt{3}x^4y^3)^2$; **b.** $(-2\sqrt{3}x^2y)^3$; **c.** $(2x^2yz^3)^{101}$; **d.** $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2z^2\right)^3$;

e. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}xy^7z^3\right)^2$; **f.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{15}a^9y^4z\right)^2$; **g.** $(-3\sqrt{2}a^5xy^2z^4)^3$; **h.** $\left(-\frac{2}{3}x^2y^5\right)^2$.

11. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a. $x(3x + 5y) - 2y(3x - 2y) - (3x^2 + 4y^2)$; **b.** $(2x^3 - 6x^2 + 4x) : (2x) + (2x^4 + 3x^3 - 2x^2) : x^2$;

c. $(x^3 - x^2 + x)(x + 1)$; **d.** $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

12. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a. $(2x + 7)(3x + 5) - (6x - 1)(x - 2)$; **b.** $(x^2 - \sqrt{2})(x + 4) - (x - 2)(x^2 + 1)$.

13. Un triunghi isoscel are laturile congruente de lungimi egale cu $13x$ cm și baza de lungime $10x$ cm, unde x este un număr real pozitiv.

a. Exprimați, în funcție de x, perimetrul triunghiului.

b. Arătați că aria triunghiului este egală cu $60x^2$ cm^2.

14. Bazele unui trapez isoscel au lungimile egale cu $x\sqrt{2}$ cm, respectiv $2x\sqrt{2}$ cm, iar laturile neparalele au lungimile egale cu $x\sqrt{2}$ cm, unde $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

a. Arătați că înălțimea trapezului are lungimea egală cu $\frac{x\sqrt{6}}{2}$ cm.

b. Determinați aria trapezului.

15. Determinați:

a. valoarea expresiei $2x^2 - 12x - 6$, pentru $x = \frac{1}{2}$; **b.** valoarea expresiei $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$, pentru $x = -5$;

c. valoarea expresiei $2xy^2 - 7xy - 3x^2y$, pentru $x = 3\sqrt{2}$ și $y = 2\sqrt{2}$.

16. Se consideră expresia $E(x) = 2x^2 - 3x + 2$, unde x este un număr real. Calculați $E(2)$, $E(-2)$ și $E(\sqrt{2})$.

17. Fie x un număr real și numerele $a = x^2 - x - 2$ și $b = x + 1$.

a. Arătați că numărul $2a - b(2b - 6)$ nu depinde de valoarea lui x.

b. Dacă $x = 2\sqrt{2}$, calculați media aritmetică a numerelor a și b.

18. Se consideră expresia $E(x) = (3x - 2)(x + 4) - (x + 2)(x + 1) - 2x(x - 2)$, unde x este un număr real.

a. Arătați că $E(x) = 11x - 10$, oricare ar fi numărul real x.

b. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, inecuația $E(x) > 1$.

19. Se consideră expresia $E(x) = (x - 2)(3x + 1) - (x + 2)(x - 1) + 4x$, unde x este un număr real.

a. Arătați că $E(x) = 2x^2 - 2x$, oricare ar fi numărul real x.

b. Dacă n este un număr întreg, demonstrați că $E(n)$ este un număr întreg divizibil cu 4.

Autoevaluare

1. Calculați:

a. $3x + 1 - x - 7$; **b.** $-x \cdot (2x + 1)$; **c.** $-2a^8b^2c^2 : (a^2b^2c)$; **d.** $(-\sqrt{2}xy^2z^3)^3$. (4p)

2. Calculați $2(a - 2b) - (a - b)(a + b) + (2a + 3b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. (2p)

3. Arătați că $(x - 2y)(x - 3y) + 2(x - 2y)(x + 2y) - (x^2 + y^2) = 2x^2 - 3y^2 - 5xy$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

2.2

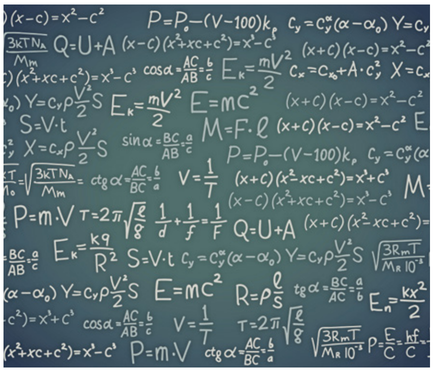
Lecția 2: Formule de calcul prescurtat

Cuvinte-cheie

pătratul sumei | pătratul diferenței | produsul sumei cu diferența | formulă | calcul prescurtat

Utilitate

La originea numerelor stau probleme practice, precum consemnarea proprietăților, a acordurilor financiare, măsurarea distanțelor sau a suprafețelor etc. Odată cu apariția elementelor de bază ale fizicii și astronomiei, oamenii de știință au fost nevoiți să efectueze calcule din ce în ce mai complicate care, deseori, le ocupau cea mai mare parte a timpului, afectându-le activitatea creatoare. Astfel, pentru a economisi timp și energie, erau necesare modalități de a efectua rapid calcule relativ dificile.



Întrucât, dintre operațiile aritmetice, este mai ușor să efectuăm adunări sau scăderi decât înmulțiri (sau împărțiri), un interes deosebit îl prezintă legătura dintre sume sau diferențe, pe de o parte, și produse, pe de altă parte.

2.1. Produsul sumei cu diferența. Diferența pătratelor a două numere reale

Să considerăm trei numere naturale consecutive, de exemplu 3, 4 și 5. Numerele $3+5$ și $4+4$ sunt egale. Numerele $3\cdot 5$ și $4\cdot 4=4^2$ nu sunt egale, dar sunt numere consecutive: $4^2=3\cdot 5+1$.

Același lucru se constată și pentru 9, 10, 11: avem $9+11=10+10$ și $10^2=9\cdot 11+1$.

În cele două exemple, pătratul unui număr se găsește calculând produsul vecinilor săi și adunând apoi 1. Desigur, calculul direct al lui 10^2 nu este așa de complicat, dar pentru a afla cât este 99^2, rezultatul 9 801 se obține mai rapid calculând $98\cdot 100+1$ în loc să folosim algoritmul de înmulțire pentru a efectua produsul lui 99 cu el însuși.

Relația $99^2=(99-1)(99+1)+1$ este un caz particular al unei egalități general valabile, pe care o vom ilustra printr-o problemă practică.

Mate practică

Din terenul din Figura 1, în formă de pătrat de latură a, a fost delimitată o grădină în formă de pătrat de latură b.

Care este aria suprafeței rămase (suprafața hașurată)?

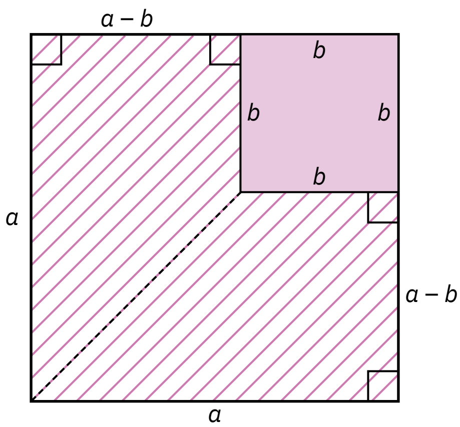


Figura 1

Ce observăm?

Aria suprafeței hașurate se poate calcula în două moduri:

- ca diferență a ariilor celor două pătrate:
$$\mathcal{A}=a^2-b^2;$$
- ca sumă a ariilor a două trapeze dreptunghice congruente, de baze a și b și înălțime $h=a-b$:
$$\mathcal{A}=2\cdot\frac{(a+b)\cdot h}{2}=(a+b)\cdot h=(a+b)(a-b).$$

Deducem că expresiile $(a+b)(a-b)$ și a^2-b^2 sunt egale, pentru orice valori ale numerelor reale pozitive a și b.

De reținut

Pentru orice două numere reale a și b are loc egalitatea:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2.$$

Cu alte cuvinte: *produsul sumei* a două numere reale *cu diferența* lor este egal cu *diferența pătratelor numerelor*.

Verificarea acestei egalități se realizează utilizând proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2=a^2-b^2.$$

Exemple

1. $(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$;

2. $(2x+5)(2x-5)=(2x)^2-5^2=4x^2-25$;

3. $(7+y)(7-y)=7^2-y^2=49-y^2$;

4. $(4-3z)(4+3z)=4^2-(3z)^2=16-9z^2$.

În anumite situații, este necesar să ținem cont de faptul că adunarea numerelor reale este comutativă, dar scăderea numerelor reale nu este comutativă:

5. $(11-7x)(7x+11)=(11-7x)(11+7x)=11^2-(7x)^2=121-49x^2$;

6. $(3x+2y)(2y-3x)=(2y+3x)(2y-3x)=(2y)^2-(3x)^2=4y^2-9x^2$.

Observație

Egalitatea $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ este o *formulă de calcul prescurtat*, deoarece ușurează efectuarea anumitor calcule matematice.

În matematică și în alte științe, o *formulă* este un mod simbolic și concis de a exprima o informație generală care poate fi utilizată în mai multe cazuri particulare. În clasele anterioare, am utilizat formule atât la algebră (formula de calcul a mediei aritmetice, a mediei geometrice etc.), cât și la geometrie (formula de calcul a ariei triunghiului, a lungimii cercului, a ariei discului etc.).

Aplicație

Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$

Introducerea radicalilor a permis dezvoltarea calculului algebric, prin efectuarea unor calcule științifice mai precise și prin rezolvarea unui spectru mai larg de ecuații, ale căror soluții nu sunt numere raționale.

Totuși, uneori este dificil să estimăm valoarea unei expresii care conține radicali. Dacă pentru numerele 1,25 sau $\frac{16}{9}$ ne putem forma rapid o imagine a cantităților pe care le reprezintă, nu același lucru se întâmplă atunci când ne gândim la numere reale precum $\frac{5}{\sqrt{13}}$, $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ sau $\frac{11}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$.

Din clasa a VII-a, ne amintim că pentru a estima, de exemplu, valoarea numărului $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (dificil de făcut aplicând algoritmul de împărțire numerelor 1 și $\sqrt{2}\simeq 1{,}41421356\ldots$), amplificăm fracția cu $\sqrt{2}$ astfel încât numitorul să devină număr rațional (spunem că am raționalizat numitorul):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq\frac{1{,}41421356\ldots}{2}\simeq 0{,}70710678\ldots.$$

De reținut

Două expresii care conțin radicali se numesc *expresii conjugate* dacă produsul lor se poate scrie fără radicali. În acest caz, spunem că fiecare dintre cele două expresii este *conjugata* celeilalte.

Dacă a, b, c, d sunt numere raționale, unde $b, d>0$ și $\sqrt{b}, \sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, atunci:

- expresiile $a+c\sqrt{d}$ și $a-c\sqrt{d}$ sunt conjugate, deoarece:
$$\left(a+c\sqrt{d}\right)\cdot\left(a-c\sqrt{d}\right)=a^2-\left(c\sqrt{d}\right)^2=a^2-c^2d \text{ și } a^2-c^2d\in\mathbb{Q};$$
- expresiile $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ și $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ sunt conjugate, deoarece:
$$\left(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}\right)\cdot\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)=\left(a\sqrt{b}\right)^2-\left(c\sqrt{d}\right)^2=a^2b-c^2d \text{ și } a^2b-c^2d\in\mathbb{Q}.$$

Astfel, *pentru a raționaliza un numitor* de forma $a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}$ sau de forma $a\pm c\sqrt{d}$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{Q}$, $b, d>0$ și $\sqrt{b}, \sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, *se amplifică fracția cu expresia conjugată a numitorului.*

Exemple

1. $\frac{^{\sqrt{7}-\sqrt{3})}4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{4\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$;

2. $\frac{^{3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}11}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}=\frac{11\cdot(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{(3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2}=\frac{11\cdot(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{45-32}=\frac{11\cdot(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{13}$.

3. Valoarea aproximativă a numărului $\dfrac{7}{5\sqrt{2}-6}$ este:

$$\frac{7}{5\sqrt{2}-6}=\frac{7\cdot(5\sqrt{2}+6)}{(5\sqrt{2})^2-6^2}=\frac{7\cdot(5\sqrt{2}+6)}{50-36}=\frac{5\sqrt{2}+6}{2}=3+\frac{5\sqrt{2}}{2}\simeq 3+\frac{5}{2}\cdot 1{,}4142\ldots\simeq 6{,}5355\ldots.$$

2.2. Pătratul sumei. Pătratul diferenței

Situație problemă

În Figura 2, pătratul *ABCD* are latura $AB = a + b$, deci aria sa este:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = (a+b)^2.$$

Ce observăm?

Aria pătratului *ABCD* se poate calcula și astfel:

$$\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{DEMG}+\mathcal{A}_{AFMG}+\mathcal{A}_{CEMH}+\mathcal{A}_{BFMH}=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Am obținut egalitatea:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

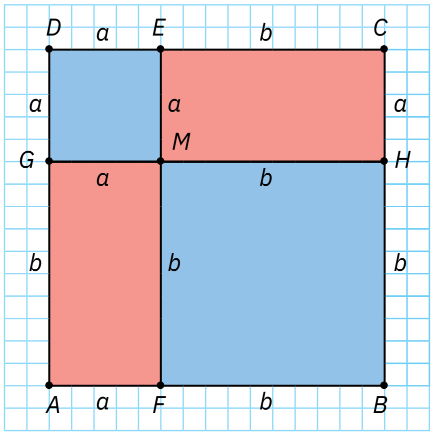


Figura 2

De reținut

Pentru orice două numere reale *a* și *b* au loc egalitățile:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Cu alte cuvinte:

- *pătratul sumei* a două numere reale este egal cu suma pătratelor numerelor, adunată cu dublul produsului celor două numere;
- *pătratul diferenței* a două numere reale este egal cu suma pătratelor numerelor, din care se scade dublul produsului celor două numere.

La fel ca produsul sumei cu diferența, cele două egalități de mai sus fac parte din categoria formulelor de calcul prescurtat. Ele se demonstrează folosind definiția puterilor și proprietățile operațiilor cu numere reale reprezentate prin litere:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Exemple

1. $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$

2. $(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25.$

3. $(x-2)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4.$

4. $(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16.$

5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{3}^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}.$

6. $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 12 + 12\sqrt{6} + 18 = 30 + 12\sqrt{6}.$

2.3. Aplicații ale formulelor de calcul prescurtat

Mate practică

Cel mai scurt drum. În Figura 3 este reprezentată schița a trei trasee turistice, *AB*, *AC* și *BC*, având lungimile $AB = 10$ km, $BC = 21$ km și $AC = 17$ km.

Care este lungimea celui mai scurt drum pe care trebuie să-l parcurgă Vlad pentru a ajunge din *A* într-un punct al traseului *BC*?

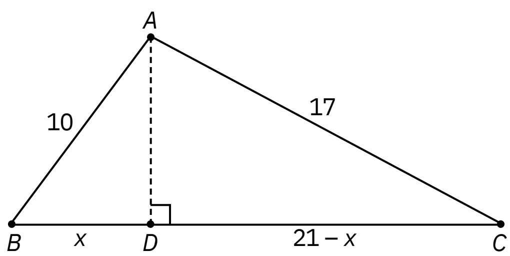


Figura 3

Rezolvare. Drumul cel mai scurt se obține atunci când Vlad se deplasează pe înălțimea *AD* a triunghiului *ABC*. Observăm că *BC* este cea mai lungă dintre laturile triunghiului *ABC*; atunci unghiurile *B* și *C* sunt ascuțite, prin urmare *D* este un punct interior segmentului *BC*. Notând cu *x* lungimea segmentului *BD*, rezultă $DC = 21 - x$.

Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiurile ADB și ADC, obținem $AD^2 = 10^2 - x^2$ și $AD^2 = 17^2 - (21 - x)^2$, deci $10^2 - x^2 = 17^2 - (21 - x)^2$. Utilizând formulele de calcul prescurtat, rezultă

$$100 - x^2 = 289 - 441 + 42x - x^2, \text{ de unde } 42x = 252, \text{ adică } x = 6.$$

Înlocuindu-l pe x în relația $AD^2 = 10^2 - x^2$, obținem $AD = 8$ km.

Calcul mintal

Formulele de calcul prescurtat pot fi utilizate pentru efectuarea mai rapidă a unor calcule aritmetice.

1. Pentru a calcula produsul a două numere, scriem numerele în funcție de media lor aritmetică, după care aplicăm formula produsului sumei cu diferența:

Exemple: a. $12 \cdot 18 = (15 - 3)(15 + 3) = 15^2 - 3^2 = 225 - 9 = 216$;
b. $23 \cdot 19 = (21 + 2)(21 - 2) = 21^2 - 2^2 = 441 - 4 = 437$.

2. Pentru a calcula pătratul unui număr, putem utiliza:

- formulele pentru calculul pătratului sumei/diferenței a două numere reale:

Exemple: a. $43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1\,600 + 240 + 9 = 1\,849$;
b. $79^2 = (80 - 1)^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1^2 = 6\,400 - 160 + 1 = 6\,241$;

- egalitatea $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$, dedusă din formula produsului sumei cu diferența:

Exemple: a. $104^2 = (104 + 4)(104 - 4) + 4^2 = 108 \cdot 100 + 16 = 10\,816$;
b. $97^2 = (97 - 3)(97 + 3) + 3^2 = 94 \cdot 100 + 9 = 9\,409$;
c. $49^2 = (49 - 1)(49 + 1) + 1^2 = 48 \cdot 50 + 1 = 2\,400 + 1 = 2\,401$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Știind că $x + \frac{1}{x} = 3$, $x \in \mathbb{R}^*$, calculați:

a. $x^2 + \frac{1}{x^2}$; b. $x^3 + \frac{1}{x^3}$; c. $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

Rezolvare

a. $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2 = 7$.

b. $\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \cdot 7 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = 21 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

c. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 49 \Leftrightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 49 - 2 = 47$.

2. Calculați $a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$.

Rezolvare

Amplificăm numitorii de forma $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$ cu expresiile conjugate:

$$a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{(\sqrt{6} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} + \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{6 - 5} = \left(2 + \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{5} - 2\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right) = \sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{6}.$$

3. Demonstrați că expresia $E(x) = (3x - 1)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1) + (3x + 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, are valoare constantă, iar aceasta este un număr natural.

Rezolvarea 1

Utilizăm cele trei formule de calcul prescurtat și apoi efectuăm operațiile cu numere reale reprezentate prin litere:

$E(x) = \left[(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2\right] - 2 \cdot \left[(3x)^2 - 1^2\right] + \left[(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2\right] =$

$= (9x^2 - 6x + 1) - 2 \cdot (9x^2 - 1) + (9x^2 + 6x + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - 18x^2 + 2 + 9x^2 + 6x + 1 = 4$.

Așadar, $E(x) = 4 \in \mathbb{N}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea 2

Vom utiliza formula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ pentru $a = 3x - 1$ și $b = 3x + 1$:

$E(x) = (3x - 1)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1) + (3x + 1)^2 = \left[(3x - 1) - (3x + 1)\right]^2 = (-2)^2 = 4 \in \mathbb{N}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Demonstrați că numărul $x=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ este natural.

Rezolvare

Aplicând formulele de calcul prescurtat, obținem:

$x=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-3\cdot(3-2)+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$,

deci $x=5-2\sqrt{6}-3+5+2\sqrt{6}=7$, care este număr natural.

5. a. Calculați $(a+b)^2$, unde $a, b>0$, știind că media aritmetică a numerelor a^2, b^2 și $2ab$ este 75.

b. Calculați a^2-b^2, unde $a>b>0$, știind că media geometrică a numerelor $a+b$ și $a-b$ este egală cu 7.

Rezolvare

a. $m_a=\dfrac{a^2+b^2+2ab}{3}=75 \Rightarrow a^2+b^2+2ab=225 \Rightarrow (a+b)^2=225=15^2$, de unde rezultă că $a+b=15$.

b. $m_g=\sqrt{(a+b)(a-b)}=7 \Rightarrow (a+b)(a-b)=49 \Rightarrow a^2-b^2=49$.

Portofoliu

Copiați tabelul în caiet și completați-l, conform modelului:

Egalitatea	Formula utilizată	a	b
$(x+5)^2=x^2+10x+25$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	x	5
$(3x+4)^2=9x^2+24x+16$			
$(3-5x)^2=9-30x+25x^2$			
$(3-2x)(3+2x)=9-4x^2$			
$(7x+2)(2-7x)=-49x^2+4$			
$(6-5x)^2=25x^2-60x+36$			
$(4x+3)^2=16x^2+9+24x$			
$(-5-3x)(-5+3x)=25-9x^2$			

Justificați alegerea fiecărei formule de calcul prescurtat.

Probleme propuse

1. Efectuați:

a. $(x+2)(x-2)$; $(x-3)(x+3)$; $(2x+1)(2x-1)$; $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$; $\left(2x+\sqrt{5}\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$.

b. $(y-1)^2$; $(y-3)^2$; $(3x-1)^2$; $(5x-2)^2$; $\left(\sqrt{3}-3\right)^2$; $\left(4-\sqrt{3}\right)^2$; $\left(2y-\sqrt{6}\right)^2$; $\left(2\sqrt{2}x-3y\right)^2$.

c. $(x+2)^2$; $(x+3)^2$; $(2x+1)^2$; $(3x+1)^2$; $\left(\sqrt{3}+2\right)^2$; $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$; $\left(2x+\sqrt{5}\right)^2$; $\left(2\sqrt{2}x+3y\right)^2$.

2. Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

p1: $(12+10)^2=12^2+10^2$;

p2: $(9+10)^2=9^2+10^2+180$;

p3: $(20-10)^2=20^2-2\cdot 20\cdot 10+10^2$;

p4: $(13+10)(13-10)=13^2+10^2$;

p5: $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2=30+12\sqrt{6}$;

p6: $\left(2\sqrt{2}+4\right)^2=24+16\sqrt{2}$;

p7: $(15-10)(15-10)=15^2-10^2$;

p8: $(40-10)(40+10)=1500$;

p9: $(x+y)(y+x)=x^2-y^2, \forall x, y\in\mathbb{R}$;

p10: $(3x+2y)^2=9x^2+6xy+4y^2, \forall x, y\in\mathbb{R}$.

3. Copiați în caiet, apoi completați spațiile punctate:

a. $(2t+5p)^2=\ldots\ldots+20pt+\ldots\ldots$;

b. $(3+\ldots\ldots)^2=\ldots\ldots+\ldots\ldots+16x^2$;

c. $(3a-5b)(3a+5b)=9a^2-\ldots\ldots$;

d. $(a+5p)(\ldots\ldots-a)=25p^2-\ldots\ldots$;

e. $(7+5p)(7-5p)=49-\ldots\ldots$;

f. $(5x+\ldots\ldots)^2=\ldots\ldots+20xy+\ldots\ldots$;

g. $\left(3a+b\sqrt{2}\right)^2=9a^2+\ldots\ldots+2b^2$;

h. $(\ldots\ldots-\ldots\ldots)^2=x^2-\ldots\ldots+16y^2$.

4. Efectuați:

a. $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$; b. $\left(\dfrac{2x}{5}+\dfrac{1}{2}\right)^2$; c. $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2$; d. $\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{2}{3}\right)^2$; e. $\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2}{3}\right)$.

5. Efectuați calculele:
   a. $(a-b)^2+(a+b)^2$;
   b. $\left(x-\sqrt{2}\right)^2-\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$;
   c. $(2x-1)(2x+1)-4(x+2)(x-2)$;
   d. $(x^2+3)^2-2(x^2+3)(x^2-3)+(x^2-3)^2$.
6. Efectuați calculele:
   a. $(1+x)^2-(2+x)^2-(3+x)(3+x)$;
   b. $(2x-y)(2x+y)-(x+y)^2-2(x-y)^2$;
   c. $2(3y-2)(3y+2)-2(y-1)^2-4(y-2)^2$;
   d. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$.
7. a. Calculați $(a+b)^2$, știind că media aritmetică a numerelor a^2, b^2 și $2ab$ este egală cu 4.
   b. Calculați $(b-5)^2$, știind că media aritmetică a numerelor b^2 și $-10b$ este egală cu 3.
8. Fie a și b două numere reale astfel încât $a-b=7$ și $ab=2$. Calculați a^2+b^2 și a^4+b^4.
9. Fie x un număr real nenul astfel încât $x-\dfrac{1}{x}=2$. Calculați:
   a. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$;
   b. $x^3-\dfrac{1}{x^3}$;
   c. $x^4+\dfrac{1}{x^4}$.
10. Calculați, utilizând formulele de calcul prescurtat:
   a. 91^2; b. 101^2; c. $28\cdot 32$; d. 99^2; e. $59\cdot 61$; f. 41^2.
11. Calculați:
   a. $\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(3-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}$;
   b. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2-\left(1-\sqrt{6}\right)^2$;
   c. $\left(3\sqrt{7}-8\right)\left(3\sqrt{7}+8\right)+\left(\sqrt{7}-3\right)^2+\left(2\sqrt{7}+1\right)^2+\sqrt{28}$;
   d. $2\left(6-\sqrt{35}\right)\left(6+\sqrt{35}\right)+3\left(\sqrt{7}-2\right)^2-6\left(5-\sqrt{28}\right)$.
12. Raționalizați numitorii următoarelor fracții:
$$\frac{1}{\sqrt{2}+1};\ \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}};\ \frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2};\ \frac{-5}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$
13. Arătați că:
   a. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$;
   b. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}=4+\sqrt{5}-\sqrt{2}$.
14. Se consideră numerele $x=\sqrt{4-\sqrt{7}}$ și $y=\sqrt{4+\sqrt{7}}$. Calculați:
   a. $x\cdot y$; b. $(x-y)^2$.
15. Se consideră expresia $E(x)=(2x-3)^2+(2-3x)(2+3x)+(2x+3)^2$, unde x este un număr real.
   a. Arătați că $E(x)=22-x^2$, oricare ar fi numărul real x.
   b. Stabiliți care este cea mai mare valoare posibilă a lui $E(x)$, precum și valoarea numărului real x pentru care $E(x)$ ia valoarea maximă.
16. Laturile unui triunghi dreptunghic au lungimile egale cu $(a-3)$ cm, $(a+4)$ cm și $(a+5)$ cm, unde a este un număr real, $a>3$. Determinați valoarea numărului a.
17. Dacă latura unui pătrat se reduce cu 5 cm, aria sa se reduce cu 85 cm^2. Determinați perimetrul pătratului inițial.
18. a. Demonstrați că pătratul unui număr natural impar este un număr care, la împărțirea prin 4, dă restul 1.
   b. Dovediți că nu există numere naturale a și b cu proprietatea că $a^2+b^2=1\,003$.

Autoevaluare

1. Calculați:
   a. $(2x+11)^2$; b. $(3x-7)^2$; c. $(4x+9)(4x-9)$. (3p)
2. Rezultatul calculului $3(x+2)^2-(x-2)^2-2(x+2)(x-2)$ este:
   a. $16x+20$; b. $16x+16$; c. $8x+16$; d. $16x+12$. (3p)
3. Calculați:
   a. $\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; b. $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}-2\right)^2$; c. $\left(\sqrt{5}+1\right)^2-\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

2.3

Lecția 3: Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$

Cuvinte-cheie

descompunere | sumă algebrică | factori | factor comun | grupare | formule de calcul prescurtat

Utilitate

Scrierea unui număr natural ca produs de doi sau mai mulți factori reprezintă un instrument important în rezolvarea unor probleme concrete în care intervin numere naturale sau întregi. De exemplu, estimarea raportului numerelor 27 063 și 12 028 pare dificilă la prima vedere, numerele fiind destul de mari. Odată ce observăm că $27\,063 = 9 \cdot 3\,007$ și $12\,028 = 4 \cdot 3\,007$, lucrurile devin destul de simple, întrucât $\frac{27\,063}{12\,028} = \frac{9 \cdot 3\,007}{4 \cdot 3\,007} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

La fel, aproximarea rădăcinii pătrate a numărului 648 se face mai ușor folosind descompunerea în factori și operațiile cu radicali: $\sqrt{648} = \sqrt{4 \cdot 162} = 2\sqrt{2 \cdot 81} = 18\sqrt{2} \simeq 25{,}455\ldots$.

Modelarea matematică a situațiilor practice presupune deseori rezolvarea unor ecuații sau manipularea unor expresii algebrice în care necunoscuta (variabila) apare la puteri cel puțin egale cu 2.

Scrierea unei astfel de expresii algebrice ca produs de expresii mai simple (altfel spus, descompunerea expresiei în factori), joacă un rol important, la fel ca în cazul problemelor cu numere întregi.

3.1. Descompuneri în factori

Mate practică

Pe un teren viran, Răzvan vrea să construiască un spațiu de joacă de formă dreptunghiulară, având lungimea cu 8 metri mai mare decât lățimea. Ce dimensiuni ar putea avea spațiul de joacă, dacă autoritățile îi oferă o suprafață de 84 de metri pătrați?

Figura 1

Notăm cu x lățimea terenului; atunci lungimea este $x + 8$ (Figura 1). Pentru a rezolva problema, trebuie să determinăm toate numerele reale pozitive x care verifică egalitatea $x(x + 8) = 84$.

Deoarece 84 se scrie ca produs de două numere reale într-o infinitate de moduri, de pildă $84 = 2 \cdot 42 = 4 \cdot 21 = 7\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$, suntem descurajați să folosim o abordare „prin încercări”. În plus, chiar dacă observăm că pentru $x = 6$ avem $6 \cdot (6 + 8) = 6 \cdot 14 = 84$, nu avem certitudinea că $x = 6$ este singura soluție.

O proprietate a înmulțirii numerelor reale spune că dacă un produs de doi factori este zero, atunci cel puțin unul dintre factori este egal cu zero. Altfel spus, dacă $F(x) \cdot G(x) = 0$, atunci $F(x) = 0$ sau $G(x) = 0$.

Pentru a exploata această proprietate, aducem relația $x \cdot (x + 8) = 84$ la forma $x^2 + 8x - 84 = 0$ și încercăm să scriem expresia $E(x) = x^2 + 8x - 84$ ca un produs de doi factori.

Observând că x^2 și $8x = 2 \cdot x \cdot 4$ sunt primii doi termeni ai pătratului unei sume, rezultă că:

$$E(x) = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 - 84 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 84 - 4^2 = (x + 4)^2 - 100.$$

Folosind formula diferenței de pătrate, obținem:

$$E(x) = (x + 4)^2 - 10^2 = (x + 4 + 10)(x + 4 - 10) = (x + 14)(x - 6).$$

În consecință, lățimea x a terenului verifică relația $(x + 14)(x - 6) = 0$, de unde rezultă $x + 14 = 0$ sau $x - 6 = 0$, adică $x = -14$ sau $x = 6$. Evident, varianta $x = -14$ este exclusă (lățimea terenului nu poate fi număr negativ), deci dimensiunile terenului de joacă sunt 6 metri și 14 metri.

De reținut

Transformarea unei sume algebrice în produs de doi sau mai mulți factori poartă numele de *descompunere în factori*. Această transformare este utilă în rezolvarea unor tipuri de ecuații, pentru determinarea valorii unei expresii algebrice, pentru restrângerea unei expresii algebrice etc.

Pentru a descompune o sumă algebrică, putem utiliza următoarele metode:

1. metoda factorului comun;
2. metoda formulelor de calcul prescurtat;
3. metoda grupării termenilor.

3.2. Metoda factorului comun

De reținut

Metoda factorului comun se bazează pe proprietatea de distributivitate a operației de înmulțire în raport cu adunarea și scăderea numerelor reale:

$$ax + ay = a(x + y); \qquad ax - ay = a(x - y).$$

În ambele situații, se spune că l-am dat factor comun pe a.

Exemple

1. $6x + 6y = 6(x + y)$;
2. $5xy - 10xz = 5x \cdot y - 5x \cdot 2z = 5x(y - 2z)$;
3. $-9a - 12 = -3 \cdot 3a + (-3) \cdot 4 = -3(3a + 4)$;
4. $4\sqrt{10}x - \sqrt{10} = \sqrt{10}(4x - 1)$;
5. $\frac{2}{3}ab - \frac{4}{9}a = \frac{2}{3}a \cdot b - \frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}a\left(b - \frac{2}{3}\right)$;
6. $26xy - 13xyz = 13xy \cdot 2 - 13xy \cdot z = 13xy(2 - z)$.

Observații

1. În descompunerea unei sume algebrice, factorul comun este produsul dintre:
   - factorul comun al coeficienților termenilor;
   - factorul comun al părții literale, format din produsul variabilelor (literelor) comune, la exponenții cei mai mici.

   De exemplu, în suma algebrică $12x^4y^4 - 8x^5y^2$, coeficienții termenilor sunt 12 și -8, iar un factor comun al lor este 4. Exponenții cei mai mici la care apar variabilele x și y în cei doi termeni sunt 4, respectiv 2, deci:
   $$12x^4y^4 - 8x^5y^2 = 4x^4y^2 \cdot 3y^2 - 4x^4y^2 \cdot 2x = 4x^4y^2(3y^2 - 2x).$$
   Analog, coeficienții termenilor sumei algebrice $24x^5y^4 + 16x^8y^2z$ sunt 24 și 16, al căror cel mai mare divizor comun este 8. Variabilele comune sunt x și y, iar exponenții cei mai mici la care apar x și y sunt 5, respectiv 2, deci:
   $$24x^5y^4 + 16x^8y^2z = 8x^5y^2 \cdot 3y^2 + 8x^5y^2 \cdot 2x^3z = 8x^5y^2(3y^2 + 2x^3z).$$
2. Factorul comun poate fi și o sumă algebrică:
   $$(3y + 1)^5 - 5(3y + 1)^4 = (3y + 1)^4 \cdot (3y + 1) - 5(3y + 1)^4 = (3y + 1)^4(3y + 1 - 5) = (3y + 1)^4(3y - 4).$$
3. În unele situații, factorul comun este -1 (spunem că „am scos minusul în fața parantezei”):
   $$-x - 5 = -1 \cdot x + (-1) \cdot 5 = (-1) \cdot (x + 5) = -(x + 5).$$
4. Factorul comun se poate da și între trei sau mai mulți termeni:
   $$2x^3 + 6x^2y + 8xz = 2x(x^2 + 3xy + 4z).$$

3.3. Metoda formulelor de calcul prescurtat

De reținut

Formulele utilizate pentru descompunerea în factori a unei sume algebrice sunt:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (restrângerea pătratului unei sume);
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ (restrângerea pătratului unei diferențe);
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (formula diferenței de pătrate).

Exemple

1. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$; $9y^2 + 6y + 1 = (3y + 1)^2$; $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x + 3y)^2$;
2. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$; $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$; $36x^2 + 60x + 25 = (6x + 5)^2$;
3. $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$; $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$; $(x + 2)^2 - 49 = (x - 5)(x + 9)$.

Observații

Există situații în care, pentru a descompune o sumă algebrică, se aplică mai multe formule de calcul prescurtat, utilizând eventual și factorul comun:

1. $x^2 + 2x + 1 - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 - y)(x + 1 + y)$;
2. $5x^2 + 10x + 5 - 20y^2 = 5 \cdot (x + 1)^2 - 5 \cdot 4y^2 = 5 \cdot \left[(x + 1)^2 - (2y)^2\right] = 5 \cdot (x + 1 - 2y)(x + 1 + 2y)$;
3. $x^2 + 2x + 1 - y^2 - 2y - 1 = (x + 1)^2 - (y + 1)^2 = \left[x + 1 - (y + 1)\right] \cdot (x + 1 + y + 1) = (x - y)(x + y + 2)$;
4. $25 - 9y^2 - 6y - 1 = 5^2 - (3y + 1)^2 = \left[5 - (3y + 1)\right] \cdot (5 + 3y + 1) = (4 - 3y)(6 + 3y)$.

3.4. Metoda grupării termenilor

De reținut

Gruparea termenilor constă în asocierea convenabilă a termenilor unei sume algebrice, astfel încât, după scoaterea unui factor comun din termenii asociați sau după aplicarea unei formule de calcul prescurtat, să fie pus în evidență un nou factor comun (Figura 2).

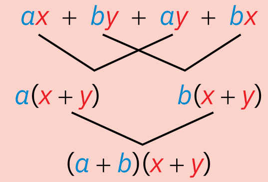


Figura 2

Exemple

1. $am-bn+bm-an=\underbrace{am-an}+\underbrace{bm-bn}=a(m-n)+b(m-n)=(a+b)(m-n)$;

2. $a^2+6bc+3ac+2ab=\underbrace{a^2+2ab}+\underbrace{3ac+6bc}=a(a+2b)+3c(a+2b)=(a+2b)(a+3c)$;

3. $a^3-16a+5a^2-80=\underbrace{a^3+5a^2}-\underbrace{16a-80}=a^2(a+5)-16(a+5)=(a+5)(a^2-16)=(a+5)(a+4)(a-4)$;

4. $a^2c-b^2d-b^2c+a^2d=\underbrace{a^2c+a^2d}-\underbrace{b^2c-b^2d}=a^2(c+d)-b^2(c+d)=(a^2-b^2)(c+d)=(a-b)(a+b)(c+d)$.

Pentru a realiza gruparea termenilor, uneori este necesar să exprimăm unul dintre termeni ca sumă sau diferență de alți termeni (asemenea cu el), sau să asociem termenii câte trei:

5. $x^2+13x+40=\underbrace{x^2+5x}+\underbrace{8x+40}=x(x+5)+8(x+5)=(x+5)(x+8)$;

6. $x^2-5x-14=\underbrace{x^2-7x}+\underbrace{2x-14}=x(x-7)+2(x-7)=(x-7)(x+2)$;

7. $x^2+5x+y^2-5y-2xy=\underbrace{x^2-2xy+y^2}+\underbrace{5x-5y}=(x-y)^2+5(x-y)=(x-y)(x-y+5)$;

8. $x^4+x^2(y+z+t)+yz+yt=\underbrace{x^4+x^2z+x^2t}+\underbrace{x^2y+yz+yt}=x^2(x^2+z+t)+y(x^2+z+t)=(x^2+y)(x^2+z+t)$.

Studiu de caz: Descompunerea în factori a unor expresii de forma $x^2 + (a + b)x + a \cdot b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Situație problemă

Mircea și Iulia trebuie să descompună în factori expresia $E(x) = x^2 + 8x + 12$ prin diverse metode.

Mircea observă că, scriind $8x = 2 \cdot x \cdot 4$, primii doi termeni ai sumei $x^2 + 8x + 12$ coincid cu primii doi termeni ai unei formule de calcul prescurtat de forma $(x + m)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot m + m^2$, pentru $m = 4$. Pentru a completa formula, Mircea scrie $12 = 16 - 4$, apoi obține o diferență de pătrate:

$$x^2 + 8x + 12 = x^2 + 2 \cdot 4x + 16 - 4 = (x + 4)^2 - 2^2 = (x + 4 - 2)(x + 4 + 2) = (x + 2)(x + 6).$$

Iulia sesizează că 8 (coeficientul lui x) și 12 (termenul care nu îl conține pe x sau *termenul liber*) sunt suma, respectiv produsul numerelor 2 și 6. Pentru a descompune expresia prin gruparea unor termeni, Iulia scrie $8x = 2x + 6x$ și obține:

$$x^2 + 8x + 12 = x^2 + 2x + 6x + 2 \cdot 6 = x(x + 2) + 6(x + 2) = (x + 2)(x + 6).$$

Observație

Situația problemă de mai sus studiază, într-un caz particular, descompunerea în factori a unei expresii de forma $x^2 + (a + b)x + a \cdot b$, unde a și b sunt numere reale. Avem două variante de abordare:

- **Metoda 1:** folosind metoda grupării termenilor:

$$x^2 + (a + b)x + a \cdot b = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b);$$

- **Metoda 2:** completând pătratul unei sume și aplicând formulele de calcul prescurtat:

$$x^2+(a+b)x+a\cdot b=x^2+2\cdot x\cdot\frac{a+b}{2}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+ab=\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=$$

$$=\left(x+\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(x+\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=(x+a)(x+b).$$

Exemple

1. Descompunem în factori expresia $x^2 + 6x + 8$, ilustrând cele două metode.

Metoda 1: Identificăm două numere reale, eventual chiar întregi, care au suma egală cu 6 (coeficientul lui x) și produsul egal cu 8 (termenul liber). Întrucât divizorii lui 8 sunt ±1, ±2, ±4 și ±8, iar, dintre acești divizori, numerele 2 și 4 au suma egală cu 6, scriem $6x = 2x + 4x$ și obținem:
$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 2 \cdot 4 = x(x + 2) + 4(x + 2) = (x + 2)(x + 4)$.

Metoda 2: Cum $6x = 2 \cdot x \cdot 3$, completăm pătratul sumei $x + 3$, punând în evidență termenul $3^2 = 9$.
Pentru a realiza acest lucru, scriem $8 = 9 - 1$. Utilizând formulele de calcul prescurtat, obținem:
$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 1 = (x + 3)^2 - 1^2 = (x + 3 - 1)(x + 3 + 1) = (x + 2)(x + 4)$.

2. Descompunem în factori expresia $x^2 - 7x - 30$, prin cele două metode.

Metoda 1: Coeficientul lui x este -7, iar termenul liber este egal cu -30. Două numere întregi cu suma egală cu -7 și produsul egal cu -30 sunt 3 și -10. Scriem $-7x = -10x + 3x$ și obținem:
$x^2 - 7x - 30 = x^2 - 10x + 3x - 30 = x(x - 10) + 3(x - 10) = (x - 10)(x + 3)$.

Metoda 2: Cum $7x = 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2}$, adunăm și scădem $\left(\frac{7}{2}\right)^2$, pentru a completa pătratul unei diferențe:

$$x^2 - 7x - 30 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 30 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(x - \frac{7}{2} - \frac{13}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{13}{2}\right) = (x - 10)(x + 3).$$

Activitate pe echipe

Elevii clasei a VIII-a sunt împărțiți în echipe de câte 6.

Etapa 1. Fiecare echipă primește de la profesor o listă cu trei expresii de forma $x^2 - (n + 1)x + n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $2 \le n \le 15$, diferite pentru fiecare echipă în parte, pe care trebuie să le descompună în factori folosind una dintre cele două metode de mai sus. Echipele schimbă între ele, circular, foile cu descompunerile realizate, iar fiecare echipă verifică rezolvările primite.

Etapa 2. Fiecare echipă scrie, pe o foaie de hârtie, câte trei expresii de forma $x^2 - (m + n)x + m \cdot n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \le m, n \le 10$, $m \ne n$, și le propune spre rezolvare echipei de la care a primit soluții în etapa 1.

La final, se verifică în clasă rezolvările fiecărei echipe. Câștigă echipa care a efectuat cele mai multe descompuneri corecte (din totalul de șase).

Investigație

Se consideră următoarele expresii de forma $ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale, cu $a \ne 0$:

$E_1 = 5x^2 + 17x + 6$; $E_2 = 12x^2 + 11x + 2$; $E_3 = 4x^2 - 4x - 15$.

1. Analizați descompunerile în factori ale expresiilor E_1, E_2 și E_3, prezentate în continuare. Remarcați că, pentru a aplica metoda grupării termenilor, termenul bx a fost rescris sub forma $b_1x + b_2x$, unde b_1 și b_2 sunt două numere reale astfel încât $b = b_1 + b_2$.

(E_1) $5x^2 + 17x + 6 = 5x^2 + 15x + 2x + 6 = 5x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(5x + 2)$

(E_2) $12x^2 + 11x + 2 = 12x^2 + 3x + 8x + 2 = 3x(4x + 1) + 2 \cdot (4x + 1) = (4x + 1)(3x + 2)$

(E_3) $4x^2 - 4x - 15 = 4x^2 + 6x - 10x - 15 = 2x(2x + 3) - 5 \cdot (2x + 3) = (2x + 3)(2x - 5)$

2. Identificați, în fiecare dintre cele trei exemple prezentate, numerele reale a, b, c, b_1, b_2.
3. Comparați, pentru fiecare dintre cele trei exemple, produsele $a \cdot c$ și $b_1 \cdot b_2$. Ce observați?
Folosiți următorul tabel pentru a centraliza rezultatele:

Expresia	$ax^2 + bx + c$	a	b	c	b_1	b_2	$a \cdot c$	$b_1 \cdot b_2$
E_1	$5x^2 + 17x + 6$	5	17	6	15	2		
E_2								
E_3								

4. Pentru expresia $E_4 = 6x^2 - 23x + 21$, identificați numerele a, b și c și determinați două numere reale b_1 și b_2 astfel încât $b_1 + b_2 = b$ și $b_1 \cdot b_2 = a \cdot c$. Folosind scrierea $bx = b_1x + b_2x$, pentru numerele b_1 și b_2 astfel determinate, descompuneți expresia E_4 în factori, prin metoda grupării termenilor.
5. Dezbateți în clasă metoda de lucru identificată în cadrul acestei investigații, apoi, lucrând eventual pe grupe, descompuneți în factori expresiile:

$$E_5 = 3x^2 + 10x + 3; \quad E_6 = 2x^2 - x - 6; \quad E_7 = 6x^2 - 23x + 7; \quad E_8 = 5x^2 - 28x - 12.$$

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Descompuneți în factori:
   a. $7(y-4) + y^2 - 4y$; b. $8z - 6 + (4z-3)^2$; c. $x(2x-1) - (2x-1)^2$.

Rezolvare

a. $7(y-4) + y^2 - 4y = 7(y-4) + y(y-4) = (y-4)(7+y)$;
b. $8z - 6 + (4z-3)^2 = 2(4z-3) + (4z-3)(4z-3) = (4z-3)(2+4z-3) = (4z-3)(4z-1)$;
c. $x(2x-1) - (2x-1)^2 = (2x-1)\left[x - (2x-1)\right] = (2x-1)(x-2x+1) = (2x-1)(1-x)$.

2. a. Expresia $(x+2)^2 - 36$ are descompunerea în factori $(x+a)(x+b)$. Determinați suma numerelor a și b.
   b. Determinați suma numerelor reale a, b și c știind că expresia $(x+3)^3 - x - 3$ are descompunerea în factori $(x+a)(x+b)(x+c)$.

Rezolvare

a. $(x+2)^2 - 36 = (x+2)^2 - 6^2 = (x+2-6)(x+2+6) = (x-4)(x+8) = (x+a)(x+b)$. Pentru $x = 4$, obținem $(4+a)\cdot(4+b) = 0$, iar pentru $x = -8$, avem $(-8+a)(-8+b) = 0$. Rezultă $\{a, b\} = \{-4, 8\}$, de unde $a + b = 4$.
b. Observăm că $(x+3)^3 - x - 3 = (x+3)^3 - (x+3) = (x+3)\left[(x+3)^2 - 1\right] = (x+3)(x+3-1)(x+3+1) =$
$= (x+3)(x+2)(x+4)$.
Numerele a, b și c sunt 3, 2 și 4, eventual într-o altă ordine, deci $a + b + c = 9$.

3. Determinați numerele reale x și y știind că $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

Rezolvare

$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = (x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$. Deoarece $(x-2)^2 \geq 0$ și $(y-3)^2 \geq 0$, pentru ca suma să fie 0, trebuie ca $(x-2)^2 = 0$ și $(y-3)^2 = 0$, prin urmare $x = 2$, $y = 3$.

4. Se consideră expresia $E(x) = x^2 + 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.
   a. Arătați că numărul real $E(a)$ este pozitiv, oricare ar fi numărul real a.
   b. Determinați valoarea minimă a expresiei $x^2 + 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a. $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 \geq 1 > 0$, deoarece $(x+2)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x, și $1 > 0$.
b. Deoarece $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$, valoarea minimă este 1, care se obține pentru $(x+2)^2 = 0$, adică $x = -2$.

5. a. Demonstrați că numărul $A = \overline{x3} \cdot \overline{x7} + 4$ este pătrat perfect, oricare ar fi cifra nenulă x.
   b. Demonstrați că $(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n.

Rezolvare

a. $A = \overline{x3} \cdot \overline{x7} + 4 = (10x+3)(10x+7) + 4 = 100x^2 + 100x + 25 = (10x+5)^2$, care este pătrat perfect.
b. Notând $n^2 + 3n = t$, unde t este un număr natural, obținem $(n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1 = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 =$
$= (t+1)^2$, care este pătrat perfect.

Probleme propuse

1. Descompuneți în factori, folosind metoda factorului comun:
   a. $12x^5 + 16x^2$; b. $6x^4 + 8x^3 - 2x^2$; c. $3x^3y + 9x^2y^2 + 6xy^3$;
   d. $20x^4y^7 - 15x^2y^4 + 10x^3y^5$; e. $2\sqrt{2}x(3y-5) - \sqrt{2}z(3y-5)$; f. $(x+3)^2 - 4(x+3)$;
   g. $\left(x - 3\sqrt{5}\right)^2 - \left(x + 2\sqrt{5}\right)\left(x - 3\sqrt{5}\right)$; h. $24(x-1)^3 - 6(x-1)^2$; i. $5(3y+2) + 12y^2 + 8y$.

2. Copiați în caiet și completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:
   a. $5ab + \ldots\ldots + 25ab^2 = 5a \cdot (\ldots\ldots + 3 + \ldots\ldots)$; b. $12ax + 18x + \ldots\ldots = 6x \cdot (\ldots\ldots + \ldots\ldots + b)$;
   c. $2x^3 + 6x^2 + \ldots\ldots = 2x \cdot (\ldots\ldots + \ldots\ldots + 7)$; d. $-16x^5y^2 - \ldots\ldots - \ldots\ldots = -4x^3y \cdot (\ldots\ldots + 6xy + 5)$;

e. $x^2 + \ldots\ldots + 16 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^2$;
f. $4x^2 - \ldots\ldots + \ldots\ldots = (\ldots\ldots - 5y)^2$;
g. $9y^2 - \ldots\ldots = (\ldots\ldots + 4z)(\ldots\ldots - \ldots\ldots)$;
h. $\ldots\ldots - 30xy + \ldots\ldots = (3y - \ldots\ldots)^2$.

3. Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:
p1: $x^2 + 4x + 4 = (x + 4)^2$;
p2: $25 - t^2 = (5 - t)(t + 5)$;
p3: $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$;
p4: $x^2 + \frac{1}{49} = \left(x + \frac{1}{7}\right)^2$;
p5: $x^2 + 36 = (x - 6)(x + 6)$;
p6: $2a^2 + 4ab + 4b^2 = \left(\sqrt{2}a + 2b\right)^2$;
p7: $4xy^2 + 4x^2y + 4xy = 4xy(y + x)$;
p8: $16x^4 - 1 = (4x^2 + 1)(2x - 1)(2x + 1)$.

4. Descompuneți în factori, folosind formula diferenței de pătrate:
a. $x^2 - 100$; b. $4x^2 - 9y^2$; c. $(x + 1)^2 - 49$; d. $25 - 9x^2y^2$; e. $9 - (x - 5)^2$;
f. $7a^2 - 28b^2$; g. $24(x - 1)^3 - 6(x - 1)$; h. $x^2 - y^2 + 5x + 5y$; i. $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - y^2$.

5. Calculați:
a. $a - b$, știind că $a^2 - b^2 = 52$ și $a + b = 4$; b. $a + b$, știind că $a^2 - b^2 = 18$ și $a - b = 2$.

6. Demonstrați că numărul $B = \overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ este divizibil cu 11, pentru orice cifre nenule a și b.

7. Determinați numerele întregi a și b știind că $a^2 - b^2 = 13$.

8. Determinați suma numerelor reale a, b și c știind că $(x + a)(x + b)(x + c)$ este descompunerea în factori a expresiei $(x + 5)^3 - 9x - 45$.

9. Descompuneți în factori, folosind formulele de restrângere a pătratului:
a. $(x - 2)^2 + 8(x - 2) + 16$;
b. $4(3x + 5)^2 - 12(3x + 5) + 9$;
c. $(x + 4)^2 + 2(x + 4)(2x - 1) + (2x - 1)^2$;
d. $(x^2 + 1)^2 - 2(x^4 - 1) + (x^2 - 1)^2$.

10. Arătați că numărul $A = \overline{x1} \cdot \overline{x3} + 1$ este pătrat perfect.

11. Demonstrați că numărul $(n^2 + 4n)(n^2 + 4n + 6) + 9$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

12. Determinați, în fiecare dintre cazuri, numerele reale x și y știind că:
a. $x^2 + 18x + 81 + y^2 - 14y + 49 = 0$;
b. $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 45 = 0$;
c. $(2x - 11)^2 + 4x^2 - 121 = 0$;
d. $(x - 3)^2 + 2(x - 3) = 0$.

13. Determinați valoarea minimă a expresiei $x^2 + 6x + 11$, $x \in \mathbb{R}$.

14. a. Scrieți ca pătrate ale unor sume numerele $3 + 2\sqrt{2}$ și $6 + 4\sqrt{2}$.
b. Demonstrați că numărul $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ este întreg.

15. Descompuneți în factori, grupând convenabil termenii:
a. $3x + 3y - 5bx - 5by$; b. $7x^2 + 14x + 3(x + 2)$; c. $5x^2 + 5xy - 3xy^2 - 3y^3$; d. $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 3x - 3y$.

16. Descompuneți în factori:
a. $x^2 + 9x + 14$; b. $x^2 + 7x + 10$; c. $x^2 - 9x + 18$; d. $x^2 - 2x - 8$; e. $x^2 + 2x - 35$;
f. $x^2 - 4x - 21$; g. $3x^2 - 14x - 5$; h. $4x^2 - 13x + 10$; i. $2x^2 - 11x + 12$; j. $5x^2 - 12x + 7$.

17. Descompuneți în factori:
a. $a^2 + 2a + 1 - b^2$; b. $a^2 - b^2 + 4b - 4$; c. $a^2 + b^2 - 2ab - 4c^2 + 12c - 9$; d. $a^4 + a^2 + 1$.

18. Demonstrați că succesorul produsului a patru numere naturale consecutive este un pătrat perfect.

Autoevaluare

1. Descompuneți în factori:
a. $4x^2 - \frac{25}{64}$; b. $16x^2 + 40xy + 25y^2$; c. $36x^2 - 12x + 1$. (3p)

2. Dacă $(x + 3)^2 - (x + 2)^2 = ax + 5$, atunci valoarea numărului a este egală cu:
a. 5; b. 4; c. 3; d. 2. (3p)

3. Descompuneți în factori expresia $E(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, apoi demonstrați că $E(a) \leq 0$, oricare ar fi numărul real negativ a. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

2.4

Lecția 4: Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice

Cuvinte-cheie

fracție algebrică | numitor | numărător | numitor comun | variabilă | valoarea unei fracții algebrice

Utilitate

Rezolvarea problemelor practice necesită deseori calcule cu expresii algebrice. De exemplu, dacă un autovehicul care se deplasează pe o anumită distanță d cu viteza constantă x și se întoarce pe același traseu cu viteza constantă y, distanța totală a deplasării este $2d$, iar timpul total petrecut pe drum este $t=\frac{d}{x}+\frac{d}{y}=\frac{d(x+y)}{xy}$.

Viteza medie a deplasării, egală cu raportul dintre distanța totală și timpul total, este: $v_m=\frac{2d}{t}=2d:\frac{d(x+y)}{xy}=2d\cdot\frac{xy}{d(x+y)}=\frac{2xy}{x+y}$.

Am obținut un raport între două expresii algebrice, raport pe care îl vom numi *fracție algebrică*. Atribuind valori concrete variabilelor, raportul devine un număr real. Astfel, în exemplul dat, pentru $x=60$ km/h și $y=40$ km/h, obținem viteza medie de $v_m=48$ km/h.

4.1. Fracții algebrice

De reținut

Un raport ai cărui termeni sunt expresii algebrice se numește *fracție algebrică*.

De exemplu, următoarele rapoarte sunt fracții algebrice:

$$\frac{2x+1}{3x-6},\quad \frac{x+1}{x^2+x+1},\quad \frac{(x+1)^2}{x^2+4x+13},\quad \frac{1}{x+3},\quad \frac{x+2y}{x-4y},\quad \frac{3x^2y}{x^2+y^2+1},\quad \frac{y+z}{4x^2t^2+1}.$$

Observație

Considerăm fracția algebrică $F(x)=\frac{2x-1}{x-2}$. Scriind 5 în loc de x (înlocuind x cu 5) în fracția dată, obținem raportul $\frac{2\cdot5-1}{5-2}$, care este număr real. Acest raport se notează $F(5)$ și se numește valoarea fracției $F(x)$ pentru $x=5$. Efectuând calculul, obținem $F(5)=3$. Similar, putem vorbi de valoarea fracției $F(x)$ în $x=3$, care este $F(3)=\frac{2\cdot3-1}{3-2}=5$, sau de valoarea fracției algebrice pentru $x=-1$.

Se observă că pentru $x=2$ numitorul fracției F se anulează, deci $F(2)$ nu are sens.

De reținut

În general, o fracție algebrică este *definită* (are sens) pentru acele valori ale variabilelor care nu anulează numitorul. Astfel, dacă $P(x)$ și $Q(x)$ sunt expresii algebrice de variabilă x, fracția

$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

este definită pentru valorile reale a pentru care $Q(a)\neq0$.

Fiind dat un număr real a pentru care fracția algebrică $F(x)$ este definită, numărul real $F(a)$, obținut prin înlocuirea variabilei x cu a în fracția F, se numește *valoarea fracției algebrice $F(x)$ în punctul a*.

Exemple

1. Fracția algebrică $F(x)=\frac{2x-6}{x-1}$ este definită pentru toate valorile reale x cu proprietatea $x-1\neq0$, adică este definită pentru orice număr real x, $x\neq1$. Se observă că dacă $x=1$, atunci numitorul fracției algebrice F este 0, ceea ce justifică faptul că fracția nu este definită în 1.

2. Numitorul fracției algebrice $F(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ se anulează pentru numerele reale x cu proprietatea $x^2=1$, adică pentru $x \in \{-1, 1\}$. Fracția $F(x)$ este definită (are sens, există) pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

3. Fracția algebrică $F(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ este definită pentru orice x real, deoarece $x^2+2 \geq 2$, deci $x^2+2 \neq 0$, pentru orice x real.

4.2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor algebrice

În clasele anterioare am învățat să amplificăm sau să simplificăm o fracție ordinară pentru a obține fracții echivalente cu fracția dată. Aceste operații se pot extinde și la fracțiile algebrice.

De reținut

Două fracții algebrice $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ și $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ sunt egale dacă și numai dacă $A(x) \cdot D(x) = B(x) \cdot C(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, cu $B(x) \neq 0$ și $D(x) \neq 0$.

A amplifica o fracție algebrică înseamnă a înmulți numitorul și numărătorul fracției cu aceeași expresie algebrică nenulă. Rezultatul amplificării este o fracție egală cu cea inițială:

$$^{E(x))}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)},\ E(x)\neq 0,\ G(x)\neq 0.$$

A simplifica o fracție algebrică înseamnă a împărți atât numitorul, cât și numărătorul fracției la un factor comun al acestor două expresii algebrice. Pentru simplificarea unei fracții algebrice mai întâi *descompunem în factori* numitorul și numărătorul. Rezultatul simplificării este o fracție egală cu cea inițială:

$$\frac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}^{(E(x)}=\frac{F(x)}{G(x)},\ \text{unde } E(x)\neq 0,\ G(x)\neq 0.$$

Exemple

1. Ca să amplificăm cu x^2, $x \neq 0$, fracția $\dfrac{x+2}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, înmulțim numitorul și numărătorul cu x^2 și obținem

$$^{x^2)}\frac{x+2}{x-3}=\frac{x^2\cdot(x+2)}{x^2\cdot(x-3)}=\frac{x^3+2x^2}{x^3-3x^2}.$$

2. Pentru a simplifica fracția $\dfrac{12x^5y^4}{3x^2y^7}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$, observăm că un factor comun al numitorului și numărătorului este $3x^2y^4$; obținem $\dfrac{12x^5y^4}{3x^2y^7}^{(3x^2y^4}=\dfrac{12x^5y^4:(3x^2y^4)}{3x^2y^7:(3x^2y^4)}=\dfrac{4x^3}{y^3}$.

3. Pentru a simplifica fracția $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, procedăm astfel:

- descompunem în factori numărătorul fracției: $x^2+4x+4=(x+2)^2$;
- descompunem în factori numitorul fracției: $x^2-4=(x+2)(x-2)$;
- observăm că factorul comun este $x+2$, deci vom simplifica fracția cu $x+2$, astfel:

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}^{(x+2}=\frac{x+2}{x-2}.$$

Observații

1. Orice fracție algebrică poate fi amplificată cu orice expresie algebrică nenulă.
2. Există fracții algebrice care nu pot fi simplificate cu expresii algebrice neconstante.

De exemplu, numitorul și numărătorul fracției algebrice $\dfrac{x+5}{x+4}$ nu se mai pot descompune în factori, deci fracția nu se poate simplifica.

Numitorul și numărătorul fracției $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}$ se pot descompune în factori, dar fracția nu poate fi simplificată cu o expresie algebrică neconstantă, deoarece descompunerile numărătorului și numitorului nu conțin niciun factor comun: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$.

4.3. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

De reținut

Pentru a efectua adunarea sau scăderea a două fracții algebrice, procedăm astfel:

- dacă fracțiile au același numitor, rezultatul adunării/scăderii este o fracție algebrică al cărei numărător este egal cu suma/diferența numărătorilor celor două fracții și al cărei numitor este numitorul comun al celor două fracții:

$$\frac{E(x)}{G(x)} \pm \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{E(x) \pm F(x)}{G(x)},\ G(x) \neq 0;$$

- dacă fracțiile au numitori diferiți, parcurgem următoarele etape:
  a. descompunem în factori numitorii fracțiilor algebrice;
  b. determinăm numitorul comun al fracțiilor; acesta este produsul factorilor comuni și necomuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mare la care apar în numitorii fracțiilor;
  c. aducem fracțiile la un numitor comun, prin amplificare;
  d. adunăm/scădem fracțiile cu același numitor.

Exemple

1. Pentru a aduna fracțiile $\frac{x^2}{x+2}$ și $\frac{2x}{x+2}$, vom aduna numărătorii, păstrând numitorul comun:

$$\frac{x^2}{x+2} + \frac{2x}{x+2} = \frac{x^2+2x}{x+2} = \frac{x(x+2)}{x+2} = x,\ x \neq -2.$$

2. Pentru a efectua adunarea fracțiilor $\frac{1}{x^2-3x+2}$ și $\frac{1}{x^2-1}$, procedăm astfel:

- descompunem în factori numitorii fracțiilor: $x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$, respectiv $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$;
- determinăm numitorul comun al fracțiilor: $(x - 1)(x - 2)(x + 1)$;
- aducem fracțiile la același numitor și le adunăm:

$$\frac{^{x+1)}1}{x^2-3x+2} + \frac{^{x-2)}1}{x^2-1} = \frac{x+1+x-2}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)(x+1)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}.$$

3. Pentru a efectua scăderea fracțiilor $\frac{1}{x^3+4x^2+4x}$ și $\frac{2}{x^4-4x^2}$, procedăm astfel:

- descompunem în factori numitorii fracțiilor: $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2$, respectiv $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$;
- determinăm numitorul comun al fracțiilor: $x^2(x - 2)(x + 2)^2$;
- aducem fracțiile la același numitor și le scădem, pentru $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 0, 2\}$:

$$\frac{1}{x^3+4x^2+4x} - \frac{2}{x^4-4x^2} = \frac{^{x(x-2))}1}{x(x+2)^2} - \frac{^{x+2)}2}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-2x-(2x+4)}{x^2(x-2)(x+2)^2} = \frac{x^2-4x-4}{x^2(x-2)(x+2)^2}.$$

Observații

1. Orice expresie algebrică poate fi scrisă ca o fracție algebrică cu numitorul un număr real, nenul, prin amplificare.

De exemplu: **a.** $E(x) = x + 4 = \frac{^{2)}x+4}{1} = \frac{2x+8}{2}$; **b.** $E(x) = x + 4 = \frac{^{x)}x+4}{1} = \frac{x^2+4x}{x},\ x \neq 0.$

2. Este indicat ca, după efectuarea adunărilor sau scăderilor, să simplificăm fracția obținută:

$$\frac{x+4}{x+3} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{2x+6}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x+3} = 2,\ x \neq -3.$$

4.4. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a fracțiilor algebrice

De reținut

Produsul a două fracții algebrice este o fracție algebrică în care numărătorul este egal cu produsul numărătorilor celor două fracții date, iar numitorul este egal cu produsul numitorilor celor două fracții date.

$$\frac{E(x)}{F(x)} \cdot \frac{G(x)}{H(x)} = \frac{E(x) \cdot G(x)}{F(x) \cdot H(x)},\ F(x) \neq 0,\ H(x) \neq 0.$$

Se recomandă simplificarea rezultatului (se pot realiza și simplificări intermediare, descompunând în factori expresiile E, F, G sau H).

Exemple

1. $\dfrac{-3x}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{2x}=\dfrac{-3x(x-2)^{(x}}{2x(x+1)}=\dfrac{-3(x-2)}{2(x+1)}=\dfrac{-3x+6}{2x+2}$, $x\neq-1$, $x\neq0$.

2. $\dfrac{x^3y}{2x^7y^9}\cdot\dfrac{xy^2}{3xy}=\dfrac{x^3y\cdot xy^2}{2x^7y^9\cdot 3xy}=\dfrac{x^4y^3{}^{\,(x^4y^3}}{6x^8y^{10}}=\dfrac{1}{6x^4y^7}$, $x\neq0$, $y\neq0$.

3. $\dfrac{x^2-16}{x^2-25}\cdot\dfrac{x-5}{x-4}=\dfrac{(x+4)(x-4)(x-5)^{(x-4}}{(x+5)(x-5)(x-4)}=\dfrac{(x+4)(x-5)^{(x-5}}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{x+4}{x+5}$, $x\neq\pm5$, $x\neq4$.

De reținut

Inversa fracției $\dfrac{G(x)}{H(x)}$, $G(x)\neq0$, $H(x)\neq0$, este fracția algebrică $\dfrac{H(x)}{G(x)}$.

A împărți fracția $\dfrac{E(x)}{F(x)}$ la fracția $\dfrac{G(x)}{H(x)}$ înseamnă a înmulți prima fracție cu inversa celei de-a doua fracții:

$$\frac{E(x)}{F(x)}:\frac{G(x)}{H(x)}=\frac{E(x)}{F(x)}\cdot\frac{H(x)}{G(x)},\text{ unde } F(x)\neq0,\ G(x)\neq0,\ H(x)\neq0.$$

Exemple

1. Pentru a împărți fracția $\dfrac{x^{11}}{y^{15}}$ la fracția $\dfrac{x^5}{y^9}$, $x\neq0$, $y\neq0$, înmulțim fracția $\dfrac{x^{11}}{y^{15}}$ cu inversa fracției $\dfrac{x^5}{y^9}$, adică înmulțim $\dfrac{x^{11}}{y^{15}}$ cu $\dfrac{y^9}{x^5}$ și obținem:

$$\frac{x^{11}}{y^{15}}:\frac{x^5}{y^9}=\frac{x^{11}}{y^{15}}\cdot\frac{y^9}{x^5}=\frac{x^{11}y^9{}^{\,(x^5y^9}}{x^5y^{15}}=\frac{x^6}{y^6}.$$

2. Pentru a împărți fracția $\dfrac{x^2+4x+4}{y^2-9}$ la fracția $\dfrac{x+2}{y-3}$, $x\neq-2$, $y\neq\pm3$, înmulțim fracția $\dfrac{x^2+4x+4}{y^2-9}$ cu inversa fracției $\dfrac{x+2}{y-3}$, adică înmulțim $\dfrac{x^2+4x+4}{y^2-9}$ cu $\dfrac{y-3}{x+2}$ și obținem:

$$\frac{x^2+4x+4}{y^2-9}:\frac{x+2}{y-3}=\frac{x^2+4x+4}{y^2-9}\cdot\frac{y-3}{x+2}=\frac{(x^2+4x+4)(y-3)}{(y^2-9)(x+2)}.$$

Înainte de a efectua înmulțirile, observăm că numărătorii și numitorii se pot descompune și că se mai pot efectua simplificări:

$$\frac{(x^2+4x+4)(y-3)}{(y^2-9)(x+2)}=\frac{(x+2)^2(y-3)^{\,((x+2)(y-3)}}{(y-3)(y+3)(x+2)}=\frac{x+2}{y+3}.$$

De reținut

Pentru *a ridica o fracție algebrică la o putere*, se ridică la acea putere atât numărătorul, cât și numitorul fracției:

$$\left(\frac{E(x)}{F(x)}\right)^n=\frac{(E(x))^n}{(F(x))^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ F(x)\neq0.$$

Dacă $E(x)\neq0$ și $F(x)\neq0$, atunci $\left(\dfrac{E(x)}{F(x)}\right)^0=1$ și $\left(\dfrac{E(x)}{F(x)}\right)^{-n}=\left(\dfrac{F(x)}{E(x)}\right)^n=\dfrac{(F(x))^n}{(E(x))^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Exemple

1. Pentru a ridica la puterea a doua fracția $\dfrac{x-1}{x+4}$, vom ridica la puterea a doua numărătorul și numitorul fracției:

$$\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^2=\frac{(x-1)^2}{(x+4)^2}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+8x+16},\ x\neq-4.$$

2. Pentru a ridica la puterea -3 fracția $\frac{3ab^2}{2x^2y^3}$, vom ridica la puterea a treia inversa acestei fracții:

$$\left(\frac{3ab^2}{2x^2y^3}\right)^{-3}=\left(\frac{2x^2y^3}{3ab^2}\right)^3=\frac{\left(2x^2y^3\right)^3}{\left(3ab^2\right)^3}=\frac{8x^6y^9}{27a^3b^6},\ a,b,x,y\in\mathbb{R}^*.$$

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{x+1}{2}$.

a. Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b. Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Rezolvare

a. Expresia $E(x)$ este corect definită pentru valorile reale ale lui x în care numitorii nu se anulează. Ecuațiile $x^2-1=0$, $x+1=0$ și $1-x=0$ au soluțiile $x\in\{-1,1\}$, $x=-1$, respectiv $x=1$, deci fracția $E(x)$ este definită pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

b. Numitorul primei fracții din paranteză se scrie $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Scriind numitorul celei de-a treia fracții sub forma $-x+1$ și, amplificând corespunzător, obținem:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}+{}^{x-1)}\frac{1}{x+1}+{}^{x+1)}\frac{1}{x-1}=\frac{2+x-1+x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x-1}.$$

Efectuând înmulțirea finală, obținem $E(x)=\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{2(x+1)^{(2}}{2(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

2. Se consideră expresia $F(x)=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{x+1}{x^2-4}\right):\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2,3\}$.

a. Arătați că $F(x)=\frac{1}{x+2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2,3\}$.

b. Calculați media geometrică a numerelor $a=F(7)$ și $b=F\left(\frac{1}{4}\right)$.

Rezolvare

a. Mai întâi, aducem la același numitor și efectuăm calculele dintre parantezele rotunde:

$${}^{x-2)}\frac{1}{x+2}-{}^{x+2)}\frac{1}{x-2}+\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2-(x+2)+x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}.$$

Obținem: $F(x)=\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}:\frac{x^2-9}{x^2+x-6}=\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+2}$.

Am folosit $x^2-9=(x-3)(x+3)$ și $x^2+x-6=x^2-2x+3x-6=x(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x+3)$.

b. Avem $a=F(7)=\frac{1}{7+2}=\frac{1}{9}$ și $b=F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}+2}=\frac{4}{9}$. Obținem $m_g=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{4}{81}}=\frac{2}{9}$.

Probleme propuse

1. Dacă $E(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$, calculați:

a. $E(2)$; **b.** $E\left(\frac{1}{2}\right)$; **c.** $E\left(\sqrt{2}\right)$; **d.** $E(-1)$; **e.** $E(0,(3))$; **f.** $E(\pi)$.

2. Determinați valorile lui x pentru care fracțiile algebrice următoare sunt definite:

a. $\frac{4}{3x}$; **b.** $\frac{x+2}{x-1}$; **c.** $\frac{x}{2x+3}$; **d.** $\frac{1}{3x^2}$; **e.** $\frac{\sqrt{5}}{x(x+2)}$; **f.** $\frac{-1}{x^2+3}$.

3. Se consideră fracțiile algebrice $F(x)=\frac{11}{x^2-25}$, $G(x)=\frac{7}{x-x^2}$, $H(x)=\frac{x}{x^2-6x+9}$, $L(x)=\frac{x+3}{x^2+5x+6}$.

a. Folosind eventual formulele de calcul prescurtat, descompuneți în factori numitorii fracțiilor algebrice.

b. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât cel puțin unul dintre numitorii fracțiilor algebrice F, G, H, L să fie egal cu 0.

c. Determinați mulțimile de definiție ale fiecăreia dintre fracțiile algebrice F, G, H, L.

4. Amplificați cu 3 și apoi cu x fracțiile algebrice următoare, pe mulțimile pe care sunt definite:

a. $\frac{2xy}{3a}$; **b.** $\frac{x+3}{y-6}$; **c.** $\frac{x^2+x+1}{2x-16x^2}$; **d.** $\frac{-11xy}{6ab}$; **e.** $\frac{x+2}{3-x}$; **f.** $\frac{23}{15-12x}$.

5. Simplificați fracțiile algebrice următoare, pe mulțimile pe care sunt definite:

a. $\frac{18x^4y^2}{9x^2y}$; **b.** $\frac{5x}{25x^2}$; **c.** $\frac{4x}{12x(x+5)}$; **d.** $\frac{2x-1}{6x-3}$; **e.** $\frac{-3x+6}{x-2}$; **f.** $\frac{(x+1)\left(\sqrt{2}x-1\right)}{2x-\sqrt{2}}$.

6. Se consideră fracțiile algebrice $A(x)=\frac{-x}{x^2-16}$, $B(x)=\frac{x+4}{x^2+8x+16}$ și $C(x)=\frac{x-2}{x^2+2x-8}$.

a. Descompuneți în factori numitorii și determinați valorile lui x pentru care toate cele trei fracții au sens.

b. Demonstrați că fracțiile $B(x)$ și $C(x)$ sunt egale, pentru $x \in \mathbb{R}\setminus\{-4, 2\}$.

c. Determinați valorile numărului real x pentru care $A(x) = B(x)$.

7. Simplificați fracțiile algebrice următoare, pe mulțimile pe care sunt definite:

a. $\frac{x^2-x}{x^2-1}$; **b.** $\frac{x^2-16}{x-4}$; **c.** $\frac{4x^2-9}{22x+33}$; **d.** $\frac{x^2+6x+9}{2(x+3)}$; **e.** $\frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x+2)}$; **f.** $\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$.

8. Efectuați adunările și scăderile, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite:

a. $\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$; **b.** $\frac{3x+2}{7}-\frac{4x}{7}$; **c.** $\frac{4x+6}{3}+\frac{2x-3}{6}$; **d.** $\frac{x^2}{9}-\frac{2x}{3}+1$; **e.** $\frac{4x+5}{3}+\frac{7x-2}{2}-\frac{2x-4}{5}$.

9. Efectuați adunările și scăderile, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite:

a. $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{2-x}$; **b.** $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+2}+\frac{1}{5x+5}$; **c.** $\frac{a+3}{a-3}-\frac{a-3}{a+3}$; **d.** $\frac{1}{y^2+y}-\frac{1}{y^2-y}$;

e. $\frac{2b}{b^2-4}-\frac{1}{b-2}+\frac{1}{b+2}$; **f.** $\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2-2x-3}-\frac{1}{x^2-9}$; **g.** $\frac{1}{z^2-3z+2}-\left(\frac{2}{z^2-1}-\frac{1}{z^2-z-2}\right)$.

10. Efectuați înmulțirile, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite, simplificând fracțiile rezultate, acolo unde este cazul:

a. $\frac{3x^2}{-7}\cdot\frac{5x}{2}$; **b.** $\frac{3x+2}{7}\cdot\frac{4x}{7}$; **c.** $\frac{ab^2}{2c}\cdot\frac{6bc^3}{a^2}$;

d. $\frac{ab^2c}{12d^2x}\cdot\frac{10dx^3}{ac^2}$; **e.** $\frac{x}{2y+2}\cdot\frac{y+1}{3x^2}$; **f.** $\frac{(-a)^3b}{7x}\cdot\frac{1}{abx^2}$.

11. Efectuați înmulțirile, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite, simplificând fracțiile rezultate, acolo unde este cazul:

a. $\frac{2x-4}{3x-9}\cdot\frac{x-3}{x-2}$; **b.** $\frac{8}{3x+2}\cdot(9x^2-4)$; **c.** $\frac{x^2-16}{x^2-25}\cdot\frac{x-5}{x-4}$;

d. $\frac{-x+1}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{2x^2+x}{2x-2}$; **e.** $\frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x^2-25}{x-3}$.

12. Efectuați împărțirile, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite, simplificând fracțiile rezultate, acolo unde este cazul:

a. $\frac{5}{x^2}:\frac{25}{9x}$; **b.** $\frac{x+1}{2x}:\frac{2(x+1)}{3x}$; **c.** $\frac{(x+1)^2}{(x+2)^2}:\frac{x+1}{x+2}$; **d.** $\frac{x^2+xy}{y^2+xy}:\frac{x}{y}$; **e.** $\frac{x^2+x}{x^2-2}:\frac{x}{x-\sqrt{2}}$.

13. Efectuați calculele, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite, ținând cont de ordinea efectuării operațiilor și simplificând rezultatele, acolo unde este cazul:

a. $a^2\cdot\frac{2ab^2}{cx}:\frac{a^3b}{x}$; **b.** $\frac{a^2}{b}:\frac{ab}{x}\cdot\frac{b^2}{x}$; **c.** $\frac{a^2}{b}:\left(\frac{ab}{x}\cdot\frac{b^2}{x}\right)$;

d. $\left(\frac{x-1}{3x-6}\cdot\frac{x+2}{x^2}\right):\frac{x^2-1}{x^2-2x}$; **e.** $\frac{2x-y}{3x}:\frac{x^2}{2x+y}:\frac{4x^2-y^2}{9x^4}$.

14. Efectuați ridicările la putere, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite:

a. $\left(\frac{2xyz}{5t^3}\right)^3$; **b.** $\left(-\frac{2ab^2}{3x^5y}\right)^2$; **c.** $\left(\frac{-\sqrt{2}x^3y^2z}{\sqrt{3}ab^4}\right)^3$; **d.** $\left(\frac{5x^3y^4}{-2a^5b^2}\right)^2$; **e.** $\left(\frac{2xyz}{5t^3}\right)^{-1}$; **f.** $\left(\frac{5x^3y^4}{-2a^5b^2}\right)^{-2}$.

15. Efectuați calculele, pe mulțimile pe care fracțiile următoare sunt definite, ținând cont de ordinea efectuării operațiilor și simplificând rezultatele, dacă este cazul:

a. $\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a+1}$; **b.** $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{-1}:\frac{a^2}{a+1}$; **c.** $\left(\frac{c+1}{c}-\frac{c+2}{c+1}\right):\frac{2}{c+1}$; **d.** $\frac{x+3}{x+2}:\left(\frac{x}{x+6}-\frac{1}{x+2}\right)$.

16. Arătați că:

a. $\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{x^2-1}\right):\frac{1}{x^2-1}=x^2-4,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,1\}$;

b. $\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\frac{x+1}{x+2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$; **c.** $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=x, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

17. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{7}{x-5}+\frac{5x}{25-x^2}-\frac{2}{x+5}\right):\left(\frac{x^2+25}{x^2-25}-1\right)$, unde x este număr real, $x\neq-5$ și $x\neq5$. Arătați că $E(x)$ este număr rațional, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$.

18. Se consideră expresia $E(x)=\left[\frac{1}{x}+2\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1}+\frac{3\cdot(x+1)}{2}:(1-x)\right]\cdot\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{-1}$, unde x este număr real, $x\neq0$, $x\neq1$ și $x\neq2$. Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{2x}$, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$.

19. Se consideră expresia $E(x)=\frac{x+1}{x+3}-\frac{x+11}{(x+3)^2}:\left(\frac{2x+1}{x^2-9}-\frac{x-1}{x^2+6x+9}\right)$, unde x este număr real, $x\neq-3$, $x\neq0$, $x\neq-11$ și $x\neq3$. Arătați că $E(x)=\frac{x+9}{x(x+3)}$, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{-11,-3,0,3\}$.

20. a. Demonstrați că $\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

b. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{(x+2)^2-1}+\frac{1}{(x+4)^2-1}\right):\frac{1}{x+5}$, cu $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-1,1,3,5\}$.

Determinați valorile lui x pentru care $E(x)=\frac{3}{7}$.

21. Un parc are forma unui trapez $ABCD$, cu baza mare AB, ca în Figura 1. Aleile AC și BD se intersectează în O, iar aleea EF trece prin O și este paralelă cu bazele.

a. Demonstrați că $OE=OF=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$.

b. Administrația parcului vrea să paveze o alee dreptunghiulară cu lățimea de 2 metri, de-a lungul bazei AB. Știind că $CD = 6$ m și $AB - EF = 4$ m, determinați aria suprafeței care va fi pavată.

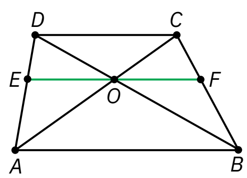


Figura 1

Autoevaluare

1. Efectuați, pe mulțimea pe care fracțiile următoare sunt definite:

a. $\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{2x}$; **b.** $\frac{2}{3x^2}-\frac{3}{2x}$; **c.** $\frac{2}{3x^2}:\frac{3}{2x}$; **d.** $\left(\frac{2}{3x^2}\right)^3$; **e.** $\left(\frac{2}{3x^2}\right)^{-3}$; **f.** $\left(\frac{3}{2x}\right)^0$. **(3p)**

2. Arătați că $\left(\frac{2x^2-7x-17}{x^2-10x+21}-\frac{x+1}{x-7}\right):\frac{1}{x^2-9}=(x+2)(x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3,7\}$. **(3p)**

3. Dacă $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{x+a}{x+b}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $x\neq2$, $x\neq-b$, demonstrați că $a+b\in\mathbb{Z}$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 5: Ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Cuvinte-cheie

coeficienți discriminant soluții

5.1. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Mate practică

Andreea așază o fotografie de 20 cm × 16 cm într-o ramă foto a cărei suprafață utilă are aria egală cu 572 cm², lăsând un spațiu egal de la fotografie la marginea ramei, pe fiecare parte (Figura 1). Care sunt dimensiunile unei fotografii care acoperă în întregime suprafața utilă a acestei rame foto?

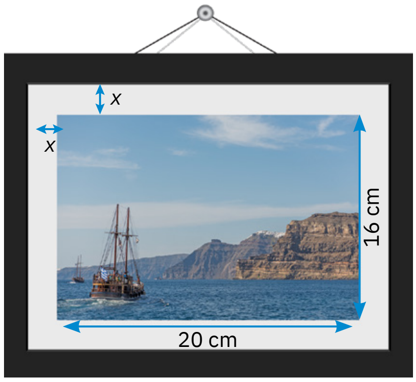


Figura 1

Notând cu x distanța de la fotografie la cadru, dimensiunile interiorului ramei sunt $20 + 2x$ cm, respectiv $16 + 2x$ cm. Obținem ecuația:

$$(20 + 2x)(16 + 2x) = 572.$$

După desfacerea parantezelor și reducerea termenilor asemenea în membrul stâng, ecuația devine $4x^2 + 72x + 320 = 572$.

Împărțind ambii membri la 4, rezultă $x^2 + 18x + 80 = 143$, adică $x^2 + 18x = 63$.

Pentru a rezolva ecuația, completăm membrul stâng până la pătratul unei sume:

$$x^2 + 18x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 9 + 9^2 - 9^2 = (x + 9)^2 - 81.$$

Obținem $(x + 9)^2 - 81 = 63$, de unde $(x + 9)^2 = 144$. Rezultă $x + 9 = 12$ sau $x + 9 = -12$, adică $x = 3$ sau $x = -21$. Cum x este număr pozitiv (exprimă o distanță), reținem doar soluția $x = 3$.

În concluzie, dimensiunile interioare ale ramei foto sunt 26 cm (lungime) și 22 cm (lățime), acestea fiind și dimensiunile unei fotografii care încape în întregime în ramă.

Ce observăm?

În anumite situații practice, este necesar să determinăm un număr real x, cunoscând valoarea unei expresii algebrice de forma $ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sunt numere reale, cu $a \neq 0$.

De reținut

Ecuațiile de forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

se numesc *ecuații de gradul al doilea cu coeficienți reali*.

Numerele reale a, b, c se numesc *coeficienții ecuației*, iar x este *necunoscuta* ecuației.

Un număr real x_0 pentru care $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ se numește *soluție* a ecuației.

Exemple

1. Coeficienții ecuației $3x^2 + 4x + 1 = 0$ sunt $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$.
   Numărul real -1 este o soluție a acestei ecuații, deoarece $3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$.
2. Coeficienții ecuației $x^2 - 3x - 10 = 0$ sunt $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$.
   O soluție a acestei ecuații este -2, întrucât $(-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 10 = 0$. Cum $5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 0$, deducem că 5 este o altă soluție. Putem nota: $x_1 = -2$ și $x_2 = 5$ sunt soluții ale ecuației.
3. Ecuația $3x^2 + 5x = 0$ are coeficienții $a = 3$, $b = 5$, $c = 0$, deoarece ecuația se scrie și sub forma $3x^2 + 5x + 0 = 0$.
   Se observă că 0 este o soluție a acestei ecuații.
4. Ecuația $2x^2 + 9 = 0$ se poate rescrie $2x^2 + 0 \cdot x + 9 = 0$, deci are coeficienții $a = 2$, $b = 0$, $c = 9$.
   Această ecuație nu are soluții reale, deoarece $2x^2 + 9 > 0$, pentru orice număr real x.

Observație

Ecuațiile de gradul al doilea care au una dintre formele:

$$(1)\ ax^2 + bx = 0; \qquad (2)\ ax^2 + c = 0$$

se numesc ecuații de gradul al doilea incomplete.

5.2. Metode de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Având în vedere că produsul a două numere reale este egal cu 0 dacă și numai dacă cel puțin unul dintre factori este 0, pentru a rezolva o ecuație de gradul al doilea de forma:

$$(E): ax^2 + bx + c = 0, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

este suficient să descompunem expresia $ax^2 + bx + c$ ca produs de factori de forma $mx + n$.

De exemplu, ecuația $x^2 = p$, $p > 0$, studiată în clasa a VII-a, are soluțiile $x_1 = -\sqrt{p}$ și $x_2 = \sqrt{p}$, întrucât au loc echivalențele:

$$x^2 = p \Leftrightarrow x^2 - p = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{p})^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{p})(x - \sqrt{p}) = 0.$$

În cele ce urmează, vom prezenta rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea incomplete (pentru care $b = 0$ sau $c = 0$), metoda descompunerii în factori și metoda completării pătratului unei sume, din care vom deduce formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea.

5.2.1. Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea incomplete

Ecuațiile de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$, iar $b = 0$ sau $c = 0$, se pot rezolva utilizând strategii învățate anterior: descompunerea în factori și rezolvarea ecuației de forma $x^2 = r$, $r \in \mathbb{R}$.

1. Ecuația $ax^2 + bx = 0$, cu $b \neq 0$, se rescrie $x(ax + b) = 0$ și are două soluții: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.
2. Ecuația $ax^2 + c = 0$, cu $c \neq 0$, este echivalentă cu $x^2 = -\frac{c}{a}$.

   Dacă $-\frac{c}{a} < 0$, ecuația nu are soluții. Dacă $-\frac{c}{a} > 0$, atunci ecuația are două soluții: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
3. Ecuația $ax^2 = 0$ este echivalentă cu $x^2 = 0$ și este verificată doar de numărul real 0.

Exemple

1. Ecuația $x^2 - 4x = 0$ se scrie $x(x - 4) = 0$, de unde rezultă $x = 0$ sau $x - 4 = 0$.
   Ecuația are două soluții reale: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.
2. Ecuația $3x^2 - 75 = 0$ se scrie $3x^2 = 75$ sau $x^2 = 25$ și are două soluții reale: $x_1 = -5$ și $x_2 = 5$.
3. Ecuația $3x^2 + 75 = 0$ este echivalentă cu $3x^2 = -75$ sau cu $x^2 = -25$.
   Această ecuație nu are soluții reale.

5.2.2. Metoda descompunerii în factori

Această metodă constă în scrierea expresiei $ax^2 + bx + c$ ca produs de doi factori de forma $mx + n$:

$$ax^2 + bx + c = (m_1x + n_1)(m_2x + n_2),$$

unde m_1, n_1, m_2, n_2 sunt numere reale, cu $m_1m_2 \neq 0$. Dacă o astfel de descompunere se poate realiza, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluții reale: $x_1 = -\frac{n_1}{m_1}$, $x_2 = -\frac{n_2}{m_2}$.

În cazul $a = 1$, des întâlnit în practică, putem considera $m_1 = m_2 = 1$, pentru care obținem:

$$(*)\quad x^2 + bx + c = (x + n_1)(x + n_2).$$

Deoarece:

$$(x + n_1)(x + n_2) = x^2 + (n_1 + n_2)x + n_1n_2,$$

pentru a găsi o descompunere de forma (*) este suficient să determinăm două numere reale n_1 și n_2 astfel încât $n_1 + n_2 = b$ și $n_1n_2 = c$.

Exemple

1. Considerăm ecuația $x^2 + 4x + 3 = 0$. Două numere cu suma 4 și produsul 3 sunt 1 și 3. Au loc echivalențele:

   $$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) + 3(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 1) = 0,$$

   de unde rezultă că ecuația are două soluții reale: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.
2. Pentru a rezolva ecuația $x^2 - 7x - 30 = 0$ prin metoda descompunerii în factori, căutăm două numere reale cu suma -7 și produsul -30. Întrucât $-30 = 3 \cdot (-10)$ și $-7 = 3 + (-10)$, obținem:

   $$x^2 - 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 3x - 30 = 0 \Leftrightarrow x(x - 10) + 3(x - 10) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 10) = 0,$$

   deci ecuația $x^2 - 7x - 30 = 0$ are două soluții reale: $x_1 = -3$, $x_2 = 10$.

5.2.3. Metoda completării pătratului unei sume/diferențe

Folosind formulele de calcul al pătratului unei sume sau al unei diferențe, au loc egalitățile:

$$(mx+n)^2=m^2x^2+2mnx+n^2; \qquad (mx-n)^2=m^2x^2-2mnx+n^2.$$

Metoda completării pătratului unei sume/diferențe presupune prelucrarea ecuației $ax^2+bx+c=0$ astfel încât termenii ax^2 și bx să se poată scrie sub forma m^2x^2, respectiv $2mnx$, urmată de completarea formulei corespunzătoare cu termenul n^2, adunând sau scăzând un număr convenabil.

Exemple

1. Considerăm ecuația $4x^2-20x+9=0$. Întrucât $4x^2=(2x)^2$ și $20x=2\cdot 2x\cdot 5$, obținem:
$$4x^2-20x+9=0 \Leftrightarrow (2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5+25-16=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2-16=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2=16,$$
de unde rezultă $2x-5=-4$ sau $2x-5=4$. Ecuația are două soluții reale: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{9}{2}$.
2. Fie ecuația $x^2-6x+2=0$. Termenul x^2 face parte dintr-o dezvoltare de forma $(x-n)^2$ și, întrucât $6x=2\cdot x\cdot 3$, pentru a obține pătratul unei diferențe, vom completa cu termenul $3^2=9$. Ecuația se scrie echivalent astfel:
$$x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow (x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)-7=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-7=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=7 \Leftrightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{7}.$$
3. Fie ecuația $x^2+12x+32=0$. Termenul x^2 face parte dintr-o dezvoltare de forma $(x+n)^2$ și, întrucât $12x=2\cdot x\cdot 6$, pentru a obține pătratul unei sume, vom completa cu termenul $6^2=36$. Ecuația se scrie echivalent astfel:
$$x^2+12x+32=0 \Leftrightarrow (x^2+2\cdot 6\cdot x+36)-4=0 \Leftrightarrow (x+6)^2-4=0 \Leftrightarrow (x+6)^2=4.$$
Rezultă că $x+6=-2$ sau $x+6=2$, deci ecuația are două soluții reale: $x_1=-8$ și $x_2=-4$.
4. Fie ecuația $-2x^2+12x-18=0$. Împărțind ambii membri ai ecuației prin -2, ecuația devine $x^2-6x+9=0$, adică $(x-3)^2=0$. Rezultă că $x-3=0$, deci ecuația are doar soluția $x=3$. Deoarece egalitatea $(x-3)^2=0$ se poate scrie și $(x-3)(x-3)=0$, iar produsul a doi factori este 0 dacă unul dintre factori este 0, prin convenție se spune că ecuația are două soluții reale egale: $x_1=x_2=3$.

5.3. Formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Metoda descompunerii în factori pune în evidență o strategie generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea. Considerăm ecuația:

$$(E)\colon ax^2+bx+c=0, \text{ unde } a, b, c\in\mathbb{R}, a\neq 0.$$

Împărțim ambii membri ai ecuației prin a și obținem: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Formăm pătratul unei sume: $x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$, de unde $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

a. Dacă $b^2-4ac<0$, ecuația nu are soluții, deoarece în ultima egalitate, membrul stâng este mai mare sau egal cu 0, iar membrul drept este negativ.

b. Dacă $b^2-4ac=0$, ecuația devine $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ și are două soluții reale egale: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

c. Dacă $b^2-4ac>0$, obținem $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$, de unde rezultă că $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Ecuația are două soluții reale distincte: $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ și $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

De reținut

Formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Fie ecuația de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Numărul b^2-4ac se numește *discriminantul ecuației* și se notează cu Δ (*delta*).

a. Dacă $\Delta<0$, atunci ecuația $ax^2+bx+c=0$ nu are nicio soluție reală.

b. Dacă $\Delta=0$, atunci ecuația $ax^2+bx+c=0$ are două soluții reale egale: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

c. Dacă $\Delta>0$, atunci ecuația $ax^2+bx+c=0$ are două soluții reale distincte: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2.5

Cultură matematică

Formula rezolvării ecuației de gradul al II-lea, în forma prezentată mai sus, a fost dată în anul 1544 de Michael Stifel (matematician german) și își are originile în lucrările lui Brahmagupta și Sridhara (matematicieni indieni).

Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea utilizând formula generală este o metodă algoritmică, adică o metodă ce utilizează, pentru rezolvarea unei probleme sau categorii de probleme, o succesiune finită de etape (pași), numită *algoritm*. Algoritmul este noțiunea fundamentală a informaticii și un concept fundamental al matematicii moderne.

Exemple

Vom prezenta etapele de rezolvare a unei ecuații de gradul al doilea utilizând formula generală:

1. Considerăm ecuația $x^2 + 8x + 12 = 0$.

Pasul 1. Identificăm coeficienții ecuației: $a = 1$, $b = 8$, $c = 12$.

Pasul 2. Calculăm discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$.

Pasul 3. Precizăm natura soluțiilor: deoarece $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale diferite.

Pasul 4. Aflăm soluțiile ecuației: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-4}{2} = -6$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+4}{2} = -2$.

2. Considerăm ecuația $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Pasul 1. Identificăm coeficienții ecuației: $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$.

Pasul 2. Calculăm discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$.

Pasul 3. Precizăm natura soluțiilor: cum $\Delta = 0$, ecuația are două soluții reale egale.

Pasul 4. Determinăm soluțiile ecuației: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4+0}{2} = -2$.

3. Considerăm ecuația $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Pasul 1. Identificăm coeficienții ecuației: $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

Pasul 2. Calculăm discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$.

Pasul 3. Precizăm natura soluțiilor: deoarece $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

Investigație

În tabelul de mai jos, pe prima coloană este scrisă o ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Copiați tabelul în caiet și completați-l.

Ecuația	$x_1 + x_2$	$-\dfrac{b}{a}$	x_1x_2	$\dfrac{c}{a}$	$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$
$x^2 + 4x + 3 = 0$					
$2x^2 - x - 1 = 0$					

a. Comparați rezultatele obținute în coloanele 2 și 3, coloanele 4 și 5, respectiv 1 și 6.

b. Puteți generaliza rezultatele obținute?

c. Justificați rezultatele obținute utilizând metoda generală de rezolvare a unei ecuații de gradul al II-lea cu coeficienți reali.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Verificați dacă 1 este soluție a ecuațiilor:

a. $x^2 + x - 2 = 0$; **b.** $x^2 - 9x + 11 = 0$.

Rezolvare

Înlocuim în fiecare ecuație pe x cu 1 și stabilim valoarea de adevăr a propoziției obținute.

a. Propoziția $1^2 + 1 - 2 = 0$ este adevărată, deci 1 este soluție a ecuației $x^2 + x - 2 = 0$.

b. Propoziția $1^2 - 9 \cdot 1 + 11 = 0$ este falsă, deoarece $1^2 - 9 \cdot 1 + 11 = 3$. Rezultă că 1 nu este soluție a ecuației $x^2 - 9x + 11 = 0$.

2. Determinați numărul real m știind că -2 este soluție a ecuației $x^2 - 3mx + m^2 + 1 = 0$.

Rezolvare

Numărul real -2 este soluție a ecuației $x^2 - 3mx + m^2 + 1 = 0$, dacă, înlocuindu-l pe x cu -2 în ecuație, obținem o propoziție adevărată. Ca urmare, $(-2)^2 - 3m \cdot (-2) + m^2 + 1 = 0$, de unde rezultă că $m^2 + 6m + 5 = 0$, ecuație ale cărei soluții sunt $m = -1$ și $m = -5$.

3. Diferența a două numere reale este egală cu 7, iar produsul lor este 98. Aflați numerele.

Rezolvare

Notând cu x numărul mai mic, numărul mai mare este $x+7$. Atunci $x(x+7)=98$, de unde rezultă că $x^2+7x-98=0$. Discriminantul ecuației este $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-98) = 441 = 21^2$. Ecuația are două soluții reale, și anume $x_1 = \frac{-7-21}{2} = -14$ și $x_2 = \frac{-7+21}{2} = 7$. Problema are două soluții: -14 și -7, respectiv 7 și 14.

4. Copiilor de la o petrecere li s-au împărțit în mod egal 195 de bomboane. Fiecare copil primește un număr de bomboane mai mic cu 2 decât numărul copiilor. Aflați câți copii sunt la petrecere.

Rezolvare

Notăm cu n numărul de copii aflați la petrecere (n este număr natural). Fiecare copil primește câte $n-2$ bomboane, deci numărul total de bomboane este $n(n-2)$.
Obținem $n(n-2)=195$, adică $n^2-2n=195$. Adunăm 1 în ambii membri, pentru a obține pătratul unei diferențe în membrul stâng. Rezultă $n^2-2n+1=196$, adică $(n-1)^2=196$, deci $n-1 \in \{-14, 14\}$. Obținem $n=15$ sau $n=-13$ (care nu este număr natural). Așadar, la petrecere sunt 15 copii.

Probleme propuse

1. Copiați în caiet, apoi completați tabelul de mai jos:

Ecuația	Coeficienții ecuației			Discriminantul ecuației
	a	b	c	
$2x^2-4x-3=0$				
$x^2+8x=0$				
$6x^2-12=0$				
$-x^2-6x+5=0$				
$4-x-x^2=0$				
$2x-4+x^2=0$				

2. Stabiliți dacă propozițiile următoare sunt adevărate sau false:
   a. O ecuație de gradul al doilea cu discriminantul mai mic sau egal cu zero nu are soluții reale.
   b. O ecuație de gradul al doilea are soluții reale dacă și numai dacă discriminantul său este egal cu zero.
   c. O ecuație de gradul al doilea cu două soluții reale distincte are discriminantul mai mare ca zero.
   d. Dacă o ecuație de gradul al doilea are două soluții reale egale, atunci discriminantul său este nul.
3. Rezolvați următoarele ecuații de gradul al doilea incomplete:
   a. $2x^2-6x=0$; b. $4x^2+4x=0$; c. $2x^2-1=0$; d. $-4x^2+9=0$.
4. Rezolvați ecuațiile următoare, utilizând metoda descompunerii în factori:
   a. $x^2-9x+8=0$; b. $x^2-4x-12=0$; c. $x^2+8x+15=0$; d. $2x^2-7x+5=0$.
5. Rezolvați ecuațiile următoare, utilizând metoda completării până la pătratul unei sume sau al unei diferențe:
   a. $x^2+10x-24=0$; b. $x^2-12x-45=0$; c. $x^2+4x-4=0$; d. $4x^2-4x-3=0$.
6. Utilizând formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea, determinați mulțimea soluțiilor ecuațiilor:
   a. $x^2+13x+36=0$; b. $-x^2+13x-36=0$; c. $2x^2+4x-7=0$; d. $4x^2-3x-2=0$;
   e. $3x^2-12x+12=0$; f. $-2x^2-12x-18=0$; g. $x^2+4x+13=0$; h. $x^2+x+1=0$.
7. Verificați dacă 3 este soluție a ecuațiilor:
   a. $2x^2-3x+15=0$; b. $x^2-6x+9=0$; c. $3x^2-9x+11=0$; d. $-4x^2+8x-12=0$.
8. Determinați numărul real m știind că -1 este soluție a ecuației:
   a. $mx^2+2mx+3=0$; b. $x^2+5mx+m^2+3=0$; c. $m^2x^2+4mx+3=0$; d. $x^2-3mx+11=0$.

9. Utilizând formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea, determinați mulțimea soluțiilor ecuațiilor:

a. $0{,}5x^2+3x+2{,}5=0$; **b.** $2{,}7x^2+1{,}8x+0{,}3=0$; **c.** $x^2+x+\sqrt{2}=0$; **d.** $x^2+0{,}9x+0{,}21=0$;

d. $-\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}=0$; **e.** $x^2+\sqrt{5}x-5=0$; **f.** $-\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{18}=0$; **g.** $\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{5}x-\frac{9}{5}=0$.

10. În fiecare caz, determinați numărul real m știind că ecuațiile următoare au două soluții reale egale și apoi rezolvați ecuațiile:

a. $mx^2-(m+2)x+2=0$; **b.** $x^2-mx+3m-8=0$; **c.** $x^2+mx+\sqrt{2}m-1{,}5=0$.

11. Scrieți ecuațiile următoare sub forma $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, și apoi determinați-le soluțiile:

a. $x(x+6)=7$; **b.** $(-2x+3)(2x+3)=9x$; **c.** $\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)=0$;

d. $\left(\sqrt{3}x+2\right)^2+\left(\sqrt{3}x-2\right)^2=10\sqrt{2}x$; **e.** $\frac{2x}{x-1}-\frac{x-1}{x}=3$, $x\notin\{0,1\}$; **f.** $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{3}}-\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $x\notin\left\{\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}$.

12. Scrieți o ecuație de gradul al doilea care să aibă soluțiile:

a. $x_1=1$, $x_2=3$; **b.** $x_1=0$, $x_2=-0{,}7$; **c.** $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

13. Arătați că ecuația $x^2+mx-m-2=0$ are soluții reale diferite, pentru orice număr real m.

14. Aria unui dreptunghi este egală cu 66 m^2, iar lungimea este cu 5 metri mai mare decât lățimea. Determinați lățimea dreptunghiului.

15. O grădină de formă dreptunghiulară a fost construită lângă un zid de cărămidă (vezi Figura 2). Gardul care împrejmuiește celelalte trei laturi are lungimea totală de 48 de metri. Aflați dimensiunile grădinii, cu aproximație de cel mult 1 centimetru, știind că aria sa este 224 de metri pătrați.

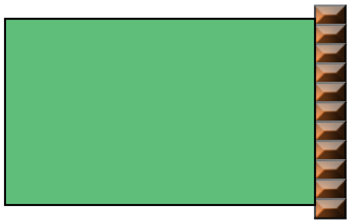


Figura 2

16. Rezolvați următoarele cerințe:

a. Suma a două numere reale este 6, iar suma pătratelor lor este 28. Aflați numerele.

b. Diferența a două numere reale este 7, iar suma pătratelor lor este 29. Aflați numerele.

c. Suma dintre un număr real și inversul său este $\frac{34}{15}$. Aflați numărul.

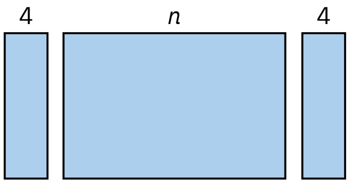


Figura 3

17. O sală de cinema are 126 de locuri pe scaune. În zona centrală sunt n scaune pe rând, iar în zonele laterale sunt câte 4 scaune pe rând (vezi Figura 3). Numărul de rânduri este cu 5 mai mic decât numărul total de scaune (centru plus laterale) de pe fiecare rând. Aflați numărul de locuri din zona centrală.

18. Un grup de prieteni merge într-o excursie, plătind 480 de lei pentru închirierea unui microbuz. În ultimul moment, un cuplu se alătură grupului, ceea ce face ca prețul închirierii microbuzului pentru excursie să scadă cu 8 lei de persoană. Aflați numărul inițial al excursioniștilor.

19. În fiecare dintre figurile 4-6, dreptele DE și BC sunt paralele. Aflați x.

a.

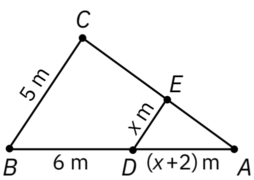


Figura 4

b.

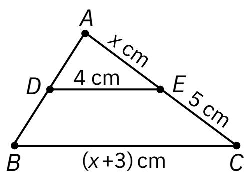


Figura 5

c.

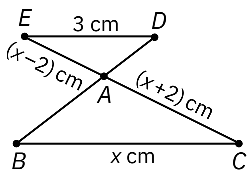


Figura 6

20. Se consideră un pătrat $ABCD$, cu $AB=20$ cm, și punctele M și N pe laturile AB, respectiv CD, astfel încât $AM=CN=x$ cm, ca în Figura 7. Fie P intersecția dreptelor AN și DM. Determinați x, astfel încât $\mathcal{A}_{DMP}+\mathcal{A}_{DNP}=125$ cm^2.

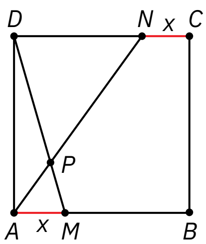


Figura 7

21. **a.** Demonstrați că pentru orice număr real x, $4x-x^2\leq 4$.

b. Se consideră un dreptunghi cu perimetrul de 8 m. Demonstrați că aria sa este cel mult egală cu 4 m^2. Când are loc egalitatea?

c. Se consideră un dreptunghi cu aria de 4 m^2. Demonstrați că perimetrul său este cel puțin egal cu 8 m. Când are loc egalitatea?

22. Se consideră două dreptunghiuri, primul dintre ele având aria de 24 cm^2. Dacă al doilea dreptunghi are lungimea cu 2 cm mai mică decât lungimea primului dreptunghi și lățimea cu 2 cm mai mare decât lățimea primului dreptunghi, iar aria sa este de 30 cm^2, aflați perimetrul dreptunghiului inițial.

Autoevaluare

1. Rezolvați ecuațiile, utilizând pătratul sumei sau diferenței și diferența de pătrate:

a. $x^2 - 4x - 3 = 0$; **b.** $x^2 - 2x - 3 = 0$; **c.** $4x^2 - 4x - 5 = 0$. **(3p)**

2. Rezolvați ecuațiile, utilizând metoda generală:

a. $3x^2 - 8x + 5 = 0$; **b.** $2x^2 - 9x + 7 = 0$; **c.** $x^2 + x - 30 = 0$. **(3p)**

3. Determinați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, știind că aria triunghiului este egală cu 24 m^2, iar o catetă este cu 2 metri mai mică decât cealaltă catetă. **(2p)**

4. Surorile Mariei au cu 5 ani, respectiv cu 8 ani mai puțin decât Maria. Produsul vârstelor celor două surori mai mici este egal cu vârsta tatălui. Știind că tatăl are 40 de ani, aflați vârsta Mariei. **(1p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 20 de minute.

Proiect. Algoritm cotidian

În viața de zi cu zi întâlnim uneori procese sau activități umane care se desfășoară după anumite tipare, ce pot fi structurate sub forma unei secvențe de pași bine definiți care duc la un rezultat dorit, adică a unui algoritm.

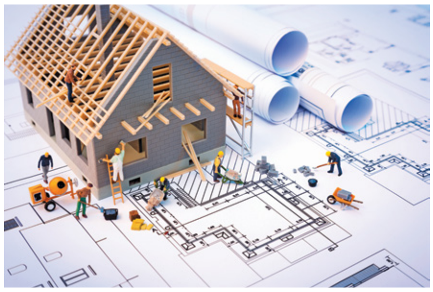
De exemplu, un algoritm pentru spălarea hainelor la mașina de spălat poate fi:

Intrare: Haine murdare, detergent, mașină de spălat. **Pași:** **1.** Se sortează hainele pe culori și tip de material. **2.** Se selectează programul potrivit al mașinii de spălat. **3.** Se adaugă detergent și balsam. **4.** Se pornește mașina. **5.** Se așteaptă finalizarea programului. **6.** Se scot hainele și se pun la uscat.

Ieșire: Haine curate

Realizând acest proiect, veți învăța să descoperiți în viața cotidiană astfel de acțiuni care pot fi *algoritmizate*, să le stabiliți etapele și să decideți, atunci când le găsiți prestabilite, dacă unele dintre ele pot fi eliminate, sau trebuie adăugate altele noi, pentru ca timpul de execuție și rezultatele acțiunilor să fie optime.

Proiectul se va derula pe parcursul unei săptămâni și va fi realizat de echipe formate din câte cinci elevi. Fiecare echipă va avea de întocmit și de prezentat în fața colegilor un material care să conțină răspunsurile la cerințele din activitățile următoare.



Proiectarea unei clădiri

Activitatea 1

A. Precizați care dintre modelele următoare de activități sau procese poate fi algoritmizat:

1. rezolvarea ecuației de forma $ax + b = 0$, $a, b, x \in \mathbb{R}$;
2. circuitul apei în natură;
3. învățarea unei lecții de matematică;
4. confecționarea unei figurine origami;
5. calculul modulului unui număr real;
6. o plimbare prin parc;
7. confecționarea unei cutii sub formă de cub;
8. calculul sumei a două numere întregi;
9. determinarea numerelor prime mai mici decât 1 000;
10. proiectarea unei clădiri;

B. Stabiliți etapele algoritmilor de la punctul **A** și, în cazul algoritmilor matematici, ilustrați-i printr-un exemplu.

C. Precizați care dintre algoritmii matematici identificați are aplicații în viața cotidiană.

Activitatea 2

A. Precizați alte două activități din viața cotidiană a căror desfășurare se poate scrie sub forma unui algoritm și identificați-le etapele.

B. Scrieți alți doi algoritmi matematici pe care i-ați întâlnit până acum și stabiliți-le etapele.

Activitatea 3

Fiecare echipă va pregăti pentru celelalte grupe câte un algoritm din care să lipsească o etapă, sau care să aibă o etapă care nu este necesară. Fiecare echipă va analiza algoritmii propuși de colegii din celelalte echipe și va decide dacă trebuie să elimine sau să adauge câte o etapă, pentru ca aceștia să fie corecți.

Resurse: Se pot folosi cele oferite public pe internet.

Prezentare: Realizați o prezentare PowerPoint cu text și imagini, sau folosiți tabla flipchart ori planșe.

Evaluare: Se va ține cont de calitatea documentării, selectarea informațiilor, acuratețea prezentării, modul de lucru în echipă, opiniile exprimate de colegi în urma prezentării proiectului și calitatea răspunsurilor oferite la întrebări.

Recapitulare și evaluare

Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere); reducerea termenilor asemenea • Formule de calcul prescurtat • Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ • Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice • Ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

Pentru problemele 1, 2, 6, completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate. Pentru problemele 3, 4, 20-23, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect. Pentru problemele 5, 7-19, 24-28, scrieți rezolvările complete.

1. Partea literală a lui $2\sqrt{3}xy^4$ este egală cu ..., iar coeficientul este egal cu ... .

2. Termenii asemenea din suma algebrică $7x-2y+5z+\sqrt{5}x$ sunt ... .

3. Rezultatul calculului $11x - 13xy - 9x + 7xy$ este egal cu:
a. $2x - 6xy$; **b.** $-4xy$; **c.** $-4x$; **d.** $6xy - 2x$.

4. Rezultatul calculului $2\sqrt{5x^3y}\cdot\sqrt{3xy}$ este egal cu:
a. $2\sqrt{8}xy$; **b.** $2\sqrt{15x^4y^2}$; **c.** $2\sqrt{2}x^2$; **d.** $2x^2$.

5. Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false:
a. $\frac{3x}{2}-x=x$; **b.** $2ab\cdot 3ab^2=6a^2b^3$;
c. $\frac{5}{3}x^2y^6:\left(\frac{1}{2}xy\right)=\frac{5}{6}xy^5$; **d.** $(-2\sqrt{3}ab^6)^2=-12a^2b^8$.

6. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:
a. $3xy\cdot 4x... = 12x^2y^5$;
b. $\frac{1}{2}x^2:(...x)=\frac{5}{6}x$;
c. $(2\sqrt{3}x^2y)^{\cdots}=12x^4y^2$.

7. Determinați:
a. valoarea expresiei $3x^2 - 1$, pentru $x = -1$;
b. valoarea expresiei $2\sqrt{3}xy$, pentru $x = 1$, $y=\sqrt{3}$;
c. valoarea expresiei $(x - 1)(x + 1)$, pentru $x=\sqrt{5}$;
d. valoarea expresiei $(x - y)(x + y) - 4y$, pentru $x = y + 2$.

8. Stabiliți dacă următoarele propoziții sunt adevărate sau false
a. $(x - 3)(3 + x) = x^2 - 9$; **b.** $(3 - y)^2 = 9 - y^2$;
c. $(x + 4)(x - 2) = x^2 - 8$; **d.** $(x + 4)^2 = x^2 - 16$.

9. Arătați că:
a. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\sqrt{3}$; **b.** $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$;
c. $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2=\sqrt{6}$.

10. Arătați că:
a. $2x - (x + 1)^2 = -1 - x^2$;
b. $4x^2 - (2x - 1)(2x + 1) = 1$;
c. $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2x^2 + 2$;
d. $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 = -4x$.

11. Determinați suma numerelor reale a și b știind că $x^2 + 9x + 8 = (x + a)(x + b)$, pentru orice număr real x.

12. Determinați suma numerelor reale a și b știind că $x^2 - a = (x - 3)(x + b)$, pentru orice număr real x.

13. Descompuneți în factori:
a. $x^2 - 6x + 8$; **b.** $x^2 + 12x + 36$;
c. $x^2 + 20x + 100$; **d.** $49x^2 - 64$.

14. Descompuneți în factori:
a. $x^2 - 6x - 16$; **b.** $x^2 + 12x + 32$;
c. $x^2 - 10x + 25$; **d.** $121 - 81x^2$.

15. Asociați fiecărei expresii din coloana **A** descompunerea în factori corespunzătoare, din coloana **B**:

A	B
a. $x^2 - 4$	**1.** $(x + 4)(x - 4)$
b. $x^2 - 4x + 4$	**2.** $(x - 2)(x + 2)$
c. $x^2 + 4x + 4$	**3.** $(x + 2)^2$
d. $x^2 + 4x$	**4.** $x(x + 4)$
	5. $(x - 2)^2$

16. Determinați valoarea fracției $A(x)=\frac{x+2}{x-4}$, $x\neq 4$, pentru:
a. $x = -2$; **b.** $x = 0{,}5$; **c.** $x=\sqrt{17}$.

17. Determinați valorile lui x pentru care fracția $B(x)=\frac{x+1}{x-1}$:
a. are sens; **b.** nu are sens; **c.** are valoarea 3,2.

18. Dacă $E(x)=\frac{x}{x-1}$, $x\neq 1$, și $F(x)=\frac{1}{x-2}$, $x\neq 2$, atunci calculați:
a. $E(x) + F(x)$; **b.** $E(x) - F(x)$.

19. Dacă $E(x)=\frac{x^2-9}{x+2}$, $x\neq -2$, și $F(x)=\frac{x^2-4}{x+3}$, $x\neq -3$, atunci calculați:
a. $E(x)\cdot F(x)$; **b.** $E(x) : F(x)$.

20. Descompunerea în factori a expresiei $(x - 2)^2 - 9$ este egală cu:
a. $(x - 5)(x + 1)$ **b.** $x^2 - 11$
c. $(x - 1)(x + 5)$ **d.** $(x - 11)^2$.

21. Descompunerea în factori a expresiei $25 - (x - 3)^2$ este egală cu:
a. $(22 - x)^2$ **b.** $(2 - x)(2 + x)$
c. $(8 - x)(2 + x)$ **d.** $(22 - x)^2$.

22. Suma soluțiilor ecuației $x^2 - x - 30 = 0$ este egală cu:

a. -1 **b.** 1 **c.** -30 **d.** 29.

23. Produsul soluțiilor ecuației $x^2 - 7x + 10 = 0$ este egal cu:

a. -7 **b.** -10 **c.** 3 **d.** 10.

24. Verificați dacă ecuația $x^2 + 7x + 6 = 0$ are una dintre soluții egală cu 2.

25. Verificați dacă ecuația $x^2 + 5x + 4 = 0$ are una dintre soluții în intervalul $(-2, 1)$.

26. Determinați mulțimea soluțiilor ecuațiilor, pe mulțimea de definiție:

a. $-0{,}5x^2 + 5x - 3 = 0$; **b.** $\sqrt{8}x^2 + x - \sqrt{18} = 0$;

c. $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{3}{2-x} = -2$; **d.** $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + \dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = \dfrac{10}{3}$.

27. a. Demonstrați că $\dfrac{1}{a(a+4)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+4}\right)$, pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$.

b. Fie expresia algebrică $E(x) = \dfrac{1}{x(x-4)} + \dfrac{1}{x(x+4)}$ cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$. Determinați valorile lui x pentru care numerele x^2 și $E(x)$ sunt întregi.

28. Ana și Paul sunt frați și au 16 ani, respectiv 15 ani. Amândoi au primit de la bunici câte 2 000 de lei și i-au depus la aceeași bancă, în luna noiembrie a anului în care au împlinit 14 ani, în două depozite, ambele având dobânda de $p\%$, cu p număr natural. La începutul lunii decembrie a acestui an, Ana și Paul doresc să folosească toată suma primită ca dobândă de când și-au făcut depozitul la bancă, pentru a-i face cadou de Crăciun o minge de baschet fratelui lor mai mic. Determinați valoarea lui p, știind că suma primită ca dobândă le ajunge exact fraților pentru a cumpăra mingea de baschet dorită, care costă 305 lei.

Pentru exercițiile 3.a, de la Testul 1 și de la Testul 2, notați în caiet litera corespunzătoare răspunsului corect.

Testul 1

1. Se consideră expresiile algebrice $E(x) = x + 1$ și $F(x) = x + 2$. Efectuați:

(1p) **a.** $-7E(x) + 11F(x)$;

(1p) **b.** $E(x) \cdot F(x)$.

2. Rezolvați ecuațiile următoare, utilizând eventual notații și metoda descompunerii în factori:

(1p) **a.** $(x - 11)^2 - (x - 2)^2 = 0$;

(1p) **b.** $a^4 - 6a^2 + 9 = 0$;

(1p) **c.** $(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 1 = 0$.

3. Se consideră expresia

$$E(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - x - 2} : \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 4x - 12},$$

unde x este număr real, $x \neq -6$, $x \neq -1$, $x \neq 2$ și $x \neq 4$.

(1p) **a.** Descompunerea în factori a expresiei $X^2 + 4X - 12$ este egală cu:

A. $(X + 2)(X - 6)$ **B.** $(X - 2)(X + 6)$ **C.** $(X - 12)^2$.

(3p) **b.** Arătați că $E(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, pentru orice număr real x, $x \neq -6$, $x \neq -1$, $x \neq 2$ și $x \neq 4$.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Testul 2

1. Se consideră expresiile algebrice $E(x) = x - 1$ și $F(x) = x - 2$. Efectuați:

(1p) **a.** $-2E(x) + F(x)$;

(1p) **b** $E(x) \cdot F(x)$.

2. Rezolvați ecuațiile următoare, utilizând eventual notații și metoda descompunerii în factori:

(1p) **a.** $2 - \left(x - \sqrt{2}\right)^2 = 0$;

(1p) **b.** $a^4 - 10a^2 + 25 = 0$;

(1p) **c** $12 - x^2 = 0$.

3. Se consideră expresia

$$E(y) = \left(\frac{7y}{1-5y} + \frac{5y}{25y^2 - 1} - \frac{2y}{5y+1}\right) : \left(\frac{25y^2 + 1}{1 - 25y^2} - 1\right),$$

unde y este număr real, $y \neq 0{,}2$ și $y \neq -0{,}2$.

(1p) **a.** Descompunerea în factori a expresiei $1 - 25y^2$ este egală cu:

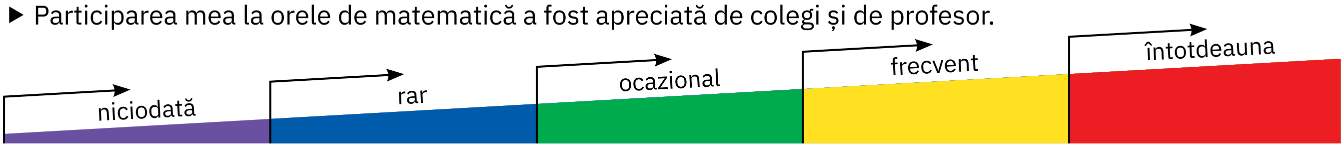
A. $(y + 1)(y - 1)$ **B.** $(1 - 5y)^2$ **C.** $(1 - 5y)(1 + 5y)$.

(3p) **b.** Arătați că $E(y)$ este număr rațional, pentru orice număr real y, $y \neq 0{,}2$ și $y \neq -0{,}2$.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevilor

- Am fost preocupat(ă) să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U3 Funcții

Lecția 1 Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite

Lecția 2 Funcția de forma $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este o mulțime finită sau un interval nedegenerat. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

Proiect

Lecția 3 Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale

Recapitulare și evaluare

Funcțiile pot fi utilizate în diverse situații practice, pentru calcularea veniturilor, profiturilor, cheltuielilor, determinarea vitezei și a distanței. De exemplu, un horticultor care trebuie să cumpere mai mulți saci de îngrășământ pentru terenul pe care cultivă lalele află că prețul transportului crește cu cât crește numărul sacilor achiziționați; el poate exprima prețul total pe care trebuie să îl plătească furnizorului în funcție de numărul sacilor de îngrășământ.

3.1

Lecția 1: Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite

Cuvinte-cheie

funcție · diagramă · produs cartezian · domeniu de definiție · tabel de valori · graficul unei funcții · domeniu de valori · formulă analitică · reprezentare geometrică

Utilitate

Funcțiile descriu situații în care o anumită cantitate este determinată (depinde) de o altă cantitate.

Astfel, dacă o bancă oferă o rată a dobânzii de 5% pentru constituirea unui depozit, profitul obținut investind 10 000 de lei depinde de durata de timp a investiției.

Asemănător, dacă tariful unui taxi este compus dintr-o sumă inițială de 3 lei (sumă fixă), la care se adaugă câte 2 lei pentru fiecare kilometru, atunci costul unei deplasări cu taxiul depinde de distanța parcursă.

Legea mișcării rectilinii uniforme spune că dacă un mobil efectuează o mișcare rectilinie (în linie dreaptă) și uniformă (cu viteză constantă), atunci distanța parcursă este egală cu produsul dintre timpul și viteza de deplasare; cu alte cuvinte, întrucât viteza este constantă, distanța parcursă este o funcție care depinde de timp.

Întrucât se descoperă și se dezvoltă continuu teorii despre dependențele dintre diverse cantități, atât în natură, cât și în societate, funcțiile sunt instrumente importante în construcția modelelor matematice.

1.1. Noțiunea de funcție

De reținut

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Prin *funcție* definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se înțelege o lege sau un procedeu (regulă, convenție) prin care se realizează o corespondență de la mulțimea A la mulțimea B astfel încât fiecărui element din A i se asociază un unic element din B.

O funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se notează $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește *domeniul de definiție al funcției f*, iar mulțimea B se numește *domeniul de valori* (sau *codomeniul*) funcției f.

Procedeul efectiv prin care facem ca fiecărui element din A să-i corespundă un singur element din B se numește *lege de corespondență*.

Fiind dat un element $x \in A$, elementul $y \in B$ care i se asociază lui x prin funcția f se notează $f(x)$ și se numește *imaginea lui x* prin funcția f sau *valoarea funcției f* în punctul x; egalitatea $y = f(x)$, $x \in A$, reprezintă legea de corespondență.

Exemple

Considerăm următoarele corespondențe de la mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$ la mulțimea $B = \{t, u, v, w\}$.

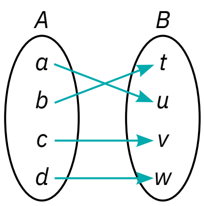


Figura 1

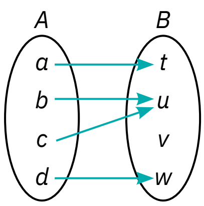


Figura 2

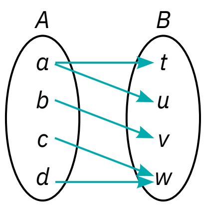


Figura 3

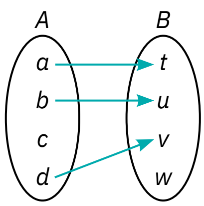


Figura 4

Corespondențele din Figura 1 și din Figura 2 definesc funcții, întrucât fiecărui element din A i se asociază câte un singur element din B.

În Figura 3, elementului $a \in A$ îi corespund două elemente $t \in B$ și $u \in B$, iar în Figura 4, elementului $c \in A$ nu i se asociază niciun element din B. Așadar, aceste două corespondențe nu definesc funcții.

Observație

Reprezentând mulțimile A și B prin diagrame, iar legea de corespondență prin săgeți, din definiția funcției deducem că de la fiecare element din A pleacă o singură săgeată (și nu mai multe sau niciuna), în timp ce la un element din B poate ajunge fie o singură săgeată, fie mai multe sau chiar niciuna.

1.2. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate prin diagrame sau tabele

Activitate pe echipe

Maria merge cu părinții la un parc de distracții, folosind autoturismul familiei. Primele două ore de parcare sunt gratuite, iar perioada care depășește 2 ore se taxează cu câte 2 lei pe oră. Regulamentul de parcare stipulează că fracțiunile de oră se taxează la tariful unei ore întregi (de exemplu, pentru 3 ore și 20 de minute se plătește tariful pentru 4 ore).

Lucrând în echipă cu colegul de bancă, rezolvați următoarele sarcini:

1. Arătați că:
- **a.** tariful pentru 3 ore este 2 lei;
- **b.** tariful pentru 4 ore este 4 lei;
- **c.** pentru 6 ore se plătesc mai puțin de 9 lei;
- **d.** pentru 7 ore nu se plătesc mai mult de 10 lei.

2. Familia Mariei și-a propus să petreacă cel mult 7 ore în parcul de distracții. Stabiliți care este tariful de parcare pentru fiecare interval de timp petrecut acolo, exprimat în număr întreg de ore.
Completați datele obținute într-un tabel similar celui de mai jos.

Durata (ore)	1	2	3	4	5	6	7
Tariful (lei)	0	0	2		6		

3. Analizând datele obținute la punctul 2, observați că se poate stabili o funcție $f: A \to B$, definită pe mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ cu valori în mulțimea $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 10\}$, prin care unei durate de timp $t \in A$ i se asociază tariful de parcare pentru t ore.
De exemplu, $f(1) = 0$ și $f(3) = 2$. Verificați dacă sunt adevărate afirmațiile:
a. $f(2) = 0$; **b.** $f(5) = 7$; **c.** $f(4) = 4$; **d.** $f(6) = 8$; **e.** $f(7) < 10$.

De reținut

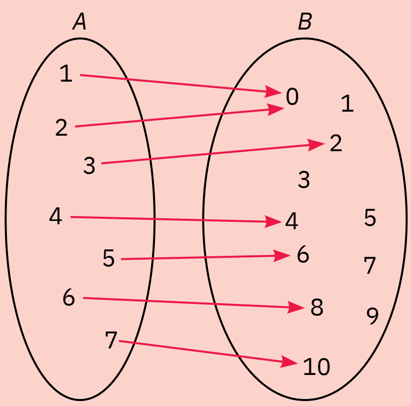
În general, dacă domeniul de definiție al unei funcții este o mulțime finită, de regulă având un număr mic de elemente, putem defini/reprezenta funcția cu ajutorul diagramelor Venn-Euler sau cu ajutorul unui tabel.

De exemplu, funcția $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{0, 1, 2, 3, ..., 10\}$, definită mai sus, se poate reprezenta astfel:

a. cu ajutorul unui tabel:

t	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$	0	0	2	4	6	8	10

b. cu ajutorul unei diagrame:



1.3. Funcții numerice. Funcții definite cu ajutorul unor formule algebrice

Situație problemă

Andreea studiază efectele încălzirii globale asupra mediului de viață al animalelor. Dintre datele adunate, cele care privesc fauna europeană și asiatică sunt exprimate în grade Celsius (°C), iar cele referitoare la fauna nord-americană sunt exprimate în grade Fahrenheit (°F). Dorind să redacteze un studiu uniform, Andreea folosește formula $C=\frac{5}{9}(F-32)$ pentru a transforma gradele Fahrenheit în grade Celsius și obține următorul tabel:

°F (Fahrenheit)	95	32	68	89,6	75,2
$C=\frac{5}{9}(F-32)$	$\frac{5}{9}(95-32)$	$\frac{5}{9}(32-32)$	$\frac{5}{9}(68-32)$	$\frac{5}{9}(89{,}6-32)$	$\frac{5}{9}(75{,}2-32)$
°C (Celsius)	35	0	20	32	24

Notând $A=\{32;\ 68;\ 75{,}2;\ 89{,}6;\ 95\}$ și $B=\{0;\ 20;\ 24;\ 32;\ 35\}$, cu ajutorul tabelului de mai sus putem defini o funcție $f: A \to B$, prin care unei valori $x \in A$, care exprimă temperatura în grade Fahrenheit, îi asociem o valoare $f(x) \in B$, care exprimă aceeași temperatură, dar în grade Celsius. Având în vedere regula de conversie, putem defini legea de corespondență a funcției f prin formula:

$$f(x)=\frac{5}{9}(x-32).$$

În practică, se lucrează deseori cu *funcții numerice*, adică funcții pentru care domeniul de definiție și domeniul de valori sunt mulțimi de numere reale (submulțimi ale lui $\mathbb{R}$).

De regulă, legea de corespondență a unei funcții numerice $f: A \to B$ este definită printr-*o expresie analitică* (formulă algebrică) ce depinde de x, notată de asemenea $f(x)$, prin care imaginea fiecărui element $x \in A$ se determină înlocuind pe x în expresia $f(x)$.

Funcțiile definite prin formule sunt mai ușor de utilizat, în special atunci când este necesară prelucrarea unui număr mare de date. În mod evident, dacă domeniul de definiție al unei funcții are un număr mare de elemente (eventual o infinitate), devine incomod sau chiar imposibil să reprezentăm funcția cu ajutorul unui tabel sau prin diagrame.

Exemple

1. Fiind dată funcția $f: \{1, 2, 3, ..., 100\} \to \mathbb{N}$, $f(x)=x^2$, valorile funcției f în 1, 2, 32 și 99 sunt:

$$f(1)=1^2=1,\ f(2)=2^2=4,\ f(32)=32^2=1024,\ f(99)=99^2=9801.$$

2. Imaginile elementelor 1, 2, 6, 11 prin funcția $g: \{1, 2, 3, ..., 11\} \to \mathbb{Q}$, $g(n)=\frac{n}{n+24}$, sunt:

$$g(1)=\frac{1}{1+24}=\frac{1}{25},\ g(2)=\frac{2}{2+24}=\frac{1}{13},\ g(6)=\frac{6}{6+24}=\frac{1}{5},\ g(11)=\frac{11}{11+24}=\frac{11}{35}.$$

3. Valorile funcției $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(x)=2^x$ în punctele 0, 3, 10, 20 sunt:

$$h(0)=2^0=1,\ h(3)=2^3=8,\ h(10)=2^{10}=1\,024,\ h(20)=2^{20}=1\,048\,576.$$

Unei expresii algebrice oarecare i se poate asocia o funcție numerică, impunând condiția ca domeniul de definiție să nu conțină puncte în care respectiva expresie nu are sens. Astfel:

a. Expresia $\frac{x}{x^2+1}$ are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci putem defini funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

b. Cu ajutorul expresiei $\frac{2x}{x-1}$ nu putem defini o funcție f pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, deoarece $f(1)$ nu ar avea sens. Întrucât numitorul unei fracții trebuie să fie nenul, expresia dată are sens (există) pentru orice număr real x cu proprietatea $x-1 \neq 0$, adică $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

În acest caz, spunem că domeniul maxim de definiție al unei funcții $g: D \to \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x}{x-1}$, este $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Similar, domeniul maxim de definiție al unei funcții $h: D \to \mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{x}$, este intervalul $[0, \infty)$.

Observație

O funcție poate fi definită și prin mai multe formule, cu precizarea că fiecare formulă este valabilă pe o anumită submulțime a domeniului de definiție, astfel încât să nu se folosească două formule pentru determinarea imaginii aceluiași element.

Funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -n & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$, este o funcție definită prin două formule.

Avem $f(0) = 0 + 1 = 1$, $f(3) = -3$, $f(10) = 11$, $f(11) = -11$.

Matematică aplicată

1. Un autoturism care se deplasează în linie dreaptă, cu viteza constantă v, efectuează o mișcare rectilinie și uniformă.
   Distanța parcursă d depinde de durata t a mișcării, deci este o funcție de timp. Funcția distanță poate fi definită prin formula: $d(t) = v \cdot t$.
2. Lucrul mecanic este o mărime fizică definită ca produsul dintre componenta forței care acționează asupra unui corp în direcția deplasării punctului ei de aplicație și mărimea drumului parcurs.
   Dacă o forță constantă F deplasează un corp, lucrul mecanic efectuat depinde (adică este o funcție de) mărimea deplasării d. Mai exact: $L(d) = F \cdot d$.

1.4. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții

Situație problemă

La finalul unui antrenament, fiecare dintre cei 17 componenți ai echipei de fotbal a școlii trage câte 5 șuturi la poartă, de la 16 metri.

Antrenorul contorizează numărul de reușite și realizează o statistică, în funcție de numărul de goluri înscrise:

goluri înscrise	1	2	3	4	5
număr de jucători	2	4	5	3	3

Cu ajutorul tabelului de mai sus, putem defini o funcție $u: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{2, 3, 4, 5\}$, care asociază fiecărui $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ numărul de jucători $u(x)$ care au înscris x goluri.

Notând $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{2, 3, 4, 5\}$, corespondențele $x \to u(x)$ pun în evidență perechile ordonate $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ și $(5, 3)$, care sunt elemente ale produsului cartezian $A \times B$.

De reținut

Fiind dată o funcție $f: A \to B$, se numește *graficul funcției f* mulțimea:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

Graficul unei funcții $f: A \to B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

Dacă f este o funcție numerică, atunci A și B sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, deci $G_f \subset A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Deoarece mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se reprezintă geometric prin planul raportat la un reper cartezian xOy, rezultă că graficului unei funcții numerice i se poate asocia o mulțime de puncte din planul xOy.

Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x, y)$, cu $(x, y) \in G_f$, se numește *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f.

În situația-problemă descrisă mai înainte, graficul funcției u este mulțimea:

$$G_u = \{(1, 2); (2, 4); (3, 5); (4, 3); (5, 3)\}.$$

Așadar, reprezentarea geometrică a graficului funcției u este submulțimea planului formată din punctele $M_1(1, 2)$, $M_2(2, 4)$, $M_3(3, 5)$, $M_4(4, 3)$ și $M_5(5, 3)$, după cum se observă în Figura 5.

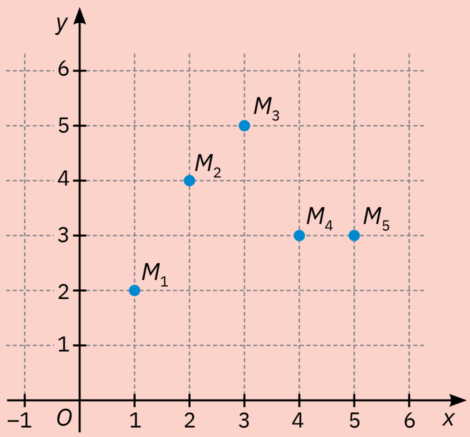


Figura 5

Exemplu

Notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n și definim funcțiile f, g: $\{2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{N}$, definite prin $f(n) = u(5^n)$, respectiv $g(n) = u(4^n) - 3$. Graficele funcțiilor f și g sunt mulțimile:

$$G_f = \{(2, 5); (3, 5); (4, 5); (5, 5); (6, 5)\} \quad \text{și} \quad G_g = \{(2, 3); (3, 1); (4, 3); (5, 1); (6, 3)\}.$$

Figurile 6 și 7 conțin reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f, respectiv g.

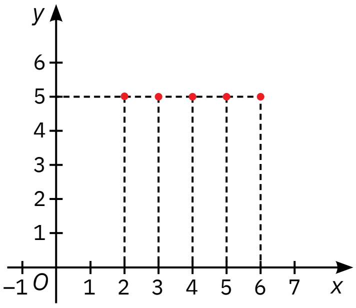


Figura 6: Graficul funcției $f(n) = u(5^n)$

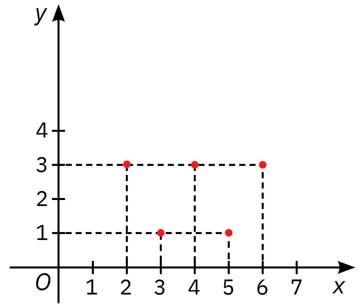


Figura 7: Graficul funcției $g(n) = u(4^n) - 3$

Observație

Mulțimea denumită *grafic* se definește pentru orice funcție, dar reprezentarea geometrică a graficului unei funcții nu are sens decât pentru o funcție numerică.

În acest caz, prin abuz de limbaj, vom folosi adeseori exprimarea mai scurtă *graficul funcției* în loc de *reprezentarea geometrică a graficului funcției*, deși cele două noțiuni sunt distincte.

Această exprimare simplificată este motivată de semnificația cuvântului *grafic*: *reprezentare prin desen a unei mărimi*; de aceea, vom accepta acest abuz de limbaj (nu și de fond), la fel cum la geometrie spunem adesea unghi de 60° în loc de unghi cu măsura de 60° etc.

Portofoliu

Se consideră mulțimile:

$$D = \{(-2, 4); (-1, 1); (0, 0); (1, 1); (2, 4)\};$$
$$E = \{(0, 0); (1, 1); (1, -1); (4, 2); (4, -2)\}.$$

Corespondențele generate de perechile din mulțimile D și E sunt reprezentate cu ajutorul unor diagrame (figurile 8 și 9).

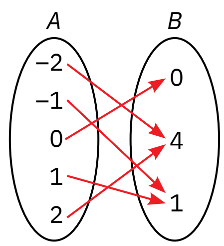


Figura 8

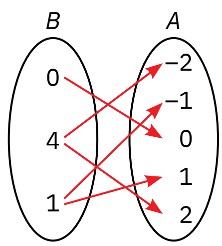


Figura 9

1. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 4\}$. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
   a. Mulțimea D este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
   b. Mulțimea E este o submulțime a produsului cartezian $B \times A$.
   c. Mulțimea D reprezintă graficul unei funcții $f: A \to B$.
   d. Mulțimea E reprezintă graficul unei funcții $g: B \to A$.

2. Reprezentați în planul înzestrat cu un sistem de coordonate carteziene mulțimile D, respectiv E.

3. Verificați, pentru fiecare dintre mulțimile D și E, dacă următoarea afirmație este adevărată sau falsă:
P: „O mulțime de puncte din planul xOy este reprezentarea geometrică a graficului unei funcții dacă atât axa Oy, cât și orice dreaptă paralelă cu Oy conțin cel mult un punct din mulțimea de puncte dată."

4. Dați un exemplu de funcție $f: A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime finită. Reprezentați geometric graficul funcției f și verificați dacă propoziția P de mai sus rămâne adevărată și pentru exemplul ales.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. a. Eliminați unul dintre punctele reprezentate în Figura 10, astfel încât punctele rămase să fie reprezentarea grafică a unei funcții $f: X \to Y$, iar toate punctele acestei reprezentări să aibă ordonatele distincte.
   b. Pentru funcția f, scrieți elementele mulțimilor X și Y, știind că Y are cardinalul minim posibil.
   c. Descrieți printr-un tabel funcția f.

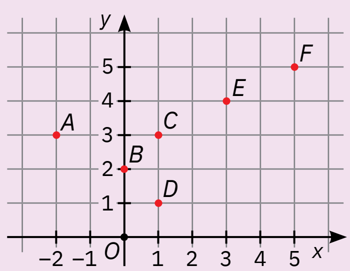


Figura 10

Rezolvare

a. Punctele C și D sunt singurele care au aceeași abscisă, așadar unul dintre ele trebuie eliminat. Deoarece punctele A și C au ordonata 3, unul dintre ele trebuie eliminat. Prin urmare, punctul C nu face parte din reprezentarea grafică a funcției f.

b. Eliminând punctul C, obținem $f: X \to Y$, cu $X = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$ și $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c. Legea de corespondență verificată de funcția f este:

x	-2	0	1	3	5
$f(x)$	3	2	1	4	5

2. Determinați numărul funcțiilor $f: \{2, 5, 8\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea $f(2) + f(8) = 3$.

Rezolvare

a. Deoarece $f(2)$ și $f(8)$ aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, 3\}$, condiția $f(2) + f(8) = 3$ este verificată în următoarele 4 cazuri: $f(2) = 0, f(8) = 3$ sau $f(2) = 1, f(8) = 2$ sau $f(2) = 2, f(8) = 1$ sau $f(2) = 3, f(8) = 0$.

Pentru fiecare caz, $f(5)$ poate fi oricare dintre cele 5 elemente ale domeniului de valori, deci se pot defini $4 \cdot 5 = 20$ de funcții cu proprietatea din enunț.

3. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică relația $f(7x + 3) = 11x - 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Determinați numărul $f(101)$.

Rezolvare

Pentru a determina $f(101)$, în legea de corespondență a funcției vom înlocui x cu valoarea pentru care $7x + 3 = 101$. Obținem $x = 14$, deci $f(7 \cdot 14 + 3) = 11 \cdot 14 - 5$, adică $f(101) = 149$.

4. Se consideră mulțimea $D = \{1, 5, 17, 33\}$. Determinați:

a. mulțimea $E \subset \mathbb{R}$, cu număr minim de elemente, astfel încât corespondența $x \to 3x + 7$ să definească o funcție $f: D \to E$;

b. mulțimea $A \subset \mathbb{R}$, cu număr maxim de elemente, pentru care corespondența $x \to 4x - 3$ definește o funcție $g: A \to D$.

Rezolvare

a. Corespondența indicată definește funcția $f: D \to E$, $f(x) = 3x + 7$. Imaginea elementului $1 \in D$ este $f(1) = 3 \cdot 1 + 7 = 10$, deci $10 \in E$. Analog, din $f(5) = 22$, $f(17) = 58$ și $f(33) = 106$ rezultă $22 \in E$, $58 \in E$, respectiv $106 \in E$. Deoarece E trebuie să aibă un număr minim de elemente, obținem $E = \{10, 22, 58, 106\}$.

b. Considerăm funcția $g: A \to D$, $g(x) = 4x - 3$. Un element $y \in D$ este imaginea unui element $x \in A$ prin funcția g, dacă $g(x) = y$. Îi atribuim pe rând lui y valorile 1, 5, 17, 33 (elementele lui D) și rezolvăm ecuația $g(x) = y$ pentru a găsi elemente ale mulțimii A:

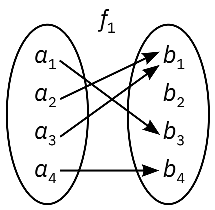
- pentru $y = 1$: $g(x) = 1 \Leftrightarrow 4x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$;
- pentru $y = 5$: $g(x) = 5 \Leftrightarrow 4x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 2$;
- pentru $y = 17$: $g(x) = 17 \Leftrightarrow 4x - 3 = 17 \Leftrightarrow x = 5$;
- pentru $y = 33$: $g(x) = 33 \Leftrightarrow 4x - 3 = 33 \Leftrightarrow x = 9$.

Întrucât nu toate elementele domeniului de valori sunt obligatoriu imagini ale unor elemente din domeniul de definiție al unei funcții, rezultă că mulțimea A are cel mult patru elemente: 1, 2, 5 și 9. Numărul maxim de elemente se obține pentru $A = \{1, 2, 5, 9\}$.

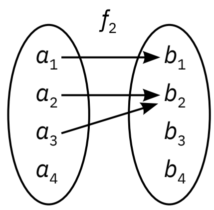
Probleme propuse

1. Precizați care dintre următoarele diagrame reprezintă o funcție definită pe mulțimea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ cu valori în mulțimea $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

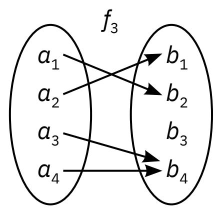
a.



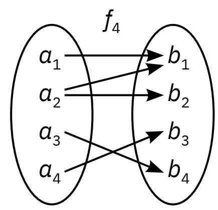
b.



c.



d.



2. Explicați care dintre tabelele următoare descrie o funcție:

a.

x	-2	-1	3	-3	-2	1
$f(x)$	3	3	-1	-1	4	4

b.

x	-2	-1	3	-3	2	1
$g(x)$	3	3	-1	-1	4	4

3. Precizați dacă utilizând formula $f(x) = 2x + 5$ se poate defini:
   a. o funcție $f: \{-2, -1, 1, 2\} \to \{1, 3, 5, 9\}$;
   b. o funcție $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
4. Se consideră mulțimile $A = \{42, 77, 81, 98\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ și $C = \{9, 11, 42, 49\}$. Reprezentați cu ajutorul diagramelor următoarele corespondențe, apoi decideți care dintre acestea definește o funcție:
   a. $x \in A \to y \in B$, unde y este divizor al lui x;
   b. $x \in B \to y \in A$, unde y este multiplu al lui x;
   c. $x \in A \to y \in C$, unde y este divizor al lui x;
   d. $x \in C \to y \in A$, unde y este multiplu al lui x.
5. Următoarele perechi sunt elementele unei submulțimi a produsului cartezian $A \times B$:
   a. $(-2, 3), (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1), (3, -2)$;
   b. $(-2, 2), (1, -3), (2, 1), (3, -1), (1, 2), (0, -2)$;
   c. $(-3, 1), (-2, -1), (1, -1), (0, 1), (2, -1), (4, 1)$;
   d. $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)$.

   Indicați, în fiecare caz, mulțimile minimale A și B. Precizați care dintre mulțimile de perechi ordonate enumerate reprezintă graficul unei funcții definite pe A cu valori în B. Reprezentați grafic funcțiile obținute.
   Observație. mulțimi minimale = mulțimi cu număr minim de elemente posibil.
6. Determinați domeniul maxim de definiție D pentru fiecare dintre funcțiile:
   a. $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1},\ D \subset \mathbb{R}$;
   b. $f: D \to \mathbb{Q},\ f(k) = \dfrac{2k-1}{k+|k|},\ D \subset \mathbb{Z}$;
   c. $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2-1},\ D \subset \mathbb{R}$;
   d. $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x+4}{x(x+1)(x+2)},\ D \subset \mathbb{R}$.
7. Diagrama din Figura 11 descrie o funcție $f: A \to B$.
   a. Scrieți elementele domeniului de definiție.
   b. Scrieți elementele domeniului de valori.
   c. Calculați $f(1) + f(4) \cdot f(2) - f(7) : 3 - f(0)$.

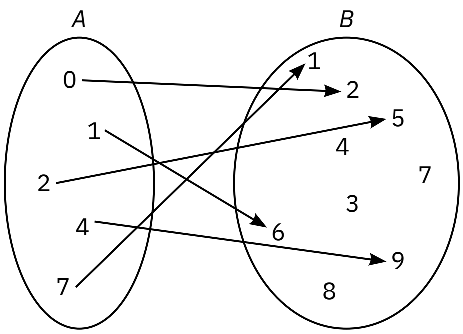


Figura 11

8. Se consideră funcția $f: \{-3, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 2$.
   a. Stabiliți care dintre punctele $A(-3, 1)$ și $B(-1, 3)$, $C(0, 2)$ și $D(1, 1)$ se află pe graficul funcției f.
   b. Reprezentați grafic funcția f într-un reper cartezian xOy.
9. Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$.
   a. Alcătuiți tabelul de valori al funcției f.
   b. Reprezentați grafic funcția f într-un reper cartezian xOy.
10. Se consideră mulțimea $M = \{3, 6, 9, 12\}$. Determinați:
    a. mulțimea $A \subset \mathbb{R}$, cu număr maxim de elemente pentru care există o funcție $f: A \to M,\ f(x) = 3x + 6$;
    b. mulțimea $B \subset \mathbb{R}$, cu număr minim de elemente, astfel încât să existe funcția $g: M \to B,\ g(x) = 2x - 17$;
    c. două numere reale a și b pentru care asocierea $x \to ax + b$ definește o funcție de la mulțimea M la mulțimea $N = \{0, 1, 2, 3\}$.
11. a. Determinați valorile numărului real m și reprezentați grafic funcția $f: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + m$, știind că punctul $A(1, -1)$ aparține graficului funcției f.
    b. Determinați numărul real m și reprezentați grafic funcția $f: \{0, 1, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx - 5$, știind că punctul $A(m + 1, m + 4)$ aparține graficului funcției.
    c. Determinați numerele reale a și b și apoi reprezentați grafic funcția $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, știind că punctele $A(1, -1)$ și $B(3, 3)$ aparțin graficului funcției f.
12. În Figura 12, mulțimea $\{A, B, C, D, E, F\}$ este reprezentarea grafică a unei funcții numerice $f: X \to Y$.
    a. Scrieți elementele mulțimii X.
    b. Scrieți elementele mulțimii Y, știind că are cardinalul minim posibil.
    c. Descrieți aceeași funcție printr-un tabel.
    d. Descrieți aceeași funcție printr-o formulă.

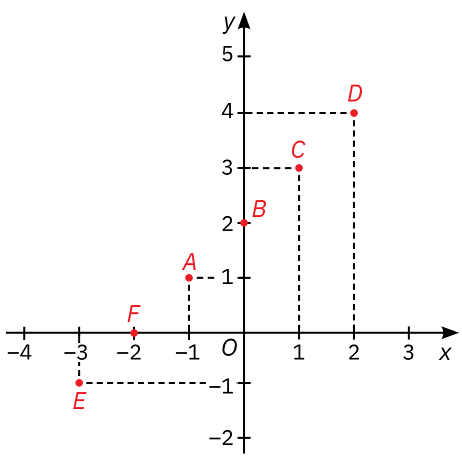


Figura 12

13. Determinați, în fiecare caz, numărul funcțiilor $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ care îndeplinesc condițiile:

a. $f(1) + f(2) = 3$; **b.** $f(1), f(2), f(3), f(4)$ sunt distincte două câte două și $f(2) + f(3) = 5$.

14. Determinați toate funcțiile $f\colon \{2, 3, 4\} \to \{3, 4, 5\}$ cu proprietatea $f(x) \geq x + 1$, pentru orice $x \in \{2, 3, 4\}$. Reprezentați-le cu ajutorul unui singur tabel.

15. **a.** Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică relația $f(3x + 1) = -2x + 4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Calculați $f(-2) + f(22)$.

b. Funcția $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ verifică relația $f(x^2) = 3x + 1$, pentru orice $x > 0$. Calculați $f(1) + f(4) + f(9)$.

16. O funcție $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ are proprietatea $f(m) + f(n) = f(mn)$, pentru orice numere naturale m și n. Știind că $f(2) = 3$ și $f(3) = 5$, calculați $f(1152)$.

17. Tabelul următor arată numărul de cutii cu mâncare pentru câini consumate de Pufi și Rex, cei doi câini ai lui Rareș, de-a lungul a șase zile:

număr de zile (x)	1	2	3	4	5	6
număr de cutii (y)	2	4	6	8	10	12

a. Definiți o funcție f care să asocieze fiecărui număr de zile x numărul de cutii y consumate până în ziua x inclusiv.

b. Exprimați legea de corespondență a funcției cu ajutorul unei formule.

c. Reprezentați grafic funcția f.

Autoevaluare

1. Fie $f\colon A \to B$ o funcție. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate: (2p)

a. Mulțimea A se numește domeniul de . . . . al funcției f.

b. Mulțimea B se numește domeniul de . . . . al funcției f.

c. Dacă A și B sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale, atunci f se numește funcție . . . .

d. Dacă $b = f(a)$, unde $a \in A$ și $b \in B$, atunci b se numește . . . . elementului a prin funcția f.

2. Se consideră funcția $f\colon \{1, 2, 3, a\} \to \{3, 5, b, 11\}$, $f(x) = 2x + 1$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. (2p)
Alegeți varianta corespunzătoare răspunsului corect:

a. $f(1)$ este egal cu:
A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 7.

b. $f(2)$ este egal cu:
A. 4 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 5.

c. Numărul a este egal cu:
A. 0 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5.

d. Numărul b este egal cu:
A. 3 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11.

3. Tabelul de mai jos prezintă temperatura zilnică medie înregistrată de-a lungul unei săptămâni. (2p)

temperatura (x)	21	23	20	18	21	22	24
ziua (y)	Lu	Ma	Mi	Jo	Vi	Sa	Du

Precizați dacă acest tabel definește o funcție. Justificați răspunsul!

4. Determinați numărul real m și reprezentați grafic funcția $f\colon \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -mx + 2$, știind că punctul $A(1, 0)$ aparține graficului funcției f. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

3.2

Lecția 2: Funcția de forma $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este o mulțime finită sau un interval nedegenerat. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

Cuvinte-cheie

dreaptă | produs cartezian | funcție de gradul I | funcție constantă | reprezentare geometrică

Utilitate

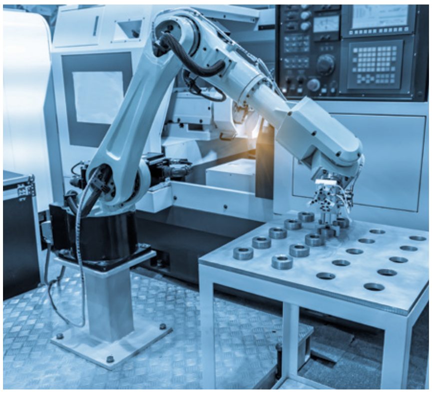
Procesele din viața de zi cu zi sau fenomenele din natură se desfășoară deseori liniar (prezintă creșteri sau descreșteri constante la creșteri constante ale variabilelor), cel puțin între anumite limite. Un atelier de cofetărie care produce câte 200 de prăjituri pe oră, după două ore va realiza 400 de prăjituri, după 3 ore, 600 de prăjituri, după 4 ore, 800 de prăjituri etc. (numărul de prăjituri crește cu aceeași cantitate după fiecare oră).

La fel, dacă un rezervor de 8000 de litri de apă se golește printr-o conductă cu câte 40 de litri pe minut, după două minute mai conține $8000 - 2 \cdot 40$ litri, după 5 minute, $8000 - 5 \cdot 40$ litri; volumul de apă din rezervor descrește cu același număr de litri, odată cu fiecare minut scurs.

Multe dintre situațiile cotidiene pot fi descrise prin astfel de procese liniare, pe care le vom modela cu ajutorul funcțiilor, fie pentru a rezolva probleme concrete, fie pentru a face estimări sau predicții asupra proceselor/fenomenelor viitoare.

2.1. Studiu de caz: funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este o mulțime finită

Situație problemă



Robotul industrial din figura alăturată produce două piese pe minut. Un ciclu de producție durează 10 minute, după care robotul se oprește pentru colectarea pieselor produse; apoi procesul se reia cu un nou ciclu.

Câte piese produce robotul după trei minute? Dar după cinci minute? Dar într-un ciclu de producție?

Următorul tabel arată numărul de piese produse într-un ciclu de producție complet (10 minute), măsurând din minut în minut.

durata (minute)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
număr piese	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Observăm că numărul de piese produse după un număr întreg x de minute, $0 \leq x \leq 10$, este $2x$.

Definind o funcție cu ajutorul tabelului de mai sus, putem spune că numărul de piese obținute de-a lungul unui ciclu de producție este descris de funcția:

$$f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x,$$

pe care am reprezentat-o grafic în Figura 1.

Intuitiv, observăm că punctele graficului sunt coliniare (aspect confirmat în Figura 2), iar dreapta care conține punctele graficului trece prin origine.

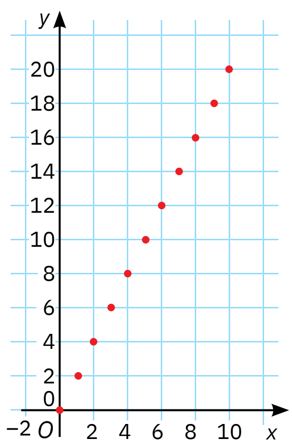


Figura 1

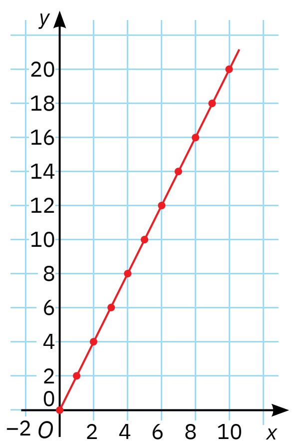


Figura 2

De reținut

Dacă $a \neq 0$ este un număr real și D este o mulțime finită de numere reale, atunci reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, este o mulțime de puncte coliniare, aflate pe o dreaptă care trece prin originea sistemului de coordonate.

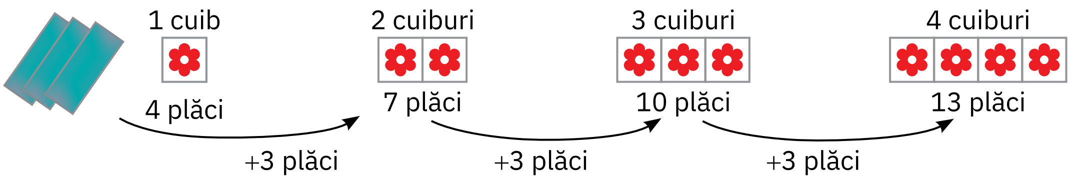
2.2. Studiu de caz: funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este o mulțime finită

Situație problemă

În grădina Mariei, un decorator de exterior folosește plăci de lemn pentru a delimita conturul unor cuiburi de flori, așezate de-a lungul unei alei pe care încap 25 de cuiburi. Maria se gândește:

a. Câte plăci sunt necesare pentru construcția a 7 cuiburi alăturate? Dar pentru 12 cuiburi?

b. Ajung 10 pachete a câte 8 plăci pentru a construi cele 25 de cuiburi?



Numărul de plăci p necesare depinde de numărul n de cuiburi construite, deci este o funcție de n, notată $p(n)$. Avem $p(1) = 4$, $p(2) = 7$, $p(3) = 10$, $p(4) = 13$.

Putem răspunde ușor la întrebările de mai sus dacă găsim o relație care să exprime valoarea lui $p(n)$ printr-o formulă.

Se observă că numărul de plăci necesare crește cu 3 odată cu fiecare cuib adăugat.

Întrucât adunarea repetată a lui 3 de n ori este același lucru cu înmulțirea lui n cu 3, pentru început vom compara valorile expresiei $3n$ cu valorile $p(n)$, pentru $n = 1, 2, 3, 4$.

n	1	2	3	4
$3n$	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 4 = 12$
$p(n)$	$4 = 3 + 1 = 3 \cdot 1 + 1$	$7 = 6 + 1 = 3 \cdot 2 + 1$	$10 = 9 + 1 = 3 \cdot 3 + 1$	$13 = 12 + 1 = 3 \cdot 4 + 1$

Pentru valorile studiate, legea de corespondență dintre numărul n de cuiburi construite și numărul $p(n)$ de plăci necesare se scrie $p(n) = 3n + 1$. Intuim că numărul de plăci necesare este dat de funcția:

$$p: \{1, 2, \ldots, 25\} \to \mathbb{R}, \; p(n) = 3n + 1.$$

Intuiția este confirmată de raționament, sesizând că o succesiune de n cuiburi poate fi construită astfel:

$$p(n):\; 1 \quad \underbrace{+3 \quad +3 \quad +3 \quad \ldots \quad +3}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

Revenim la întrebările Mariei.

a. Pentru șapte cuiburi este nevoie de $p(7) = 3 \cdot 7 + 1 = 22$ de plăci, iar pentru 12 cuiburi, de $p(12) = 37$ de plăci.

b. Cele 25 de cuiburi necesită $p(25) = 3 \cdot 25 + 1 = 76$ de plăci, deci 10 pachete a câte 8 plăci sunt suficiente.

Reprezentând grafic funcția p, constatăm că punctele graficului sunt coliniare, iar dreapta care le conține nu trece prin origine (Figura 3).

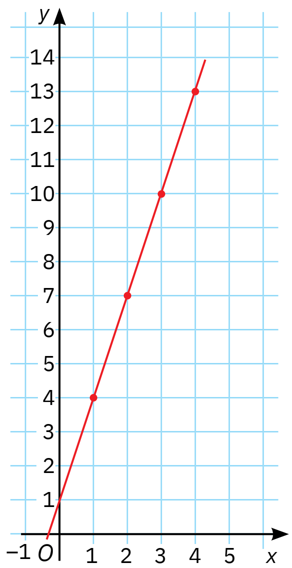


Figura 3

De reținut

Dacă $a \neq 0$, $b \neq 0$ sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale, atunci reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, este o mulțime de puncte coliniare, aflate pe o dreaptă ce nu conține originea sistemului de coordonate.

2.3. Studiu de caz: funcția $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval

Situație problemă

O piscină cu capacitatea de 300 m^3 se golește cu ajutorul unor pompe de evacuare. Într-un minut, volumul de apă din piscină scade cu 2 m^3.

Ne punem problema exprimării volumului de apă rămas în piscină în funcție de timpul scurs de la pornirea sistemului de evacuare (timp măsurat în minute).

Astfel, după t minute au fost evacuați $2t$ metri cubi de apă, deci în piscină se mai află $300 - 2t$ m^3.

Întrucât piscina se golește complet după 150 de minute, volumul de apă v rămas în piscină după t minute este dat de funcția:

$$v: [0,150] \to \mathbb{R},\ v(t) = 300 - 2t.$$

De exemplu, după 35 de minute, în piscină au rămas:

$$v(35) = 300 - 2 \cdot 35 = 230 \text{ metri cubi de apă},$$

iar după 3 195 de secunde, adică 53,25 min, în piscină se mai află:

$$v(53{,}25) = 193{,}5 \text{ metri cubi de apă}.$$

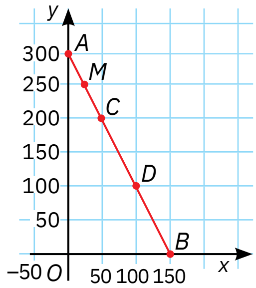


Figura 4

Întrucât domeniul de definiție al funcției v conține o infinitate de puncte, reprezentarea geometrică a graficului este și ea o mulțime infinită.

Pentru a ne forma o idee asupra formei graficului, calculăm valorile lui v în capetele intervalului de definiție. Întrucât $v(0) = 300$ și $v(150) = 0$, rezultă că punctele $A(0, 300)$ și $B(150, 0)$ aparțin graficului funcției v (Figura 4).

Pentru $t = 50$ și $t = 100$, găsim $C(50, 200) \in G_v$, respectiv $D(100, 100) \in G_v$, puncte care aparțin segmentului AB.

Aceeași proprietate are loc și pentru alte puncte ale graficului; astfel, pentru $t = 25$ obținem pe grafic punctul $M(25, 250)$, care aparține și acesta segmentului AB.

De reținut

Dacă a, b sunt numere reale, cu $a \neq 0$, iar $I = [m, n]$ este un interval închis și mărginit, atunci reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, este segmentul de dreaptă AB, determinat de punctele $A(m, f(m))$ și $B(n, f(n))$.

2.4. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

În paragrafele de mai sus am studiat câteva procese liniare întâlnite în viața cotidiană (ciclul de producție al unui robot industrial, construcția unor cadre pentru cuiburile de flori, golirea unei piscine). Am observat că aceste procese sunt descrise de funcțiile $f(x) = ax + b$, definite pe diverse tipuri de mulțimi. Se impune acum un studiu mai general.

De reținut

Definiție. O funcție de forma:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sunt numere reale date, se numește *funcție de gradul I*.

Numerele reale a și b se numesc *coeficienții* funcției f.

O funcție de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, unde $b \in \mathbb{R}$, se numește *funcție constantă*.

Interpretare geometrică. Graficul unei funcții de gradul întâi este o dreaptă.

Într-adevăr, să considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, numerele reale $x_1 < x_2 < x_3$ și punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ de pe graficul funcției f, pe care le reprezentăm într-un sistem de coordonate. Vom arăta că punctele A, B, C sunt coliniare.

Figura 5 corespunde cazului $a > 0$. Cazul $a < 0$ se tratează analog.

Deoarece $A(x_1, y_1) \in G_f$, rezultă că $f(x_1) = y_1$, adică $y_1 = ax_1 + b$. La fel, $y_2 = ax_2 + b$ și $y_3 = ax_3 + b$.

Atunci $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a$ și, analog,

$\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{ax_3 + b - ax_2 - b}{x_3 - x_2} = a$, deci $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{NC}{NB}$.

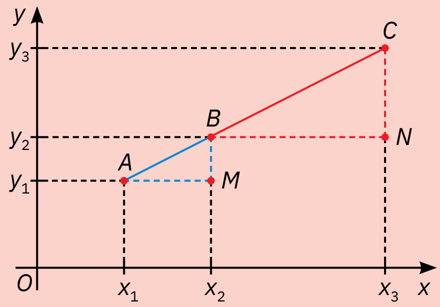


Figura 5

Cum $\widehat{AMB} \equiv \widehat{BNC}$, triunghiurile AMB și BNC sunt asemenea (cazul L.U.L.), deci $\widehat{MAB} \equiv \widehat{NBC}$. Deducem că unghiurile ABM și NBC sunt complementare, iar cum $\sphericalangle BMN = 90°$, rezultă că $\sphericalangle ABC = 180°$, deci punctele A, B, C sunt coliniare. Reciproc, se poate arăta că orice punct de pe dreapta AB are coordonatele de forma $(t, at + b)$, deci aparține graficului funcției f. În concluzie, graficul funcției f este dreapta AB.

Observație

Graficul unei funcții constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, este:

- dreapta paralelă cu axa Ox care trece prin punctul $T(0, b)$, dacă $b \neq 0$ (Figura 6);
- axa Ox, dacă $b = 0$.

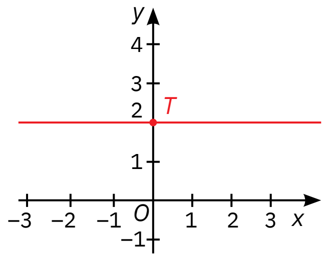


Figura 6

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$

Metodă

Algoritm pentru reprezentarea graficului unei funcții de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$

Întrucât o dreaptă este determinată de două puncte distincte, pentru a trasa graficul unei funcții de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ (a, $b \in \mathbb{R}$), este suficient să determinăm două puncte ale graficului.

Pasul 1. Se dau lui x două valori distincte x_1 și x_2, se calculează $f(x_1)$ și $f(x_2)$ și se obțin două puncte $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$, de pe graficul funcției f.

Pasul 2. Se reprezintă într-un reper cartezian punctele A și B. Graficul funcției f este dreapta AB.

Exemple

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

- Pentru $x = -2$: $f(-2) = 0$, deci $A(-2, 0) \in G_f$.
- Pentru $x = 0$: $f(0) = 2$, deci $B(0, 2) \in G_f$.

Graficul funcției f este dreapta AB (Figura 7).

2. Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 3$.

- Pentru $x = 1$: $g(1) = 1$, deci $C(1, 1) \in G_g$.
- Pentru $x = 2$: $g(2) = -1$, deci $D(2, -1) \in G_g$.

Graficul funcției g este dreapta CD (Figura 8).

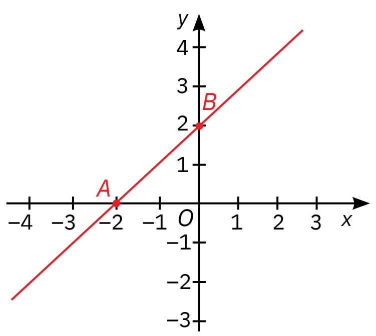


Figura 7

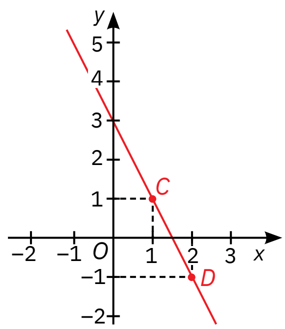


Figura 8

3. Fie funcția $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3$.
   - Pentru $x = -1$: $h(-1) = 3$, deci $E(-1, 3) \in G_h$.
   - Pentru $x = 2$: $h(2) = 3$, deci $F(2, 3) \in G_h$.

   Graficul funcției h este dreapta EF (Figura 9).

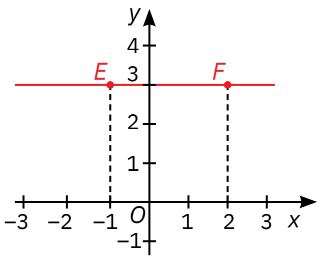


Figura 9

4. Fie funcția $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = 2x$.
   - Pentru $x = 0$: $u(0) = 0$, deci $O(0, 0) \in G_u$.
   - Pentru $x = 1$: $u(1) = 2$, deci $M(1, 2) \in G_u$.

   Graficul funcției u este dreapta OM (Figura 10).

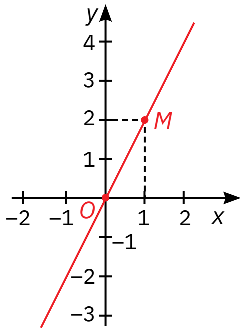


Figura 10

De reținut

În planul xOy deosebim trei tipuri de drepte: orizontale (axa Ox și dreptele paralele cu Ox), verticale (axa Oy și dreptele paralele cu Oy) și oblice (care nu sunt paralele, nici nu coincid cu Ox sau Oy).

1. Graficul unei funcții constante nenule $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, $b \neq 0$, este o dreaptă paralelă cu Ox.
   Graficul funcției constante nule $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, este axa Ox.
2. Graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \neq 0$, este o dreaptă oblică ce trece prin originea axelor de coordonate.
3. Graficul unei funcții de gradul I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a \neq 0$, $b \neq 0$, este o dreaptă oblică ce nu conține originea sistemului de axe de coordonate.

În acest caz, ne punem problema determinării punctelor de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate. Știm că punctele de pe axa Oy au coordonatele de forma $(0, y)$, iar coordonatele punctelor axei Ox au forma $(x, 0)$. Deducem că:
- dacă $A(0, y) \in G_f$, atunci $y = f(0)$, deci $G_f \cap Oy = \{A(0, b)\}$;
- dacă $B(x, 0) \in G_f$, atunci $f(x) = 0$, deci $ax + b = 0$. Rezultă $x = -\frac{b}{a}$, deci $G_f \cap Ox = \left\{B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$.

Observație

În paragrafele 2.1, 2.2, 2.3 am analizat comportarea unei funcții de forma $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, pentru care domeniul de definiție D este o mulțime finită sau un interval.

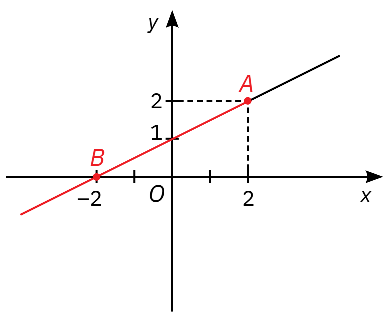
Considerând funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, obținută prin *prelungirea* domeniului de definiție D al funcției f la mulțimea $\mathbb{R}$ (cu aceeași lege de corespondență), constatăm că, în fiecare caz studiat, graficul funcției f este o submulțime a graficului funcției g (ca atare, G_f este o mulțime de puncte coliniare).

Invers, fiind dată o funcție $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, și o submulțime $D \subset \mathbb{R}$, putem defini o funcție $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Evident, $G_f \subset G_g$.

Exemple

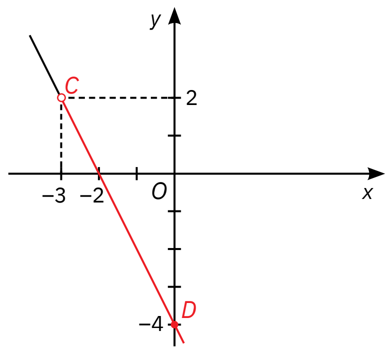
1. Graficul funcției $f_1: (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{x}{2} + 1$, este semidreapta închisă AB, inclusă în graficul funcției $g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \frac{x}{2} + 1$ (Figura 11).

Figura 11



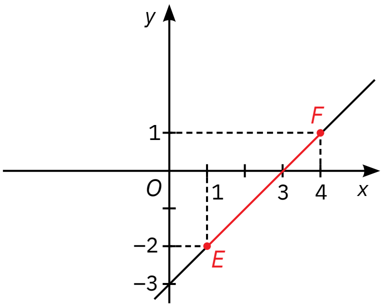
2. Graficul funcției $f_2: (-3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -2x - 4$, este semidreapta deschisă CD, inclusă în graficul funcției $g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = -2x - 4$ (Figura 12).

Figura 12



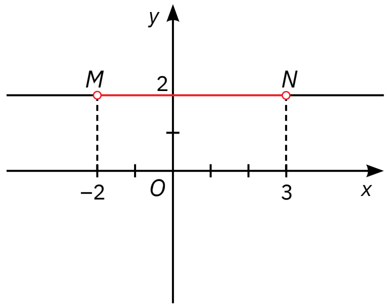
3. Graficul funcției f_3: $[1, 4] \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = x - 3$, este segmentul închis EF, inclus în graficul funcției g_3: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = x - 3$ (Figura 13).

Figura 13



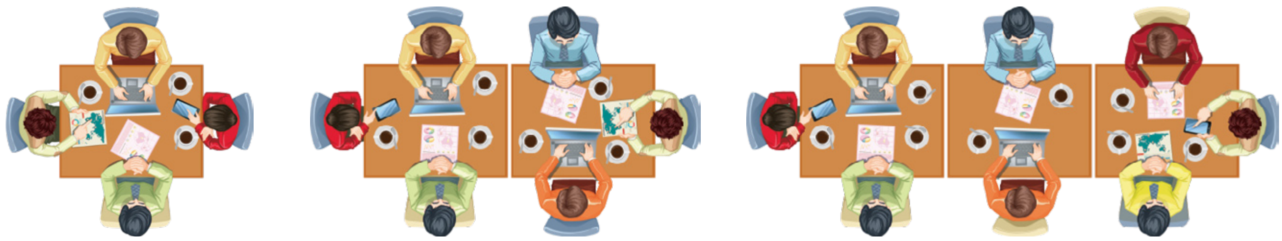
4. Graficul funcției f_4: $(-2, 3) \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = 2$, este segmentul deschis MN, inclus în graficul funcției g_4: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_4(x) = 2$ (Figura 14).

Figura 14



Activitate pe echipe

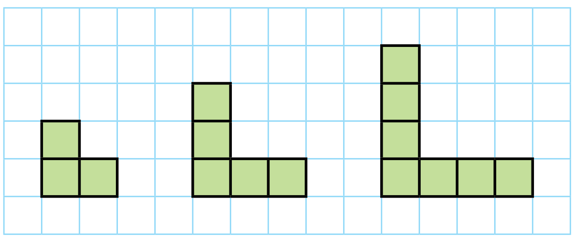
I. La o întâlnire de lucru, sunt mese mici la care se pot așeza patru persoane, câte una pe fiecare latură. Mesele mici se pot uni pentru a forma mese mai mari, pentru mai multe persoane.



Lucrați în echipe de câte 5-6 membri și răspundeți la următoarele cerințe:

1. Determinați câte persoane se pot așeza unind patru mese.
2. Determinați câte mese trebuie unite pentru a putea așeza un grup de 14 persoane.
3. Decideți dacă 20 de persoane se pot așeza la un grup de mese astfel unite, ocupând toate locurile disponibile. Dar 21?
4. Stabiliți o relație între numărul de mese și numărul de locuri disponibile, apoi definiți o funcție f: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui $x \in \{1, 2, ..., 8\}$ numărul maxim de persoane care se pot așeza la o masă lungă, formată unind x mese.
5. Reprezentați grafic funcția găsită și verificați dacă punctele graficului sunt coliniare.

II. Considerăm șirul de figuri de mai jos, care se continuă respectând același model. Ne interesează câte pătrățele-unitate conține fiecare figură. De exemplu, prima figură are 3 pătrățele, a doua figură se construiește cu 5 pătrățele etc.



Lucrați în echipe de câte 5-6 membri și răspundeți la următoarele cerințe:

1. Desenați următoarele două figuri din șir.
2. Alcătuiți un tabel care să exprime dependența funcțională dintre poziția figurii în șir și numărul de pătrățele al figurii, pentru primele 5 figuri.
3. Decideți dacă se poate construi o figură din șir folosind 19 pătrățele. Dar folosind 24?
4. Stabiliți o relație între poziția figurii în șir și numărul de pătrățele necesare pentru construcția figurii, apoi definiți o funcție f: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \mathbb{R}$, care să asocieze fiecărui $x \in \{1, 2, ..., 8\}$ numărul de pătrățele al figurii cu poziția x din șir.
5. Reprezentați grafic funcția găsită și verificați dacă punctele graficului sunt coliniare.

3.2

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 15 este reprezentată o funcție de gradul întâi, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), al cărei grafic conține punctele A și B.

a. Priviți cu atenție Figura 15 și indicați coordonatele punctelor A și B.
b. Determinați numerele a și b și calculați $f(7)$.
c. Determinați punctele în care graficul funcției f intersectează axele de coordonate.

Rezolvare

a. Deoarece punctul B se află la intersecția dintre dreapta verticală ce trece prin punctul de coordonată 1 de pe axa Ox cu dreapta orizontală ce trece prin punctul de coordonată 3 de pe axa Oy, B are abscisa 1 și ordonata 3, prin urmare putem scrie $B(1, 3)$. Analog deducem că A are abscisa și ordonata egale cu 1, deci scriem $A(-1, -1)$.

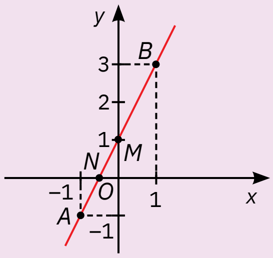


Figura 15

b. Conform definiției graficului unei funcții, un punct $M(x, y)$ aparține graficului funcției f dacă și numai dacă $f(x) = y$. Redactăm rezolvarea astfel:

$$\begin{cases} A(-1,-1)\in G_f \\ B(1,3)\in G_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=-1 \\ f(1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=-1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Obținem $f(x) = 2x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că $f(7) = 15$.

c. Fie $M(0, y_0) \in Oy$ și $N(x_0, 0) \in Ox$ punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate. Atunci:

- $M(0, y_0) \in G_f \Rightarrow y_0 = f(0) \Rightarrow y_0 = 1$, deci $G_f \cap Oy = \{M(0, 1)\}$;
- $N(x_0, 0) \in G_f \Rightarrow f(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{1}{2}$, deci $G_f \cap Ox = \left\{N\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)\right\}$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 4$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

a. Reprezentați grafic funcțiile f și g, în același sistem de axe de coordonate.
b. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

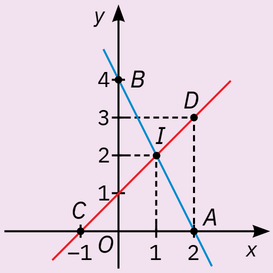


Figura 16

Rezolvare

a. Graficele funcțiilor f și g sunt două drepte. Îi dăm valori lui x pentru a găsi câte două puncte ale graficului fiecărei funcții. Cum $f(2) = 0$ și $f(0) = 4$, punctele $A(2, 0)$ și $B(0, 4)$ aparțin graficului funcției f.

La fel, din $g(-1) = 0$ și $g(2) = 3$, graficul funcției g este dreapta care conține punctele $C(-1, 0)$ și $D(2, 3)$ (Figura 16).

b. Fie $I(x_0, y_0)$ punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g. Din $I(x_0, y_0) \in G_f$ rezultă $f(x_0) = y_0$, iar din $I(x_0, y_0) \in G_g$ avem $g(x_0) = y_0$. Obținem $-2x_0 + 4 = y_0$, respectiv $x_0 + 1 = y_0$, deci $-2x_0 + 4 = x_0 + 1$, cu soluția $x_0 = 1$. Cum $f(1) = g(1) = 2$, rezultă $G_f \cap G_g = \{I(1, 2)\}$.

Observație. Din rezolvarea de mai sus deducem următoarele reguli pentru determinarea coordonatelor punctului de intersecție a graficelor a două funcții f și g:

Dacă $G_f \cap G_g = \{I\}$, atunci:

- abscisa lui I este soluția ecuației $f(x) = g(x)$;
- coordonatele lui I sunt soluția sistemului $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

3. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul $C(2, 0)$. Determinați distanța de la punctul C la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - \dfrac{3x}{4}$.

Rezolvare

Graficul funcției f este dreapta AB, cu $A(0, 6)$ și $B(8, 0)$.

Fie D intersecția graficului funcției f cu paralela prin C la Oy (Figura 17).

Atunci triunghiul CBD este dreptunghic, iar distanța de la C la graficul funcției f este lungimea înălțimii CH a acestui triunghi.

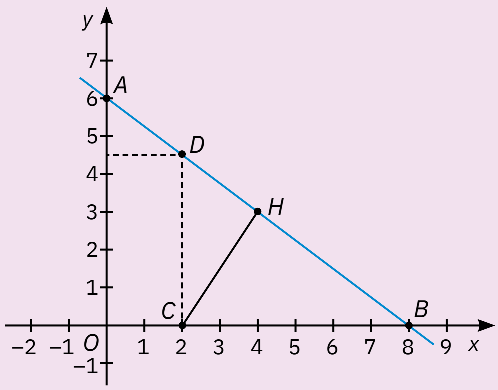


Figura 17

Aflăm coordonatele punctului D. Avem $x_D = x_C = 2$, iar din $D \in G_f$ rezultă $y_D = f(2) = \frac{9}{2}$. Obținem $D\left(2, \frac{9}{2}\right)$.

Ne reamintim formula distanței dintre două puncte în plan: $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Obținem $BC = 6$, $CD = \frac{9}{2}$, $BD = \frac{15}{2}$, deci $CH = \frac{CB \cdot CD}{BD} = \frac{18}{5}$.

Probleme propuse

1. Pentru fiecare dintre funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$ de mai jos, determinați mulțimea $V = \{f(x) \mid x \in D\}$:

a. $f: \{-3, -2, 1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$; **b.** $f: \{0, 1, 2, 4, 8\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 7$.

2. Reprezentați grafic funcțiile:

a. $f: \{0, 1, 2\} \to \{2, 3, 4\}$, $f(x) = 4 - x$; **b.** $g: \{-2, -1, 0, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - 2x$.

3. Determinați domeniul maxim de definiție al fiecăreia dintre funcțiile:

a. $f: A \to \{-5, -3, 1, 11\}$, $f(x) = 2x + 7$; **b.** $g: C \to \{-8, -5, 1, 7, 28\}$, $g(x) = 3x - 11$.

4. Determinați domeniul minim de valori al fiecăreia dintre funcțiile:

a. $f: \{-1, 0, 4, 7\} \to B$, $f(x) = -3x + 11$; **b.** $g: \{-6, -3, 0, 3, 6\} \to D$, $f(x) = 2x - 1$.

5. Următoarele funcții sunt de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Precizați coeficienții a și b dacă:

a. $f(x) = 3x + 7$; **b.** $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{11}{6}$; **c.** $f(x) = -4x$; **d.** $f(x) = \frac{7x - 10}{5}$.

6. Paula este chitarist de studio și este plătită cu 80 de lei pe oră. Pentru fiecare sesiune de înregistrări la care participă, ea donează 20 de lei pentru acțiuni umanitare, iar restul de bani i se virează în cont.

a. Ce sumă de bani îi rămâne Paulei după o sesiune de două ore? Dar după una de 5 ore?

b. Exprimați suma care ajunge în contul Paulei după o sesiune de x ore, $x \leq 8$, ca o funcție $f: \{1, 2, 3, ..., 8\} \to \mathbb{R}$, de forma $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale.

7. Stabiliți dacă punctele următoare aparțin reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 1$:

a. $A(-1, -5)$; **b.** $B(3, -1)$; **c.** $C(0, -1)$; **d.** $D(3, 6)$.

8. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, a cărei reprezentare grafică conține punctele A și B, unde:

a. $A(-1, 7)$; $B(2, 4)$; **b.** $A(-2, 15)$; $B(2, -1)$; **c.** $A(2, 5)$; $B(3, 7)$; **d.** $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$; $B\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

9. Reprezentați grafic funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

a. $f(x) = -x + 2$; **b.** $f(x) = 2x - 6$; **c.** $f(x) = 3x$; **d.** $f(x) = 4$.

10. Pentru fiecare dintre tripletele următoare, stabiliți dacă sunt formate din coordonatele unor puncte coliniare și, în caz afirmativ, determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), a cărei reprezentare grafică conține aceste puncte:

a. $(2, 3)$, $(-1, -3)$, $(1, 1)$; **b.** $(0, 3)$, $(\sqrt{2}, 3)$, $(-1, 3)$;

c. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(-1, 3)$, $(2, -3)$; **d.** $(\sqrt{3}, 4)$, $(-\sqrt{3}, -2)$, $(0, 1)$.

11. În Figura 18 sunt reprezentate punctele A și B într-un sistem cartezian de coordonate xOy.

a. Citiți coordonatele punctelor A și B și apoi determinați funcția de gradul întâi a cărei reprezentare grafică în reperul cartezian xOy este dreapta AB.

b. Determinați ordonata punctului de abscisă 2 care aparține dreptei AB.

c. Determinați abscisa punctului de ordonată 2 care aparține dreptei AB.

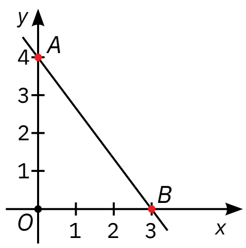


Figura 18

12. În reperul cartezian xOy, fie punctele $A(2, 3)$, $B(2, -1)$ și $C(4, 1)$ (Figura 19).

a. Stabiliți care dintre dreptele AB, AC și BC sunt reprezentări grafice ale unor funcții de gradul întâi.

b. Determinați funcția a cărei reprezentare geometrică în reperul cartezian xOy este segmentul închis AC.

c. Folosind lectura grafică, determinați mulțimea valorilor pe care le ia funcția a cărei reprezentare grafică este segmentul deschis BC.

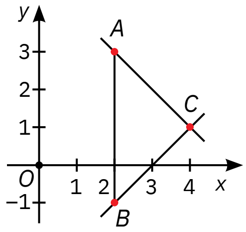


Figura 19

13. Reprezentați geometric, în același sistem de coordonate, graficele funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a. $f(x) = x$ și $g(x) = -x$;
b. $f(x) = 3x - 1$ și $g(x) = 3x + 1$;
c. $f(x) = 2x - 1$ și $g(x) = -2x + 1$;
d. $f(x) = -x + 4$ și $g(x) = 2x + 4$.

14. Reprezentați geometric, în sisteme de coordonate separate, graficele funcțiilor f și g, unde:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$,
$g: \{-1, 0, 1, 3\} \to \mathbb{R}, g(x) = -3x + 2$;

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$,
$g: [-2, 3] \to \mathbb{R}, g(x) = x + 3$;

c. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 5$,
$g: (-\infty, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = 4x - 5$;

d. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3$,
$g: [-3, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = 3$.

15. Determinați, în fiecare caz, numărul real m pentru care sunt adevărate următoarele afirmații.

a. Punctul $A(2, -3)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m + 1)x - 7$.

b. Punctul $B(m + 1, -5m - 4)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 5$.

16. Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, conține punctele $A(2, 5)$ și $B(-1, 3)$.

a. Reprezentați în plan punctele A și B și trasați graficul funcției f.

b. Determinați numerele a și b.

17. Fie funcția $f: (-3, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (2 - a)x + 8 + 4a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a. Determinați valoarea lui a pentru care graficul funcției conține originea sistemului de axe.

b. Reprezentați grafic funcția f pentru $a = -2$.

c. Calculați suma $S = f(1) + f(2) + ... + f(10)$.

18. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu axele Ox și Oy, unde:

a. $f(x) = -4x + 12$;
b. $f(x) = 6x - 3$;
c. $f(x) = -3x + \sqrt{12}$;
d. $f(x) = \sqrt{5}x - \sqrt{20}$.

19. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a. $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = 3x - 5$;
b. $f(x) = 6x - 4$, $g(x) = 3x + 11$.

20. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$ și $g(x) = 7 - \dfrac{x}{2}$.

a. Arătați că graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2x - 3$, conține punctul de intersecție al graficelor funcțiilor f și g.

b. Reprezentați grafic funcțiile f, g și h, în același sistem de coordonate.

21. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, conține punctele $A(1, 5)$ și $B(3, -1)$. Stabiliți dacă punctele $C(-1, -10)$ și $D(-7, 29)$ aparțin graficului funcției f.

22. Determinați numerele reale a astfel încât punctele $A(2, 3)$, $B(3, 5)$, $C(a, a^2)$ să fie coliniare.

23. În sistemul de coordonate xOy, se consideră punctele $A(4, 2)$ și $B(-2, -4)$. Determinați distanța de la origine la dreapta AB și aria triunghiului AOB.

24. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a - 1)x + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$. Determinați a astfel încât distanța dintre punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate să fie egală cu $\sqrt{2}$.

25. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6 - 2x$.

a. Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

b. Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției f și axele de coordonate.

c. Determinați coordonatele punctului de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu ordonata.

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$. Punctul $C(a, b)$, aflat pe graficul funcției, are coordonatele numere întregi. Determinați a și b știind că distanța de la C la axa Ox este egală cu 7.

27. George merge la un parc de distracții. Biletul de intrare este 20 de lei, iar pentru o tură la orice carusel trebuie cumpărat un jeton care costă 5 lei.

a. Câți lei ar trebui să cheltuie George la parcul de distracții pentru 6 ture de carusel?

b. Pentru vizita la parcul de distracții, George are un buget de 124 de lei. Determinați o funcție de forma $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde A este domeniul maxim de definiție, care exprimă suma necesară lui George pentru x ture de carusel, în limita bugetului.

Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate: (2p)

a. Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 2$, este o . . . .

b. Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f:[2, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 2$, este un . . . .

c. Valoarea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + 7$, pentru $x = 2$ este . . . .

d. Punctul de intersecție dintre graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{2}x - 12$, și axa Ox este . . . .

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$. Alegeți varianta corespunzătoare răspunsului corect: (2p)

a. Valoarea funcției f pentru $x = 3$ este egală cu:

A. 5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 7.

b. $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$ este:

A. -3 **B.** 10 **C.** -5 **D.** 0.

c. Punctul $M(a, 3)$ aparține graficului funcției f dacă a este egal cu:

A. 4 **B.** 0 **C.** -2 **D.** 5.

d. Graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul de coordonate:

A. $(4, 0)$ **B.** $(0, -5)$ **C.** $(-5, 0)$ **D.** $(1, 1)$.

3. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, $g(x) = -x + 2$. (2p)

a. Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

b. Arătați că numărul $N = f(3) + f(4) + f(5) + ... + f(43) - 1$ este pătrat perfect.

4. Determinați numărul real m și reprezentați grafic funcția $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -mx + 2$, știind că punctul $A(1, 0)$ aparține graficului funcției f. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Proiect.
Amortizarea mijloacelor fixe

În economie, un mijloc fix de producție (cum ar fi un utilaj industrial) își pierde din valoare din cauza uzurii (morale sau fizice), odată cu fiecare an de utilizare. Amortizarea reprezintă un proces financiar de repartizare a valorii aferente unui mijloc fix de-a lungul perioadei sale de viață utile.

În țara noastră, clasificarea mijloacelor fixe utilizate în economie, duratele normale de funcționare ale acestora (care corespund cu duratele de amortizare în ani) și modul de calcul al amortizării sunt reglementate prin lege.

În general, se utilizează metoda *amortizării liniare*, care presupune o depreciere constantă în fiecare an. De exemplu, dacă o companie achiziționează un echipament în valoare de 6 000 de euro, pe care plănuiește să îl utilizeze în procesul de producție timp de 5 ani, valoarea echipamentului se depreciază cu $6\,000 : 5 = 1\,200$ de euro pe an. În bilanțul anual, *valoarea contabilă* a echipamentului va fi de 6 000 de euro în primul an; în al doilea va fi de $6\,000 - 1\,200 = 4\,800$ de euro, în al treilea, de 3 600 de euro și așa mai departe, până când valoarea contabilă devine 0 (echipamentul a fost amortizat).

Scenariul 1. O companie de transport achiziționează o flotă nouă de mașini, la prețul de 140 000 de lei mașina. Compania dorește să amortizeze mașinile noi în 7 ani, folosind metoda amortizării liniare.

a. Determinați o funcție de gradul întâi $V(x)$ care să exprime valoarea contabilă a unei mașini în funcție de vârsta sa x (în ani).

b. Reprezentați grafic funcția $V(x)$, folosind unități de măsură diferite pe axe: de exemplu $u_x = 1$ (an), pentru axa Ox, și $u_y = 20\ 000$ (lei), pentru axa Oy.

c. Calculați valoarea contabilă a fiecărei mașini din noua flotă, după 3 ani.

d. Aflați după ce perioadă de utilizare valoarea contabilă a fiecărei mașini va fi de 60 000 de lei.

Scenariul 2. Un producător de softuri informatice deschide un nou departament, pentru care achiziționează calculatoare noi, plătind 15 000 de lei pentru fiecare calculator. Firma își propune să amortizeze fiecare calculator, folosind metoda amortizării liniare, cu 2 500 de lei pe an.

a. Determinați domeniul maxim de definiție al unei funcții de gradul întâi $C(x)$ care să exprime valoarea contabilă a unui calculator în funcție de vârsta sa x (în ani).

b. Indicați legea de corespondență a funcției $C(x)$ și reprezentați grafic funcția, folosind unități de măsură diferite pe axe; de exemplu $u_x = 0{,}5$ (ani), pentru axa Ox, respectiv $u_y = 1\,250$ (lei), pentru axa Oy.

c. Calculați valoarea contabilă a fiecărui calculator după 4 ani.

d. Aflați după ce perioadă de utilizare valoarea contabilă a fiecărui calculator va fi mai mică de 6 000 de lei.

Pentru realizarea proiectului, se formează echipe de câte 4-5 elevi.

Ce veți urmări în cadrul proiectului:

- identificarea unei situații în care este necesară amortizarea unui mijloc fix la una dintre companiile locale și rezolvarea unei probleme similare celor prezentate în scenariile de mai sus;
- modul de reglementare al amortizării și durata normală de funcționare, așa cum apar ele în *Catalogul mijloacelor fixe* pentru anul 2025, exemplificate prin câteva mijloace fixe din școala voastră (construcții, mobilier, calculatoare etc.);
- descrierea altor metode de amortizare (amortizarea accelerată, amortizarea degresivă) și exemplificarea unor situații care să justifice aplicarea acestor metode în locul amortizării liniare.

Resurse: se pot folosi cele oferite public pe internet.

Prezentare: realizați o prezentare PowerPoint, cu text și imagini.

Evaluare: se va ține cont de calitatea documentării, selectarea informațiilor relevante, acuratețea prezentării, modul de lucru în echipă, opiniile exprimate de colegi în urma prezentării proiectului și calitatea răspunsurilor oferite la întrebările acestora.

Lecția 3: Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale

Cuvinte-cheie

frecvență | tendință centrală | medie | mediană | mod | amplitudine

Utilitate

În lumea de astăzi se înregistrează și se prelucrează cantități mari de date, precum numărul de locuitori ai fiecărei țări și mediul în care trăiesc aceștia, numărul de angajați sau de șomeri, producția de cereale sau de autoturisme, consumul de răcoritoare, preferințele sportive sau artistice etc.

Aceste date sunt folosite de diverse componente ale societății (departamente guvernamentale, mediul de afaceri sau institute de cercetare științifică) pentru a descoperi și interpreta fapte, pentru a lua decizii și a face estimări sau a crea scenarii legate de desfășurarea unor evenimente viitoare. Ramura matematicii care se referă la colectarea, interpretarea sau explicarea și prezentarea datelor se numește *statistică*.

De reținut

Atunci când în studiul unui proces sau fenomen se colectează multe date (numite *date statistice*), este mai important să studiem tendința manifestată în general, decât să analizăm situația fiecărei unități în parte (lucru mai complicat și adeseori inutil). De aceea, este de preferat să caracterizăm întregul set de date prin anumite valori reprezentative, dintre care un rol special îl au *indicatorii tendinței centrale*: *media*, *mediana* și *modul*, precum și *amplitudinea*.

3.1. Media unui set de date statistice

Situație problemă

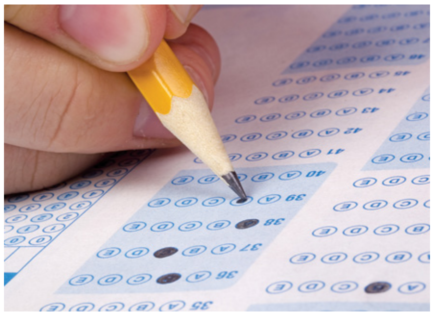
La un concurs de cultură generală constând dintr-un test-grilă cu 50 de întrebări, cei 30 de elevi ai clasei a VIII-a B au fost împărțiți în două grupe.

Scorurile realizate de elevii din prima grupă au fost:

31, 24, 46, 25, 33, 38, 35, 40, 47, 29, 33, 38, 18, 49, 24.

Membrii celei de-a doua grupe au obținut punctajele:

26, 50, 48, 11, 36, 44, 23, 29, 25, 38, 42, 21, 32, 35, 29.



O comparație rapidă între cele două grupe poate fi făcută calculând media aritmetică a rezultatelor obținute de elevii fiecărei grupe:

$$\text{media grupei 1} = \frac{31+24+46+25+33+38+35+40+47+29+33+38+18+49+24}{15} = \frac{510}{15} = 34;$$

$$\text{media grupei 2} = \frac{26+50+48+11+36+44+23+29+25+38+42+21+32+35+29}{15} = \frac{489}{15} = 32{,}6.$$

De reținut

Media unui set de date statistice este media aritmetică a tuturor valorilor din setul de date considerat.

Media unui set de n date, care iau valorile $x_1, x_2, ..., x_n$, se notează $\overline{x}$ și este definită prin:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Observații

1. Media unui set de date înregistrate în urma studiului unor procese sau fenomene arată valoarea centrală a setului de date considerat. Dacă în urma unui test, media obținută este 7 (din 10 puncte posibile), putem spune că unele note sunt sub 7, iar altele peste 7, punctajul de 7 fiind în centru.

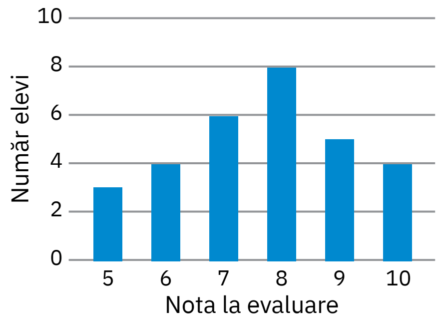
2. Media unui set de date nu este neapărat egală cu vreuna dintre datele din set. Spre exemplu, media grupei 1, despre care am vorbit, este de 34 de puncte, fără ca vreunul dintre elevii grupei să fi obținut acest scor.

3. În studiile statistice se înregistrează deseori situații în care aceeași valoare a caracteristicii studiate este obținută de mai multe ori. În acest caz, media poate fi calculată ca o medie ponderată:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n},$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ reprezintă frecvențele absolute ale valorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale caracteristicii, adică f_i înseamnă numărul aparițiilor valorii x_i, pentru orice i de la 1 la n.

Graficul alăturat conține notele obținute la evaluarea la matematică de elevii clasei a VIII-a B.



Studiind graficul, putem alcătui tabelul frecvențelor.

Nota (x_i)	5	6	7	8	9	10
Frecvența (f_i)	3	4	6	8	5	4

Media clasei este:

$$\frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10}{3 + 4 + 6 + 8 + 5 + 4} = \frac{230}{30} \approx 7,66.$$

3.2. Mediana unui set de date statistice. Amplitudinea

Situație problemă

Andrei practică atletismul, proba lui favorită fiind săritura în lungime. Recordul național pentru grupa sa de vârstă este de 7,24 metri.

La antrenamente, Andrei execută 4 serii a câte 7 sărituri.

Datele obținute sunt consemnate în tabelul următor, care conține și media lungimilor săriturilor din fiecare serie:

	Lungimea săriturii (în metri)							Media
Seria 1	6,57	6,78	6,75	6,69	6,70	6,74	6,81	6,72
Seria 2	6,82	6,51	6,90	6,85	7,01	5,71	6,93	6,68
Seria 3	6,74	6,80	6,70	6,67	6,73	6,75	6,71	6,73
Seria 4	6,76	6,74	6,67	6,71	6,74	6,70	6,72	6,72

Care este antrenamentul cu rezultatele cele mai bune? Dar cu cele mai slabe?

Media săriturilor din fiecare serie ne tentează să spunem că a treia serie este cea mai bună, în timp ce a doua serie este cea mai slabă.

Analizând mai atent, intuim că, deși media celei de-a doua serii este „trasă în jos” de ratarea din a șasea săritură a seriei (5,71 m), aceasta este totuși mai bună, întrucât conține cele mai bune 5 rezultate din întregul antrenament, inclusiv un rezultat excelent, de peste 7 metri.

În ordine crescătoare, săriturile din seria a doua au lungimile:

5,71 m; 6,51 m; 6,82 m; 6,85 m; 6,90 m; 6,93 m; 7,01 m.

Lungimea de 6,85 m, aflată în „mijlocul” acestei liste ordonate, arată că mai mult de jumătate dintre săriturile seriei sunt foarte bune. Vom numi această valoare *mediana* setului de date din seria a doua.

Mai mult, să observăm că cea mai bună săritură din seria a treia este sub *mediana* celei de-a doua serii, ceea ce confirmă intuiția noastră privind alegerea celei mai bune serii.

De reținut

Mediana unui set de date statistice este un număr m cu proprietatea că setul de date conține un număr de valori mai mici decât m egal cu numărul de valori mai mari decât m.

Mediana unui set de date care conține un număr par de valori, ordonate crescător:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le x_{k+1} \le x_{k+2} \le \ldots \le x_{2k},$$

este media aritmetică a celor două valori din mijloc: $m = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Mediana unui set de date care conține un număr impar de valori, ordonate crescător:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le x_{k+1} \le x_{k+2} \le \ldots \le x_{2k} \le x_{2k+1},$$

este valoarea din mijloc: $m = x_{k+1}$.

Amplitudinea unui set de date statistice este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare a setului de date considerat.

Exemple

1. La selecția echipei de baschet a școlii participă 17 elevi, împărțiți în două grupe. Fiecare elev execută 10 aruncări la coș. Cei nouă jucători ai primei grupe înscriu: 6, 3, 5, 4, 8, 7, 10, 6, respectiv 4 coșuri.

Cei opt componenți ai celei de-a doua grupe marchează: 9, 3, 2, 7, 8, 9, 5, respectiv 6 coșuri.

Pentru a afla mediana și amplitudinea fiecărei grupe, vom ordona crescător numărul de coșuri înscrise.

- Pentru prima grupă, avem de analizat un număr impar de valori: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 10. Mediana este numărul din mijloc: $m = 6$, iar amplitudinea este $10 - 3 = 7$.
- Grupei a doua îi corespunde un număr par de valori: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 9. Mediana este media aritmetică a numerelor din mijloc: $m = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$. Amplitudinea grupei este $9 - 2 = 7$.

2. Când se studiază o cantitate mare de date, iar valorile datelor se repetă, pentru calculul medianei este indicat să înregistrăm datele într-un tabel al *frecvențelor cumulate* (*crescător*):

Notele elevilor dintr-o școală la un test la limba română

nota	frecvența	frecvența cumulată	interpretarea datelor
3	2	note ≤ 3 : $2 = 2$	2 elevi au nota 3
4	7	note ≤ 4 : $9 = 2 + 7$	9 elevi au note cel mult egale cu 4
5	17	note ≤ 5 : $26 = 9 + 17$	26 de elevi au note cel mult egale cu 5
6	29	note ≤ 6 : $55 = 26 + 29$	55 de elevi au note cel mult egale cu 6
7	41	note ≤ 7 : $96 = 55 + 41$	96 de elevi au note cel mult egale cu 7
8	47	note ≤ 8 : $143 = 96 + 47$	143 de elevi au note cel mult egale cu 8
9	39	note ≤ 9 : $182 = 143 + 39$	182 de elevi au note cel mult egale cu 9
10	29	note ≤ 10 : $211 = 182 + 29$	211 elevi au note cel mult egale cu 10

Ultima valoare a frecvenței cumulate indică numărul total de date (în cazul nostru, numărul total de elevi ai școlii). Așadar, școala are $211 = 2 \cdot 105 + 1$ elevi, deci mediana este valoarea cu numărul 106 din listă, în ordinea crescătoare a notelor obținute.

Urmărind șirul frecvențelor cumulate, observăm că $96 < 106 < 143$. Rezultă că a 106-a valoare se află între cele 47 de note de 8, deci mediana este 8.

Observație

Determinarea medianei unui set de n valori ordonate revine la a determina poziția/pozițiile de mijloc din acest set. Acestea se găsesc mai rapid aplicând următoarele reguli:

- dacă n este impar, atunci termenul din mijloc se află pe poziția $\dfrac{n+1}{2}$;
- dacă n este par, cei doi termeni din mijloc se află pe pozițiile $\dfrac{n}{2}$ și $\dfrac{n}{2}+1$.

Astfel, pentru un set de 75 de date, mediana este termenul din mijloc, aflat pe poziția $\frac{75+1}{2}=38$, iar pentru un set de 426 de date, mediana este media aritmetică a termenilor de pe pozițiile $\frac{426}{2}=213$ și $\frac{426}{2}+1=214$.

3.3. Modul unui set de date statistice

Situație problemă

Pentru a reîmprospăta stocurile la un magazin de îmbrăcăminte, Andreea consultă registrul de evidență a vânzărilor.

Perechile de pantaloni vândute într-o zi au avut măsurile:

32, 30, 38, 26, 28, 34, 30, 28, 36, 34, 32, 30, 32, 28, 30, 32, 36, 30, 34.

Ce indicator statistic ar fi util în această situație?

Intuiția ne spune că ar trebui să ne uităm mai întâi la perechile vândute cel mai bine. Un tabel de frecvență este util și în acest caz.

mărime	26	28	30	32	34	36	38
perechi vândute	1	3	5	4	3	2	1

Pantalonii de mărimea 30 s-au vândut cel mai bine. Vom spune că 30 este *modul* setului de date analizat. Este evident că refacerea stocului de pantaloni de mărimea 30 reprezintă un pas prioritar pentru activitatea comercială a magazinului.

Să analizăm, pentru a face o comparație, și ceilalți indicatori ai tendinței centrale.

Calculând media măsurilor, obținem aproximativ 31,57. Acest număr nu reprezintă o măsură.

Ordonăm crescător cele 19 valori, pentru a determina mediana, aflată pe poziția $(19+1):2=10$:

26, 28, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 30, 32, 32, 32, 32, 34, 34, 34, 36, 36, 38.

Mediana, egală cu 32, arată că aproximativ jumătate dintre clienți au cumpărat pantaloni de mărimi mai mici ca 32, iar cealaltă jumătate, pantaloni de mărimi egale sau mai mari ca 32.

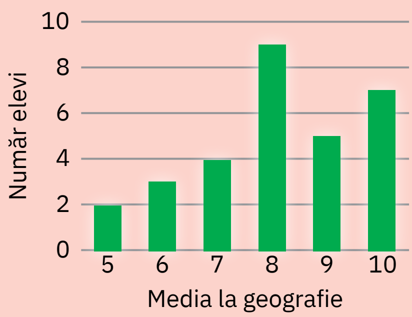
Deducem că, pentru luarea unei decizii în cazul studiat, *modul* oferă o informație mai precisă decât cele oferite de medie și mediană.

De reținut

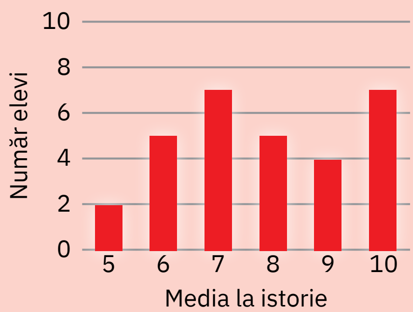
Modul (sau *valoarea modală* sau *dominanta*) *unui set de date statistice* este valoarea cu cea mai mare frecvență din setul dat.

Dacă mai multe valori ale datelor corespund celei mai mari frecvențe, atunci setul de date are mai multe moduri (set multimodal). Un set de valori distincte două câte două nu are mod.

În reprezentarea grafică a frecvențelor, o valoare modală corespunde punctului celui mai înalt.



Date unimodale, de mod 8



Date bimodale, cu modurile 7 și 10

Investigație

Efectul valorilor extreme asupra indicatorilor tendinței centrale

Într-un set de date, o valoare extremă (numită și *valoare aberantă*) este o valoare semnificativ diferită de celelalte valori ale setului (mult mai mare sau mult mai mică decât celelalte valori).

De exemplu, dacă măsurând temperatura maximă în 7 zile din luna iulie obținem datele: 31 °C, 35 °C, 34 °C, 32 °C, 35 °C, 17 °C, 38 °C, atunci 17 °C este o valoare extremă (aberantă).

Câteodată, valorile aberante sunt rezultatul unor erori de măsurare sau de înregistrare a datelor, cazuri în care aceste valori pot fi ignorate sau eliminate. Alteori, o valoare extremă poate reprezenta o informație foarte importantă, care implică măsuri sau verificări ulterioare – de exemplu, dacă un candidat aflat într-un examen realizează un scor mult mai mare sau mult mai mic decât toți ceilalți.

În această investigație vom vedea cum sunt afectați indicatorii tendinței centrale de prezența unei valori extreme.

1. Considerăm setul de date: 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 12, 12, 14, 15, 15. Calculați:
   a. modul; b. mediana; c. media; d. amplitudinea.
2. Adăugăm în acest set de date valoarea 100. Calculați, pentru noul set:
   a. modul; b. mediana; c. media; d. amplitudinea.
3. Discutați despre efectul valorii extreme introduse asupra celor patru indicatori statistici.
4. Care dintre indicatorii tendinței centrale este cel mai afectat de introducerea unei valori extreme? Dezbateți problema în clasă.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Media unui set de 9 valori este 15. Adăugați un număr la acest set de date astfel încât media noului set să devină 18.

Rezolvare

Media este suma valorilor setului împărțită la numărul lor, deci suma celor 9 valori existente este $15 \cdot 9 = 135$. Adăugând valoarea x, suma celor 10 valori din noul set devine $135 + x$, deci $\frac{135+x}{10} = 18$, de unde $x = 45$.

2. Patru dintre valorile numerice dintr-un set de date cu 6 valori sunt 8, 5, 10 și 9. Determinați celelalte două valori în fiecare dintre următoarele cazuri:
   a. modul este 8 și media este 9; b. amplitudinea este 10 și media este 9.

Rezolvare

a. Modul este valoarea cu frecvența cea mai mare dintr-un set de date. Dacă modul este egal cu 8, atunci valoarea 8 apare de cel puțin două ori în setul de date considerat, deci una dintre valorile necunoscute este 8. Notând cu n cealaltă valoare, din definiția mediei rezultă $\frac{8+5+10+9+8+n}{6} = 9$. Obținem $40 + n = 54$, de unde $n = 14$.

b. Deoarece media este 9, suma tuturor valorilor din set este 54, deci suma valorilor necunoscute din setul de date este 22. Notând cu m și M cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare din setul nostru de date, din definiția amplitudinii rezultă că $M - m = 10$. Sunt posibile trei cazuri:
- Dacă m se află printre valorile cunoscute, atunci $m = 5$. Cum $M - m = 10$, rezultă $M = 15$. Una dintre valorile necunoscute este 15, iar cealaltă este $22 - 15 = 7$.
- Dacă M se află printre valorile cunoscute, atunci $M = 10$, de unde rezultă $m = 0$. Una dintre valorile necunoscute este 0, iar cealaltă ar trebui să fie $22 - 0 = 22$, absurd, deoarece am presupus că cea mai mare valoare din setul nostru de date este 10.
- Dacă nici m, nici M nu se găsesc printre valorile cunoscute, atunci $m < 5$ și $M > 10$. Din relațiile $M - m = 10$ și $M + m = 22$ se obțin soluțiile $M = 16$, $m = 6$, din nou absurd, deoarece am presupus $m < 5$.

În consecință, celelalte două valori sunt 7 și 15.

Probleme propuse

1. Determinați media, mediana, modul și amplitudinea pentru fiecare dintre următoarele seturi de date:
   a. 2; 4; 7; 6; 4; 8; 4; b. −2; −5; −11; −11; −6; c. 2,1; 5,3; 4,2; 4,2; 2,1; 4,2.
2. Calculați media, mediana, modul și amplitudinea pentru fiecare dintre următoarele seturi de date, utilizând calculatorul electronic:

   a. 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9.

b. 11, 13, 13, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 22.

c. 22,1; 24,3; 26,5; 24,7; 21,1; 24,3; 24,3; 26,5; 26,5; 22,1.

3. a. Cinci elevi au obținut următoarele note la testul la geografie: 8,60; 7,90; 9,30; 7,90; 7,50. Aflați media, mediana, modul și amplitudinea notelor primite la test.

b. Într-un birou lucrează cinci angajați, cu vârstele de 46, 32, 43, 45 și 46 de ani. Comparați vârsta medie cu mediana vârstelor celor cinci colegi de birou.

4. a. Adăugați un număr la setul de date 30, 36, 40, astfel încât mediana să devină 34.

b. Eliminați un număr din setul de date 57, 65, 76, 81, 65, 84, 76, 63 astfel încât modul să devină 65.

5. În primii 7 ani din cariera sa, un jucător de tenis a servit 184, 198, 190, 182, 200, 186, respectiv 190 de ași. Pentru ca media, mediana, respectiv modul să rămână aceleași după al optulea an, câți ași ar fi trebuit să servească în acel an?

6. În tabelul alăturat sunt prezentate conținuturile de grăsimi în miligrame pentru mai multe produse alimentare. Determinați media, mediana, modul și amplitudinea setului de date analizat.

Conținut de grăsimi în mg per porție	
produsul	**mg**
nuci	73
nuci braziliene	96
caju	64
nuci de pin	80
fistic	67
alune	87
migdale	77
nuci de macadamia	106
arahide	72
nuci pecan	77
semințe de dovleac	69

7. O firmă de catering își propune, pentru săptămâna lucrătoare în curs, să înregistreze o medie de 50 de comenzi pe zi pentru *Meniul zilei*. Luni s-au primit 48 de comenzi; marți, 53 de comenzi, iar miercuri, 44. Câte comenzi trebuie să se înregistreze în total în următoarele două zile pentru a atinge ținta propusă?

8. De-a lungul unei perioade de evaluare, Diana are un scor mediu de 35 de puncte din 40 posibile. Dorind să revadă testele, nu găsește decât 6 dintre cele 7 teste date. Ce punctaj a obținut la testul lipsă, dacă la celelalte teste a primit 33, 38, 27, 36, 38, respectiv 33 de puncte?

9. Pentru controlul tehnic al calității se evaluează 10 produse de același fel dintr-un lot, obținându-se o medie de 23,3 puncte, și 20 de produse identice din alt lot, cu o medie de 24,2 puncte. Care este media celor 30 de produse evaluate?

10. În tabelul alăturat este prezentată o statistică a numărului de coșuri înscrise, din 7 aruncări, de participanții la selecția echipei de baschet a școlii.

coșuri înscrise	1	2	3	4	5	6	7
număr de jucători	2	1	3	6	x	3	1

a. Aflați *x* știind că media numărului de coșuri înscrise a fost de 4,1.

b. Determinați procentul de jucători cu rezultate satisfăcătoare (cel puțin 4 coșuri înscrise).

11. La fiecare test de ortografie, Ioana trebuie să scrie corect 10 cuvinte pentru 10 puncte. Rezultatele a cinci dintre teste sunt 9, 5, 7, 9 și 10. Profesorul îi spune că în cele 7 teste date a luat un singur 10, modul punctajelor este 9, iar media egală cu 8. Care sunt celelalte două punctaje?

12. În tabelul alăturat este înregistrat numărul de convorbiri telefonice zilnice a 50 de adolescenți cu vârsta de 15 ani.

număr de apeluri	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frecvența	4	6	12	9	7	3	4	2	2	0	1

a. Determinați media, mediana și modul acestui set de date.

b. Construiți un grafic cu bare verticale pentru acest set de date și indicați poziția mediei, medianei și a modului.

c. Stabiliți care indicator al tendinței centrale este mai potrivit pentru a caracteriza acest set.

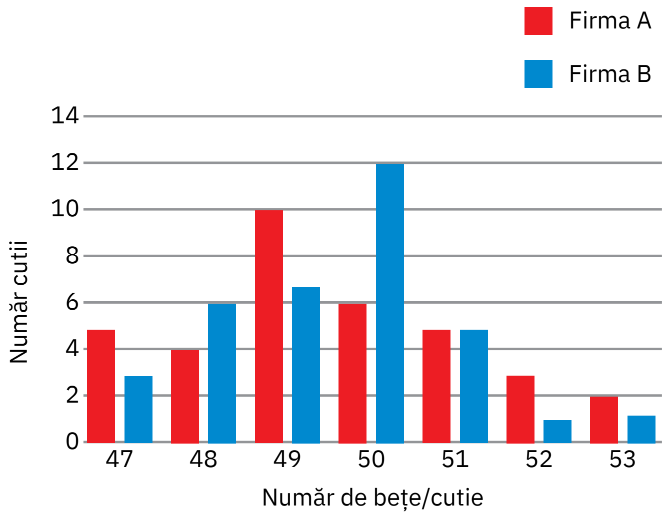
13. Angajații unei companii au următoarele salarii lunare (exprimate în lei), în funcție de poziția în cadrul companiei: 8 000, 4 800, 4 200, 4 000, 4 000, 3 200, 3 200, 3 200, 3 000, 2 800. Ce instrument al tendinței centrale ați folosi pentru a descrie salariul mediu? Justificați!

14. Două firme concurente *A* și *B* susțin, în reclamele la cutiile de chibrituri pe care le produc, că în fiecare cutie se află, în medie, câte 50 de bețe. Un sondaj efectuat pe un set de 35 de cutii de la fiecare companie a înregistrat rezultatele prezentate în graficul alăturat.

a. Calculați media, mediana și modul fiecărui set de date.

b. Compania B este reclamată la Protecția Consumatorului cu privire la numărul necorespunzător de bețe din cutii. Conform datelor din sondaj, este îndreptățită această reclamație?

c. Analizând sondajul, poate fi acuzată vreuna dintre companii de reclamă mincinoasă?



Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate: **(2p)**

a. Modul unui set de date statistice este valoarea cu cea mai mare .... din setul dat.

b. Mediana unui set având un număr par de valori ordonate este .... a valorilor aflate pe pozițiile din mijloc.

c. Într-un set de date având toate valorile egale între ele, diferența între medie și mediană este ....

d. Media notelor obținute de elevii unei clase la un test este 8,40, iar la un alt test de 8,70. Media tuturor notelor obținute la cele două teste este ....

2. Alegeți varianta corespunzătoare răspunsului corect: **(2p)**

a. Media setului de date 3, 5, 6, 9, 11, 32 este:
A. 12 **B.** 17 **C.** 11 **D.** 13.

b. Modul setului de date 3, 7, 8, 8, 5, 6, 7, 8 este:
A. 3 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 7.

c. Mediana unui set de 47 de valori ordonate crescător se află pe poziția:
A. 1 **B.** 24 **C.** 22 **D.** 25.

d. Într-un set de date cu amplitudinea 20, cea mai mare valoare este 100. Cea mai mică valoare este:
A. 10 **B.** 60 **C.** 5 **D.** 80.

3. La un joc de darts participă două echipe a 10 jucători, fiecare efectuând câte 15 aruncări de săgeți. Ordonând crescător după numărul de săgeți care au nimerit ținta, rezultatele sunt: **(2p)**

Echipa A: 8, 9, 9, 12, 12, 13, 13, 14, 15, 15.

Echipa B: 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14.

a. Aflați media de aruncări reușite a fiecărei echipe.

b. Comparați valorile mediane ale celor două seturi de date.

4. Media și mediana unui set de 9 valori sunt ambele egale cu 12. Șapte dintre valori sunt 7, 9, 11, 13, 14, 17 și 19. Aflați celelalte două valori. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

3

Recapitulare și evaluare

Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite • Funcția de forma $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ • Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale

1. Se consideră funcția $f: (-1, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a. $f(1) = -1$.

b. $(3, 1) \in G_f$.

c. Domeniul de definiție conține 3 numere întregi.

d. Codomeniul este intervalul $(-1, 3)$.

2. Se consideră funcția $f: [-4, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a. Legea de corespondență a funcției este ... .

b. Reprezentarea grafică a funcției este ... .

c. Punctul $A(-2, ...)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

3. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

a. Dacă $(-1, 4)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $f(x) = 2x + ...$.

b. Dacă $(3, 11)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 3b$, atunci $a + b = ...$.

c. $(\sqrt{2}, ...)$ aparține graficului funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{2} - x$.

d. $\left(\dots, \dfrac{2}{3}\right)$ aparține graficului funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{2} - x$.

4. Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a. Dacă $f(x) = x + 1$, atunci $f\left(\dfrac{1}{4}\right) - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dots$.

b. Dacă $f(x) = x\sqrt{3} - 4$, atunci $2f(2\sqrt{3}) - 3f(\sqrt{3}) = \dots$.

c. Dacă $f(x) = 3x$, atunci $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right) - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right) = \dots$.

d. Dacă $f(x) = x\sqrt{2}$, atunci $f\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) + f\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \dots$.

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$. Rezolvați ecuațiile:

a. $f(x) = x - 2$;

b. $f(x^2) = 3x$;

c. $3f(x+1) = \dfrac{x-1}{2}$;

d. $-\sqrt{2}x = \dfrac{3f(x)}{4}$.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 3x$. Rezolvați inecuațiile:

a. $f(x) \le 5$;

b. $3 - f(2x) \ge x$;

c. $|f(x)| < 3$;

d. $\dfrac{f(x)}{2} < \dfrac{7}{3}$.

7. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

a. Determinați punctul de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu ordonata.

b. Determinați punctul de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu o treime din ordonată.

c. Determinați punctul de pe graficul funcției f care are ordonata egală cu jumătate din abscisă.

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$. Stabiliți care dintre următoarele puncte aparțin graficului funcției f:

a. $A(-3, -16)$;

b. $B(0, 4)$;

c. $C\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$;

d. $D(2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$.

9. Reprezentați grafic funcțiile:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 3x$;

b. $g: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x$;

c. $h: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x - 1$;

d. $t: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $t(x) = -2x - 2$.

10. Determinați numărul real m pentru fiecare dintre următoarele cazuri:

a. $A(1, m)$ se află pe graficul funcției $f: (0, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3mx - 5$;

b. $B(m, 1)$ se află pe graficul funcției $g: (0, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3mx - 5$.

11. Se consideră următorul set de date statistice:

6, 8, 5, 6, 12, 6, 8, 8, 7.

a. Calculați media setului de date.

b. Determinați mediana setului de date.

c. Calculați amplitudinea setului de date.

d. Determinați modul setului de date.

12. Un elev a obținut, la un concurs cu mai multe probe, următoarele punctaje: 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15.

a. Calculați media punctajelor obținute de elev.

b. Determinați mediana punctajelor.

c. Calculați amplitudinea punctajelor.

13. Verificați dacă punctele:

a. $A(1, 2)$, $B(2, 4)$, $C(3, 6)$ sunt coliniare;

b. $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(3, 4)$ sunt coliniare.

14. Determinați numărul real m pentru cazurile:

a. $A(-1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(3, m)$ sunt coliniare;

b. $A(-1, m)$, $B(1, 5)$, $C(2, 6)$ sunt necoliniare.

15. O funcție $f: A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite, este reprezentată cu ajutorul tabelului de mai jos:

x	-1	0	2	4	6
$f(x)$	1	2	4	6	8

a. Indicați elementele domeniului de definiție al funcției f.
b. Exprimați legea de corespondență cu ajutorul unei formule.
c. Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele de coordonate? Justificați răspunsul.

16. Determinați domeniul maxim de definiție al fiecăreia dintre funcțiile:
a. $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+2}{x+4}$;
b. $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x-5}$;
c. $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$.

17. Determinați domeniul minim de valori al funcțiilor:
a. $f: \{-2, 2, 4, 5\} \to A,\ f(x) = |x|$;
b. $f: \{-2, 2, 4, 5\} \to B,\ f(x) = 3x + 2$;
c. $f: [1, 3] \to C,\ f(x) = \dfrac{1-2x}{3}$.

Testul 1

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.
(1p) **a.** Aflați a și b știind că $f(1) = 2$ și $f(2) = 3$.
(1p) **b.** Pentru $a = b = 1$, reprezentați grafic funcția f.
(1p) **c.** Descompuneți în factori $f(4a) - b^2 - b$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$.
(1p) **a.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre reprezentarea grafică a funcției f și axele Ox și Oy.
(1p) **b.** Dacă $C(1, a)$ și $D(b, 1)$ sunt două puncte de pe graficul funcției f, atunci calculați $a + b$.
(1p) **c.** Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției f și axele Ox și Oy.

3. (2p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$. Calculați distanța de la punctul $C(3, 0)$ la graficul funcției f.

4. (1p) Ana a rezolvat acasă cinci teste grilă a câte 40 de întrebări, notate cu câte 1 punct fiecare. Determinați punctajele pe care le-a obținut Ana la aceste teste, știind că media punctajelor sale este 27, mediana setului de punctaje este 30, amplitudinea acestuia este 15, iar setul punctajelor Anei are două moduri.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Testul 2

1. Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, conține punctele $A(-1, 2)$ și $B(0, 3)$.
(1p) **a.** Trasați graficul funcției f.
(1p) **b.** Determinați numerele reale a și b.
(1p) **c.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate.

2. Se consideră setul de date statistice 1, 2, 5, 4, 9, 8, 11, 11, 12.
(1p) **a.** Determinați media setului de date.
(1p) **b.** Determinați mediana setului de date.
(1p) **c.** Determinați amplitudinea setului de date.

3. (2p) Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 11$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 5x + 7$. Determinați coordonatele punctului de intersecție al celor două grafice.

4. (1p) Un comerciant are în stoc mai multe sortimente de bomboane, ambalate în pungi a câte 100 de grame, în cantitățile și cu prețurile din tabelul următor:

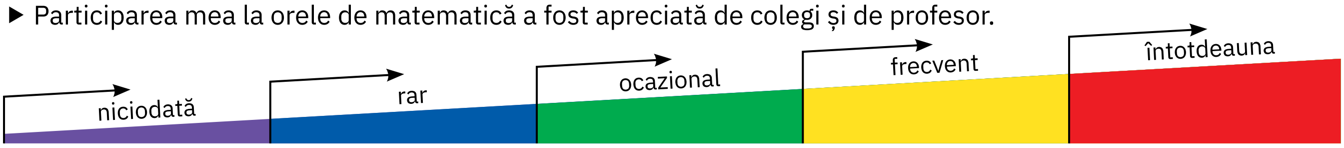
preț/100 g	8	9	9,1	10	13	15	17
număr de pungi	5	16	10	11	10	8	5

Comerciantul dorește să mai achiziționeze 25 de pungi de bomboane de același fel, a câte 100 de grame, astfel încât media prețului bomboanelor pe care le va avea să fie mai mică sau egală cu mediana actualului stoc. Care este prețul maxim pe care și-l poate permite să îl plătească, pentru a-și atinge obiectivul?

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevilor

- Am fost preocupat(ă) să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U4 Elemente ale geometriei în spațiu

Cunoașterea axiomelor geometriei în spațiu, a relațiilor dintre puncte, drepte, plane și descrierea corpurilor geometrice sunt utile la proiectarea clădirilor și a structurilor, în realizarea componentelor mecanice sau electronice, în artă.

4.1

Lecția 1: Puncte, drepte, plane

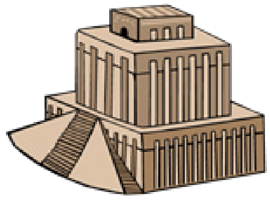
Cuvinte-cheie

axiomă | puncte coplanare | puncte necoplanare | drepte necoplanare | drepte paralele | plane paralele

Utilitate

Acum cinci milenii, civilizațiile din Valea Indusului și babilonienii studiau geometria în spațiu, calculând empiric lungimi, unghiuri, arii și volume necesare în construcții, astronomie, navigație și în alte meșteșuguri.

Faptul că oamenii au reușit să își imagineze și să folosească în situații practice configurații spațiale a fost, de-a lungul istoriei, și rămâne și astăzi, un factor de progres.



Macheta unui templu babilonian

1.1. Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu. Convenții de notare

De reținut

În clasele anterioare am studiat anumite mulțimi de puncte dintr-un plan, mulțimi pe care le-am numit figuri geometrice (drepte, segmente, triunghiuri, cercuri etc.). Totuși, lumea înconjurătoare nu conține doar figuri plane: corpurile geometrice, cum ar fi cubul sau paralelipipedul dreptunghic, nu pot fi incluse într-un plan.

Geometria în spațiu, cunoscută și sub denumirea de *geometrie tridimensională*, este ramura geometriei care studiază formele și relațiile dintre obiecte într-un spațiu cu trei dimensiuni: lungime, lățime și înălțime.

Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt *punctul, dreapta, planul*. Acestea nu pot fi definite riguros, însă pot fi descrise prin concretizări sau comparații cu obiecte din lumea înconjurătoare.

Punctul din geometria în spațiu este similar cu cel din geometria plană. Punctul nu are nicio dimensiune și poate fi considerat ca urma lăsată de vârful unui creion bine ascuțit pe o coală de hârtie.

Într-o figură, punctul se notează cu litere mari ale alfabetului latin și se reprezintă astfel: • A sau × A.

Dreapta este o mulțime infinită de puncte, care are aspectul unei sfori bine întinse, fără grosime și nemărginită în ambele sensuri. Submulțimile ei pot avea cel mult o dimensiune: lungimea.

Dreptele se notează cu litere mici ale alfabetului latin: $d, g, h, a, b, \ldots$ (Figura 1).

Figura 1

Planul este o mulțime infinită de puncte, cu aspectul unei coli de hârtie fără grosime, nemărginită în toate direcțiile (o suprafață infinită în două dimensiuni).

Planele se notează cu litere ale alfabetului grecesc: $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \ldots$.

În practică, planele se reprezintă grafic prin paralelograme (Figura 2) sau prin triunghiuri (Figura 3).

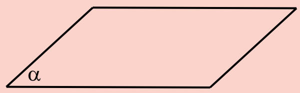


Figura 2

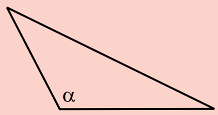


Figura 3

Spațiul geometric este o mulțime de puncte. Dreptele și planele sunt submulțimi ale spațiului geometric.

Observații

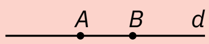
1. Dacă un punct A aparține unei drepte d, respectiv unui plan α, scriem $A \in d$, respectiv $A \in \alpha$.
2. Un punct B care nu aparține unei drepte d se numește punct exterior dreptei d. Notăm $B \notin d$.
   Un punct C care nu aparține unui plan α se numește punct exterior planului α. Notăm $C \notin \alpha$.
3. O dreaptă d este *inclusă* într-un plan α dacă orice punct al dreptei d aparține planului α. Notăm $d \subset \alpha$.

1.2. Relații între puncte, drepte, plane. Axiomele geometriei în spațiu

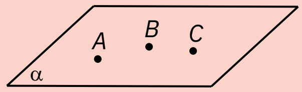
Relațiile fundamentale între puncte, drepte și plane pot fi descrise cu ajutorul *axiomelor* introduse de Euclid. **Axioma** este un adevăr matematic evident din punct de vedere intuitiv, acceptat fără demonstrație.

De reținut

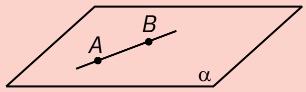
A1. Axioma dreptei
Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.



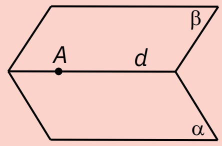
A2. Axioma planului
Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul.



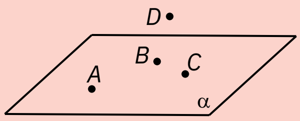
A3. Axioma includerii
Dacă două puncte distincte A și B aparțin unui plan, atunci dreapta AB este inclusă în acel plan.



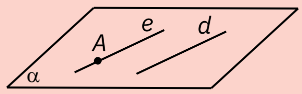
A4. Axioma intersecției
Dacă două plane distincte au un punct comun A, atunci au o dreaptă comună d, iar $A \in d$.



A5. Axioma spațiului
Există patru puncte nesituate în același plan (puncte necoplanare).



A6. Axioma paralelelor
Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o unică paralelă la acea dreaptă.



Observație. A *determina* o figură geometrică înseamnă a preciza anumite condiții sau elemente prin care acea figură se identifică în mod unic în spațiu. Axioma dreptei (**A1**) afirmă, așadar, că *două puncte distincte determină o dreaptă*, iar axioma spațiului (**A2**) spune că *trei puncte necoliniare determină un plan*.

1.3. Convenții de reprezentare a unei figuri spațiale în plan

Cum desenăm?

- Într-o figură geometrică în spațiu, se desenează punctat dreptele sau segmentele care sunt în spatele unor plane (cele care nu s-ar vedea, dacă figura ar fi un obiect real).
  De exemplu, în Figura 4, AD, BD și DC sunt segmente aflate în spatele planului determinat de punctele A, B, C.

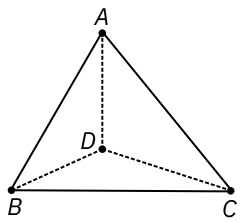


Figura 4

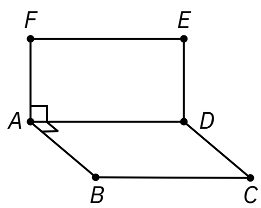


Figura 5

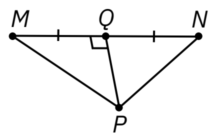


Figura 6

- Dreptunghiurile care sunt în plane „verticale” (adică în planul foii de hârtie sau al tablei și în plane paralele cu acestea) se desenează ca în geometria plană, unghiurile lor rămânând drepte (Figura 5).
- Celelalte dreptunghiuri se reprezintă sub forma unor paralelograme (Figura 5).
- Unghiurile și figurile care nu sunt în plane „verticale” se deformează în reprezentări. De exemplu, un triunghi echilateral care este într-un plan „orizontal” se reprezintă ca un triunghi oarecare.
- Paralelismul se păstrează – dreptele paralele în spațiu se desenează la fel ca în plan.
- Proporțiile dintre lungimile segmentelor se păstrează ca în realitate, chiar și în planele care se văd deformate. De exemplu, mijlocul unui segment aflat într-un plan care nu este „vertical” se reprezintă ca în geometria plană (Figura 6).

Activitate practică

Luați o coală de hârtie și desenați segmentul care înjumătățește coala. Îndoiți coala de-a lungul acestui segment. Putem obține o figură în spațiu asemănătoare cu un cort. Dacă realizăm un desen, ceea ce *nu se vede* se reprezintă punctat, ca în Figura 7.

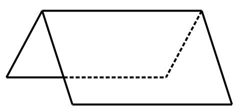


Figura 7

4.1

1.4. Determinarea planului

Mate practică

Eva a fost într-o drumeție montană. Așezând aparatul de fotografiat pe un trepied ușor, pe care l-a avut în rucsac, a făcut niște fotografii superbe. Trepiedul are o stabilitate excelentă, chiar și pe un teren care nu este plat.

Cum explicăm?

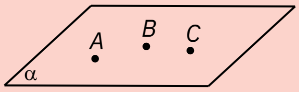
Conform *axiomei planului*, cele trei vârfuri ale picioarelor trepiedului determină un plan, fapt care asigură stabilitatea acestuia.

Trepied foto

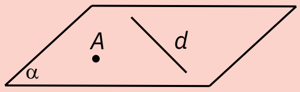
De reținut

Un plan este unic determinat de:

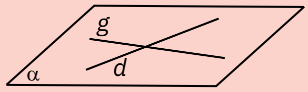
A. trei puncte necoliniare
Notăm: $\alpha = (ABC)$.



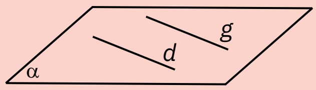
B. o dreaptă și un punct exterior acesteia
Notăm: $\alpha = (d, A)$.



C. două drepte concurente
Notăm: $\alpha = (d, g)$.



D. două drepte paralele
Notăm: $\alpha = (d, g)$.



Observații

1. Pozițiile relative a două drepte

În spațiu, ca și în plan, două drepte distincte au cel mult un punct comun.

Două drepte care au un punct comun sunt *concurente*. Ele determină un plan, deci sunt *coplanare*.

Două drepte care nu au puncte comune pot fi *paralele* (caz în care sunt *coplanare*, deoarece există un plan care le conține) sau *drepte necoplanare* (nu există niciun plan care să conțină ambele drepte).

De exemplu, în cutia reprezentată în Figura 8, $BB' \cap DD' = \varnothing$ și $AA' \cap BC = \varnothing$, dar dreptele BB' și DD' sunt paralele, pe când dreptele AA' și BC sunt necoplanare.

Patru puncte necoplanare, A, B, C și D, determină trei perechi de drepte necoplanare: AB și CD, AC și BD, respectiv AD și BC (Figura 9).

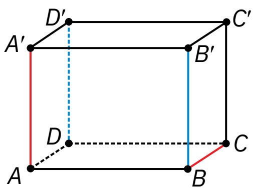


Figura 8

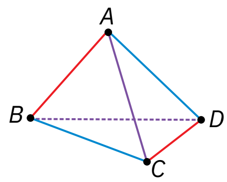
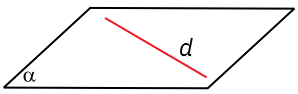


Figura 9

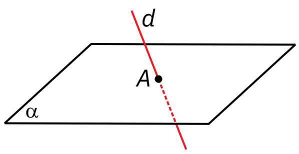
2. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan

Fie o dreaptă d și un plan α. Dreapta d poate fi:

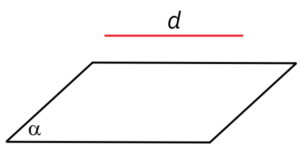
A. *inclusă* în planul α, dacă orice punct al dreptei d aparține lui α:



B. *secantă* planului α, dacă dreapta d are un singur punct comun cu planul α:



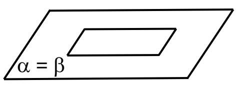
C. *paralelă* cu planul α, dacă dreapta d nu are niciun punct comun cu α:



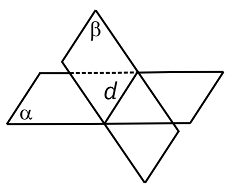
3. Pozițiile relative a două plane

Două plane α și β se numesc:

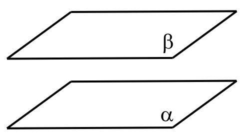
A. *identice*, dacă au toate punctele comune:



B. *secante*, dacă au o dreaptă comună:



C. *paralele*, dacă nu au niciun punct comun (notăm $\alpha \parallel \beta$):



Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 10, dreptele AB și CD sunt concurente în punctul B, $d \parallel AB$ și $d \cap CD = \varnothing$. Arătați că dreptele d și CD sunt necoplanare.

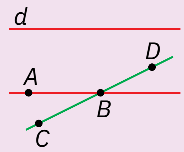


Figura 10

Rezolvare

Deoarece d și CD nu au niciun punct comun, ele sunt fie paralele, fie necoplanare. Presupunând că $d \parallel CD$, cum $B \in CD$, ar rezulta că prin punctul B trec două paralele distincte la d: dreptele BA și BD, absurd. Ca urmare, d și CD sunt necoplanare.

2. Fie semidreptele OX, OY și OZ, care formează unghiuri cu măsurile $\sphericalangle XOY = 100°$, $\sphericalangle YOZ = 110°$, $\sphericalangle ZOX = 120°$. Arătați că semidreptele OX, OY și OZ sunt necoplanare.

Rezolvare

Presupunând, prin absurd, că semidreptele sunt coplanare, sunt posibile două configurații:

- $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$ și $\sphericalangle ZOX$ sunt unghiuri formate în jurul punctului O, deci $330° = \sphericalangle XOY + \sphericalangle YOZ + \sphericalangle ZOX = 360°$, fals;
- una dintre semidreptele OX, OY, OZ este situată în interiorul unghiului format de celelalte două semidrepte, deci măsura unui unghi ar trebui să fie egală cu suma măsurilor celorlalte două unghiuri, fals.

Așadar, cele trei semidrepte sunt necoplanare.

Observație: În general, se arată că semidreptele OX, OY și OZ sunt necoplanare dacă și numai dacă

$$\sphericalangle XOY + \sphericalangle YOZ + \sphericalangle ZOX < 360°.$$

Remarcăm faptul că, dacă avem trei semidrepte OX, OY și OZ în spațiu, *nu este posibil* ca

$$\sphericalangle XOY + \sphericalangle YOZ + \sphericalangle ZOX > 360°.$$

3. Trei drepte care se intersectează în spațiu, două câte două, sunt fie coplanare, fie concurente.

(Teorema de concurență în spațiu)

Rezolvare

Fie dreptele d, g, h, concurente două câte două. Arătăm că dacă dreptele nu au un punct comun, atunci ele sunt coplanare (Figura 11).

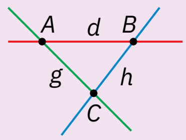


Figura 11

Fie A punctul de intersecție al dreptelor d și g, B punctul de intersecție a dreptelor d și h și C punctul de intersecție al dreptelor g și h. Presupunem că dreptele nu sunt toate trei concurente, deci că $A \neq B$, $B \neq C$ și $C \neq A$.

Fie $\alpha = (d, g)$. Avem: $B \in d \subset \alpha$, deci $B \in \alpha$ și $C \in g \subset \alpha$, deci $C \in \alpha$.

Așadar, $h = BC \subset \alpha$, adică dreptele d, g, h sunt coplanare.

Să observăm că există trei drepte care nu sunt toate situate în același plan, dar se întâlnesc în același punct. Dați un exemplu de astfel de drepte, din sala de clasă.

Probleme propuse

1. a. Desenați punctele A, B, C, D necoplanare și un punct M care să fie și în planul (ABC), și în planul (ACD).

b. Desenați pătratele $MNPQ$ și $MNRS$, situate în plane diferite.

c. Desenați pătratul $ABCD$ și trapezul $BCMN$, cu $BC \parallel MN$, situate în plane diferite.

d. Desenați paralelogramele $ABCD$ și $AECF$, situate în plane diferite.

2. Pentru desenul din Figura 12, stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

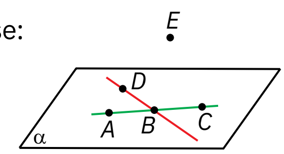


Figura 12

a. $A \in BC$;	**b.** $D \notin BC$;	**c.** $B \in AC$;	**d.** $E \notin BC$;
e. $A \in \alpha$;	**f.** $E \notin \alpha$;	**g.** $C \in (ABD)$;	**h.** $E \notin (ACD)$;
i. $AB \subset \alpha$;	**j.** $DE \not\subset \alpha$;	**k.** $DE \subset (ABD)$;	**l.** $CE \not\subset (ABD)$;
m. $AC \cap BD = \{B\}$;	**n.** $BC = AB$;	**o.** $\alpha = (ABD)$;	**p.** $\alpha \cap (ADE) = AD$.

3. Punctele distincte A, B, C și D aparțin planului α, iar $V \notin \alpha$.

a. Stabiliți numărul minim și numărul maxim de drepte determinate de punctele A, B, C, D și V.

b. Stabiliți numărul minim și numărul maxim de plane determinate de câte trei dintre cele cinci puncte.

4. Se consideră 10 puncte, A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}, oricare patru necoplanare. Determinați numărul:

a. dreptelor distincte determinate; **b.** planelor distincte determinate.

5. Fie d, g, h trei drepte care au un punct comun, iar M un punct nesituat pe acestea. Arătați că dacă $h \not\subset (d, g)$, atunci planele (d, M), (g, M) și (h, M) au o dreaptă comună.

6. **a.** Fie punctele A, B, C astfel încât $AB = 1$ cm, $BC = \sqrt{6}$ cm și $AC = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ cm. Arătați că punctele A, B, C determină un plan.

   b. Fie punctele A, B, C astfel încât $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm și $AC = |x - 2|$ cm. Aflați valorile numărului real x pentru care punctele A, B, C nu determină un plan.

7. Fie punctele necoplanare A, B, C și D. Notăm cu M, N, P respectiv mijloacele segmentelor CD, AB și BC. Determinați dreapta de intersecție a planelor:
   a. (ABM) și (AND); **b.** (ABM) și (ACP);
   c. (ABM) și (CDN); **d.** (APD) și (ABM).

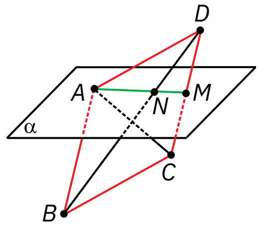


Figura 13

8. Fie planul α și paralelogramul $ABCD$, astfel încât $A, M \in \alpha$, unde M este mijlocul laturii CD, iar $B, C, D \notin \alpha$, ca în Figura 13. Fie N punctul de intersecție dintre BD și planul α. Arătați că N este centrul de greutate al triunghiului ACD.

9. Considerăm punctele necoliniare B, C, D și punctul $A \notin (BCD)$. Fie M mijlocul lui AB și N pe segmentul AC, astfel încât $AN = 3 \cdot NC$.
   a. Arătați că dreapta MN intersectează planul (BCD).
   b. Determinați dreapta de intersecție a planelor (ABD) și (DNP), unde P este punctul de intersecție dintre dreapta MN și planul (BCD).

10. Fie dreptele OA, OB și OC, cu $C \notin (OAB)$, și fie G centrul de greutate al triunghiului ABC.
   a. Determinați intersecția planelor (OAB) și (OCG).
   b. Arătați că dreptele AB și OG sunt necoplanare.

11. Fie punctele A, B, C necoliniare și punctul D nesituat în planul (ABC).
   a. Arătați că punctele D, A, B nu sunt coliniare.
   b. Arătați că intersecția planelor (DAB), (DBC), (DCA) este formată dintr-un singur punct.

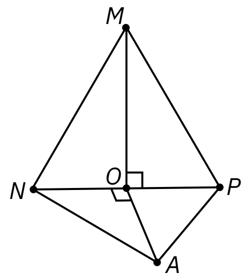


Figura 14

12. În Figura 14, triunghiul echilateral MNP este reprezentat în *plan vertical*, iar triunghiul echilateral ANP este reprezentat în *plan orizontal*. Perimetrul triunghiului MNP este egal cu 36 cm, iar MO este mediană în triunghiul MNP. Determinați lungimea segmentelor AP și AO.

13. (*Teorema lui Desargues*) Fie triunghiul ABC și punctul O în afara planului triunghiului, ca în Figura 15. Fie punctele $M \in OA$, $N \in OB$ și $P \in OC$, astfel încât dreptele MN și AB să se intersecteze într-un punct X, dreptele MP și AC să se intersecteze într-un punct Y, iar dreptele NP și BC să se intersecteze într-un punct Z. Arătați că punctele X, Y, Z sunt coliniare.

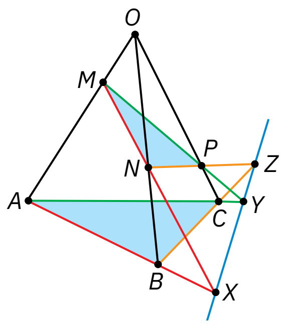


Figura 15

14. Fie punctele A, B, C, D, E, F, unde E este mijlocul segmentului AB și F este mijlocul segmentului CD. Dacă $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$, arătați că punctele A, B, C, D sunt coplanare.

15. Fie pătratele $ABCD$ și $ABEF$ situate în plane diferite.
   a. Determinați dreapta de intersecție a planelor (ACE) și (BDF).
   b. Arătați că $\Delta ADF \equiv \Delta BCE$.

Autoevaluare

1. Triunghiul ABC este inclus într-un plan α, iar punctul $D \notin \alpha$. Fie E un punct, astfel încât $DE \cap \alpha = \varnothing$. Precizați pozițiile dreptelor AB, AD, respectiv DE față de planul α. **(3p)**

2. Pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $CDEF$ sunt situate în plane diferite. Arătați că: **(3p)**
   a. $AB \parallel EF$; **b.** planele (AEF) și (ABC) sunt secante; **c.** dreptele BD și EF nu sunt paralele.

3. Fie D un punct situat în afara planului triunghiului ABC. Notăm cu M și N mijloacele laturilor AC, respectiv AB, și cu E simetricul lui D față de M. **(3p)**
   a. Determinați intersecția planelor BDE și ABC, respectiv BDE și CDN.
   b. Demonstrați că dreptele AE și BD sunt necoplanare.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

Lecția 2: Corpuri geometrice. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat

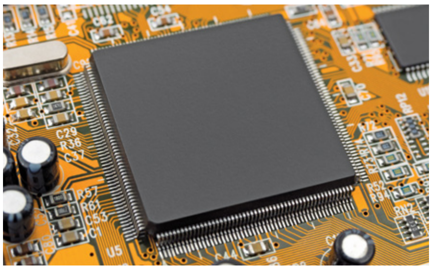
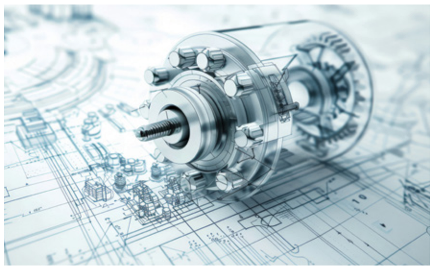
Cuvinte-cheie

piramidă | piramidă regulată | tetraedru regulat

Utilitate

În clasele anterioare am văzut că, pentru a caracteriza, modela, simula sau studia fenomenele care au loc într-un plan, folosim figuri geometrice (triunghi, paralelogram, dreptunghi, pătrat, hexagon, cerc etc.). Pentru a face același lucru în spațiul tridimensional, utilizăm *corpurile geometrice*.

În sens larg, un *corp geometric* este un obiect tridimensional, care ocupă un anumit loc în spațiu, bine determinat, și este mărginit (delimitat) de suprafețe plane sau curbe. Unele dintre acestea (cubul, paralelipipedul dreptunghic) ne sunt familiare încă din clasa a V-a. Corpurile geometrice se folosesc în multiple domenii: în arhitectură și design (la proiectarea clădirilor și a structurilor), în inginerie (componente mecanice sau electronice), în cartografie și geografie, în artă și în grafică computerizată sau în industrie și comerț.



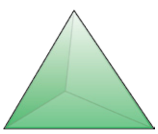
Observații

1. Prin convenție, vom gândi toate corpurile geometrice ca fiind „pline”: de exemplu, punctele aflate „înăuntrul” cubului aparțin cubului. Părțile unui corp geometric pe care „le putem atinge” se numesc fețe (care pot fi fețe laterale sau baze). Reuniunea tuturor fețelor este suprafața (totală a) corpului.
2. Un corp geometric mărginit doar de fețe plane se numește *poliedru* (din limba greacă, de la *poli* = mai multe și *hedron* = față). Intersecția a două fețe este un segment, numit *muchie* a poliedrului, iar punctele comune a două muchii se numesc *vârfuri*. Dintre poliedre, cele mai cunoscute sunt piramidele și prismele.

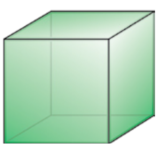
Știați că...?

La Academia filosofului grec Platon (427-347 î.Hr.) se studiau cinci poliedre speciale prin proprietățile lor (toate fețele sunt poligoane regulate congruente, din toate vârfurile pleacă același număr de muchii). Aceste poliedre, numite *poliedre regulate* sau *poliedre platonice*, sunt: tetraedrul, cubul, octaedrul, icosaedrul și dodecaedrul. Platon le-a asociat cu cele cinci elemente fundamentale ale lumii în viziunea antică: focul, pământul, aerul, apa, respectiv cosmosul (eternitatea sau universul). Aceste corpuri au continuat să fie o sursă de inspirație în geometrie, artă și știință.

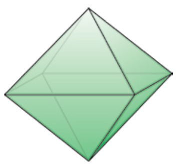
Tetraedru regulat



Cub

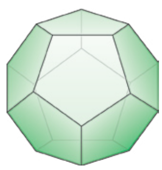


Octaedru regulat



Icosaedru regulat

Dodecaedru regulat



	Tetraedrul regulat	Cubul (hexaedrul regulat)	Octaedrul regulat	Icosaedrul regulat	Dodecaedrul regulat
Fețe	4 (triunghiuri echilaterale)	6 (pătrate)	8 (triunghiuri echilaterale)	20 (triunghiuri echilaterale)	12 (pentagoane regulate)
Vârfuri	4	8	6	12	20
Muchii	6	12	12	30	30

2.1. Piramida

Piramida lui Keops, construită în Egipt în jurul anului 2560 î.Hr., este singura dintre cele șapte minuni antice care există și azi.

Modelul matematic al *Piramidei lui Keops* este corpul geometric reprezentat în Figura 1. Piramidele din Giza, împreună cu *Sfinxul,* sunt o mărturie vie a cunoștințelor avansate de geometrie pe care le stăpâneau arhitecții în antichitate.

Piramida lui Keops

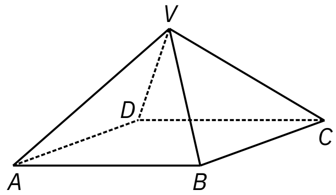


Figura 1

Pentru un poligon oarecare, numim *suprafață poligonală* reuniunea dintre poligon și interiorul său.

De reținut

Definiție. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, și $A_1A_2A_3 \dots A_n$ un poligon convex inclus într-un plan α, iar V un punct exterior planului α. Corpul geometric mărginit de *suprafața poligonală* $A_1A_2A_3 \dots A_n$ și de *suprafețele triunghiulare* VA_1A_2, VA_2A_3, ..., $VA_{n-1}A_n$, VA_nA_1 se numește *piramidă* de vârf V și bază $A_1A_2A_3 \dots A_n$ și se notează $VA_1A_2A_3 \dots A_n$.

Elementele piramidei $VA_1A_2A_3 \dots A_n$ (Figura 2) sunt:

- *vârful piramidei*: punctul V;
- *baza piramidei*: suprafața poligonală $A_1A_2A_3 \dots A_n$;
- *vârfurile bazei*: punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n;
- *muchiile bazei*: segmentele A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1;
- *muchiile laterale*: segmentele VA_1, VA_2, VA_3, ..., VA_n;
- *fețele laterale*: suprafețele triunghiulare VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_nA_1.

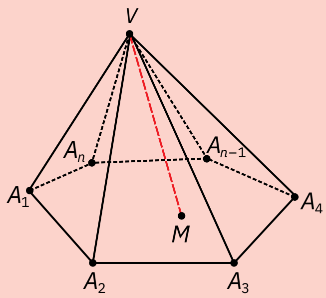


Figura 2

Observații

1. Piramida este un poliedru în care una dintre fețe este o suprafață poligonală convexă (*baza piramidei*), iar celelalte fețe sunt triunghiuri cu același vârf (*fețele laterale ale piramidei*).
2. Reuniunea punctelor din interiorul fețelor laterale, a muchiilor laterale, a muchiilor bazei și a interiorului bazei formează *suprafața piramidei*.
3. Orice punct interior al unui segment care unește două puncte de pe suprafața piramidei, neașezate pe aceeași față, este *punct interior piramidei*.
4. Considerând piramida a fi „plină”, aceasta este formată din toate punctele aflate pe *suprafața* și în *interiorul* piramidei. Astfel, piramida de vârf V și bază $A_1A_2A_3 \dots A_n$ poate fi privită ca reuniunea tuturor segmentelor VM, unde M aparține suprafeței poligonale $A_1A_2A_3 \dots A_n$.
5. În funcție de numărul de laturi ale bazei piramidei, distingem piramide triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale etc.
6. Piramida triunghiulară se mai numește și *tetraedru* (*tetra* = 4 și *edru* = față). Analizând figurile 3-6, observăm că, „răsturnând” un tetraedru, oricare dintre fețele acestuia poate fi considerată drept bază.

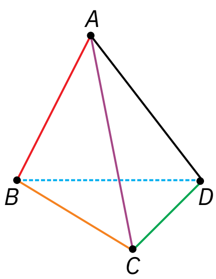


Figura 3

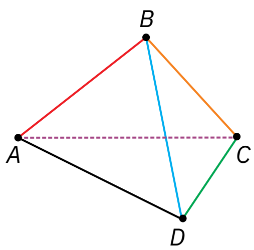


Figura 4

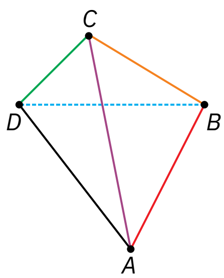


Figura 5

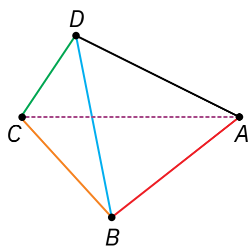


Figura 6

7. Piramidele cu baza un poligon convex sunt *desfășurabile*: decupând unele muchii, rabatând fețele și ignorând „interiorul” piramidei, putem aduce toate fețele într-un același plan. În figurile 7 și 8 se poate urmări o modalitate de desfășurare a unui tetraedru.

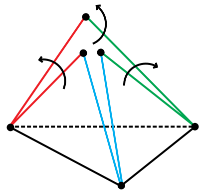


Figura 7

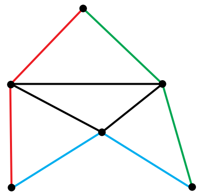


Figura 8

2.2. Piramida regulată

De reținut

Definiție. Piramida cu baza poligon regulat și muchiile laterale congruente se numește *piramidă regulată*. Fețele laterale ale oricărei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente.

În continuare, prezentăm câteva tipuri particulare de piramide regulate (figurile 9, 12, 15, 18) și câte două desfășurări pentru fiecare tip de piramidă (figurile 10-11, 13-14, 16-17, 19-20).

Piramida triunghiulară regulată

Piramida triunghiulară regulată este o piramidă cu baza triunghi echilateral și muchiile laterale congruente.

Elementele piramidei triunghiulare regulate *VABC* (Figura 9)
– vârful V
– baza: triunghiul echilateral ABC
– muchiile bazei: AB, BC, CA
– muchiile laterale: VA, VB, VC
– fețele laterale: VAB, VAC, VBC

Proprietăți
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 60°$;
$AB = BC = CA$;
$VA = VB = VC$;
$\Delta VAB \equiv \Delta VAC \equiv \Delta VBC$

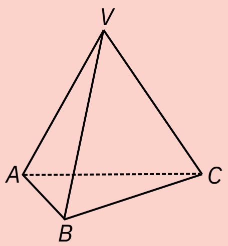


Figura 9

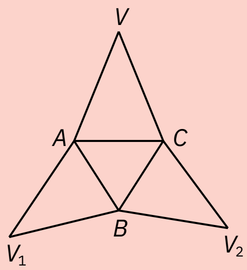


Figura 10

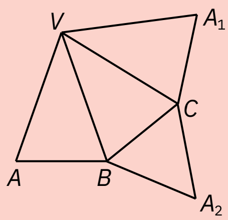


Figura 11

Tetraedrul regulat

Tetraedrul cu toate muchiile congruente se numește *tetraedru regulat*.
Toate cele patru fețe ale unui tetraedru regulat sunt triunghiuri echilaterale congruente.

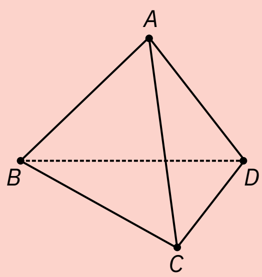


Figura 12

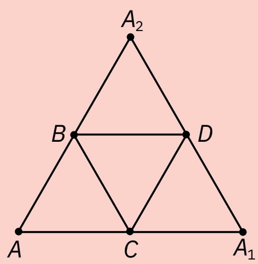


Figura 13

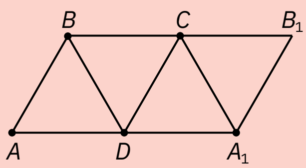


Figura 14

Piramida patrulateră regulată

Piramida patrulateră regulată este o piramidă cu baza pătrat și muchiile laterale congruente.

Elementele piramidei patrulatere regulate *VABCD* (Figura 15)
– vârful V
– baza: pătratul $ABCD$
– muchiile bazei: AB, BC, CD, DA
– muchiile laterale: VA, VB, VC, VD
– fețele laterale: VAB, VBC, VCD, VAD

Proprietăți
$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 90°$;
$AB = BC = CD = DA$;
$VA = VB = VC = VD$;
$\Delta VAB \equiv \Delta VBC \equiv \Delta VCD \equiv \Delta VAD$

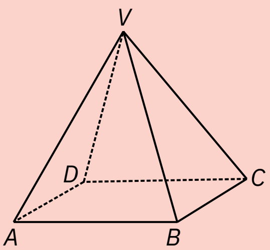


Figura 15

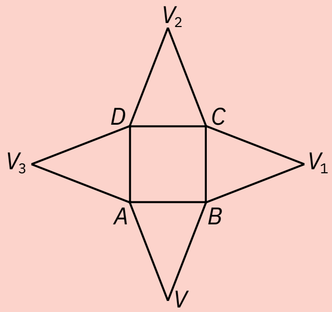


Figura 16

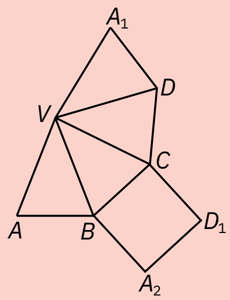


Figura 17

Piramida hexagonală regulată

Piramida hexagonală regulată este o piramidă cu baza hexagon regulat și muchiile laterale congruente.

Elementele piramidei hexagonale regulate *VABCDEF* (Figura 18):
- vârful V
- baza: hexagonul regulat $ABCDEF$
- muchiile bazei: AB, BC, CD, DE, EF, FA
- muchiile laterale: VA, VB, VC, VD, VE, VF
- fețele laterale: VAB, VBC, VCD, VDE, VEF, VFA

Proprietăți

$\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEF = \sphericalangle EFA = 120°$;
$AB = BC = CD = DE = EF = FA$;
$VA = VB = VC = VD = VE = VF$;
$\Delta VAB \equiv \Delta VBC \equiv \Delta VCD \equiv \Delta VDE \equiv \Delta VEF \equiv \Delta VFA$.

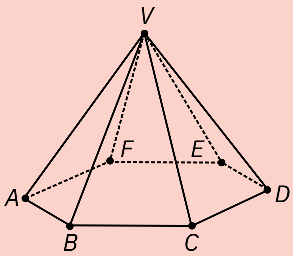


Figura 18

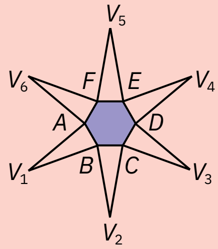


Figura 19

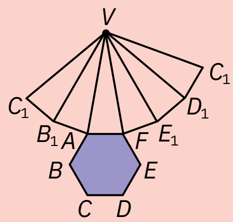


Figura 20

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Un tetraedru regulat $ABCD$ are suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 72 cm.
a. Determinați aria bazei tetraedrului.
b. Arătați că, mergând pe suprafața tetraedrului, lungimea drumului minim dintre punctele C și D care intersectează muchia AB este mai mică de 21 cm.

Rezolvare

a. Tetraedrul regulat are toate muchiile congruente, deci $AB = AC = AD = BC = BD = CD = 72$ cm : 6 = 12 cm (Figura 21). Cum aria unui triunghi echilateral de latură a este $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, deducem că $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = 36\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

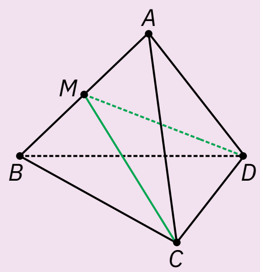


Figura 21

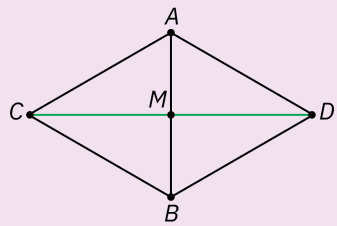


Figura 22

b. Pentru a calcula lungimea celui mai scurt drum dintre C și D, desfășurăm pe un plan fețele laterale ABC și ABD (Figura 22). Pe desfășurare, lungimea drumului minim dintre punctele C și D care intersectează muchia AB este lungimea segmentului CD. Fie $CD \cap AB = \{M\}$.
Cum $AC = AD = BC = BD$, patrulaterul $ACBD$ este romb. Deducem că punctul M este mijlocul diagonalei CD, deci $CD = 2 \cdot CM$. În plus, avem $CD \perp AB$, adică CM este înălțime în triunghiul echilateral ABC.

Ca urmare, $CM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm, deci $CD = 2 \cdot CM = 12\sqrt{3}$ cm.

Deoarece $12\sqrt{3} = \sqrt{432} < \sqrt{441} = 21$, rezultă că lungimea drumului minim dintre punctele C și D este mai mică de 21 cm.

2. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are perimetrul bazei egal cu 96 cm, iar $VA = 20$ cm. Determinați aria triunghiului VAD.

Rezolvare

Cum $ABCDEF$ este hexagon regulat, rezultă că $AB = 96$ cm: $6 = 16$ cm. Notând cu O centrul hexagonului $ABCDEF$ (Figura 23), avem $OA = OD = AB = 16$ cm și $AD = 32$ cm.

Întrucât muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente, rezultă că $VA \equiv VD$, deci triunghiul VAD este isoscel de bază AD. Cum O este mijlocul segmentului AD, VO este mediană, deci și înălțime în triunghiul VAD. Așadar, $VO \perp AD$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA, deducem că $VO^2 = VA^2 - OA^2$, de unde obținem $VO = 12$ cm. Ca urmare, $\mathcal{A}_{VAD} = \dfrac{AD \cdot VO}{2} = 192\ \text{cm}^2$.

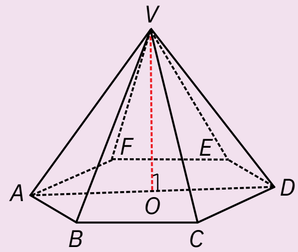


Figura 23

3. În piramida patrulateră regulată $SABCD$, muchiile SB și BC au lungimile de 10 cm, respectiv 12 cm.

a. Determinați aria triunghiului SBC.

b. Determinați poziția punctului $T \in SB$, astfel încât perimetrul triunghiului TAC să fie minim.

Rezolvare

a. Fie M mijlocul muchiei BC (Figura 24). Cum $SABCD$ este piramidă regulată, muchiile SB și SC sunt congruente, deci triunghiul SBC este isoscel. În consecință, mediana SM este și înălțime, deci $SM \perp BC$.

Triunghiul SMB este dreptunghic în M, deci $SM^2 = SB^2 - BM^2$, de unde reiese că $SM = 8$ cm.

Deducem că $\mathcal{A}_{SBC} = \dfrac{BC \cdot SM}{2} = 48\ \text{cm}^2$.

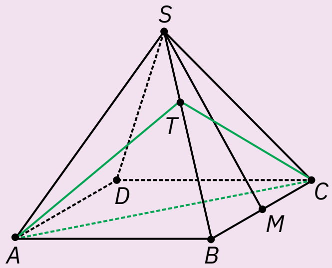


Figura 24

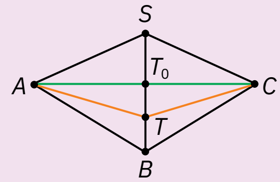


Figura 25

b. Deoarece lungimea segmentului AC nu depinde de alegerea punctului T, perimetrul triunghiului TAC este minim dacă suma $TA + TC$ este minimă.

Desfășurăm pe un plan fețele laterale SBC și SAB (Figura 25). Pe desfășurare, dacă punctele T, A, C sunt necoliniare, atunci $TA + TC > AC$, iar dacă punctele A, T, C sunt coliniare, atunci $TA + TC = AC$. Așadar, suma $TA + TC$ este minimă dacă, pe desfășurare, punctele A, T, C sunt coliniare.

Cum $BA = BC$ și $SA = SC$, punctele S și B sunt egal depărtate de capetele segmentului AC, deci aparțin mediatoarei segmentului AC. Cum T se află atât pe segmentul AC, cât și pe mediatoarea acestuia, rezultă că $CT \perp SB$, deci CT este înălțime în triunghiul SBC.

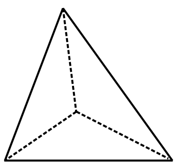
Așadar, punctul T pentru care se realizează minimul perimetrului triunghiului TAC este piciorul perpendicularei duse din punctul C pe muchia SB. Pentru a găsi cu exactitate poziția acestuia pe SB, este suficient să determinăm lungimea unuia dintre segmentele ST sau TB.

Cum $\mathcal{A}_{SBC} = \dfrac{SB \cdot CT}{2}$ și, ținând cont că $\mathcal{A}_{SBC} = 48\ \text{cm}^2$ (de la punctul **a**), obținem $CT = 9{,}6$ cm. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BTC, dreptunghic în T, obținem $TB^2 = BC^2 - CT^2$, de unde rezultă că $TB = 7{,}2$ cm.

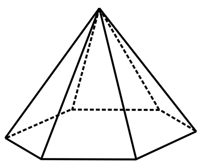
Probleme propuse

1. Desenați corpurile de mai jos, notați-le și precizați denumirea și elementele fiecăruia.

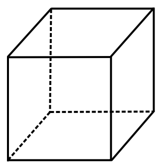
a.



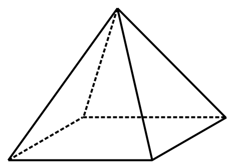
b.



c.



d.



2. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a. Orice piramidă triunghiulară regulată este un tetraedru regulat.

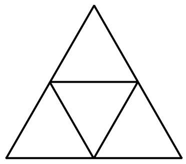
b. Orice tetraedru regulat este o piramidă triunghiulară regulată.

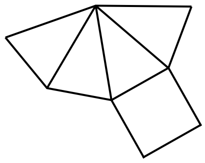
3. Care este numărul minim, respectiv maxim de triunghiuri echilaterale pe care le puteți forma cu 6 chibrituri?

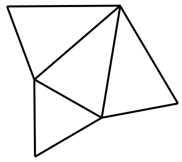
4. Desenați piramide care corespund datelor din tabelul alăturat și, pentru fiecare caz, calculați numărul $N = v + f - m$ (*relația lui Euler*), unde v reprezintă numărul vârfurilor, f este numărul fețelor, iar m este numărul muchiilor. Ce observați?

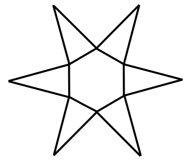
v	f	m	Denumirea piramidei
4	4	6	
5	5	8	
6	6	10	

5. Indicați corpul geometric a cărui desfășurare este reprezentată în fiecare dintre desenele de mai jos. Identificați elementele poliedrului. Justificați răspunsurile date!

a. 

b. 

c. 

d. 

6. Confecționați din carton desfășurările de la problema 5 cu lungimile elementelor mărite de 4 ori. Îndoiți și înfășurați, lipiți cu o bandă adezivă și obțineți astfel piramidele corespunzătoare.

7. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are $\mathcal{A}_b = 32\ \text{cm}^2$. Afirmația lui Adi, conform căreia $AC = 8$ cm este:

a. adevărată; **b.** falsă.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

8. Aria desfășurării unui tetraedru regulat este egală cu $64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Muchia tetraedrului măsoară:

a. 4 cm **b.** 6 cm **c.** 8 cm **d.** 16 cm.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

9. Raza cercului circumscris bazei unei piramide triunghiulare regulate $SABC$ are lungimea egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Notați cu D, E, F mijloacele muchiilor SA, SB, respectiv SC. Fie $P = \{S, A, B, C, D, E, F\}$ mulțimea punctelor reprezentate pe figură.

a. Scrieți 4 submulțimi ale mulțimii P care să conțină 4 elemente ce reprezintă 4 puncte coplanare.

b. Scrieți 4 submulțimi ale lui P care să conțină 4 elemente ce reprezintă 4 puncte necoplanare.

c. Determinați perimetrul și aria triunghiului DEF.

10. În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, $VD = 10\sqrt{3}$ cm și $\sin(\sphericalangle VAD) = 0{,}6$. Determinați aria bazei.

11. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, pe lângă alte ornamente luminoase, în fiecare sens giratoriu al unui oraș, pe un stâlp, a fost amplasat un ornament de forma unui tetraedru regulat $ABCD$ cu muchia de 12 dm. Punctele M, N sunt mijloacele muchiilor BC, respectiv AD, iar $P \in AB$, astfel încât triunghiul PMN are perimetrul minim. Pe laturile acestui triunghi, luminând intermitent, apar periodic urări de Crăciun sau de Anul Nou. Determinați perimetrul triunghiului PMN.

12. Un deal are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$, cu $VA = 25$ hm și $AB = 30$ hm. Un inginer trebuie să proiecteze un drum de lungime minimă, care să lege centrele a două localități situate în A, respectiv C, și care să intersecteze muchia VB într-un punct P. Determinați lungimea drumului BP.

13. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată. Demonstrați că $AB < VA$.

14. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $VA = 3\sqrt{13}$ cm și $AB = 12$ cm, punctele E, F, G sunt mijloacele muchiilor BC, CV, respectiv VD. Fie H un punct pe muchia CD, astfel încât suma $VH + HE$ să fie minimă.

a. Arătați că patrulaterul $ABFG$ este trapez.

b. Determinați lungimea segmentului CH.

Autoevaluare

1. O piramidă regulată are 8 muchii. Baza acestei piramide este: **(3p)**

a. triunghi echilateral; **b.** pătrat; **c.** dreptunghi; **d.** hexagon regulat.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu aria bazei egală cu $36\ \text{cm}^2$. Perimetrul triunghiului VAC este egal cu $24\sqrt{2}$ cm. Determinați lungimea segmentului AC și aria triunghiului VAC. **(3p)**

3. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, muchiile VA și AB au lungimile de 15 cm, respectiv 18 cm. **(3p)**

a. Determinați aria triunghiului VAB.

b. Determinați poziția punctului $T \in VA$, astfel încât perimetrul triunghiului CTB să fie minim.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

Lecția 3: Corpuri geometrice. Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul

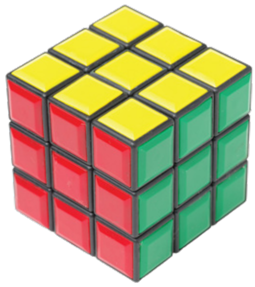
Cuvinte-cheie

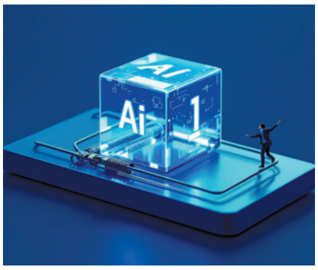
prismă dreaptă | paralelipiped dreptunghic | cub

Utilitate

Plimbați-vă prin localitatea voastră și priviți în jur: toate construcțiile ridicate de mâna omului au forma unor corpuri geometrice pe care le puteți numi. Natura poate crea forme oricât de stranii; omul le preferă pe cele care prezintă simetrii, care au stabilitate, care pot fi construite ușor și ieftin.

Priviți imaginile de mai jos. Denumiți corpurile geometrice pe care le puteți identifica.

În lecția anterioară am văzut că un corp geometric mărginit doar de fețe plane se numește *poliedru*.

3.1. Prisma dreaptă

De reținut

Definiție. Poliedrul mărginit de două suprafețe poligonale convexe congruente (numite *baze*), situate în plane paralele, fiecare având n laturi ($n \geq 3$), și de n suprafețe dreptunghiulare (numite *fețe laterale*) se numește *prismă dreaptă.*

În funcție de numărul de laturi ale unei baze, prismele drepte pot fi *triunghiulare* ($n = 3$), *patrulatere* ($n = 4$), *pentagonale* ($n = 5$), *hexagonale* ($n = 6$) etc.

În Figura 1 este reprezentată *o prismă dreaptă hexagonală* $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$.

Elementele acestei prisme sunt:

- *bazele*: suprafețele poligonale congruente $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$;
- *vârfurile*: punctele A, B, C, D, E, F, respectiv A', B', C', D', E', F';
- *muchiile bazelor*: segmentele AB, BC, CD, DE, EF, FA, respectiv $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$, $F'A'$;
- *muchiile laterale*: segmentele AA', BB', CC', DD', EE', FF' (care sunt paralele și congruente);
- *fețele laterale*: suprafețele dreptunghiulare $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$, $FAA'F'$.

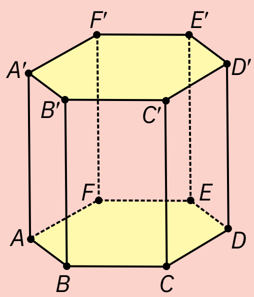


Figura 1

Observații

1. Într-o prismă cu baza având cel puțin patru laturi, segmentele care au o extremitate într-un vârf al unei baze și cealaltă într-un vârf al celeilalte baze, astfel încât cele două vârfuri nu aparțin aceleiași fețe laterale, se numesc *diagonale*. Prismele triunghiulare nu au diagonale.
2. O prismă dreaptă ale cărei baze sunt poligoane regulate se numește *prismă regulată*.

3. Fețele laterale ale unei prisme drepte cu baza poligon regulat (altfel spus, ale unei prisme regulate) sunt dreptunghiuri congruente.

4. Prismele drepte cu bazele poligoane convexe sunt, ca și piramidele, *desfășurabile*.

În figurile 2-5 sunt reprezentate o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral (prismă triunghiulară regulată), o prismă dreaptă cu baza pătrat (prismă patrulateră regulată) și câte *o desfășurare* pentru fiecare:

Prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral (prisma triunghiulară regulată)

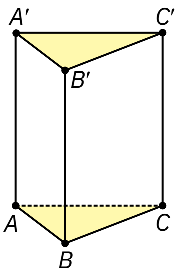


Figura 2

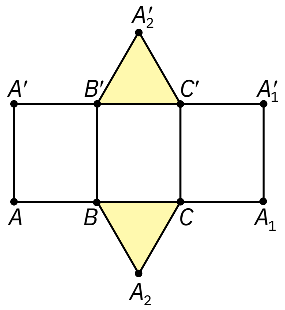


Figura 3

Prisma dreaptă cu baza pătrat (prisma patrulateră regulată)

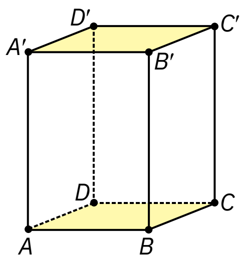


Figura 4

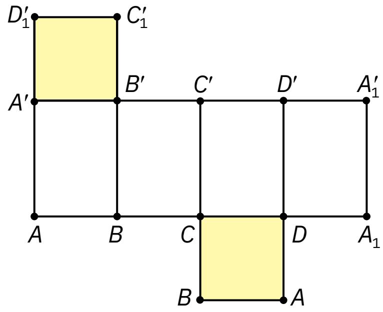


Figura 5

3.2. Paralelipipedul dreptunghic

Paralelipipedul dreptunghic este prisma dreaptă cu baza dreptunghi.

- Muchiile unui paralelipiped dreptunghic sunt congruente patru câte patru. Astfel, paralelipipedul dreptunghic are trei *dimensiuni*: lungime, lățime și înălțime.
  De exemplu, în paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din Figura 6, avem $AB = CD = A'B' = C'D'$, $BC = AD = B'C' = A'D'$ și $AA' = BB' = CC' = DD'$.
- Cele șase dreptunghiuri care constituie fețele unui paralelipiped sunt congruente două câte două.
- Fiecare dintre fețele paralelipipedului dreptunghic poate fi considerată bază a acestuia.

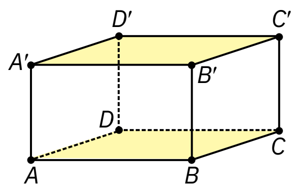


Figura 6

3.3. Cubul

Cubul este prisma dreaptă cu toate fețele pătrate (Figura 7).

- Toate muchiile unui cub sunt congruente; ne vom referi la lungimea oricăreia dintre ele numind-o *muchia cubului*.
- Cele șase pătrate care constituie fețele unui cub sunt congruente.
- Fiecare dintre fețele cubului poate fi considerată bază a acestuia.

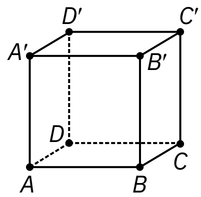


Figura 7

Aplicație. În figurile 8 și 9 sunt desenate desfășurările unui paralelipiped dreptunghic, respectiv ale unui cub. Desenați pe caiete aceste figuri și completați cu denumirile vârfurilor care lipsesc pe desfășurări.

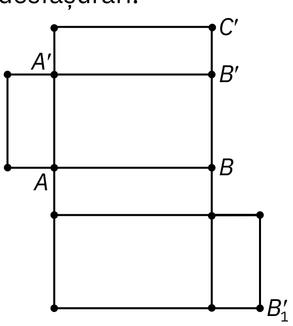


Figura 8

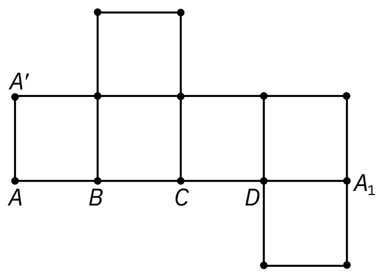


Figura 9

Activitate pe echipe

Să desenăm poliedre

Ne propunem să reprezentăm diverse poliedre atât prin desen, pe caiet, cât și cu ajutorul softului GeoGebra.

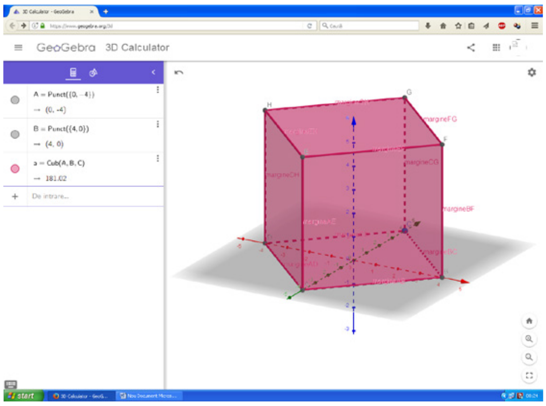
Se vor forma cinci echipe de câte 5-6 elevi. În cadrul fiecărei echipe vor exista *doi geometri* și *doi proiectanți*; ceilalți membri, *moderatorii*, asigură legătura între geometri și proiectanți, precum și legătura cu celelalte echipe.

Prima echipă are drept sarcină reprezentarea unei piramide triunghiulare regulate, a doua – a unei piramide patrulatere regulate, a treia – a unei prisme triunghiulare regulate, a patra – a unui paralelipiped dreptunghic, iar a cincea – a unui cub.

Geometrii trebuie să deseneze pe coli A4 corpul indicat, folosind instrumentele geometrice. Ei vor ține cont de convențiile de desen din Lecția 1, precum și de indicațiile moderatorilor/profesorului.

Criteriu de acceptare a unui desen: dacă trasăm alte elemente ale corpului, în afară de muchiile sale (diagonale ale fețelor etc.), acestea trebuie să nu se suprapună/să nu vină „în prelungirea" muchiilor.

Proiectanților li se indică linkul **https://www.geogebra.org/3d** și, cu ajutorul softului GeoGebra, sunt invitați să reprezinte pe calculator corpurile pe care le-au desenat geometrii din echipa lor.



Imagine realizată cu softul GeoGebra

După îndeplinirea sarcinilor, echipele vor face *Turul galeriei*: moderatorii le prezintă vizitatorilor sarcina de lucru primită și desenele realizate, dificultățile întâlnite și modul în care echipa lor a reușit să le depășească.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 10 este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC, $AB = 6$ cm și $A'A = 6\sqrt{3}$ cm.

Determinați:

a. aria feței laterale $ABB'A'$;
b. lungimea segmentului $A'B$;
c. distanța de la punctul B la dreapta $A'C$;
d. sinusul unghiului $BA'C$.

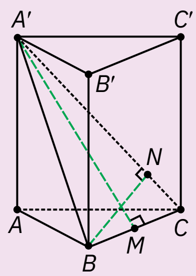


Figura 10

Rezolvare

a. Fața laterală $ABB'A'$ este dreptunghi, deci $\mathcal{A}_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 36\sqrt{3}$ cm^2.

b. Triunghiul $A'AB$ este dreptunghic în A, deci $A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 144$ cm^2, de unde rezultă că $A'B = 12$ cm.

c. Construim $A'M \perp BC$, $M \in BC$, și $BN \perp A'C$, $N \in A'C$. Calculând aria triunghiului $A'BC$ în două moduri, obținem $\mathcal{A}_{A'BC} = \dfrac{BC \cdot A'M}{2} = \dfrac{BN \cdot A'C}{2}$, deci $BN = \dfrac{BC \cdot A'M}{A'C}$ (1).

Deoarece fețele laterale $ABB'A'$ și $ACC'A'$ sunt dreptunghiuri congruente, diagonalele lor sunt congruente, deci $A'B = A'C = 12$ cm. Astfel, triunghiul $A'BC$ este isoscel de bază BC, deci înălțimea $A'M$ este și mediană în acest triunghi. Cum $BM = BC : 2 = 3$ cm, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul $MA'B$, rezultă că $A'M = \sqrt{A'B^2 - BM^2} = 3\sqrt{15}$ cm. Înlocuind în relația (1), obținem $BN = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ cm.

d. Din triunghiul dreptunghic $A'BN$ rezultă că $\sin(\sphericalangle BA'C) = \sin(\sphericalangle BA'N) = \dfrac{BN}{A'B} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

2. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, reprezentat în Figura 11, are dimensiunile $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $D'D = 10$ cm.

a. Determinați suma ariilor tuturor fețelor acestui corp geometric.

b. Arătați că triunghiul $D'DB$ este isoscel.

c. O furnică se deplasează pe fețele paralelipipedului din punctul A în punctul D', traversând muchiile BB' și CC'. Arătați că drumul parcurs de furnică are lungimea strict mai mare decât 24 cm.

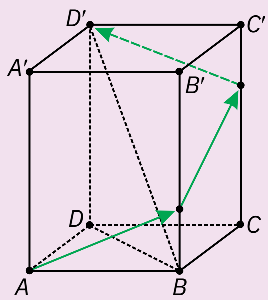


Figura 11

Rezolvare

a. Cele șase fețe ale paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri congruente două câte două. Suma ariilor tuturor fețelor este egală cu: $2 \cdot \mathcal{A}_{ABCD} + 2 \cdot \mathcal{A}_{ABB'A'} + 2 \cdot \mathcal{A}_{ADD'A'} = 2 \cdot (AB \cdot AD + AB \cdot AA' + AD \cdot AA') = 376$ cm^2.

b. Triunghiul ABD este dreptunghic în A, deci $BD^2 = AB^2 + AD^2$, de unde rezultă că $BD = 10$ cm. Așadar, $BD = D'D$, adică triunghiul $D'DB$ este isoscel, de bază $D'B$.

c. Drumul minim pe suprafața paralelipipedului este drumul în linie dreaptă pe desfășurarea pe un plan a celor trei fețe laterale pe care merge furnica ($ABB'A'$, $BCC'B'$ și $CDD'C'$), adică lungimea segmentului AD' (Figura 12). Deoarece $AD = AB + BC + CD = 22$ cm, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADD', dreptunghic în D, obținem $D'A^2 = \sqrt{AD^2 + D'D^2} = \sqrt{584}$ cm. Cum $\sqrt{584} > \sqrt{576} = 24$, rezultă că $AD' > 24$ cm, deci orice alt drum are mai mult de 24 cm.

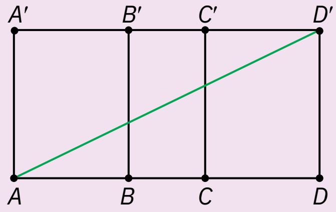


Figura 12

3. Cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a$, este reprezentat în Figura 13. Arătați că:
a. punctele B, B', D', D sunt coplanare;
b. corpul geometric $A'AB'D'$ este o piramidă triunghiulară regulată;
c. corpul geometric $B'ACD'$ este un tetraedru regulat.

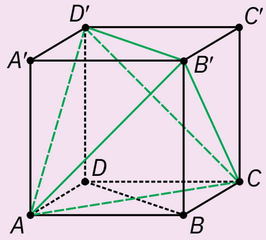


Figura 13

Rezolvare

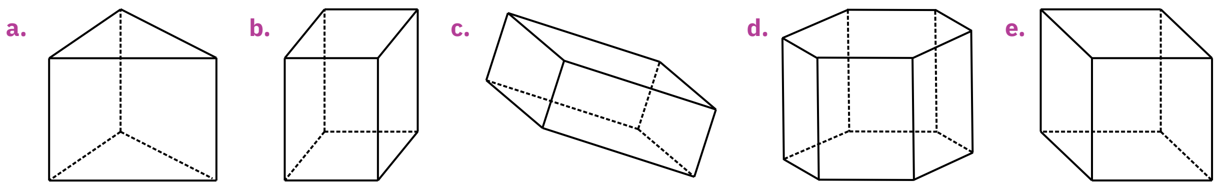
a. Întrucât $BB' \parallel DD'$, dreptele BB' și DD' determină un plan, deci punctele B, B', D', D sunt coplanare.

b. Segmentele AB', AD' și $B'D'$ sunt diagonale în pătrate congruente, deci $AB' = AD' = B'D' = a\sqrt{2}$. Așadar, triunghiul $AB'D'$ este echilateral și, întrucât $A'A = A'B' = A'D' = a$, rezultă că $A'AB'D'$ este piramidă triunghiulară regulată, de vârf A' și bază $AB'D'$.

c. Cum $B'A = B'C = B'D' = AC = AD' = CD' = a\sqrt{2}$, deducem că $B'ACD'$ este tetraedru regulat.

Probleme propuse

1. Desenați corpurile de mai jos, notați-le, precizați denumirea și elementele fiecăruia.



2. Dați exemple de obiecte din clasă sau din apropierea școlii care au forma unei prisme drepte.

3. O prismă dreaptă cu baza pătrat are diagonala bazei de 12 cm. Aria bazei este egală cu:

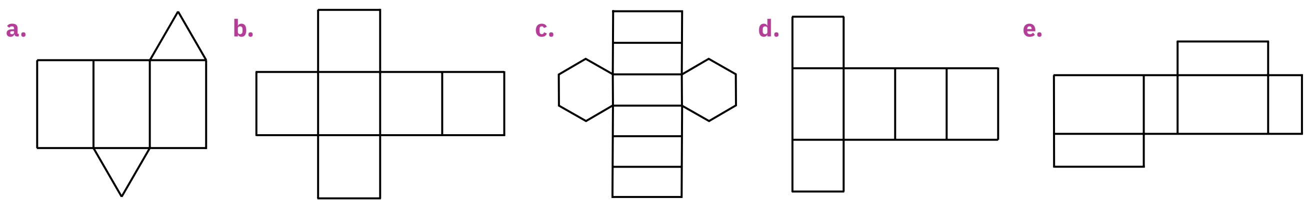
a. 36 cm^2 b. $36\sqrt{2}$ cm^2 c. 72 cm^2 d. 144 cm^2.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Desenați prisme drepte care corespund datelor din tabelul alăturat, unde v reprezintă numărul vârfurilor, f este numărul fețelor, m este numărul muchiilor, iar lungimea unei muchii laterale este diferită de lungimea muchiei bazei. În fiecare caz, calculați numărul $N = v + f - m$. Ce observați?

v	f	m	$N = v + f - m$
6	5	9	
8	6	12	
12	8	18	

6. Pentru fiecare caz, indicați corpul geometric a cărui desfășurare este reprezentată în fiecare dintre desenele de mai jos. Justificați!



7. Confecționați din carton desfășurările anterioare, cu lungimile elementelor mărite de 5 ori. Îndoiți și înfășurați, lipiți cu bandă adezivă și obțineți astfel prisma dreaptă corespunzătoare.

8. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a. Orice prismă dreaptă cu baza pătrat este un paralelipiped dreptunghic.

b. Orice cub este un paralelipiped dreptunghic cu toate dimensiunile egale.

9. Aria bazei unei prisme drepte cu baza hexagon regulat este egală cu $54\sqrt{3}$ cm^2. Eva afirmă că perimetrul bazei este egal cu 36 cm. Afirmația Evei este:

a. adevărată **b.** falsă.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

10. Cubul din Figura 14 s-a format prin asamblarea unor cubulețe din lemn. S-au vopsit toate fețele cubului. După ce s-a uscat vopseaua, cubul a fost demontat în cubulețele inițiale. Dintre cubulețele obținute, numărul celor care au exact trei fețe vopsite este egal cu:

a. 1 **b.** 6 **c.** 8 **d.** 12.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

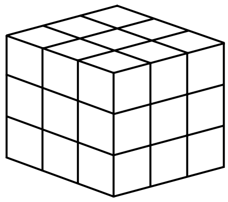


Figura 14

11. Zidul paralelipipedic desenat în Figura 15 este construit din cărămizi cubice și are, în partea de sus, o spărtură. Câte cărămizi au fost scoase din zid?

12. Demonstrați că triunghiul roșu desenat pe suprafața cubului din Figura 16 este echilateral. Câte triunghiuri congruente cu acesta mai puteți desena pe suprafața cubului?

13. Se consideră prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, având muchia bazei de 4 cm și muchia laterală de 6 cm (Figura 17). Punctul P se află pe muchia AA', astfel încât $AP = 2$ cm.

a. Arătați că aria bazei este egală cu $4\sqrt{3}$ cm^2.

b. Demonstrați că triunghiul PBC' este dreptunghic.

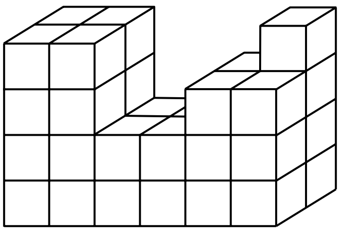


Figura 15

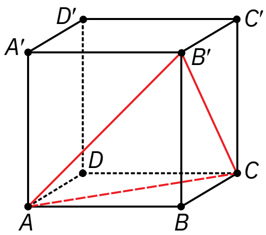


Figura 16

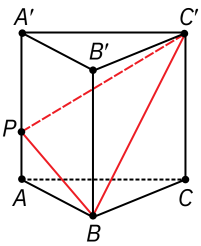


Figura 17

14. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $A'A = 6$ cm și $A'B = A'D = 6\sqrt{2}$ cm. Arătați că:

a. punctele A, A', C', C sunt coplanare; **b.** poliedrul $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

15. Cutia unui stup de albine are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile egale cu 5 dm, 4 dm, respectiv 7 dm. Pentru vopsirea unei suprafețe de 1 dm^2, se consumă 5 grame de vopsea. Câtă vopsea este necesară pentru a vopsi toate fețele cutiei?

16. O ladă are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lățimea de 50 cm și înălțimea cel mult egală cu lățimea. În lada goală se așază 16 pachete cubice cu latura de 25 cm, care umplu lada. Care este lungimea lăzii?

17. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$. Arătați că:

a. punctele A, C', O, O' sunt coplanare;

b. punctul G este centrul de greutate al triunghiului $AB'D'$, unde $\{G\} = A'C \cap AO'$.

18. Un cort are forma unei prisme drepte $ABEDCF$ cu baza triunghiul echilateral ABE (Figura 18). Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu 18 m și $BC = 2 \cdot AB$. Determinați distanța de la punctul E la muchia AB.

19. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, punctul $M \in BC$, astfel încât $OM \perp BC$ și $OM = 8$ cm. Arătați că:

a. $\mathcal{A}_{C'BD} = 128\sqrt{3}$ cm^2;

b. dreptele AC' și $A'C$ sunt concurente;

c. dreptele AB și $A'C'$ sunt necoplanare;

d. $A'BC'D$ este tetraedru regulat.

20. În Figura 19 este reprezentată desfășurarea pe un plan a prismei drepte $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cu baza hexagonul

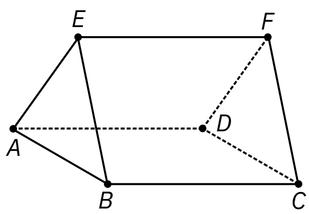


Figura 18

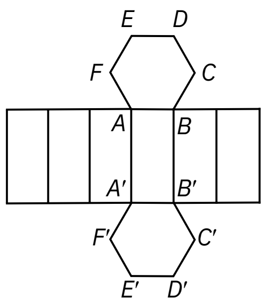


Figura 19

regulat *ABCDEF*. Pe desfășurare, dreptele $A'F'$ și *BC* coincid. Știind că raza cercului circumscris bazei *ABCDEF* este egală cu 10 cm, determinați:

a. perimetrul hexagonului *ABCDEF*; **b.** aria feței $ABB'A'$.

21. O ladă are forma unei prisme patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$. O furnică se deplasează pe suprafața lăzii, din punctul *A* către punctul C', mergând cu viteză constantă pe traseul cel mai scurt (traseul roșu), pe care îl parcurge într-un minut. O altă furnică se deplasează pe suprafața lăzii, din punctul *D* către B', cu viteză constantă pe traseul cel mai scurt (cel albastru), pe care îl parcurge tot într-un minut (Figura 20). Cele două furnici pleacă în același moment. După cât timp se întâlnesc în punctul *P*?

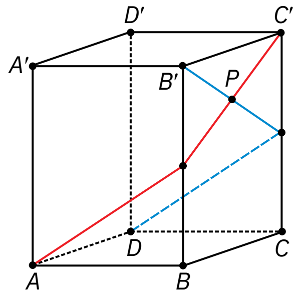


Figura 20

Portofoliu

Fotografiați cu telefonul clădiri din orașul vostru care au forma unei prisme drepte. Printați fotografiile obținute și comentați-le la ora de matematică. Adăugați fotografiile în portofoliul personal.

Autoevaluare

1. Un cub are suma lungimilor muchiilor egală cu 216 cm. Perimetrul unei fețe este egal cu:

a. 36 cm **b.** 54 cm **c.** 72 cm **d.** 108 cm.

Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect. **(3p)**

2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral *ABC*, $AB = 12$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. **(3p)**
Punctul *M* este mijlocul muchiei *AB*. Arătați că triunghiul $MA'C$ este isoscel.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, cu lungimile muchiilor *AB*, *BC* și $C'C$ direct proporționale cu 2, 1, respectiv 3, iar $AB + BC + C'C = 18$ cm. Arătați că: **(3p)**

a. aria bazei *ABCD* este egală cu 18 cm^2;

b. drumul minim parcurs de o furnică de la *A* la C', pe fețele $ABB'A'$ și $BCC'B'$, traversând muchia BB', are mai puțin de 13 cm.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

Lecția 4: Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept

Cuvinte-cheie

disc | cilindru | con | generatoare

Utilitate

În viața de zi cu zi întâlnim corpuri mărginite de suprafețe curbe, pe care obișnuim să le numim *corpuri rotunde*. În inginerie și mecanică, rulmenții și roțile se folosesc pentru a minimiza frecarea și a asigura o mișcare mai lină; prin țevi și conducte, transportul lichidelor sau al gazelor se face mai eficient, reducând rezistența la curgere. În construcții și arhitectură, cupolele distribuie uniform greutatea, fiind folosite la clădiri mari (de ex. Bazilica Sf. Petru), iar turnurile cilindrice sunt mai rezistente la vânt și cutremure. În recipientele cilindrice (sticle, borcane) este mai ușor de stocat sau turnat, iar becurile și lămpile rotunde distribuie lumina uniform.





4.1. Cilindrul circular drept

Prin rotirea unei suprafețe dreptunghiulare în jurul unei laturi se obține un corp geometric numit *cilindru circular drept*.

În Figura 1 este reprezentat cilindrul circular drept obținut prin rotirea suprafeței dreptunghiulare $AOO'A'$ în jurul laturii OO'.

Elementele acestui *cilindru circular drept* sunt:

- *două baze*: discurile congruente de centre O, respectiv O', care sunt situate în două plane paralele;
- *centrele bazelor*: punctele O și O';
- *razele bazelor*: OA, respectiv $O'A'$; $OA = O'A' = R$;
- *generatoarea*: segmentul AA' (a cărui lungime se notează, de regulă, cu G), precum și orice segment MM', cu $M \in \mathcal{C}(O, R)$ și $M' \in \mathcal{C}(O', R)$, astfel încât $MM' \parallel AA'$;
- *suprafața laterală*: suprafața descrisă de latura AA' în procesul de rotație.

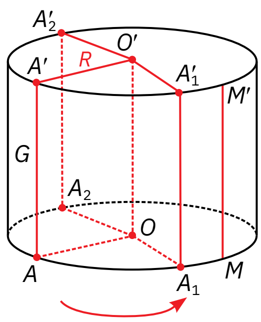


Figura 1

Situație problemă

Dacă decupăm de-a lungul unei generatoare suprafața laterală a unui cilindru circular drept și o desfășurăm pe un plan (ignorând interiorul cilindrului) obținem un dreptunghi de dimensiuni $2\pi R$ și G, adică lungimea cercului de la baza cilindrului circular drept, respectiv lungimea generatoarei acestuia (Figura 2).

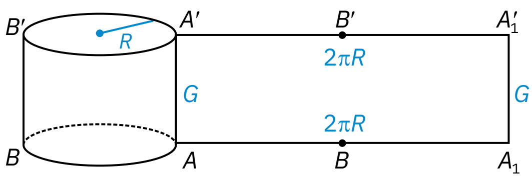


Figura 2

4.4

Activitate practică

Cum construim un cilindru

Materiale necesare: coli A4, bandă adezivă

- Decupați din hârtie două dreptunghiuri identice, având dimensiunile 22 cm × 13,2 cm.
- Înfășurați un dreptunghi pe lungime, iar pe celălalt pe lățime.
- Folosiți banda adezivă pentru a obține suprafețele laterale a doi cilindri.
- Folosind aproximarea $\pi \simeq \frac{22}{7}$, arătați că cei doi cilindri au razele de 3,5 cm, respectiv 2,1 cm.
- Decupați din hârtie bazele celor doi cilindri și lipiți-le cu bandă adezivă pentru a construi cilindrii.
- Colorați cei doi cilindri în culori care vă inspiră.

4.2. Conul circular drept

Prin rotirea unei suprafețe de forma unui triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catete se obține un corp geometric numit *con circular drept*.

În Figura 3 este reprezentat conul circular drept obținut prin rotirea suprafeței triunghiului VOA, dreptunghic în O, în jurul catetei VO.

Elementele acestui *con circular drept* sunt:

- *vârful conului*: punctul V;
- *baza*: discul de centru O și rază OA;
- *centrul bazei*: punctul O;
- *raza bazei*: $OA = R$;
- *generatoarea* (a cărei lungime se notează, de regulă, cu G): segmentul VA sau orice segment VM, cu $M \in \mathcal{C}(O, R)$;
- *suprafața laterală*: suprafața descrisă de segmentul VA în procesul de rotație.

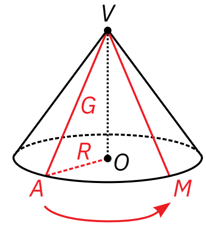


Figura 3

Situație problemă

Dacă decupăm, de-a lungul unei generatoare, suprafața laterală a unui con în care AB este un diametru al bazei și o desfășurăm pe un plan, ignorând interiorul conului, obținem un sector de disc de rază $VB = G$ (Figura 4).

Lungimea arcului de cerc BB_1 este egală cu $2\pi R$ (deoarece acest arc provine din cercul de la baza conului), iar măsura α a unghiului la centru BVB_1, care corespunde acestui sector de cerc, depinde de raza și de generatoarea conului circular drept.

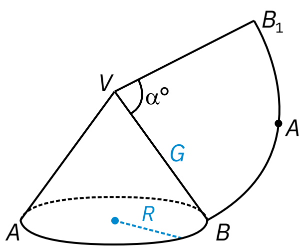


Figura 4

Investigație

Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector cu unghiul la centru de 60° dintr-un disc având raza de 15 cm (Figura 5). Punctele A și B aparțin cercului bazei conului, fiind diametral opuse. Care este lungimea celui mai scurt drum care unește punctele A și B, mergând pe suprafața laterală a conului?

Lucrați individual, având la dispoziție 20 de minute. Urmăriți planul de mai jos.

1. Decupați dintr-o coală de hârtie un sector de disc având raza de 15 cm și unghiul la centru de 60°. Înfășurați-l și lipiți cu bandă adezivă; ați obținut suprafața laterală a unui con circular drept.
2. Pe suprafața laterală a conului construit, trasați diverse drumuri care unesc punctele A și B. Imaginați o metodă prin care să puteți măsura lungimile acestor drumuri. Care este lungimea celui mai scurt drum pe care l-ați trasat?
3. Tăiați de-a lungul generatoarei VA, obținând din nou desfășurarea suprafeței laterale a conului. Ce forme au, pe suprafața desfășurată, traseele desenate la pasul anterior? Care este forma celui mai scurt drum?
4. Demonstrați că lungimea drumului minim este egală cu 15 cm.

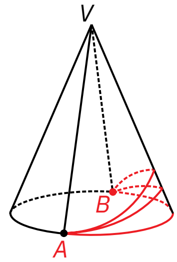


Figura 5

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 6 este reprezentat un cilindru circular drept, cu AA' și BB' generatoare, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse în cercul de centru O al uneia dintre bazele cilindrului. Aria bazei cilindrului este egală

cu 100 πcm^2, iar $AA' = 25$ cm. Determinați lungimea celui mai scurt drum de la A la A', pe suprafața laterală a cilindrului, care intersectează generatoarea BB'.

Folosind calculatorul electronic și considerând $\pi \simeq 3,14$, aproximați rezultatul printr-un număr zecimal cu două zecimale exacte.

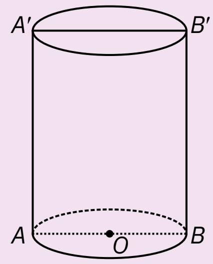


Figura 6

Rezolvare

Baza cilindrului circular drept este un disc de rază R, având aria egală cu πR^2. Rezultă că $\pi R^2 = 100\pi$ cm^2, deci $R = 10$ cm.

Pentru a determina lungimea drumului minim, desfășurăm pe un plan suprafața laterală a cilindrului. Obținem astfel dreptunghiul $AA_1A_1'A'$, cu $AA' = G = 25$ cm și $AA_1 = 2\pi R = 20\pi$ cm (Figura 7).

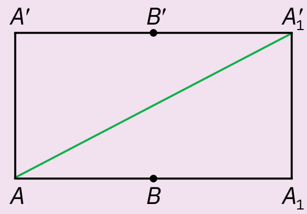


Figura 7

Pe desfășurare, lungimea drumului minim este egală cu lungimea segmentului AA_1'. Triunghiul AA_1A_1' este dreptunghic în A_1, deci $A_1'A^2 = AA_1^2 + A_1'A_1^2$, de unde obținem $AA_1' = \sqrt{400\pi^2 + 625}$ cm $\simeq \sqrt{400 \cdot 3,14^2 + 625}$ cm $\simeq 67,59$ cm.

2. Într-un con circular drept, raza bazei este $R = 9$ cm, iar lungimea generatoarei este $G = 45$ cm. Determinați măsura unghiului la centru al sectorului de disc obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a acestui con circular drept pe un plan.

Rezolvare

Fie conul circular drept cu generatoarele VA și VB, unde A și B sunt puncte diametral opuse în cercul bazei conului (Figura 8).

Tăiem conul de-a lungul generatoarei VB și desfășurăm suprafața laterală a conului pe un plan. Obținem un sector de disc cu raza VB, mărginit de arcul BB_1, a cărui lungime este egală cu lungimea cercului bazei conului. Notăm măsura unghiului la centru BVB_1 cu $u°$. Deoarece lungimea cercului corespunde lungimii unui arc de 360°, are loc relația:

$$\frac{L_{\widehat{BB_1}}}{\widehat{BB_1}} = \frac{L_{\text{cerc}}}{360°} \Leftrightarrow \frac{2\pi R}{u°} = \frac{2\pi G}{360°} \Leftrightarrow u° = \frac{18\pi \text{ cm} \cdot 360°}{2\pi \cdot 45 \text{ cm}} = 72°.$$

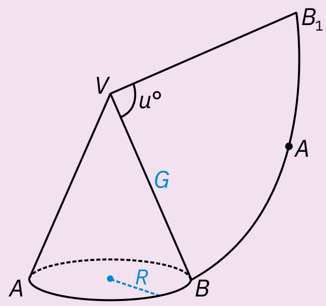


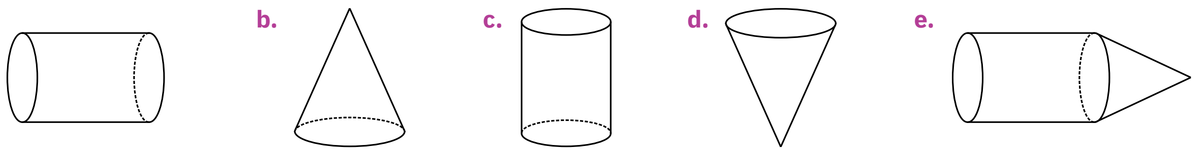
Figura 8

Aplicație. Arătați că, în general, are loc relația: $u = \frac{R}{G} \cdot 360$.

Probleme propuse

1. Denumiți corpurile geometrice desenate mai jos, desenați-le, notați-le și precizați elementele fiecăruia.

a. **b.** **c.** **d.** **e.**



2. Dați exemple de obiecte din clasă sau din mediul înconjurător care au formă de cilindru circular drept.
3. Tăiați o bucată de carton cu lungimea de 12,56 cm și lățimea de 8 cm. Înfășurați bucata de carton de-a lungul lățimii și lipiți cu o bază adezivă pentru a obține suprafața laterală a unui cilindru circular drept. Măsurați diametrul cercului ce are lungimea de 12,56 cm; decupați două discuri din carton care să aibă acest diametru și lipiți-le de suprafața cilindrică pentru a obține macheta unui cilindru circular drept.
4. Copiați și completați tabelul de mai jos, în care am notat cu R, G, L_C, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_{dsf}$ raza, generatoarea, lungimea cercului bazei, aria bazei, respectiv aria dreptunghiului obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept pe un plan.

	R	G	L_C	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_{dsf}$
a.	4 cm	7 cm			
b.		10 cm	24π cm		
c.			14π cm		70π cm^2
d.				64π cm^2	64π cm^2
e.		π cm			$20\pi^2$ cm^2

5. Dați exemple de obiecte din clasă sau din mediul înconjurător care au formă de con circular drept.

6. Tăiați o bucată de carton având forma unui semidisc cu raza 24 cm. Înfășurați semidiscul astfel încât cele două raze care îl mărginesc să se suprapună și lipiți-l cu o bază adezivă pentru a obține un coif. Ce constatați?

7. Copiați și completați tabelul alăturat, știind că am notat cu R, G, L_C, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_S$, $u°$ raza, generatoarea, lungimea cercului bazei, aria bazei, aria sectorului de disc obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept pe un plan, respectiv măsura unghiului la centru al sectorului de disc.

	R	G	L_C	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_S$	$u°$
a.	5 cm	12 cm				
b.		20 cm	20π cm			
c.			24π cm		360π cm^2	
d.				36π cm^2	720π cm^2	
e.		24 cm				60°

8. O cutie are forma unui cilindru circular drept cu generatoarea de 20 cm și raza de 10 cm. Două astfel de cutii au fost ambalate într-o folie de plastic, ca în Figura 9 (plasticul atinge doar o parte din suprafața laterală a fiecărei cutii). Determinați aria suprafeței ambalajului din plastic folosit pentru împachetare.

9. O clădire are forma unui cilindru circular drept cu raza de 4 m și generatoarea de 10 m (Figura 10). Punctele A și B se află pe o generatoare a cilindrului. De jur împrejurul clădirii se construiește o scară exterioară (desenată cu roșu), având lungimea minimă posibilă. Arătați că lungimea scării nu depășește 27,5 m.

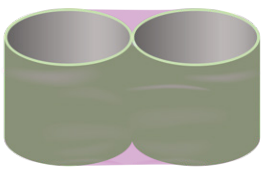


Figura 9

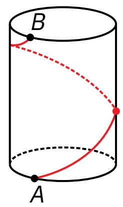


Figura 10

Activitate practică

O coală dreptunghiulară de hârtie are dimensiunile 42 cm × 20 cm. Decupați din această coală suprafața laterală și cele două baze ale unui cilindru circular drept cu raza $R = 5$ cm și generatoarea $G = 20$ cm. Explicați cum puteți proceda.

Portofoliu

1. Folosind instrumentele geometrice, desenați, pe câte o coală A4, următoarele corpuri: o piramidă triunghiulară regulată, o piramidă patrulateră regulată, o prismă triunghiulară regulată, o prismă patrulateră regulată, un cub, un paralelipiped dreptunghic, un cilindru circular drept și un con circular drept.

2. Pentru fiecare dintre cele opt corpuri geometrice de la punctul 1, decupați din hârtie câte o desfășurare a suprafeței sale. Trasați cu creionul liniile după care trebuie efectuată o rabatare pentru a obține corpul.

   Adunați toate materialele de portofoliu într-o mapă, în vederea evaluării finale.

Autoevaluare

1. Un cilindru circular drept are lungimea cercului bazei egală cu 18π cm. Afirmația că aria bazei cilindrului este egală cu 81π cm^2 este: (3p)

   a. adevărată   b. falsă.

   Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. Un cilindru circular drept are raza $R = 6$ cm și generatoarea $G = 10$ cm. Determinați aria desfășurării suprafeței laterale a cilindrului pe un plan. (3p)

3. Un sector de disc, având raza de 12 cm și unghiul la centru de 240°, se înfășoară, dând naștere suprafeței laterale a unui con circular drept. Determinați raza acestui con. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

4.5

Lecția 5: Drepte paralele. Unghiul a două drepte

Cuvinte-cheie

drepte paralele | unghiuri cu laturile respectiv paralele | unghiul a două drepte | drepte perpendiculare

Utilitate

Bârnele cu care construim o cabană au una față de alta diverse poziții, care asigură stabilitatea și durabilitatea construcției. Considerându-le ca drepte, unele pot fi perpendiculare și atunci măsura unghiului dintre ele este egală cu 90°; altele sunt concurente și formează unghiuri ascuțite; altele nu au niciun punct comun și sunt fie paralele, fie necoplanare.


Schița unei cabane

5.1. Drepte paralele

De reținut

Definiție. Două drepte coplanare care nu au niciun punct comun se numesc *drepte paralele*.
Acceptăm, fără demonstrație, următorul rezultat:

Teorema 1 (tranzitivitatea relației de paralelism). Două drepte distincte, paralele cu o a treia, sunt paralele între ele.

Cu alte cuvinte, dacă d_1, d_2 și d_3 sunt trei drepte distincte din spațiu astfel încât $d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \parallel d_3$, atunci $d_1 \parallel d_3$ (Figura 1).

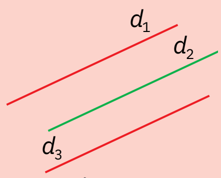


Figura 1

Exemplu

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ (Figura 2).

Avem $AA' \parallel BB'$ și $BB' \parallel CC'$, deoarece fețele laterale $ABB'A'$ și $BCC'B'$ sunt dreptunghiuri. Din tranzitivitatea relației de paralelism rezultă că $AA' \parallel CC'$.

Aplicație. Identificați și alte perechi de muchii paralele, nesituate pe aceeași față a paralelipipedului.

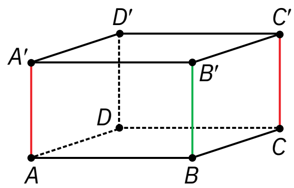


Figura 2

De reținut

Teorema 2. În spațiu, două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Demonstrație. Fie $\sphericalangle xOy$ și $\sphericalangle x'O'y'$ cele două unghiuri, astfel încât $Ox \parallel O'x'$ și $Oy \parallel O'y'$. Considerăm, pe laturile unghiurilor, punctele $A \in Ox$, $B \in Oy$, $A' \in O'x'$ și $B' \in O'y'$, astfel încât $OA = O'A'$ și $OB = O'B'$.

Dreptele OA și $O'A'$ sunt paralele, deci determină un plan α; analog, dreptele paralele OB și $O'B'$ determină un plan β. Există, practic, trei cazuri (configurații) posibile, după cum punctele A și A', respectiv B și B' se află fie de aceeași parte, fie de o parte și de alta a dreptei OO', în planele α, respectiv β (figurile 3, 4 și 5).

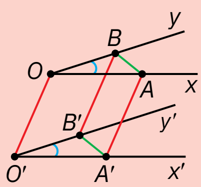


Figura 3

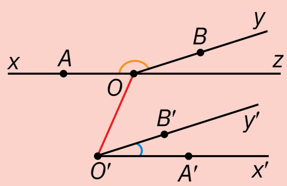


Figura 4

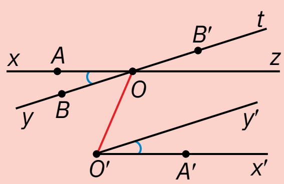


Figura 5

Cazul 1: OO' nu intersectează niciunul dintre segmentele AA' și BB' (Figura 3). Segmentele OA și $O'A'$ sunt coplanare (conținute în planul α), paralele și congruente, deci $OAA'O'$ este paralelogram. Analog, $OBB'O'$ este paralelogram. Prin urmare, $OO' \parallel AA'$ și $OO' \equiv AA'$, respectiv $OO' \parallel BB'$ și $OO' \equiv BB'$. Din tranzitivitatea relațiilor de paralelism și de congruență, rezultă că segmentele AA' și BB' sunt paralele și congruente, deci $ABB'A'$ este paralelogram, de unde obținem $AB \equiv A'B'$. Deducem că triunghiurile OAB și $O'A'B'$ sunt congruente (cazul L.L.L.), deci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$, adică $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$.

Cazul 2: OO' intersectează exact unul dintre segmentele AA' și BB'; să presupunem că pe AA' (Figura 4). Dacă Oz este semidreapta opusă lui Ox, din cazul 1 rezultă că $\sphericalangle zOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$. Cum $\sphericalangle xOy + \sphericalangle zOy = 180°$, rezultă că $\sphericalangle xOy + \sphericalangle x'O'y' = 180°$, adică xOy și $x'O'y'$ sunt unghiuri suplementare.

Cazul 3: OO' intersectează ambele segmente AA' și BB' (Figura 5). Dacă Oz este semidreapta opusă lui Ox și Ot este semidreapta opusă lui Oy, din cazul 1 rezultă că $\sphericalangle zOt \equiv \sphericalangle x'O'y'$. Cum $\sphericalangle zOt \equiv \sphericalangle xOy$ (ca unghiuri opuse la vârf), deducem că $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$.

Mate practică

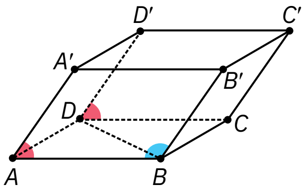


Figura 6

Daniel deformează o cutie de carton de formă paralelipipedică din care a decupat două fețe opuse, până obține un corp de forma celui din Figura 6, în care patrulaterele $ABB'A'$ și $DCC'D'$ sunt paralelograme. Observăm că:

- unghiurile $A'AB$ și $D'DC$ sunt congruente, deoarece $AA' \parallel DD'$ și $AB \parallel DC$ (cazul 1 din Teorema 2). Dreapta AD, care unește vârfurile unghiurilor, nu separă nici punctele A', D' în planul (ADD'), nici punctele B și C în planul (ABC);
- unghiurile ABB' și $D'DC$ sunt suplementare, deoarece $BA \parallel DC$ și $BB' \parallel DD'$ (cazul 2 din Teorema 2). Dreapta BD, care unește vârfurile unghiurilor, nu separă punctele B', D' în planul (BDD'), dar separă punctele A și C în planul (ABC).

Identificați, în Figura 6, unghiuri congruente cu ABB' sau cu $CC'B'$, respectiv suplementare lui $A'AB$.

5.2. Unghiul a două drepte în spațiu

În spațiu, două drepte pot fi coplanare, respectiv necoplanare.

De reținut

Unghiul a două drepte coplanare

Definiție. Fie d_1 și d_2 două drepte coplanare.

- Dacă d_1 coincide cu d_2 sau $d_1 \parallel d_2$, spunem că dreptele d_1 și d_2 formează un unghi de măsură nulă. Așadar, dacă $d_1 = d_2$ sau $d_1 \parallel d_2$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0°$.
- Dacă d_1 și d_2 sunt concurente într-un punct O, atunci unghiul dintre dreptele d_1 și d_2 este unghiul cu cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri formate de cele două drepte în jurul punctului O.

  În particular, dacă $d_1 \perp d_2$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = 90°$; în caz contrar, $\sphericalangle(d_1, d_2) \in (0°, 90°)$.

Exemplu

În Figura 7, dreptele AB și CD sunt concurente în punctul O, iar $\sphericalangle BOC = 110°$. Întrucât unghiurile opuse la vârf sunt congruente, rezultă că $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC = 110°$, respectiv $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 70°$, deci $\sphericalangle(AB, CD) = 70°$.

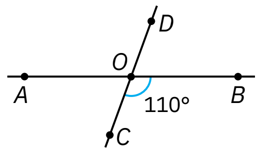


Figura 7

Observație

Măsura unghiului dintre două drepte coplanare d_1 și d_2 *nu se schimbă* dacă înlocuim dreapta d_2 cu o altă dreaptă d_3, paralelă cu d_2. Altfel spus, dacă $d_2 \parallel d_3$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle(d_1, d_3)$.

Într-adevăr, dacă $AB \parallel CD$ și BC este secantă, iar unghiul ABC este ascuțit, ca în Figura 8, atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCD$ (ca unghiuri alterne interne), deci $\sphericalangle(AB, BC) = \sphericalangle(CD, BC)$.

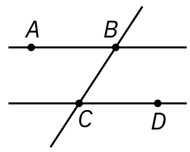


Figura 8

De reținut

Unghiul a două drepte necoplanare

Fie d_1 și d_2 două drepte necoplanare și punctul P în spațiu. În conformitate cu *axioma paralelelor*, există două drepte unice d_1' și d_2', care trec prin P, astfel încât $d_1' \parallel d_1$ și $d_2' \parallel d_2$.

Folosind faptul că unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare (Teorema 2), măsura unghiului dreptelor d_1' și d_2' rămâne aceeași, indiferent de alegerea punctului P.

Definiție. Prin *unghiul a două drepte necoplanare* înțelegem unghiul a două drepte paralele la cele două drepte date, duse printr-un punct oarecare.

Așadar, dacă $d_1' \parallel d_1$, $d_2' \parallel d_2$ și $d_1' \cap d_2' = \{P\}$, atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle(d_1', d_2')$ (Figura 9).

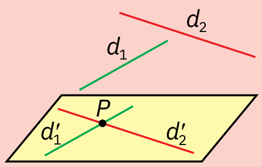


Figura 9

Observații

1. Uneori este mai convenabil să alegem $P \in d_1$ sau $P \in d_2$. De exemplu, dacă $P \in d_1$, $d_2' \parallel d_2$ și $d_1 \cap d_2' = \{P\}$ (Figura 10), atunci $\sphericalangle(d_1, d_2) = \sphericalangle(d_1, d_2')$.
2. Dacă măsura unghiului dintre două drepte necoplanare d și g este egală cu 90°, atunci dreptele d și g sunt *perpendiculare*. Scriem $d \perp g$.

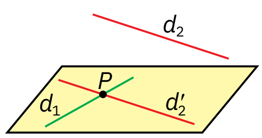


Figura 10

Activitate practică

Decupați din hârtie o suprafață mărginită de un trapez *ABCD*, cu *AB* ∥ *CD*.
Trasați linia mijlocie *EF*. Sunt paralele *AB*, *EF* și *CD*? Justificați răspunsul dat!
Îndoiți suprafața de-a lungul liniei mijlocii (Figura 11).
Rămân *AB*, *EF* și *CD* paralele și după îndoire? Justificați răspunsul!

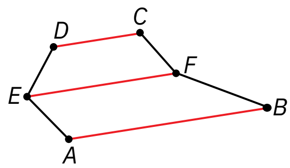


Figura 11

Portofoliu

Demonstrați următoarele proprietăți și adăugați-le în portofoliul **Fundamente ale geometriei în spațiu**.

1. **Teorema acoperișului.** Dacă dreptele paralele a și b sunt incluse în planele secante α, respectiv β, atunci dreapta de intersecție a planelor α și β este paralelă cu dreptele a și b (Figura 12).
Ipoteză: $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = h$
Concluzie: $h \parallel a$ și $h \parallel b$
Indicație: Presupunem, prin absurd, că dreptele a și h nu sunt paralele. Atunci a și h sunt concurente (justificați!) într-un punct O. Se arată că $O \in \beta$ și $O \in \gamma$, apoi se deduce că a și b sunt concurente în O, contradicție cu $a \parallel b$.
Presupunerea făcută este falsă, deci $h \parallel a$. Analog se demonstrează că $h \parallel b$.

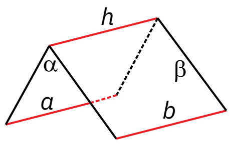


Figura 12

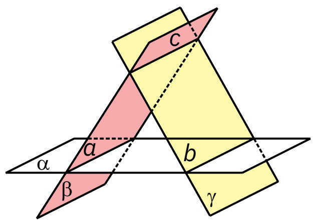


Figura 13

2. **Trei plane secante două câte două.** Dacă trei plane se intersectează două câte două, dar nu au niciun punct comun, atunci cele trei drepte de intersecție sunt paralele (Figura 13).
Ipoteză: $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = c$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$
Concluzie: $a \parallel b \parallel c$.
Indicație: Presupunem, prin absurd, că dreptele a și b nu sunt paralele. Atunci a și b au un punct comun O (justificați de ce!). Se arată că punctul O este conținut în toate cele trei plane α, β, γ, contradicție cu ipoteza. Presupunerea făcută este falsă, deci $a \parallel b$. Analog se arată că $b \parallel c$, deci $a \parallel b \parallel c$.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Într-un con circular drept de vârf V, punctele A și B sunt diametral opuse în cercul ce delimitează baza de centru O, iar C este un punct pe cerc astfel încât $\overset{\frown}{AC} = 60°$. Punctele D și E aparțin generatoarelor VA, respectiv VB, astfel încât $VD = VE$. Determinați măsura unghiului dintre dreptele DE și OC.

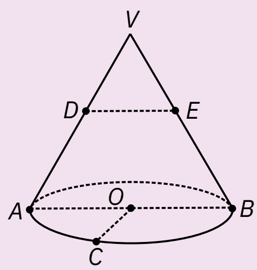


Figura 14

Rezolvare
Din $VD = VE$ și $VA = VB$ rezultă $\frac{VD}{VA} = \frac{VE}{VB}$. Aplicând reciproca teoremei lui Thales în triunghiul VAB, deducem că $DE \parallel AB$ (Figura 14).
Ca urmare, $\sphericalangle(DE, OC) = \sphericalangle(AB, OC) = \sphericalangle AOC = \overset{\frown}{AC} = 60°$.

2. În Figura 15 este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD' \cap A'D = \{P\}$.
   a. Determinați măsurile unghiurilor formate de dreptele $A'B'$ și CD, $A'B'$ și AC, respectiv $B'D'$ și AC.
   b. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: „Cosinusul unghiului dintre dreptele BC' și OP este egal cu $\frac{1}{2}$".

Rezolvare

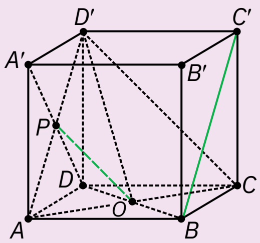


Figura 15

a. Avem $A'B' \parallel AB$ (deoarece $ABB'A'$ este pătrat) și $AB \parallel CD$ (întrucât $ABCD$ este pătrat). Deducem că $A'B' \parallel CD$, deci $\sphericalangle(A'B', CD) = 0°$.
În pătratul $ABCD$, diagonala AC este bisectoarea unghiului drept BAD, deci $\sphericalangle BAC = 45°$.
Cum $A'B' \parallel AB$, obținem $\sphericalangle(A'B', AC) = \sphericalangle(AB, AC) = \sphericalangle BAC = 45°$.
Punctele B, B', D', D sunt coplanare, deoarece $BB' \parallel DD'$. Dar $BB' \equiv DD'$, deci patrulaterul $BB'D'D$ este paralelogram. În consecință, $\sphericalangle(B'D', AC) = \sphericalangle(BD, AC) = 90°$, deoarece $BD \perp AC$.

b. Cum $AB \parallel C'D'$ și $AB \equiv C'D'$, patrulaterul $ABC'D'$ este paralelogram, deci $BC' \parallel D'A$. Segmentul OP este linie mijlocie în triunghiul ACD', deoarece O este mijlocul segmentului AC, iar P este mijlocul segmentului AD'. Așadar, $OP \parallel D'C$ și, cum $BC' \parallel D'A$, deducem că $\sphericalangle(BC', OP) = \sphericalangle(D'A, D'C)$. Deoarece AD', AC și CD' sunt diagonale în pătrate congruente (fețele cubului), rezultă că $AC = AD' = CD'$, deci triunghiul ACD' este echilateral. Ca urmare, $\sphericalangle(D'A, D'C) = \sphericalangle AD'C = 60°$. Cum $\cos 60° = \frac{1}{2}$, afirmația din enunț este adevărată.

3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral, având muchia bazei $AB = 2\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $AA' = 4$ cm (Figura 16). Aflați măsurile unghiurilor determinate de dreptele:
a. AB și CC'; **b.** BC și $A'B'$; **c.** $A'B$ și AC'.

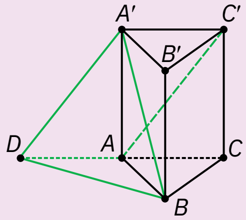


Figura 16

Rezolvare

a. Fața laterală $ACC'A'$ a prismei este un dreptunghi, prin urmare $CC' \parallel AA'$. Rezultă că $\sphericalangle(AB, CC') = \sphericalangle(AB, AA') = \sphericalangle A'AB$, iar măsura acestui unghi este $90°$, deoarece $ABB'A'$ este dreptunghi.

b. Analog, avem: $\sphericalangle(BC, A'B') = \sphericalangle(BC, AB) = \sphericalangle ABC$, iar măsura acestui unghi este $60°$, întrucât ABC este triunghi echilateral.

c. Notăm cu D simetricul punctului C față de punctul A. Segmentele AD și $A'C'$ sunt paralele și congruente, deci $ADA'C'$ este paralelogram; rezultă că $AC' \parallel DA'$. Atunci $\sphericalangle(A'B, AC') = \sphericalangle(A'B, DA') = \sphericalangle BA'D$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABA' și ADA', obținem că $A'B = A'D = 2\sqrt{6}$ cm. În triunghiul BCD, lungimea medianei BA este egală cu jumătate din lungimea laturii pe care cade, deci unghiul CBD este drept. Folosind din nou teorema lui Pitagora, găsim că $BD = 2\sqrt{6}$ cm. Astfel, triunghiul $A'BD$ este echilateral, prin urmare $\sphericalangle BA'D = 60°$.

Probleme propuse

1. Unghiul ABC are măsura egală cu $130°$. Afirmația că $\sphericalangle(AB, BC) = 130°$ este: **a.** adevărată **b.** falsă.
Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

2. a. Priviți sala de clasă ca pe un paralelipiped dreptunghic și considerați două muchii oarecare ale sale. Sunt paralele sau sunt perpendiculare? Ar putea exista și o a treia situație?
b. În clasa a VI-a ați învățat că, dacă d, g și h sunt trei drepte distincte într-un plan, astfel încât $d \perp h$ și $g \perp h$, atunci $d \parallel g$. Rămâne afirmația adevărată dacă dreptele d, g și h sunt în spațiu? Justificați răspunsul analizând Figura 17.

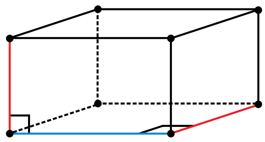


Figura 17

3. Poliedrul $ABCDA'B'C'D'$ este prismă dreaptă cu baza pătratul $ABCD$. Măsura unghiului dintre dreptele $B'C'$ și BD este egală cu: **a.** $30°$ **b.** $45°$ **c.** $60°$ **d.** $90°$.
Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.
a. Demonstrați că punctul C' aparține planelor $(A'AC)$, (ABD') și $(AB'D)$.
b. Arătați că intersecția planelor $(A'AC)$, (ABD') și $(AB'D)$ este o dreaptă.

5. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, iar M, N, P, Q mijloacele muchiilor AB, BC, CD, respectiv DA. Arătați că:
a. $\sphericalangle(MN, CD) = 60°$; **b.** $\sphericalangle(MP, AB) = 90°$; **c.** patrulaterul $MNPQ$ este romb.

6. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, cu $P \in VA$ și $Q \in VB$, astfel încât $VP = VQ$. Arătați că $PQ \parallel CD$.

7. În Figura 18 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$. Punctele D și E aparțin muchiilor VA, respectiv VB, astfel încât $VD = VE$. Determinați măsura unghiului dintre dreptele DE și BC.

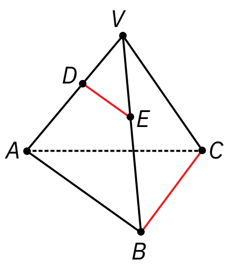


Figura 18

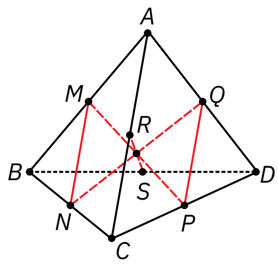


Figura 19

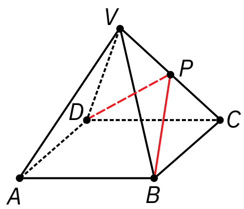


Figura 20

8. Fie $ABCD$ un tetraedru, iar M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor AB, BC, CD, DA, AC, respectiv BD (Figura 19).
a. Arătați că $MN \parallel PQ$.
b. Demonstrați că dreptele MP, NQ și RS sunt concurente.
c. Dacă $\sphericalangle(AC, BD) = 90°$, arătați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

9. Un deal are forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$, cu $VA = AB = 16$ hm. Punctele A, B, C, D, V sunt centrele a cinci localități legate prin 8 drumuri construite de-a lungul muchiilor piramidei (Figura 20). O firmă a construit o pensiune agroturistică într-un punct P, situat pe muchia VC, care a fost ales astfel încât drumul de acces BP să aibă lungimea minimă posibilă. Ulterior, a fost construit și drumul DP. Arătați că:
a. $\sphericalangle(VB, AD) = 60°$; **b.** $\sphericalangle(AD, BP) = 30°$; **c.** $\operatorname{tg}(\sphericalangle(VA, BP)) = \sqrt{2}$.
d. prin construcția drumului de acces DP, pentru locuitorii din localitatea D, distanța până la pensiune se micșorează cu cel puțin 50%.

10. Într-un cilindru circular drept, fie AB un diametru al bazei. Dacă AA', BB', CC' sunt generatoare, $AB = 6$ cm și $AA' = 3\sqrt{3}$ cm, determinați măsura unghiului dreptelor OA și OB' și măsura unghiului dreptelor AA' și OC'.

11. Fie M și N mijloacele muchiilor AB, respectiv BC ale tetraedrului $ABCD$. Se știe că $MN = 2$ cm, $AD = 5$ cm și $CD = 3$ cm. Demonstrați că dreptele MN și CD sunt perpendiculare.

12. Considerăm cubul $ABCDMNPQ$. Determinați măsurile următoarelor unghiuri:

a. $\sphericalangle(AB, CQ)$; **b.** $\sphericalangle(AQ, CN)$; **c.** $\sphericalangle(AQ, BM)$.

13. Într-un con circular drept de vârf V, punctele A și B sunt diametral opuse pe cercul de centru O al bazei, iar D este mijlocul arcului AB. Fie $M \in VA$ și $N \in VB$, astfel încât $VM = VN$. Arătați că $MN \perp OD$.

14. În piramida triunghiulară regulată $ABCD$, punctele G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale fețelor ABC, respectiv ACD. Demonstrați că dreptele G_1G_2 și BD sunt paralele.

15. În Figura 21 este reprezentată prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$.

a. Determinați măsurile unghiurilor ABC și $B'A'D'$.

b. Arătați că unghiurile ABC și $B'A'D'$ au laturile respectiv paralele.

c. Demonstrați că $\sphericalangle(AB, BC) \equiv \sphericalangle(A'B', A'D')$.

d. Arătați că dreptele $A'C'$ și BE sunt perpendiculare.

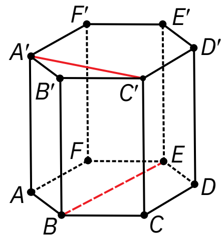


Figura 21

16. Considerăm cubul $ABCDMNPQ$. Notăm cu O și O' centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCPN$. Determinați măsurile următoarelor unghiuri:

a. $\sphericalangle(MO, NQ)$; **b.** $\sphericalangle(AQ, OO')$; **c.** $\sphericalangle(DO', AN)$.

17. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă, cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 6$ cm și $A'A = 8$ cm. Determinați:

a. cosinusul unghiului dreptelor AA' și CD'; **b.** tangenta unghiului dreptelor AD' și BC;

c. tangenta unghiului dreptelor AD' și $A'C'$; **d.** sinusul unghiului dreptelor $A'B$ și AD'.

18. Considerăm prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$ și muchia laterală $AA' = 10$ cm. Pe muchiile AA', BB' și CC' se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât $AM = 5$ cm, $BN = 2$ cm și $CP = 7$ cm (Figura 22).

a. Determinați măsurile unghiurilor dintre dreptele $A'B'$ și CD, $A'B'$ și $C'C$, respectiv $A'B'$ și AC.

b. Punctele O și Q sunt centrul bazei $ABCD$, respectiv mijlocul segmentului ND'. Arătați că $OQ \parallel AA'$ și $OQ = 6$ cm.

c. Demonstrați că $MN \parallel PD'$ și $NP \parallel MD'$.

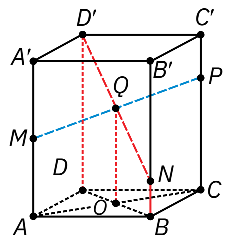


Figura 22

Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate:

a. Două drepte care nu au niciun punct comun sunt . . . . sau . . . .

b. Măsura unghiului dintre două drepte perpendiculare este . . . . . .°.

c. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt . . . . sau . . . . **(3p)**

2. Se consideră prisma dreaptă $ABCMNP$, cu baza triunghiul echilateral ABC (Figura 23). Asociați fiecărui unghi din prima coloană măsura sa din a doua coloană. **(3p)**

a. $\sphericalangle(MN, PC)$

b. $\sphericalangle(BC, NP)$

c. $\sphericalangle(MP, AB)$

1. 0°
2. 30°
3. 60°
4. 90°

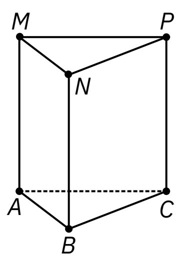


Figura 23

3. Se consideră prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$, muchia bazei $AB = 2\sqrt{3}$ cm și muchia laterală $AA' = 6$ cm. Arătați că: **(3p)**

a. $A'B \parallel D'C$; **b.** $AC \perp B'D'$; **c.** $(A'B, DC') = 60°$.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

4.6

Lecția 6: Dreaptă paralelă cu un plan

Cuvinte-cheie

dreaptă inclusă într-un plan | dreaptă paralelă cu un plan | dreaptă secantă unui plan

Utilitate




În construcții și arhitectură, la proiectarea clădirilor, grinzile și coloanele trebuie să fie paralele cu anumite plane pentru a asigura stabilitatea și alinierea corectă a structurii. Pentru o instalare eficientă, conductele sau cablurile trase de-a lungul unor camere sunt paralele cu planul podelei (sau al tavanului). Arborii sau tijele anumitor piese mecanice trebuie să fie paralele cu anumite suprafețe pentru a evita uzura neuniformă și pentru a asigura buna funcționare a mecanismelor. Sistemele de ghidaj, cum ar fi șinele trenurilor sau benzile transportoare, necesită elemente paralele cu planul de rulare pentru o funcționare corectă.

De reținut

Definiție. Spunem că o dreaptă d este paralelă cu un plan α dacă dreapta d și planul α nu au niciun punct comun.

Notăm $d \parallel \alpha$. Așadar, $d \parallel \alpha$ dacă și numai dacă $d \cap \alpha = \varnothing$ (Figura 1).

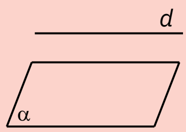


Figura 1

Observație. O dreaptă care nu este inclusă într-un plan este fie paralelă cu planul respectiv, fie secantă planului (adică dreapta intersectează planul într-un singur punct).

Teorema 1. O dreaptă paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan este paralelă cu planul sau inclusă în plan.

Așadar, dacă d și e sunt două drepte și α este un plan astfel încât $d \parallel e$ și $e \subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$ sau $d \subset \alpha$.

Într-o formulare echivalentă, Teorema 1 afirmă că, dacă dreapta d, care **nu** este inclusă în planul α, este paralelă cu o dreaptă e conținută în planul α, atunci dreapta d este paralelă cu planul α.

Așadar, dacă $d \not\subset \alpha$, $d \parallel e$ și $e \subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$.

Demonstrație:

Fie β planul determinat de dreptele paralele d și e. Evident, $\beta \neq \alpha$ și $\alpha \cap \beta = e$. Presupunem, prin absurd, că d nu este paralelă cu α. Atunci d și α sunt secante. Notăm $d \cap \alpha = \{O\}$ (Figura 2). Din $O \in d$ și $d \subset \beta$, rezultă că $O \in \beta$, iar cum $O \in \alpha$, deducem că $O \in \alpha \cap \beta$, adică $O \in e$. Așadar, $d \cap e = \{O\}$, ceea ce contrazice faptul că $d \parallel e$. Presupunerea făcută este falsă, deci $d \parallel \alpha$.

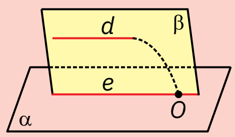


Figura 2

Observație. Dacă dreapta d este paralelă cu planul α, cum $d \cap \alpha = \varnothing$, rezultă că d nu are puncte comune cu nicio dreaptă din planul α.

Această afirmație nu înseamnă că d este paralelă cu orice dreaptă a planului α.

Mai exact, dacă $d \parallel \alpha$, atunci dreptele planului α se împart în două categorii:

- drepte paralele cu dreapta d (cum sunt dreptele a și b din Figura 3);
- drepte necoplanare cu dreapta d (cum este dreapta c din Figura 3).

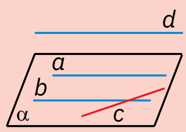


Figura 3

Exemplu

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub (Figura 4). Folosind Teorema 1, deducem că:

- din $A'B' \not\subset (ABC)$, $A'B' \parallel AB$ și $AB \subset (ABC)$, rezultă că $A'B' \parallel (ABC)$;
- din $AA' \not\subset (BCC')$, $AA' \parallel BB'$ și $BB' \subset (BCC')$, rezultă că $AA' \parallel (BCC')$;
- din $B'C' \not\subset (A'BC)$, $B'C' \parallel BC$ și $BC \subset (A'BC)$, rezultă că $B'C' \parallel (A'BC)$.

Justificați faptul că orice muchie conținută într-o față a cubului este paralelă cu planul feței opuse.

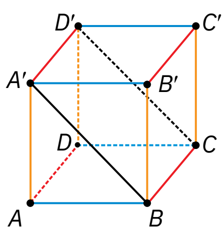


Figura 4

De reținut

Teorema 2. Dacă dreapta d este paralelă cu planul α și este conținută într-un plan β care îl intersectează pe α, atunci dreapta de intersecție a celor două plane este paralelă cu d.

Așadar, dacă $d \parallel \alpha$, $d \subset \beta$ și $\alpha \cap \beta = e$, atunci $d \parallel e$ (Figura 5).

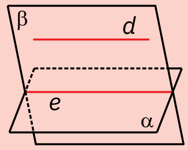


Figura 5

Demonstrație:

Presupunem, prin absurd, că dreptele d și e nu sunt paralele. Fiind coplanare (incluse în planul β) și distincte, dreptele d și e sunt concurente. Notăm $\{A\} = d \cap e$. Cum $A \in e$ și $e \subset \alpha$, rezultă că $A \in \alpha$. Dar $A \in d$, deci dreapta d intersectează planul α în punctul A, contradicție cu ipoteza $d \parallel \alpha$. Așadar, presupunerea făcută este falsă, deci $d \parallel e$.

Teorema 3. Dacă dreapta d este paralelă cu planul α, atunci orice dreaptă paralelă cu d, care conține un punct al planului α, este inclusă în planul α.

Așadar, dacă $d \parallel \alpha$, $A \in \alpha$, $d \parallel e$ și $A \in e$, atunci $e \subset \alpha$ (Figura 6).

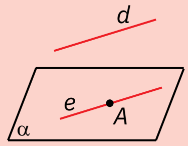


Figura 6

Demonstrație:

Notăm cu β planul determinat de dreapta d și de punctul A. Deoarece planele α și β au un punct comun (pe A), cele două plane au o dreaptă comună, pe care o notăm cu h. Evident, $A \in h$.

Din Teorema 2 rezultă că $d \parallel h$. Cum $d \parallel e$, iar punctul A este comun dreptelor coplanare e și h (ambele fiind incluse în planul α), din axioma paralelelor rezultă că dreptele e și h coincid. În consecință, $e \subset \alpha$.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 7 este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$. Pe muchiile VA și VB se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $VE = VF$. Punctul M este mijlocul muchiei VC și g este dreapta de intersecție a planelor (EFM) și (ABC). Arătați că:

a. $AB \parallel (VDC)$; **b.** $EF \parallel (ABC)$; **c.** $VA \parallel (MBD)$;

d. dreptele EF și AC sunt necoplanare; **e.** $EF \parallel g$.

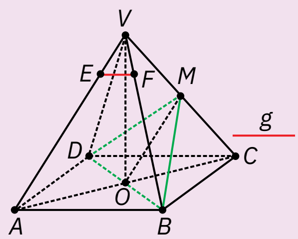


Figura 7

Demonstrație:

a. Evident $AB \parallel CD$, deoarece $ABCD$ este pătrat. Cum $AB \not\subset (VDC)$, $AB \parallel CD$ și $CD \subset (VDC)$, rezultă că $AB \parallel (VDC)$.

b. Din $VE = VF$ și $VA = VB$, rezultă că $\dfrac{VE}{VA} = \dfrac{VF}{VB}$, deci $EF \parallel AB$. Cum $EF \not\subset (ABC)$, $EF \parallel AB$ și $AB \subset (ABC)$, deducem că $EF \parallel (ABC)$.

c. În pătratul $ABCD$, fie $AC \cap BD = \{O\}$. Segmentul OM este linie mijlocie în triunghiul VAC, deci $OM \parallel VA$. Deoarece $VA \not\subset (MBD)$, $VA \parallel OM$ și $OM \subset (MBD)$, rezultă că $VA \parallel (MBD)$.

d. Cum $EF \parallel (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$, dreptele EF și AC nu au niciun punct comun, deci sunt fie paralele, fie necoplanare. Presupunând că $EF \parallel AC$, prin A ar trece două paralele distincte la dreapta EF, și anume AB și AC, absurd. Așadar, EF și AC sunt necoplanare.

e. Deoarece $EF \parallel (ABC)$, $EF \subset (EFM)$ și $(EFM) \cap (ABC) = g$, conform Teoremei 2, rezultă că $EF \parallel g$.

2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu O și O' centrele fețelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$. În exteriorul cubului se consideră un punct P, astfel încât $CP \parallel A'C'$ (Figura 8). Arătați că:

a. $A'C' \parallel (ABC)$; **b.** $CP \subset (ABC)$; **c.** $AO' \parallel (BC'D)$;

d. intersecția planelor (ABC) și $(A'BC')$ este paralelă cu dreapta $A'C'$.

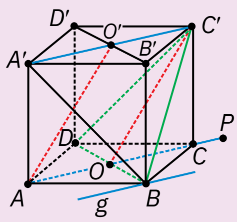


Figura 8

Demonstrație:

a. Deoarece $ABCDA'B'C'D'$ este cub, rezultă că $AA' \parallel CC'$ și atunci punctele A, A', C, C' sunt coplanare. În planul (AA', CC'), avem $AA' \parallel CC'$ și $AA' \equiv CC'$, deci patrulaterul $ACC'A'$ este paralelogram. În consecință, $A'C' \parallel AC$.

Cum $A'C' \not\subset (ABC)$, $A'C' \parallel AC$, $AC \subset (ABC)$, rezultă că $A'C' \parallel (ABC)$.

b. Vom aplica Teorema 3. Deoarece $A'C' \parallel (ABC)$, $C \in (ABC)$, $CP \parallel A'C'$, rezultă că $CP \subset (ABC)$.

c. În pătratele congruente $ABCD$ și $A'B'C'D'$, avem $O'C' \equiv OA$, ca jumătăți de diagonale congruente.

Deoarece $ACC'A'$ este paralelogram, deducem că $O'C' \parallel OA$, și, cum $O'C' = OA$, rezultă că patrulaterul $AOC'O'$ este paralelogram, deci $AO' \parallel OC'$. Cum $AO' \not\subset (BC'D)$, $AO' \parallel OC'$, $OC' \subset (BC'D)$, rezultă că $AO' \parallel (BC'D)$.

d. Planele (ABC) și $(A'BC')$ au un punct comun (pe B), deci au o dreaptă comună, pe care o notăm cu g. Deoarece $A'C' \parallel (ABC)$, $A'C' \subset (A'BC')$ și $(A'BC') \cap (ABC) = g$, din Teorema 2 rezultă că $g \parallel A'C'$.

4.6

Probleme propuse

1. Identificați în sala de clasă drepte paralele cu planul tablei, respectiv cu planul parchetului.

2. Se consideră un triunghi ABC și un plan α, astfel încât $B, C \in \alpha$ și $A \notin \alpha$ (Figura 9). Punctele D și E sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Ce poziție au dreptele BC, AB, AC, respectiv DE față de planul α? Justificați.

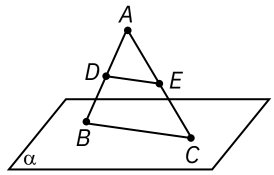


Figura 9

3. Într-un cilindru circular drept, cu AB diametrul bazei și AA', BB' generatoare, punctele D și E sunt mijloacele segmentelor AA', respectiv $A'B$. Arătați că dreapta DE este paralelă cu planul bazei cilindrului.

4. Folosind creioane și o carte pentru a reprezenta dreptele, respectiv planul, construiți contraexemple prin care să arătați că următoarele propoziții sunt false:
P_1: Dacă $d \parallel g$ și $g \subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$. P_2: Dacă $d \parallel \alpha$ și $g \subset \alpha$, atunci $d \parallel g$.

5. În Figura 10 este reprezentată prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$. Arătați că:
a. punctele A', B, C, D' sunt coplanare; **b.** $AD \parallel (A'BC)$;
c. punctele B, B', D', D sunt coplanare; **d.** $B'D' \parallel (ABC)$.

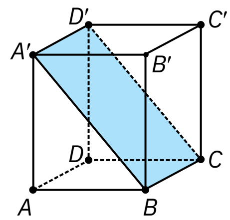


Figura 10

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, cu $AC \cap BD = \{O\}$. Stabiliți pozițiile următoarelor drepte față de planele indicate:
a. CD și (ABC); **b.** $D'O$ și (ABC); **c.** AB și $(C'CD)$; **d.** $D'O$ și $(BB'D)$; **e.** CC' și $(A'AB)$; **f.** BC' și $(A'AD)$.

7. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC, în care punctul M este mijlocul muchiei BC, iar punctul O este centrul feței $ACC'A'$. Arătați că:
a. $OM \parallel (ABB')$; **b.** $A'B \parallel (AMC')$; **c.** $\sphericalangle(A'C', AM) = 30°$; **d.** $\sphericalangle(OM, AB) = \sphericalangle BA'B'$.

8. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și P, Q centrele fețelor $ADD'A'$ și $BCC'B'$. Arătați că:
a. $BC \parallel (ADD')$; **b.** $CD \parallel (ABC')$; **c.** $PQ \parallel (ABC)$; **d.** $D'Q \parallel (A'BD)$.

9. În tetraedrul regulat $ABCD$, se consideră punctele $M \in AB$ și $N \in AC$, astfel încât $4 \cdot AM = AB$ și $3 \cdot AN = NC$. Arătați că: **a.** $MN \parallel (BCD)$; **b.** dreptele MN și CD sunt necoplanare; **c.** $\sphericalangle(MN, CD) = 60°$.

10. Fie prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$. Arătați că:
a. $D'D \parallel (A'AB)$; **b.** $CD' \parallel (A'AF)$; **c.** $AD \parallel (A'D'F)$; **d.** $\sphericalangle(A'C', BE) = 90°$.

11. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, punctul M este mijlocul muchiei CV, iar punctul E este simetricul punctului D față de M. Arătați că:
a. $VE \parallel (ABC)$; **b.** $CE \parallel (VAD)$; **c.** $VA \parallel (MBD)$; **d.** ΔMBE este isoscel.

12. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, punctele G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale fețelor VAB, respectiv VBC. Fie E un punct în spațiu, astfel încât $BE \parallel G_1G_2$. Demonstrați că:
a. $G_1G_2 \parallel (ABC)$; **b.** $BE \subset (ABC)$.

13. Într-un con circular drept de vârf V, punctele A și B sunt diametral opuse pe cercul bazei, iar punctele C, D aparțin semicercului AB, astfel încât $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{DB}$. Arătați că $CD \parallel (VAB)$.

14. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată și punctele $M \in VB$, $N \in VC$, astfel încât $AM \perp VB$ și $AN \perp VC$. Arătați că: **a.** $MN \parallel (ABC)$; **b.** planele (AMN) și (ABC) sunt secante și MN este paralelă cu intersecția lor.

15. Considerăm tetraedrul $ABCD$ și punctele $M \in AC$, $N \in AD$, astfel încât semidreptele BM și BN să fie bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ABD. Arătați că $MN \parallel (BCD)$ dacă și numai dacă $BC = BD$.

Autoevaluare

1. În Figura 11, $VABC$ este piramidă triunghiulară regulată, iar D și E sunt mijloacele muchiilor VA, respectiv VB. Ce poziție au dreptele BC, VA, respectiv DE, față de planul (ABC)? Justificați. **(3p)**

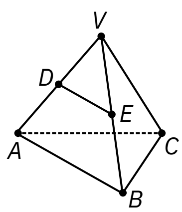


Figura 11

2. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, punctul T este mijlocul muchiei VB. Arătați că:
a. $AD \parallel (VBC)$; **b.** $VD \parallel (ACT)$; **c.** dreptele VD și AT sunt necoplanare. **(3p)**

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctele O și P sunt centrele fețelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$. **(3p)**
a. $A'C' \parallel (ABC)$; **b.** $OP \parallel (C'CD)$; **c.** $\sphericalangle(AD', OP) = 60°$.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 7: Plane paralele

Cuvinte-cheie

plane paralele | plane secante | teorema fierăstrăului

Utilitate

În construcția unei case sau a unui bloc cu mai multe etaje, plafoanele sunt incluse în plane paralele. Acestea sunt vizibile mai ales la construcțiile neterminate. Planul plafonului fiecărui etaj este paralel cu planul bazei, precum și cu planele plafoanelor celorlalte etaje.

De reținut

Definiție. Două plane care nu au niciun punct comun se numesc *plane paralele*.

Teorema 1 (criteriul de paralelism al planelor). Dacă două drepte concurente d și e sunt paralele cu un plan α, atunci planul determinat de dreptele d și e este paralel cu α.

Așadar, dacă $d \parallel \alpha$, $e \parallel \alpha$ și $d \cap e = \{A\}$, atunci $(d, e) \parallel \alpha$.

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că planul β, determinat de dreptele d și e, nu este paralel cu α. Cum α și β nu coincid (deoarece dreapta d este inclusă în β, dar nu este inclusă în α), rezultă că planele α și β sunt secante. Notăm cu h dreapta lor comună (Figura 1).

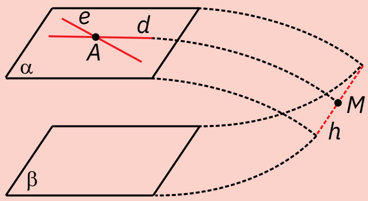


Figura 1

Dreapta h este paralelă cu cel mult una dintre dreptele d sau e (altfel, prin A ar trece două drepte paralele cu h, absurd), deci h intersectează cel puțin una dintre dreptele d sau e.

Dacă h intersectează dreapta d într-un punct M, atunci M aparține atât dreptei d, cât și planului α (deoarece $h \subset \alpha$), ceea ce contrazice ipoteza $d \parallel \alpha$. Analog se obține o contradicție dacă h intersectează dreapta e. Așadar, presupunerea făcută inițial este falsă, deci $(d, e) \parallel \alpha$.

Observație

Teorema 1 oferă următoarea modalitate practică de a arăta că două plane α și β sunt paralele: se aleg două drepte concurente d și e din planul α și se identifică două drepte concurente d' și e' din planul β, astfel încât $d \parallel d'$ și $e \parallel e'$ (Figura 2). Conform Teoremei 1, rezultă că $\alpha \parallel \beta$.

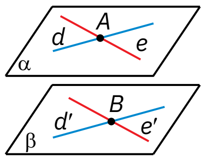


Figura 2

Exemple

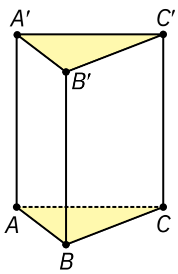


Figura 3

Bazele oricărei prisme drepte sunt situate în plane paralele.

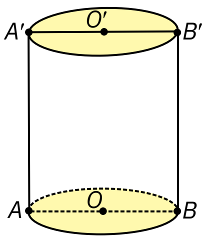


Figura 4

Bazele oricărui cilindru circular drept sunt situate în plane paralele.

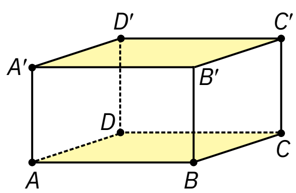


Figura 5

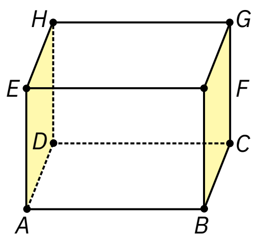


Figura 6

Într-un paralelipiped, oricare două fețe opuse sunt situate în plane paralele.

4.7

De reținut

Teorema 2. Dacă planele α și β sunt paralele, atunci orice dreaptă d inclusă în α este paralelă cu β.

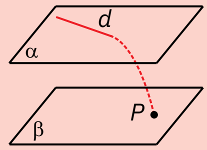


Figura 7

Demonstrație. Fie α și β două plane paralele și o dreaptă $d \subset \alpha$. Vom arăta că $d \parallel \beta$.
Presupunem, prin absurd, că dreapta d are un punct P, comun cu planul β (Figura 7). Cum $P \in d$ și $d \subset \alpha$, rezultă $P \in \alpha$. Deci $P \in \alpha \cap \beta$, ceea ce contrazice că $\alpha \parallel \beta$. Deducem că presupunerea făcută este falsă. Așadar $d \parallel \beta$.

Observație

Dacă planele α și β sunt paralele, nu rezultă că orice dreaptă a planului α este paralelă cu orice dreaptă a planului β. Oricum am alege o dreaptă a planului α, găsim și drepte ale planului β cu care să fie paralelă, dar și drepte ale planului β cu care să fie necoplanară.

De reținut

Teorema 3 (Teorema fierăstrăului). Dacă două plane sunt paralele, orice plan care intersectează unul dintre cele două plane îl intersectează și pe celălalt, iar dreptele de intersecție sunt paralele.
Așadar, dacă α, β, γ sunt trei plane astfel încât $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$ și $\beta \cap \gamma = b$, atunci $a \parallel b$ (Figura 8).

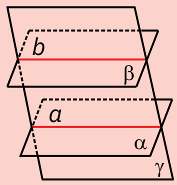


Figura 8

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că dreptele a și b nu sunt paralele. Fiind coplanare (sunt incluse în planul γ), dreptele a și b sunt concurente într-un punct pe care îl notăm cu O. Atunci $O \in a \subset \alpha$ și $O \in b \subset \beta$, deci O este un punct comun al planelor α și β, ceea ce contrazice ipoteza $\alpha \parallel \beta$. Deducem că presupunerea făcută este falsă. Așadar, $a \parallel b$.

Teorema 4 (unicitatea planului paralel cu un plan dat, dus printr-un punct exterior). Printr-un punct exterior unui plan α se poate construi un singur plan paralel cu planul α.
Cu alte cuvinte, dacă $A \notin \alpha$, există un unic plan β astfel încât $A \in \beta$ și $\alpha \parallel \beta$.

Consultați demonstrația în manualul digital.

Teorema 5 (tranzitivitatea relației de paralelism între plane). Două plane distincte, paralele cu un al treilea plan, sunt paralele.
Altfel spus: dacă α, β, γ sunt trei plane distincte astfel încât $\alpha \parallel \beta$ și $\beta \parallel \gamma$, atunci $\alpha \parallel \gamma$.

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că α și γ nu sunt paralele. Notăm $d = \alpha \cap \gamma$ și alegem un punct A pe dreapta d. Atunci prin A trec două plane paralele cu planul β, contradicție. Așadar, $\alpha \parallel \gamma$.

Portofoliu

Demonstrați următoarele proprietăți și adăugați-le în portofoliul **Fundamente ale geometriei în spațiu**.

1. Segmente paralele între plane paralele

Două plane paralele determină segmente congruente pe două drepte paralele pe care le intersectează.

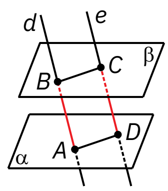


Figura 9

Ipoteză: $\alpha \parallel \beta$, $d \parallel e$, $d \cap \alpha = \{A\}$, $g \cap \alpha = \{D\}$, $d \cap \beta = \{B\}$, $e \cap \beta = \{C\}$
Concluzie: $AB \equiv CD$
Indicație. Se aplică teorema fierăstrăului pentru a deduce că $AD \parallel BC$.

2. Teorema lui Thales în spațiu

Trei sau mai multe plane paralele determină pe două drepte secante segmente proporționale.
Ipoteză: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$; d, e drepte oarecare;
$d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$, $d \cap \gamma = \{C\}$;
$e \cap \alpha = \{A'\}$, $e \cap \beta = \{B'\}$, $e \cap \gamma = \{C'\}$

Concluzie: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

Indicație. Se studiază trei cazuri, după cum dreptele d și e sunt paralele (Figura 10), concurente (Figura 11), respectiv necoplanare (Figura 12).

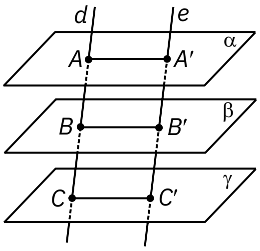


Figura 10

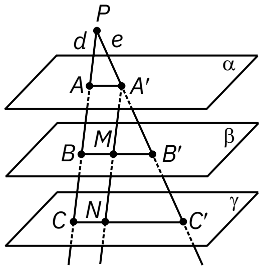


Figura 11

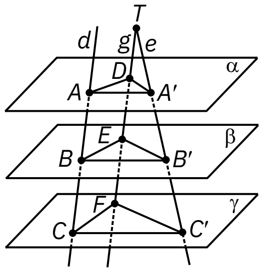


Figura 12

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, $AC \cap BD = \{O\}$, $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$, iar $T \in A'C'$ (Figura 13). Arătați că:

a. $D'T \parallel (ABC)$; **b.** $(AB'D') \parallel (BDC')$;
c. $AO' \parallel OC'$; **d.** $g \parallel BD$, unde $g = (AB'D') \cap (ABC)$.

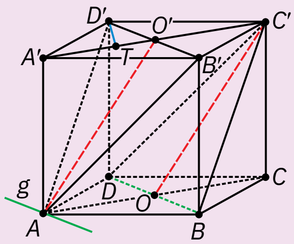


Figura 13

Rezolvare

a. Din $(A'B'C') \parallel (ABC)$ și $D'T \subset (A'B'C')$, rezultă $D'T \parallel (ABC)$.

b. Deoarece $AB \parallel C'D'$ (ambele drepte sunt paralele cu CD), punctele A, B, C', D' sunt coplanare. Cum $AB \parallel C'D'$ și $AB \equiv C'D'$, rezultă că patrulaterul $ABC'D'$ este paralelogram și atunci $AD' \parallel BC'$. Analog, patrulaterul $BB'D'D$ este paralelogram, deci $B'D' \parallel BD$. Deoarece $AD' \cap B'D' = \{D'\}$, $AD' \parallel BC'$, $B'D' \parallel BD$ și $BC' \cap BD = \{B\}$, din Teorema 1 (criteriul de paralelism) rezultă că $(AB'D') \parallel (BDC')$.

c. Deoarece $A'A \parallel C'C$, punctele A, O, C, C', O', A' aparțin planului ACC'. Aplicăm *teorema fierăstrăului*: din $(AB'D') \parallel (BDC')$, $(ACC') \cap (AB'D') = AO'$ și $(ACC') \cap (BDC') = OC'$ rezultă că $AO' \parallel OC'$.

d. Având un punct comun (pe A), planele $(AB'D')$ și (ABC) au o dreaptă comună g, cu $A \in g$. Deoarece $B'D' \parallel BD$, $B'D' \subset (AB'D')$, $BD \subset (ABC)$ și $(AB'D') \cap (ABC) = g$, rezultă că $g \parallel BD$.

2. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $M \in VA$, $N \in VB$, $P \in VC$, $Q \in VD$ astfel încât $(MNP) \parallel (ABC)$ și $MQ \parallel AD$. Notăm cu d intersecția planelor (VAD) și (VBC) și cu e intersecția planelor (VAB) și (VDC) (Figura 14). Arătați că:

a. $\Delta VMN \sim \Delta VAB$; **b.** $VN \cdot CP = VP \cdot BN$; **c.** $Q \in (MNP)$;
d. $d \parallel (ABC)$; **e.** dreptele e și AC sunt necoplanare.

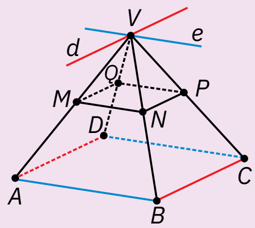


Figura 14

Rezolvare

a. Deoarece $(MNP) \parallel (ABC)$, $(VAB) \cap (MNP) = MN$ și $(VAB) \cap (ABC) = AB$, conform teoremei fierăstrăului rezultă că $MN \parallel AB$. Aplicând teorema fundamentală a asemănării în triunghiul VAB, rezultă că $\Delta VMN \sim \Delta VAB$.

b. Ca mai sus, obținem $NP \parallel BC$, ceea ce implică $\frac{VN}{BN} = \frac{VP}{CP}$, de unde rezultă că $VN \cdot CP = VP \cdot BN$.

c. Deoarece $MN \cap MQ = \{M\}$, $MN \parallel AB$, $MQ \parallel AD$, rezultă că $(MNQ) \parallel (ABC)$. Cum $M \notin (ABC)$, $(MNP) \parallel (ABC)$ și $(MNQ) \parallel (ABC)$, rezultă că planele (MNP) și (MNQ) coincid. Așadar, $Q \in (MNP)$.

d. Cum $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată, $ABCD$ este pătrat, deci $AD \parallel BC$ și $AB \parallel CD$. Planele (VAD) și (VBC) au un punct comun, deci au o dreaptă comună. Fie $d = (VAD) \cap (VBC)$; evident, $V \in d$. Deoarece $AD \parallel BC$, $AD \subset (VAD)$, $BC \subset (VBC)$ și $(VAD) \cap (VBC) = d$, aplicând teorema acoperișului, rezultă că $d \parallel AD$. Cum $d \not\subset (ABC)$, $d \parallel AD$ și $AD \subset (ABC)$, rezultă că $d \parallel (ABC)$.

e. Procedând ca la **d**, rezultă că $e \parallel (ABC)$. Deoarece $AC \subset (ABC)$, rezultă că $e \parallel AC$ sau dreptele e și AC sunt necoplanare. Cum $AB \parallel e$, iar prin A trece o singură paralelă la e, deducem că dreptele e și AC sunt necoplanare.

Probleme propuse

1. Identificați în sala de clasă plane paralele, respectiv plane secante.

2. În Figura 15 este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$, în care punctele D, E, F sunt mijloacele muchiilor VA, VB, respectiv CV, iar $DE = 6$ cm. Arătați că:

a. triunghiul ABC are perimetrul egal cu 36 cm și aria egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2;

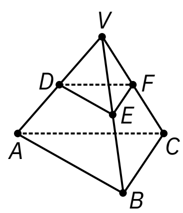


Figura 15

b. $DE \parallel (ABC)$; **c.** $\Delta VEF \sim \Delta VBC$; **d.** $(DEF) \parallel (ABC)$;

e. dacă planul α este paralel cu (ABC) și nu conține punctul D, atunci $\alpha \parallel (DEF)$.

3. Folosind creioane și cărți pentru a reprezenta dreptele, respectiv planele, construiți contraexemple prin care să arătați că următoarele propoziții sunt false.

P_1: Dacă $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ și $a \parallel b$, atunci $\beta \parallel \gamma$. P_2: Dacă $\alpha \parallel \beta$, $d \subset \alpha$ și $g \subset \beta$, atunci $d \parallel g$.

4. Fie prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate:

a. Planele (ABC) și (DEF) sunt plane ...

b. Planele (ABC) și $(D'E'F')$ sunt plane ...

c. Planele (ABC) și $(C'D'E)$ sunt plane ...

5. Fie triunghiul ABC. Arătați că un plan α, paralel cu dreptele AB și BC, este paralel și cu dreapta AC.

6. Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC, în care punctul M este mijlocul muchiei BC, $BN \perp AC$, $N \in AC$, iar punctul O este centrul feței $ACC'A'$, arătați că $(MON) \parallel (ABB')$.

7. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și M, N, P și Q mijloacele muchiilor BC, CC', $B'C'$ și CD. Arătați că:

a. $(MNQ) \parallel (BC'D)$; **b.** $(MPQ) \parallel (BB'D)$; **c.** $(MNQ) \parallel (AB'D')$.

8. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și punctele M, N, P pe muchiile AB, AC și AD, astfel încât $4 \cdot AM = AB$, $3 \cdot AN = NC$ și $4 \cdot PD = 3 \cdot AD$. Arătați că $(MNP) \parallel (BCD)$.

9. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată și punctele M, N, P, Q pe muchiile VA, VB, VC și VD, astfel încât $VM = 2 \cdot AM$, $VB = 3 \cdot BN$, $2 \cdot PC = VP$ și $3 \cdot VQ = 2 \cdot VD$. Arătați că M, N, P și Q sunt coplanare și $(MNP) \parallel (ABC)$.

10. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată și punctele $M \in VB$, $N \in CV$, $P \in VA$, astfel încât $AM \perp VB$, $AN \perp CV$ și $NP \cap AC = \varnothing$. Arătați că $\sphericalangle(NP, BC) = 60°$ și că $(MNP) \parallel (ABC)$.

11. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor VA, VB, respectiv CV. Fie $(VAB) \cap (VDC) = g$ și $Q \in VD$, astfel încât $MQ \parallel AD$. Arătați că:

a. $(MNP) \parallel (ABC)$; **b.** $\Delta MNP \sim \Delta ABC$; **c.** punctele M, N, P, Q sunt coplanare;

d. $g \parallel (ABC)$; **e.** g și BD sunt drepte necoplanare.

12. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale fețelor BCD, ACD, ABD, ABC ale tetraedrului $ABCD$. Arătați că:

a. dreptele AG_1, BG_2, CG_3 și DG_4 sunt concurente;

b. $G_2G_3 \parallel (BCD)$;

c. $(G_2G_3G_4) \parallel (BCD)$.

13. Fie planele paralele α, β și γ și dreptele necoplanare $AB \subset \alpha$ și $CD \subset \beta$, ca în Figura 16. Notăm cu M, N, P și Q punctele de intersecție ale dreptelor AC, BC, BD și AD cu planul γ. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

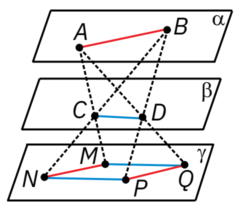


Figura 16

Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate. (3p)

a. Două plane care au o dreaptă comună se numesc plane . . . .

b. Două plane care nu au niciun . . . . comun sunt paralele.

c. Intersecțiile unui plan secant cu două plane paralele sunt două drepte . . . .

2. Stabiliți dacă afirmațiile următoare sunt adevărate sau false. (3p)

a. Dacă $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ și $a \parallel b$, atunci planele α și β sunt paralele.

b. Dacă planele α și β sunt paralele, iar planele β și γ sunt paralele, atunci planele α și γ sunt paralele.

c. Dacă a, $b \subset \alpha$ sunt două drepte distincte, cu $a \parallel \beta$ și $b \parallel \beta$, atunci planele α și β sunt paralele.

3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, notăm cu M și N mijloacele muchiilor AA' și CC'. Arătați că:

a. $MC' \parallel (ABN)$; **b.** $(MC'D') \parallel (ABN)$; **c.** $(MB'D') \parallel (BDN)$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

Lecția 8: Secțiuni paralele cu baza în corpurile studiate

Cuvinte-cheie

secțiuni paralele cu baza | trunchi de piramidă | trunchi de con

Utilitate

Cu ajutorul fierăstrăului cu pânză panglică, buștenii se secționează longitudinal și se obțin scânduri de formă paralelipipedică. Cu fierăstrăul circular se secționează transversal butucii, pentru obținerea unor cilindri sau a unor trunchiuri de con, care se prelucrează la rândul lor sau se utilizează ca atare și, împreună cu scândurile, se asamblează în diverse construcții din lemn.

Mate practică

Un cub Rubik este format din 27 de cubulețe interconectate, care se pot roti. La final, fiecare dintre fețele cubului mare trebuie să fie de o singură culoare, diferită de cea a celorlalte fețe. Când se execută o mișcare a cubului, se realizează de fapt o secționare a acestuia cu un plan paralel cu cel al uneia dintre fețe.

Pentru a afla mai multe informații despre cubul Rubik, puteți consulta pagina web: https://ro.wikipedia.org/wiki/Cubul_Rubik.


Cubul Rubik

De reținut

A *secționa* un corp geometric înseamnă a intersecta corpul cu un plan cu care are puncte comune. Mulțimea punctelor de intersecție dintre corp și planul respectiv se numește *secțiune*.

Secțiunea unei prisme drepte sau a unei piramide cu un plan este o *suprafață poligonală*, iar poligonul care mărginește această suprafață se numește *poligon de secțiune*.

8.1. Secțiuni paralele cu baza unei prisme drepte sau a unui cilindru circular drept

De reținut

1. *Secțiunea* făcută într-o prismă dreaptă printr-un plan paralel cu bazele este o suprafață poligonală congruentă cu bazele prismei, care are laturile respectiv paralele cu cele ale bazelor.
   Dacă prisma este regulată, atunci centrul poligonului de secțiune este coliniar cu centrele bazelor.
2. Secționând o prismă dreaptă cu un plan paralel cu bazele obținem *două prisme drepte* de același tip cu cea inițială, pentru care secțiunea este bază comună.
3. *Secțiunea* făcută într-un cilindru circular drept printr-un plan paralel cu bazele este *un disc* congruent cu discurile bazelor cilindrului. Centrul acestui disc este coliniar cu centrele discurilor bazelor cilindrului.
4. Secționând un cilindru circular drept cu un plan paralel cu bazele obținem *doi cilindri circulari drepți*, pentru care secțiunea este bază comună.

În figurile 1-3 sunt reprezentate secțiuni paralele cu bazele într-o prismă triunghiulară regulată, într-un paralelipiped dreptunghic și într-un cilindru circular drept.

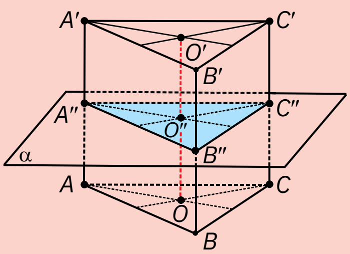


Figura 1

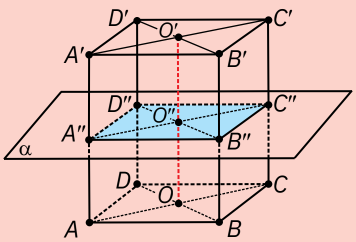


Figura 2

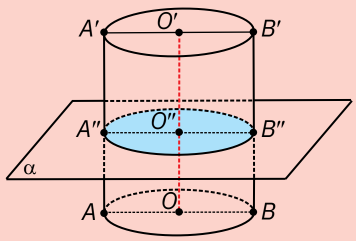


Figura 3

8.2. Secțiuni paralele cu baza unei piramide

De reținut

1. *Secțiunea* făcută într-o piramidă printr-un plan paralel cu baza este o *suprafață poligonală asemenea cu baza piramidei*. Laturile poligonului de secțiune sunt respectiv paralele cu laturile bazei.
   Dacă piramida este regulată, centrul poligonului de secțiune este coliniar cu vârful piramidei și cu centrul bazei.
2. Secționând o piramidă cu un plan paralel cu baza, unul dintre corpurile formate este o altă piramidă (mai mică), al cărei vârf coincide cu cel al piramidei inițiale și a cărei bază este poligonul de secțiune.
   Dacă piramida inițială este regulată, atunci și piramida mai mică este tot o piramidă regulată.
3. Fețele laterale ale piramidei nou formate sunt *asemenea* cu fețele laterale omoloage ale piramidei secționate. Raportul de asemănare al fețelor laterale coincide cu raportul de asemănare al bazelor și se numește *raportul de asemănare al celor două piramide*. Spunem că cele două *piramide sunt asemenea*.

În figurile următoare sunt reprezentate secțiuni paralele cu baza într-o piramidă triunghiulară regulată (Figura 4), într-o piramidă patrulateră regulată (Figura 5), respectiv într-o piramidă hexagonală regulată (Figura 6).

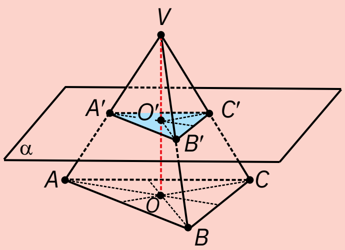


Figura 4

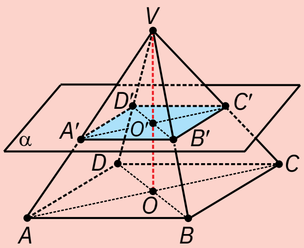


Figura 5

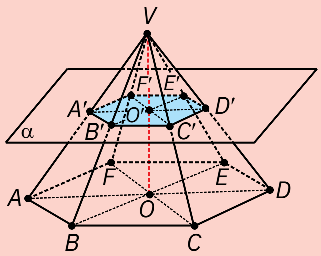


Figura 6

8.3. Trunchiul de piramidă

De reținut

1. Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea piramidei mici formate, păstrându-i baza, se obține un poliedru numit *trunchi de piramidă*.
   Trunchiul de piramidă provenit dintr-o piramidă regulată se numește *trunchi de piramidă regulată*.

Astfel, dacă din cele trei piramide reprezentate în figurile 4, 5 și 6 îndepărtăm piramidele *VA′B′C′*, *VA′B′C′D′*, respectiv *VA′B′C′D′E′F′*, dar păstrăm la fiecare dintre ele secțiunea formată, obținem trunchiul de piramidă triunghiulară regulată *ABCA′B′C′* (Figura 7), trunchiul de piramidă patrulateră regulată *ABCDA′B′C′D′* (Figura 8), respectiv trunchiul de piramidă hexagonală regulată *ABCDEFA′B′C′D′E′F′* (Figura 9).

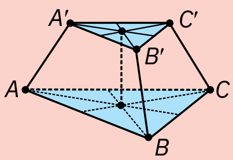


Figura 7

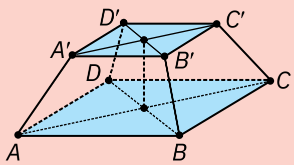


Figura 8

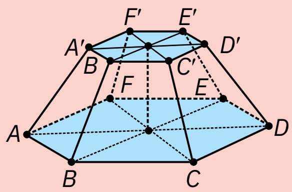


Figura 9

2. *Baza mare a trunchiului* de piramidă este baza piramidei inițiale, iar baza piramidei mici este *baza mică a trunchiului*. Bazele unui trunchi de piramidă sunt poligoane asemenea și au laturile respectiv paralele.
3. Identificăm următoarele *elemente* ale trunchiului de piramidă, exemplificându-le în trunchiul de piramidă patrulateră regulată *ABCDA′B′C′D′* reprezentat în Figura 8:
   - *baza mare*: suprafața poligonală mărginită de pătratul *ABCD*;
   - *baza mică*: suprafața poligonală mărginită de pătratul *A′B′C′D′*;
   - *vârfurile bazelor*: punctele *A*, *B*, *C*, *D*, respectiv *A′*, *B′*, *C′*, *D′*;
   - *muchiile bazelor*: laturile pătratului *ABCD*, respectiv laturile pătratului *A′B′C′D′*;
   - *muchiile laterale*: segmentele congruente *AA′*, *BB′*, *CC′*, *DD′*;
   - *fețele laterale*: suprafețele trapezoidale congruente *ABB′A′*, *BCC′B′*, *CDD′C′*, *ADD′A′*.

8.4. Secțiuni paralele cu baza unui con circular drept. Trunchiul de con circular drept

De reținut

1. Secțiunea făcută într-un con circular drept printr-un plan paralel cu baza este un disc. Centrul discului de secțiune este coliniar cu vârful conului și cu centrul bazei conului.
În Figura 10 este reprezentat un con circular drept, cu vârful V și baza discul de centru O și diametru $2R$. Secțiunea acestuia cu un plan paralel cu baza este *discul de centru O' și diametru $A'B' = 2r$*.

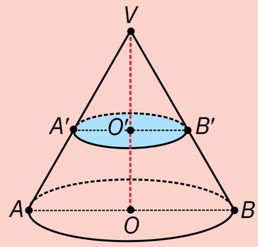


Figura 10

2. Secționând un con circular drept cu un plan paralel cu baza, unul dintre corpurile obținute este un con circular drept, al cărui vârf coincide cu cel al conului inițial și a cărui bază este discul de secțiune (un con mai mic).
Cu notațiile din Figura 10, avem $\frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r}{R}$. Spunem că cele două conuri (cel nou format și cel inițial) sunt *asemenea*, iar raportul de asemănare este egal cu raportul razelor (sau cu raportul generatoarelor) celor două conuri.

3. Dacă secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza și îndepărtăm conul mic format, păstrându-i baza, obținem un corp numit *trunchi de con circular drept*.
Astfel, dacă din conul circular drept reprezentat în Figura 10, îndepărtăm conul de vârf V cu baza *discul de centru O' și diametru $A'B'$*, păstrându-i baza, obținem *trunchiul de con circular drept* reprezentat în Figura 11.

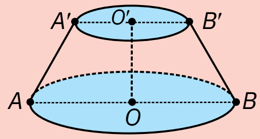


Figura 11

Elementele trunchiului de con circular drept sunt:
- *bazele*: *baza mare* este discul de centru O, iar *baza mică* este discul de centru O';
- *centrele bazelor*: punctele O, respectiv O';
- *razele bazelor*: $OA = R$ este raza bazei mari, iar $O'A' = r$ este raza bazei mici;
- *generatoarea*: segmentul AA', care rămâne din generatoarea conului inițial după îndepărtarea conului nou format prin secționare;
- *suprafața laterală*: suprafața care rămâne din suprafața laterală a conului inițial după îndepărtarea conului nou format prin secționare.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 12 este reprezentat schematic acoperișul „în două ape” al unei case, sub forma unei prisme drepte $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC. Aria triunghiului ABC este egală cu $16\sqrt{3}$ m², iar $AA' = 12$ m. Fețele $AA'C'C$ și $BB'C'C$, care formează acoperișul, trebuie acoperite cu țiglă. Suprafețele $ADFC$ și $BEFC$, obținute prin secționarea prismei cu planul (DEF) paralel cu planul (ABC), au fost deja acoperite cu țiglă. Știind că $AD = 3$ m, determinați aria suprafeței rămase de acoperit.

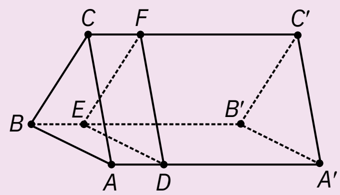


Figura 12

Rezolvare

Deoarece $(DEF) \parallel (ABC)$ și $(ABC) \parallel (A'B'C')$, prin tranzitivitate rezultă că $(DEF) \parallel (A'B'C')$. Folosind teorema fierăstrăului, din $(A'AC) \cap (A'B'C') = A'C'$ și $(A'AC) \cap (DEF) = DF$, rezultă că $DF \parallel A'C'$. Cum $A'D \parallel C'F$, iar unghiul $AA'C'$ este drept, rezultă că $A'DFC'$ este dreptunghi. Din $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\text{ m}^2$, rezultă că $A'C' = AC = 8$ m.
Deoarece $A'D = AA' - AD = 9$ m, obținem $\mathcal{A}_{A'DFC'} = A'D \cdot A'C' = 72\text{ m}^2$.

Analog, rezultă că patrulaterul $B'EFC'$ este dreptunghi cu aria egală cu 72 m², deci aria suprafeței rămase de acoperit este egală cu $72\text{ m}^2 + 72\text{ m}^2 = 144\text{ m}^2$.

2. Un plan α intersectează muchiile laterale VA, VB, VC, VD ale unei piramide patrulatere regulate $VABCD$ în punctele A', B', C', respectiv D', astfel încât $(A'B'C') \parallel (ABC)$. Se știe că $VA' = AB = 6$ cm și $VA = 9$ cm (Figura 13).
   a. Numiți corpurile obținute prin secționarea piramidei cu planul α.
   b. Arătați că $\Delta VA'B' \sim \Delta VAB$ și determinați aria secțiunii.

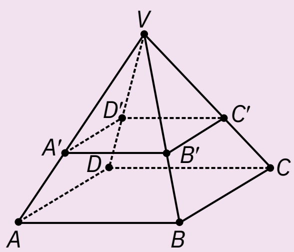


Figura 13

Rezolvare

a. Se obțin două corpuri: piramida patrulateră regulată $VA'B'C'D'$ și trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

b. Cum $(A'B'C') \parallel (ABC)$, $(VAB) \cap (ABC) = AB$ și $(VAB) \cap (A'B'C') = A'B'$, rezultă că $A'B' \parallel AB$. Aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\Delta VA'B' \sim \Delta VAB$. Obținem $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB}$, de unde reiese că $A'B' = 4$ cm.

Deoarece baza piramidei patrulatere regulate $VABCD$ este pătratul $ABCD$, iar poligonul de secțiune este asemenea cu poligonul bazei, rezultă că secțiunea $A'B'C'D'$ este pătrat, cu aria $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = (A'B')^2 = 16$ cm^2.

Probleme propuse

1. Secționăm cubul $ABCDEFGH$ cu un plan α paralel cu fața $ABCD$, construit prin mijlocul muchiei laterale AE.

a. Reprezentați cubul, planul de secțiune și notați punctele de intersecție ale planului cu muchiile laterale.

b. Numiți corpurile obținute prin secționarea cubului și precizați bazele și muchiile acestora.

c. Știind că $AC = 8$ cm, determinați perimetrul și aria secțiunii obținute în cub.

2. În prisma dreaptă $MNPQM'N'P'Q'$, cu baza pătratul $MNPQ$, avem $MN = 5$ cm și $MM' = 10$ cm. Secționăm prisma cu un plan α paralel cu baza prismei, construit prin mijlocul muchiei laterale MM'.

a. Reprezentați prisma, planul de secțiune și notați vârfurile secțiunii.

b. Numiți corpurile obținute prin secționarea prismei și precizați bazele și muchiile acestora.

c. Determinați perimetrul și aria secțiunii obținute în prismă.

3. Unele creioane au forma unei prisme drepte cu baza hexagon regulat. Desenați o astfel de prismă, notați-o și secționați-o cu un plan paralel cu baza. Precizați natura secțiunii și corpurile nou obținute.

4. Bazele unui cilindru circular drept sunt discurile $\mathcal{D}(O, R)$ și $\mathcal{D}(O', R)$. Segmentul AB este diametrul bazei, iar AD și BC sunt generatoare. Planul α, paralel cu baza cilindrului, intersectează generatoarele AD și BC în punctele E, respectiv F. Lungimea cercului de centru O este egală cu 6π cm.

a. Numiți razele și generatoarele celor doi cilindri obținuți prin secționare.

b. Determinați aria secțiunii obținute în cilindrul inițial.

5. Reprezentați trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCDEF$ și precizați elementele sale.

6. Reprezentați trunchiul de piramidă patrulateră regulată $MNPQEFGH$ și precizați elementele sale.

7. Reprezentați trunchiul de piramidă hexagonală regulată $CDEFGHMNPQRS$ și precizați elementele sale.

8. Un con circular drept are diametrul bazei de 12 cm și lungimea generatoarei de 10 cm. Conul se secționează cu un plan paralel cu baza. Aria secțiunii obținute este egală cu 9π cm^2.

a. Numiți și descrieți corpurile obținute prin secționarea conului inițial.

b. Determinați lungimile generatoarelor corpurilor formate prin secționare.

9. Un plan α intersectează muchiile laterale SA, SB, SC, SD ale unei piramide patrulatere regulate $SABCD$ în punctele M, N, P, respectiv Q, astfel încât $(MNP) \parallel (ABC)$. Se știe că $SA = 12$ cm, $AC = 15\sqrt{2}$ cm și $SM = 8$ cm.

a. Determinați perimetrul și aria secțiunii.

b. Dacă punctul E este mijlocul muchiei AB și $SE \cap MN = \{G\}$, arătați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului SAB.

Autoevaluare

1. Se consideră trunchiul de piramidă regulată $ABCDEF$. Muchiile sale laterale sunt ...., bazele sunt fețele ...., iar fețele laterale sunt .... Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate. **(3p)**

2. Intersectați cu un plan paralel cu baza muchiile laterale ale unui tetraedru regulat, ale unui paralelipiped dreptunghic și ale unei piramide hexagonale regulate. Ce formă are în fiecare caz secțiunea obținută? **(3p)**

3. Un plan α intersectează muchiile laterale SA, SB, SC, SD ale unei piramide patrulatere regulate $SABCD$ în punctele E, F, G, respectiv H, astfel încât $(EFG) \parallel (ABC)$. Se știe că $SA = 12$ cm, $AB = 8$ cm și $EF = 4$ cm.

a. Realizați un desen care să corespundă ipotezei problemei.

b. Determinați aria secțiunii și lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă obținut. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.Timp de lucru: 30 de minute.

Lecția 9: Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

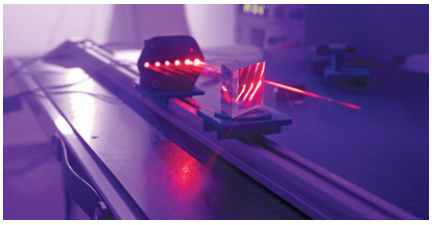
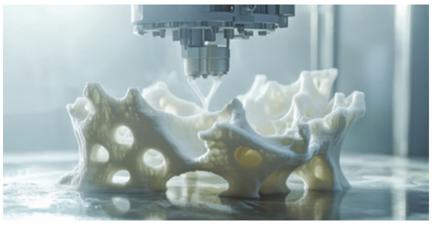
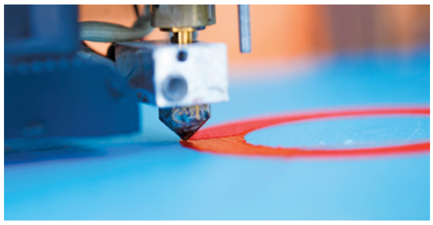
Cuvinte-cheie

perpendicularitate | distanță | înălțimea piramidei | înălțimea conului circular drept

Utilitate

Analizând scheletul unei clădiri aflate în construcție, observăm că stâlpii de susținere ai clădirii trebuie să fie perpendiculari pe sol pentru a asigura stabilitate și echilibru. În procesele automatizate, un braț robotic trebuie să se deplaseze perpendicular pe diverse suprafețe pentru ca operațiuni precum sudura sau montajul să fie executate cu precizie. În optică, un fascicul de lumină care cade perpendicular pe o oglindă sau pe un plan are o reflexie controlată, utilizată în lasere sau în telecomunicații, iar la o imprimantă 3D, capul de imprimare trebuie să se deplaseze perpendicular pe stratul anterior.

Cunoașterea distanței dintre două obiecte (care, de regulă, este lungimea unui segment perpendicular pe o dreaptă sau pe un plan) este esențială pentru exactitate, eficiență, siguranță, sau pentru a scădea costurile. De exemplu, în tomografie sau radiografie, distanța de la un punct (care poate simboliza un nerv, un os sau o tumoră) la un plan de referință este esențială pentru o intervenție precisă.

9.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan

Ne reamintim că dreptele d și e (nu neapărat coplanare) sunt perpendiculare dacă unghiul lor are măsura de 90°, sau, echivalent, dacă paralelele duse la aceste drepte printr-un punct dat sunt perpendiculare. Notăm $d \perp e$ sau $e \perp d$.

De reținut

Definiție. Spunem că o dreaptă este *perpendiculară pe un plan* dacă este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în acel plan.

Așadar, $d \perp \alpha$ dacă și numai dacă $d \perp e$, pentru orice dreaptă e, $e \subset \alpha$.

Investigație

Desenați pe o coală de hârtie dreptele concurente g și h și dreptele g', g'', paralele cu dreapta g. Puneți un creion cu vârful în punctul de intersecție al dreptelor g și h, ca în Figura 1.

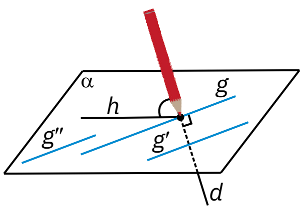


Figura 1

Dezbateți în clasă și răspundeți la următoarele întrebări:

a. Dacă acest creion este *perpendicular* pe dreapta g, rezultă că este *perpendicular* pe dreptele g' și g''? Dar pe dreapta h?

b. În câte poziții putem așeza creionul astfel încât acesta să fie perpendicular atât pe dreapta g, cât și pe dreapta h?

c. Puteți găsi o înclinare a creionului, astfel încât acesta să fie perpendicular pe dreapta g și să facă un unghi de 60° cu dreapta h? Dar un unghi de 30°?

d. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe o infinitate de drepte dintr-un plan, este neapărat necesar ca această dreaptă să fie perpendiculară pe planul respectiv?

4.9

De reținut

Teorema 1. Dacă dreapta d este perpendiculară pe două drepte concurente din planul α, atunci dreapta d este perpendiculară pe planul α.

Cu alte cuvinte: *Dacă există dreptele concurente* $g, h \subset \alpha$, *astfel încât* $d \perp g$ *și* $d \perp h$, *atunci* $d \perp \alpha$.

Urmăriți demonstrația Teoremei 1 în manualul digital.

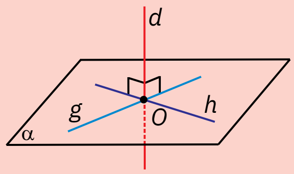


Figura 2

Exemplu

În Figura 3, dreapta MA este perpendiculară pe planul pătratului $ABCD$. Atunci:

a. $AD \perp (MAB)$; **b.** $BD \perp MC$.

Demonstrație:

a. Din $MA \perp (ABC)$ și $AD \subset (ABC)$, rezultă că $MA \perp AD$. Cum $AD \perp MA$, iar dreptele MA și AB sunt concurente, din Teorema 1 rezultă că $AD \perp (MA, AB)$, adică $AD \perp (MAB)$.

b. Din $MA \perp (ABC)$ și $BD \subset (ABC)$, rezultă că $MA \perp BD$, deci $BD \perp MA$. În plus, cum $ABCD$ este pătrat, avem $BD \perp AC$. Deoarece $BD \perp MA$ și $BD \perp AC$, aplicând Teorema 1, rezultă că $BD \perp (MAC)$. Întrucât $MC \subset (MAC)$, deducem că $BD \perp MC$.

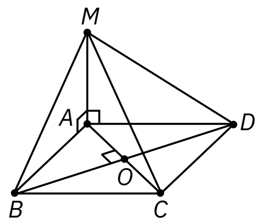


Figura 3

Observație. Soluția punctului **b** pune în evidență o metodă des utilizată pentru a demonstra că două drepte necoplanare sunt perpendiculare: se arată că una dintre drepte este perpendiculară pe un plan care o conține pe cealaltă.

De reținut

Teorema 2. Fiind date o dreaptă d și un punct oarecare O din spațiu (aparținând sau nu dreptei d), există un plan α care conține punctul O, astfel încât dreapta d să fie perpendiculară pe α.

Demonstrație

a. Dacă $O \in d$, construim două drepte distincte OA și OB, în spațiu, astfel încât $OA \perp d$ și $OB \perp d$ (Figura 4), iar conform Teoremei 1, dreapta d este perpendiculară pe planul $\alpha = (OAB)$.

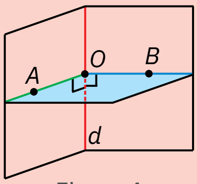


Figura 4

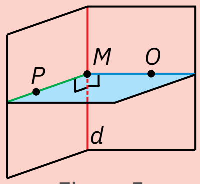


Figura 5

b. Dacă $O \notin d$, în planul determinat de punctul O și dreapta d construim perpendiculara $OM \perp d$, unde $M \in d$. Într-un plan care conține dreapta d, dar nu-l conține pe O, ridicăm perpendiculara $MP \perp d$ (Figura 5). Din Teorema 1 rezultă că d este perpendiculară pe planul $\alpha = (OMP)$.

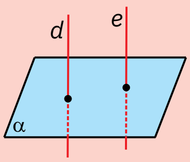
Observații

1. Planul α din Teorema 2 este unic și se numește *planul perpendicular pe dreapta d* prin punctul O.
2. În plan, fiind date o dreaptă d și un punct oarecare O din plan (aparținând sau nu dreptei d), există o unică dreaptă care conține punctul O și este perpendiculară pe dreapta d.
3. Fiind date o dreaptă d și un punct oarecare O din spațiu (aparținând sau nu dreptei d), atunci:
   - **a.** există o infinitate de drepte care conțin punctul O și sunt perpendiculare pe dreapta d;
   - **b.** există un singur plan care conține punctul O și este perpendicular pe dreapta d.
4. Fiind date un plan α și un punct O din spațiu (aparținând sau nu planului α), există o singură dreaptă d care conține punctul O și este perpendiculară pe planul α.
5. Unicul plan care conține punctul O și este perpendicular pe dreapta d este *reuniunea tuturor dreptelor care trec prin O și sunt perpendiculare pe dreapta d*. Cu alte cuvinte, orice dreaptă care trece prin O și este perpendiculară pe dreapta d este inclusă în planul care trece prin O și este perpendicular pe d.

De reținut

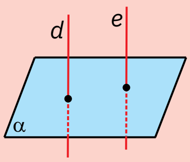
Prin analogie cu afirmațiile similare din geometria plană, au loc următoarele proprietăți de perpendicularitate:

1. Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele.



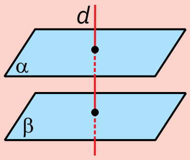
Dacă $d \perp \alpha$ și $e \perp \alpha$, atunci $d \parallel e$.

2. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α, atunci orice paralelă cu d este perpendiculară pe α.



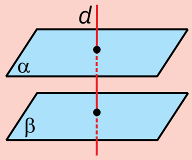
Dacă $d \perp \alpha$ și $d \parallel e$, atunci $e \perp \alpha$.

3. O dreaptă perpendiculară pe un plan α este perpendiculară pe orice plan paralel cu α.



Dacă $d \perp \alpha$ și $\alpha \parallel \beta$, atunci $d \perp \beta$.

4. Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.



Dacă $d \perp \alpha$ și $d \perp \beta$, atunci $\alpha \parallel \beta$.

9.2. Distanța de la un punct la un plan

De reținut

Fie planul α, punctul M și dreapta d care îl conține pe M și este perpendiculară pe planul α (Figura 6). Notăm cu M' punctul de intersecție dintre dreapta d și planul α. Lungimea segmentului MM' se numește *distanța de la punctul M la planul* α și se notează $d(M, \alpha)$.

Așadar, dacă $MM' \perp \alpha$ *și* $M' \in \alpha$, atunci $d(M, \alpha) = MM'$.

Punctul M' se numește *piciorul perpendicularei* construite din punctul M pe planul α. Așadar, distanța de la un punct la un plan este lungimea segmentului determinat de punctul dat și de piciorul perpendicularei construite din acel punct pe planul respectiv.

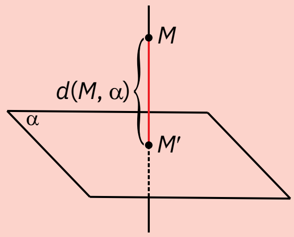


Figura 6

Observație

Denumirea de *distanță* de la punctul M la planul α este justificată, deoarece oricum am alege punctul N din planul α, avem $MN \geq MM'$. Într-adevăr, dacă M este în planul α, atunci $M = M'$ și $MM' = 0$, iar în caz contrar, MN este ipotenuză în triunghiul $MM'N$, deci $MN > MM'$ (Figura 7).

Așadar, segmentul MM' este *cel mai scurt* dintre segmentele cu un capăt în M și celălalt în planul α.

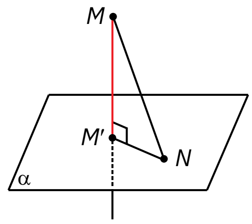


Figura 7

Exemplu

În Figura 8 este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Știm că toate fețele paralelipipedului sunt dreptunghiuri. Prin urmare:

a. din $A'A \perp AB$, $A'A \perp AD$ și $AB \cap AD = \{A\}$ rezultă că $A'A \perp (ABD)$, deci distanța de la punctul A' la planul (ABD) este lungimea segmentului $A'A$;

b. din $AD \perp DD'$, $AD \perp DC$ și $DD' \cap DC = \{D\}$ rezultă că $AD \perp (CDD')$, deci distanța de la punctul A la planul (CDD') este lungimea segmentului AD.

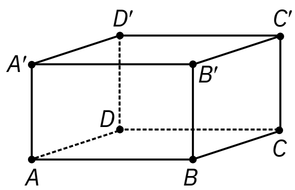


Figura 8

9.3. Înălțimea piramidei

De reținut

Definiție. Distanța de la vârful unei piramide la planul bazei se numește *înălțimea piramidei*.

În Figura 9, O este piciorul perpendicularei construite din vârful V al piramidei $VABCD$ pe planul bazei $ABCD$, deci înălțimea acestei piramide este $d(V, (ABC)) = VO$.

În funcție de context, deseori vom folosi exprimarea: *înălțimea piramidei este segmentul VO*.

Ne reamintim că o piramidă este *regulată*, dacă baza sa este un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente.

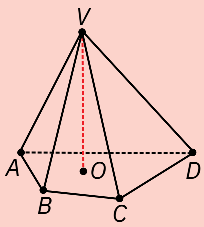


Figura 9

Teorema 3. Într-o piramidă regulată, perpendiculara din vârful piramidei pe planul bazei acesteia conține centrul cercului circumscris bazei.

Altfel spus, înălțimea unei piramide regulate de vârf $VA_1A_2...A_n$ *cade* în centrul O al cercului circumscris poligonului regulat $A_1A_2...A_n$ (centrul bazei).

Demonstrație. Vom demonstra teorema în cazul particular al unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ (Figura 10). Pentru o piramidă patrulateră regulată (Figura 11) sau o piramidă hexagonală regulată (Figura 12) sau orice alt tip de piramidă regulată, demonstrația este similară.

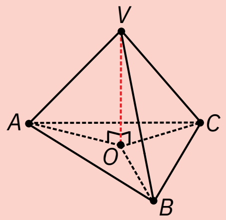


Figura 10

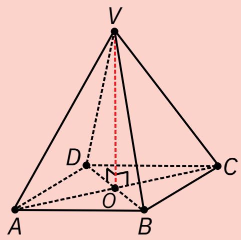


Figura 11

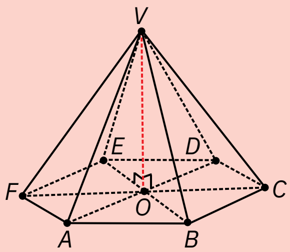


Figura 12

Fie O piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC). Cum $VO \perp (ABC)$ și $OA, OB, OC \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp OA$, $VO \perp OB$ și $VO \perp OC$. Cum $VA = VB = VC$ (deoarece piramida este regulată), deducem că triunghiurile dreptunghice VOA, VOB și VOC sunt congruente (cazul ipotenuză-catetă), deci $OA = OB = OC$, de unde rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Observații

1. Are loc și reciproca Teoremei 3: O piramidă cu baza poligon regulat în care înălțimea *cade* în centrul cercului circumscris bazei este o piramidă regulată.
2. Într-o piramidă triunghiulară (tetraedru), oricare față poate fi considerată bază, deci un tetraedru are patru înălțimi.
3. Într-un tetraedru regulat, cele patru înălțimi au aceeași lungime (numită *înălțimea tetraedrului regulat*).

9.4. Înălțimea conului circular drept

De reținut

Definiție. Distanța de la vârful unui con circular drept la planul bazei se numește *înălțimea conului circular drept*.

Teorema 4. Într-un con circular drept, perpendiculara din vârful conului pe planul bazei conține centrul cercului circumscris bazei.

Demonstrație. Considerăm un con circular drept de vârf V, cu baza discul de centru O. Notăm cu α planul bazei.

Fie AB și MN două diametre ale bazei (Figura 13). Segmentele VA și VB sunt congruente, fiind generatoare în conul circular drept, deci triunghiul VAB este isoscel de bază AB. Cum VO este mediană în acest triunghi, deducem că VO este și înălțime, deci $VO \perp AB$. Analog se arată că $VO \perp MN$. Deoarece VO este perpendiculară pe dreptele concurente AB *și* MN din planul α, rezultă că $VO \perp \alpha$.

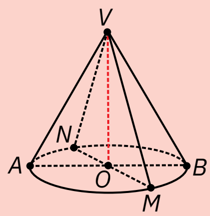


Figura 13

Observații

1. Înălțimea unui con circular drept de vârf V și bază discul de centrul O este lungimea segmentului VO. În funcție de context, vom spune uneori că *înălțimea conului circular drept este segmentul VO*.
2. Folosind notațiile din Figura 13, deoarece $VO \perp OA$, folosind teorema lui Pitagora, deducem că între generatoarea $VA = G$, înălțimea $VO = h$ și raza discului bazei $OA = R$, există relația $G^2 = R^2 + h^2$.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Arătați că dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, atunci $AB \perp B'C$ și $BD \perp AC'$ (Figura 14).

Rezolvare

Într-adevăr, deoarece $ABCD$ și $ABB'A'$ sunt pătrate, avem $AB \perp BC$ și $AB \perp BB'$. Dreptele BC și BB' fiind concurente, rezultă că $AB \perp (BCC')$. Deoarece $B'C \subset (BCC')$, rezultă că $AB \perp B'C$. Cea de-a doua afirmație se obține din faptul că BD este diagonală în pătratul $ABCD$, deci $BD \perp AC$. Cum $AA' \perp (ABC)$, iar $BD \subset (ABC)$, deducem că $AA' \perp BD$. Dreptele AA' și AC fiind concurente, rezultă că $BD \perp (ACC')$. Dar $AC' \subset (ACC')$, deci $BD \perp AC'$.

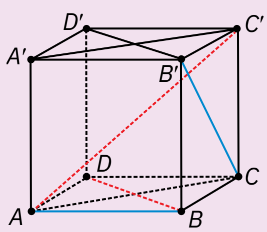


Figura 14

2. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $VA = 15$ cm și $AC = 18$ cm. Punctul E este mijlocul muchiei VA, iar $VM \perp BC$, cu $M \in BC$, și $OH \perp VM$, cu $H \in VM$ (Figura 15).

a. Determinați distanța de la punctele V, respectiv E, la planul (ABC).

b. Arătați că $BD \perp VA$, $BC \perp (VOM)$ și $OH \perp (VBC)$.

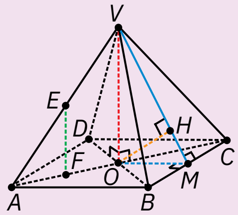


Figura 15

Rezolvare

a. Întrucât $VABCD$ este piramidă patrulateră regulată, înălțimea piramidei este segmentul VO, deci $VO \perp (ABC)$. Cum $ABCD$ este pătrat și $AC = 18$ cm, obținem $OA = 9$ cm. Deoarece $VO \perp (ABC)$ și $OA \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp OA$. Triunghiul VOA este dreptunghic în O. Obținem $VO^2 = VA^2 - OA^2 = 144\ \text{cm}^2$, deci $VO = 12$ cm, așadar $d(V, (ABC)) = 12$ cm.

Fie F mijlocul segmentului OA. Segmentul EF este linie mijlocie în triunghiul VOA, deci $EF = VO : 2 = 6$ cm și $EF \parallel VO$. Deoarece $VO \perp (ABC)$ și $EF \parallel VO$, rezultă că $EF \perp (ABC)$, deci $d(E, (ABC)) = EF = 6$ cm.

b. Deoarece $VO \perp (ABC)$ și $BD \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp BD$. Baza $ABCD$ este pătrat, deci $BD \perp AC$. Cum $BD \perp VO$, $BD \perp AC$, $AC \cap VO = \{O\}$, rezultă $BD \perp (VAC)$, iar cum $VA \subset (VAC)$, deducem că $BD \perp VA$.

Din $VO \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp BC$. Așadar $BC \perp VO$, $BC \perp VM$, $VO \cap VM = \{V\}$, deci $BC \perp (VOM)$. Întrucât $OH \subset (VOM)$, rezultă $BC \perp OH$. Cum $OH \perp VM$, $OH \perp BC$, $VM \cap BC = \{M\}$, rezultă că $OH \perp (VBC)$.

3. Eva a confecționat pentru bradul de Crăciun un pitic din pâslă. Pâsla de care mai dispune are forma unui disc cu raza de 4,2 cm. Pe o parte pâsla este roșie, iar pe cealaltă, gri. Ea a împărțit discul în trei sectoare congruente și dintr-un sector a mai confecționat un pitic gri. Din cele două sectoare rămase, Eva face două coifuri sub formă de con circular drept, de culori diferite, pentru pitici. Capul unui pitic are circumferința egală cu 8,78 cm. Folosind aproximarea $\pi \simeq 3{,}14$, stabiliți dacă un coif este mai înalt de 4 cm și dacă încape pe capul piticului.


Ornamente

Rezolvare

Împărțind discul în trei părți egale, obținem sectoare de disc cu un unghi la centru care are măsura de 120° (Figura 16).

Prin înfășurarea sectorului de disc se obține un coif având forma unui con de vârf V, din care lipsește baza de centru O. Fie AB un diametru al bazei (Figura 17). Raza sectorului devine generatoarea conului, deci $VA = 4{,}2$ cm, iar înălțimea conului este VO. Lungimea arcului sectorului de disc este egală cu $(2\pi \cdot 4{,}2 : 3)$ cm $= 2{,}8 \cdot \pi$ cm $\simeq 8{,}792$ cm, deci este ușor mai mare decât circumferința capului piticului. Așadar, coiful este bun.

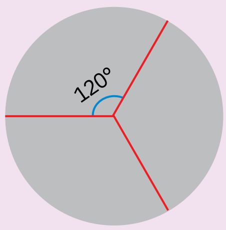


Figura 16

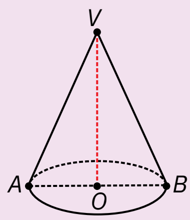


Figura 17

Deoarece $2\pi \cdot OA = 2{,}8 \cdot \pi$ cm, rezultă că raza bazei conului, OA, este egală cu 1,4 cm.

Fie α planul bazei conului. Cum $VO \perp \alpha$ și $OA \subset \alpha$, rezultă că $VO \perp OA$, deci triunghiul VOA este dreptunghic în O. Atunci $VO^2 = VA^2 - OA^2 = 15{,}68\ \text{cm}^2$, de unde rezultă că $VO < 4$ cm.

Probleme propuse

1. Priviți sala de clasă ca pe un paralelipiped dreptunghic și precizați:

a. două drepte perpendiculare pe planul în care se află ușa;

b. două drepte perpendiculare pe planul tavanului;

c. două plane perpendiculare pe muchia care conține pragul ușii;

d. două drepte necoplanare, perpendiculare pe muchia care trece pe sub calorifere.

2. Folosind creioane pentru a reprezenta în spațiu dreptele, construiți un *contraexemplu* prin care să arătați că următoarea propoziție este falsă: „Dacă $d \perp h$ și $g \perp h$, atunci $d \parallel g$."

3. În Figura 18 sunt reprezentate schematic un stâlp VA cu lungimea de 12 m, perpendicular pe sol (planul α), ancorat printr-o grindă VD de sol. Pentru fixare, s-a amplasat o grindă BC de 3 m. Știind că $VB = 4$ m, $BC \parallel AD$, arătați că $BC \parallel \alpha$ și determinați lungimea ancorei VD.

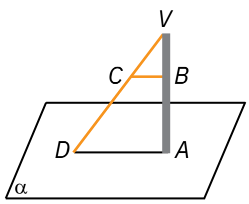


Figura 18

4. Triunghiurile echilaterale ABC și ABD sunt situate în plane diferite, iar punctul M este mijlocul laturii AB (Figura 19). Arătați că $AB \perp (CDM)$ și $CD \perp AB$.

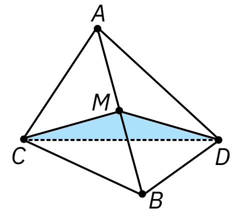


Figura 19

5. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara $A'A$. Știind că $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle ACB = 60°$ și $AC = A'A = 6$ cm, determinați:
   a. distanța de la punctul A la dreapta $A'C$;
   b. distanța de la punctul C la planul $(A'AB)$.

6. Pe cercul de centru O și rază $r = 4$ cm se iau punctele diametral opuse A și B și punctul C astfel încât $\sphericalangle ABC = 30°$. Pe planul cercului se ridică perpendiculara AM, cu $AM = 4$ cm. Determinați:
   a. distanța de la punctul A la dreapta MB;
   b. distanța de la punctul B la planul (ACM).

7. Pe planul pătratului $ABCD$, cu $AB = 8$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$, se ridică perpendiculara DD' astfel încât $D'D = 8\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul segmentului $D'B$ (Figura 20). Arătați că:
   a. $AB \parallel (D'CD)$; b. $d(D', B) = 8\sqrt{5}$ cm; c. $BC \perp (D'CD)$;
   d. $AC \perp (D'BD)$; e. $d(M, (ABC)) = 4\sqrt{3}$ cm; f. $\sphericalangle(BC, D'A) = 60°$.

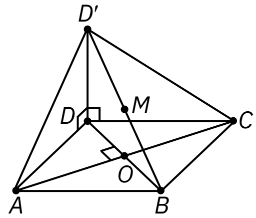


Figura 20

8. Punctul O este centrul feței BCD a tetraedrului regulat $ABCD$, iar lungimea înălțimii acestuia este egală cu 12 cm. Determinați lungimea drumului minim parcurs de o furnică de la B la D, pe fețele ABC și ACD, traversând muchia AC.

9. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, $VA = 15$ cm, $AB = 9\sqrt{3}$ cm, iar punctul O este centrul bazei. Se secționează piramida cu un plan α paralel cu baza, care intersectează muchiile VA, VB, VC în punctele M, N, respectiv P, astfel încât $VM = 5$ cm. Arătați că:
   a. $VO = 12$ cm; b. $BC \perp (VOA)$; c. $VM \cdot AB = VA \cdot MN$;
   d. $\sphericalangle(MN, BC) = 60°$; e. $d(M, (ABC)) = 8$ cm; f. $\Delta MNP \sim \Delta ABC$.

10. Un con circular drept are diametrul bazei $AB = 24$ cm și lungimea generatoarei VA de 15 cm. Fie CD o coardă în discul $\mathcal{D}(O, OA)$, astfel încât $CD \cap AB = \{M\}$, $CD < AB$. Știind că punctul M este mijlocul coardei CD, determinați lungimea înălțimii conului și arătați că $CD \perp (VAB)$.

11. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $VA = 18$ cm și $AB = 12$ cm. Punctul E aparține muchiei VA, astfel încât $AE = 2 \cdot VE$. Determinați:
   a. $d(V, (ABC))$; b. $d(E, (ABC))$; c. $d(A, (VBD))$; d. $d(O, (VBC))$.

12. Punctul O este centrul bazei piramidei hexagonale regulate $VABCDEF$, $VA = 4\sqrt{13}$ cm și $AB = 12$ cm. Notăm cu g dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (VFC). Determinați:
   a. $d(V, (ABC))$; b. $d(A, (VBE))$; c. $d(O, (VAC))$; d. $\sphericalangle(g, BE)$.

13. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6$ cm. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului $BC'D$.
   a. Arătați că poliedrul $CBC'D$ este piramidă triunghiulară regulată și determinați înălțimea acesteia.
   b. Demonstrați că poliedrul $A'BC'D$ este tetraedru regulat și arătați că punctele A', G, C sunt coliniare.

Autoevaluare

1. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
   a. Dacă dreapta d este perpendiculară pe planele distincte α și β, atunci planele sunt paralele.
   b. Dacă dreptele d, g și h sunt astfel încât $d \perp g$ și $d \perp h$, atunci $g \parallel h$.
   c. Dacă dreptele d, g și planul α sunt astfel încât $d \parallel g$ și $d \perp \alpha$, atunci $g \perp \alpha$. (3p)

2. În tetraedrul $OABC$, în care triunghiul ABC este echilateral, triunghiurile OAB, OBC și OCA sunt dreptunghice în O, iar punctul M este mijlocul muchiei BC. Arătați că:
   a. triunghiul AOB este isoscel; b. $OC \perp (AOB)$; c. $BC \perp (AOM)$. (3p)

3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $VA = 9\sqrt{5}$ cm și $AB = 18$ cm. Punctul E aparține muchiei VA, astfel încât $VE = 2 \cdot AE$. Determinați:
   a. lungimea înălțimii piramidei; b. $d(E, (ABC))$; c. $d(O, (VBC))$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

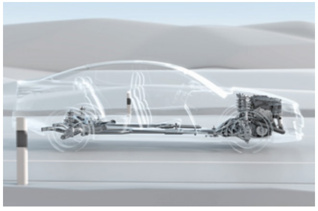
Lecția 10: Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prismei drepte și a cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă și a trunchiului de con circular drept

Cuvinte-cheie

perpendicularitate | distanțe | înălțimea prismei drepte | înălțimea cilindrului circular drept | înălțimea trunchiului

Utilitate

Cunoașterea distanței dintre două plane are numeroase aplicații practice în domenii precum construcțiile, ingineria, fizica și designul industrial. În construcții, măsurarea distanței dintre diverse plane asigură alinierea perfectă a elementelor structurale (grinzi, plafoane). La proiectarea avioanelor și vehiculelor, inginerii calculează distanțele dintre suprafețele plane pentru a optimiza fluxul de aer și a reduce rezistența aerodinamică.



10.1. Distanța dintre două plane paralele

De reținut

Teorema 1. Dacă A și B sunt două puncte distincte situate pe o dreaptă g, paralelă cu un plan α, atunci distanțele de la A, respectiv B, la planul α sunt egale.

Demonstrație. Dacă $AA' \perp \alpha$ și $BB' \perp \alpha$, cu $A', B' \in \alpha$, atunci $d(A, \alpha) = AA'$ și $d(B, \alpha) = BB'$ (Figura 1). Fiind perpendiculare pe același plan, dreptele AA' și BB' sunt paralele. În plus, notând $\beta = (AA', BB')$, cum $AB \parallel \alpha$ și $AB \subset \beta$, intersecția planelor α și β, adică $A'B'$, este o dreaptă paralelă cu AB. Din $AA' \parallel BB'$ și $AB \parallel A'B'$, rezultă că $ABB'A'$ este paralelogram (chiar dreptunghi), deci $AA' = BB'$, adică $d(A, \alpha) = d(B, \alpha)$.

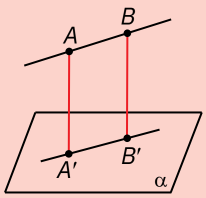


Figura 1

Teorema 2. Dacă A și B sunt două puncte distincte situate într-un plan α paralel cu un alt plan β, atunci distanțele de la A, respectiv B, la planul β sunt egale.

Pentru demonstrație, se aplică Teorema 1, având în vedere că din $AB \subset \alpha$ și $\alpha \parallel \beta$, obținem $AB \parallel \beta$ (Figura 2).

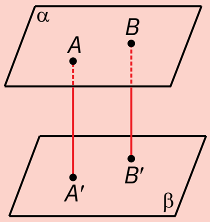


Figura 2

Teoremele precedente ne permit să dăm următoarele definiții:

Definiție. Dacă dreapta g este paralelă cu planul α, spunem că *distanța dintre dreaptă și plan* este egală cu distanța de la orice punct al dreptei la plan.

Notăm: $d(g, \alpha) = AA'$, unde $A \in g$, $A' \in \alpha$ și $AA' \perp \alpha$.

Definiție. Dacă α și β sunt două plane paralele, atunci *distanța dintre cele două plane* este egală cu distanța de la orice punct al unuia dintre plane la celălalt plan.

Notăm: $d(A, \beta) = AA'$, unde $A \in \alpha$, $A' \in \beta$ și $AA' \perp \beta$.

Observație. Având în vedere că bazele unei prisme drepte, ale unui cilindru circular drept, ale unui trunchi de piramidă sau ale unui trunchi de con circular drept sunt situate în plane paralele, pentru fiecare dintre corpurile geometrice menționate se poate pune problema calculării distanței dintre planele bazelor.

10.2. Înălțimea prismei drepte

De reținut

Definiție. Se numește *înălțime a unei prisme drepte* distanța dintre planele bazelor acesteia.

Dacă bazele prismei sunt incluse în planele paralele α, respectiv β, iar $A \in \alpha$ și $A' \in \beta$ sunt două puncte astfel încât $AA' \perp \beta$, atunci distanța dintre planele α și β este lungimea segmentului AA'.

Din acest motiv, uneori, în funcție de context, vom spune că *înălțimea prismei este segmentul AA'*.

Teorema 3. În orice prismă dreaptă, muchiile laterale sunt înălțimi.

Demonstrație. Vom analiza cazul particular al unei prisme drepte patrulatere $ABCDA'B'C'D'$ (Figura 3), demonstrația fiind similară pentru orice alt tip de prismă dreaptă.

Fețele laterale $ABB'A'$ și $ADD'A'$ sunt dreptunghiuri, deci $\sphericalangle A'AB = \sphericalangle A'AD = 90°$, de unde rezultă că $A'A \perp AB$ și $A'A \perp AD$. Cum AB și AD sunt concurente, rezultă că dreapta $A'A$ este perpendiculară pe planul (ABC). Întrucât $(A'B'C') \parallel (ABC)$, $A' \in (A'B'C')$, $A \in (ABC)$ și $A'A \perp (ABC)$, deducem că $A'A$ este distanța dintre planele $(A'B'C')$ și (ABC), deci $A'A$ este înălțime a prismei. Din $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ și $A'A \perp (ABC)$, deducem că și celelalte muchii laterale ale prismei drepte sunt înălțimi.

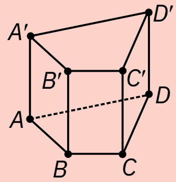


Figura 3

Observații

1. Din Teorema 3 putem trage concluzia că *o prismă este dreaptă dacă și numai dacă muchiile sale laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor*.
2. Într-un paralelipiped dreptunghic, oricare două fețe situate în plane paralele pot fi considerate drept baze, deci orice muchie poate fi considerată înălțime.
3. Într-o prismă regulată (adică o prismă dreaptă cu baza poligon regulat), dacă O și O' sunt centrele bazelor, atunci $O'O$ este înălțime a prismei.

În figurile 4, 5, 6 sunt reprezentate o prismă hexagonală regulată, o prismă triunghiulară regulată și un paralelipiped dreptunghic. Cu roșu sunt desenate înălțimi ale acestora.

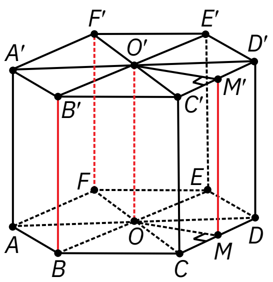


Figura 4

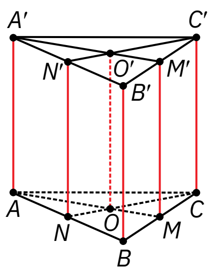


Figura 5

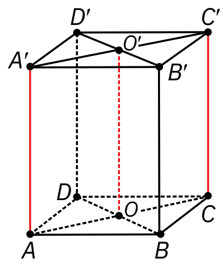


Figura 6

10.3. Înălțimea cilindrului circular drept

De reținut

Definiție. Distanța dintre planele bazelor unui cilindru circular drept se numește *înălțimea cilindrului*.

În funcție de context, vom considera că *înălțimea cilindrului circular drept* este un segment perpendicular pe una dintre baze, având extremitățile în câte un punct al fiecărei baze.

Teorema 4. Într-un cilindru circular drept, segmentul determinat de centrele bazelor este înălțime.

Demonstrație. Considerăm cilindrul circular drept din Figura 7, obținut prin rotirea suprafeței dreptunghiulare $AOO'A'$ în jurul laturii OO'. Bazele acestui cilindru sunt discurile de centre O și O'. Considerăm o „poziție” $A_1OO'A_1'$, în care ajunge dreptunghiul $AOO'A'$ în timpul rotației, astfel încât A și A_1 nu sunt diametral opuse. Cum $\sphericalangle O'OA = \sphericalangle O'OA_1 = 90°$, deducem că $O'O \perp OA$ și $O'O \perp OA_1$, deci $O'O$ este perpendiculară pe planul (OAA_1). Cum O și O' aparțin câte unei baze, rezultă că distanța dintre planele bazelor cilindrului este lungimea segmentului OO', deci segmentul OO' este înălțime a cilindrului.

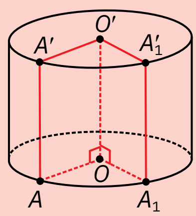


Figura 7

Observație. Într-un cilindru circular drept, orice generatoare este înălțime.

Într-adevăr, cu notațiile din Figura 7, deoarece $AOO'A'$ este dreptunghi, din $AA' \parallel OO'$ și $OO' \perp (OAA_1)$, reiese că $AA' \perp (OAA_1)$, deci AA' este înălțime a cilindrului circular drept.

Exemplu

Fie punctele $A, M \in \mathcal{D}(O, R)$ și $A', M' \in \mathcal{D}(O', R)$, unde $\mathcal{D}(O, R)$ și $\mathcal{D}(O', R)$ sunt bazele unui cilindru circular drept, astfel încât AA' și MM' sunt generatoare ale acestuia și $AMM'A'$ este pătrat (Figura 8). Fie $N \in AM$ astfel încât $ON \perp AM$. Aflați raza cilindrului, dacă $O'N = \sqrt{13}$ cm, iar $\sphericalangle A'O'M' = 120°$.

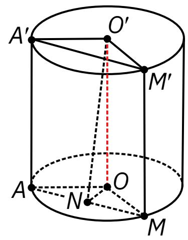


Figura 8

Rezolvare

$\sphericalangle AOM = \sphericalangle A'O'M' = 120°$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele) și, cum ON este înălțime în triunghiul isoscel AOM, aceasta este și mediană. Obținem $OO' = AA' = AM = R\sqrt{3}$ și $ON = \frac{R}{2}$. Cu teorema lui Pitagora în $\Delta OO'N$ ($\sphericalangle O = 90°$), rezultă $R = 2$ cm.

10.4. Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con circular drept

De reținut

Definiție. Distanța dintre bazele unui trunchi de piramidă se numește *înălțimea trunchiului de piramidă*.

Distanța dintre bazele unui trunchi de con circular drept se numește *înălțimea trunchiului de con circular drept*.

La fel ca în secțiunile anterioare, dacă O și O' sunt centrele bazelor unui trunchi de piramidă/de con circular drept, vom spune și că *segmentul OO'* este înălțime a trunchiului.

Teorema 5. Într-un trunchi de piramidă regulată, segmentul determinat de centrele cercurilor circumscrise celor două baze este înălțime a trunchiului.

În figurile 9, 10, 11 sunt reprezentate mai multe trunchiuri de piramidă regulată, cu centrele bazelor O și O'. Segmentele roșii reprezintă înălțimile trunchiurilor de piramidă respective.

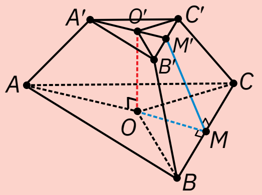


Figura 9

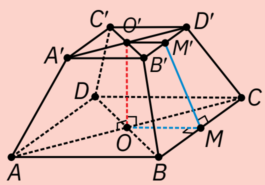


Figura 10

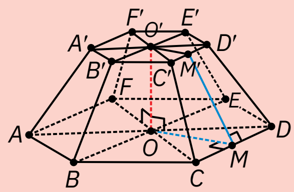


Figura 11

Teorema 6. Într-un trunchi de con circular drept, segmentul determinat de centrele celor două baze este înălțime a trunchiului.

În Figura 12 este reprezentat un trunchi de con circular drept, în care înălțimea este segmentul OO', desenat cu roșu.

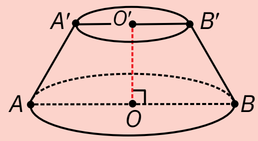


Figura 12

Observații

1. În problemele în care intervine un trunchi de piramidă regulată, de multe ori se studiază legăturile dintre elementele unuia dintre următoarele trapeze dreptunghice:
   - trapezul $OAA'O'$, ale cărui laturi sunt: muchia laterală a trunchiului, AA'; înălțimea trunchiului, OO'; raza cercului circumscris bazei mari, OA, și raza cercului circumscris bazei mici, $O'A'$;
   - trapezul $OMM'O'$, unde M este mijlocul uneia dintre laturile bazei mari, iar M' este mijlocul laturii omoloage a bazei mici (figurile 9, 10, 11).

   În oricare dintre cele două trapeze, atunci când cunoaștem lungimile a trei dintre aceste segmente, putem determina lungimea celui de-al patrulea.
2. În problemele în care intervine un trunchi de con, se studiază legăturile dintre lungimile laturilor trapezului dreptunghic $OAA'O'$, în care OO' este înălțimea trunchiului, AA' este generatoarea, OA este raza bazei mari, iar $O'A'$ este raza bazei mici (Figura 12).
3. Înălțimea trunchiului de piramidă este diferența dintre înălțimea piramidei din care provine trunchiul (piramida mare) și înălțimea piramidei care se îndepărtează (piramida mică) (Figura 13).
4. Înălțimea trunchiului de con este diferența dintre înălțimea conului din care provine trunchiul (conul mare) și înălțimea conului care se îndepărtează (conul mic) (Figura 14).

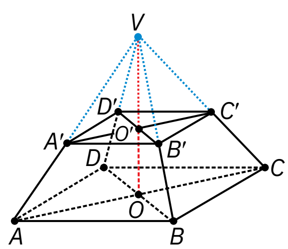


Figura 13

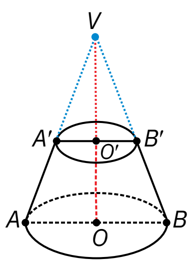
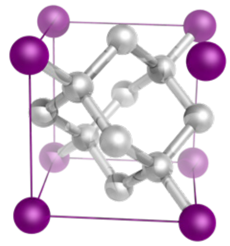


Figura 14

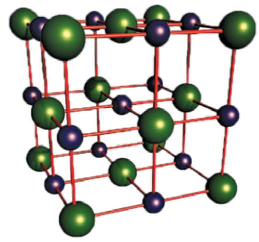
4.10

Cultură matematică

Natura este o sursă inepuizabilă de corpuri care pot fi descrise cu ajutorul poliedrelor. În mineralogie și în cristalografie există șapte *sisteme cristaline* tridimensionale ale corpurilor solide sau lichide. Acestea sunt: sistemul *triclinic*, *monoclinic*, *ortorombic*, *tetragonal*, *trigonal*, *hexagonal* și *cubic*. Structura de bază a primelor patru sisteme este una de paralelipiped (oblic, în primele două cazuri, dreptunghic, în celelalte). Sistemul tetragonal este format din tetraedre, cel hexagonal este alcătuit din prisme hexagonale etc.



Structura diamantului



Structura sării de bucătărie

Plăcuțele semiconductoare folosite în fabricarea circuitelor integrate pentru computere și pentru celule fotovoltaice sunt făcute din siliciu monocristalin, a cărui structură este cubică, de tipul diamantului.

Dacă vreți să știți mai mult, puteți consulta pagina web: https://ro.wikipedia.org/wiki/Sistem_cristalin.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În Figura 15 este reprezentată prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$, în care O și O' sunt centrele bazelor prismei, $A'A = 10$ cm și $AB = 12$ cm. Știind că $AC \cap BE = \{T\}$, determinați:

a. distanța dintre planele (ABC) și $(A'B'C')$;

b. distanța de la punctul A la planul $(O'OB)$;

c. distanța de la punctul D la planul $(A'AC)$.

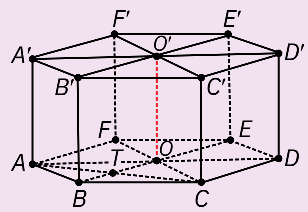


Figura 15

Demonstrație:

a. Deoarece $O'O$ și $A'A$ sunt înălțimi ale prismei, rezultă că $d((ABC), (A'B'C')) = OO' = AA' = 10$ cm.

b. Cum $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 60°$, triunghiurile AOB și BOC sunt echilaterale, deci $ABCO$ este romb. Ca urmare, $AC \perp OB$, deci AT este înălțime în triunghiul AOB. În plus, $AT = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

Deoarece $O'O$ este înălțime în prismă și $AT \subset (ABC)$, rezultă $O'O \perp AT$. Așadar $AT \perp OB$, $AT \perp O'O$ și, cum $O'O \cap OB = \{O\}$, rezultă $AT \perp (O'OB)$, deci $d(A, (O'OB)) = AT = 6\sqrt{3}$ cm.

c. Din $CC' \perp (ABC)$ și $CD \subset (ABC)$, obținem $CC' \perp CD$, deci avem și $DC \perp CC'$ (1). Segmentul AD este diametru în cercul circumscris hexagonului $ABCDEF$, deci unghiul ACD este drept, adică $DC \perp AC$ (2).

Relațiile (1) și (2) arată că dreapta DC este perpendiculară pe două drepte concurente (AC și CC') din planul determinat de dreptele paralele AA' și CC'. Deducem că $DC \perp (A'AC)$, deci $d(D, (A'AC)) = DC = 12$ cm.

2. În Figura 16 este reprezentat un trunchi de con circular drept, în care AB și $A'B'$ sunt diametrele discurilor $\mathcal{D}(O, r)$ și respectiv $\mathcal{D}(O', r)$. Știind că $OA = 5$ cm, $O'A' = 2$ cm și $A'A = 5$ cm, determinați:

a. ce procent din aria discului bazei mari reprezintă aria discului bazei mici;

b. înălțimea trunchiului de con circular drept considerat;

c. înălțimea conului din care provine trunchiul.

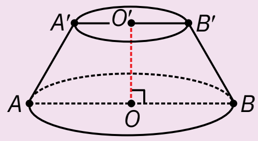


Figura 16

Demonstrație:

a. $\dfrac{\mathcal{A}_{\mathcal{D}(O',r)}}{\mathcal{A}_{\mathcal{D}(O,R)}} = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{4}{25} = \dfrac{16}{100} = 16\%$, deci $\mathcal{A}_{\mathcal{D}(O',r)} = 16\% \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{D}(O,R)}$.

b. Fie V vârful conului din care provine trunchiul (Figura 17), iar α, β planele discurilor $\mathcal{D}(O, R)$ și respectiv $\mathcal{D}(O', r)$. Deoarece O și O' sunt centrele bazelor, rezultă că $O'O$ este înălțimea trunchiului. În trapezul dreptunghic $AOO'A'$ construim $A'E \perp OA$, unde $E \in OA$. Patrulaterul $OEA'O'$ are trei unghiuri drepte în O, O', respectiv E, deci este dreptunghi. Ca urmare, $O'O = A'E$, $OE = O'A' = 2$ cm, și $AE = OA - OE = 3$ cm. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul AEA', dreptunghic în E, obținem $A'E = 4$ cm, deci înălțimea trunchiului este $OO' = A'E = 4$ cm.

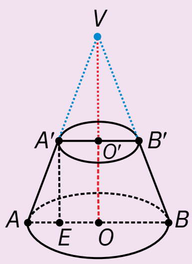


Figura 17

c. Cum $O'A' \parallel OA$, aplicând teorema fundamentală a asemănării în triunghiul VOA, rezultă că $\Delta VO'A' \sim \Delta VOA$, deci $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{O'A'}{OA} = \dfrac{2}{5}$. Obținem $5 \cdot VO' = 2 \cdot VO$, adică $5 \cdot (VO - OO') = 2 \cdot VO$, de unde rezultă că $VO = \dfrac{20}{3}$ cm.

Probleme propuse

1. Desenați un cub de latură 4 cm, $ABCDA'B'C'D'$, cu O centrul feței $ABCD$, și determinați:
a. distanța de la punctul O la planul $(A'B'C')$; **b.** distanța de la punctul O la planul (BCC');
c. distanța de la dreapta AB la planul (CDD'); **d.** distanța dintre planele (BCC') și (ADD').

2. Prin înfășurarea unui dreptunghi cu perimetrul egal cu $3 \cdot (8\pi + 3)$ cm se obține un cilindru circular drept cu raza bazei de 6 cm. Determinați înălțimea cilindrului.

3. În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC, punctul M este mijlocul muchiei AB, $C'M = 12$ cm, $CM = 6$ cm, iar punctul G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. Determinați:
a. aria bazei; **b.** înălțimea prismei; **c.** $d(G, (ABC))$; **d.** $d(A, (C'CM))$.

4. Fie prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$. Știind că $AC \cap BD = \{O\}$, $AC = 6\sqrt{2}$ cm și $D'A = 10$ cm, determinați:
a. perimetrul bazei; **b.** înălțimea prismei; **c.** $d(A, (BB'D))$; **d.** $d(O, (BC'C))$.

5. Poliedrul $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic, în care $AC \cap BD = \{O\}$, iar lungimile muchiilor AB, BC, $D'D$ sunt proporționale cu 4, 3, respectiv 5 și $AB + BC + D'D = 24$ cm. Determinați:
a. perimetrul bazei; **b.** înălțimea paralelipipedului; **c.** $d(O, (BC'C))$; **d.** $d(A, (BB'D))$.

6. În prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O, perimetrul bazei este egal cu 60 cm, iar perimetrul unei fețe laterale este egal cu 50 cm. Determinați:
a. $d((A'B'C'), (ABC))$; **b.** $d(C, (B'OB))$; **c.** $d(E, (B'BC))$; **d.** $d(E, (A'AC))$.

7. Poliedrul $ABCA'B'C'$ este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, în care $AB = 12$ cm, $A'B' = 6$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Determinați înălțimea trunchiului.

8. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu înălțimea $O'O = 8$ cm, $O'A' = 75\%$ din $O'O$ și $OA = 12$ cm. Determinați lungimea muchiei laterale $A'A$ și $d(O, A'A)$.

9. Poliedrul $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este un trunchi de piramidă hexagonală regulată cu înălțimea de 16 cm. Știind că $AD = 36$ cm și $A'B' = 6$ cm, determinați înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

10. Fie un trunchi de con circular drept a cărui generatoare este egală cu suma razelor bazelor. Se știe că produsul razelor bazelor este de 16 cm^2, iar raza mică este un sfert din raza mare. Determinați generatoarea, înălțimea și razele trunchiului de con.

11. Maria vrea să pună un ghiveci cu flori sub formă de trunchi de con într-un vas decorativ cu aceeași formă și care are aceeași înălțime. Vasul decorativ are raza exterioară a bazei mari de 15 cm, înălțimea de 12 cm, generatoarea de 15 cm, iar pereții lui au o grosime de 0,5 cm. Determinați diametrul maxim al bazei mici a ghiveciului, astfel încât acesta să încapă în vas.

12. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 12$ cm. Notăm cu G' și G centrele de greutate ale triunghiurilor $AB'D'$, respectiv $C'BD$. Arătați că distanța dintre planele $(AB'D')$ și $(C'BD)$ este egală cu lungimea segmentului GG' și calculați această distanță.

Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate:
a. Înălțimea unei prisme este .... dintre planele bazelor.
b. Într-un trunchi de piramidă regulată $ABCA'B'C'$, cu O și O' centrele bazelor, lungimea segmentului $O'O$ este mai .... decât lungimea segmentului $A'A$.
c. Între generatoarea G și înălțimea h a unui cilindru circular drept există relația .... (3p)

2. Într-un trunchi de con circular drept, AB și $A'B'$ sunt diametrele discurilor $\mathcal{D}(O, OA)$ și respectiv $\mathcal{D}(O', O'A')$, $OA = 10$ cm, $O'A' = 6$ cm și $A'A = 8$ cm. Determinați:
a. $\mathcal{A}_{\mathcal{D}(O,R)}$; **b.** înălțimea trunchiului; **c.** înălțimea conului din care provine trunchiul. (3p)

3. În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC, punctul P este centrul feței $ACC'A'$, $A'B = 8\sqrt{3}$ cm și $\sin(\sphericalangle A'BA) = 0{,}5$. Determinați:
a. înălțimea prismei; **b.** $d(P, (ABC))$; **c.** $d(C, (A'AB))$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 30 de minute.

4.11

Lecția 11: Plane perpendiculare. Secțiuni diagonale și secțiuni axiale

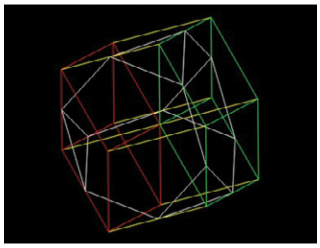
Cuvinte-cheie

perpendicularitate | distanțe | secțiuni diagonale | înălțimi | secțiuni axiale

Utilitate

Geometria în spațiu joacă un rol crucial în programarea 3D – deci și în crearea tuturor jocurilor de calculator. Un exemplu de modelare video de succes este filmul *Hypercube*.

Hypercube este câștigătorul unui important premiu internațional pentru animație, în anul 1978, și reprezintă una dintre primele încercări de a folosi grafica asistată de calculator pentru a ilustra obiecte matematice complexe. În film sunt descrise transformări geometrice – rotații, proiecții și secțiuni – în spații bidimensionale, tridimensionale și cvadridimensionale, precum și efectele acestora.



Grafică asistată de calculator

11.1. Plane perpendiculare

De reținut

Definiție. Planul α este *perpendicular* pe planul β dacă planul α conține o dreaptă perpendiculară pe β.

Notăm $\alpha \perp \beta$. Așadar, dacă există o dreaptă d astfel încât $d \subset \alpha$ și $d \perp \beta$, atunci $\alpha \perp \beta$.

Teorema 1. Fiind date două plane α și β, dacă $\alpha \perp \beta$, atunci și $\beta \perp \alpha$.

Demonstrație. Deoarece $\alpha \perp \beta$, există o dreaptă d astfel încât $d \subset \alpha$ și $d \perp \beta$. Fie A punctul de intersecție dintre dreapta d și planul β. Având un punct comun (pe A), planele α și β au o dreaptă comună, g. Alegem dreapta $h \subset \beta$ astfel încât $h \perp g$. Deoarece $d \perp \beta$ și $h \subset \beta$, rezultă că $d \perp h$. Dreapta h este perpendiculară pe dreptele concurente d și g ale planului α, așadar $h \perp \alpha$. În consecință, $\beta \perp \alpha$.

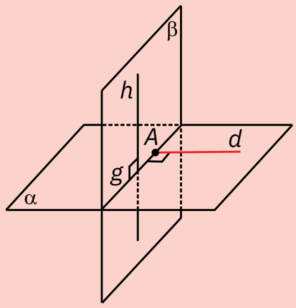


Figura 1

Observații

1. Având în vedere Teorema 1, dacă un plan este perpendicular pe un alt plan, vom spune că cele *două plane sunt perpendiculare*. Așadar, *două plane sunt perpendiculare* dacă într-unul dintre plane există o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.
2. Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, atunci orice plan care o conține este perpendicular pe planul α.

Exemple

Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din Figura 2. Atunci:

- planele (ABC) și (BCC') sunt perpendiculare, deoarece dreapta AB din planul (ABC) este perpendiculară pe planul (BCC');
- din $AA' \subset (AA'D')$ și $AA' \perp (ABC)$, rezultă că $(AA'D') \perp (ABC)$;
- din $CD \subset (CDD')$ și $CD \perp (BCC')$, rezultă că $(CDD') \perp (BCC')$.

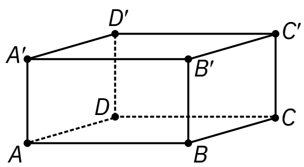


Figura 2

De reținut

Din demonstrația Teoremei 1 se deduce și următorul rezultat:

Teorema 2. Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă inclusă într-unul dintre plane, perpendiculară pe dreapta lor de intersecție, este perpendiculară pe cel de-al doilea plan.

Așadar, dacă $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = g$, $d \subset \alpha$ și $d \perp g$, atunci $d \perp \beta$.

Teorema 3. Dacă planele α și β sunt perpendiculare și prin punctul A al planului α construim o dreaptă d perpendiculară pe planul β, atunci d este conținută în planul α (Figura 3).

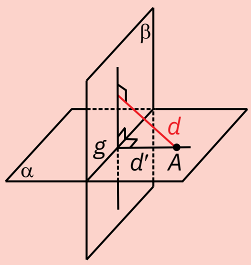


Figura 3

Demonstrație. Presupunem că dreapta d nu este inclusă în planul α. Fie dreapta $d' \subset \alpha$ astfel încât A se află pe d' și $d' \perp g$, unde g este dreapta de intersecție a celor două plane. Rezultă că $d' \perp \alpha$, deci există dreptele distincte d și d' care trec prin punctul A și sunt perpendiculare pe planul α, contradicție. Așadar, dreapta d este inclusă în planul α.

Teorema 4. Dacă două plane concurente sunt perpendiculare pe un al treilea plan, atunci și dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe acel plan (Figura 4).

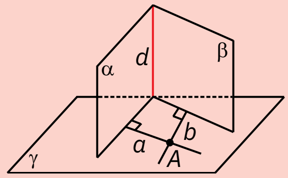


Figura 4

Demonstrație. Fie planele α și β, perpendiculare pe planul γ, a căror intersecție este dreapta d. Alegem punctul A în planul γ și construim dreapta $a \subset \gamma$, care trece prin A și este perpendiculară pe α. Deoarece $d \subset \alpha$, rezultă că $a \perp d$.

Analog, construim dreapta $b \subset \gamma$, care trece prin A și este perpendiculară pe β, astfel încât $b \perp d$. Dreapta d este perpendiculară pe dreptele concurente a și b ale planului γ, așadar $d \perp \gamma$.

Consecință. Fie planul α și punctul M în spațiu. Intersecția tuturor planelor care îl conțin pe M și sunt perpendiculare pe planul α este dreapta care trece prin M și este perpendiculară pe α.

11.2. Secțiuni diagonale în corpurile studiate

Ne reamintim că intersecția unui corp geometric cu un plan cu care are puncte comune este o suprafață numită *secțiune*, iar în Lecția 8 am analizat secțiunile corpurilor studiate prin plane paralele cu baza.

Secțiunea obținută într-un poliedru (prismă dreaptă, piramidă, trunchi de piramidă), printr-un plan determinat de o diagonală a bazei și o muchie laterală, se numește *secțiune diagonală*.

Prisma triunghiulară, piramida triunghiulară și trunchiul de piramidă triunghiulară nu au secțiuni diagonale, deoarece bazele acestora, fiind triunghiuri, nu au diagonale.

Secțiuni diagonale în prisma dreaptă

De reținut

Definiție. Se numește *secțiune diagonală a unei prisme drepte* suprafața poligonală obținută prin secționarea prismei cu un plan determinat de o diagonală a unei baze și o muchie laterală care are un vârf comun cu această diagonală.

Observații

1. Orice secțiune diagonală a unei prisme drepte este un dreptunghi. Două dintre laturile dreptunghiului sunt muchii laterale ale prismei, iar celelalte două sunt diagonale omoloage ale bazelor prismei.
2. Orice secțiune diagonală a unei prisme drepte este conținută într-un plan perpendicular pe planele bazelor.
3. Prin secționarea unei prisme drepte cu planul determinat de două muchii laterale care nu sunt situate pe aceeași față laterală se obține o secțiune diagonală.

În figurile 5-8 sunt reprezentate câteva secțiuni diagonale ale unor prisme drepte.

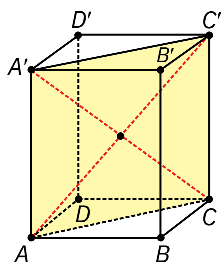


Figura 5

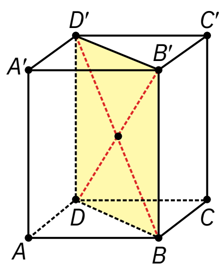


Figura 6

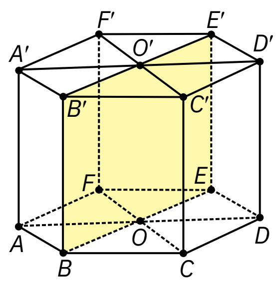


Figura 7

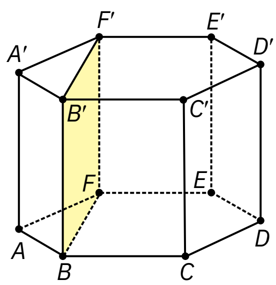


Figura 8

Am văzut anterior că orice secțiune diagonală a unei prisme drepte este un dreptunghi. Diagonalele acestor dreptunghiuri se numesc *diagonale* ale prismei.

Cu alte cuvinte, o diagonală a unei prisme este un segment determinat de un vârf al unei baze și un vârf al celeilalte baze, astfel încât cele două vârfuri nu aparțin aceleiași fețe laterale.

De reținut

Teoremă (proprietățile diagonalelor unui paralelipiped dreptunghic)

a. Diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sunt concurente. Punctul de concurență, notat de regulă cu O, se numește centrul paralelipipedului.

b. Diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sunt congruente.

c. Lungimea diagonalelor unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, de dimensiuni $AB = a$, $AD = b$ și $AA' = c$, este $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

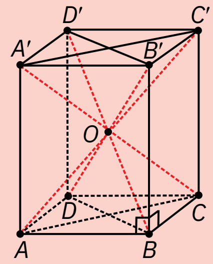


Figura 9

Consecință. Lungimea diagonalei unui cub de muchie a este egală cu $a\sqrt{3}$.

Demonstrație:

a.b. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Diagonalele sale sunt AC', $A'C$, BD' și $B'D$ (Figura 9).
Deoarece $ACC'A'$ și $BDD'B'$ sunt secțiuni diagonale, acestea sunt dreptunghiuri, deci diagonalele fiecăruia dintre ele sunt congruente și se înjumătățesc. Așadar, $AC' = A'C$ și $BD' = B'D$, iar punctele $\{O\} = AC' \cap A'C$ și $\{O'\} = BD' \cap B'D$ sunt mijloacele segmentelor AC', respectiv BD' (1).
În planul determinat de dreptele paralele AB *și* $D'C'$, avem $AB \parallel D'C'$ și $AB = D'C'$, deci $ABC'D'$ este paralelogram. Dar $AB \perp (BCC')$ și $BC' \subset (BCC')$, deci $AB \perp BC'$. Ca urmare, $ABC'D'$ este dreptunghi, deci diagonalele sale, AC' și BD', sunt congruente, iar BD' conține mijlocul diagonalei AC', adică O și O' coincid.
Din (1) rezultă că segmentele AC', $A'C$, BD', $B'D$ sunt concurente în O și că $AC' = A'C = BD' = B'D$.

c. Cum $A'A \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$, rezultă $A'A \perp AC$, deci triunghiul $A'AC$ este dreptunghic în A. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABC și $A'AC$, obținem $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$, respectiv $A'C^2 = AC^2 + A'A^2 = (a^2 + b^2) + c^2$, de unde rezultă că $A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Secțiuni diagonale în piramidă și în trunchiul de piramidă

De reținut

Definiție. Se numește *secțiune diagonală a unei piramide* intersecția acesteia cu un plan care conține vârful piramidei și una dintre diagonalele bazei.

Observații

1. Secțiunile diagonale ale unei piramide sunt triunghiuri.
2. Secțiunile diagonale ale unei *piramide regulate* sunt triunghiuri isoscele.
3. Secțiunile diagonale ale unei *piramide regulate care conțin înălțimea* acesteia sunt triunghiuri isoscele, aflate în plane perpendiculare pe planul bazei piramidei.

În Figura 10, triunghiul VAC este o secțiune diagonală a piramidei patrulatere $VABCD$.
În Figura 11, triunghiul isoscel VBD este o secțiune diagonală a piramidei patrulatere regulate $VACBD$.
În figurile 12 și 13 sunt evidențiate două secțiuni diagonale ale piramidei hexagonale regulate $VABCDEF$: triunghiurile isoscele VAD și VBD.

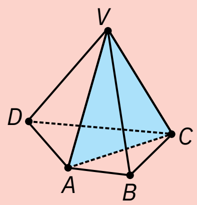


Figura 10

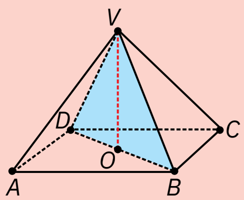


Figura 11

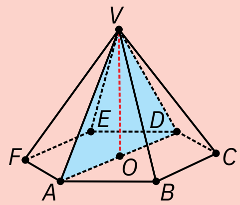


Figura 12

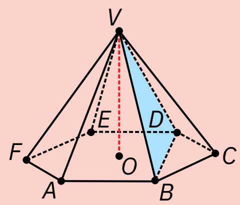


Figura 13

Definiție. Se numește *secțiune diagonală a unui trunchi de piramidă* intersecția acesteia cu un plan care conține o diagonală a unei baze și una dintre muchiile laterale ale trunchiului.

Observații

1. Orice secțiune diagonală a unui trunchi de piramidă este un trapez. Două dintre laturile sale sunt muchii laterale ale trunchiului, iar celelalte două sunt diagonale omoloage ale bazelor trunchiului.
2. Orice secțiune diagonală a unui *trunchi de piramidă regulată* este un trapez isoscel.
3. Orice secțiune diagonală a unui *trunchi de piramidă regulată*, care conține înălțimea trunchiului, este un trapez isoscel, aflat într-un plan perpendicular pe planele bazelor.

În figurile 14 și 15, trapezele isoscele $ACC'A'$ și $BDD'B'$ sunt secțiuni diagonale ale trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$.

În figurile 16 și 17 sunt evidențiate două secțiuni diagonale ale trunchiului de piramidă hexagonală regulată $ABCDEDA'B'C'D'E'F'$: trapezele isoscele $CC'F'F$ și $BDD'B'$.

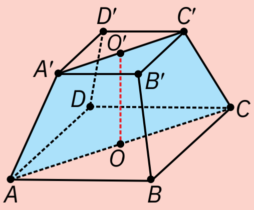


Figura 14

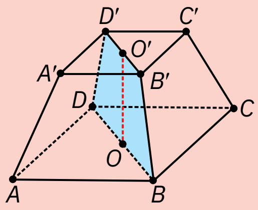


Figura 15

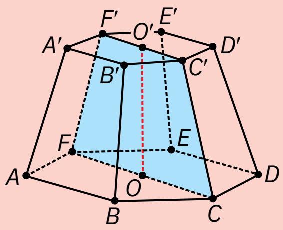


Figura 16

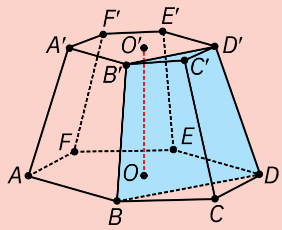


Figura 17

11.3. Secțiuni axiale

O dreaptă s este *axă de simetrie* pentru un corp geometric dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a. simetricul față de dreapta s al oricărui punct situat pe suprafața corpului geometric se află tot pe suprafața acestuia;

b. simetricul față de dreapta s al oricărui punct situat în interiorul corpului geometric se află tot în interiorul acestuia.

Secțiunea determinată de un plan care conține *axa de simetrie* a unui corp geometric se numește *secțiune axială a* corpului.

Unele dintre poliedrele studiate prezintă axă de simetrie. Astfel:

a. axa de simetrie a unei prisme regulate a cărei bază este un poligon cu număr par de laturi sau a unui paralelipiped dreptunghic este dreapta determinată de centrele bazelor;

b. axa de simetrie a unei piramide regulate a cărei bază este un poligon cu număr par de laturi este dreapta determinată de vârf și de centrul bazei;

c. axa de simetrie a trunchiului de piramidă regulată a cărei bază este un poligon cu număr par de laturi este dreapta determinată de centrele bazelor.

Remarcăm că unele dintre secțiunile diagonale sunt și secțiuni axiale (figurile 14-16).

În figurile 18-21 sunt reprezentate câteva secțiuni axiale în poliedrele studiate. Axa de simetrie este desenată cu roșu.

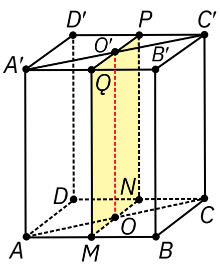


Figura 18

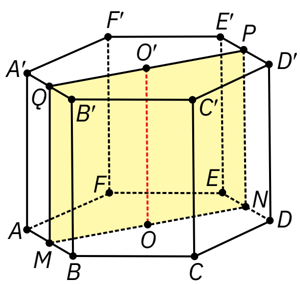


Figura 19

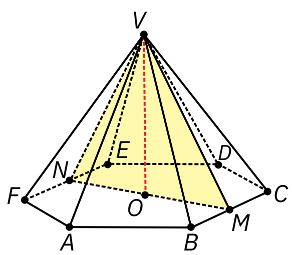


Figura 20

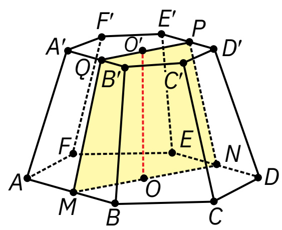


Figura 21

Corpurile rotunde studiate (con circular drept, cilindru circular drept, trunchi de con circular drept) au axă de simetrie – și anume perpendiculara pe planul bazei care trece prin centrul bazei.

O *secțiune axială* a unuia dintre corpurile rotunde studiate se obține prin intersecția acestuia cu un plan care îi conține înălțimea.

În figurile 22-24 sunt evidențiate câte două secțiuni axiale ale unui con circular drept, ale unui cilindru circular drept și ale unui trunchi de con circular drept. Axa de simetrie este desenată cu roșu.

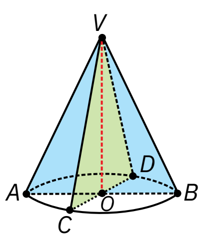


Figura 22

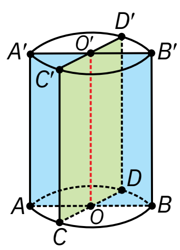


Figura 23

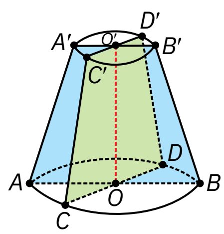


Figura 24

4.11

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Fie piramida regulată $VABCD$, cu muchia bazei $AB = 4$ cm. Dacă aria secțiunii sale axiale este de $8\sqrt{3}$ cm^2, calculați lungimea muchiei laterale a piramidei (Figura 25).

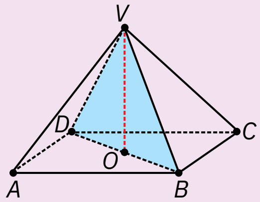


Figura 25

Rezolvare

$ABCD$ este un pătrat, deci $BD = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm. $\mathcal{A}_{VBD} = \dfrac{BD \cdot VO}{2} = 8\sqrt{3}$ cm^2, așadar $VO = 2\sqrt{6}$ cm. În triunghiul VOB ($\sphericalangle VOB = 90°$), $VB = \sqrt{VO^2 + OB^2} = 4\sqrt{2}$ cm.

2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, având fața $ADD'A'$ un pătrat cu latura $AA' = 6$ cm (Figura 26). Notăm cu O' centrul feței $A'B'C'D'$. Știind că triunghiul $AO'C$ este echilateral, determinați lungimea diagonalei AC'.

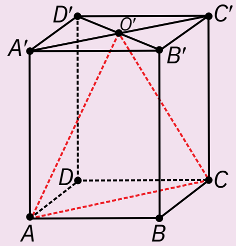


Figura 26

Rezolvare

Triunghiul $AO'C$ este inclus în secțiunea diagonală $ACC'A'$, care este un dreptunghi. Rezultă că $\sphericalangle A'AO' = \sphericalangle A'AC - \sphericalangle O'AC = 90° - 60° = 30°$. Din triunghiul $AA'O'$, cu $\sphericalangle AA'O' = 90°$, obținem $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{A'O'}{AA'}$, așadar $A'C' = 2 \cdot A'O' = 4\sqrt{3}$ cm. În concluzie, $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = 2\sqrt{21}$ cm.

3. Fie un cilindru circular drept, cu centrele bazelor O și O', și fie secțiunile sale axiale $ABB'A'$ și $CDD'C'$, astfel încât A, B, C și D sunt pe baza de jos a acestuia (Figura 27). Dacă $AA' = 2$ cm și $AB' = 2\sqrt{5}$ cm, aflați:

a. raza bazei cilindrului;

b. măsura unghiului BOC, știind că punctele O, B, C și O' sunt vârfurile unei piramide regulate.

Rezolvare

a. $OA = \dfrac{1}{2} \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{AB'^2 - AA'^2} = 2$ cm.

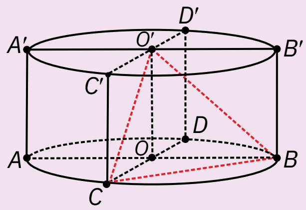


Figura 27

b. Avem $OO' \perp (ABC)$. Deoarece baza unei piramide triunghiulare regulate este un triunghi echilateral, iar triunghiurile $OO'B$ și $OO'C$ sunt dreptunghice în O, rezultă că niciunul dintre ele nu poate fi baza acestei piramide. Dacă triunghiul OBC ar fi baza piramidei regulate $O'OBC$, atunci înălțimea din O' a piramidei ar trebui să treacă prin centrul feței opuse, și nu prin vârful O al feței BCO, așa cum se întâmplă de fapt. Așadar, pentru ca piramida cu vârfurile în O, B, C și O' să fie regulată, e necesar ca baza acesteia să fie triunghiul $O'BC$. Triunghiurile $OO'B$ și $OO'C$ sunt congruente (C.C.), indiferent de poziția planului (CDD'), deci triunghiul $O'BC$ este întotdeauna isoscel. Triunghiul $O'BC$ este echilateral dacă și numai dacă $\Delta OBC \equiv \Delta OBO'$ (L.L.L.), adică dacă și numai dacă $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOO' = 90°$.

Probleme propuse

1. Priviți sala de clasă ca pe un paralelipiped dreptunghic și dați exemple de plane perpendiculare.

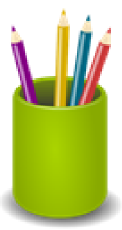
2. Folosind cărți pentru a reprezenta în spațiu planele, construiți un *contraexemplu* prin care să arătați că următoarea propoziție este falsă: „Dacă $\alpha \perp \gamma$ și $\beta \perp \gamma$, atunci $\alpha \parallel \beta$.”.

3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, $VO = 8$ cm și $AC = 12$ cm. Arătați că:

a. perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu $24\sqrt{2}$ cm; **b.** $(VBD) \perp (ABC)$; **c.** $\mathcal{A}_{VBD} = 48$ cm^2.

4. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, punctul M este mijlocul muchiei BC, iar punctul T aparține muchiei VA. Fie $E \in (ABC)$ astfel încât $TE \perp (ABC)$ și $AH \perp VM$, $H \in VM$. Arătați că:

a. $(VAM) \perp (ABC)$; **b.** $TE \subset (VAM)$; **c.** $AH \perp (VBC)$.



5. Un suport de creioane de forma unui cilindru circular drept are perimetrul secțiunii axiale de 40 cm. Lungimea generatoarei sale este de 3 ori mai mare decât raza bazei. Dacă punem în suport un creion lung de 15 cm, putem fi siguri că, oricum l-am așeza, rămâne un capăt în afara suportului?

6. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ a cărei secțiune diagonală este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Determinați perimetrul bazei și arătați că $(VAC) \perp (ABC)$, respectiv $(VAC) \perp (VBD)$.

7. În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, $AB = 12$ cm și $A'A = 6$ cm. Fie punctul M mijlocul muchiei BC. Arătați că:
   a. $(A'AM) \perp (ABC)$;
   b. $(A'BC) \perp (A'AM)$;
   c. $d(A, (A'BC)) = 3\sqrt{3}$ cm.
8. În prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, baza $ABCDEF$ este hexagon regulat, cu $AB = AA' = 6$ cm. Determinați ariile secțiunilor diagonale care conțin muchia AA'.
9. Un trunchi de con circular drept are aria secțiunii axiale egală cu 180 cm^2, înălțimea de 9 cm, iar $R = 4 \cdot r$. Determinați lungimea generatoarei, precum și a generatoarei conului din care provine trunchiul.
10. Într-un con circular drept raza bazei și înălțimea au lungimile egale cu 4 cm, respectiv 3 cm. Secțiunile axiale VAB și VDC sunt incluse în plane perpendiculare. Determinați ariile triunghiurilor VAB și VBC.
11. Arătați că diagonalele $A'C$, AC', $B'D$ și BD' ale trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ sunt:
   a. congruente;
   b. concurente.
12. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, în care punctul O este centrul bazei mari, O' este centrul bazei mici, iar Q este punctul de intersecție al diagonalelor sale. Știind că $AB = 8$ cm, $A'B' = 4$ cm și $OO' = 4\sqrt{2}$ cm, determinați:
   a. aria secțiunii diagonale;
   b. lungimea diagonalei AC';
   c. lungimea segmentului OQ.
13. Fie prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 8\sqrt{2}$ cm și $D'D = 8\sqrt{3}$ cm. Determinați:
   a. aria triunghiului $D'AC$;
   b. distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$;
   c. aria maximă, respectiv aria minimă a unei secțiuni axiale.

Autoevaluare

1. În trunchiul de con circular drept de secțiune axială $ABB'A'$, $AB = 12$ cm, $A'B' = 6$ cm și înălțimea $O'O = 4$ cm. Determinați:
   a. aria secțiunii $ABB'A'$;
   b. lungimea generatoarei;
   c. înălțimea conului din care provine trunchiul. (3p)
2. Fie piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, cu $VA = 2\sqrt{39}$ cm și $AB = 6\sqrt{3}$ cm. Suma ariilor secțiunilor diagonale ale piramidei care conțin muchia VA este egală cu:
   a. $(72 + 90\sqrt{3})$ cm^2;
   b. $(90 + 72\sqrt{3})$ cm^2;
   c. 117 cm^2;
   d. 162 cm^2. (3p)

   Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.
3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = 8$ cm. Arătați că:
   a. aria secțiunii diagonale este $64\sqrt{2}$ cm^2;
   b. $(A'BD) \perp (A'AC)$;
   c. $d(A, (A'BD)) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

4.12

Lecția 12: Proiecții pe un plan. Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Cuvinte-cheie

proiecții ale unor puncte pe un plan

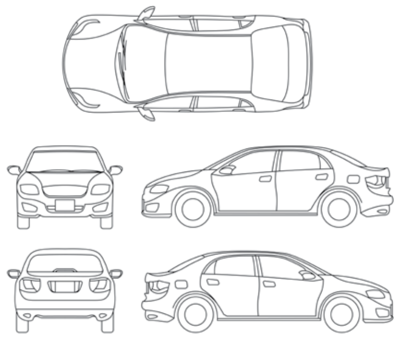
proiecții ale unor segmente pe un plan

proiecții ale unor drepte pe un plan

unghiul dintre o dreaptă și un plan

Utilitate

În practică, geometria în spațiu nu este utilă doar în arhitectură, ci și în majoritatea domeniilor tehnice. Piesele folosite în construcția de mașini sunt formate prin suprapunerea unor corpuri geometrice simple – prisme, piramide, trunchiuri de piramidă, cilindri, conuri, trunchiuri de con, sfere. În etapa de proiectare a pieselor, a mașinilor întregi sau a clădirilor, se folosesc proiecțiile acestora pe anumite plane. Pentru ca imaginile plane obținute să arate ca în realitate, se efectuează proiecții ortogonale pe un triedru tridreptunghic (adică pe trei plane perpendiculare două câte două) ale obiectului care se reprezintă. În desenul tehnic se folosesc, de regulă: *vederea din față* (proiecția principală) a obiectului, care este proiecția acestuia pe planul vertical, *vederea de sus*, adică proiecția sa pe planul orizontal inferior, și *vederea din stânga*, aceasta fiind proiecția pe planul lateral din dreapta. La proiectarea autovehiculelor se mai folosesc și alte tipuri de proiecții.



Proiecții ale unui automobil

12.1. Proiecții pe un plan

De reținut

Definiție. *Proiecția ortogonală* a unui punct pe un plan este punctul în care perpendiculara prin acel punct pe plan intersectează planul.

Notăm $A' = \text{pr}_\alpha A$ și citim: A' este proiecția ortogonală a punctului A pe planul α.

Dacă $A \notin \alpha$, atunci proiecția ortogonală a punctului A pe planul α (pe scurt, proiecția lui A pe α) este piciorul A' al perpendicularei construite din A pe planul α (Figura 1). Așadar, dacă $A' = \text{pr}_\alpha A$, atunci $d(A, \alpha) = AA'$.

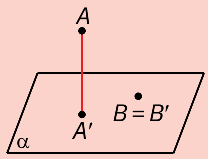


Figura 1

Proiecția B' a unui punct $B \in \alpha$ este chiar B (Figura 1). În acest caz, $d(B, \alpha) = 0$.

Definiție. Dacă $\mathcal{M}$ este o mulțime de puncte din spațiu, *proiecția mulțimii* $\mathcal{M}$ *pe planul* α este mulțimea formată din proiecțiile tuturor punctelor sale pe planul α.

Notăm: $\mathcal{M}' \overset{\text{not.}}{=} \text{pr}_\alpha \mathcal{M}$.

Teorema 1. Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație. Fie dreapta d și planul α. Dacă d este inclusă în planul α, atunci proiecția sa pe α coincide cu ea însăși. Dacă d este perpendiculară pe α, atunci proiecția sa pe plan se reduce la punctul de intersecție dintre d și α.

Considerăm cazul în care dreapta d nu este inclusă în planul α și nici nu este perpendiculară pe acesta (Figura 2). Alegem două puncte distincte A și B ale dreptei d. Fie A' și B' proiecțiile acestor puncte pe planul α. Dreptele AA' și BB' fiind perpendiculare pe α, sunt paralele, deci determină un plan. Fie $\beta = (AA', BB')$. Punctele A' și B' se găsesc în ambele plane, în consecință $\alpha \cap \beta = A'B'$. Arătăm că proiecția dreptei d pe planul α este dreapta $A'B'$. Fie $M \in d$ și $M' = \text{pr}_\alpha M \in \alpha$. Cum $MM' \perp \alpha$, rezultă că $MM' \parallel AA'$, deci $M' \in (M, AA') = \beta$. Așadar, M' este pe dreapta de intersecție a planelor α și β, adică $M' \in A'B'$. Cu alte cuvinte, $\text{pr}_\alpha d \subset A'B'$.

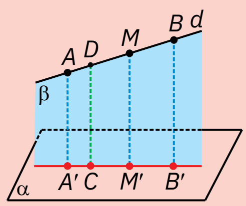


Figura 2

Reciproc, fie $C \in A'B'$. În planul β, construim paralela prin C la AA' și notăm cu D punctul ei de intersecție cu dreapta d. Deoarece $CD \parallel AA'$, rezultă că $CD \perp \alpha$, deci $C = \text{pr}_\alpha D$. Astfel, am arătat că orice punct al dreptei $A'B'$ este proiecția unui punct al dreptei d pe planul α, deci $A'B' \subset \text{pr}_\alpha d$.

În concluzie, $\text{pr}_\alpha d = A'B'$.

Observații

1. Planul β din demonstrația anterioară se numește *planul proiectant al dreptei d*. Acest plan conține dreapta d și este perpendicular pe planul α pe care proiectăm dreapta d.
2. Vom folosi notația $pr_{\alpha}AB$ în toate situațiile, indiferent dacă AB este o dreaptă, o semidreaptă sau un segment, făcând, la nevoie, precizările necesare.

Metodă

Proiecția dreptei d pe planul α se determină astfel:

a. Dacă dreapta d este inclusă în planul α, atunci $pr_{\alpha}d = d$.

b. Dacă $d \perp \alpha$, atunci proiecția lui d pe α coincide cu punctul O de intersecție dintre dreapta d și planul α.

c. Dacă dreapta d nu este inclusă în planul α și nici nu este perpendiculară pe acesta, alegem două puncte distincte A și B ale dreptei d și determinăm proiecțiile A' și B' ale acestor puncte pe planul α. Proiecția dreptei d pe planul α este dreapta $A'B'$. Avem situațiile:

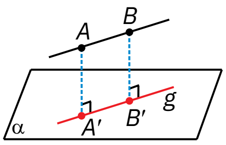


Figura 3

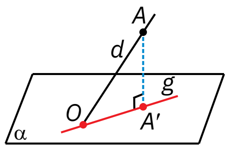


Figura 4

1. Dacă $d \parallel \alpha$, atunci $pr_{\alpha}d = g$, cu $g \parallel d$ (ca în Figura 3). Justificați!
2. Dacă d nu este perpendiculară pe planul α, dar îl intersectează în punctul O, atunci dreapta d și proiecția sa g pe planul α sunt concurente în O (ca în Figura 4). Justificați!

De reținut

Cu același raționament ca în demonstrația Teoremei 1, se arată următoarea proprietate:

P1. Dacă A și B sunt puncte distincte, astfel încât segmentul AB nu este perpendicular pe planul α, iar A' și B' sunt proiecțiile lor pe planul α, atunci proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul $A'B'$.

Dacă segmentul AB este perpendicular pe planul α, atunci proiecția sa pe plan se reduce la un punct.

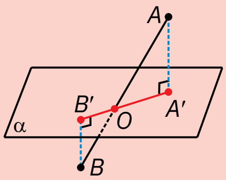


Figura 5

Observație. Capetele segmentului AB pot fi de aceeași parte a planului α sau de o parte și de alta a acestuia, ca în Figura 5.

Exemplu

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ (Figura 6), cu O și O' centrele fețelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$:

- $pr_{(BCC')}AA' = BB'$, deoarece $AB \perp (BCC')$ și $A'B' \perp (BCC')$;
- $pr_{(BCC')}AB = \{B\}$, fiindcă $AB \perp (BCC')$;
- $pr_{(BB'D')}AB = BO$, căci $pr_{(BB'D')}A = O$ și $pr_{(BB'D')}B = B$;
- $pr_{(BB'D')}A'C = O'O$, pentru că $pr_{(BB'D')}A' = O'$ și $pr_{(BB'D')}C = O$.

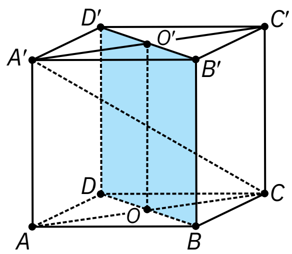


Figura 6

12.2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Investigație

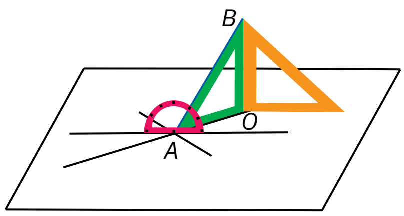


Figura 7

- Lucrați împreună cu colegul de bancă, având la dispoziție 15 minute. Veți realiza configurația din Figura 7, în care dreapta care ne interesează, secantă la planul foii de hârtie, este ipotenuza AB a triunghiului AOB.
- Veți compara unghiurile pe care le face AB cu dreptele planului, căutându-l pe cel cu măsura cea mai mică.
- Urmăriți planul de mai jos.
  1. Desenați pe o coală A4 mai multe drepte, concurente într-un punct A.
  2. Primul dintre dintre voi (în ordine alfabetică) va ține două echere identice – ca în Figura 8, astfel încât muchia comună OB a echerelor să fie perpendiculară pe planul foii de hârtie, iar cateta OA a unuia dintre ele să fie pe una dintre dreptele desenate mai înainte.
  3. Cel de-al doilea dintre voi va pune un raportor cu centrul în punctul A și cu partea sa liniară pe una dintre dreptele de pe foaie. Apoi va măsura unghiul format de acea dreaptă cu ipotenuza AB a echerului verde.
  4. Schimbați rolurile de mai multe ori și repetați pașii **2** și **3**, notând toate rezultatele. Apoi măsurați unghiul $\sphericalangle OAB$. Care dintre unghiurile măsurate de voi are măsura cea mai mică?

4.12

De reținut

Folosind considerente de geometrie plană, se poate demonstra următoarea proprietate importantă:

P2. Dacă dreapta d intersectează planul α în punctul A și nu este perpendiculară pe acest plan, iar dreapta g este proiecția pe planul α a dreptei d, atunci, oricum am alege o dreaptă h din planul α, avem $\sphericalangle(d, g) \leq \sphericalangle(d, h)$, ca în Figura 8.

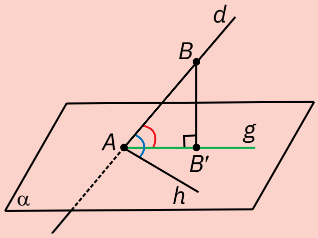


Figura 8

Definiție. Spunem că *unghiul format de dreapta d și planul* α, pe care nu este perpendiculară, este unghiul dintre dreapta d și proiecția acesteia pe planul α.

Notăm: $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, g)$, unde $g = \mathrm{pr}_\alpha d$.

Observații

1. Dacă dreapta d este conținută în planul α, atunci coincide cu proiecția sa pe plan, deci $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d) = 0°$.
2. Dacă $d \parallel \alpha$, atunci dreapta d este paralelă cu proiecția sa pe plan, deci $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, g) = 0°$.
3. Dacă $d \perp \alpha$, atunci toate unghiurile pe care le formează dreapta d cu drepte oarecare ale planului α sunt de 90°; în consecință, spunem că $\sphericalangle(d, \alpha) \overset{\text{def.}}{=} 90°$.
4. Unghiul dintre dreapta d și planul α este unghiul cu măsura cea mai mică dintre toate unghiurile pe care le formează dreapta d cu dreptele planului α.
5. Pentru orice dreaptă d și orice plan α, are loc relația: $0° \leq \sphericalangle(d, \alpha) \leq 90°$.
6. În raport cu un plan α, o dreaptă d poate fi *orizontală* dacă $\sphericalangle(d, \alpha) = 0°$, *verticală* dacă $\sphericalangle(d, \alpha) = 90°$, respectiv *oblică* dacă $0° < \sphericalangle(d, \alpha) < 90°$.

De reținut

Teoremă (lungimea proiecției unui segment pe un plan). Dacă dreapta AB este oblică, iar A' și B' sunt proiecțiile punctelor A și B pe planul α, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\sphericalangle(AB, \alpha))$.

Demonstrație. Dacă punctele A și B nu sunt în planul α, dar sunt de aceeași parte a acestuia, iar $AA' < BB'$ (cazul $AA' > BB'$ este analog), notăm cu O punctul de intersecție al dreptei AB cu planul α, ca în Figura 9. Așa cum am văzut în metoda de construcție a proiecției unei drepte pe un plan, prezentată în secțiunea 12.1, punctele O, A' și B' sunt coliniare. Fie punctul $C \in BB'$, cu $AC \parallel OB'$. Rezultă că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BOB'$ (unghiuri corespondente), deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle(AB, \alpha)$. Cum $ACB'A'$ este dreptunghi, deci $AC = A'B'$, din triunghiul ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$) obținem concluzia.

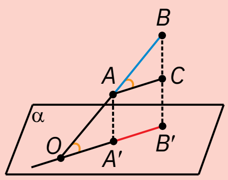


Figura 9

Arătați că și pentru celelalte poziții ale punctelor A și B obținem același rezultat.

Observație. Cu notațiile din teoremă, dacă segmentul AB este inclus în α sau este paralel cu α, atunci $A'B' = AB$. Dacă segmentul este perpendicular pe α, atunci $A'B' = 0$.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, VO este înălțimea piramidei, iar punctul M este mijlocul muchiei BC (Figura 10). Știind că $VO = 10\sqrt{3}$ cm și $AB = 10\sqrt{2}$ cm, determinați:
   a. măsura unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC);
   b. măsura unghiului format de dreapta VA cu planul (VBD);
   c. tangenta unghiului format de dreapta VM cu planul (ABC).

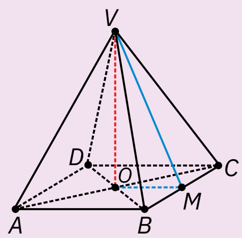


Figura 10

Demonstrație

a. Întrucât VO este înălțimea piramidei, rezultă că $\mathrm{pr}_{(ABC)}V = O$, iar cum $A \in (ABC)$, proiecția segmentului VA pe planul (ABC) este segmentul OA, deci $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, \mathrm{pr}_{(ABC)}VA) = \sphericalangle(VA, OA) = \sphericalangle VAO$.

Cum $ABCD$ este pătrat, rezultă că $AC = AB\sqrt{2} = 20$ cm, de unde $OA = 10$ cm, deoarece O este intersecția diagonalelor pătratului. Cum $VO \perp (ABC)$ și $OA \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp OA$, deci triunghiul VAO este dreptunghic în O. Ca urmare, $\mathrm{tg}(\sphericalangle VAO) = \dfrac{VO}{OA} = \dfrac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO = 60°$.

b. Deoarece $AO \perp VO$, $AO \perp BD$ și $VO \cap BD = \{O\}$, rezultă că $AO \perp (VBD)$, deci $pr_{(VBD)}A = O$. Cum $V \in (VBD)$, obținem $pr_{(VBD)}VA = VO$. Prin urmare, $\sphericalangle(VA, (VBD)) = \sphericalangle(VA, pr_{(VBD)}VA) = \sphericalangle(VA, VO) = \sphericalangle AVO = 90° - \sphericalangle VAO = 30°$.

c. Deoarece punctul M este mijlocul muchiei BC, rezultă că OM este linie mijlocie în triunghiul CAB, deci $OM = AB : 2 = 5\sqrt{2}$ cm. Obținem $\sphericalangle(VM, (ABC)) = \sphericalangle(VM, pr_{(ABC)}VM) = \sphericalangle(VM, OM) = \sphericalangle OMV$. Cum $VO \perp (ABC)$ și $OM \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp OM$. Din triunghiul dreptunghic VOM obținem $\text{tg}(\sphericalangle OMV) = \frac{VO}{OM} = \sqrt{6}$.

2. Fie prisma dreaptă $ABCDEFGH$, cu baza $ABCD$ pătrat. Notăm cu O centrul bazei $ABCD$ (Figura 11). Dacă $AB = 8\sqrt{2}$ cm și $AE = 8$ cm, determinați:

a. unghiul format de dreapta OG cu planul (ABC);

b. lungimea proiecției segmentului CG pe planul (BDG);

c. lungimea proiecției segmentului BC pe planul (BDG);

d. unghiul format de dreapta BC cu planul (BDG).

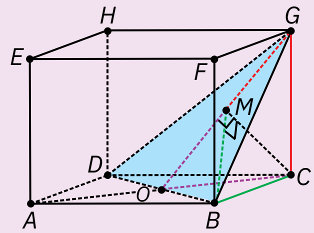


Figura 11

Rezolvare

Notăm $\alpha = (BDG)$.

a. Proiecțiile punctelor G și O pe planul (ABC) sunt punctele C, respectiv O, așadar proiecția dreptei OG pe planul (ABC) este dreapta OC. Rezultă că $\sphericalangle(OG, (ABC)) = \sphericalangle COG$. Avem $OC = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 8 \text{ cm} = CG$, deci triunghiul COG ($\sphericalangle C = 90°$) este dreptunghic isoscel și $\sphericalangle(OG, (ABC)) = \sphericalangle COG = 45°$.

b. Fie M proiecția punctului C pe dreapta OG. Triunghiul COG fiind dreptunghic isoscel, avem $MG = MO = MC = \frac{OG}{2}$. Deoarece $BD \perp (OCG)$ (justificați!), rezultă că $BD \perp MC$. În consecință, MC este perpendiculară pe dreptele concurente BD și OG ale planului α, deci $MC \perp \alpha$. Așadar $pr_{\alpha}C = M$ și $pr_{\alpha}G = G$, deci $pr_{\alpha}CG = MG$. Din triunghiul COG rezultă că $OG = \sqrt{OC^2 + CG^2} = 8\sqrt{2}$ cm, așadar $MG = 4\sqrt{2}$ cm.

c. Avem $pr_{\alpha}C = M$ și $pr_{\alpha}B = B$, de unde obținem că $pr_{\alpha}BC = BM$. Deoarece $BD \perp (OCG)$, rezultă că triunghiul OBM este dreptunghic în O și $BM = \sqrt{MO^2 + OB^2} = 4\sqrt{6}$ cm.

d. Deoarece $pr_{\alpha}BC = BM$, rezultă că $\sphericalangle(BC, \alpha) = \sphericalangle CBM$. Din $MC \perp \alpha$ și $MB \subset \alpha$, deducem că $\sphericalangle BMC = 90°$. În triunghiul dreptunghic BMC, $\cos(\sphericalangle CBM) = \frac{BM}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\sphericalangle CBM = 30°$.

Probleme propuse

1. Segmentul PQ are lungimea de $4\sqrt{3}$ cm și este proiecția segmentului MN pe planul α. Determinați lungimea segmentului MN în fiecare dintre cazurile:

a. $\sphericalangle(MN, \alpha) = 0°$; **b.** $\sphericalangle(MN, \alpha) = 45°$; **c.** $\sphericalangle(MN, \alpha) = 30°$; **d.** $\sphericalangle(MN, \alpha) = 60°$.

2. În Figura 12, punctele A și B sunt situate de o parte și de alta a planului α, $AB \cap \alpha = \{O\}$, iar punctele A' și B' sunt proiecțiile punctelor A, respectiv B pe planul α. Arătați că:

a. punctele A', O și B' sunt coliniare; **b.** $\frac{AO}{BO} = \frac{A'O}{B'O} = \frac{AA'}{BB'}$.

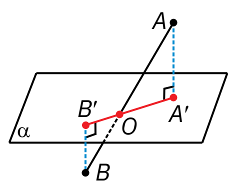


Figura 12

3. Punctele coliniare A, O, B sunt situate de aceeași parte a planului α, iar punctele A', O', respectiv B' sunt proiecțiile acestora pe planul α.

a. Arătați că punctele A', O', B' sunt coliniare.

b. Demonstrați că $\frac{AO}{A'O'} = \frac{OB}{O'B'}$.

4. Triunghiul isoscel ABC are $AB = 4$ cm și baza BC în planul α. Proiecția sa pe planul α este triunghiul dreptunghic BOC, iar distanța de la punctul A la planul α este de 2 cm.

a. Precizați care este unghiul drept al triunghiului BOC.

b. Calculați măsura unghiului dintre dreapta AB și planul α.

c. Determinați lungimea proiecției pe planul α a segmentului AB.

5. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara CM, astfel încât $AM = 12$ cm și dreapta AM formează un unghi de $60°$ cu planul (ABC). Determinați:

a. $\text{tg}(\sphericalangle(DM,(ABC)))$; b. $\cos(\sphericalangle(AD, BM))$; c. $\text{tg}(\sphericalangle(DM,(ACM)))$.

6. Unghiul drept AOB are latura OB paralelă cu planul α. Punctele A, O, B se proiectează pe planul α în punctele A', O', respectiv B'. Arătați că măsura unghiului $A'O'B'$ este egală cu $90°$.

7. Dacă $ABCDEFGH$ este un cub, determinați măsurile unghiurilor dintre:

a. dreapta EG și planul (ABC); b. dreapta EG și planul (BCG); c. dreapta BG și planul (ACG).

8. În imaginea alăturată se observă un suport de umbrele care poate fi considerat, schematic, ca fiind paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Una dintre umbrele are vârful în punctul A, se sprijină pe punctul C' și are capătul mânerului în punctul M. Dacă $AB = 24$ cm, $BC = 18$ cm, $AA' = 40$ cm, iar $AM = 90$ cm, calculați:

a. cosinusul unghiului dintre dreapta AC' și planul (ABC);

b. distanța de la punctul M la planul bazei suportului.

9. $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă regulată, cu $AB = 8$ cm, $A'C' = 4\sqrt{2}$ cm și $AA' = 4$ cm. Determinați lungimile proiecțiilor pe planul (ABC) ale următoarelor segmente:

a. $A'C'$; b. $A'A$; c. $A'B'$.

10. Fie un trunchi de con circular drept cu secțiunea axială $ABCD$, în care $AB = 16$ cm, $CD = 8$ cm și $AD = 4\sqrt{6}$ cm. Pe cercul de centru O al bazei se consideră punctul M astfel încât $OM \perp AB$. Determinați:

a. lungimea proiecției segmentului AD pe planul (ABM);

b. aria secțiunii axiale $ABCD$;

c. unghiul format de dreapta DM cu planul (ABM).

11. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu O centrul bazei, muchia AB are lungimea de 6 cm, iar secțiunea diagonală este triunghi dreptunghic. Determinați:

a. măsurile unghiurilor formate de dreapta VA cu planele (ABC), respectiv (VBD);

b. sinusul unghiului format de dreapta VO cu planul (VBC).

12. În tetraedrul regulat $ABCD$, cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, punctul M este mijlocul segmentului CD. Determinați:

a. lungimea proiecțiilor segmentelor AB și AM pe planul (BCD);

b. lungimea proiecției segmentului BM pe planul (ACD).

13. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă, cu baza triunghiul echilateral ABC, punctul G', centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, și G, proiecția lui G' pe planul (ABC). Demonstrați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate:

a. Proiecția unei drepte pe un plan este o .... sau un ....

b. Dacă un segment este perpendicular pe un plan, lungimea proiecției sale pe acel plan este ....

c. Unghiul dintre o dreaptă și un plan cu care este paralelă are ...... grade. **(3p)**

2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 5$ cm. La fiecare subpunct, alegeți varianta corectă.

a. Unghiul dintre $C'A$ și (ABC) are măsura de: **i.** $90°$; **ii.** $60°$; **iii.** $45°$.

b. Proiecția segmentului BC' pe planul (ABB') are lungimea de: **i.** 5 cm; **ii.** $\sqrt{34}$ cm; **iii.** 3 cm.

c. Proiecția segmentului $A'D'$ pe dreapta BC are lungimea de: **i.** 3 cm; **ii.** 5 cm; **iii.** 4 cm. **(3p)**

3. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu O centrul bazei, $AB = 10$ cm și secțiunea diagonală triunghi echilateral. Determinați:

a. măsura unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC);

b. lungimea proiecției segmentului OB pe planul (VAC);

c. sinusul unghiului format de dreapta VO cu planul (VBC). **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

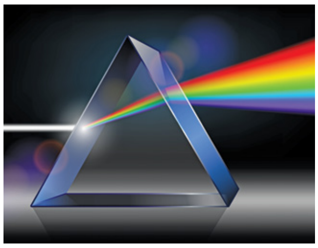
Lecția 13: Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare

Cuvinte-cheie

unghi diedru | unghi plan al unui unghi diedru | unghiul a două plane | plane perpendiculare

Utilitate

Marele matematician și fizician Isaac Newton a descoperit, în anul 1672, că atunci când un fascicul de lumină solară traversează o prismă transparentă, acesta se descompune în razele colorate ale spectrului. Fascinantele culori spectrale – așezate întotdeauna în ordinea ROGVAIV, adică roșu, oranj, galben, verde, albastru, indigo și violet – se regăsesc și în curcubeu, din aceleași motive, de *refracție* și *dispersie* a luminii.



Prisma optică

Prisma optică este un mediu transparent și omogen (cu indicele de refracție diferit de cel al exteriorului său), mărginit de două fețe plane, numite *dioptre*, care formează un *unghi diedru* (numit unghiul prismei sau *unghi de refringență*). Prisma optică descompune lumina în radiațiile sale componente, care sunt deviate sub unghiuri diferite, în funcție de anumite criterii.

Prismele optice se folosesc și în construcția binoclurilor, a lunetelor, a microscoapelor, a aparatelor de fotografiat și a altor instrumente optice speciale.

13.1. Unghi diedru

De reținut

Ne reamintim noțiunea de semiplan, pe care ați întâlnit-o în clasa a V-a. Vom vedea, în cele ce urmează, că semiplanele sunt pentru plane ceea ce reprezintă semidreptele pentru drepte.

Definiție. Fie planul α, dreapta d inclusă în acesta și punctul $A \in \alpha$, care nu aparține dreptei d. *Semiplanul închis* determinat de dreapta d și punctul A este mulțimea tuturor punctelor M din planul α care se află de aceeași parte a dreptei d ca și punctul A. Dreapta d se numește *frontiera* semiplanului (Figura 1).

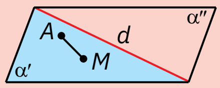


Figura 1

Observații

1. Dreapta $d \subset \alpha$ determină două semiplane ale planului α. Cu notațiile din Figura 1, α'' este mulțimea tuturor punctelor planului α care nu se află în α', la care se adaugă punctele dreptei d. Reuniunea semiplanelor α' și α'' este planul α, iar α' și α'' se numesc *semiplane opuse*.
2. *Semiplanul deschis* determinat de dreapta d și punctul A este mulțimea punctelor planului α care se află de aceeași parte a dreptei d ca și A. Un punct M aparține acestui semiplan deschis dacă segmentul AM nu intersectează dreapta d.

În continuare, ne vom referi doar la *semiplane închise*, adică la semiplane care își conțin frontiera, pe care le vom numi, pentru simplitate, *semiplane*.

De reținut

Definiție. Fie semiplanele α' și β', care au ca frontieră dreapta d. Reuniunea lor se numește *unghi diedru*. Semiplanele α' și β' se numesc *fețele diedrului*, iar d se numește *muchia diedrului*.

Notație: Unghiul diedru determinat de semiplanele α' și β' (ca în Figura 2) se notează cu $\sphericalangle(\alpha', \beta')$. Uneori vom spune, pe scurt, *diedrul* $\sphericalangle(\alpha', \beta')$.

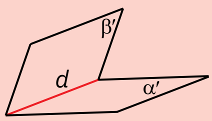


Figura 2

Definiție. Spunem că $\sphericalangle(\alpha', \beta')$ este un unghi diedru *nul*, dacă $\alpha' = \beta'$.
$\sphericalangle(\alpha', \beta')$ se numește unghi diedru *plat*, dacă α' și β' sunt semiplane opuse.
Un unghi diedru $\sphericalangle(\alpha', \beta')$, care nu este nici nul și nici plat, se numește *unghi diedru propriu*.

4.13

13.2. Unghi plan corespunzător diedrului

Fie unghiul diedru propriu $\sphericalangle(\alpha', \beta')$ și punctele distincte O și O' pe muchia d a diedrului. Construim, în semiplanul α', semidreptele OA și $O'A'$, perpendiculare pe d, și în semiplanul β', semidreptele OB și $O'B'$, perpendiculare pe d (ca în Figura 3). Observăm că unghiurile AOB și $A'O'B'$ au laturile respectiv paralele și în același semiplan de frontieră d. În consecință, indiferent de alegerea punctelor O și O' pe dreapta d, rezultă că $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B'$. Acest lucru justifică definiția următoare.

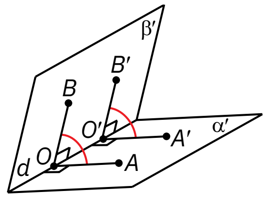


Figura 3

De reținut

Definiție. Fie unghiul diedru propriu $\sphericalangle(\alpha', \beta')$ și punctul O pe muchia d a diedrului. Dacă semidreptele $OA \subset \alpha'$ și $OB \subset \beta'$ sunt perpendiculare pe dreapta d, atunci $\sphericalangle AOB$ se numește *unghi plan al unghiului diedru* $\sphericalangle(\alpha', \beta')$.

Observație. Toate unghiurile plane ale unui diedru propriu au aceeași măsură.

Definiții. Măsura unghiului diedru propriu $\sphericalangle(\alpha', \beta')$ este egală cu măsura oricăruia dintre unghiurile plane corespunzătoare acestuia.

Măsura oricărui unghi diedru nul este de 0°, iar măsura oricărui unghi diedru plat este de 180°.

Un unghi diedru se numește *drept* dacă are măsura de 90°. Spunem că fețele unui unghi diedru drept sunt perpendiculare.

Notație: Ca în geometria plană, măsura unui unghi diedru se notează: $\sphericalangle(\alpha', \beta') = \sphericalangle AOB$.

Metodă

Pentru a afla măsura unghiului diedru $\sphericalangle(\alpha', \beta')$, procedăm astfel:

1. Alegem un punct O, de pe muchia d a diedrului.
2. Pe una dintre fețele diedrului (de exemplu, pe α') identificăm (sau construim) o semidreaptă $OA \perp d$.
3. Pe cealaltă față a diedrului (β') identificăm (sau construim) o semidreaptă $OB \perp d$.
4. Din $\alpha' \cap \beta' = d$, $O \in d$, $OA \perp d$, $OA \subset \alpha'$ și $OB \perp d$, $OB \subset \beta'$, deducem că $\sphericalangle(\alpha', \beta') = \sphericalangle AOB$.

Observații

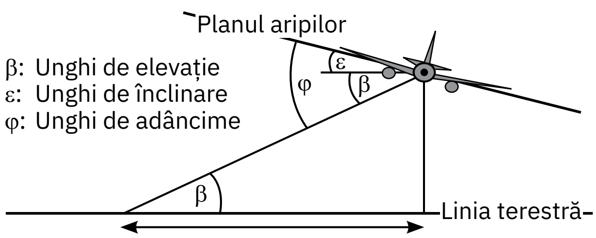
a. Măsura unui unghi diedru nu depinde de alegerea punctului de pe muchia sa prin care construim perpendicularele pe aceasta în cele două semiplane.

b. Cu notațiile precedente, deoarece $d \perp OA$, $d \perp OB$, iar dreptele OA și OB sunt concurente, rezultă că $d \perp (OAB)$.

Mate practică

George face planorism și studiază caracteristicile avioanelor. A aflat că planul aripilor unei aeronave în repaus nu este paralel cu cel al solului, ci face un unghi diedru – mic, dar vizibil – cu planul orizontal. Caută pe internet o estimare a unghiului plan al acestui unghi diedru și descoperă imaginea alăturată.

Din această reprezentare deduce că, atunci când un avion este în zbor, intervin mai multe unghiuri plane ale unor unghiuri diedre, iar măsurile acestora sunt determinante pentru siguranța și calitatea zborului.



Exemplu

Fie prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$ de centru O, $AB = 3\sqrt{2}$ cm și $AA' = 3$ cm (Figura 4). Fie α' și α'' semiplanele de frontieră BD care îl conțin pe C, respectiv pe A, și β' semiplanul de frontieră BD care îl conține pe C'. Avem:

- $\sphericalangle((ABC), (BCC')) = \sphericalangle ABB' = 90°$;
- $\sphericalangle(\alpha', \beta') = 45°$ și $\sphericalangle(\alpha'', \beta') = 135°$.

Într-adevăr, avem $OC = CC' = 3$ cm, deci triunghiul OCC' este dreptunghic isoscel, iar din $OC \perp BD$, $OC \subset \alpha'$, și $OC' \perp BD$, $OC' \subset \beta'$, obținem $\sphericalangle(\alpha', \beta') = \sphericalangle COC' = 45°$. Analog, rezultă că $\sphericalangle(\alpha'', \beta'') = \sphericalangle AOC' = 135°$. Cele două unghiuri diedre au unghiurile plane suplementare.

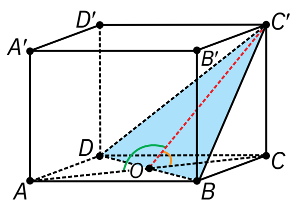


Figura 4

13.3. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare

Două plane concurente, α și β, formează patru unghiuri diedre (Figura 5). Dacă printr-un punct O de pe dreapta de intersecție a planelor – care este muchia comună a diedrelor – construim, în planele α și β, două drepte perpendiculare pe aceasta, atunci cele patru unghiuri formate (care sunt opuse la vârf, două câte două) sunt chiar unghiurile plane ale diedrelor.

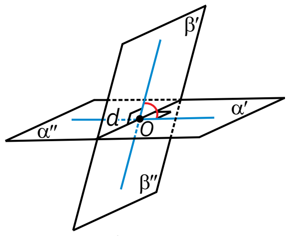


Figura 5

De reținut

Definiție. Dacă planele α și β sunt concurente, spunem că măsura unghiului lor este egală cu cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri diedre formate de acestea.

Dacă planele α și β sunt paralele sau coincid, spunem că unghiul dintre acestea este de $0°$.

Observație. Măsura unghiului a două plane este de cel mult $90°$.

Teoremă. Dacă dreapta d este intersecția planelor α și β, iar planul γ este astfel încât $d \perp \gamma$, atunci $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(g, h)$, unde g și h sunt dreptele de intersecție dintre planele α și γ, respectiv β și γ.

Demonstrație. Deoarece $d \perp \gamma$ și $g, h \subset \gamma$ (Figura 6), rezultă că $d \perp g$ și $d \perp h$. Ambele unghiuri nefiind obtuze, obținem $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(g, h)$.

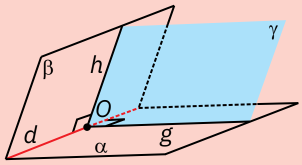


Figura 6

Mate practică

Rareș își dă seama că dacă pune un caiet „în picioare”, ca în imaginea alăturată, foile acestuia devin tot atâtea plane perpendiculare pe planul mesei. Într-adevăr, fiecare filă conține cotorul, care poate fi asimilat cu o dreaptă perpendiculară pe tăblia mesei. Rareș realizează că toate unghiurile mici dintre file sunt unghiuri diedre. De asemenea, observă și unghiul diedru format de o copertă cu planul mesei.

Prin definiție, două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre plane conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt. Următoarea caracterizare a planelor perpendiculare este foarte folositoare în probleme.

De reținut

Teoremă. Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă unghiul lor diedru este de $90°$.

Demonstrație. Fie planele α și β, a căror intersecție este dreapta d (Figura 7).

„$\Rightarrow$” Dacă $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90°$, arătăm că $\alpha \perp \beta$.

Alegem dreptele $a \subset \alpha$ și $b \subset \beta$, care se intersectează în punctul O al dreptei d, astfel încât $a \perp d$ și $b \perp d$. Atunci, $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b) = 90°$, deci $b \perp a$. Deoarece $b \perp d$, iar dreptele a și d ale planului α sunt concurente, rezultă că $b \perp \alpha$ și, cum $b \subset \beta$, rezultă că $\alpha \perp \beta$.

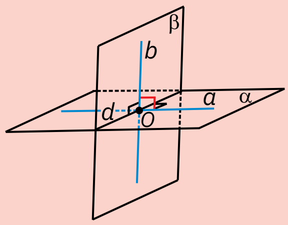


Figura 7

„$\Leftarrow$” Dacă $\alpha \perp \beta$, arătăm că $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90°$. Din definiția planelor perpendiculare, rezultă că există dreapta $a \subset \alpha$ astfel încât $a \perp \beta$.

Notăm cu O punctul de intersecție al dreptelor a și d și construim, în planul β, dreapta b care trece prin O și este perpendiculară pe d. Deoarece $a \perp \beta$, iar $b, d \subset \beta$, rezultă că $a \perp b$ și $a \perp d$. Dreptele a și b fiind perpendiculare în O pe dreapta de intersecție a planelor α și β, rezultă că $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b) = 90°$.

Exemplu

În prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC, reprezentată în Figura 8, M și M' sunt mijloacele segmentelor BC și $B'C'$. Atunci:

- $\sphericalangle\big((ABC), (A'B'C')\big) = 0°$, deoarece $(ABC) \parallel (A'B'C')$;
- $\sphericalangle\big((ABB'), (BB'C')\big) = \sphericalangle ABC = 60°$;
- $\sphericalangle\big((BB'C'), (ABC)\big) = \sphericalangle AMM' = 90°$;
- $\sphericalangle\big((AA'M'), (BCC')\big) = \sphericalangle AMB = 90°$.

Justificați!

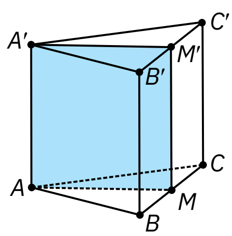


Figura 8

4.13

De reținut

Știm că dacă $A'B'$ este proiecția segmentului AB pe planul α, atunci $A'B' = AB \cdot \cos(\sphericalangle(AB, \alpha))$.

Ne punem întrebarea care este legătura dintre aria unui poligon și cea a proiecției sale pe un plan. Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

Teoremă. Dacă S este aria unui poligon, iar S' este aria proiecției sale pe un plan α, atunci: $S' = S \cdot \cos t$, unde t este măsura unghiului dintre planul α și planul poligonului inițial.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Fie prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza $ABCD$ pătrat. Știind că $AB = 4\sqrt{2}$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm, calculați:

a. $\sphericalangle((AB'D'), (ABC))$; **b.** $\sphericalangle((AB'D'), (BB'D'))$; **c.** $\sphericalangle((AB'D'), (CB'D'))$.

Rezolvare

a. Fie O și O' centrele bazelor prismei (Figura 9). Deoarece $(ABC) \parallel (A'B'C')$, rezultă că $\sphericalangle((AB'D'), (ABC)) = \sphericalangle((AB'D'), (A'B'C'))$. Triunghiul $AB'D'$ fiind isoscel cu baza $B'D'$, rezultă că $AO' \perp B'D'$ și, cum $A'O' \perp B'D'$, iar $B'D'$ este dreapta de intersecție a planelor $(AB'D')$ și $(A'B'C')$, rezultă că $\sphericalangle((AB'D'), (A'B'C')) = \sphericalangle AO'A'$.

Avem $A'O' = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = 4$ cm, iar triunghiul $AA'O'$ este dreptunghic în A', așadar $\operatorname{tg}(\sphericalangle AO'A') = \dfrac{AA'}{A'O'} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle((AB'D'), (ABC)) = \sphericalangle AO'A' = 60°$.

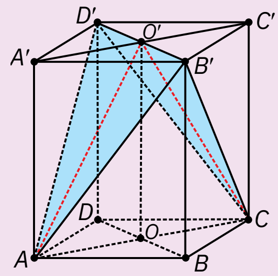


Figura 9

b. Deoarece $B'D'$ este dreapta de intersecție a planelor $(AB'D')$ și $(BB'D')$, iar $OO' \perp B'D'$ și $AO' \perp B'D'$, rezultă că $\sphericalangle((AB'D'), (BB'D')) = \sphericalangle AO'O = 90° - \sphericalangle AO'A' = 30°$.

c. Analog, deducem că $\sphericalangle((AB'D'), (CB'D')) = \sphericalangle AO'C = 60°$.

2. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 10$ cm și $A'B' = OO' = 4$ cm, unde O și O' sunt centrele bazelor acestuia. Calculați $\cos(\sphericalangle((BCC'), (ACC')))$.

Rezolvare

Notăm cu M și M' mijloacele muchiilor BC, respectiv $B'C'$ (Figura 10). Din trapezul dreptunghic $OMM'O'$ obținem $MM' = \sqrt{O'O^2 + (OM - O'M')^2} = 5$ cm.

Proiecția trapezului $BCC'B'$ pe planul (ACC') este trapezul $OCC'O'$, deci $\cos\left(\sphericalangle((BCC'), (ACC'))\right) = \dfrac{\mathcal{A}_{OCC'O'}}{\mathcal{A}_{BCC'B'}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

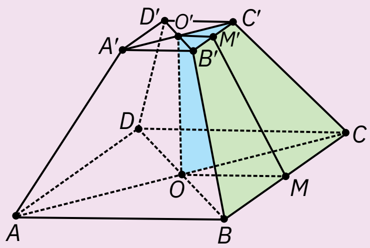


Figura 10

3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, reprezentată în Figura 11, cu $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 12$ cm și $VO = 6\sqrt{3}$ cm, fie punctul M mijlocul muchiei BC. Determinați măsurile unghiurilor dintre:

a. (VBC) și (ABC); **b.** (VOM) și (VBD); **c.** (VBC) și (VAD).

Demonstrație

a. Triunghiul VBC este isoscel, deci mediana VM este și înălțime; așadar, $VM \perp BC$. Segmentul OM este linie mijlocie în triunghiul CAB, deci $OM \parallel AB$, iar cum $AB \perp BC$, rezultă că $OM \perp BC$. Cum $(VBC) \cap (ABC) = BC$, $VM \perp BC$, $OM \perp BC$, $VM \subset (VBC)$ și $OM \subset (ABC)$, rezultă că $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle(VM, OM) = \sphericalangle OMV$. În plus, $OM = AB : 2 = 6$ cm.

Deoarece $VO \perp (ABC)$ și $OM \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp OM$, deci triunghiul VOM este dreptunghic în O. Obținem $\operatorname{tg}(\sphericalangle OMV) = \dfrac{VO}{OM} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle OMV = 60°$. Așadar, $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = 60°$.

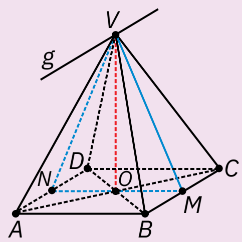


Figura 11

b. Deoarece $VO \perp (ABC)$ și $OB \subset (ABC)$, rezultă că $VO \perp OB$. Cum $(VOM) \cap (VBD) = VO$, $OM \perp VO$, $OM \subset (VOM)$, și $OB \perp VO$, $OB \subset (VBD)$, rezultă că $\sphericalangle((VOM), (VBD)) = \sphericalangle(OM, OB) = \sphericalangle BOM$. Triunghiul BOM este dreptunghic în M, cu $OM = BM = 6$ cm, deci este triunghi dreptunghic isoscel. Ca urmare, $\sphericalangle BOM = 45°$.

c. Fie $OM \cap AD = \{N\}$. Patrulaterul $ABMN$ este dreptunghi, deci $AN = BM$. Deducem că N este mijlocul laturii AD. Segmentele VM și VN sunt mediane în triunghiurile congruente VBC, respectiv VAD, deci $VM \equiv VN$. Așadar, triunghiul VMN este isoscel și, având $\sphericalangle OMV = 60°$, este echilateral, deci $\sphericalangle MVN = 60°$.
Deoarece planele (VBC) și (VAD) au în comun punctul V, ele au o dreaptă comună g, care conține punctul V. Cum $BC \parallel AD$, $BC \subset (VBC)$, $AD \subset (VAD)$ și $(VBC) \cap (VAD) = g$, rezultă că $g \parallel BC$ și $g \parallel AD$. Deoarece $VM \perp BC$ și $g \parallel BC$, rezultă că $VM \perp g$. Analog $VN \perp g$. Așadar $(VBC) \cap (VAD) = g$, $VM \perp g$, $VM \subset (VBC)$ și $VN \perp g$, $VN \subset (VAD)$, de unde reiese că $\sphericalangle((VBC), (VAD)) = \sphericalangle(VM, VN) = \sphericalangle MVN = 60°$.

Probleme propuse

1. În Figura 12, $\alpha \cap \beta = d$, $AD \perp d$, $AD \subset \alpha$, $BC \perp d$, $BC \subset \beta$, iar măsura unghiului AOB este egală cu 60°. Determinați:

a. măsurile unghiurilor plane COD, AOC și BOD ale diedrelor formate;

b. măsura unghiului dintre planele α și β.

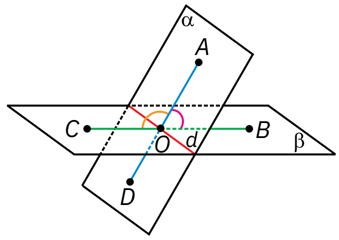


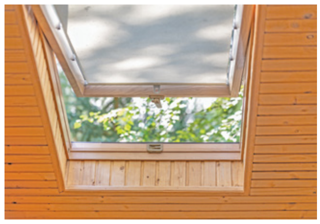
Figura 12

2. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul bazei unui con circular drept cu vârful în V. Dacă O este centrul bazei conului, aflați măsura unghiului diedru dintre semiplanele determinate de VO, care conțin punctul A, respectiv punctul B.

3. Pe planul triunghiului echilateral ABC se ridică perpendiculara CD, cu $CD = 6$ cm. Știind că $\sphericalangle(AD, (ABC)) = 30°$, calculați tangenta unghiului dintre planele (ABD) și (ABC).

4. Triunghiul ABC de arie 18 cm^2 se proiectează pe planul α după triunghiul $A'B'C'$, de arie 9 cm^2. Determinați măsura unghiului dintre planele în care sunt incluse cele două triunghiuri.

5. Peretele pe care este fereastra camerei de la mansardă a Mariei face cu planul podelei un unghi de 80°. Se știe că unghiul dintre planul ferestrei deschise (ca în imaginea alăturată) și cel al peretelui pe care e montată aceasta este de 30°. Determinați măsura unghiului dintre planul ferestrei deschise și cel al podelei.



6. Fie tetraedrul $DABC$, astfel încât $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90°$ și $DA = DB = DC = 4$ cm.

a. Arătați că $(BAD) \perp (DAC)$.

b. Calculați cosinusul unghiului dintre planele (ABC) și (BCD).

7. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$. Determinați:

a. $\sphericalangle((ABC), (ACA'))$; **b.** $\sphericalangle((ADA'), (BB'C'))$; **c.** $\sphericalangle((ACA'), (BDD'))$; **d.** $\cos\left(\sphericalangle((BC'D),(BB'D'))\right)$.

8. În prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$, $AC' = 12$ cm și $\sphericalangle(AC', (ABC)) = 30°$. Determinați:

a. $\sphericalangle((ABC'), (BCC'))$; **b.** $\text{tg}\left(\sphericalangle((ABC'),(ABC))\right)$; **c.** $\cos\left(\sphericalangle((D'AC),(ABC))\right)$.

9. Fie triunghiul ABC, cu $AB = 6$ cm, $AC = BC = 5$ cm. De aceeași parte a planului său se ridică perpendicularele AA', BB' și CC', cu $AA' = BB' = 2$ cm și $CC' = 5$ cm. Determinați cosinusul unghiului format de planele (ABC) și $(A'B'C')$.

10. În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, O este centrul bazei. Știind că $VA = 6\sqrt{13}$ cm și $VO = 18$ cm, determinați:

a. sinusul unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC);

b. tangenta unghiului format de planele (VAC) și (ABC);

c. măsura unghiului planelor (VAB) și (ABC).

11. Un con circular drept de secțiune axială VAB are raza $OA = 6$ cm și înălțimea $VO = 3\sqrt{3}$ cm. Punctul C se află pe cercul de centru O astfel încât $AC = 6$ cm. Determinați măsurile unghiurilor dintre:

a. BC și (VAB); **b.** (VAC) și (ABC); **c.** (VBC) și (ABC).

12. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 8\sqrt{3}$ cm și $VO = 4$ cm, fie punctele M și N mijloacele muchiilor AB, respectiv CD. Determinați măsurile unghiurilor dintre:

a. (VAB) și (ABC); **b.** (VOM) și (VAC); **c.** (VAB) și (VDC).

13. Pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ABE sunt situate în plane diferite. Se știe că $AB = 8$ cm și că distanța de la punctul E la planul ABC este egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Determinați măsurile unghiurilor dintre:

a. dreptele CD și BE; b. planele (EAB) și (ABC); c. planele (ADE) și (BCE).

14. Fie $ABB'A'$ secțiunea axială a unui cilindru circular drept și punctele C și D pe cercul bazei în care AB este diametru, astfel încât triunghiul ACD este echilateral. Dacă $R = 8$ cm și $\sphericalangle((A'CD), (ABC)) = 60°$, calculați tangenta unghiului planelor $(B'CD)$ și (ABC).

15. Determinați cosinusul unuia dintre unghiurile diedre determinate de două fețe ale unui tetraedru regulat.

16. Fie tetraedrul $ABCD$ astfel încât triunghiul ABC este echilateral, iar $(BCD) \perp (ABC)$. Dacă $AB = 12$ cm, iar $\sphericalangle((ACD), (ABC)) = \sphericalangle((ABD), (ABC)) = 30°$, determinați distanța de la punctul D la planul ABC.

17. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și planele α, β, γ, care trec prin mijloacele segmentelor BC, AC, AB și sunt perpendiculare pe acestea. Arătați că:

a. oricum am alege un punct T din planul α, avem $TB = TC$;

b. planele α, β și γ se intersectează după o dreaptă care este perpendiculară pe planul (ABC);

c. $\sphericalangle(\beta, \gamma) = \sphericalangle A$, $\sphericalangle(\alpha, \gamma) = \sphericalangle B$ și $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle C$.

Autoevaluare

1. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile următoare să fie adevărate:

a. Un unghi diedru plat are măsura de . . . . . grade.

b. Măsura unghiului a două plane paralele este egală cu . . . . . grade.

c. Măsura unghiului a două plane perpendiculare este egală cu . . . . . grade. (3p)

2. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a. Două plane perpendiculare pe același plan sunt paralele.

b. Două plane perpendiculare pe același plan sunt concurente.

c. Aria proiecției unui triunghi pe un plan nu poate fi mai mare decât aria triunghiului inițial. (3p)

3 Fie prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$. Știind că $AB = 6$ cm și $\sphericalangle(A'C, (ABC)) = 45°$, determinați:

a. $\sphericalangle((A'AC), (ABC))$; b. $\text{tg}(\sphericalangle((A'BD), (ABC)))$; c. $\cos(\sphericalangle((D'AC), (ABC)))$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

Lecția 14: Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

Cuvinte-cheie

drepte perpendiculare | dreaptă perpendiculară pe plan | distanțe | teoremă reciprocă

Utilitate

În proiectarea caselor se folosește configurația din teorema celor trei perpendiculare, deoarece aceasta asigură stabilitatea edificiului. În imagine, se vede un acoperiș în construcție. Dacă priviți cu atenție, puteți descoperi mai multe grinzi perpendiculare pe planul planșeului, numite *popi*, proptite de *căpriori de lemn* oblici. Un astfel de căprior este perpendicular, la rândul lui, pe lemnul (numit *cosoroabă*) pe care îl întâlnește, aflat la marginea acoperișului. Mai mult, scândura orizontală care unește *popul cu căpriorul* este perpendiculară pe *cosoroabă*.

De reținut

Teorema celor trei perpendiculare (T3⊥)

Fie dreapta MO perpendiculară pe planul α, cu $O \in \alpha$. Dacă dreapta d este inclusă în planul α și $OA \perp d$, cu $A \in d$, atunci $MA \perp d$.

Altfel spus: Dacă $\begin{cases} MO \perp \alpha,\ O \in \alpha \\ d \subset \alpha,\ A \in d,\ OA \perp d \end{cases}$, atunci $MA \perp d$.

Demonstrație. Folosim Figura 1. Din $MO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă că $MO \perp d$. Deoarece d este perpendiculară pe dreptele concurente MO și OA, obținem că $d \perp (AOM)$, deci d este perpendiculară și pe dreapta MA a planului (AOM).

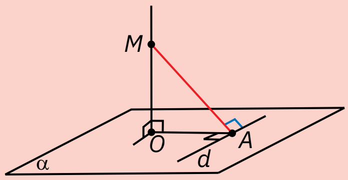


Figura 1

Observații

1. În condițiile și cu notațiile din teoremă, dacă alegem un punct oarecare $N \in OM$, cu $N \neq O$, deoarece dreptele NO și MO coincid, rezultă că și $NA \perp d$ (Figura 2). Mai mult, planul (AOM) este chiar planul care trece prin A și este perpendicular pe d, deci (AOM) este reuniunea tuturor dreptelor care trec prin A și sunt perpendiculare pe d.

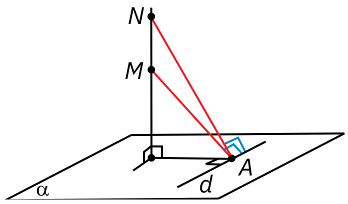


Figura 2

2. Deoarece $MO \perp \alpha$, putem considera că în configurația din Figura 1 apar *patru unghiuri drepte*: $\sphericalangle(d, OA)$, $\sphericalangle(d, MA)$, $\sphericalangle AOM$ și încă un unghi drept, determinat de dreapta MO cu o dreaptă a planului α, concurentă cu OA.
3. Teorema celor trei perpendiculare furnizează următorul algoritm pentru a construi proiecția unui punct M pe o dreaptă d sau pentru a determina distanța de la punctul M la dreapta d:

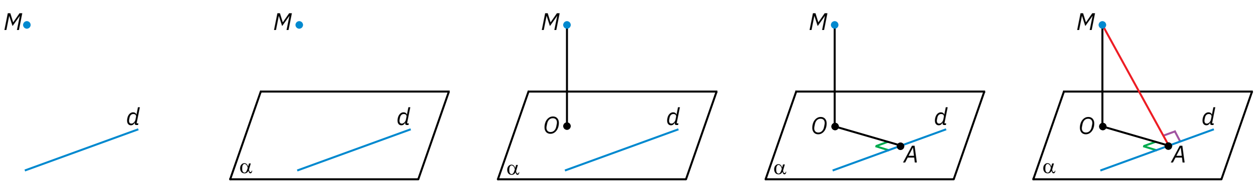
   Pasul 1. Considerăm un plan α, care conține dreapta d și nu conține punctul M.

   Pasul 2. Construim perpendiculara MO din punctul M pe planul α, $O \in \alpha$.

   Pasul 3. În planul α construim perpendiculara OA pe dreapta d, $A \in d$.

   Pasul 4. Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $MA \perp d$, deci $pr_d M = A$ și $d(M, d) = MA$.

   Acest algoritm este util în special în problemele/configurațiile geometrice în care planul determinat de punctul M și de dreapta d este mai dificil de pus în evidență sau de studiat.



Start
Pasul 1
Pasul 2
Pasul 3
Pasul 4

4.14

De reținut

Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare (R1 T3⊥)

Fie dreapta MO perpendiculară pe planul α, cu $O \in \alpha$. Dacă dreapta d este inclusă în planul α și $MA \perp d$, cu $A \in d$, atunci $OA \perp d$.

Altfel spus: Dacă $\begin{cases} MO \perp \alpha,\ O \in \alpha \\ d \subset \alpha,\ A \in d,\ MA \perp d \end{cases}$, atunci $OA \perp d$.

Demonstrație. Folosim Figura 3. Din $MO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă că $MO \perp d$. Deoarece d este perpendiculară pe dreptele concurente MO și MA, obținem $d \perp (AOM)$, deci d este perpendiculară și pe dreapta OA a planului (AOM).

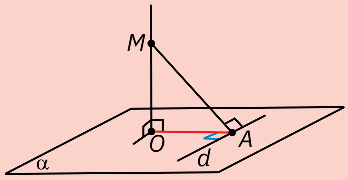


Figura 3

Exemplu

Pe planul triunghiului ABC, dreptunghic în B, se ridică o perpendiculară în A, pe care se consideră un punct V. Arătăm că:

a. triunghiul VBC este dreptunghic;

b. dacă D este un punct în planul (ABC) astfel încât $VD \perp CD$, atunci D aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

Folosim Figura 4.

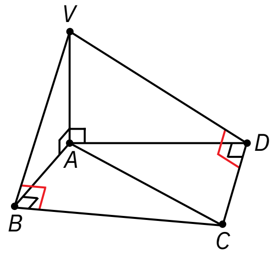


Figura 4

a. Deoarece $VA \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ și $AB \perp BC$, conform *teoremei celor trei perpendiculare*, obținem $VB \perp BC$, deci $\sphericalangle VBC = 90°$. Așadar, triunghiul VBC este dreptunghic (în B).

b. Deoarece $VA \perp (ADC)$, $AD \subset (ADC)$, $CD \subset (ADC)$ și $VD \perp DC$, aplicând *prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare*, deducem că $AD \perp DC$, de unde $\sphericalangle ADC = 90°$. Ca urmare, punctul D aparține cercului $\mathcal{C}$ de diametru AC. Întrucât triunghiul ABC este dreptunghic, de ipotenuză AC, cercul $\mathcal{C}$ este cercul circumscris triunghiului ABC.

De reținut

A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare

Fie planul α și punctele $O \in \alpha$, $M \notin \alpha$. Dacă dreapta d este inclusă în planul α, iar $A \in d$, astfel încât $MO \perp OA$, $OA \perp d$ și $MA \perp d$, atunci $MO \perp \alpha$.

Altfel spus: Dacă $\begin{cases} O \in \alpha,\ M \notin \alpha \\ d \subset \alpha,\ A \in d,\ O \notin d \\ MO \perp OA,\ OA \perp d,\ MA \perp d \end{cases}$, atunci $MO \perp \alpha$.

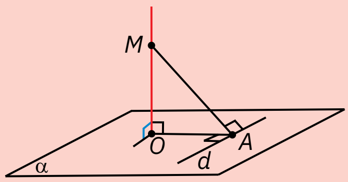


Figura 5

Demonstrație. Folosim Figura 5. Deoarece d este perpendiculară pe dreptele concurente MO și OA, obținem $d \perp (AOM)$, și, cum $MO \subset (AOM)$, rezultă că $d \perp MO$. Așadar MO este perpendiculară pe dreptele concurente OA și d ale planului α, deci $MO \perp \alpha$.

Observație

A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare furnizează următorul algoritm pentru a construi perpendiculara dintr-un punct M pe un plan α sau pentru a determina distanța de la punctul M la planul α.

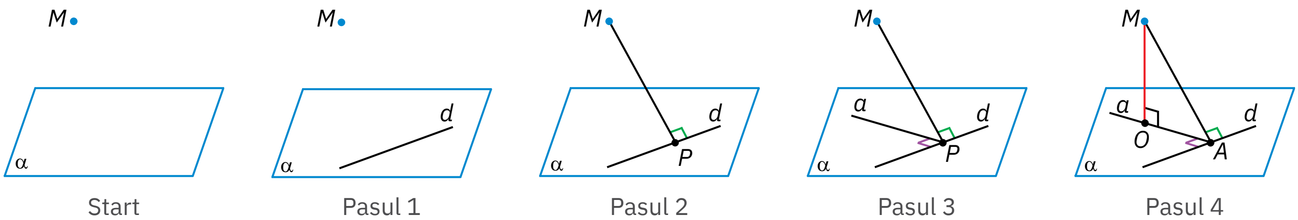
Pasul 1. Considerăm o dreaptă d inclusă în planul α.

Pasul 2. Construim proiecția P a punctului M pe dreapta d: $MP \perp d$, $P \in d$.

Pasul 3. În planul α construim dreapta a, perpendiculară pe d în punctul P.

Pasul 4. Construim proiecția O a punctului M pe dreapta a. Conform celei de-a doua reciproce a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $MO \perp \alpha$, deci $pr_{\alpha}M = O$ și $d(M, \alpha) = MO$.

Acest algoritm este util în special în problemele/configurațiile geometrice în care planul determinat de punctul M și de dreapta d este mai dificil de pus în evidență sau de studiat.



Exemplu

Fie VO înălțimea tetraedrului oarecare $VABC$ și $M \in BC$, astfel încât $VM \perp BC$ (Figura 6).

- Deoarece $VO \perp (ABC)$, $VM \perp BC$, $OM, BC \subset (ABC)$, din prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $OM \perp BC$.
- Cum $VO \perp (ABC)$ și $OM \subset (ABC)$, rezultă că triunghiul VOM este dreptunghic în O. În acest triunghi, construim $ON \perp VM$, cu $N \in VM$. Deoarece $MN, BC \subset (VBC)$, $ON \perp VM$, $NM \perp BC$ și $OM \perp BC$, din a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, obținem $ON \perp (VBC)$.

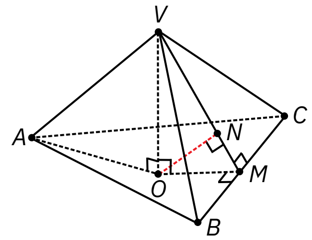


Figura 6

Atenție! Într-un tetraedru oarecare, punctele A, O și M din Figura 6 *nu sunt neapărat coliniare*. Totuși, dacă $VABC$ este tetraedru regulat, punctele A, O, M sunt coliniare. Explicați de ce!

Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele

Considerăm configurația geometrică din Figura 7, în care se dă un plan α, un punct O și o dreaptă d în planul α și punctul $A \in d$.

Dacă sunt îndeplinite ipotezele suplimentare corespunzătoare, concluzia teoremei celor trei perpendiculare, respectiv a fiecăreia dintre cele două reciproce ale teoremei poate fi exprimată și în termeni de distanțe, astfel:

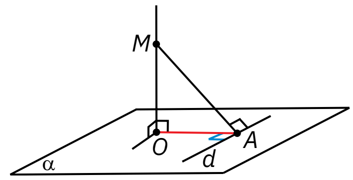


Figura 7

- teorema celor trei perpendiculare afirmă că distanța de la punctul M la dreapta d este egală cu MA: $d(M, d) = MA$;
- prima reciprocă a teoremei afirmă că distanța de la punctul O la dreapta d este egală cu OA: $d(O, d) = OA$;
- a doua reciprocă a teoremei afirmă că distanța de la punctul M la planul α este egală cu MO: $d(M, \alpha) = MO$.

Deducem că:

a. pentru a calcula distanța de la un punct la o dreaptă putem folosi teorema celor trei perpendiculare sau prima reciprocă a teoremei;
b. pentru a calcula distanța de la un punct la un plan putem folosi a doua reciprocă a teoremei;
c. pentru a calcula distanța dintre două plane paralele, putem calcula distanța de la un punct al unuia dintre plane la celălalt, folosind a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare.

Activitate independentă

Studiați cele două probleme rezolvate din paragraful următor și identificați tehnicile de utilizare a teoremei celor trei perpendiculare și a celor două reciproce ale sale pentru calculul distanței de la un punct la o dreaptă, de la un punct la un plan sau a distanței dintre două plane paralele.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 3\sqrt{13}$ cm. Dacă $M = pr_{BD}C$ (Figura 8), determinați:

a. $d(C', BD)$; **b.** $d(B', (CC'M))$; **c.** $d(C, (C'BD))$.

Rezolvare

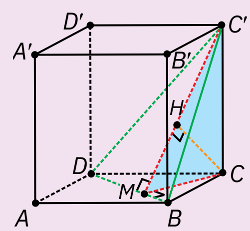


Figura 8

a. Din $CC' \perp (ABC)$, $CM \perp BD$ și $CM, BD \subset (ABC)$, folosind teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $C'M \perp BD$, deci $d(C', BD) = C'M$. Din triunghiul dreptunghic BCD, $\sphericalangle BCD = 90°$, obținem $BD = 12$ cm și $CM = \dfrac{CB \cdot CD}{BD} = 3\sqrt{3}$ cm.

Din $CC' \perp (ABC)$ și $CM \subset (ABC)$ rezultă $CC' \perp CM$, deci triunghiul $CC'M$ este dreptunghic în C. Obținem $C'M = \sqrt{C'C^2 + CM^2} = 12$ cm. Așadar, $d(C', BD) = 12$ cm.

b. Cum $BB' \not\subset (CC'M)$, $BB' \parallel CC'$ și $CC' \subset (CC'M)$, deducem că $BB' \parallel (CC'M)$, deci $d(B', (CC'M)) = d(B, (CC'M))$. Deoarece dreapta BM este perpendiculară pe dreptele concurente CM și $C'M$, rezultă că $BM \perp (CC'M)$, ceea ce implică $d(B, (CC'M)) = BM$. În triunghiul BCD, dreptunghic în C, din teorema catetei rezultă că $BC^2 = BD \cdot BM$. Obținem $BM = 3$ cm, deci $d(B', (CC'M)) = d(B, (CC'M)) = BM = 3$ cm.

c. În triunghiul dreptunghic $CC'M$ construim înălțimea CH, $H \in MC'$. Obținem $CH = \frac{CC' \cdot CM}{C'M} = \frac{3\sqrt{39}}{4}$ cm.

Deoarece $CH \perp C'M$, $CM \perp BD$, $C'M \perp BD$, $C'M$ și $BD \subset (C'BD)$, din reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $CH \perp (C'BD)$, deci $d(C,(C'BD)) = CH = \frac{3\sqrt{39}}{4}$ cm.

2. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, M este proiecția punctului V pe BC, $AC \cap BD = \{O\}$, $OH \perp VM$, $H \in VM$, și $OM \cap AD = \{E\}$. Planul (TAD) este paralel cu planul (VBC) (Figura 9). Știind că $VA = AB = 12$ cm, determinați:

a. $d(O, BC)$; **b.** $d(O, (VBC))$; **c.** $d(E, (VBC))$; **d.** $d(A, (VBC))$; **e.** $d((TAD), (VBC))$.

Rezolvare

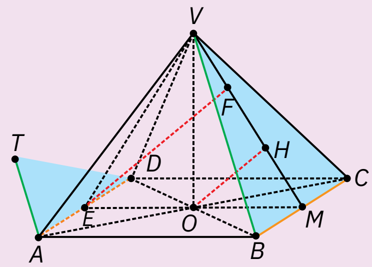


Figura 9

a. Deoarece $VABCD$ este piramidă regulată și $\{O\} = AC \cap BD$, punctul O este centrul pătratului $ABCD$, deci VO este înălțimea piramidei. Din $VO \perp (ABC)$, $VM \perp BC$, $OM \subset (ABC)$ și $BC \subset (ABC)$, aplicând prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $OM \perp BC$, deci $d(O, BC) = OM$.
Cum $VB = VC = BC$ și $VM \perp BC$, rezultă că segmentul VM este și mediană în triunghiul echilateral VBC, deci M este mijlocul segmentului BC. Deducem că OM este linie mijlocie în triunghiul CAB, deci $d(O, BC) = OM = AB : 2 = 6$ cm.

b. Deoarece $VO \perp (ABC)$ și $OM \subset (ABC)$, rezultă $VO \perp OM$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul VOM, obținem $VO = 6\sqrt{2}$ cm. Cum $OH \perp VM$, rezultă că OH este înălțime în triunghiul VOM, deci $OH = VO \cdot OM : VM = 2\sqrt{6}$ cm. Deoarece $OH \perp VM$, $VM \perp BC$, $OM \perp BC$, $VM \subset (VBC)$ și $BC \subset (VBC)$, aplicând a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $OH \perp (VBC)$ și atunci $d(O,(VBC)) = OH = 2\sqrt{6}$ cm.

c. Cum $OM \perp BC$, $OM \cap AD = \{E\}$ și $AD \parallel BC$, rezultă că $OE \perp AD$. Așadar, $OM = OE$, deci O este mijlocul segmentului ME. În triunghiul VEM, fie $EF \parallel OH$, cu $F \in VM$. Segmentul OH este linie mijlocie în triunghiul EFM; în consecință, $EF = 2 \cdot OH = 4\sqrt{6}$ cm. Deoarece $EF \parallel OH$ și $OH \perp (VBC)$, rezultă că $EF \perp (VBC)$. Prin urmare, $d(E,(VBC)) = EF = 4\sqrt{6}$ cm.

d. Cum $AD \not\subset (VBC)$, $AD \parallel BC$, $BC \subset (VBC)$, rezultă că $AD \parallel (VBC)$, deci $d(A,(VBC)) = d(E,(VBC)) = 4\sqrt{6}$ cm.

e. Deoarece planele (TAD) și (VBC) sunt paralele, iar $A \in (TAD)$, rezultă că $d((TAD),(VBC)) = d(A,(VBC)) = 4\sqrt{6}$ cm.

Probleme propuse

1. În fiecare dintre figurile 10-12, se știe că $VA \perp (ABC)$. Determinați $d(V, BC)$ și $d(A, (VBC))$.

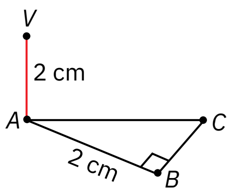


Figura 10

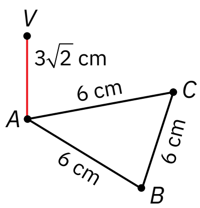


Figura 11

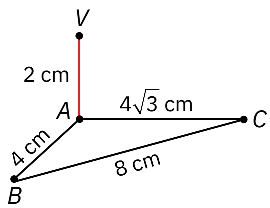


Figura 12

2. Punctul O este centrul pătratului $ABCD$. Știind că $VO \perp (ABC)$, $VO = 8$ cm și $AB = 12$ cm, calculați:

a. $d(V, DC)$; **b.** $d(O, (VDC))$; **c.** $d(B, (VDC))$.

3. Pe planul dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 8\sqrt{3}$ cm și $AD = 8$ cm, se ridică perpendiculara VA, cu $VA = 8$ cm.

a. Arătați că $CD \perp (VAD)$ și că $\sphericalangle(VD, (ABC)) = 45°$.

b. Determinați $d(V, BD)$, $d(A, (VBD))$ și măsura unghiului dintre planele (VBC) și (ABC).

4. De aceeași parte a planului rombului $MNPQ$ se ridică perpendicularele AM și BP, astfel încât $AM = BP = 6$ cm. Știind că $MN = 4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle NMQ = 60°$, iar $MP \cap NQ = \{O\}$, determinați:

a. $d(A, QN)$; **b.** $\sphericalangle((AQN), (MNP))$; **c.** $d(M, (AQN))$; **d.** $\sphericalangle((AQN), (BQN))$.

5. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea $VO = 4\sqrt{3}$ cm și $AB = 24$ cm. Determinați:

a. $\text{ctg}(VA, (ABC))$; **b.** $d(V, BC)$; **c.** $d(O, (VBC))$; **d.** $\sphericalangle((VBC), (ABC))$.

6. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AC' = 12\sqrt{3}$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$, $CH \perp C'O$, $H \in C'O$. Prin punctul C construim planul α paralel cu planul $(C'BD)$. Determinați:
   a. $d(C', BD)$; b. $\text{tg}((C'BD), (ABC))$; c. $d(\alpha, (C'BD))$; d. $d(A, (C'BD))$.

7. În Figura 13 este reprezentată o platformă în formă de pătrat $ABCD$, cu centrul în O și cu latura de 18 m. Segmentul NO reprezintă o antenă de telefonie mobilă amplasată perpendicular pe planul pătratului $ABCD$. Antena este ancorată cu patru cabluri: NA, NC, ME și MF, unde M, E și F sunt mijloacele segmentelor NO, AD, respectiv BC. Cablul MF face cu planul pătratului $ABCD$ un unghi de 45°.
   a. Calculați înălțimea antenei NO.
   b. Determinați $\sphericalangle((MEF), (NAC))$ și distanța de la punctul B la dreapta ME.

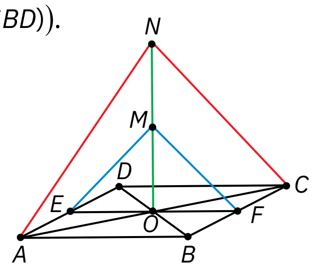


Figura 13

8. În conul circular drept cu secțiunea axială VAB, punctul O este centrul bazei, $VO = 4$ cm și $OA = 6$ cm. Punctul C aparține cercului bazei, astfel încât $\sphericalangle ABC = 30°$. Notăm cu M mijlocul coardei BC. Determinați:
   a. $d(V, BC)$; b. $d(O, (VBC))$; c. $\text{ctg}(AC, VM)$; d. $d(A, (VBC))$.

9. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 18$ cm, $A'B' = 12$ cm, $A'A = 3\sqrt{5}$ cm, O, O' centrul bazei mari, respectiv centrul bazei mici a trunchiului. Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul, M mijlocul laturii AD și M' punctul de intersecție dintre VM și $A'D'$. Determinați:
   a. VO; b. $M'M$; c. $d(O, (ADA'))$; d. $\sphericalangle((ADA'), (ABC))$.

10. $ABB'A'$ și $CDD'C'$ sunt două secțiuni axiale ale unui cilindru circular drept, O și O' sunt centrele bazelor acestuia, $OO' = 3$ cm. Dacă $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, OA)$, iar $OA = 6$ cm și $\sphericalangle((ABB'), (CDD')) = 60°$, determinați:
   a. $d(O', AC)$; b. $\sphericalangle((O'AC), (ABC))$; c. $d(O, (O'AC))$; d. $d(B, (ACC'))$.

11. În tetraedrul $ABCD$, punctele E, F, G sunt proiecțiile punctului A pe muchiile BC, CD, respectiv BD, iar $I = \text{pr}_{(BCD)}A$. Știind că punctul A este egal depărtat de laturile triunghiului BCD, arătați că:
   a. $IE \perp BC$; b. $\sphericalangle BCI \equiv \sphericalangle DCI$; c. I este centrul cercului înscris în ΔBCD.

12. Fie tetraedrul $VABC$, cu $VA \perp (ABC)$ și $VB \perp BC$, în care $M = \text{pr}_{VB}A$ și $N = \text{pr}_{CV}A$. Arătați că:
   a. $AB \perp BC$; b. $AM \perp (VBC)$; c. $MN \perp VC$; d. $VN \cdot VC = VM \cdot VB$.

13. Patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, iar $VA \perp (ABC)$. Fie M, N și P proiecțiile punctului A pe dreptele VB, VC, respectiv VD. Arătați că:
   a. $MN \perp VC$; b. $(AMN) \perp VC$; c. punctele A, M, N, P sunt coplanare.

14. Fie piramida $VABC$, cu $\sphericalangle AVB = \sphericalangle AVC = \sphericalangle BVC = 90°$. Fie $M = \text{pr}_{BC}V$, $E = \text{pr}_{AB}V$ și $H = \text{pr}_{AM}V$. Arătați că:
   a. $AM \perp BC$; b. $VH \perp (ABC)$; c. $HE \perp AB$; d. $CE \perp AB$;
   e. punctul H este ortocentrul triunghiului ABC; f. $\mathcal{A}^2_{ABC} = \mathcal{A}^2_{VAB} + \mathcal{A}^2_{VBC} + \mathcal{A}^2_{VAC}$.

Autoevaluare

1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, punctul O este centrul bazei $ABCD$. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
   a. $AC \perp (BDB')$; b. $A'B \perp BC$; c. $A'O \perp BD$. (3p)

2. În tetraedrul $ABCD$, cu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, notăm cu H proiecția punctului A pe planul (BCD). Știind că H se află în interiorul triunghiului BCD, arătați că:
   a. $CD \perp (ABH)$; b. H este ortocentrul triunghiului BCD; c. $AD \perp BC$. (3p)

3. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu punctul O centrul bazei, $VO = 6\sqrt{3}$ cm și $AB = 12$ cm. Fie $M = \text{pr}_{BC}O$ și $H = \text{pr}_{VM}O$. Determinați:
   a. VM; b. $d(O, (VBC))$; c. $d(H, VC)$. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 30 de minute.

Recapitulare și evaluare

Elemente ale geometriei în spațiu

1. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, iar O este centrul bazei $ABCD$. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a. $O \in (VCD)$; **b.** $O \in (VBD)$;
c. $D \in (ABC)$; **d.** $AD \subset (VBD)$;
e. $AC \subset (ABD)$; **f.** $VD \subset (VOB)$;
g. $AC \cap (VBD) = \{B\}$; **h.** $AC \cap (VBD) = \{O\}$;
i. $AD \cap (ABC) = \{A\}$; **j.** $(VOC) \cap (ABC) = AC$;
k. $(VOC) \cap (VAD) = VA$; **l.** $(VBC) \cap (VAD) = \{V\}$.

2. $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate:

a. O muchie paralelă cu AD este . . . .
b. O muchie concurentă cu AD este . . . .
c. O muchie necoplanară cu AD este . . . .
d. O față paralelă cu AD este . . . .
e. O față perpendiculară pe AD este . . . .
f. O muchie paralelă cu (ADD') este . . . .
g. O muchie perpendiculară pe (ADD') este . . . .
h. O față paralelă cu (ADD') este . . . .
i. O față perpendiculară pe (ADD') este . . . .

3. $ABCDMNPQ$ este un cub, iar O este centrul bazei $ABCD$. Asociați fiecăruia dintre unghiurile de mai jos acea literă **A**, **B**, ..., **F** care indică măsura sa:

a. $\sphericalangle(BP, MQ)$; **b.** $\sphericalangle(BP, MN)$;
c. $\sphericalangle(BP, AQ)$; **d.** $\sphericalangle(BP, CQ)$;
e. $\sphericalangle(BP, OQ)$; **f.** $\sphericalangle(BP, (ABC))$;
g. $\sphericalangle(BP, (CDM))$; **h.** $\sphericalangle(BP, (BDN))$;
i. $\sphericalangle(BP, (ADM))$; **j.** $\sphericalangle((ABP), (ABD))$;
k. $\sphericalangle((ABP), (NBC))$; **l.** $\sphericalangle((ABP), (NCD))$.

A. 0°; **B.** 30°; **C.** 45°;
D. 60°; **E.** 90°; **F.** alt răspuns.

4. $ABCD$ este un tetraedru regulat cu muchia de 12 cm, iar M și N sunt mijloacele muchiilor AC, respectiv AD. Asociați fiecăreia dintre distanțele de mai jos acea literă **A**, **B**, ..., **F** care indică valoarea sa:

a. $d(D, M)$; **b.** $d(A, CD)$;
c. $d(N, BD)$; **d.** $d(N, BC)$;
e. $d(A, (BCD))$; **f.** $d(N, (ABC))$;
g. $d(N, (MBD))$; **h.** $d(MN, CD)$;
i. $d(MN, (BCD))$.

A. $6\sqrt{2}$ cm; **B.** $3\sqrt{3}$ cm; **C.** $6\sqrt{3}$ cm;
D. $2\sqrt{6}$ cm; **E.** $4\sqrt{6}$ cm; **F.** alt răspuns.

5. Un con circular drept are raza $R = 6$ cm și generatoarea $G = 12$ cm. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate.

a. Perimetrul secțiunii axiale este . . . . . . cm.
b. Aria bazei conului este . . . . . . cm^2.
c. Aria unei secțiuni paralele cu planul bazei, care trece prin mijlocul înălțimii conului, este . . . . . . cm^2.
d. Lungimea înălțimii conului este . . . . . . cm.
e. Unghiul sectorului de disc ce reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului are măsura de . . . . . .°.

6. $ABCD$ este un pătrat cu latura de $\sqrt{3}$ cm. De aceeași parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AM, BN, CP și DQ pe plan, cu $AM = BN = 3$ cm și $CP = DQ = 1$ cm. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate.

a. $\sphericalangle(MD, (ABC)) =$ . . . . . .°;
b. $\sphericalangle(AC, (BDQ)) =$ . . . . . .°;
c. $\sphericalangle((ADM), (BCD)) =$ . . . . . .°;
d. $\sphericalangle((ACP), (BDQ)) =$ . . . . . .°;
e. $\sphericalangle((ABM), (CDM)) =$ . . . . . .°;
f. $\sphericalangle((ABP), (CDP)) =$ . . . . . .°;
g. $\sphericalangle((MNQ), (BCP)) =$ . . . . . .°;
h. $d(P, (ABM)) =$ . . . . . . cm;
i. $d(A, (BDQ)) =$ . . . . . . cm;
j. $d((ADQ), (BCP)) =$ . . . . . . cm;
k. $\text{pr}_{(ABC)}MP =$ . . . . . . cm;
l. $\text{pr}_{(ADQ)}BQ =$ . . . . . . cm.

7. $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu baza pătrat, cu muchia bazei $AB = 4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $AA' = 4$ cm (Figura 1).

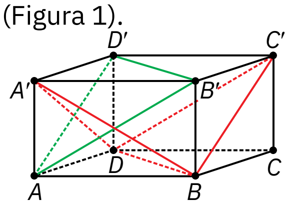


Figura 1

a. Calculați aria secțiunii diagonale $BDD'B'$.
b. Arătați că planele $(AB'D')$ și $(C'BD)$ sunt paralele.
c. Demonstrați că planele $(A'BD)$ și $(C'BD)$ sunt perpendiculare.

8. $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată (Figura 2). Punctul O este centrul bazei ABC, M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC, iar S și T sunt proiecțiile lui O pe VM, respectiv VN. Se știe că $OM = 12$ cm și $VM = 20$ cm.

a. Arătați că $VO = 16$ cm.
b. Demonstrați că dreptele MN și VB sunt perpendiculare.
c. Determinați lungimea proiecției segmentului ST pe planul (ABC).

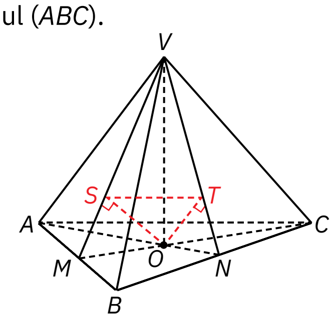


Figura 2

9. $ABCD$ este un tetraedru regulat (Figura 3). Punctele P și Q se află pe muchia AB, astfel încât triunghiul PCD să aibă cel mai mic perimetru posibil, iar triunghiul QCD să aibă cea mai mică arie posibilă.
   - a. Demonstrați că $PC = PD$ și $QC = QD$.
   - b. Arătați că dreapta AB este perpendiculară pe planul (PCD).
   - c. Demonstrați că punctele P și Q coincid.

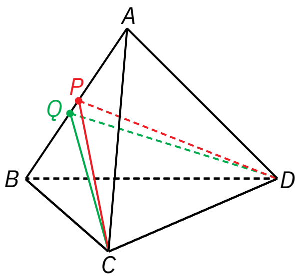


Figura 3

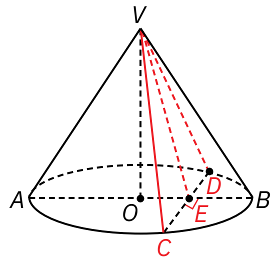


Figura 4

10. Triunghiul VAB este o secțiune axială a unui con circular drept, cu raza de 6 cm și înălțimea de 4 cm (Figura 4). Punctul O este centrul bazei, E este mijlocul segmentului OB, iar $C, D \in \mathcal{C}(O, 6\text{ cm})$ sunt astfel încât $E \in CD$ și $CD \perp AB$.
   - a. Determinați măsura unghiului format de dreptele VE și CD.
   - b. Determinați distanța de la punctul O la planul (VCD).
   - c. Calculați aria triunghiului VCD.

11. Fie O și O' centrele bazelor unui cilindru circular drept cu raza de 7 cm și înălțimea de 2 cm (Figura 5). $ABB'A'$ este o secțiune axială a cilindrului, $C \in \mathcal{C}(O, 7\text{ cm})$ și $C' \in \mathcal{C}(O', 7\text{ cm})$ sunt astfel încât $A'CBC'$ este pătrat, iar M este mijlocul segmentului BC. Planul $(OO'M)$ intersectează dreapta $A'C'$ în M'.
   - a. Arătați că unghiurile ABC și $B'A'C'$ sunt congruente.
   - b. Demonstrați că M' este mijlocul segmentului $A'C'$.
   - c. Demonstrați că latura pătratului are lungimea de 10 cm.

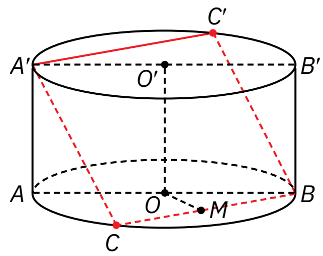


Figura 5

Testul 1

1. $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu muchia de 4 cm. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate:

(1p) a. $\sphericalangle(AA', BD) = \ldots\ldots{}^\circ$;

(1p) b. $\sphericalangle(A'AB, (A'AC)) = \ldots\ldots{}^\circ$;

(1p) c. $d(C', BD) = \ldots\ldots$ cm;

(1p) d. $d(C', (BDD')) = \ldots\ldots$ cm;

(1p) e. $\text{pr}_{(BDD')}AA' = \ldots\ldots$ cm.

2. $ABCD$ este un tetraedru regulat, O este centrul feței BCD, iar M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv CD.

(1p) a. Realizați o figură corespunzătoare.

(1p) b. Demonstrați că $(ABN) \perp (BCD)$.

(1p) c. Arătați că $MO \nparallel (ACD)$.

(1p) d. Dacă $\{P\} = AO \cap MN$, arătați că $MP = PN$.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Testul 2

1. $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral. Toate muchiile prismei au 6 cm. Completați spațiile punctate, astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate:

(1p) a. $\sphericalangle(AA', BC) = \ldots\ldots{}^\circ$;

(1p) b. $\sphericalangle((ABB'), (BCC')) = \ldots\ldots{}^\circ$;

(1p) c. $d(A', BC) = \ldots\ldots$ cm;

(1p) d. $d((A', (ABB')) = \ldots\ldots$ cm;

(1p) e. $\text{pr}_{(BCC')}A'B = \ldots\ldots$ cm.

2. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu toate muchiile egale. M este mijlocul muchiei VA, iar O și Q sunt centrele fețelor $ABCD$, respectiv VCD.

(1p) a. Realizați o figură corespunzătoare.

(1p) b. Arătați că $OM \parallel (VCD)$.

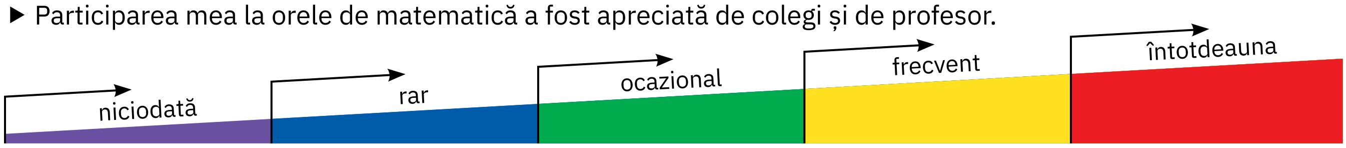
(1p) c. Demonstrați că $OQ \perp (VCD)$.

(1p) d. Arătați că triunghiul OMQ este dreptunghic.

Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevilor

- Am fost preocupat(ă) să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



U5 Arii și volume ale unor corpuri geometrice

Determinarea ariei unui corp ne este utilă atunci când dorim să știm de cât material avem nevoie pentru a acoperi acel corp; de exemplu, de câte plăcuțe din sticlă specială a fost nevoie pentru a acoperi sfera cu un diametru de 22 de metri care face parte din monumentul Bayterek, din Kazahstan. Sfera își schimbă culoarea în funcție de lumina solară și reprezintă oul de aur al păsării magice Samruk.

Aflarea volumului unui obiect ne ajută să determinăm cantitatea necesară pentru a umple acel obiect, ca, de exemplu, cantitatea de apă care poate umple un acvariu.

5.1

Lecția 1: Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul)

Cuvinte-cheie

distanțe | unghiuri | corpuri geometrice | strategii de rezolvare a problemelor

Utilitate

În inginerie, pentru modelarea 3D, programele de proiectare asistată (CAD) folosesc măsurători precise de distanțe și unghiuri între fețele corpurilor pentru a crea piese sau structuri complexe.

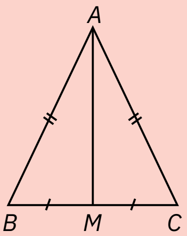
Unghiurile dintre segmentele brațului unui robot trebuie calculate pentru ca acesta să poată atinge anumite puncte în spațiu, iar măsurarea distanțelor și a unghiurilor dintre obstacole este esențială pentru a elabora algoritmii de navigație, care calculează traseele robotului în spațiul tridimensional.

1.1. Determinarea distanțelor pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

De reținut

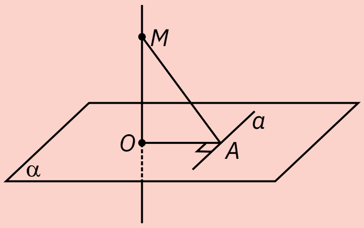
1. În cele ce urmează, facem o scurtă recapitulare a principalelor metode prin care putem identifica diverse tipuri de distanțe în spațiu:

A.



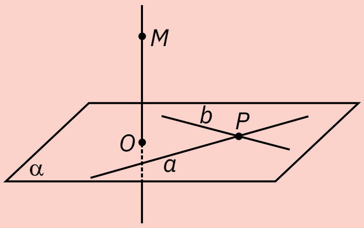
$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC,\ AB = AC\\ M \in BC,\ BM = MC\end{array}\right\} \Rightarrow d(A, BC) = AM$$

B.



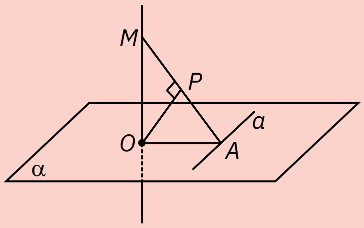
$$\left.\begin{array}{l}MO \perp \alpha,\ MO \cap \alpha = \{O\}\\ a \subset \alpha,\ OA \perp a,\ A \in a\end{array}\right\} \overset{T_3\perp}{\Rightarrow} d(M, a) = MA$$

C.



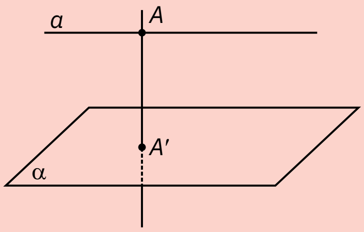
$$\left.\begin{array}{l}MO \cap \alpha = \{O\}\\ a, b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\}\\ MO \perp a,\ MO \perp b\end{array}\right\} \Rightarrow d(M, \alpha) = MO$$

D.



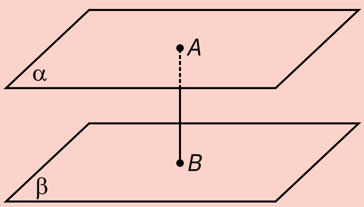
$$\left.\begin{array}{l}MO \cap \alpha = \{O\}\\ a \subset \alpha,\ OA \perp a,\ A \in a\\ MO \perp OA\\ OP \perp MA,\ P \in MA\end{array}\right\} \overset{R_2T_3\perp}{\Rightarrow} d(O, (M, a)) = OP$$

E.



$$\left.\begin{array}{l}a \parallel \alpha\\ A \in a \text{ (arbitrar)}\\ \mathrm{pr}_{\alpha}A = A'\end{array}\right\} \Rightarrow d(a, \alpha) = d(A, \alpha) = AA'$$

F.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ A \in a \text{ (arbitrar)}\\ \mathrm{pr}_{\alpha}A = B\end{array}\right\} \Rightarrow d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = AB$$

2. Pentru calculul distanțelor, vom folosi metodele învățate în clasa a VII-a:
   - cu teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic, se poate afla lungimea unei laturi știindu-le pe celelalte două;
   - lungimea înălțimii unui triunghi se poate determina exprimând în două moduri aria acestuia;
   - rapoartele lungimilor laturilor a două triunghiuri asemenea permit calculul lungimii unui segment ca termen necunoscut al unei proporții;
   - folosirea valorilor funcțiilor trigonometrice ale unor unghiuri cunoscute permite aflarea lungimilor unor segmente;
   - prin rezolvarea unei ecuații se poate determina lungimea unui segment.
3. Într-o problemă în care se cere determinarea unei anumite distanțe, vom parcurge două etape:
   - identificarea segmentului a cărui lungime este distanța respectivă;
   - calculul lungimii acestui segment.

Problemele rezolvate prezintă câteva exemple tipice de determinare a unor distanțe pe fețele sau în interiorul unor corpuri geometrice studiate. Puteți exersa apoi deprinderile dobândite, rezolvând problemele propuse în finalul lecției.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative 1

1. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 9$ cm (vezi Figura 1). Determinați distanțele de la punctul A la:
   a. punctul C; **b.** punctul C'; **c.** dreapta BB'; **d.** dreapta BC; **e.** dreapta $A'B$;
   f. dreapta $B'C'$; **g.** planul $(A'C'C)$; **h.** planul (BCC'); **i.** planul $(A'BC)$.

Rezolvare

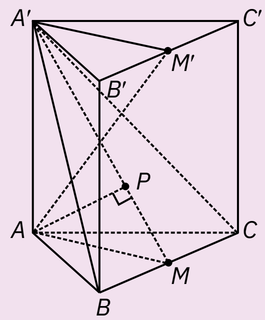


Figura 1

a. Triunghiul ABC fiind echilateral, avem $AC = AB$. Astfel, $d(A, C) = AC = 6$ cm.

b. Triunghiul ACC' este dreptunghic în C și, folosind teorema lui Pitagora, obținem $d(A, C') = AC' = 3\sqrt{13}$ cm.

c. Cum $AB \perp BB'$, înseamnă că $d(A, BB') = AB = 6$ cm.

d. Distanța de la A la BC este egală cu înălțimea triunghiului echilateral ABC:
$d(A, BC) = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.

e. Distanța de la A la $A'B$ este egală cu înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic ABA': $d(A, A'B) = \dfrac{AB \cdot AA'}{A'B} = \dfrac{18\sqrt{13}}{13}$ cm.

f. Fie M' mijlocul muchiei $B'C'$. Avem $AA' \perp (A'B'C')$, $A'M' \perp B'C'$, $A'M', B'C' \subset (A'B'C')$ și, conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $AM' \perp B'C'$. Astfel, $d(A, B'C') = AM' = \sqrt{AA'^2 + A'M'^2} = 6\sqrt{3}$ cm.

g. Evident, punctul A aparține planului $(A'C'C)$, așadar $d(A, (A'C'C)) = 0$.

h. Fie M mijlocul muchiei BC. Din $BB' \perp (ABC)$ obținem $BB' \perp AM$. În plus, $AM \perp BC$ și dreptele BB' și BC sunt concurente, prin urmare $AM \perp (BCC')$. Rezultă că $d(A, (BCC')) = AM = 3\sqrt{3}$ cm.

i. Construim $AP \perp A'M$, cu $P \in A'M$. Triunghiul BCA' este isoscel cu baza BC, de unde deducem că $A'M \perp BC$. Avem: $AP \perp A'M$, $A'M \perp BC$, $AM \perp BC$, cu $A'M$, $BC \subset (A'BC)$; din a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, obținem $AP \perp (A'BC)$. Segmentul AP este înălțime în triunghiul dreptunghic $A'AM$. Astfel, $d(A, (A'BC)) = AP = \dfrac{AM \cdot AA'}{A'M} = \dfrac{9}{2}$ cm.

2. Se consideră un con circular drept cu raza $R = 5$ cm și generatoarea $G = 13$ cm. Triunghiul isoscel VAB de bază AB este o secțiune axială a sa, iar C este un punct pe cercul bazei, astfel încât măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este de două ori mai mare decât măsura arcului $\overset{\frown}{BC}$ (vezi Figura 2).
   a. Calculați distanța de la vârful conului la planul bazei.
   b. Determinați distanța de la punctul B la dreapta VA.
   c. Aflați distanța de la punctul B la planul (VAC).

Rezolvare

a. Distanța de la V la planul bazei este VO, înălțimea conului. Din $G^2 = R^2 + h^2$ obținem $d(V, (ABC)) = h = 12$ cm.

b. Fie B' proiecția punctului B pe dreapta VA. Exprimăm în două moduri aria triunghiului VAB: $\mathcal{A}_{VAB} = \dfrac{VO \cdot AB}{2} = \dfrac{BB' \cdot VA}{2}$. Obținem $d(B, VA) = BB' = \dfrac{VO \cdot AB}{VA} = \dfrac{120}{13}$ cm.

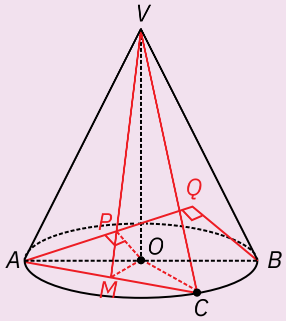


Figura 2

c. Considerăm punctele: M – mijlocul segmentului AC, P – proiecția punctului O pe dreapta VM, Q – proiecția punctului B pe dreapta AP. Triunghiurile VAC și OAC sunt isoscele, de bază AC; atunci $AC \perp VM$, $AC \perp OM$ și, cum VM și OM sunt concurente, rezultă că $AC \perp (VOM)$. În particular, $AC \perp OP$. Avem și $OP \perp VM$, iar VM și AC sunt concurente, prin urmare $OP \perp (VAC)$. În planul (ABP), BQ și OP sunt perpendiculare pe dreapta AP, deci sunt paralele. Deducem că $BQ \perp (VAC)$. Folosind reciproca teoremei liniei mijlocii în triunghiul ABQ (sau asemănarea triunghiurilor AOP și ABQ) obținem $BQ = 2OP = 2\dfrac{VO \cdot OM}{VM}$. Din ipoteza problemei, arcul $\widehat{BC}$ are măsura de $60°$, deci $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{BC} = 30°$.

Triunghiul dreptunghic MOA are $\widehat{OAM} = 30°$, $\widehat{OMA} = 90°$, prin urmare $OM = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{5}{2}$ cm. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul VOM găsim $VM = \dfrac{\sqrt{601}}{2}$ cm. În concluzie, $d\big(B, (VAC)\big) = BQ = \dfrac{120}{\sqrt{601}}$ cm.

3. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $VA = 3\sqrt{2}$ cm (vezi Figura 3). Pe muchiile VA, AB și AC se consideră punctele Q, S, respectiv T, astfel încât $VQ = \sqrt{2}$ cm, iar $AS = AT = 4$ cm.

a. Arătați că dreptele ST și BC sunt paralele și aflați distanța dintre ele.

b. Demonstrați că dreapta ST este paralelă cu planul (VBC) și determinați $d(ST, (VBC))$.

c. Arătați că planele (QST) și (VBC) sunt paralele și aflați distanța dintre ele.

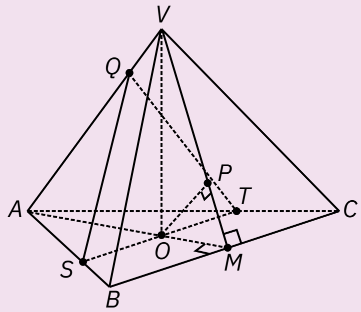


Figura 3

Rezolvare

a. Întrucât $\dfrac{AS}{AB} = \dfrac{AT}{AC} = \dfrac{2}{3}$, reciproca teoremei lui Thales, aplicată în triunghiul ABC, ne spune că $ST \parallel BC$.

Dacă O este centrul triunghiului echilateral ABC, atunci $\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{AS}{AB}$, prin urmare $SO \parallel BC$. Prin S putem construi o singură paralelă la BC, deci O se află pe segmentul ST. Notăm cu M mijlocul muchiei BC; atunci $AM \perp BC$ și, cum $ST \parallel BC$, segmentul OM va da distanța dintre dreptele ST și BC, fiind perpendicular pe ambele. Deducem că $d(ST, BC) = OM = \dfrac{1}{3}AM = \sqrt{3}$ cm.

b. Am văzut că $ST \parallel BC$, cu $BC \subset (VBC)$ și $ST \not\subset (VBC)$, prin urmare $ST \parallel (VBC)$.
Pentru a calcula distanța dintre dreapta ST și planul (VBC), este suficient să determinăm distanța de la punctul $O \in ST$ la planul (VBC). Fie P proiecția punctului O pe dreapta VM; avem: $OP \perp VM$, $VM \perp BC$ și $OM \perp BC$, cu $VM, BC \subset (VBC)$. Din a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $OP \perp (VBC)$, așadar $d(O, (VBC)) = OP$. Segmentul OP este înălțime în triunghiul dreptunghic VOM, cu $\widehat{VOM} = 90°$, deci $OP = \dfrac{OV \cdot OM}{VM}$.

Se arată că $VO = \sqrt{6}$ cm, $VM = 3$ cm, prin urmare $d\big(ST, (VBC)\big) = OP = \sqrt{2}$ cm.

c. Deoarece $\dfrac{AS}{AB} = \dfrac{AQ}{AV} = \dfrac{2}{3}$, reciproca teoremei lui Thales, aplicată în triunghiul VAB, ne spune că $QS \parallel VB$.

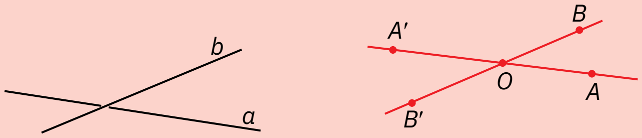
Cum $VB \subset (VBC)$, $QS \not\subset (VBC)$, rezultă că $QS \parallel (VBC)$. De la punctul anterior, știm că $ST \parallel (VBC)$. Dreptele QS și ST fiind concurente, determină planul (QST) și, astfel, $(QST) \parallel (VBC)$. Pentru a calcula distanța dintre cele două plane, este suficient să determinăm distanța de la punctul $O \in (QST)$ la planul (VBC); or, am văzut mai sus, aceasta este $OP = \sqrt{2}$ cm.

1.2. Determinarea măsurilor unor unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate

De reținut

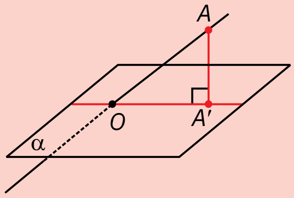
1. Reamintim cum se determină diferitele tipuri de unghiuri formate de drepte și plane:

A.



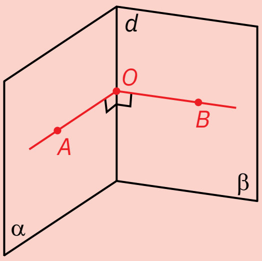
$$\left.\begin{array}{l} OA \parallel a \\ OB \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(a, b) = \min\left\{\sphericalangle AOB,\ \sphericalangle A'OB\right\}$$

B.



- $\left.\begin{array}{l} OA \cap \alpha = \{O\} \\ \mathrm{pr}_{\alpha} A = A'\ (\neq O) \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(OA, \alpha) = \widehat{AOA'}$
- $OA \perp \alpha \Rightarrow \sphericalangle(OA, \alpha) = 90°$

C.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d,\ O \in d \\ AO \perp d,\ AO \subset \alpha \\ BO \perp d,\ BO \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \min\left\{\sphericalangle AOB,\ 180° - \sphericalangle AOB\right\}$$

2. Pentru calculul efectiv al măsurilor unor unghiuri, vom folosi metodele învățate în clasele a VI-a și a VII-a:
- gândim unghiul ca pe un unghi al unui triunghi ale cărui laturi le putem afla și verificăm dacă avem de-a face cu un triunghi special: echilateral, dreptunghic isoscel, dreptunghic cu ipotenuza egală cu dublul unei catete;
- determinăm valoarea unei funcții trigonometrice a unghiului căutat.

3. Într-o problemă care cere determinarea măsurii unui unghi dintre două plane, vom parcurge două etape:
- identificarea unghiului plan corespunzător unghiului dat;
- determinarea măsurii/valorii unei funcții trigonometrice a acestui unghi plan.

Problemele rezolvate prezintă câteva exemple tipice de determinare a unor măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul unor corpuri geometrice studiate. Puteți exersa, apoi, deprinderile dobândite, rezolvând problemele propuse în finalul lecției.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative 2

1. $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB = 9\sqrt{3}$ cm, $AD = AA' = 9$ cm. Determinați:
a. $\mathrm{tg}(\sphericalangle(BD', (ABC)))$; **b.** $\sphericalangle(AB', CD')$; **c.** $\cos(\sphericalangle(AB', CB'))$ (vezi Figura 4).

Rezolvare

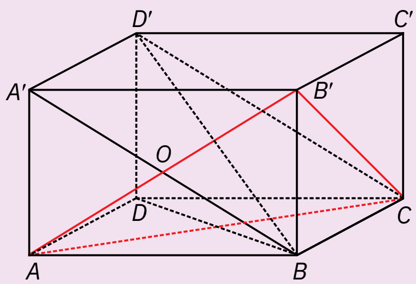


Figura 4

a. Cum $BD' \cap (ABC) = \{B\}$ și $\mathrm{pr}_{(ABC)} D' = D$, rezultă că $\mathrm{pr}_{(ABC)} BD' = BD$, așadar $\sphericalangle(BD', (ABC)) = \sphericalangle(BD', BD) = \sphericalangle D'BD$. Evident, triunghiul $DD'B$ este dreptunghic în D, astfel că $\mathrm{tg}(\sphericalangle D'BD) = \frac{DD'}{DB} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

Atenție! Măsura unghiului $\sphericalangle D'BD$ nu este de 30°. Cateta ce i se opune este egală cu jumătatea celeilalte catete, nu cu jumătatea ipotenuzei.

b. Segmentele BC și $A'D'$ sunt paralele și egale, deci $A'BCD'$ este paralelogram. Rezultă că $A'B \parallel D'C$, prin urmare $\sphericalangle(AB', CD') = \sphericalangle(AB', A'B) = \sphericalangle AOA'$, unde $\{O\} = AB' \cap A'B$. Diagonalele unui dreptunghi sunt egale și se înjumătățesc, așadar $AO = A'O = 9$ cm $= AA'$. Astfel, triunghiul OAA' este echilateral, cu $\sphericalangle AOA' = 60°$.

c. De fapt, trebuie determinat unghiul B' al triunghiului $B'AC$. Cum $AB' = AC = 18$ cm, $B'C = 9\sqrt{2}$ cm, triunghiul $B'AC$ este isoscel, cu baza $B'C$. Ducând mediana din A, care este și înălțime, obținem: $\cos(\sphericalangle AB'C) = \frac{B'C:2}{AB'} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Atenție! Nu este corect să spunem: $\sphericalangle AB'C = \sphericalangle AB'B + \sphericalangle BB'C = 60° + 45° = 105°$. Nu putem aduna măsurile unor unghiuri necoplanare!

2. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu muchia bazei $AB = 20$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei BC (Figura 5). Știind că $VM = 26$ cm, determinați:

a. $\text{tg}(\sphericalangle(VA, (ABC)))$; **b.** $\text{tg}(\sphericalangle(VA, (VBD)))$; **c.** $\sphericalangle(AB, (VBD))$.

Rezolvare

Calculăm înălțimea piramidei; obținem $VO = 24$ cm.

a. Cum $VA \cap (ABC) = \{A\}$ și $\text{pr}_{(ABC)}V = O$, rezultă că $\text{pr}_{(ABC)}VA = OA$, deci $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle(VA, OA) = \sphericalangle VAO$.

Din triunghiul dreptunghic VOA, avem: $\text{tg}(\sphericalangle VAO) = \dfrac{VO}{AO} = \dfrac{24}{10\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$.

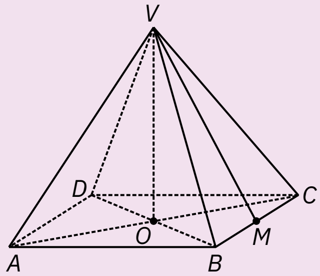


Figura 5

b. Observăm că $AO \perp BD$ (diagonalele unui pătrat sunt perpendiculare) și $AO \perp VO$ (pentru că $VO \perp (ABC)$ și $AO \subset (ABC)$), iar $BD \cap VO = \{O\}$, prin urmare $AO \perp (VBD)$, adică $\text{pr}_{(VBD)}A = O$. Cum $VA \cap (VBD) = \{V\}$, avem $\text{pr}_{(VBD)}VA = VO$, deci

$\sphericalangle(VA, (VBD)) = \sphericalangle(VA, VO) = \sphericalangle AVO$, iar $\text{tg}(\sphericalangle AVO) = \dfrac{AO}{VO} = \dfrac{10\sqrt{2}}{24} = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$.

c. Deoarece $AB \cap (VBD) = \{B\}$ și $\text{pr}_{(VBD)}A = O$, deducem că $\text{pr}_{(VBD)}AB = OB$. Astfel, $\sphericalangle(AB, (VBD)) = \sphericalangle(AB, OB) = \sphericalangle ABO = 45°$ (triunghiul ABD este isoscel, dreptunghic în A).

3. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu toate muchiile de lungime 12 cm. Determinați:

a. $\cos(\sphericalangle((VBC), (ABC)))$; **b.** $\sin(\sphericalangle((VBC), (VAD)))$; **c.** $\text{tg}(\sphericalangle((VBC), (VAC)))$.

Rezolvare

Notăm cu O centrul bazei $ABCD$, și cu M, N, P mijloacele muchiilor BC, AD, respectiv VC.

Segmentul VM are lungimea de $6\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea este $VO = 6\sqrt{2}$ cm (Figura 6).

a. Cum $(VBC) \cap (ABC) = BC$, $VM \perp BC$ $(VM \subset (VBC))$, $OM \perp BC$ $(OM \subset (ABC))$, înseamnă că $\sphericalangle((VBC), (ABC)) = \sphericalangle VMO$. Din triunghiul dreptunghic OMV, obținem

$\cos(\sphericalangle VMO) = \dfrac{OM}{VM} = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

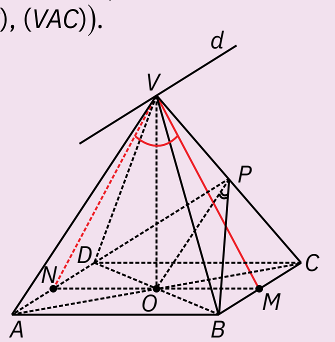


Figura 6

b. Fie d dreapta care trece prin V și este paralelă cu BC și AD; atunci d este coplanară atât cu BC, cât și cu AD, așadar $(VBC) \cap (VAD) = d$. Din $VM \perp BC$ și $BC \parallel d$, rezultă că $VM \perp d$ și, analog, $VN \perp d$.

În aceste condiții, $\sphericalangle((VBC), (VAD)) = \sphericalangle(VM, VN) = \sphericalangle MVN$.

Exprimăm în două moduri aria triunghiului VMN: $\mathcal{A}_{VMN} = \dfrac{VO \cdot MN}{2} = \dfrac{VM \cdot VN \cdot \sin(\sphericalangle MVN)}{2}$,

de unde $\sin(\sphericalangle MVN) = \dfrac{VO \cdot MN}{VM \cdot VN} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 12}{6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c. BP este mediană în triunghiul echilateral VBC, deci $BP \perp VC$. Însă $BD \perp VC$ ($BD \perp AC$, $BD \perp VO$, $AC \cap VO = \{O\} \Rightarrow$ $\Rightarrow BD \perp (VAC) \Rightarrow BD \perp VC$) și BD, BP sunt concurente, prin urmare $VC \perp (PBD)$, deci $VC \perp OP$. Astfel, $\sphericalangle((VBC), (VAC)) = \sphericalangle BPO$. Cum $BD \perp (VAC)$, avem $BD \perp OP$ și, din triunghiul dreptunghic BOP, obținem: $\text{tg}(\sphericalangle BPO) = \dfrac{OB}{OP} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$.

Probleme propuse

1. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 9$ cm. Pe AA' și CC' se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = 1$ cm, iar $CN = 7$ cm. Calculați:

a. $d(D', N)$; **b.** $d(C, M)$; **c.** $d(M, N)$.

2. Dreptunghiul $ABB'A'$ este o secțiune axială a unui cilindru circular drept, cu raza $R = 3$ cm și generatoarea $G = 8$ cm. Determinați lungimea drumului minim între punctele A și B', parcurs:

a. prin interiorul cilindrului; **b.** pe suprafața cilindrului.

3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 12 cm. Notăm cu M și N mijloacele muchiilor AB, respectiv CD. Aflați:

a. $d(A, BC)$; **b.** $d(M, BC)$; **c.** $d(M, AN)$.

4. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu muchia laterală $VA = 6\sqrt{2}$ cm. Se știe că distanța de la punctul A la dreapta VB este egală cu $6\sqrt{2}$ cm. Notăm cu O centrul bazei ABC. Determinați:

a. $d(A, (VBC))$; b. $d(V, (ABC))$; c. $d(O, (VBC))$.

5. $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic, cu $AB = 120$ cm, $AD = 30$ cm și $AA' = 40$ cm. Aflați:

a. $d(A, B'C)$; b. $d(B, (A'CD))$; c. $d(B, (AB'C))$.

6. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu înălțimea $VO = 12$ cm. Notăm cu N mijlocul muchiei AD. Știind că $VN = 13$ cm, calculați:

a. $d(O, (VBC))$; b. $d(N, (VBC))$; c. $d(A, (VBC))$.

7. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu muchia bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 8$ cm. Secționăm piramida cu planul $(A'B'C'D')$ paralel cu baza, unde $A' \in VA$, $B' \in VB$, $C' \in VC$, $D' \in VD$ și $VA' = \sqrt{34}$ cm. Determinați:

a. $d((A'B'C'), (ABC))$; b. $d(A', O)$; c. $d(A'D', BC)$.
(La punctele **a.** și **c.** demonstrați, în prealabil, paralelismul planelor/dreptelor.)

8. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are muchia bazei $AB = 20$ cm și înălțimea $VO = 24$ cm. În interiorul piramidei se consideră punctele P și Q, astfel încât P este egal depărtat de vârfurile piramidei, iar Q este egal depărtat de fețele piramidei. Determinați:

a. $d(P, (ABC))$; b. $d(Q, (ABC))$.

9. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu muchia bazei $AB = 18$ cm și muchia laterală $VA = 18$ cm. Notăm cu M, N, P și Q mijloacele muchiilor VA, VB, BC, respectiv AD. Aflați măsurile unghiurilor:

a. $\sphericalangle(AC, VD)$; b. $\sphericalangle(AB, NP)$; c. $\sphericalangle(MQ, NP)$.

10. Triunghiul isoscel VAB, cu $VA = VB = 25$ cm și $AB = 14$ cm, este secțiune axială a unui con circular drept.

a. Aflați tangenta unghiului format de o generatoare cu planul bazei conului.

b. Calculați sinusul unghiului format de generatoarele VA și VB.

11. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Determinați măsurile unghiurilor:

a. $\sphericalangle(AB, CC')$; b. $\sphericalangle(AB, (BCC'))$; c. $\sphericalangle((ABB'), (ACC'))$.

12. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinați măsurile unghiurilor:

a. $\sphericalangle(A'D, (BDD'))$; b. $\sphericalangle((A'B'D), (ABC))$; c. $\sphericalangle((BDD'), (ACC'))$.

13. $ABCD$ este un tetraedru regulat, cu muchia de 12 cm. Notăm cu M și N mijloacele muchiilor AB, respectiv CD. Determinați:

a. $\sphericalangle(MN, CD)$; b. $\sphericalangle(MN, BD)$; c. $\operatorname{tg}(\sphericalangle(MN, (BCD)))$.

14. $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este o prismă hexagonală regulată. Determinați măsurile unghiurilor:

a. $\sphericalangle((ABB'), (CFF'))$; b. $\sphericalangle((ABB'), (CDD'))$; c. $\sphericalangle((ACC'), (E'CD))$.

15. Se consideră trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu muchiile bazelor $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $A'B' = 3\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $AA' = 6$ cm. Determinați:

a. $\sphericalangle(AA', CC')$; b. $d(A, CC')$; c. $\operatorname{tg}(\sphericalangle((B'BC), (ABC)))$.

5.2

Lecția 2: Prisma dreaptă: arii și volum

Cuvinte-cheie

prisma dreaptă | arie laterală | arie totală | volum

Utilitate

Când zugrăvim o cameră, trebuie să putem afla aria acesteia pentru a stabili ce cantitate de vopsea vom cumpăra. Determinarea masei unui corp care nu poate fi cântărit se poate realiza calculând, mai întâi, volumul acestuia.

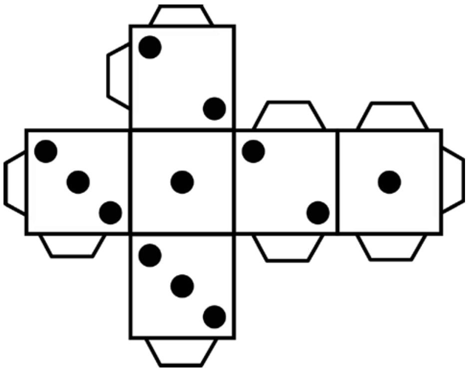
2.1 Aria laterală și aria totală ale unei prisme drepte

Situație problemă

Maria are o coală de hârtie cu dimensiunile 30 cm × 21 cm, din care dorește să decupeze fețele unui cub cu muchia de 10,25 cm. Ea face mai multe încercări de a desena pe foaie o desfășurare a cubului, însă nu reușește.

Rareș încearcă s-o ajute și o sfătuiește să nu deseneze o desfășurare, ci fiecare față separat, urmând apoi să folosească bandă adezivă pentru asamblarea cubului. Dar Mariei îi rămân resturi de hârtie din care nu mai poate decupa pătrate întregi. Se gândește, atunci, că ar putea obține fețele care îi lipsesc lipind între ele fâșii din aceste resturi.

George observă că suma ariilor fețelor cubului ar trebui să fie egală cu $6 \cdot (10{,}25)^2\ \text{cm}^2 = 630{,}375\ \text{cm}^2$, adică mai mare decât aria colii de hârtie, care este egală cu $630\ \text{cm}^2$. Astfel, el își dă seama că Maria și Rareș nu vor reuși niciodată să obțină cubul dorit.



De reținut

1. Suma ariilor tuturor fețelor laterale ale unei prisme se numește *aria laterală* a prismei și se notează $\mathcal{A}_\ell$.
   Suma ariilor tuturor fețelor unei prisme se numește *aria totală* a prismei și se notează $\mathcal{A}_t$.
2. O prismă dreaptă cu baza poligon regulat (prismă regulată) are ca fețe laterale dreptunghiuri congruente. Notăm cu ℓ lungimea muchiei bazei și cu h înălțimea prismei drepte (muchia sa laterală). Aria fiecărei fețe laterale este egală cu $\ell \cdot h$. Dacă n este numărul laturilor unei baze, iar $\mathcal{P}_B$ este perimetrul bazei, obținem:
$$\mathcal{A}_\ell = n \cdot \ell \cdot h = \mathcal{P}_B \cdot h.$$
3. Deoarece bazele unei prisme sunt congruente, notând $\mathcal{A}_B$ aria unei baze, rezultă că:
$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_B.$$
4. Pentru $n = 3$, $n = 4$, respectiv $n = 6$, obținem următoarele formule pentru calculul ariilor laterală și totală ale unei prisme drepte cu baza triunghi echilateral, pătrat, respectiv hexagon regulat (figurile 1, 2, 3):

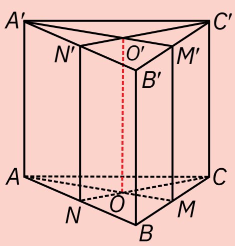


Figura 1
Prismă triunghiulară regulată (baza este triunghi echilateral)

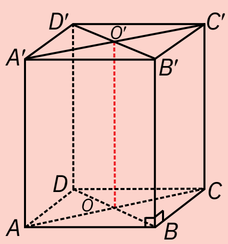


Figura 2
Prismă patrulateră regulată (baza este pătrat)

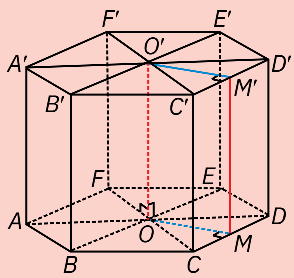


Figura 3
Prismă hexagonală regulată (baza este hexagon regulat)

Tipul prismei drepte:	triunghiulară regulată	patrulateră regulată	hexagonală regulată
Aria bazei: $\mathcal{A}_B$	$\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	ℓ^2	$\dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$
Aria laterală: $\mathcal{A}_\ell=\mathcal{P}_B\cdot h$	$3\ell h$	$4\ell h$	$6\ell h$
Aria totală: $\mathcal{A}_t=\mathcal{A}_\ell+2\mathcal{A}_B$	$3\ell h+\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$	$4\ell h+2\ell^2$	$6\ell h+3\ell^2\sqrt{3}$

5. Aria totală a paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile L, ℓ, h este:

$$\mathcal{A}=2(L\ell+Lh+\ell h).$$

6. Aria totală a cubului de muchie ℓ este $\mathcal{A}=6\ell^2$.

2.2. Volumul prismei drepte. Volumul paralelipipedului dreptunghic. Volumul cubului

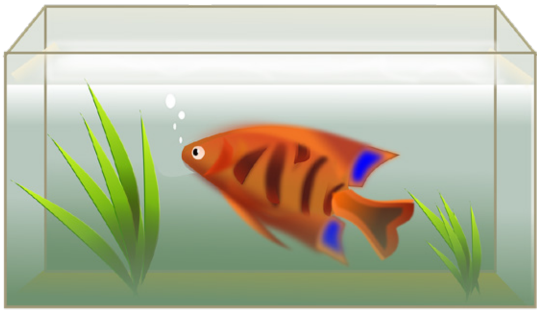
Mate practică

Volumul unui corp geometric este un număr real pozitiv, care depinde de forma și dimensiunile corpului și care arată cât loc ocupă în spațiu respectivul corp geometric.

Pentru a percepe noțiunea de volum, imaginați-vă următoarele experimente:

- Într-un vas cu apă scufundăm un corp geometric. Apa din vas urcă, întrucât corpul introdus ocupă loc, obligând lichidul să se ridice. Dacă am introduce nu corpul dat, ci un altul, identic cu el, creșterea nivelului apei ar fi aceeași.

Corpurile geometrice congruente au același volum.



- Măsurăm creșterea nivelului apei din vas atunci când scufundăm un anumit corp geometric. Apoi îl scoatem, îl „spargem” în bucăți, pe care le scufundăm iarăși în vas. Creșterea nivelului apei va fi aceeași ca atunci când am scufundat corpul întreg.

Volumul unui corp geometric este egal cu suma volumelor unor corpuri în care el poate fi descompus.

- Putem compara volumele unor corpuri geometrice măsurând creșterea nivelului apei din vas atunci când le scufundăm pe rând.

Altfel, să ne imaginăm că un corp geometric este „gol”, iar în interiorul său putem turna apă, printr-un orificiu: un corp are volumul cu atât mai mare, cu cât poate „primi” o cantitate mai mare de lichid. În acest fel, dacă stabilim o unitate de volum, vom spune că volumul corpului este egal cu numărul unităților de volum de lichid care „încap” în el.

De reținut

Definim *unitatea de volum* ca fiind volumul cubului a cărui muchie este egală cu unitatea de lungime.

Astfel, volumul cubului cu muchia de lungime 1 m este 1 m^3, volumul cubului cu muchia de 1 cm este 1 cm^3 etc.

Plecând de la cubul-unitate, pas cu pas, fiecărui corp geometric i se asociază volumul său.

Un cub cu latura de 3 cm (Figura 4) se poate descompune în $3\cdot3\cdot3=3^3=27$ cuburi unitate, deci volumul său este egal cu 27 cm^3.

Un paralelipiped dreptunghic cu lățimea de 3 cm, lungimea de 4 cm și înălțimea de 2 cm (Figura 5) se poate descompune în $4\cdot3\cdot2=24$ cuburi cu muchia de 1 cm, deci volumul său este de 24 cm^3.

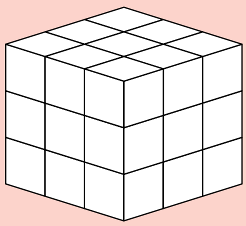


Figura 4

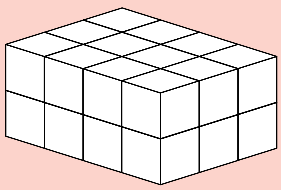


Figura 5

Volumul cubului de muchie ℓ este $\mathcal{V}=\ell^3$.

Volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile L, ℓ, h este $\mathcal{V}=L\cdot\ell\cdot h$.

Volumul prismei (drepte) este $\mathcal{V}=\mathcal{A}_B\cdot h$.

5.2

Observație

În Sistemul Internațional al Unităților de măsură, unitatea pentru lungime este metrul, iar cea pentru volum este metrul cub (m^3). În practică, se folosesc și multiplii și submultiplii metrului cub, precum și unitățile de măsură pentru capacitate (litrul, cu multiplii și submultiplii săi).

Ne reamintim că un litru corespunde unui decimetru cub: $1\ l = 1\ dm^3$.

Situație problemă

Încape întreaga populație umană de pe glob într-un cub cu muchia de 1 km?

Evident, nu se pune problema realizării efective a acestui experiment. Întrebarea este însă provocatoare și ne permite să ne facem o idee despre cât de mult reprezintă $1\ km^3$.

Sardine înghesuite într-o cutie

$1\ km^3$ înseamnă $10^9\ m^3$, iar pe Pământ trăiesc aproape $8 \cdot 10^9$ oameni. Problema revine la a stabili dacă volumul (mediu) al unei persoane depășește sau nu $0{,}125\ m^3$. Densitatea corpului uman este apropiată de cea a apei, care este $1\,000\ kg/m^3$, așadar trebuie să vedem dacă masa (medie a) unei persoane depășește sau nu 125 kg. Evident, acest lucru nu se întâmplă, deci răspunsul la întrebare este, teoretic, DA (dacă ni-i închipuim pe oameni stând lipiți unii de alții, ca sardinele într-o cutie).

Investigație

Câți copii încap în sala de clasă? Ce cantitate de vopsea lavabilă trebuie cumpărată pentru văruirea sălii?

Lucrați în echipe formate din câte 4-5 elevi, având la dispoziție 20 de minute. Împărțiți-vă sarcinile și urmăriți planul de mai jos:

1. Cu ajutorul unei rulete, măsurați lungimea, lățimea și înălțimea sălii de clasă.
2. Conform normelor sanitare, fiecare persoană dintr-o încăpere trebuie să aibă la dispoziție 5-8 m^3 de aer. Care este numărul maxim de elevi care pot învăța în sala de clasă?
3. Ajutați o echipă de meșteri care văruiește sala de clasă (pereții laterali și tavanul) să stabilească numărul necesar de recipiente de vopsea lavabilă. Se știe că:
   - trebuie aplicate două straturi de vopsea;
   - cu un litru de vopsea se poate acoperi o suprafață de 12 m^2 (un singur strat);
   - vopseaua se vinde în recipiente de câte 12 litri.
4. Comparați rezultatele găsite de echipa din care faceți parte cu cele obținute de celelalte echipe.

Activitate independentă

Alcătuiți o fișă de recapitulare a noțiunilor teoretice învățate despre prisme, cu următoarele repere:

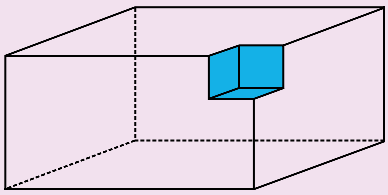
- ce este prisma dreaptă/regulată și cum se reprezintă;
- tipurile de prisme cunoscute;
- elementele unei prisme drepte;
- desfășurările principalelor tipuri de prisme studiate;
- tipuri de secțiuni într-o prismă regulată/dreaptă;
- determinarea unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul unei prisme.

Surse de informare: manual (Lecțiile 3, 8, 10 și 11 din Unitatea 4, Lecția 1 din Unitatea 5), caietele de notițe, internet etc.

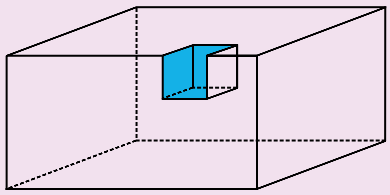
Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Dintr-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 5$ cm, $\ell = 4$ cm, $h = 3$ cm se elimină un cub cu muchia de 1 cm. Determinați aria totală a corpului obținut, în fiecare dintre următoarele situații:

a.



b.



Rezolvare

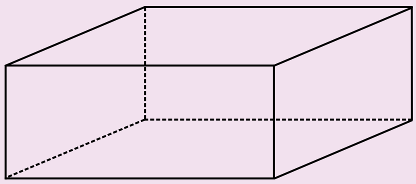
Aria totală a paralelipipedului dreptunghic, înainte de eliminarea cubului, este $2(L\ell + Lh + \ell h) = 94$ cm^2.

a. Din suprafața paralelipipedului „pierdem” trei pătrate de latură 1. În schimb, scobitura adaugă la suprafață trei noi pătrate de latură 1 (cele albastre). Astfel, aria totală a corpului obținut va fi tot 94 cm^2.

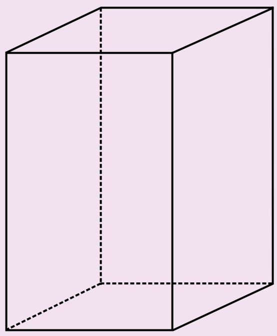
b. Din suprafața paralelipipedului „pierdem” două pătrate de latură 1. În schimb, scobitura adaugă la suprafață patru noi pătrate de latură 1 (cele albastre). Astfel, aria totală a corpului obținut va fi $94 - 2 + 4 = 96$ cm^2. Aparent paradoxal, eliminând o parte a unui corp, aria sa totală poate crește!

2. În figurile **a** și **b** sunt reprezentate două vase în formă de prismă patrulateră regulată; prin partea lor superioară, acestea pot fi umplute cu apă. Primul vas (**a**) are muchia bazei de 5 dm și înălțimea de 2 dm, iar al doilea (**b**) are muchia bazei de 3 dm și înălțimea de 5 dm.

a.



b.



a. Care dintre vase credeți că are volumul mai mare? Convingeți-vă, efectuând calculele!

b. Umplem vasul de volum mai mic și apoi turnăm apa din el în celălalt vas. Până la ce înălțime se va ridica apa?

Rezolvare

a. Majoritatea consideră, la o primă impresie, că al doilea vas are volumul mai mare. Acest fapt nu este însă adevărat: primul are volumul $\mathcal{V}_1 = 5^2 \cdot 2 = 50$ dm^3, în timp ce al doilea are volumul $\mathcal{V}_2 = 3^2 \cdot 5 = 45$ dm^3.

b. Cum $\mathcal{V}_2 = \frac{9}{10} \cdot \mathcal{V}_1$, când vărsăm apa din vasul cu volumul mai mic în cel mai încăpător, apa se va ridica la $\frac{9}{10}$ din înălțime, deci până la 1,8 dm.

Probleme propuse

1. O cutie de chibrituri are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 5$ cm, $\ell = 3{,}5$ cm și $h = 1$ cm. Calculați aria totală și volumul cutiei.

2. Un cub are diagonala de lungime $6\sqrt{3}$ cm. Determinați aria totală și volumul cubului. Sunt egale cele două mărimi?

3. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 6 cm și diagonala unei fețe laterale de 10 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul prismei.

4. O prismă triunghiulară regulată are aria laterală $\mathcal{A}_\ell = 48$ cm^2 și aria totală $\mathcal{A}_t = 8(6+\sqrt{3})$ cm^2. Determinați volumul prismei.

5. O prismă patrulateră regulată are aria laterală $\mathcal{A}_\ell = 60$ cm^2 și volumul $\mathcal{V} = 45$ cm^3. Aflați aria totală a prismei.

6. Cortul reprezentat în Figura 6 are forma unei prisme triunghiulare regulate. O față laterală a cortului este dreptunghiul $MNPQ$, cu $MN = 3$ m și $MQ = 2$ m. Confecționăm toate cele cinci fețe ale cortului din pânză ignifugă. Stabiliți dacă ne ajung 24 m^2 de pânză, știind că 10% din materialul folosit se pierde la îmbinări.

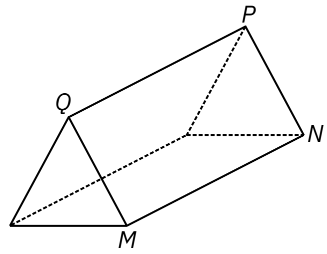


Figura 6

7. O piesă din metal masiv are forma unei prisme patrulatere regulate, cu muchia bazei de 15 cm și înălțimea de 20 cm.
   a. Ajung 0,16 m^2 de folie pentru a împacheta piesa?
   b. Calculați masa piesei, știind că densitatea metalului din care este fabricată este de 5 000 kg/m^3.
8. Un vas fără capac are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile interioare ale bazei 4 cm × 3 cm și cu înălțimea (interioară) de 16 cm. Vasul este pe trei sferturi plin cu apă.
   a. Putem scufunda complet în apă o tijă subțire cu lungimea de 13 cm?
   b. Ce arie are porțiunea din pereții interiori ai vasului care rămâne uscată?
9. O ladă are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei 10 dm × 6 dm și înălțimea de 5 dm. Care este numărul maxim de pachete identice care pot încăpea în ladă, știind că forma fiecărui pachet este:
   a. paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 2 dm × 1 dm × 1 dm;
   b. cub cu muchia de 15 cm.
10. Interiorul unui vas are forma unei prisme patrulatere regulate, cu latura bazei de 2 dm și înălțimea de 25 cm. Câți litri de apă încap în vas?
11. Un vas care are forma unei prisme drepte, cu aria bazei de 1 dm^2, conține o cantitate de apă. Introducem în vas cinci cuburi de muchie 2 cm; acestea se scufundă total în apă, iar apa nu se revarsă. Cu câți milimetri urcă nivelul apei din vas?
12. Într-o zi ploioasă, la rubrica *Meteo* de la radio se anunță că nivelul măsurat al precipitațiilor căzute este de 25 ℓ/m^2. Cu câți centimetri se ridică apa într-o piscină neacoperită?
13. Vopsim fețele unui cub din lemn, consumând 100 ml de vopsea. Apoi tăiem cubul în 27 de cubulețe egale. Care este cantitatea de vopsea de care mai avem nevoie pentru a termina de vopsit toate fețele cubulețelor obținute?
14. $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, cu aria laterală $\mathcal{A}_\ell = 72$ cm^2. Măsura unghiului format de planele $(A'BC)$ și (ABC) este de 60°. Determinați volumul prismei.
15. $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este o prismă hexagonală regulată, cu volumul $\mathcal{V} = 36$ cm^3. Măsura unghiului format de dreapta $A'C$ cu planul $(C'CD)$ este de 45°. Aflați aria laterală a prismei.
16. Într-un paralelipiped dreptunghic, aria totală este egală cu jumătate din suma pătratelor tuturor muchiilor. Demonstrați că paralelipipedul este cub.

Autoevaluare

1. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei $2\sqrt{3}$ cm și muchia laterală $\sqrt{3}$ cm. Determinați aria laterală, aria totală și volumul prismei. **(3p)**
2. O piscină paralelipipedică, având dimensiunile bazei 10 m × 6 m și înălțimea de 2 m, se umple pe trei sferturi cu apă prin intermediul a zece robinete, fiecare cu debitul de 30 ℓ/min. Câte ore va dura acestă operațiune? **(3p)**
3. $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată, cu $AA' = 4\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle((A'BD), (C'BD)) = 60°$. Aflați aria laterală a prismei. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 3: Piramida regulată: arii și volum

Cuvinte-cheie

piramidă regulată | arie laterală | arie totală | volum

Utilitate

Parafrazându-l pe Napoleon, putem spune că din vârful Marii Piramide din Giza ne privesc 43 de secole de istorie. Cei care au construit piramida nu-și puneau însă problema felului în care o vor privi urmașii peste veacuri; ei erau preocupați de chestiuni concrete: câtă piatră este necesară, cum vor reuși să o transporte, cum vor așeza piatra strat peste strat. Ajutați de cunoștințele lor matematice, au găsit răspunsuri la toate aceste întrebări.

Piramida lui Keops

3.1. Aria laterală și aria totală ale unei piramide regulate

Ne reamintim că o piramidă cu baza poligon regulat, în care muchiile laterale sunt congruente, se numește *piramidă regulată*. În Unitatea 4 am învățat că:

- fețele laterale ale oricărei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente;
- proiecția vârfului unei piramide regulate pe planul bazei este centrul cercului circumscris bazei.

De reținut

Definiție. Fiind dată o piramidă regulată, înălțimea oricăreia dintre fețele sale laterale se numește *apotemă* a piramidei regulate.

Apotema piramidei regulate se notează, de regulă, cu a_P.

În figurile 1-3 sunt reprezentate mai multe piramide regulate, cu vârful în V și centrul bazei în O, în care M este mijlocul uneia dintre laturile bazei. Segmentele VO, desenate cu roșu, sunt înălțimi, iar segmentele VM, desenate cu albastru, sunt apoteme ale acestor piramide.

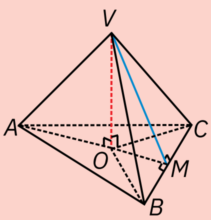


Figura 1
Piramidă triunghiulară regulată

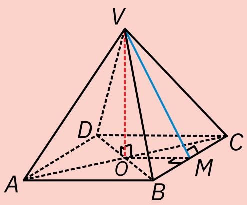


Figura 2
Piramidă patrulateră regulată

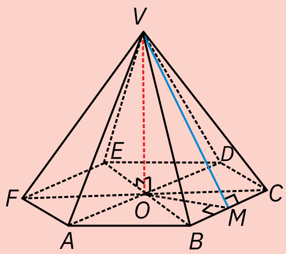


Figura 3
Piramidă hexagonală regulată

Observație

În fiecare dintre figurile 1-3 se evidențiază două triunghiuri dreptunghice cu proprietăți importante: VOM și VOA.

- În triunghiul VOA: ipotenuza VA este muchia laterală a piramidei, cateta VO este înălțimea piramidei, iar cateta OA este raza cercului circumscris poligonului regulat de la bază. Din teorema lui Pitagora obținem: $VA^2 = VO^2 + OA^2$.
- În triunghiul VOM: ipotenuza VM este apotema piramidei, cateta VO este înălțimea piramidei, iar cateta OM este apotema poligonului regulat de la bază (pe scurt, apotema bazei). Notând $VM = a_P$, $VO = h$, $OM = a_B$, obținem:

$$a_P^2 = h^2 + a_B^2.$$

De reținut

1. Suma ariilor fețelor laterale ale unei piramide se numește *aria laterală* a piramidei și se notează $\mathcal{A}_\ell$.
   Suma dintre aria bazei și aria laterală a unei piramide se numește *aria totală* a piramidei și se notează $\mathcal{A}_t$. Așadar, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B$.

2. Într-o piramidă regulată, fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.
Notăm cu ℓ lungimea muchiei bazei, cu a_P apotema piramidei și cu a_B apotema bazei. Dacă n este numărul laturilor bazei, iar $\mathcal{P}_B$ este perimetrul bazei, obținem:

$$\mathcal{A}_\ell = n\cdot\frac{\ell\cdot a_P}{2} = \frac{\mathcal{P}_B\cdot a_P}{2};\qquad \mathcal{A}_B = n\cdot\frac{\ell\cdot a_B}{2} = \frac{\mathcal{P}_B\cdot a_B}{2};\qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B = \frac{\mathcal{P}_B\cdot(a_P + a_B)}{2}.$$

3.2. Volumul unei piramide regulate

Situație problemă

Jucărie Daruma

Maria are o mare dilemă: adoră bomboanele de ciocolată și, în același timp, își dorește să nu facă excese. Din această cauză, trebuie să știe mereu câte calorii conțin bomboanele pe care le mănâncă. Acum are în față bomboane primite de la o prietenă care a fost în Japonia; acestea au forma unei jucării tradiționale, numită Daruma. Nu are un cântar la îndemână, dar știe să aprecieze distanțele și, bineînțeles, este nedespărțită de telefonul ei. Cum procedează pentru a afla câte calorii conține o bomboană?

Ea observă că bomboanele au forma unui tetraedru regulat și apreciază că latura acestuia este de 3 cm, deci poate determina imediat volumul unei bomboane. Caută pe internet și află că densitatea ciocolatei este de aproximativ 1,5 g/cm^3, iar 1 gram de ciocolată conține 5,5 kilocalorii. Folosind telefonul drept calculator, Maria află că o bomboană conține, cu aproximație, 26 de kilocalorii și decide să mănânce una singură. Refaceți și voi calculele Mariei!

De reținut

Volumul piramidei regulate este $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_B\cdot h}{3}$.

Investigație

Piramida din fața Muzeului Luvru

Câți metri pătrați de sticlă s-au folosit pentru construcția piramidei din curtea principală a Muzeului Luvru din Paris? Care este volumul acestei piramide?

Lucrați în echipe formate din câte 4-5 elevi; aveți la dispoziție 30 de minute. Împărțiți-vă sarcinile și urmăriți planul de mai jos:

1. Priviți imaginea alăturată, în care este reprezentată piramida de la Luvru. Observați că fiecare dintre fețele laterale ale piramidei este compusă din 17 rânduri orizontale de romburi, plus un rând de 18 triunghiuri isoscele, la bază. Atât romburile, cât și triunghiurile sunt fabricate din sticlă. Căutați și alte imagini pe internet, în care să puteți observa din diferite unghiuri așezarea panourilor din sticlă.
2. Un astfel de romb are diagonala „verticală” de 3 m și diagonala „orizontală” de 1,9 m. Calculând aria unui romb și numărând câte romburi sunt pe o față laterală (țineți cont și de cele 18 triunghiuri!), aflați câți metri pătrați de sticlă s-au folosit pentru construcția piramidei.
3. Aflați lungimile laturilor și măsurile unghiurilor unei fețe laterale. Puteți folosi un calculator sau/și tabele de funcții trigonometrice.
4. Calculați înălțimea piramidei și determinați volumul ei.
5. Comparați, între echipe, rezultatele obținute. De asemenea, căutați pe internet valorile reale ale laturii bazei și înălțimii piramidei de la Luvru. Sunt rezultatele voastre apropiate de cele adevărate?

De reținut

Tetraedrul

Formula de calcul pentru volumul piramidei regulate este valabilă pentru orice tip de piramidă. De fapt, se arată că o prismă triunghiulară – al cărei volum este $\mathcal{A}_B\cdot h$ – se descompune în trei tetraedre echivalente (având același volum), unul dintre ele cu aceeași bază și aceeași înălțime ca ale prismei. De aici, *volumul tetraedrului* este $\dfrac{\mathcal{A}_B\cdot h}{3}$.

Apoi, se observă că orice piramidă se poate descompune în tetraedre disjuncte; toate au un vârf în vârful piramidei, iar bazele lor realizează o descompunere în triunghiuri a bazei piramidei considerate. Scriem volumul piramidei ca suma volumelor tetraedrelor și obținem că volumul acesteia este $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_B \cdot h}{3}$.

Putem folosi formula pentru volumul tetraedrului pentru a determina (uneori, mai simplu) distanța de la un punct la un plan, ca în următorul exemplu.

Exemplu

VABCD este o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 8$ cm. Se cere distanța de la punctul *A* la planul (*VBC*).

Fie $X = \mathrm{pr}_{(VBC)}A$. Dacă folosim metoda pe care o expunem în continuare, nu trebuie determinată poziția punctului *X* pentru a putea afla $d(A, (VBC))$! Exprimăm în două moduri volumul tetraedrului *VABC*: $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \cdot VO \cdot \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot AX \cdot \mathcal{A}_{VBC}$.

Deducem că $d\big(A, (VBC)\big) = AX = \dfrac{VO \cdot \mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{VBC}} = 9{,}6$ cm.

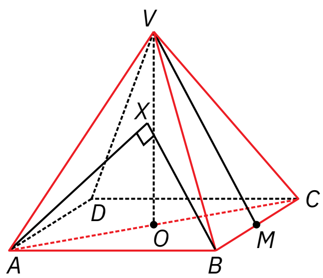


Figura 4

Totuși, unde se află punctul *X*? Răspuns: în exteriorul triunghiului *VBC*, aparținând paralelei prin *B* la apotema *VM* (Figura 4). Justificați!

Activitate independentă

Alcătuiți o fișă de recapitulare a noțiunilor teoretice învățate despre piramidă, cu următoarele repere:

- ce este piramida/piramida regulată și cum se reprezintă;
- tipuri de piramide cunoscute;
- elementele unei piramide regulate;
- desfășurările principalelor tipuri de piramide regulate studiate;
- secțiuni paralele cu baza și secțiuni diagonale/axiale într-o piramidă regulată;
- modalități de determinare a unor distanțe și măsuri ale unor unghiuri de pe fețele sau în interiorul unei piramide regulate.

Surse de informare: manual (Lecțiile 2, 8, 9 și 11 din Unitatea 4, Lecția 1 din Unitatea 5), caietele de notițe, internet etc.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Arătați că înălțimea *h*, aria totală $\mathcal{A}_t$ și volumul $\mathcal{V}$ al tetraedrului regulat de muchie ℓ sunt date de formulele:

$$h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}; \qquad \mathcal{A}_t = \ell^2\sqrt{3}; \qquad \mathcal{V} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}.$$

Rezolvare

Considerăm tetraedrul regulat *ABCD* din Figura 5, cu înălțimea *AO*. Fie *M* mijlocul muchiei *CD*. Deoarece triunghiurile *ACD* și *BCD* sunt echilaterale, de latură ℓ, obținem $BM = AM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, deci $OM = \dfrac{1}{3}BM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$.

Cum *AO* este perpendiculară pe planul (*BCD*), rezultă că $\sphericalangle AOM = 90°$, iar din triunghiul dreptunghic *AOM* obținem că $AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \dfrac{\ell\sqrt{6}}{3}$.

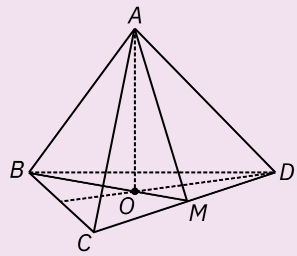


Figura 5

Atunci $\mathcal{A}_t = 4 \cdot \mathcal{A}_{BCD} = \ell^2\sqrt{3}$, iar $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{BCD} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\ell\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$.

2. *VABCD* este o piramidă patrulateră regulată, pe care o secționăm cu un plan paralel cu baza, ce intersectează muchiile laterale *VA*, *VB*, *VC*, *VD* în punctele *A′*, *B′*, *C′*, respectiv *D′*. Notăm $k = \dfrac{VA'}{VA}$, $\mathcal{A}'_\ell$, $\mathcal{A}'_t$, $\mathcal{V}'$ – aria laterală, aria totală și volumul piramidei *VA′B′C′D′* și $\mathcal{A}_\ell$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ – aria laterală, aria totală și volumul piramidei *VABCD*. Demonstrați că:

$$\frac{\mathcal{A}'_\ell}{\mathcal{A}_\ell} = \frac{\mathcal{A}'_t}{\mathcal{A}_t} = k^2; \qquad \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = k^3.$$

Rezolvare

Notăm cu O, O' centrele pătratelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$, și cu M, M' mijloacele segmentelor BC, respectiv $B'C'$, ca în Figura 6. Ne reamintim din lecțiile 8 și 10 din Unitatea 4 că $\frac{VO'}{VO}=\frac{VM'}{VM}=\frac{B'C'}{BC}=k$.

Avem $\mathcal{A}_{VB'C'}=\frac{VM'\cdot B'C'}{2}=\frac{k\,VM\cdot k\,BC}{2}=k^2\cdot\frac{VM\cdot BC}{2}=k^2\cdot\mathcal{A}_{VBC}$, iar

$\mathcal{A}_{A'B'C'D'}=B'C'^2=(k\cdot BC)^2=k^2\cdot\mathcal{A}_{ABCD}$.

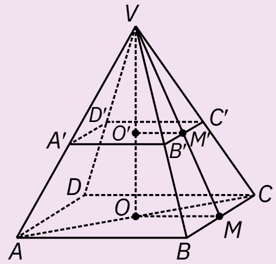


Figura 6

Astfel, $\frac{\mathcal{A}'_\ell}{\mathcal{A}_\ell}=\frac{4\cdot\mathcal{A}_{VB'C'}}{4\cdot\mathcal{A}_{VBC}}=\frac{k^2\cdot\mathcal{A}_{VBC}}{\mathcal{A}_{VBC}}=k^2$, $\frac{\mathcal{A}'_t}{\mathcal{A}_t}=\frac{\mathcal{A}'_\ell+\mathcal{A}_{A'B'C'D'}}{\mathcal{A}_\ell+\mathcal{A}_{ABCD}}=\frac{4k^2\cdot\mathcal{A}_{VBC}+k^2\cdot\mathcal{A}_{ABCD}}{4\mathcal{A}_{VBC}+\mathcal{A}_{ABCD}}=k^2$,

iar $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}}=\frac{\frac{1}{3}\mathcal{A}_{A'B'C'D'}\cdot VO'}{\frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABCD}\cdot VO}=\frac{k^2\cdot\mathcal{A}_{ABCD}\cdot k\,VO}{\mathcal{A}_{ABCD}\cdot VO}=k^3$.

Observație. Concluzia se păstrează dacă înlocuim piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu o piramidă oarecare. Despre piramida mică, obținută în urma secționării unei piramide cu un plan paralel cu baza sa, spunem că este *asemenea* cu piramida inițială.

3. Stâlpii care susțin pânza unui cort sunt muchiile laterale ale unei piramide hexagonale regulate și au lungimea de 3,6 m. E ora amiezii și George nu a montat încă pânza cortului, deoarece este captivat de peisaj. Observând cu atenție tot ce îl înconjoară, el constată că umbra unui stâlp are lungimea de 1,8 m. Poate George să calculeze aria pânzei care formează suprafața laterală a cortului?

Rezolvare

Fie $VABCDEF$ piramida hexagonală regulată din problemă, cu $VA=3{,}6$ m, ca în Figura 7. Umbra segmentului VA sub razele soarelui la amiază este proiecția sa pe planul (ABC); cum $VA\cap(ABC)=\{A\}$ și $pr_{(ABC)}V=O$, unde O este centrul hexagonului regulat $ABCDEF$, rezultă că $pr_{(ABC)}VA=OA=1{,}8$ m. Atunci, muchia bazei hexagonului regulat este $AB=OA=1{,}8$ m. Fie M mijlocul segmentului AB. În triunghiul isoscel VAB, mediana VM este, totodată, înălțime și, cu teorema lui Pitagora în triunghiul VAM, obținem $VM=0{,}9\cdot\sqrt{15}$ m. Suprafața pânzei cortului este aria laterală a piramidei: $\mathcal{A}_\ell=6\cdot\frac{VM\cdot AB}{2}=4{,}86\sqrt{15}\text{ m}^2\simeq18{,}82\text{ m}^2$.

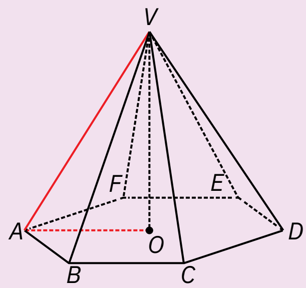


Figura 7

Probleme propuse

1. O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile de lungime 12 cm. Calculați aria totală și volumul piramidei.
2. Secțiunea diagonală a unei piramide patrulatere regulate este un triunghi echilateral cu latura de 12 cm. Determinați aria laterală și volumul piramidei.
3. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este de 260 cm^2, iar aria sa totală este de 360 cm^2. Aflați volumul piramidei.
4. O piramidă triunghiulară regulată are apotema de lungime 10 cm și apotema bazei de lungime 6 cm. Aflați aria laterală și volumul piramidei.
5. Muchia laterală a unei piramide triunghiulare regulate are lungimea de 12 cm și formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60°. Determinați volumul piramidei.
6. Distanța dintre centrele a două fețe ale unui tetraedru regulat este de 2 cm. Aflați aria totală și volumul tetraedrului.
7. Cubul din Figura 8 este descompus în cinci piramide triunghiulare regulate. Determinați volumul fiecăreia, știind că muchia cubului este de $3\sqrt{2}$ cm.
8. O clădire are forma unei prisme triunghiulare regulate, având deasupra o piramidă triunghiulară regulată, ca în Figura 9. Muchia bazei prismei este de 12 m, înălțimea prismei este de 8 m,

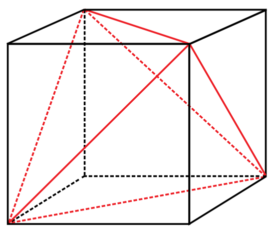


Figura 8

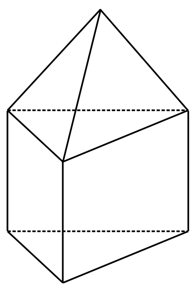


Figura 9

iar înălțimea construcției este de 10 m. Vopsim în roșu întreaga clădire (pereți exteriori și acoperiș). Un litru de vopsea acoperă 6 m^2/strat și trebuie aplicate două straturi. Ce cantitate de vopsea trebuie cumpărată?

9. O foaie de tablă are forma din Figura 10. *ABCD* este un pătrat cu latura de 10 cm, iar $V_1A = V_1B = V_2B = V_2C = V_3C = V_3D = V_4D = V_4A = 13$ cm. Îndoim tabla după laturile pătratului și obținem o piramidă patrulateră regulată *VABCD*. Determinați aria totală și volumul piramidei.

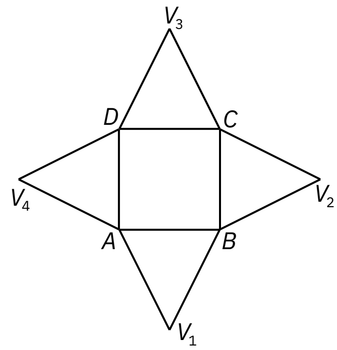


Figura 10

10. Pentru a vopsi o piramidă regulată din lemn, am avea nevoie de 300 ml de vopsea. Tăiem piramida, paralel cu baza sa, trecând prin mijlocul înălțimii. Ce cantitate de vopsea ar fi necesară pentru a acoperi piramida mică obținută?

11. O piramidă regulată din lemn cântărește 400 de grame. Tăiem piramida paralel cu baza sa, trecând prin mijlocul înălțimii. Care este masa piramidei mici obținute?

12. Irina are o piramidă patrulateră regulată din lemn. Fata calculează că, pentru a vopsi o secțiune paralelă cu baza, făcută la două treimi de vârf și o treime de bază, ar avea nevoie de 20 de grame de vopsea, iar pentru a vopsi o secțiune axială a piramidei, ar avea nevoie de aceeași cantitate. Îi ajung Irinei 125 de grame de vopsea pentru a colora întreaga suprafață a piramidei?

13. O față laterală a unei piramide hexagonale regulate formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45°. Aria laterală a piramidei este de $50\sqrt{6}$ cm^2. Determinați volumul piramidei.

14. *VABCD* este o piramidă patrulateră regulată, iar *P* este un punct al muchiei *VC* astfel încât $2VP = PC$. Distanțele de la punctul *P* la planele (*VBD*) și (*ABC*) sunt de 6 cm, respectiv 16 cm. Aflați aria laterală a piramidei.

15. *VABC* este o piramidă triunghiulară regulată, iar *M*, *N* și *P* sunt puncte pe muchiile *VA*, *VB*, respectiv *VC*, astfel încât $VM = MA$, $VN = 2NB$ și $3VP = PC$. Determinați volumul tetraedrului *VMNP*, știind că volumul piramidei *VABC* este 144 cm^3.

Autoevaluare

1. O piramidă patrulateră regulată are muchia bazei de 10 cm și înălțimea de 12 cm. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate. **(3p)**

a. Aria bazei piramidei este de . . . . . . cm^2.

b. Volumul piramidei este de . . . . . . cm^3.

c. Aria laterală a piramidei este de . . . . . . cm^2.

2. O piesă din metal masiv are forma unei piramide patrulatere regulate, cu muchia bazei de 12 cm și muchia laterală de 11 cm. Se topește piesa, iar din metalul rezultat se fabrică (fără pierderi) cubulețe cu muchia de 0,5 cm. Câte cubulețe se obțin? **(3p)**

3. *VABC* este o piramidă triunghiulară regulată, iar *O* este centrul bazei *ABC*. Înălțimea piramidei este de 6 cm, iar distanța de la punctul *O* la una dintre fețele laterale este de 3 cm. Determinați aria totală a piramidei. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

5.4

Lecția 4: Trunchiul de piramidă regulată: arii și volum

Cuvinte-cheie

trunchi de piramidă regulată | arie laterală | arie totală | volum

Utilitate

Ansamblul monumental *Calea Eroilor* străbate municipiul Târgu Jiu de la râul Jiu până spre capătul estic al orașului, de la *Masa Tăcerii* la *Coloana Infinitului*, și este un omagiu adus celor care s-au jertfit în Marele Război din 1916-1918. Acest ansamblu a fost gândit și realizat de către unul dintre cei mai importanți sculptori ai secolului XX – Constantin Brâncuși. Situată în mijlocul unui mic parc, Coloana se înalță, maiestuoasă, până la înălțimea la care se ridică și *Columna lui Traian* din Roma: 100 de picioare romane, peste 29 de metri. Dacă privim cu atenție corpul geometric care se află la baza realizării acestei impresionante opere, observăm că este vorba despre un trunchi de piramidă.

Coloana Infinitului

Ne reamintim că un trunchi de piramidă regulată se obține prin secționarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu planul bazei și îndepărtarea piramidei mici rezultate. În Unitatea 4 am învățat că:

- bazele unui trunchi de piramidă regulată sunt poligoane regulate asemenea;
- dreapta care unește centrele cercurilor circumscrise celor două baze este perpendiculară pe planele bazelor;
- fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele congruente.

De reținut

Definiție. Înălțimea oricăreia dintre fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată se numește *apotemă* a trunchiului.

Apotema trunchiului de piramidă se notează, de regulă, cu a_T.

Segmentul care unește mijloacele bazelor unei fețe laterale a trunchiului de piramidă este o înălțime a acestei fețe, deci este o apotemă a trunchiului.

În figurile 1-3 sunt reprezentate mai multe trunchiuri de piramidă regulată, în care O este centrul bazei mari, iar O' este centrul bazei mici. Punctele M și M' sunt mijloacele a două laturi omoloage ale bazei mari, respectiv bazei mici. În fiecare figură, segmentul OO', desenat cu roșu, este înălțime, iar segmentul MM', desenat cu albastru, este apotemă a trunchiului de piramidă reprezentat.

Fiecare dintre segmentele OM și $O'M'$ unește centrul unui poligon regulat cu mijlocul unei laturi a poligonului, deci este apotemă a unui poligon regulat. Vom spune că OM este apotema bazei mari, iar $O'M'$ este apotema bazei mici. Notăm $OM = a_B$ și $O'M' = a_b$.

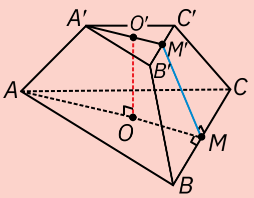


Figura 1
Trunchi de piramidă triunghiulară regulată

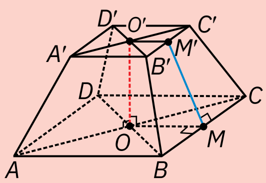


Figura 2
Trunchi de piramidă patrulateră regulată

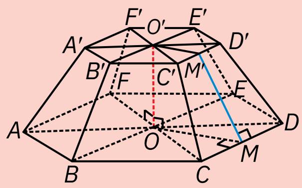


Figura 3
Trunchi de piramidă hexagonală regulată

Observație

În fiecare dintre figurile 1-3 se evidențiază trei trapeze dreptunghice cu proprietăți importante: $OAA'O'$, $OMM'O'$ și $CMM'C'$, din care putem obține relații utile între elementele trunchiului de piramidă regulată.

- În trapezul $OAA'O'$: $AA' = m$ este muchia laterală a trunchiului, $OO' = h$ este înălțimea trunchiului, OA este raza cercului circumscris bazei mari, iar $O'A'$ este raza cercului circumscris bazei mici. Are loc relația:

$$m^2 = h^2 + (OA - O'A')^2.$$

- În trapezul $OMM'O'$: $MM' = a_T$ este apotema trunchiului de piramidă, $OO' = h$ este înălțimea trunchiului, $OM = a_B$ este apotema bazei mari, iar $O'M' = a_b$ este apotema bazei mici. Are loc relația:

$$a_T^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2.$$

- În trapezul $CMM'C'$: $MM' = a_T$ este apotema trunchiului de piramidă, $CC' = m$ este muchia laterală a trunchiului, iar CM și $C'M'$ au lungimile egale cu jumătate din lungimile L, respectiv ℓ, ale muchiilor bazelor. Are loc relația:
$$m^2 = h^2 + \frac{(L-\ell)^2}{4}.$$

Situație problemă

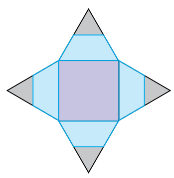
Rareș află că, la un anumit interval de timp, Coloana Infinitului este acoperită cu o substanță anticorozivă; modulele sale sunt realizate din fontă, care se oxidează. El își dă seama că, pentru a afla necesarul de substanță, trebuie să determine aria suprafeței coloanei. Un modul este format din două trunchiuri de piramidă patrulateră regulată, având bazele mari lipite. Latura bazei mici a unui trunchi este de 45 cm, latura bazei mari de 90 cm, iar înălțimea unui modul este de 180 cm. Dimensiunile mărgelei respectă raportul ideal 1 : 2 : 4, atât de folosit în lucrările lui Brâncuși. Coloana conține 15 mărgele întregi și două jumătăți de mărgea: una în partea de sus, având un capac peste baza mare, și una în partea de jos, ceva mai înaltă, astfel încât înălțimea totală a Coloanei Infinitului este de 29,35 m. Maria îl ajută pe Rareș să calculeze aria coloanei. Ei determină mai întâi apotema unuia dintre cele 31 de trunchiuri congruente, precum și apotema trunchiului de la bază. Copiii țin cont și de existența capacului de sus și, astfel, reușesc să afle necesarul de substanță anticorozivă, plecând de la necesarul de substanță pe metru pătrat.

De reținut

1. Suma ariilor tuturor fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă se numește *aria laterală a trunchiului* și se notează $\mathcal{A}_\ell$.
   Suma ariilor tuturor fețelor unui trunchi de piramidă se numește *aria totală a trunchiului* și se notează $\mathcal{A}_t$.
   Trunchiul de piramidă regulată are ca fețe laterale n trapeze isoscele identice, unde n este numărul vârfurilor bazei. Ca de obicei, notăm: L – muchia bazei mari, ℓ – muchia bazei mici, a_T – apotema trunchiului, $\mathcal{P}_B$ – perimetrul bazei mari, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei mici, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari și $\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici. Formulele de calcul pentru ariile laterală și totală ale trunchiului de piramidă regulată sunt:
$$\mathcal{A}_\ell = n\cdot\frac{(L+\ell)\cdot a_T}{2} = \frac{(\mathcal{P}_B+\mathcal{P}_b)a_T}{2}; \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b.$$
2. Volumul trunchiului de piramidă (regulată) este
$$\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right),$$
   unde h este înălțimea trunchiului.

   Demonstrație
   Considerăm piramida regulată din care, în urma secționării cu un plan paralel cu baza, se obține trunchiul de piramidă regulată al cărui volum îl calculăm și încă o piramidă mică, asemenea cu piramida secționată.
   Notăm: VO – înălțimea piramidei mari, VO' – înălțimea piramidei mici, $\mathcal{V}_1$ – volumul piramidei mari, $\mathcal{V}_2$ – volumul piramidei mici și $k = \frac{VO'}{VO}$. Avem: $OO' = VO - VO' = (1-k)VO$, $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = k^2$, deci $k = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}}$ și $\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = k^3$.
   Deducem că:
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1(1-k^3) = \frac{\mathcal{A}_B\cdot VO}{3}\cdot(1-k)(1+k+k^2) = \frac{VO(1-k)}{3}\cdot\mathcal{A}_B\left(1+\frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}}+\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B}\right) = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b} + \mathcal{A}_b\right).$$

Investigație



Putem determina volumul unui trunchi de piramidă plecând de la desfășurarea acestuia?
Lucrați în echipe; aveți la dispoziție 20 de minute. Împărțiți-vă sarcinile și urmăriți planul:
1. Desenați un pătrat cu latura de 8 cm. Folosind compasul, desenați pe fiecare latură, în exteriorul pătratului, câte un triunghi echilateral. Trasați, în fiecare triunghi, liniile mijlocii care sunt paralele cu laturile pătratului. Care este natura patrulaterelor albastre?
2. Eliminați, din vârfurile triunghiurilor echilaterale, cele patru triunghiuri negre mici. Decupați conturul suprafeței rămase. Rabatați după laturile pătratului, până obțineți un trunchi de piramidă patrulateră regulată.
3. Stabiliți lungimile muchiei bazei mari, muchiei bazei mici și muchiei laterale ale trunchiului. Decupați din hârtie un pătrat cu latura cât cea a bazei mici. Folosind bandă adezivă, fabricați întreaga suprafață a trunchiului.
4. Determinați aria laterală și aria totală ale trunchiului. Aveți nevoie, în prealabil, de calculul apotemei acestuia?
5. Aflați, prin calcul, lungimea înălțimii trunchiului, apoi determinați volumul său.
6. Comparați, între echipe, rezultatele obținute.

5.4

Activitate independentă

Alcătuiți o fișă de recapitulare a noțiunilor teoretice învățate despre trunchiul de piramidă regulată, cu următoarele repere:

- trunchiul de piramidă regulată și cum se reprezintă acesta;
- tipuri de trunchiuri de piramidă regulată pe care le cunoașteți;
- elementele unui trunchi de piramidă regulată;
- desfășurările principalelor tipuri de trunchiuri de piramidă regulată studiate;
- secțiunile diagonale/axiale în trunchiul de piramidă regulată;
- modalități de determinare a unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul unui trunchi de piramidă regulată.

Surse de informare: manual (Lecțiile 8, 10 și 11 din Unitatea 4, Lecția 1 din Unitatea 5), caietele de notițe, internet etc.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. *ABCDA′B′C′D′* este un trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu muchia bazei mari de 20 cm, înălțimea de 18 cm și volumul de 3150 cm^3. Determinați:
a. muchia bazei mici; **b.** aria laterală a trunchiului;
c. înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

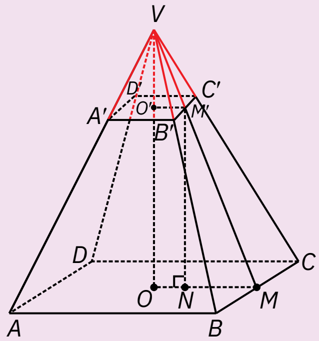


Figura 4

Rezolvare

Ca în Figura 4, fie OO' înălțimea trunchiului, MM' – apotema de pe fața $BCC'B'$ a trunchiului și V – vârful piramidei din care provine trunchiul.

a. Cu notațiile obișnuite, avem: $\mathcal{V}=\frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B+\mathcal{A}_b+\sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}\right)=\frac{h}{3}\left(L^2+\ell^2+L\ell\right)$. Ținând cont de ipoteză, obținem: $3\,150=\frac{18}{3}\left(20^2+\ell^2+20\ell\right)\Leftrightarrow \ell^2+20\ell+400=525\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\ell+10)^2=225$. Cum ℓ este număr real pozitiv, reținem doar soluția $\ell=5$.

b. Fie N proiecția punctului M' pe dreapta OM. Avem: $ON=O'M'=\frac{1}{2}\ell=\frac{5}{2}$ cm, $OM=\frac{1}{2}L=10$ cm, $MN=OM-ON=\frac{15}{2}$ cm, iar $M'N=OO'=18$ cm.

Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $NM'M$, obținem apotema trunchiului $MM'=\frac{39}{2}$ cm.
Astfel, $\mathcal{A}_\ell=\frac{(\mathcal{P}_B+\mathcal{P}_b)a_T}{2}=\frac{1}{2}\cdot(80+20)\cdot\frac{39}{2}=975\text{ cm}^2$.

c. Din asemănarea triunghiurilor $VO'M'$ și VOM (T.F.A.), rezultă că $\frac{VO'}{VO}=\frac{O'M'}{OM}=\frac{1}{4}$, prin urmare $\frac{OO'}{VO}=\frac{3}{4}$, așadar $VO=\frac{4}{3}\cdot OO'=24$ cm.

2. *ABCA′B′C′* este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile bazelor $AB=6$ cm, $A'B'=2$ cm și înălțimea $OO'=6$ cm. Un plan paralel cu bazele intersectează înălțimea în punctul Q și împarte trunchiul în două corpuri având aceeași arie laterală. Aflați distanța OQ dintre planul bazei mari și planul secțiunii.

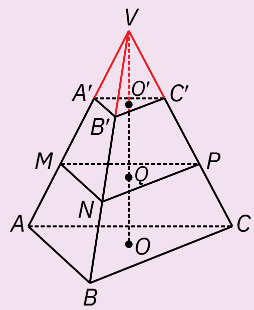


Figura 5

Rezolvare

Ca în Figura 5, fie M, N și P intersecțiile planului de secțiune cu muchiile laterale ale trunchiului, respectiv cu înălțimea acestuia, și V – vârful piramidei din care provine trunchiul. Notăm cu $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ și $\mathcal{A}$ ariile laterale ale piramidei $VA'B'C'$, trunchiului $MNPA'B'C'$, trunchiului $ABCMNP$, respectiv piramidei $VABC$. Avem: $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3=\mathcal{A}$.

Mai observăm că $\frac{VO'}{VO}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow\frac{VO'}{VO}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{VO'}{OO'}=\frac{1}{2}\Rightarrow VO'=3$ cm, $VO=9$ cm. În continuare, avem: $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}}=\left(\frac{VO'}{VO}\right)^2\Rightarrow\mathcal{A}_1=\frac{1}{9}\mathcal{A}$, deci $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_3=\frac{1}{2}(\mathcal{A}-\mathcal{A}_1)=\frac{4}{9}\mathcal{A}$.

Așadar, $\frac{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}}=\left(\frac{VQ}{VO}\right)^2\Rightarrow\frac{5}{9}=\left(\frac{VQ}{VO}\right)^2\Rightarrow\frac{VQ}{VO}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow VQ=3\sqrt{5}$ cm.

În concluzie, $OQ=VO-VQ=3(3-\sqrt{5})$ cm.

Probleme propuse

1. Un templu aztec are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu muchiile bazelor de 70 de metri, respectiv 10 metri, și înălțimea de 60 de metri (idealizăm forma templului, ignorând „treptele” sale). Câți metri cubi de piatră s-au folosit la construcția templului?
2. Soclul unui monument are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile bazelor de 8 metri, respectiv 2 metri, și muchia laterală de 5 metri. Aflați aria laterală a soclului.
3. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchiile bazelor de 16 cm, respectiv 4 cm, și aria laterală de 120 cm^2. Calculați volumul trunchiului.
4. Un tetraedru regulat are muchia de 12 cm. Secționăm tetraedrul cu un plan paralel cu una dintre fețele sale, care trece prin mijlocul înălțimii corespunzătoare acelei fețe. Aflați aria laterală și volumul trunchiului de piramidă care se obține.
5. O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile de 12 cm. Secționăm piramida cu un plan paralel cu baza, situat la o treime de vârful piramidei și la două treimi de baza sa. Determinați aria totală și volumul trunchiului de piramidă care se obține.
6. $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu $AB = 24$ cm, $A'B' = 12$ cm și înălțimea $OO' = 8$ cm.
   a. Aflați aria totală a trunchiului.
   b. Determinați volumul piramidei din care provine trunchiul.
7. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei mari de două ori mai lungă decât cea a bazei mici. Ariile laterală și totală ale trunchiului sunt $\mathcal{A}_\ell = 65\sqrt{3}$ cm^2, respectiv $\mathcal{A}_t = 100\sqrt{3}$ cm^2. Determinați muchia bazei mici a trunchiului.
8. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are muchia bazei mari de trei ori mai lungă decât cea a bazei mici. Volumul trunchiului este de 182 cm^3. Aflați volumul piramidei din care provine trunchiul.
9. $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este un trunchi de piramidă hexagonală regulată, cu apotema bazei mari de 9 cm și înălțimea de 6 cm. Planul unei fețe laterale formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 45°. Determinați aria laterală a trunchiului.
10. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată are lungimea de $4\sqrt{3}$ cm și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Aflați volumul trunchiului, știind că muchia bazei mici este de 6 cm.
11. Secționăm o piramidă regulată cu înălțimea $VO = 8$ cm cu un plan paralel cu baza, care intersectează înălțimea în punctul O'. Cele două corpuri obținute (piramida mică și trunchiul) au arii laterale egale. Determinați înălțimea trunchiului OO'.
12. Secțiunea axială a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este trapezul isoscel $ACPM$, cu bazele $AC = 8$ cm, $MP = 6$ cm și diagonalele perpendiculare. Determinați volumul piramidei din care provine trunchiul.
13. $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată. Se știe că: $AC' \perp CC'$, $AA' = 30$ cm, $pr_{(ABC)}AA' = 18$ cm. Calculați:
    a. volumul trunchiului;
    b. $d(A', CC')$.

Autoevaluare

1. $ABCA'B'C'$ este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile bazelor $AB = 10$ cm, $A'B' = 4$ cm și muchia laterală $AA' = 5$ cm. Completați spațiile punctate. (3p)
   a. Suma lungimilor tuturor muchiilor trunchiului este de ...... cm.
   b. Aria bazei mici a trunchiului este de ...... cm^2.
   c. Aria laterală a trunchiului este de ...... cm^2.
2. Se sapă o groapă având forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu muchiile bazelor de 10 metri, respectiv 6 metri, și adâncimea de 1,5 metri. Pământul excavat, prin afânare, își sporește volumul cu 20%. Acest pământ este depozitat într-o movilă având forma unei piramide patrulatere regulate cu muchia bazei de 10 metri. Aflați înălțimea movilei. (3p)
3. $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu muchia bazei mari $AB = 12$ cm, astfel încât $(ADD') \perp (BCC')$. Determinați aria totală și volumul piramidei din care provine trunchiul. (3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 5: Cilindrul circular drept: arii și volum

Cuvinte-cheie

cilindru circular drept | arie laterală | arie totală | volum

Utilitate

Acum un secol și jumătate, trunchiurile arborilor tăiați în Carpați erau legate împreună, formând plute care coborau pe Bistrița, apoi pe Siret și ajungeau până la Dunăre, în portul Galați. Acolo, trunchiurile cilindrice erau transformate în cherestea paralelipipedică, iar din aceasta se fabricau case, mobilier sau corăbii.

Plută din bușteni

Situație problemă

Maria are o mică piesă metalică, de formă neregulată, și dorește să îi determine volumul. George își amintește de experimentele din Lecția 2 a acestei unități: ia un pahar din sticlă, de formă cilindrică, și toarnă în el apă până la un nivel, pe care îl marchează cu un semn. Introduce piesa în apă; aceasta se scufundă complet, iar apa se ridică, fără a se revărsa însă din pahar (ca în Figura 1). George marchează noul nivel al apei cu alt semn, aflat pe aceeași generatoare cu primul. Volumul corpului este egal cu volumul coloanei de apă dintre cele două semne. Acest volum poate fi determinat destul de ușor, folosind formula pentru volumul cilindrului.

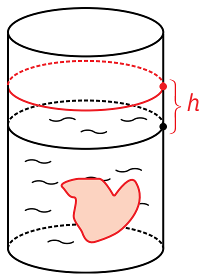


Figura 1

De reținut

1. *Aria laterală a unui cilindru circular drept* este egală cu aria dreptunghiului care reprezintă desfășurarea suprafeței sale laterale (Figura 2). Cum acest dreptunghi are dimensiunile $2\pi R$, respectiv G, avem: $\mathcal{A}_\ell = 2\pi RG$.
2. *Aria totală a unui cilindru circular drept* este suma dintre aria sa laterală și ariile celor două baze. Întrucât $\mathcal{A}_B = \pi R^2$, avem: $\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R)$.
3. *Volumul cilindrului circular drept* este, ca și în cazul prismei drepte, produsul dintre aria bazei și înălțimea sa. Ținând cont de faptul că $h = G$, obținem $\mathcal{V} = \pi R^2 G$.

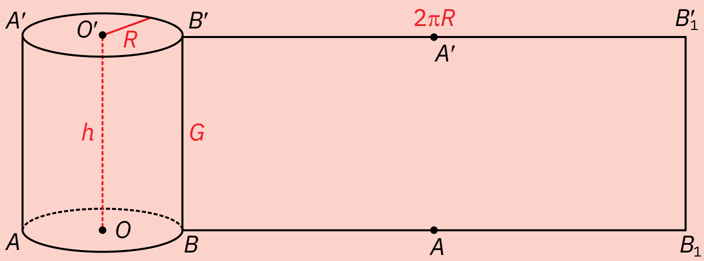


Figura 2

Activitate practică

Folosind formula pentru volumul cilindrului, pe care tocmai ați învățat-o, determinați volumul unui corp geometric neregulat folosind metoda descrisă la rubrica **Situație problemă**.

Activitate independentă

Alcătuiți o fișă de recapitulare a noțiunilor teoretice învățate despre cilindrul circular drept, cu următoarele repere:

- cilindrul circular drept și modalitatea de reprezentare;
- elementele unui cilindru circular drept;
- desfășurarea suprafeței laterale/totale a cilindrului circular drept;
- secțiuni paralele cu bazele/axiale în cilindrul circular drept;
- modalități de determinare a unor distanțe și măsuri de unghiuri în interiorul unui cilindru circular drept.

Surse de informare: manual (Lecțiile 4, 8, 10 și 11 din Unitatea 4), caietele de notițe, internet etc.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. O secțiune paralelă cu baza unui cilindru circular drept are aria de 49π cm^2. O secțiune axială a aceluiași cilindru are aria de 42 cm^2. Aflați aria totală și volumul cilindrului.

Rezolvare

Secțiunea paralelă cu baza este un disc având aceeași rază R ca cilindrul, deci cu aria πR^2; obținem $R = 7$ cm. Secțiunea axială este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile $2R$ și G, având aria $2RG$; deducem că $G = 3$ cm. Astfel, $\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R) = 140\pi$ cm^2, iar $V = \pi R^2 G = 147\pi$ cm^3.

2. Trunchiul unui copac are forma unui cilindru circular drept, cu circumferința bazei de 1,76 metri și înălțimea de 5 metri. Cioplim din acest copac un paralelipiped dreptunghic de volum maxim posibil. Care este volumul lemnului îndepărtat? (În calcule, folosiți pentru π valoarea aproximativă 3,14.)

Rezolvare

Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipipedul obținut prin cioplire (Figura 3). Deoarece volumul său este maxim posibil, înălțimea AA' va fi egală cu înălțimea copacului, iar baza $ABCD$ va fi un dreptunghi înscris în cercul bazei cilindrului, având aria maximă posibilă. Justificați!

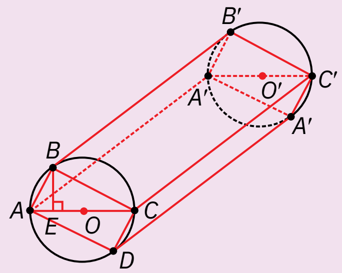


Figura 3

Cum unghiul ABC este drept, segmentul AC este diametru al cercului. Notăm cu E proiecția punctului B pe dreapta AC; atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = AC \cdot BE$ și, cum AC are lungime constantă, această arie este maximă când lungimea segmentului BE este maximă, deci când E coincide cu centrul O al bazei corespunzătoare. În acest caz, $ABCD$ devine pătrat, iar $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = 2R^2$, unde R este raza cilindrului. Știm că lungimea cercului bazei, $2\pi R$, este 1,76 m; folosind aproximarea $\pi \simeq 3{,}14$, obținem $R \simeq 0{,}28$ m. Avem: $\mathcal{V}_{\text{cilindru}} = \pi R^2 h = 1{,}232$ m^3, $\mathcal{V}_{\text{prismă}} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h = 0{,}784$ m^3, prin urmare volumul lemnului îndepărtat prin cioplire este de 0,448 m^3.

Probleme propuse

1. Un cilindru circular drept are raza de 5 cm și generatoarea de 10 cm. Determinați:

a. diagonala secțiunii axiale; **b.** $\mathcal{A}_\ell$; **c.** $\mathcal{V}$.

2. Un butuc din care vom face surcele are forma unui cilindru circular drept cu diametrul de 24 cm și înălțimea de 20 cm. Știind că densitatea lemnului este de 880 kg/m^3, aflați masa butucului; rotunjiți rezultatul la un număr întreg de kilograme.

3. Un cilindru circular drept are raza și generatoarea invers proporționale cu numerele 2 și 3, iar aria sa laterală este de $\mathcal{A}_\ell = 48\pi$ cm^2. Aflați volumul cilindrului.

4. Un cilindru circular drept are aria laterală $\mathcal{A}_\ell = 24\pi$ cm^2 și aria totală $\mathcal{A}_t = 42\pi$ cm^2. Aflați volumul cilindrului.

5. Un cilindru circular drept are aria secțiunii axiale 12 cm^2 și volumul $\mathcal{V} = 36\pi$ cm^3. Determinați aria totală a cilindrului.

6. Diagonala unei secțiuni axiale a unui cilindru circular drept formează cu planul unei baze un unghi cu măsura de 60°. Știind că volumul cilindrului este $\mathcal{V} = 16\pi\sqrt{3}$ cm^3, aflați aria sa laterală.

7. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi cu dimensiunile 4 cm × 6 cm. Calculați volumul cilindrului.

8. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi cu diagonala de 5 cm și aria de 12 cm^2. Determinați aria totală a cilindrului.

9. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un dreptunghi cu dimensiunile 4 cm × 6 cm. Calculați aria laterală și aria totală ale cilindrului.

10. O coală de hârtie are forma unui dreptunghi cu dimensiunile 20 cm × 30 cm. Înfășurăm coala, o dată pe lungime, apoi pe lățime, obținând doi cilindri (fără baze). Care dintre aceștia are volumul mai mare?

11. O bucată de țeavă are diametrul interior de 2 centimetri, diametrul exterior de 3 centimetri și lungimea de 1 metru. Determinați aria totală și volumul țevii.

12. Dintr-un trunchi de copac, având forma unui cilindru circular drept cu circumferința bazei de 24π centimetri și lungimea de 2,5 metri, se ciopleşte o scândură având forma unei prisme patrulatere regulate, cu pierderi minime de material. Determinați volumul scândurii, în metri cubi.

13. $ABCD$ este o secțiune axială a unui cilindru circular drept, iar E este un punct situat pe conturul bazei inferioare. Se știe că $AE = 4$ cm, $BE = 4\sqrt{3}$ cm, iar $d(E, CD) = 4$ cm. Determinați aria totală a cilindrului.

14. Fie O și O' centrele bazelor unui cilindru circular drept de rază R și punctele $A, B \in \mathcal{C}(O, R)$, $A', B' \in \mathcal{C}(O', R)$, astfel încât AA' este o generatoare a cilindrului, BB' nu este paralelă cu AA' și $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'O'B' = 30°$. Știind că $AA' = 3$ cm și $BB' = 5$ cm, determinați volumul cilindrului.

Autoevaluare

1. Un cilindru circular drept are raza $R = 5$ cm și generatoarea $G = 4$ cm. **(3p)**
Completați spațiile punctate, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
   a. Înălțimea cilindrului este de . . . . . . cm.
   b. Aria unei baze a cilindrului este de . . . . . . cm^2.
   c. Volumul cilindrului este de . . . . . . cm^3.

2. Un cilindru gradat, cu diametrul bazei de 8 centimetri și înălțimea de 10 centimetri, este umplut pe trei sferturi cu apă. Introducem în apă un cub metalic având muchia de 5 centimetri. Are loc apa să se ridice în vas sau se va vărsa? **(3p)**

3. Un cilindru circular drept are aria secțiunii axiale de 64 cm^2 și aria totală de 96π cm^2. **(3p)**
   a. Arătați că raza cilindrului este $R = 4$ cm.
   b. Calculați volumul cilindrului.
   c. Determinați măsura unghiului pe care o diagonală a secțiunii axiale îl formează cu planul unei baze.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

Lecția 6: Conul circular drept și trunchiul de con circular drept: arii și volume

Cuvinte-cheie

con circular drept | trunchi de con circular drept | arie laterală/totală | volum

Utilitate

Cortul *tipi* are forma unui con și este construit, în mod tradițional, din pieile unor animale, fixate pe stâlpi de lemn. Acest gen de locuință a fost folosit de către indigenii din America de Nord. *Tipi* era o construcție durabilă, asigurând căldură și confort în timpul iernii, răcoare în arșița verii și nelăsând ploaia să pătrundă înăuntru. Cortul putea fi dezasamblat și împachetat repede atunci când teritoriul trebuia părăsit într-un timp scurt. Acest lucru era important pentru populațiile cu stil de viață nomad.

Cort *tipi*

6.1. Aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept

Situație problemă

Părinții Mariei decid să construiască o casă la marginea orașului. Tatăl Mariei merge, împreună cu fata, să vadă cum avansează lucrările. Ei constată că tocmai a venit un transport de nisip, care a fost depozitat sub forma unei movile conice. Tatăl ar vrea să știe câți metri cubi de nisip conține movila. Maria îl ajută să calculeze. Ia o bucată lungă de sfoară mărinărească și înconjoară cu ea baza grămezii; întinde apoi sfoara, îi măsoară lungimea, împarte la 6,28 (număr aproximativ egal cu 2π) și, astfel, determină raza bazei conului. Apoi aruncă sfoara peste vârful grămezii, reușind să măsoare deodată două generatoare ale conului. Cu teorema lui Pitagora, află înălțimea conului. Maria are acum toate datele care îi sunt necesare pentru a calcula câți metri cubi de nisip conține movila.

Movilă conică de nisip

De reținut

Considerăm un con circular drept de vârf V, având raza bazei R, înălțimea h și lungimea generatoarei G.

1. *Aria laterală a conului circular drept* este:

$$\mathcal{A}_\ell = \pi RG.$$

Într-adevăr, din Figura 1 deducem că aria laterală conului circular drept este egală cu aria sectorului de disc obținut prin desfășurarea suprafeței sale laterale.

Acest sector are raza egală cu generatoarea G a conului și unghiul la centru de măsură $\alpha° = \frac{R}{G} \cdot 360°$, deci aria sa este egală cu:

$$\pi G^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi G^2 \cdot \frac{R}{G} = \pi RG.$$

2. *Aria totală a unui con circular drept* este suma dintre aria sa laterală și aria bazei. Întrucât $\mathcal{A}_B = \pi R^2$, avem:

$$\mathcal{A}_t = \pi R(G + R).$$

3. *Volumul unui con circular drept* este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea conului:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

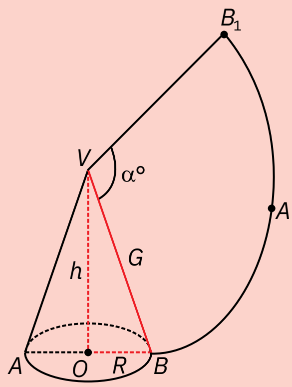


Figura 1. Conul circular drept și desfășurarea sa

4. Secționând un con circular drept cu un plan paralel cu baza, ca în Figura 2, obținem deasupra planului de secțiune un con mic, asemenea cu cel inițial. Raportul de asemănare al celor două conuri este raportul (comun al) razelor, înălțimilor sau generatoarelor:

$$k = \frac{A'O'}{AO} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VA'}{VA}.$$

Notând cu $\mathcal{A}'_\ell$, $\mathcal{A}'_t$, $\mathcal{V}'$ aria laterală, aria totală și volumul conului mic și cu $\mathcal{A}_\ell$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ aria laterală, aria totală și volumul conului mare, se observă imediat că:

$$\frac{\mathcal{A}'_\ell}{\mathcal{A}_\ell} = \frac{\mathcal{A}'_t}{\mathcal{A}_t} = k^2; \qquad \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = k^3.$$

Corpul geometric aflat sub planul de secțiune este un trunchi de con circular drept.

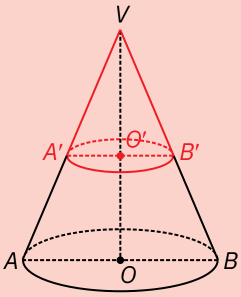


Figura 2

5. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul VOB, dreptunghic în O, deducem următoarea relație între elementele conului, utilă în rezolvarea problemelor:

$$G^2 = R^2 + h^2.$$

6.2. Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept

Situație problemă

Rareș l-a invitat pe George acasă la el și vrea să-l servească pe prietenul său cu ceva dulce. A scos din frigider o înghețată uriașă, într-un cornet în formă de con, plin, dar care nu este umplut cu vârf, cu înălțimea de 20 de centimetri. Rareș e hotărât s-o împartă în mod egal cu George, însă trebuie să se grăbească, pentru că înghețata a început să se topească. Ia un cuțit, se pregătește să taie cornetul pe la jumătatea înălțimii și îi spune lui George că va păstra pentru sine partea conică.

— Nu ar fi corect, își dă seama George –, atunci partea mea ar fi mult mai mare decât cea care ți-ar rămâne ție. De fapt, ar trebui ca volumul trunchiului de con pe care îl voi mânca eu să fie egal cu volumul conului care îți rămâne.

— Și cum calculăm volumul trunchiului, că nu îi știm nici înălțimea, nici raza mică? Până ne dăm seama, se topește înghețata!

— De fapt, cred că putem găsi o metodă mai rapidă. Raportul dintre volumul cornetului și volumul părții tale trebuie să fie 2. Fiind conuri asemenea, raportul înălțimilor lor este acel număr care, ridicat la puterea a treia, dă 2. Uite, fac niște încercări pe telefon. $(1{,}5)^3$ dă prea mult, la fel $(1{,}4)^3$, $(1{,}3)^3$, iar $(1{,}2)^3$ dă prea puțin. Aaa, $(1{,}26)^3$ dă foarte aproape de 2. Atunci, dacă h este înălțimea conului, $\frac{20}{h} \simeq 1{,}26$, deci $h = 15{,}87$ cm (sau foarte aproape). Înseamnă că înălțimea trunchiului care îmi revine mie este în jur de 4,13 cm.

Când cei doi tocmai au terminat de rezolvat problema, ajunge la Rareș și Maria.

— Puteați împărți înghețata în două părți egale tăind-o după o secțiune axială. Era mult mai simplu! le spune ea.

De reținut

Considerăm trunchiul de con circular drept, cu baza mare de centru O și rază R, baza mică de centru O' și rază r, înălțimea h și generatoarea $AA' = g$ (Figura 3).

1. *Aria laterală a trunchiului de con circular drept* este aria sectorului de coroană circulară care se obține prin desfășurarea suprafeței laterale a trunchiului.

Cu notațiile din Figura 3, această arie este egală cu $\pi \cdot R \cdot VB - \pi \cdot r \cdot VB' =$
$= \pi \cdot R \cdot VB - \pi \cdot kR \cdot k\,VB = \pi \cdot R \cdot VB(1 - k^2) =$

$$= \pi \cdot R \cdot VB(1-k)(1+k) = \pi \cdot VB\left(1 - \frac{VB'}{VB}\right) \cdot R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \pi(VB - VB')(R + r) = \pi g(R + r).$$

În concluzie, aria laterală a trunchiului de con circular drept este dată de formula $\mathcal{A}_\ell = \pi g(R + r)$.

Să observăm că am notat generatoarea trunchiului $BB' = g$; a nu se face confuzie cu generatoarea $VB = G$ a conului din care provine trunchiul; de fiecare dată vom ține seama de context.

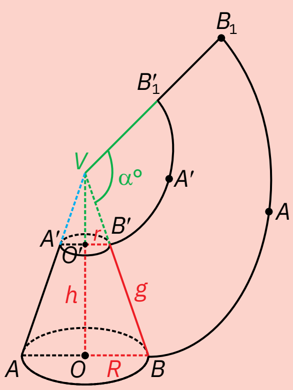


Figura 3. Trunchiul de con circular drept și desfășurarea sa

2. *Aria totală a trunchiului de con circular drept* este suma dintre aria laterală și ariile bazelor sale:

$$\mathcal{A}_t = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

3. *Volumul trunchiului de con circular drept* este

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

Demonstrația acestei formule este întru totul analoagă cu demonstrația formulei pentru volumul trunchiului de piramidă. V-o propunem ca exercițiu.

4. Din trapezul dreptunghic $OBB'O'$ se deduce următoarea relație între elementele trunchiului de con circular drept, utilă în rezolvarea problemelor:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2.$$

Activitate independentă

Alcătuiți o fișă de recapitulare a noțiunilor teoretice învățate despre conul circular drept și despre trunchiul de con circular drept, cu următoarele repere:

- conul circular drept/trunchiul de con circular drept și reprezentările acestora;
- elementele unui con/trunchi de con circular drept;
- desfășurarea suprafeței laterale/totale a conului/trunchiului de con circular drept;
- secțiunile paralele cu baza/axiale în conul/trunchiul de con circular drept;
- determinarea a diferite distanțe și măsuri de unghiuri în interiorul unui con/trunchi de con circular drept.

Surse de informare: manual (Lecțiile 4, 8, 9, 10 și 11 din Unitatea 4), caietele de notițe, internet etc.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1. Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un semicerc. Determinați valoarea raportului dintre aria secțiunii axiale și aria bazei conului.

Rezolvare

Din formula care dă unghiul sectorului de disc ce reprezintă desfășurarea conului circular drept, avem: $180° = \frac{R}{G}\cdot 360° \Rightarrow G = 2R$. Rezultă că secțiunea axială este un triunghi echilateral de latură $2R$, având aria $\frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$. Valoarea raportului cerut este $\frac{R^2\sqrt{3}}{\pi R^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ $(\approx 0{,}55)$.

2. O piesă din lemn are forma unui con circular drept, cu raza $R = 4$ dm și înălțimea $h = 4\sqrt{2}$ dm. Cioplim din această piesă un cub, cu o față pe baza conului, având volumul maxim posibil. Determinați muchia acestui cub.

Rezolvare

Fie cubul $MNPQM'N'P'Q'$, cu fața $MNPQ$ pe baza conului, ca în Figura 4. Fața $M'N'P'Q'$ este inclusă într-un plan paralel cu planul bazei conului. Pentru a maximiza volumul cubului, latura acestuia trebuie să fie cât mai mare și atunci vârfurile feței $M'N'P'Q'$ trebuie să aparțină cercului de intersecție dintre suprafața laterală a conului și un plan paralel cu baza acestuia. Alegem generatoarea VA a conului care conține punctul M', iar O și O' sunt centrele fețelor $MNPQ$ și $M'N'P'Q'$ ale cubului (și, totodată, O este centrul bazei conului, iar O' este centrul cercului de secțiune). Notăm cu a muchia cubului (în decimetri); atunci $OO' = a$, $VO' = VO - OO' = 4\sqrt{2} - a$, iar $M'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

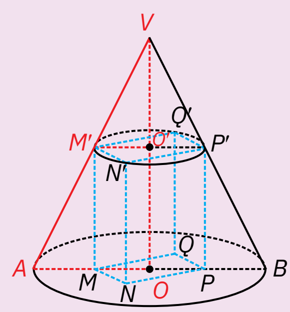


Figura 4

Din asemănarea evidentă $\Delta VM'O' \sim \Delta VAO$, deducem că $\frac{VO'}{VO} = \frac{M'O'}{AO}$, prin urmare $\frac{4\sqrt{2} - a}{4\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\cdot 4}$, de unde $a = 2\sqrt{2}$ dm.

3. Un trunchi de con circular drept are înălțimea $h = 3$ cm și volumul $\mathcal{V} = 63\pi$ cm^3. O generatoare a trunchiului formează cu planul unei baze un unghi cu măsura de 45°. Determinați aria totală a trunchiului.

Rezolvare

Fie $ABB'A'$ o secțiune axială a trunchiului, O și O' centrele bazelor și P proiecția punctului A' pe AO, ca în Figura 5. Cum $A'P \parallel OO'$, rezultă că P este proiecția punctului A' pe planul bazei mari, deci $\sphericalangle A'AP$ este unghiul format de generatoarea AA' cu planul bazei mari și are măsura de 45°. Deducem că triunghiul PAA' este dreptunghic isoscel, cu $PA = PA' = h = 3$ cm și $AA' = g = 3\sqrt{2}$ cm; dacă r și R sunt razele bazelor, avem $R = AO = AP + PO = AP + A'O' = 3 + r$.

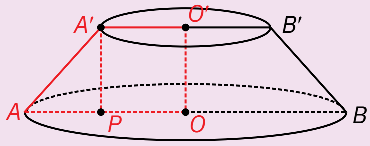


Figura 5

Înlocuim în formula volumului: $\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) \Rightarrow 63\pi = \frac{\pi \cdot 3}{3}\left((r+3)^2 + r^2 + (r+3)\cdot r\right) \Rightarrow 63 = 3r^2 + 9r + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + 3r - 18 = 0 \Rightarrow (r+6)(r-3) = 0 \Rightarrow r \in \{-6, 3\}$.

Reținem valoarea $r = 3$ cm și, apoi, $R = 6$ cm. Avem: $\mathcal{A}_\ell = \pi g(R + r) = 27\sqrt{2}\pi$ cm^2, $\mathcal{A}_B = \pi R^2 = 36\pi$ cm^2, $\mathcal{A}_b = \pi r^2 = 9\pi$ cm^2, prin urmare $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = 9(3\sqrt{2} + 5)\pi$ cm^2.

Probleme propuse

1. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu latura de 6 centimetri. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului.
2. Un con circular drept are aria laterală $\mathcal{A}_\ell = 40\pi$ cm^2 și aria totală 56π cm^2. Determinați volumul conului.
3. Raza, înălțimea și generatoarea unui con circular drept au, în centimetri, lungimile $2 - x$, $9 - x$, respectiv $10 - x$, unde x este un număr real. Aflați aria totală a conului.
4. O generatoare a unui con circular drept are lungimea de 10 centimetri și formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Calculați aria laterală și volumul conului.
5. Triunghiul isoscel VAB ($VA = VB$) este o secțiune axială a unui con circular drept. Proiecția înălțimii VO pe generatoarea VA are lungimea de 32 cm, iar proiecția razei AO pe generatoarea VA are lungimea de 18 cm. Determinați volumul conului.
6. Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sfert dintr-un disc având raza de 12 centimetri. Aflați aria laterală și aria totală ale conului.
7. O bucată de carton are forma unui triunghi dreptunghic ABC, cu catetele $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm. Determinați ariile totale și volumele corpurilor care se obțin prin rotirea, pe rând, a bucății de carton în jurul dreptelor:

   a. AC (Figura 6); b. AB (Figura 7); c. BC (Figura 8).

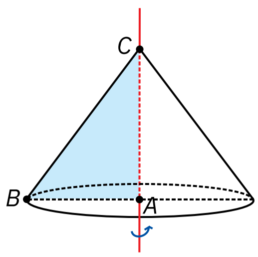


Figura 6

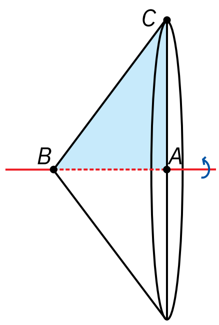


Figura 7

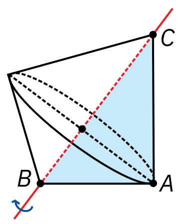


Figura 8

8. Pentru a vopsi un con circular drept din lemn, am avea nevoie de 300 mililitri de vopsea. Tăiem conul paralel cu baza sa, trecând prin mijlocul înălțimii. Ce cantitate de vopsea ar fi necesară pentru a acoperi conul mic obținut?
9. Un con circular drept din lemn cântărește 400 de grame. Tăiem conul paralel cu baza sa, trecând prin mijlocul înălțimii. Care este masa conului mic obținut? Dar masa trunchiului de con?
10. Un con circular drept are raza $R = 15$ cm și înălțimea $h = 36$ cm. Secționăm conul cu un plan paralel cu baza, astfel încât înălțimea trunchiului să fie de 12 centimetri. Calculați ariile totale $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ și $\mathcal{A}''$ ale conului inițial, conului mic, respectiv trunchiului de con. Este adevărată egalitatea $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$? Cum explicați?

11. Un con circular drept are înălțimea de 6 centimetri. Secționăm conul cu un plan paralel cu baza, astfel încât conul mic obținut să aibă aria laterală de două ori mai mare decât aria laterală a trunchiului de con. Arătați că înălțimea trunchiului este mai mică de 1,11 centimetri.

12. O găleată are forma unui trunchi de con circular drept, cu razele bazelor de 16 centimetri, respectiv 12 centimetri și înălțimea de 36 centimetri. Găleata este plină cu apă. Vărsăm toată apa în pahare cilindrice cu raza de 4 centimetri și înălțimea de 12 centimetri. Câte pahare se vor umple?

13. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor de 10 centimetri și 5 centimetri, iar aria sa laterală este 195π cm^2. Determinați înălțimea conului din care provine trunchiul.

14. Trapezul $ABCD$, cu $BC = CD = DA$, este o secțiune axială a unui trunchi de con circular drept. Generatoarea AD formează cu planul unei baze un unghi cu măsura de 60°, iar distanța de la punctul A la dreapta BC este de $12\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul trunchiului de con.

15. În Figura 9, semicercurile roșii au razele $OA = 12$ cm și $OB = 6$ cm. Înfășurăm suprafața hașurată, obținând un trunchi de con circular drept (fără baze). Determinați înălțimea acestui trunchi.

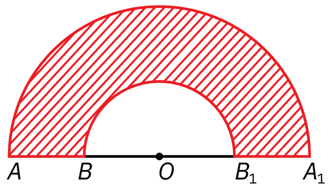


Figura 9

Autoevaluare

1. Un con circular drept are raza de 5 centimetri și generatoarea de 10 centimetri. Completați spațiile punctate, astfel încât să obțineți propoziții adevărate. **(3p)**

a. Aria bazei conului este .... cm^2.

b. Aria laterală a conului este .... cm^2.

c. Aria totală a conului este .... cm^2.

2. O amforă are forma unui con circular drept, care stă cu baza în sus și vârful în jos și conține 665,5 litri de ulei, care se ridică până la înălțimea de 1,1 metri. Adăugăm în amforă 198,5 dm^3 măsline, pentru a le conserva. Cu câți centimetri se ridică nivelul uleiului în vas? **(3p)**

3. Trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB = 24$ cm și $BC = CD = DA = 12$ cm, este o secțiune axială a unui trunchi de con circular drept. **(3p)**

a. Aflați aria laterală a trunchiului.

b. Demonstrați că măsura unghiului pe care generatoarea AD îl formează cu planul bazei mari este de 60°.

c. Determinați volumul conului din care provine trunchiul.

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 20 de minute.

5.7

Lecția 7: Sfera

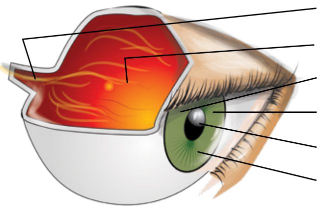
Cuvinte-cheie

sferă bilă arie volum

Utilitate

Planetele, stelele și alte corpuri cerești au formă aproape sferică datorită gravitației, care tinde să distribuie masa uniform în jurul centrului. Coordonatele geografice (latitudine, longitudine) și sistemul GPS (Global Positioning System) folosesc modelarea sferică a Pământului pentru a preciza poziția unui punct, respectiv pentru a calcula distanța între anumite puncte de pe suprafața Pământului.

Ochiul uman (globul ocular) are formă aproximativ sferică. Lumina pătrunde în ochi printr-o membrană transparentă (corneea) și ajunge la altă membrană, numită retină, pe care se formează imaginile obiectelor (care sunt reale, mai mici, și răsturnate), în urma unei refracții triple. Această schimbare a direcției luminii este posibilă datorită faptului că, deși ochiul uman este plin, mediile din interiorul său (corneea, umoarea apoasă, cristalinul și umoarea sticloasă) sunt transparente.



De reținut

1. Fie O un punct dat în spațiu, iar R un număr real pozitiv.
Sfera de centru O și rază R, notată $\mathcal{S}(O, R)$, este mulțimea tuturor punctelor din spațiu aflate la distanța R față de punctul O (Figura 1).
Bila (corpul sferic) de centru O și rază R, notată $\mathcal{B}(O, R)$, este mulțimea tuturor punctelor din spațiu aflate la distanță cel mult egală cu R față de punctul O.
Ne amintim că am considerat toate corpurile geometrice studiate până acum ca fiind „pline”. Această cerință este îndeplinită de bilă, dar nu și de sferă. Altfel spus, bila este un corp geometric, în timp ce sfera este o suprafață.

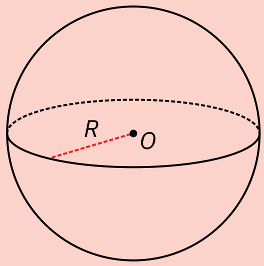


Figura 1

2. Intersecția dintre un plan și o sferă poate fi:
- mulțimea vidă – spunem că *planul este exterior sferei*;
- un punct – spunem că *planul este tangent sferei*;
- un cerc – spunem că *planul este secant sferei*.

Intersecția unei sfere cu un plan care conține centrul sferei este un cerc având raza egală cu raza sferei, numit *cerc mare al sferei*.
A secționa o sferă/o bilă înseamnă a le intersecta cu un plan secant; secțiunea va fi un cerc/un disc.

3. Pentru a calcula aria unei sfere, nu ne mai putem folosi de desfășurarea acesteia, așa cum am procedat în cazul cilindrului, conului sau trunchiului de con; sfera nu este desfășurabilă într-un plan.
Pentru a calcula aria sferei de rază R, folosim formula:

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2.$$

4. Pentru a calcula volumul bilei de rază R, folosim formula

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Sfera, fiind doar o suprafață, nu are volum. Totuși, este acceptată exprimarea „volumul sferei” pentru a denumi volumul bilei ce se obține reunind sfera cu interiorul său.

Iată o interesantă justificare intuitivă a formulei care dă volumul sferei.

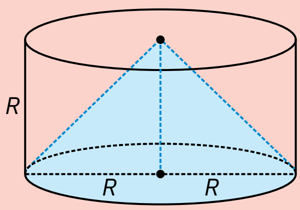


Figura 2

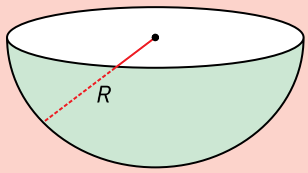


Figura 3

Considerăm un vas având forma unui cilindru cu raza egală cu înălțimea, ambele de lungime R (Figura 2). Un con cu raza și înălțimea egale cu R ocupă o parte din interiorul vasului. O „ceașcă” are forma unei jumătăți de sferă cu raza R și este plină până sus cu apă (Figura 3). Vărsând apa în vas, aceasta va umple perfect partea rămasă în afara conului.

Înseamnă că volumul semisferei este diferența dintre volumul cilindrului și cel al conului: $\pi R^2 \cdot R - \frac{\pi R^2 \cdot R}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$.

Volumul sferei va fi dublu, adică $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Mate practică

Pentru un proiect la geografie, Denisa trebuie să calculeze suprafața de pe globul pământesc acoperită de mări și oceane, știind că uscatul ocupă aproape 30% din suprafața Pământului și că metrul este a 40 000 000-a parte din lungimea unui meridian. Meridianul terestru are lungimea aproximativ egală cu $2\pi R$, unde R este raza globului pământesc; deci $R \simeq 6370$ km. Denisa poate afla acum suprafața Pământului, care este de aproximativ 510 000 000 km^2; prin urmare, mările și oceanele ocupă, în total, aproximativ 360 000 000 km^2.

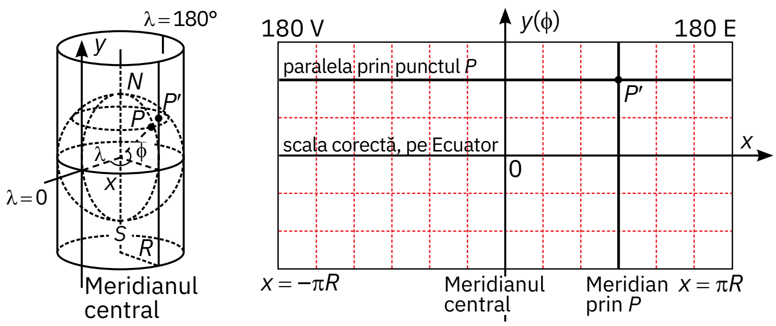
Cultură matematică

Corpurile geometrice despre care am învățat până acum puteau fi desfășurate pe un plan. Pentru sferă, acest lucru nu este posibil. Și atunci, cum poate fi realizată o hartă a lumii? Geograful flamand Gerardus Mercator a găsit, în 1569, o soluție strălucită, care a schimbat decisiv viața navigatorilor. El a inclus sfera ce reprezintă Pământul într-un cilindru înalt, fără baze, care îi este tangent exterior, și a prelungit razele sferei până la întâlnirea cu cilindrul. Astfel, a asociat fiecărui punct de pe sferă (mai puțin celor doi poli) un punct unic de pe cilindru. Desfășurând, apoi, suprafața laterală a cilindrului, a obținut harta globului pământesc.

Deși foarte utilă navigatorilor, proiecția Mercator prezintă un defect: determină supradimensionarea obiectelor aflate departe de Ecuator. Proiecția Mercator a fost cea mai folosită metodă de realizare a hărților până la începutul secolului XX.

Atlasele moderne folosesc variante îmbunătățite ale acestei proiecții pentru reprezentarea plană a zonelor îndepărtate de Ecuator. De exemplu, o idee este aceea de a-i pune globului un „coif” conic, cu vârful deasupra unuia dintre poli, și de a proiecta partea de deasupra respectivului cerc polar pe suprafața conului, nu pe cea a cilindrului.

Hartă realizată folosind proiecția Mercator.
Observați supradimensionarea Groenlandei!



Proiecția Mercator

Probleme rezolvate

1. Dintr-o bilă din lemn se ciopleşte un cub, cu pierderi minime de material. Arătați că, pentru a obține cubul, trebuie îndepărtat mai mult de 60% din lemn.

Rezolvare

Pentru a minimiza pierderile de material, diagonalele cubului care se obține trebuie să fie diametre ale bilei. Notăm cu R raza bilei și cu ℓ latura cubului; din $\ell\sqrt{3} = 2R$ obținem $\ell = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Raportul dintre volumul cubului și volumul bilei este: $\frac{\ell^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} < \frac{2}{3\cdot 1{,}7} < \frac{2}{5}$. Deci se îndepărtează mai mult de $\frac{3}{5}$ din lemn.

2. Demonstrați că intersecția dintre un plan și o sferă poate fi mulțimea vidă, un punct sau un cerc.

Rezolvare

Considerăm planul α și sfera $\mathcal{S}(O, R)$. Notăm cu P proiecția punctului O pe planul α și comparăm lungimea segmentului OP cu raza R a sferei.

I. Dacă $OP > R$, atunci $\alpha \cap \mathcal{S} = \varnothing$ (Figura 4). Într-adevăr, oricare ar fi $M \in \alpha$, avem $OM \geq OP > R$, deci $M \notin \mathcal{S}$.

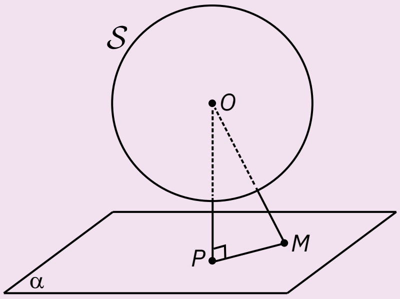


Figura 4

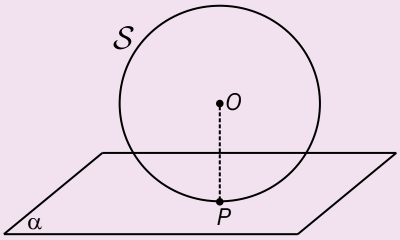


Figura 5

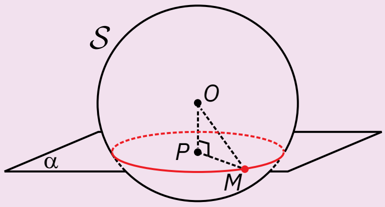


Figura 6

II. Dacă $OP = R$, atunci $\alpha \cap \mathcal{S} = \{P\}$ (Figura 5): este evident că $P \in \alpha \cap \mathcal{S}$, iar dacă $M \in \alpha \setminus \{P\}$, atunci $OM > OP = R$, deci $M \in \mathcal{S}$.

III. Dacă $OP < R$, fie $M \in \alpha \cap \mathcal{S}$ (Figura 6). Din triunghiul dreptunghic OPM, $\sphericalangle P = 90°$, obținem $PM = \sqrt{OM^2 - OP^2}$, așadar punctul M se află la distanța $r = \sqrt{R^2 - OP^2}$ față de P. Rezultă că M aparține cercului $\mathcal{C}(P, r)$, situat în planul α. Reciproc, este evident că orice punct al acestui cerc aparține $\alpha \cap \mathcal{S}$.

Probleme propuse

1. Priviți imaginile de mai jos. Care dintre obiecte pot fi considerate ca fiind sfere și care pot fi gândite ca fiind bile?

a.  **b.**  **c.**  **d.** 

2. O sferă are diametrul de 6 centimetri. Calculați aria și volumul sferei.

3. Trei bile identice au razele de 6 centimetri. Prima este fabricată din aluminiu, a doua din oțel, iar a treia din plumb. Aflați masa fiecărei bile, aproximând rezultatul la un număr întreg de grame. (Ce informații vă mai sunt necesare? Aflați-le de pe internet sau din manualele de fizică/chimie!)

4. Pentru a vopsi suprafața unei sfere, avem nevoie de 50 de mililitri de vopsea. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi o sferă cu raza de trei ori mai mare?

5. O bilă metalică are masa de 4050 de grame. Cât cântărește o bilă cu raza de trei ori mai mică, fabricată din același material?

6. Se topesc împreună 64 de bile metalice identice, fiecare cu raza de 1 centimetru. Din materialul obținut, fără pierderi, se fabrică o singură bilă. Care este aria acesteia? Dar volumul?

7. O bilă din cupru are raza de 2,7 centimetri. Bila este acoperită uniform cu o foiță de aur având grosimea de 3 milimetri. Aflați masa aurului folosit, știind că densitatea aurului este $\rho = 20$ g/cm^3.

8. Dintr-un cub din lemn, având latura de 10 centimetri, se ciopleşte o bilă, cu pierderi minime de material. Pentru a vopsi 1 dm^2 de lemn, ar fi necesare 9 grame de vopsea. Ajung 30 de grame de vopsea pentru a acoperi bila cioplită?

9. O sferă cu raza de 15 centimetri este secționată cu un plan aflat la distanța de 9 centimetri față de centrul său. Aflați lungimea cercului de secțiune.

10. O sferă cu raza de 15 centimetri este secționată cu două plane paralele, care determină cercuri de secțiune având ariile 81π cm^2 și 144π cm^2. Determinați distanța dintre cele două plane.

11. Punctele A, B, C se află pe o sferă. Triunghiul ABC este dreptunghic, cu ipotenuza $BC = 18$ cm, iar distanța de la centrul sferei la planul (ABC) este de 12 centimetri. Aflați raza sferei.

12. *ABCD* este un tetraedru, cu $BC = 10$ cm și $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 90°$. Determinați un punct *O* egal depărtat de punctele *A*, *B*, *C* și *D* și calculați aria sferei $\mathcal{S}(O, OA)$.

13. Punctele *A*, *B*, *C* și *D* se află pe o sferă altfel încât $AB = AC = AD = BC = CD = BD = 4\sqrt{6}$ cm. Determinați aria și volumul sferei.

Portofoliu

Conform statisticilor, speranța de viață în România este de 75 de ani. Pentru o viață sănătoasă, o persoană trebuie să consume zilnic doi litri de lichide.

- Estimați care este volumul total de lichide pe care îl consumă un om într-o viață.
- Aproximați care este raza unei sfere în care poate încăpea toată această cantitate.
- Desenați un om și sfera de mai înainte, respectând proporțiile.

Adunați materialele portofoliului într-o mapă, în vederea evaluării finale.

Proiect
Formula lui Simpson

Există o formulă, atribuită lui Thomas Simpson (deși Bonaventura Cavalieri o folosea în 1639, cu un secol mai devreme), care permite calculul aproximativ al volumelor corpurilor geometrice. Această formulă, *o formulă universală*, este $\mathcal{V} \simeq \frac{h}{6}(\mathcal{A}_1 + 4\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)$, unde h este înălțimea corpului, $\mathcal{A}_1$ este aria bazei inferioare, $\mathcal{A}_2$ este aria secțiunii paralele cu bazele, ce trece prin mijlocul înălțimii, iar $\mathcal{A}_3$ este aria bazei superioare.

Ce veți urmări în cadrul proiectului:

- Demonstrați că formula lui Simpson permite calculul exact al volumelor corpurilor geometrice studiate în clasa a VIII-a.
- Găsiți valori potrivite pentru razele bazelor și pentru raza „medie” ale butoiului din imagine, știind că are capacitatea de 100 de litri.
- Puteți găsi o formulă asemănătoare, care să permită calculul ariilor suprafețelor plane?

Resurse: se pot folosi cele oferite public pe internet.

Prezentare: realizați o prezentare PowerPoint, cu text și imagini.

Evaluare: se va ține cont de calitatea documentării, selectarea informațiilor relevante, acuratețea prezentării, opiniile exprimate de colegi în urma prezentării proiectului și calitatea răspunsurilor oferite la întrebările acestora.

Recapitulare și evaluare

Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul) • Prisma: arii și volum • Piramida regulată: arii și volum • Trunchiul de piramidă regulată: arii și volum • Cilindrul circular drept: arii și volum • Conul și trunchiul de con: arii și volume • Sfera

1. Asociați, prin săgeți, fiecăruia dintre corpurile rotunde din prima coloană acea formulă din cea de-a doua coloană care îi dă volumul:

a. cilindru circular drept	**A.** $\frac{4\pi R^3}{3}$
b. con circular drept	**B.** $\frac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$
c. trunchi de con circular drept	**C.** $\pi R^2 h$
	D. $\frac{\pi R^2 h}{3}$
d. sferă	**E.** $4\pi R^2$

2. O prismă patrulateră regulată are muchia bazei de 4 cm și înălțimea de 6 cm. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false.

a. Aria unei baze este de 24 cm^2.

b. Aria laterală este de 96 cm^2.

c. Aria laterală și volumul prismei sunt egale.

d. Diagonala prismei are lungimea de $2\sqrt{17}$ cm.

e. Lungimea celui mai scurt drum de pe suprafața laterală a prismei, care unește două vârfuri diagonal opuse, este de 10 centimetri.

3. Un cilindru circular drept are raza de 3 cm și generatoarea de $6\sqrt{3}$ centimetri. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate:

a. Aria laterală a cilindrului este de . . . . . . cm^2.

b. Volumul cilindrului este de . . . . . . cm^3.

c. Diagonala secțiunii axiale este de . . . . . . cm.

d. Unghiul dintre diagonalele unei secțiuni axiale are măsura de . . . . . .°.

e. Unghiul format de o diagonală a unei secțiuni axiale cu planul unei baze are măsura de . . . . . .°.

4. Un trunchi de con circular drept are $r = 3$ cm, $R = 6$ cm și $h = 4$ cm (notațiile sunt cele uzuale). Asociați fiecăreia dintre mărimile din coloana din stânga valoarea corespunzătoare din coloana din dreapta:

	A. 36π cm^2
a. g	**B.** 84π cm^3
b. $\mathcal{A}_\ell$	**C.** 5 cm
c. $\mathcal{A}_B$	**D.** 45π cm^2
d. $\mathcal{A}_t$	**E.** 90π cm^2
e. $\mathcal{V}$	**F.** 252π cm^3.

5. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are $l = 4\sqrt{3}$ cm, $L = 16\sqrt{3}$ cm și $a_T = 10$ cm (notațiile sunt cele uzuale). Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate.

a. Înălțimea trunchiului este . . . . . . cm.

b. Muchia laterală a trunchiului este . . . . . . cm.

c. Înălțimea piramidei din care provine trunchiul este . . . . . . cm.

d. Aria totală a trunchiului este . . . . . . cm^2.

e. Volumul trunchiului este . . . . . . cm^3.

6. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu muchia bazei $AB = 8$ cm și înălțimea $VO = 4\sqrt{2}$ cm.

a. Determinați aria totală a piramidei.

b. Un con circular drept are aceeași înălțime și același volum ca piramida $VABCD$. Arătați că raza conului este mai mare de $2\sqrt{5}$ cm.

c. Planul α conține muchia VC și este paralel cu dreapta BD. Calculați distanța de la punctul A la planul α.

7. Un recipient fără capac are forma unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 5 dm și înălțimea de 8 dm.

a. Aflați aria tuturor fețelor pereților recipientului.

b. Calculați capacitatea recipientului, în litri.

c. Vasul conține apă până la înălțimea de 1 dm. Introducem în vas un corp metalic, având forma unui cub cu muchia de 3 dm. Cu câți decimetri se ridică nivelul apei?

8. $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, cu înălțimea $VO = 4$ cm și apotema bazei $OM = 3$ cm ($M \in BC$). Punctul G este centrul de greutate al triunghiului VBC.

a. Calculați volumul piramidei.

b. Aflați tangenta unghiului dintre dreapta OG și planul (ABC).

c. Determinați suma distanțelor de la punctul G la muchiile laterale ale piramidei.

9. VA, VB și VC sunt trei generatoare ale unui con circular drept astfel încât $VA \perp VB \perp VC \perp VA$ și $VA = 2\sqrt{6}$ cm.

a. Demonstrați că $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată.

b. Arătați că raza bazei conului este de 4 cm.

c. Calculați volumul conului.

10. Pe suprafața unei sfere cu raza $R = 4$ cm se consideră punctele A, B și C astfel încât $AB = BC = CA = 6$ cm.

a. Aflați aria sferei.

b. Determinați distanța de la centrul O al sferei la planul (ABC).

c. Calculați distanța de la punctul A la planul (OBC).

Testul 1

1. $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 8$ cm. Punctele A', B', C', D' sunt mijloacele muchiilor VA, VB, VC, respectiv VD. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate:

(1p) **a.** Apotema piramidei este de . . . . cm.

(1p) **b.** Aria laterală a piramidei este de . . . . cm^2.

(1p) **c.** Volumul piramidei este de . . . . cm^3.

(1p) **d.** Volumul trunchiului $ABCDA'B'C'D'$ este de . . . . cm^3.

(1p) **e.** Dacă $AC' \cap CA' = \{G\}$, atunci $VG =$ . . . . cm.

2. Un vas cilindric are ca secțiune axială pătratul $ABCD$, cu latura $AB = 20$ cm, și este plin pe jumătate cu apă. Neglijăm grosimea pereților vasului și facem calculele cu o zecimală exactă.

(1p) **a.** Reprezentați vasul printr-o figură.

(1p) **b.** Câți litri de apă conține vasul?

(1p) **c.** Care este lungimea celui mai scurt drum între punctele A și C, parcurs pe suprafața vasului?

(1p) **d.** Introducem în vas cinci bile sferice identice, cu raza de 3 cm. Cu câți centimetri se ridică nivelul apei?

Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată, cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 10$ cm. Completați spațiile punctate astfel încât afirmațiile obținute să fie adevărate.

(1p) **a.** Lungimea diagonalei prismei este $AC' =$ . . . . cm.

(1p) **b.** Aria secțiunii diagonale a prismei este de . . . . cm^2.

(1p) **c.** Aria laterală a prismei este de . . . . cm^2.

(1p) **d.** Volumul prismei este de . . . . cm^3.

(1p) **e.** Aria proiecției triunghiului $A'BD$ pe planul $(B'BD)$ este de . . . . cm^2.

2. Un con circular drept are ca secțiune axială triunghiul echilateral VAB cu latura de 12 cm.

(1p) **a.** Realizați o figură corespunzătoare.

(1p) **b.** Calculați volumul conului.

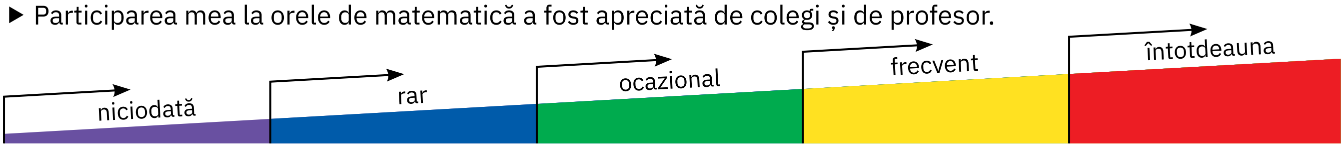
(1p) **c.** Care este lungimea celui mai scurt drum între punctele A și B, parcurs pe suprafața laterală a conului?

(1p) **d.** Secționăm conul cu un plan α paralel cu baza, astfel încât cele două corpuri obținute să aibă arii laterale egale. Aflați $d(V, \alpha)$.

Se acordă 1 punct din oficiu.

Fișă de observare sistematică a activității și a comportamentului elevilor

- Am fost preocupat(ă) să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



Evaluare sumativă 1

Subiectul I. Pe foaia de evaluare scrieți numai rezultatele. **(30 puncte)**

(5p) **1.** Suma elementelor mulțimii $\left[-2, \frac{9}{4}\right] \cap \mathbb{Z}$ este egală cu ....

(5p) **2.** Descompunerea în factori a expresiei $4x^2 - 1$ este ....

(5p) **3.** Abscisa punctului de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 6$, cu ordonata 4, este egală cu ....

(5p) **4.** Fie *VABC* un tetraedru regulat. Punctele *M* și *N* sunt mijloacele laturilor *AB* și *BC*. Măsura unghiului dintre dreptele *MN* și *VA* este egală cu ......°.

(5p) **5.** Volumul unui cub având diagonala de $6\sqrt{3}$ cm este egal cu ...... cm^3.

(5p) **6.** Fie *ABCDEFGH* un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AE = 6$ cm. Distanța de la punctul *E* la dreapta *BC* este egală cu ...... cm.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 5$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x + b$.

(7p) **a.** Determinați funcțiile *f* și *g* știind că punctul $A(-2; 7)$ aparține graficelor celor două funcții.

(8p) **b.** Pentru $a = 5$, determinați distanța de la originea sistemului de axe de coordonate *xOy* la graficul funcției *f*.

2. Se consideră expresia $E(x) = (2x - 5)^2 - 3(x - 3)(x + 3) + (3x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(7p) **a.** Arătați că $E(x) = 10x^2 - 26x + 53$.

(8p) **b.** Rezolvați ecuația $E(x) = 8x^2 - 21x + 50$.

Subiectul al III-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

În Figura 1, este reprezentat schematic un ghețar în formă de piramidă patrulateră regulată *VABCD*, cu $VA = AB = 6$ km. Un schior se deplasează pe traseul $V - M - P - C$, unde $VM = \frac{VC}{4}$ și $VP = \frac{VB}{2}$.

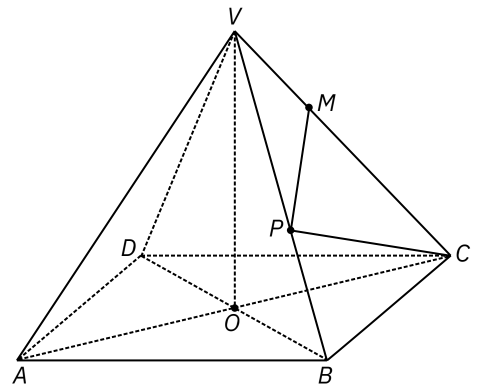


Figura 1

(7p) **a.** Determinați volumul ghețarului.

(7p) **b.** Calculați aria laterală a ghețarului.

(8p) **c.** Demonstrați că triunghiul *VMP* este dreptunghic.

(8p) **d.** Calculați distanța de la punctul *M* la planul (*ABC*).

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Evaluare sumativă 2

Subiectul I. Pe foaia de evaluare scrieți numai rezultatele. **(30 puncte)**

(5p) **1.** Dacă $A = (-\sqrt{2}, 3)$ și $B = (-2, 1)$, atunci $A \cap B = \ldots\ldots\ldots$

(5p) **2.** Descompunerea în factori a expresiei $x^2 + 8x + 16$ este $\ldots\ldots\ldots$

(5p) **3.** Ordonata punctului de intersecție a graficului funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 7$, cu axa Oy este egală cu $\ldots\ldots\ldots$

(5p) **4.** Se consideră o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$, cu bazele triunghiuri echilaterale. Dacă $AB = BB'$, atunci măsura unghiului dintre dreptele BC' și AA' este egală cu$\ldots\ldots^\circ$.

(5p) **5.** Un con circular drept are raza bazei de 8 centimetri și generatoarea de 10 centimetri. Volumul conului este egal cu $\ldots\ldots\pi$ cm^3.

(5p) **6.** Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, de vârf V și $VA = AC = 6$ cm, atunci distanța de la punctul V la planul (ABC) este egală cu $\ldots\ldots$ cm.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$, unde m și p sunt numere reale.

(7p) **a.** Pentru $m = 1$ și $p = 2$, reprezentați grafic funcția f în sistemul de coordonate xOy.

(8p) **b.** Determinați numerele reale m și p, știind că $f(1) = 2$ și $A(2, 3) \in G_f$.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1}\right) : \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$.

(7p) **a.** Arătați că $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, pentru orice număr real x.

(8p) **b.** Demonstrați că $E(x) = \dfrac{2x-6}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$.

Subiectul al III-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 12$ cm. O față a cubului se colorează cu albastru, două cu verde, iar restul fețelor – cu roșu.

(7p) **a.** Determinați volumul cubului.

(7p) **b.** Calculați aria totală a cubului.

(8p) **c.** Determinați cât la sută din aria suprafeței vopsite cu roșu reprezintă aria suprafeței vopsite cu verde.

(8p) **d.** Dacă M este mijlocul muchiei $B'C'$ și O este centrul feței $BCC'B'$, determinați valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele $A'M$ și DO.

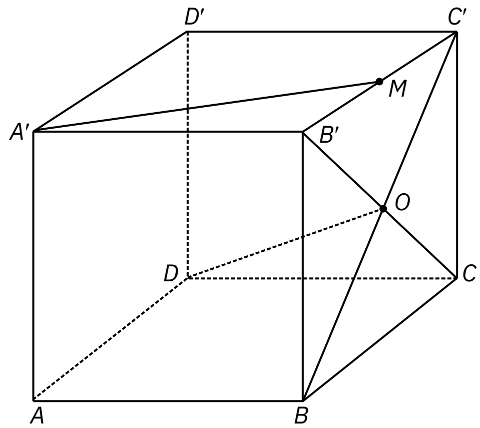


Figura 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Evaluare sumativă 3

Subiectul I. Pe foaia de evaluare scrieți numai rezultatele. **(30 puncte)**

(5p) **1.** Scrierea sub formă de interval a mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\}$ este . . . .

(5p) **2.** Rezultatul calculului $\frac{xy^3}{4} \cdot \frac{16}{3x^2y}$, $xy \neq 0$, este . . . .

(5p) **3.** Descompunerea în factori a expresiei $(x+1)^2 - 16$ este . . . .

(5p) **4.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $BC' \cap B'C = \{O\}$, atunci măsura unghiului dintre dreptele $A'O$ și $D'C$ este egală cu . . . . . .°.

(5p) **5.** Volumul unei sfere cu raza de 6 cm este egal cu . . . . . .π cm^3.

(5p) **6.** Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic, cu $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 5$ cm, atunci lungimea diagonalei AC' este egală cu . . . . . . cm.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-2| \leq 7\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 < \frac{5x+1}{4} \leq 4\right\}$.

(7p) **a.** Arătați că $A = \left[-\frac{5}{3}, 3\right]$ și $B = \left(-\frac{9}{5}, 3\right]$.

(8p) **b.** Determinați mulțimile $A \cap B$ și $A \cup B$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$.

(7p) **a.** Reprezentați grafic funcția f.

(8p) **b.** Determinați măsura unghiului format de reprezentarea grafică a funcției f și axa Ox.

Subiectul al III-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

În Figura 1 este reprezentat schematic un taburet în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu latura bazei mari $AB = 8$ dm, latura bazei mici $A'B' = 4$ dm și înălțimea $OO' = 5$ dm.

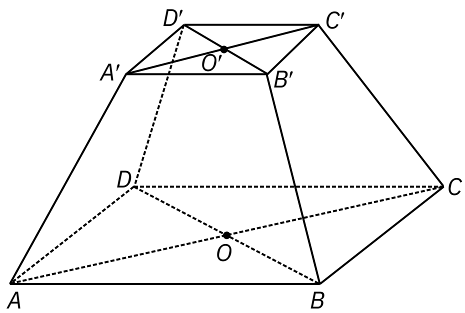


Figura 1

(7p) **a.** Calculați apotema trunchiului de piramidă.

(7p) **b.** Calculați volumul trunchiului de piramidă.

(8p) **c.** Suprafața laterală a taburetului este tapițată cu material textil. Stabiliți dacă 1 m^2 de material textil este suficient pentru confecționarea unui taburet $(5{,}38 < \sqrt{29} < 5{,}39)$.

(8p) **d.** Determinați volumul piramidei patrulatere regulate din care provine trunchiul.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Evaluare sumativă 4

Subiectul I. Pe foaia de evaluare scrieți numai rezultatele. **(30 puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural din intervalul $(3, 4\sqrt{5})$ este . . . .

(5p) **2.** Descompunerea în factori a expresiei $4x - 4 - x^2$ este . . . .

(5p) **3.** Dintre punctele $A(1, -3)$ și $B(-3, 1)$, pe graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x + 10$, este situat punctul . . . .

(5p) **4.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 8$ cm. Distanța de la punctul A' la planul (BDD') este egală cu . . . .

(5p) **5.** Aria laterală a unui tetraedru regulat cu latura de 12 cm este egală cu . . . . . . cm^2.

(5p) **6.** Dacă $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, de vârf V, și $VA + BC = 9$ cm, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este egală cu . . . . . . cm.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + 3$, $m \in \mathbb{R}$.

(7p) **a.** Determinați numărul real m știind că graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul de abscisă -3.

(8p) **b.** Pentru $m = 1$, calculați aria triunghiului format de graficul funcției f și sistemul de axe xOy.

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{7x - 3x^2}{1 - 9x^2} - \dfrac{3x}{1 - 2x - 3x^2} \cdot \left(1 + \dfrac{3x + x^2}{x + 3}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \pm\dfrac{1}{3}, 3\right\}$.

(7p) **a.** Arătați că $1 - 2x - 3x^2 = (x + 1)(1 - 3x)$, pentru orice număr real x.

(8p) **b.** Demonstrați că $E(x) = \dfrac{4x}{3x + 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \pm\dfrac{1}{3}, 3\right\}$.

Subiectul al III-lea. Pe foaia de evaluare scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

În Figura 1 este reprezentat schematic un abajur în formă de trunchi de con circular drept, cu raza bazei mari de 7 dm, raza bazei mici de 3 dm și înălțimea de 4 dm. Considerăm o secțiune axială $ABB'A'$ a trunchiului de con și notăm $\{V\} = AA' \cap BB'$.

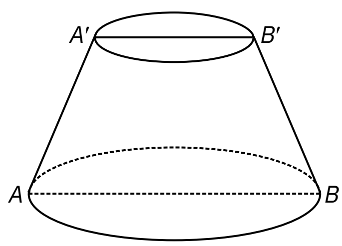


Figura 1

(7p) **a.** Arătați că generatoarea trunchiului este egală cu $4\sqrt{2}$ dm.

(7p) **b.** Calculați aria totală a conului.

(8p) **c.** Abajurul este ancorat de tavan printr-un fir VM, ce pornește din punctul V, situat pe tavan, și se termină în punctul M, mijlocul segmentului OO', unde O și O' reprezintă centrele bazelor trunchiului. Determinați lungimea firului VM.

(8p) **d.** Calculați $\sin(\sphericalangle AA', BB')$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Soluții

Unitatea 1. Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

2.a. $A=\{x \mid x=7k,\ k\in\mathbb{N},\ k\le 4\}$; **b.** $B=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{N}\}$; **c.** $C=\{x \mid x=4k+1,\ k\in\mathbb{N}\}$. **3.a.** $A=\left\{0; 2\sqrt{3}; \pi; \sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$; **b.** $B=\{2\sqrt{3}; \pi\}$; **c.** $C=\left\{0; -\frac{15}{5}\right\}$; **d.** $D=\left\{-\frac{15}{5}\right\}$. **4.a.** $3, 9, 15\in A$; $0, 3, 9\in B$; **b.** $112 \not\vdots\, 3$, deci $112\notin A$, $112\notin B$; $204=6\cdot 34=3\cdot 68 \Rightarrow 204\notin A$, $204\in B$; $333=6\cdot 55+3=3\cdot 111 \Rightarrow$ $\Rightarrow 333\in A$, $333\in B$; **c.** $6k+3=3(2k+1) \Rightarrow A\subset B$; $0\in B$, $0\notin A \Rightarrow B\not\subset A$. **5.a.** Card $A=20$, Card $B=21$. **b.** Produsul elementelor mulțimii A este egal cu $\frac{1}{21}$; produsul elementelor mulțimii B este egal cu $\frac{1}{253}$; $\frac{1}{21}>\frac{1}{253}$. **6.a.** $A=\{(-5, 1), (5, -1), (-1, 5), (1, -5)\}$; **b.** $B=\{(20, 0), (15, 2), (10, 4), (5, 6), (0, 8)\}$; **c.** $C=\{(5, 2)\}$; **d.** $xy+3x+3y=12 \Leftrightarrow (x+3)(y+3)=21$, de unde rezultă $x+3\in\{\pm 21, \pm 7, \pm 3, \pm 1\}$ și $y+3=\frac{21}{x+3}$. Obținem: $D=\{(-24, -4), (-10, -6), (-6, -10), (-4, -24), (-2, 18), (0, 4), (4, 0), (18, -2)\}$. **7.a.** 30; **b.** 36; **c.** 35; **d.** 7. **8.** Card $A<$ Card B. **9.a.** $A=\{x \mid x=3n+1,\ n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{x \mid x=3m+2,\ m\in\mathbb{N}\}$; **b.** 1, 4, 16, 25, 49. **c.** Orice pătrat perfect are una dintre formele $3k+1$ sau $3k$; **d.** Presupunând că A și B ar avea un element comun x, ar exista $m, n\in\mathbb{N}$, astfel încât $x=3n+1=3m+2$. Obținem $3(n-m)=1$, fals, deci $A\cap B=\varnothing$. **10.** $\mathcal{M}_1$ este mediatoarea segmentului AB, iar $\mathcal{M}_2$ este cercul de centru A și rază AB.

Autoevaluare. **1.** $A=\{x \mid x=k^3,\ k\in\mathbb{N},\ k\le 5\}$, $B=\{x \mid x=6k,\ k\in\mathbb{N},\ 1\le k\le 5\}$, $C=\{x \mid x=5k,\ k\in\mathbb{Z},\ -6\le k\le -3\}$. **2.a.** F; **b.** A; **c.** F. **3.** $M=\{-8, -2; 6\}$.

Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor

1.a. $(-3, 5)$; **b.** $[-2, 7)$; **c.** $(0, 13]$; **d.** $[-4, +\infty)$; **e.** $[-1, 8]$; **f.** $(5, +\infty)$; **g.** $(-\infty, 9)$; **h.** $(-\infty, 5]$. **3.** A; A; A; A; F; F; F; F; F; A; A. **6.a.** F; **b.** A; **c.** F; **d.** F. **7.** (1, *d*); (2, *a*); (3, *e*); (4, *c*). **9.a.** -4; **b.** 0. **10.a.** $\mathbb{R}$, $[0, 2)$; **b.** $[-2, 5)$, $(0, 3]$; **c.** $[-1, +\infty)$, $\{2\}$; **d.** $\mathbb{R}$, $\varnothing$; **e.** $(-\infty, 8)$, $(4, 6)$; **f.** $(-\sqrt{3}, \sqrt{7}-1)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. **11.** $m=\frac{2}{11}$. **13.a.** $A=[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$; **b.** $B=(-\infty, -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}, \infty)$; **c.** $C=[0, \infty)$; **d.** $D=(-\infty, 0]$. **14.** $x\in[-3, 1] \Rightarrow |x+3|+|1-x|=x+3+1-x=4$.

Autoevaluare. **1.a.** $A=(-13, 15]$; **b.** $B=[2, +\infty)$; **c.** $C=[\sqrt{2}, 2]$. **2.a.** A; **b.** F; **c.** A. **3.b.** $A\cap C=\left[-\frac{7}{2}, -\frac{10}{3}\right)$; $B\cup C=\left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$; $A\cap B=\varnothing$.

Lecția 3. Inecuații de forma $ax+b\ge 0$ ($\le, >, <$), $a, b\in\mathbb{R}$

1.a. F; **b.** A; **c.** A; **d.** F. **2.a.** $\left\{-4, -\frac{5}{4}, 1-\sqrt{3}, \frac{2}{3}\right\}$; **b.** $\left\{\frac{2}{3}, 3, \pi\right\}$. **3.a.** $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; **b.** $\{6, 7\}$; **c.** $[-3, -1)$; **d.** $\{..., -3, -2\}$. **4.a.** $\left(-\infty, \frac{5}{11}\right)$; **b.** $(-\infty, 5)$; **c.** $\left[\frac{5}{4}, \infty\right)$; **d.** $(\sqrt{10}, \infty)$. **5.a.** $\{0, 1, 2\}$; **b.** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; **c.** $\mathbb{N}$; **d.** $\{0, 1, 2\}$. **6.a.** $(-7, \infty)$; **b.** $\varnothing$; **c.** $\mathbb{R}$; **d.** $(7, \infty)$. **7.a.** $\left[\frac{4}{5}, \infty\right)$; **b.** $(-\infty, -1]$. **8.a.** $(-\infty, -3)$; **b.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$; **c.** $(-\infty, 2)$; **d.** $(-3, \infty)$. **9.a.** F; **b.** A; **c.** F; **d.** F. **11.a.** $[3, 7]$; **b.** $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$; **c.** $[1, 4]$; **d.** $\varnothing$. **12.a.** $A=\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; **b.** $B=\{3, 4\}$; **c.** $C=\{-7, -6, ..., 4, 5\}$; **d.** $D=\{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **13.a.** 67, 68, 69; **b.** 47, 49, 51. **14.a.** $1-m<0$, deci $m\in(1, \infty)$; b $5m-2>0$, deci $m\in\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$. **15.a.** $m+3\le 2m-7 \Leftrightarrow m\in[10, \infty)$; **b.** $m+3>2m-7 \Leftrightarrow m\in(-\infty, 10)$. **16.** 26. **17.** $8-6<4n+2<8+6 \Rightarrow n\in\{1, 2\}$. **18.** Matei poate da cel mult 5 răspunsuri greșite. **19.a.** 1 380 lei; 1 110 lei. **b.** $180+4\cdot 2x\le 360+2{,}5\cdot 2x$, deci $x\le 60$ km.

Autoevaluare. **1.a.** $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$; **b.** $\left(-\infty, \frac{2}{9}\right]$; **c.** $(-\infty, 8]$. **2.** $\{3, 4, 5\}$. **3.** 9.

Recapitulare și evaluare. **1.** $A=\{x \mid x=k^2,\ k\in\mathbb{N}\}$. **3.a.** 5; **b.** 6. **4.** $A\cup B=(-3, 8)$, $A\cap B=[-1, 4)$. **5.** *a*. **6.** *b*. **7.a.** F; **b.** A; **c.** F; **d.** A. **8.a.** De exemplu 3; **b.** 11; **c.** 3. **9.a.** 7; **b.** 4; **c.** 9; **d.** 2. **10.a.** De exemplu 3,35; **b.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **c.** -4; **d.** 5. **11.a.** $(-2, 11]$; **b.** $(-\infty, \sqrt{3}]$; **c.** $(-\infty, 2]$; **d.** $[1, 2]$. **12.a.** $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x\le 3\}$; **b.** $B=\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x<5\}$; **c.** $C=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le 2\}$; **d.** $D=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2}\le x\le\sqrt{3}\right\}$. **13.** Da, $\sqrt{143}<\sqrt{169}<\sqrt{197}$. **14.** $3<\frac{3+2\sqrt{3}}{2}<2\sqrt{3} \Leftrightarrow 6<3+2\sqrt{3}<4\sqrt{3}$, $6<3+2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3<2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{9}<\sqrt{12}$; $3+2\sqrt{3}<4\sqrt{3} \Leftrightarrow 3<2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{9}<\sqrt{12}$. **15.a.** A; **b.** F; **c.** F; **d.** F. **16.** (*a*, 2); (*b*, 3); (*c*, 4); (*d*, 1). **17.a.** $\left(\frac{17}{3}, +\infty\right)$; **b.** $\left(-\frac{8}{3}, +\infty\right)$; **c.** $\left[-\frac{2}{9}, +\infty\right)$. **20.a.** $[-1, 8)$; **b.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{31}{3}\right)$. **21.a.** $(8, 14)$; **b.** $\left[-3, \frac{1}{3}\right]$; **c.** 3. **22.a.** $(1, 4)$; **b.** $(-4, 6)$; **c** $(-1, 4)$. **23.a.** $a=2$; **b.** $a=\frac{1}{2}$; **c.** $a\in[0, \infty)$. **24.** $x\in[-2, 1] \Rightarrow |x-1|+|x+2|=1-x+x+2=3$; $|x|=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{3}$. Cum $x\in[-2, 1]$, convine doar $x=-\frac{4}{3}$. **25.** $a=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(2-x)^2}=|x+1|+|2-x|=x+1+2-x=3\in\mathbb{N}$, oricare ar fi $x\in[-1, 2]$. **26.a.** $A=(0, 5)$; **b.** $B=(-\infty, 0]\cup[5, \infty)$. **27.a.** $\{1\}$; **b.** $\{0\}\cup[1, \infty)$; **c.** $(-4, 0)$. **28.** $(-\infty, 2]$.

Testul 1. **1.a.** $B=\left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4\right\}$; **b.** $C=\left\{1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4\right\}$; **c.** $D=\left\{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{2}\right\}$. **2.a.** $(1{,}5; 7)$; **b.** $[-1, 0]$; **c.** $(-4, 2)$. **3.a.** $(-\infty, 6)$; **b.** $\left(\frac{4}{3}, 6\right)$; **c.** $\left(\frac{11}{3}, +\infty\right)$.

Testul 2. **1.a.** $B=\{0, 2, 4, ..., 46\}$; **b.** $C=\{0, 5, 10, ..., 45\}$; **c.** $D=\{1, 3, 5, ..., 47\}$. **2.a.** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; **b.** $[-1, 3]$; **c.** $(-5, 5)$. **3.a.** $(-1, +\infty)$; **b.** $[-3, -1]$; **c.** $(-2, +\infty)$.

Unitatea 2. Calcul algebric în $\mathbb{R}$

Lecția 1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere); reducerea termenilor asemenea

4. $(1, c)$, $(2, a)$, $(3, e)$, $(4, b)$. **5.a.** $6x$; **b.** $2\sqrt{3}x$; **c.** $-abc$; **d.** $6x+2$; **e.** $3x^2+9x+1$; **f.** x^2+3x+3. **6.a.** $2a+2b$; **b.** $3y$; **c.** $4x^2-8x+19$; **d.** x^3+12x. **7.a.** $10x-5$; **b.** $7x+54$. **8.a.** $12x^2+8x$; **b.** x^2-16; **c.** $x^4y^2-10x^3y+25x^2$; **d.** $4x^2-2y^4z^2$; **e.** $9x^2+18x-16$; **f.** x^2+4x+4. **9.a.** $-5y^3$; **b.** $3a^4b^5c^2$; **c.** $-16xa+4$; **d.** $-8xy^2-6xy$; **e.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}x^4$; **f.** $3xy$. **10.a.** $3x^8y^6$; **b.** $-24\sqrt{3}x^6y^3$; **c.** $2^{101}x^{202}y^{101}z^{303}$; **d.** $-\frac{1}{8}x^6y^6z^6$; **e.** $\frac{3}{5}x^2y^{14}z^6$; **f.** $\frac{1}{45}a^{18}y^8z^2$; **g.** $-54\sqrt{2}a^{15}x^3y^6z^{12}$; **h.** $\frac{4}{9}x^4y^{10}$. **11.a.** $-xy$; **b.** $3x^2$; **c.** x^4+x; **d.** a^4-b^4. **12.a.** $44x+33$; **b.** $6x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+2-4\sqrt{2}$. **13.a.** $36x$ cm. **14.b.** $\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$. **15.a.** $-\frac{23}{2}$; **b.** 14; **c.** $-60\sqrt{2}-84$. **16.** $E(2)=4$, $E(-2)=16$, $E\left(\sqrt{2}\right)=6-3\sqrt{2}$. **17.a.** $2a-b(2b-6)=0$, care nu depinde de x; **b.** $\frac{7}{2}$. **18.b.** $x \in (1, \infty)$. **19.b.** $E(n)=2n(n-1) \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; produsul $n(n-1)$ este par, deoarece numerele n și $n-1$ au parități diferite, prin urmare numărul întreg $2n(n-1)$ este divizibil cu 4.

Autoevaluare. **1.a.** $2x-6$; **b.** $-2x^2-x$; **c.** $-2a^6c$; **d.** $-2\sqrt{2}x^3y^6z^9$. **2.** $-a^2+b^2+4a-b$.

Lecția 2. Formule de calcul prescurtat

1.a. x^2-4; x^2-9; $4x^2-1$; 1; $4x^2-5$; **b.** y^2-2y+1; y^2-6y+9; $9x^2-6x+1$; $25x^2-20x+4$; $12-6\sqrt{3}$; $19-8\sqrt{3}$; $4y^2-4\sqrt{6}y+6$; $8x^2-12\sqrt{2}xy+9y^2$; **c.** x^2+4x+4; x^2+6x+9; $4x^2+4x+1$; $9x^2+6x+1$; $7+4\sqrt{3}$; $11+6\sqrt{2}$; $4x^2+4x\sqrt{5}+5$; $8x^2+12\sqrt{2}xy+9y^2$. **2.** p_1: F; p_2: A; p_3: A; p_4: F; p_5: A; p_6: A; p_7: A; p_8: A; p_9: F; p_{10}: F. **4.a.** $x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$; **b.** $\frac{4x^2}{25}+\frac{2x}{5}+\frac{1}{4}$; **c.** $x^2-\frac{4x}{3}+\frac{4}{9}$; **d.** $\frac{9x^2}{16}-x+\frac{4}{9}$; **e.** $\frac{9x^2}{16}-\frac{4}{9}$. **5.a.** $2a^2+2b^2$; **b.** $-2\sqrt{2}x+4$; **c.** 15; **d.** 36. **6.a.** $-x^2-8x-12$; **b.** x^2-4y^2+2xy; **c.** $12y^2+20y-26$; **d.** x^8-1. **7.a.** 12; **b.** 31. **8.** $a^2+b^2=53$; $a^4+b^4=2801$. **9.a.** $x^2+\frac{1}{x^2}=6$; **b** $x^3-\frac{1}{x^3}=14$; **c** $x^4+\frac{1}{x^4}=34$. **11.a.** 17; **b.** -2; **c.** 44; **d.** 5. **12.** $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{7+2\sqrt{7}}{3}$; $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{15}$. **14.a.** $xy=3$; **b.** $(x-y)^2=2$. **15.b.** Deoarece $x^2 \geq 0$, înseamnă că $E(x) \leq 22$, oricare ar fi numărul real x. Valoarea maximă a lui $E(x)$ este 22, atinsă pentru $x=0$. **16.** $a=8$. **17.** 44 cm. **18.a.** Dacă $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, este un număr natural impar, atunci $(2n+1)^2=4(n^2+n)+1$ este un număr care, la împărțirea prin 4, dă restul 1. **b.** Pătratul unui număr natural par este un număr care, la împărțirea prin 4, dă restul 0. În funcție de paritățile termenilor, suma a^2+b^2 dă, la împărțirea prin 4, unul dintre resturile 0, 1 sau 2, în timp ce 1 003 dă restul 3 la împărțirea prin 4.

Autoevaluare. **1.a** $4x^2+44x+121$; **b.** $9x^2-42x+49$; **c.** $16x^2-81$. **2.** b. **3.a.** $4\sqrt{2}$; **b.** $-5+4\sqrt{3}$; **c.** $2+2\sqrt{5}$.

Lecția 3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$

1.d. $5x^2y^4(4x^2y^3-3+2xy)$; **e.** $\sqrt{2}(3y-5)(2x-z)$; **f.** $(x+3)(x-1)$; **g.** $-5\sqrt{5}\left(x-3\sqrt{5}\right)$; **h.** $6(x-1)^2(4x-5)$; **i.** $(3y+2)(4y+5)$. **4.a.** $(x+10)(x-10)$; **b.** $(2x-3y)(2x+3y)$; **c.** $(x-6)(x+8)$; **d.** $(5-3xy)(5+3xy)$; **e.** $(8-x)(x-2)$; **f.** $7(a-2b)(a+2b)$; **g.** $6(x-1)(2x-3)(2x-1)$; **h.** $(x+y)(x-y+5)$; **i.** $2x(x+y)$. **5.a.** $a-b=13$; **b.** $a+b=9$. **6.** $B=\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=(\overline{ab}-\overline{ba})(\overline{ab}+\overline{ba})=9\cdot 11\cdot(a-b)(a+b) \vdots 11$. **7.** $(a, b) \in \{(7, 6), (7, -6), (-7, 6), (-7, -6)\}$. **8.** $(x+2)(x+5)(x+8)=(x+a)(x+b)(x+c)$, deci $a+b+c=15$. **9.a.** $(x+2)^2$; **b.** $(6x+7)^2$; **c.** $9(x+1)^2$; **d.** 4. **10.** $A=(10x+2)^2$. **11.** $(n^2+4n+3)^2$. **12.a.** $(x+9)^2+(y-7)^2=0$, de unde $x=-9$, $y=7$; **b.** $(x+3)^2+(y-6)^2=0$, de unde $x=-3$, $y=6$; **c.** $4x(2x-11)=0$, de unde $x=0$ sau $x=\frac{11}{2}$; **d.** $(x-3)(x-1)=0$, deci $x=3$ sau $x=1$. **13.** $A=(x+3)^2+2 \geq 2$; valoarea minimă este 2. **14.a.** $3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, $6+4\sqrt{2}=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$; **b.** $a=-1 \in \mathbb{Z}$. **15.a.** $(x+y)(3-5b)$; **b.** $(x+2)(7x+3)$; **c.** $(x+y)(5x-3y^2)$; **d.** $(x+y)(2x+2y-3)$. **16.a.** $(x+2)(x+7)$; **b.** $(x+2)(x+5)$; **c.** $(x-3)(x-6)$; **d.** $(x-4)(x+2)$; **e.** $(x+7)(x-5)$; **f.** $(x-7)(x+3)$; **g.** $(3x+1)(x-5)$; **h.** $(4x-5)(x-2)$; **i.** $(x-4)(2x-3)$. **17.a.** $(a+1+b)(a+1-b)$; **b.** $(a+b-2)(a-b+2)$; **c.** $(a-b+2c-3)(a-b-2c+3)$; **d.** $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. **18.** $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n+1)^2$.

Autoevaluare. **1.a.** $\left(2x-\frac{5}{8}\right)\left(2x+\frac{5}{8}\right)$; **b.** $(4x+5y)^2$; **c.** $(6x-1)^2$. **2.** d. **3.** $E(x)=(x+1)^2(x-1)$. Dacă a este un număr real negativ, atunci $a-1<0$; cum $(a+1)^2 \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, rezultă că $E(a) \leq 0$.

Lecția 4. Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice

1.a. $\frac{5}{6}$; **b.** $\frac{5}{9}$; **c.** $\frac{3}{4}$; **d.** $\frac{2}{3}$; **e.** $\frac{10}{19}$; **f.** $\frac{\pi^2+1}{\pi^2+2}$. **2.a.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **b.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; **c.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$; **d.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **e.** $\mathbb{R}\setminus\{-2, 0\}$; **f.** $\mathbb{R}$; **3.a.** $(x-5)(x+5)$; $x(1-x)$; $(x-3)^2$, $(x+2)(x+3)$; **b.** $x \in \{-5, -3, -2, 0, 1, 3, 5\}$; **c.** $\mathbb{R}\setminus\{-5, 5\}$; $\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$; $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; $\mathbb{R}\setminus\{-3, -2\}$; **5.a.** $2x^2y$; **b.** $\frac{1}{5x}$; **c.** $\frac{1}{3(x+5)}$; **d.** $\frac{1}{3}$; **e.** -3;

f. $\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; **6.a.** $(x-4)(x+4)$, $(x+4)^2$, $(x-2)(x+4)$. $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,2,4\}$; **b.** $B(x)=\frac{x+4}{(x+4)^2}=\frac{1}{x+4}$, $C(x)=\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}=\frac{1}{x+4}$; **c.** $A(x)=B(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{-x}{(x-4)(x+4)}=\frac{1}{x+4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$, deci $x=2$. **7.a.** $\frac{x}{x+1}$; **b.** $x+4$; **c.** $\frac{2x-3}{11}$; **d.** $\frac{x+3}{2}$; **e.** $\frac{x-3}{x+2}$; **f.** $\frac{1}{x+\sqrt{3}}$. **8.a.** $\frac{x+5}{2}$; **b.** $\frac{-x+2}{7}$; **c.** $\frac{10x+9}{6}$; **d.** $\frac{(x-3)^2}{9}$; **e.** $\frac{133x+44}{30}$. **9.a.** 1; **b.** $\frac{7}{10x+10}$; **c.** $\frac{12a}{a^2-9}$; **d.** $\frac{-2}{y(y^2-1)}$; **e.** $\frac{2}{b+2}$; **f.** $\frac{x-1}{(x+1)(x^2-9)}$; **g.** $\frac{4}{(z^2-1)(z-2)}$. **10.a.** $\frac{-15x^3}{14}$; **b.** $\frac{12x^2+8x}{49}$; **c.** $\frac{3b^3c^2}{a}$; **d.** $\frac{5b^2x^2}{6cd}$; **e.** $\frac{1}{6x}$; **f.** $\frac{-a^2}{7x^3}$. **11.a.** $\frac{2}{3}$; **b.** $8(3x-2)$; **c.** $\frac{x+4}{x+5}$; **d.** $\frac{-x}{4x+2}$; **e.** $\frac{(x-3)(x+5)}{x-1}$; **12.a.** $\frac{9}{5x}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{x+1}{x+2}$; **d.** 1; **e.** $\frac{x+1}{x+\sqrt{2}}$; **13.a.** $\frac{2b}{c}$; **b.** a; **c.** $\frac{ax^2}{b^4}$; **d.** $\frac{x+2}{3x(x+1)}$; **e.** $3x$. **14.a.** $\frac{8x^3y^3z^3}{125t^9}$; **b.** $\frac{4a^2b^4}{9x^{10}y^2}$; **c.** $\frac{-2\sqrt{2}x^9y^6z^3}{3\sqrt{3}a^3b^{12}}$; **d.** $\frac{25x^6y^8}{4a^{10}b^4}$; **e.** $\frac{5t^3}{2xyz}$; **f.** $\frac{4a^{10}b^4}{25x^6y^8}$; **15.a.** $a(a-1)$; **b.** $\frac{1}{a(a-1)}$; **c.** $\frac{1}{2c}$; **d.** $\frac{x+6}{x-2}$; **16.a.** $\left(\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}-\frac{2}{x+1}-\frac{7}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{1}=x^2+2x+1-2x+2-7=x^2-4$; **b.** $\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x^2+4}=\frac{x+1}{x+2}$; **c.** $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{2}=x$. **17.** $E(x)=\frac{9}{10}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$.

20.a. $\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+1)-(a-1)}{a^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{(a+1)(a-1)}-\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)$. **b.** Din punctul a rezultă $E(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\right.$ $\left.-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)\cdot(x+5)=\frac{3}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5,-3,-1,1,3,5\}$. Prin urmare, $x=8$. **21.a.** Deoarece $OE\parallel CD$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă că triunghiurile AOE și ACD sunt asemenea, deci $\frac{OE}{CD}=\frac{AO}{AC}$ (1). Din asemănarea triunghiurilor AOB și COD, deducem că $\frac{AO}{CO}=\frac{AB}{CD}$, deci $\frac{AO}{AC}=\frac{AB}{AB+CD}$. Folosind (1), rezultă $OE=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$. Procedând analog, obținem că $OF=OE$. **b.** Fie $AB=x>6$. Deoarece $x-\frac{12x}{x+6}=4$, deducem că $\frac{x^2-6x}{x+6}=4$, deci $x^2-10x-24=0$, adică $(x-5)^2=49$, prin urmare $x=12$ m. Aria suprafeței care va fi pavată este de 24 m².

Autoevaluare. **1.a.** $\frac{9x+4}{6x^2}$; **b.** $\frac{4-9x}{6x^2}$; **c.** $\frac{4}{9x}$; **d.** $\frac{8}{27x^6}$; **e.** $\frac{27x^6}{8}$; **f.** 1.*

2. $\left(\frac{2x^2-7x-17}{(x-3)(x-7)}-\frac{x+1}{x-7}\right)\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{1}=\frac{x^2-5x-14}{x-7}\cdot\frac{x+3}{1}=\frac{(x+2)(x-7)}{x-7}\cdot\frac{x+3}{1}=(x+2)(x+3)$.

3. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\frac{x-3}{x-2}\Rightarrow\frac{x-3}{x-2}=\frac{x+a}{x+b}\Rightarrow a=-3,\ b=-2\Rightarrow a+b=-5$.

Lecția 5. Ecuația de forma $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c\in\mathbb{R}^*$, $a\neq 0$

2.a. F; **b.** F; **c.** A; **d.** A. **3.a.** $x\in\{0,3\}$; **b.** $x\in\{-1,0\}$; **c.** $x\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; **d.** $x\in\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$. **4.a.** $x\in\{1,8\}$; **b.** $x\in\{-2,6\}$; **c.** $x\in\{-5,-3\}$; **d.** $x\in\left\{1,\frac{5}{2}\right\}$. **5.a.** $(x+5)^2=49\Rightarrow x+5=\pm7\Rightarrow x\in\{-12,2\}$; **b.** $(x-16)^2-81=0\Rightarrow x\in\{-3,15\}$; **c.** $(x+2)^2-8=0\Rightarrow x_1=-2+2\sqrt{2}$, $x_2=-2-2\sqrt{2}$; **d.** $(2x-1)^2-4=0\Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$. **6.a.** $x\in\{-9,-4\}$; **b.** $x\in\{4,9\}$; **c.** $x\in\left\{\frac{-2+3\sqrt{2}}{2},\frac{-2-3\sqrt{2}}{2}\right\}$; **d.** $x\in\left\{\frac{3-\sqrt{41}}{8},\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right\}$; **e.** $x\in\{2\}$; **f.** $x\in\{-3\}$; **g.** $x\in\varnothing$; **h.** $x\in\varnothing$. **7.a.** Nu. **b.** Da. **c.** Nu. **d.** Nu. **8.a.** $m=3$; **b.** $m\in\{1,4\}$; **c.** $m\in\{1,3\}$; **d.** $m=-4$. **9.a.** $S=\{-5,-1\}$; **b.** $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; **c.** $S=\varnothing$; **d.** $S=\varnothing$; **e.** $S=\left\{\frac{-\sqrt{5}-5}{2},\frac{-\sqrt{5}+5}{2}\right\}$; **f.** $S=\left\{\frac{-\sqrt{6}}{2},\sqrt{6}\right\}$; **10.a.** $\Delta=(m-2)^2=0\Leftrightarrow m=2$. Ecuația devine $x^2-2x+1=0$ și are soluția $x_1=x_2=1$. **b.** $\Delta=m^2-12m+32=0\Leftrightarrow m\in\{4,8\}$. Dacă $m=4$ obținem $x_1=x_2=2$, iar dacă $m=8$ obținem $x_1=x_2=4$. **c.** $\Delta=0\Leftrightarrow m\in\left\{\sqrt{2},3\sqrt{2}\right\}$. Dacă $m=\sqrt{2}$ obținem $x_1=x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, iar dacă $m=3\sqrt{2}$ obținem $x_1=x_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **11.a.** $x^2+6x-7=0\Leftrightarrow x\in\{-7,1\}$. **b.** $4x^2+9x-9=0\Leftrightarrow$ $x\in\left\{-3,\frac{3}{4}\right\}$. **c.** $x^2-2\sqrt{3}x+1=0\Leftrightarrow x\in\left\{\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{3}+\sqrt{2}\right\}$. **d.** $3x^2-5\sqrt{2}x+4=0\Leftrightarrow x\in\left\{\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$. **e.** $2x^2-5x+1=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{4},\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right\}$; **f.** $x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x=0\Leftrightarrow x\in\left\{0,\sqrt{2}+\sqrt{3}\right\}$. **12.a.** $(x-1)(x-3)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$. **b.** $(x-0)(x+0{,}7)=0\Leftrightarrow x^2+0{,}7x=0$. **c.** $\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow(x-1)^2-\sqrt{2}^2=0\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$. **13.** $\Delta=(m+2)^2+4>0$, $\forall\, m\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1\neq x_2$. **14.** $l_1=-11<0$, $l_1=6>0\Rightarrow$ $\Rightarrow l=6$ m. **15.** Dimensiunile grădinii, în metri, pot fi $L_1=12+4\sqrt{2}\simeq17{,}65\Rightarrow l_1=24-8\sqrt{2}\simeq12{,}68$ sau $L_2=12-4\sqrt{2}\simeq6{,}34\Rightarrow l_1=24+8\sqrt{2}\simeq35{,}31$. **16.a.** $3-\sqrt{5}$ și $3+\sqrt{5}$; **b.** $(5,-2)$, $(2,-5)$; **c.** $\left\{\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right\}$. **17.** 54 locuri. **18.** 10 excursioniști. **19.a.** $x=2$; **b** $x=5$; **c** $x=6$. **20.a.** $x^2-4x+4\geq0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-2)^2\geq0$, adevărat. **b.** $L+\ell=4$ m. $\mathcal{A}=L\ell\leq4$ m² $\Leftrightarrow L(4-L)\leq4$ m $\Leftrightarrow(L-2)^2\geq0$, adevărat. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow L=\ell=2$ m. **c.** $\mathcal{A}=L\cdot\ell=4$ m². $\mathcal{P}=2(L+\ell)\geq8$ m $\Leftrightarrow L+\frac{4}{L}\geq4\Leftrightarrow(L-2)^2\geq0$, adevărat. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow L=\ell=2$ m. **21.** Fie $y=d(P,AB)$. Avem $DN=20-x$ și $d(P,CD)=20-y$. Triunghiurile AMP și NDP sunt asemenea, așadar $\frac{x}{20-x}=\frac{y}{20-y}$, prin urmare $x=y$. $\mathcal{A}_{DMP}+\mathcal{A}_{DNP}=125$ cm² $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{(20-x)^2}{2}=125 \Leftrightarrow x\in\{5, 15\}$. **22.** Fie a și b dimensiunile primului dreptunghi (în cm). Avem $a\cdot b=24$ și $(a-2)(b+2)=30$, deci $(a-2)\left(\frac{24}{a}+2\right)=30$, așadar $a\in\{-3, 8\}$. Cum $a>0$, rezultă $a=8$, deci $b=3$ și perimetrul este egal cu $2(a+b)=22$ cm.

Autoevaluare. **1.a** $x\in\{2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}\}$; **b.** $x\in\{-1, 3\}$; **c.** $x\in\left\{\frac{1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right\}$. **2.a.** $x\in\left\{1, \frac{5}{3}\right\}$; **b.** $x\in\left\{1, \frac{7}{2}\right\}$; **c.** $x\in\{-6, 5\}$. **3.** 10 cm.

4. $(M-5)(M-8)=40$; singura soluție pozitivă este $M=13$.

Recapitulare și evaluare. **1.** xy^4, $2\sqrt{3}$. **2.** $7x$ și $\sqrt{5}x$. **3.** a. **4.** b. **5.a.** F; **b.** A; **c.** F; **d.** F. **6.a.** y^4; **b.** $\frac{3}{5}$; **c.** 2. **7.a.** 2; **b.** 6; **c.** 4; **d.** 4. **8.a.** A; **b.** F; **c.** F; **d.** F. **9.a.** $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\sqrt{2}=\sqrt{3}$. **11.** $x^2+9x+8=(x+1)(x+8)\Rightarrow a+b=9$. **12.** $a+b=12$. **13.a.** $(x-2)(x-4)$; **b.** $(x+6)^2$; **c.** $(x+10)^2$; **d.** $(7x-8)(7x+8)$. **14.a.** $(x-8)(x+2)$; **b.** $(x+4)(x+8)$; **c.** $(x-5)^2$; **d.** $(11-9x)(11+9x)$. **15.** $(a, 2)$; $(b, 5)$; $(c, 3)$; $(d, 4)$. **16.a.** 0; **b.** $-\frac{5}{7}$; **c.** $25+6\sqrt{17}$. **17.a.** $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; **b.** $x=1$; **c.** $x=\frac{21}{11}$. **18.a.** $\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}$; **b.** $\frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)}$. **19.a.** $(x-3)(x-2)$; **b.** $\frac{(x-3)(x+3)^2}{(x-2)(x+2)^2}$. **20.** a. **21.** c. **22.** 1. **23.** 10. **26.a.** $S=\{5-\sqrt{19}, 5+\sqrt{19}\}$. **b.** $S=\left\{-\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$. **c.** Mulțimea de definiție este $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ecuația devine $x^2+x-12=0$, iar $S=\{-4, 3\}$. **d.** Mulțimea de definiție este $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Notăm $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=y$ și obținem $y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}$, deci $y\in\left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$ și $S=\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$. **27.a.** $\frac{1}{a(a+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+4)-a}{a(a+4)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a+4}{a(a+4)}-\frac{a}{a(a+4)}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4}\right)$. **b.** Folosind **a**, obținem $E(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$, deci $E(x)=\frac{2}{x^2-16}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x^2-16\in\{-2, -1, 1, 2\} \Leftrightarrow x\in\{\pm\sqrt{14}, \pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{17}, \pm\sqrt{18}\}$. **28.** După un an de zile, Paul a primit o dobândă de $\frac{p}{100}\cdot 2000=20p$ lei. După doi ani de zile, Ana a primit dobânda $20p+\frac{p}{100}\cdot(2000+20p)=\frac{4000p+20p^2}{100}\overset{(20}{=}\frac{200p+p^2}{5}$ lei. Rezultă $\overset{5)}{\frac{20p}{1}}+\frac{200p+p^2}{5}=305 \Leftrightarrow \frac{p^2+300p}{5}=305 \Leftrightarrow p^2+300p=1525 \Leftrightarrow p^2+2\cdot150p+150^2=1525+22500 \Leftrightarrow (p+150)^2=24025 \Leftrightarrow (p+150)^2=155^2 \Leftrightarrow p=5$.

Testul 1. **1.a.** $-2x-3$; **b.** $4x+15$; **c.** x^2+3x+2. **2.a.** $-9(2x-13)$; $S=\left\{\frac{13}{2}\right\}$. **b.** $(a-\sqrt{3})^2(a+\sqrt{3})^2=0$; $S=\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. **c.** $(x+2)^2=0$; $S=\{-2\}$.

3.a. B; **b.** $E(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2-x-2}:\frac{x^2+2x-24}{x^2+4x-12}=\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x+1)}\cdot\frac{(x+6)(x-2)}{(x+6)(x-4)}=\frac{x-1}{x+1}$.

Testul 2. **1.a.** $2x-3$; **b.** $-x$; **c.** x^2-3x+2. **2.a.** $x(2\sqrt{2}-x)=0$; $S=\{0, 2\sqrt{2}\}$. **b.** $(a-\sqrt{5})^2(a+\sqrt{5})^2=0$; $S=\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. **c.** $(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)=0$; $S=\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$. **3.a.** C; **b.** $E(y)=\left(\frac{7y}{1-5y}-\frac{5y}{(1-5y)(1+5y)}-\frac{2y}{5y+1}\right)\cdot\frac{1-25y^2}{50y^2}=\frac{45y^2}{1-25y^2}\cdot\frac{1-25y^2}{50y^2}=\frac{9}{10}\in\mathbb{Q}$.

Unitatea 3. Funcții

Lecția 1. Funcții. Funcții definite pe mulțimi finite

1. f_1, f_3. **2.** $f(-2)=3, f(-2)=4$; f nu e funcție; g este funcție. **3.a.** Nu; $f(1)=7\notin\{1, 3, 5, 9\}$. **b.** Da. **5.a.** $A=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B=\{3, 2, 1, 0, -1, -2\}$; mulțimea reprezintă graficul unei funcții; **b.** $A=\{-2, 0, 1, 2, 3\}$, $B=\{-3, -2, -1, 1, 2\}$; nu reprezintă graficul unei funcții; **c.** $A=\{-3, -2, 0, 1, 2, 4\}$, $B=\{-1, 1\}$; reprezintă graficul unei funcții; **d.** $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{0, 1, 2, 3\}$; reprezintă graficul unei funcții. **6.a.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; **b.** $D=\mathbb{N}^*$; **c.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$; **d.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2, -1, 0\}$. **7.c.** $\frac{146}{3}$. **8.a.** $A, C\notin G_f$, $B, D\in G_f$. **10.a.** $A=\{-1, 0, 1, 2\}$; **b.** $B=\{-11, -5, 1, 7\}$; **c.** $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$. **11.a.** $A(1, -1)\in G_f \Leftrightarrow f(1)=-1 \Leftrightarrow m=-3$; **b.** $m=3$; **c.** $a=2$, $b=-3$. **12.a.** $X=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2,\}$; **b.** $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; **d.** $f: X\to Y$, $f(x)=x+2$. **13.a.** 50 de funcții; **b.** 24 de funcții. **14.** 6 funcții. **15.a.** $x=-1 \Rightarrow f(-2)=6$; $x=7 \Rightarrow f(22)=-10$, $f(-2)+f(22)=-4$; **b.** 21. **16.** $f(1152)=f(2^7\cdot 3^2)=f(2^7)+f(3^2)=f(2^6)+f(2)+f(3)+f(3)=\ldots=3\cdot 6+3+2\cdot 5=31$. **17.** $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\to\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $f(x)=2x$.

Autoevaluare. **2.a.** B; **b.** D; **c.** D; **d.** B. **3.** Nu. **4.** $m=2$.

Lecția 2. Funcția de forma $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

1.a. $V=\{-7, -5, 1, 5\}$; **b.** $V=\{-25, -9, -1, 3, 7\}$. **3.a.** $A=\{-6, -5, -3, 2\}$; **b.** $C=\{1, 2, 4, 6, 13\}$. **4.a.** $B=\{-10, -1, 11, 14\}$; **b.** $D=\{-13, -7, -1, 5, 11\}$. **5.a.** $a=3, b=7$; **b.** $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{11}{6}$; **c.** $a=-4, b=0$; **d.** $a=\frac{7}{5}, b=-2$. **6.a.** 140 lei, 380 lei; **b.** $f: \{1, 2, 3, \ldots, 8\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=80x-20$. **7.a.** $f(-1)=-5 \Rightarrow A(-1, -5)\in G_f$; **b.** $B(3, -1)\notin G_f$; **c.** $C(0, -1)\in G_f$; **d.** $D(3, 6)\notin G_f$. **8.a.** $f(-1)=7$, $f(2)=4$; $a=-1$, $b=6$; **b.** $a=-4$, $b=7$; **c.** $a=2$, $b=1$; **d.** $a=-2$, $b=-1$. **10.a.** Punctele sunt coliniare, pe graficul funcției $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. **b.** Punctele sunt coliniare, pe graficul funcției $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3$. **c.** Punctele nu sunt coliniare. **d.** Punctele sunt coliniare, pe graficul funcției $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3}x+1$. **11.a.** $A(0, 4)$, $B(3, 0)$, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+4$; **b.** $C(2, y_C)\in AB \Leftrightarrow y_C=f(2)=\frac{4}{3}$; **c.** $D(x_D, 2)\in AB \Leftrightarrow f(x_D)=2 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x_D+4=2 \Leftrightarrow x_D=\frac{3}{2}$. **12.a.** AC și BC; **b.** $f: [2, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+5$; **c.** $[-1, 1]$. **15.a.** $f(2)=-3 \Rightarrow m=1$; **b.** $m=-3$. **16.b.** $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{11}{3}$. **17.a.** $A(0, 0)\in G_f \Rightarrow 8+4a=0$; $a=-2$. **c.** $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)=(2-a)(1+2+\ldots+10)+$

$+(8+4a)\cdot 10=-15a+190$. **18.a.** $G_f\cap Ox=\{A(3,0)\}$, $G_f\cap Oy=\{B(0,12)\}$. **b.** $A\left(\frac{1}{2},0\right)$, $B(0,-3)$; **c.** $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$, $B\left(0,2\sqrt{3}\right)$; **d.** $A(2,0)$, $B\left(0,-2\sqrt{5}\right)$. **19.a.** $P(-1,-8)$; **b.** $M(5,26)$. **20.a.** $P(4,5)=G_f\cap G_g$; $h(4)=5$, deci $P(4,5)\in G_h$. **21.** $f(x)=-3x+8$, $C\notin G_f$, $D\in G_f$. **22.a.** $a=2$, $b=-1$; **b.** $f(a)=a^2\Rightarrow$ $\Rightarrow a=1$. **23.** $d(O,AB)=\sqrt{2}$, $A_{OAB}=6$. **24.** $a\in\{0,2\}$. **25.b.** 9; **c.** $A(x,x)\in G_f\Rightarrow A(2,2)$. **26.** $C(a,b)\in G_f\Rightarrow 3a+2=b$, $d(C,Ox)=|b|=7$; pentru $b=7\Rightarrow$ $\Rightarrow a=\frac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$, pentru $b=-7\Rightarrow a=-3$. **27.a.** 50 lei; **b.** $A=\{1,2,...,20\}$, $f(x)=5x+20$.

Autoevaluare. **1.a.** dreaptă; **b.** segment; **c.** -5; **d.** $A\left(3\sqrt{2},0\right)$. **2.a.** C; **b.** D; **c.** A; **d.** B. **3.a.** $P(0,2)$; **b.** $S=1024=32^2$. **4.** $m=2$.

Lecția 3. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale

1.a. 5; 4; 4; 6. **b.** $-7,-6,-11,9$; **c.** 3,68; 4,2; 4,2; 3,2. **2.a.** 5,72; 6; 6; 7. **b.** 17,07; 17,5; 19; 11. **c.** 24,24; 24,3; 24,3 și 26,5; 5,4. **3.a.** 8,24; 7,9; 7,9; 1,8. **b.** $\bar{x}=42{,}4<45=m$. **4.a.** $\frac{36+x}{2}=34\Rightarrow x=32$; **b.** 76. **5.** 190 de ași. **6.** 78,90; 77; 77; 42. **7.** 105 comenzi în cele două zile împreună. **8.** 40 de puncte. **9.** 23,9. **10.a.** $x=4$; **b.** 70%. **11.** 7 și 9. **14.a.** Firma A: 49,54; 49; 49; Firma B: 49,48; 50; 50. **b.** Nu; **c.** Nu.

Autoevaluare. **1.a.** frecvență; **b.** media aritmetică; **c.** 0; **d.** 8,55. **2.a.** C; **b.** B; **c.** B; **d.** D. **3.a.** Echipa A: 12; Echipa B: 12; **b.** $m_A=12{,}5$; $m_B=12$; $m_A>m_B$. **4.** Mediana este 12, una dintre valorile lipsă e 12; $a=6$.

Recapitulare și evaluare. **1.a.** A; **b.** F; **c.** A; **d.** F. **2.a.** $f(x)=x-2$; **b.** segment; **c.** -4. **3.a.** $a=6$; **b.** $a+b=\frac{11}{3}$; **c.** 0; **d.** $-\frac{1}{6}$. **4.a.** $-\frac{1}{4}$; **b.** 7; **c.** 12; **d.** $\frac{5}{6}$. **5.a.** 3; **b.** -1 și $\frac{5}{2}$; **c.** $\frac{17}{11}$; **d.** $\frac{15\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$. **6.a.** $\left[-\frac{1}{3},\infty\right)$; **b.** $\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$; **c.** $\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$; **d.** $\left(-\frac{2}{9},\infty\right)$. **7.a.** $(1,1)$; **b.** $(-1,-3)$; **c.** $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. **8.** $A, C\in G_f$. **10.a.** $\frac{5}{2}$; **b.** $\sqrt{2}$. **12.a.** 8,5; **b.** 8; **c.** 12. **13.a.** A, B, C coliniare; **b.** A, B, C necoliniare. **14.a.** 2; **b.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **15.a.** $D=\{-1,0,2,4,6\}$. **b.** $f(x)=x+2$. **c.** Doar axa Oy în punctul de coordonate $(0,2)$. **16.a.** $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$; **b.** $[5,+\infty)$; **c.** $(-4,+\infty)$. **17.a.** $A=\{2,4,5\}$; **b.** $B=\{-4,8,14,17\}$; **c.** $C=\left[-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right]$.

Testul 1. **1.a.** $a=1$, $b=1$; **c.** $f(4a)-b^2-b=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$. **2.a.** $A(-3,0)$, $B(0,3)$; **b.** $a+b=2$; **c.** $\frac{9}{2}$. **3.** $G_f\cap Ox=A(-2,0)$, $G_f\cap Oy=B(0,2)$, $A_{ABC}=\frac{BO\cdot AC}{2}=\frac{AB\cdot d(C,G_f)}{2}\Rightarrow d(C,G_f)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **4.** Fie $a,b\in\mathbb{N}$, cu $a\le 30\le b$. Dacă numerele sunt $a, a, 30, b, b$, cu $b=a+15$ și $2a+30+2b=135$, obținem $a=18{,}75\notin\mathbb{N}$, fals. Dacă numerele sunt $a, 30, 30, b, b$, cu $b=a+15$ și $a+60+2b=135$, obținem $a=15$, iar numerele sunt 15, 15, 30, 30, 30, deci șirul de date are doar modul 30, fals. Dacă numerele sunt $a, a, 30, 30, b$, cu $b=a+15$ și $2a+60+b=135$, rezultă că $a=20$, $b=35$, iar scorurile obținute de Ana sunt 20, 20, 30, 30, 35.

Testul 2. **1.b.** $a=1$, $b=3$; **c.** $A(-3,0)$, $B(0,3)$. **2.a.** 7; **b.** 8; **c.** 11. **3.** $f(x)=g(x)\Rightarrow x=-9\Rightarrow I(-9,-38)$. **4.** Fie x prețul bomboanelor pe care le achiziționează comerciantul. Mediana actualului set de date este 10, deci $\frac{720+25x}{90}\le 10\Leftrightarrow x\le 7{,}2$. Prețul maxim este de 7,2 lei.

Unitatea 4. Elemente ale geometriei în spațiu

Lecția 1. Puncte, drepte, plane

2. Falsă doar k. **3.a.** 5; 10; **b.** 1; 7. **4.** Fiind date 4 puncte necoplanare, oricare 3 sunt necoliniare. **a.** $9\cdot 10:2=45$; **b.** $10\cdot(10-1)\cdot(10-2):$ $:6=120$. **5.** OM, unde $\{O\}=d\cap g\cap h$. **6.a.** $BC-AB<AC<AB+BC$, deci punctele A, B, C sunt necoliniare. **b.** $AC=AB+BC\Leftrightarrow|x-2|=10\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{-8;12\}$; $AC+BC=AB\Leftrightarrow|x-2|=2\Leftrightarrow x\in\{0;4\}$. **7.a.** AB; **b.** AB; **c.** MN; **d.** AG, unde G este centrul de greutate în ΔBCD. **8.** $N\in(ABC)\cap\alpha=AM$. Fie O centrul paralelogramului. AM și DO sunt mediane în ΔACD. **9.a.** $MN\nparallel BC$ și, fiind coplanare, rezultă că sunt concurente. Punctul lor de intersecție $\in BC\subset(BCD)$. **b.** MD. **10.a.** OM, unde $\{M\}=CG\cap AB$. **b.** Dacă $(OG,AB)=\alpha$, cum $MG\subset\alpha$, ar rezulta $CM\subset\alpha$, adică O, A, B, C coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. **11.a.** Dacă $D\in AB\Rightarrow D\in(ABC)$, fals. **b.** $DB\cap DC=\{D\}$. **12.** $AP=12$ cm; $AO=6\sqrt{3}$ cm. **13.** $X\in AB\subset(ABC)$, $X\in MN\subset(MNP)$, deci $X\in(MNP)\cap(ABC)$. Analog, Y și $Z\in(MNP)\cap(ABC)$. **14.** Fie M mijlocul segmentului BD. EM este linie mijlocie în ΔABD, deci $EM=AD:2$. Analog $FM=BC:2$. Presupunem, prin absurd, că punctele A, B, C, D sunt necoplanare. În ΔEMF: $EF<EM+FM\Leftrightarrow EF<(AD+BC):2$, contradicție. **15.a.** $(ACE)\cap(BDF)=OQ$, unde $\{Q\}=AE\cap BF$ și $\{O\}=AC\cap BD$. **b.** OQ este linie mijlocie în ΔACE și în ΔBDF, deci $CE=DF=2\cdot OQ$. Așadar $\Delta ADF\equiv\Delta BCE$ (L.L.L.).

Autoevaluare. **1.** $AB\subset\alpha$, $AD\cap\alpha=\{A\}$ și $DE\parallel\alpha$. **2.a.** $AB\parallel CD$ și $CD\parallel EF$; **b.** $A\in(AEF)\cap(ABC)$ $\Rightarrow$ există o dreaptă g, astfel încât $(AEF)\cap(ABC)=g$; **c.** dreptele BD și EF nu sunt paralele. **3.a.** BM, respectiv DG, unde $\{G\}=BM\cap CN$. **b.** Presupunem, prin absurd, că $(AE,DB)=\alpha$. Cum $M\in DE\subset\alpha$ și $AB\subset\alpha$, rezultă că $\alpha=(ABM)=(ABC)$, ceea ce contrazice că $D, E\notin(ABC)$.

Lecția 2. Corpuri geometrice. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat

2. a. F; **b.** A. **3.** 1, respectiv 4. **7.** A. **8.c.** 8 cm. **9.a.** $\{S,A,B,D\}$, $\{S,A,C,D\}$, $\{S,B,C,E\}$, $\{S,B,C,F\}$; **b.** $\{S,A,B,C\}$, $\{S,A,B,F\}$, $\{S,B,C,D\}$, $\{A,B,C,D\}$; **c.** 18 cm, respectiv $9\sqrt{3}$ cm^2. **10.** Fie O centrul bazei. $VO=VA\cdot\sin VAD=6\sqrt{3}$ cm și $AO=8\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_b=288\sqrt{3}$ cm^2. **11.** $AM=DM=6\sqrt{3}$ dm și $MN=6\sqrt{2}$ dm. Desfășurăm pe un plan fețele ABC și ABD. Suma $MP+PN$ este minimă dacă, pe desfășurare, punctele M, P, N sunt coliniare. Deci P este mijlocul muchiei AB. Segmentul MP este linie mijlocie în ΔABC. $\mathcal{P}_{MPN}=12\text{ dm}+6\sqrt{2}\text{ dm}$. **12.** Fie M mijlocul muchiei AB. Suma $AP+CP$ este minimă dacă, pe desfășurare, $AP\perp VB$. **Metoda I.** În ΔVMB, dreptunghic în M, $\cos B=\frac{MB}{VB}=\frac{15\text{ km}}{25\text{ km}}=\frac{3}{5}$.

În ΔAPB, dreptunghic în P, $\cos B = \frac{BP}{AB} = \frac{BP}{30 \text{ km}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow BP = 18$ km. **Metoda a II-a.** $\mathcal{A}_{VAB} = \frac{AB \cdot VM}{2} = \frac{VB \cdot AP}{2}$. **Metoda a III-a.** $\Delta VMB \sim \Delta APB$ (U.U.). **13.** În ΔVAD, $AD < VA + VD \Leftrightarrow 2 \cdot AB < 2 \cdot VA \Leftrightarrow AB < VA$. **14.a.** În ΔVDC, segmentul FG este linie mijlocie. **b.** Fie M mijlocul muchiei CD. Suma $VH + HE$ este minimă dacă, pe desfășurarea pe un plan a fețelor VDC și $ABCD$, punctele V, H, E sunt coliniare. Conform cazului de asemănare U.U., $\Delta EHC \sim \Delta VHM \Rightarrow \frac{CE}{VM} = \frac{CH}{MH} \Leftrightarrow \frac{6}{9} = \frac{CH}{(6 \text{ cm} - CH)} \Leftrightarrow CH = 2{,}4$ cm.

Autoevaluare. **1.** b pătrat. **2.** $AC = 6\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_{VAC} = 36\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. **3.a.** $\mathcal{A}_{VAB} = 108 \text{ cm}^2$. **b.** Desfășurăm pe un plan fețele VAB și VAC. Arătăm că, pe desfășurare, punctele B, T, C sunt coliniare și $BT \perp VA$. $\mathcal{A}_{VAB} = \frac{VA \cdot BT}{2} = \frac{15 \text{ cm} \cdot BT}{2} = 108 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow BT = 14{,}4$ cm; $AT = 10{,}8$ cm.

Lecția 3. Corpuri geometrice. Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul

3.c. 72 cm^2. **8.a.** A; **b.** A. **9.a.** A. **10.** c. **8.** Cubulețele din vârfurile cubului mare. **11.** 11 cărămizi. **12.** Împreună cu cel deja desenat există 8 triunghiuri echilaterale determinate de diagonalele fețelor cubului. **13.** Cu *reciproca teoremei lui Pitagora* arătăm că $\Delta PBC'$ este dreptunghic în P. **14.a.** $AA' \parallel CC'$; **b.** $A'A = AB = AD = 6$ cm. **15.** $5\,g \cdot 166 = 830\,g$. **16.** $L = 1$ m sau $L = 2$ m; justificați! **17.a.** Deoarece $A'A \parallel C'C$, deducem că punctele A, A', C, C' sunt coplanare. Cum $O \in AC$ și $AC \subset (ACC') \Rightarrow O \in (ACC')$. **b.** Patrulaterul $ACC'A'$ este paralelogram și atunci $A'O' \parallel AC$. Deci $\Delta A'GO' \sim \Delta CGA \Rightarrow \frac{O'G}{AG} = \frac{O'A'}{AC} = \frac{1}{2}$. Așadar G aparține medianei AO', astfel încât $\frac{O'G}{O'A} = \frac{1}{3}$. **18.** $AB = 3$ m; $d(E, AB) = 1{,}5\sqrt{3}$ m. **19.a.** Triunghiul $C'BD$ este echilateral cu $BD = 16\sqrt{2}$ cm. **b.** Sunt diagonale în paralelogramul $ACC'A'$. **c.** Aplicăm *axioma paralelelor*. **d.** Toate muchiile sunt congruente, deoarece sunt diagonale în pătrate congruente. **20.a.** Perimetrul este 60 cm. **b.** Deoarece $\sphericalangle ABC = 120°$ și dreptele $A'F'$ și BC coincid, obținem că $\Delta A'AB$ este dreptunghic în A, cu $\sphericalangle AA'B = 30°$. Atunci $A'B = 20$ cm și $A'A = 10\sqrt{3}$ cm. Aria feței este egală cu $100\sqrt{3}$ cm^2. **21.** Desfășurăm pe un plan fețele $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $CDD'C'$. Triunghiurile $B'C'P$ și DAP sunt asemenea. Deoarece $AD = 3 \cdot B'C'$, deducem că $AP = 3 \cdot PC'$. Se întâlnesc după 45 de secunde.

Autoevaluare. **1.** c 72 cm. **2.** $A'M = CM = 6\sqrt{3}$ cm. **3.a.** $AB = 6$ cm și $BC = 3$ cm. **b.** Desfășurăm pe un plan fețele $ABB'A'$ și $BCC'B'$. Arătăm că $A'C = \sqrt{162}$ cm $< \sqrt{169}$ cm $= 13$ cm.

Lecția 4. Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept

4.a. 8π cm; 16π cm^2; 56π cm^2. **b.** 12 cm; 144π cm^2; 240π cm^2; **c.** 7 cm; 5 cm; 49π cm^2; **d.** 8 cm; 4 cm; 16π cm; **e.** 10 cm; 20π cm; 100π cm^2. **7.a.** 10π cm; 25π cm^2; 60π cm^2; 150°; **b.** 10 cm; 100π cm^2; 200π cm^2; 180°; **c.** 12 cm; 30 cm; 144π cm^2; 144°; **d.** 6 cm; 120 cm; 12π cm; 18°; **e.** 4 cm; 8π cm; 16π cm^2; 96π cm^2. **8.** $\mathcal{A} = 2 \cdot (2 \cdot R \cdot G) + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G = 800 \text{ cm}^2 + 400\pi \text{ cm}^2$. **9.** $\mathcal{L}_{\text{scării}} = \sqrt{(8\pi)^2 + 10^2}$ m $< \sqrt{64 \cdot 10 + 100}$ m $= \sqrt{740}$ m $< 27{,}5$ m.

Autoevaluare. **1.** a. **2.** 120π cm^2. **3.** $R = 8$ cm.

Lecția 5. Drepte paralele. Unghiul a două drepte

1. b. **3.** b. **4.a.** $AA' \parallel CC' \Rightarrow C' \in (A'AC)$, etc. **b.** Cum punctele A și C' aparțin celor trei plane, dreapta AC' este inclusă în toate trei. Planele fiind distincte două câte două, intersecția lor poate fi cel mult o dreaptă. **5.a.** $\sphericalangle(MN, CD) = \sphericalangle(AC, CD)$; **b.** În ΔPAB isoscel de bază AB, mediana PM este și înălțime. **c.** Segmentele MN, NP, PQ, MQ sunt linii mijlocii în triunghiuri echilaterale congruente. Inițial, cum $MN \parallel PQ$, rezultă că punctele M, N, P, Q sunt coplanare. Apoi arătăm că $MNPQ$ este romb. **6.a.** Deoarece $\frac{VP}{VA} = \frac{VQ}{VB}$, aplicând *reciproca teoremei lui Thales*, rezultă că $PQ \parallel AB$. **7.** 60°. **8.a.** MN și PQ sunt linii mijlocii. **b.** $MN \parallel PQ$ și deci punctele M, N, P și Q sunt coplanare. Segmentul MP este diagonală comună în paralelogramele $MNPQ$ și $MSPR$. **c.** $\sphericalangle(MN, NP) = \sphericalangle(AC, BD) = 90°$. Așadar $MNPQ$ este paralelogram cu un unghi drept. **9.a.** $\sphericalangle(VB, AD) = \sphericalangle(VB, BC)$; **b.** Desfășurând pe un plan fețele VBC și VDC, obținem un romb în care BP este bisectoarea unghiului VBC. **c.** Fie O centrul bazei. Segmentul OP este linie mijlocie în ΔVAC. Obținem $OP = 8$ km și $OB = 8\sqrt{2}$ km, iar $\text{tg}(VA, BP) = \text{tg}(OP, BP)$. **d.** $BP = p\% \cdot (BC + CP)$. **10.** 60°. **11.** $MN \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(MN, CD) = \sphericalangle(AC, CD)$. Cu reciproca teoremei lui Pitagora, ΔACD este dreptunghic în C. **12.a.** 45°; **b.** 90°; **c.** 60°. **13.** $MN \parallel AB$ și $AB \perp OD$. **14.** Fie M mijlocul muchiei $AC \Rightarrow BM$ este mediană în ΔABC. Deci $G_1 \in BM$, astfel încât $BM = 3 \cdot G_1M$. În final, $\frac{G_1M}{BM} = \frac{G_2M}{DM}$ și aplicăm *reciproca teoremei lui Thales* în ΔMBD. **15.a.** 120°, respectiv 60°. **c.** 60°. **d.** Patrulaterul $ABCO$ este romb și deci $AC \perp BO$, iar $A'C' \parallel AC$. **16.a.** $\sphericalangle(MO, NQ) = \sphericalangle(MO, BD)$; MO este mediană în ΔMBD isoscel de bază BD; 90°; **b.** $\sphericalangle(AQ, OO') = \sphericalangle(BP, OO')$ și se ține cont că ΔPBD este echilateral; 60°; **c.** $\sphericalangle(DO', AN) = \sphericalangle(DO', DP) = 30°$. **17.a.** $\cos \sphericalangle(AA', CD') = \cos \sphericalangle(AA', A'B) = 0{,}8$; **b.** $\text{tg} \sphericalangle(AD', BC) = \text{tg} \sphericalangle(BC', BC) = 1{,}(3)$; **c.** Fie $AC \cap BD = \{O\}$; $D'O = D'\sqrt{82}$ cm; $\text{tg}\sphericalangle(AD', A'C') = \text{tg}\sphericalangle(AD', AC) = \sqrt{41} : 3$; **d.** $\sin \sphericalangle(A'B, AD') = \sin\sphericalangle(D'C, AD')$; $\mathcal{A}_{D'AC} = \frac{AC \cdot D'O}{2} = 6\sqrt{41} \text{ cm}^2 = \frac{D'A \cdot D'C \cdot \sin\sphericalangle(D'A, D'C)}{2}$; $\sin\sphericalangle(D'A, D'C) = \frac{3\sqrt{41}}{25}$. **18.a.** 0°, 90°, respectiv 45°; **b.** Segmentul OQ este linie mijlocie în trapezul $D'DBN$; **c.** Notăm cu Q' mijlocul segmentului MP. Folosind teorema liniei mijlocii în trapezul $CPMA$, obținem că $OQ' \parallel AA'$ și $OQ' = 6$ cm. Prin punctul O putem duce o singură paralelă la AA' și, în interiorul prismei, un singur punct situat pe această paralelă are proprietatea că se află la 6 cm de punctul O. Rezultă că punctele O și Q' coincid. Deducem că punctele M, N, P și D' sunt coplanare și sunt vârfuri ale unui paralelogram.

Autoevaluare. **1.a.** paralele sau necoplanare; **b.** 90°; **c.** congruente sau suplementare. **2.a.** → 4; **b.** → 1; **c.** → 3. **3.a.** $BC \parallel A'D'$, $BC \equiv A'D' \Rightarrow$ $\Rightarrow BCD'A'$ paralelogram $\Rightarrow A'B \parallel D'C$; **b.** $\sphericalangle(AC, B'D') = \sphericalangle(AC, BD) = 90°$; **c.** $\sphericalangle(A'B, DC') = \sphericalangle(A'B, AB') = 60°$.

Lecția 6. Dreaptă paralelă cu un plan

2. $B, C \in \alpha \Rightarrow BC \subset \alpha$; $A \notin \alpha$ și $B \in \alpha \Rightarrow AB \cap \alpha = \{B\}$; $AC \cap \alpha = \{C\}$; Cum $DE \not\subset \alpha$, $DE \parallel BC$ și $BC \subset \alpha \Rightarrow DE \parallel \alpha$. **3.** $DE \parallel AB$. **4.** P_1: putem avea $d \subset \alpha$. P_2: putem avea d și g drepte necoplanare. **5.a.** $A'D' \parallel BC$; **b.** $AD \not\subset (A'BC)$, $AD \parallel BC$ și $BC \subset (A'BC) \Rightarrow AD \parallel (A'BC)$; **c.** $BB' \parallel DD'$; **d.** Patrulaterul $BB'D'D$ este paralelogram, deci $B'D' \parallel BD$. **6.a.** $CD \subset (ABC)$; **b.** $D'O \cap (ABC) = \{O\}$; **c.** $AB \parallel (C'CD)$; **d.** $D'O \subset (BB'D)$; **e.** $CC' \parallel (A'AB)$; **f.** $BC' \parallel (A'AD)$. **7.a.** OM este linie mijlocie $\Delta A'BC$; **b.** $A'B \not\subset (AMC')$, $A'B \parallel OM$ și $OM \subset (AMC') \Rightarrow A'B \parallel (AMC')$. **c.** $\sphericalangle(A'C', AM) = \sphericalangle(MAC)$. **8.c.** Arătăm că $ABQP$ este paralelogram. **d.** $D'Q \parallel BP$. **9.a.** $MN \parallel BC$. **b.** Cum $MN \parallel (BCD)$ și $CD \subset (BCD) \Rightarrow MN \cap CD = \varnothing$. Deci $MN \parallel CD$ sau MN și CD sunt drepte necoplanare. Punctul $C \notin MN$, $BC \parallel MN$, dreptele BC, CD sunt diferite și atunci $CD \nparallel MN$ (axioma paralelelor). **c.** $\sphericalangle(MN, CD) = \sphericalangle(BC, CD)$. **10.b.** Arătăm că patrulaterele $ACDF$, $FDD'F'$ și $ACD'F'$ sunt paralelograme. În consecință, $CD' \parallel AF'$. **d.** $A'C' \parallel AC$ și $ABCO$ este romb. **11.a.** $DE \cap CV = \{M\}$ și atunci D, C, E, V sunt puncte coplanare. Patrulaterul $DCEV$ este paralelogram, deci $VE \parallel CD$. **c.** Segmentul OM este linie mijlocie ΔBMD. **d.** $MD \equiv ME$ și $MB \equiv MD$. **12.a.** Fie M mijlocul muchiei VB. Punctul G_1 se află pe mediana AM, astfel încât $\frac{MG_1}{AM} = \frac{1}{3}$. Obținem $\frac{MG_1}{AM} = \frac{MG_2}{CM}$ și deci $G_1G_2 \parallel AC$. **b.** Aplicăm Teorema 3: $G_1G_2 \parallel (ABC)$, $B \in (ABC)$, $BE \parallel G_1G_2 \Rightarrow BE \subset (ABC)$. **13.** Arcele congruente AC și BD sunt cuprinse între coardele CD și AB, deci $CD \parallel AB$. **14.a.** $\Delta AMB \equiv \Delta ANC$ (I.U.) $\Rightarrow MB \equiv NC$. Cum $\frac{MB}{VB} = \frac{MC}{CV} \Rightarrow MN \parallel BC$. **b.** $A \in (AMN) \cap (ABC) \Rightarrow$ există o dreaptă g, astfel încât $(AMN) \cap (ABC) = g$. **c.** Aplicăm Teorema 2: $MN \parallel (ABC)$, $MN \subset (AMN)$, $(AMN) \cap (ABC) = g \Rightarrow g \parallel MN$. **15.** Din teorema bisectoarei în ΔABC și în ΔABD, obținem $\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC}$ (1), respectiv $\frac{NA}{ND} = \frac{AB}{BD}$ (2).

„$\Rightarrow$" Dacă $MN \parallel (BCD)$, cum $MN \subset (ACD)$ și $(ACD) \cap (BCD) = CD \Rightarrow MN \parallel CD \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{ND}$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BC = BD$.

„$\Leftarrow$" Dacă $BC = BD$, din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{ND} \Rightarrow MN \parallel CD$ și cum $MN \not\subset (BCD)$, iar $CD \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$.

Autoevaluare. **1.** $BC \subset (ABC)$; $VA \cap (ABC) = \{A\}$; $DE \parallel (ABC)$. **2.a.** $AD \not\subset (VBC)$, $AD \parallel BC$ și $BC \subset (VBC) \Rightarrow AD \parallel (VBC)$. **b.** Fie $AC \cap BD = \{O\}$; $VD \parallel OT$. **c.** Cum $VD \cap AT = \varnothing \Rightarrow VD \parallel AT$ sau dreptele VD și AT sunt necoplanare. Punctul $T \notin VD$, $OT \parallel VD$, dreptele AT, OT sunt diferite $\Rightarrow$ $\Rightarrow VD \nparallel AT$ (axioma *paralelelor*). **3.a.** $A'C' \parallel AC$; **b.** Segmentul OP este linie mijlocie în $\Delta C'BD$. **c.** $\sphericalangle(AD', OP) = \sphericalangle(BC', OP) = 60°$.

Lecția 7. Plane paralele

2.a. DE este linie mijlocie în ΔVAB. **c.** $EF \parallel BC$; **d.** $DE \cap EF = \{E\}$; $DE \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $AB \cap BC = \{B\} \Rightarrow (DEF) \parallel (ABC)$; **e.** Aplicăm tranzitivitatea relației de paralelism. **3.** P_1: putem avea $d \parallel g$; P_2: dreptele d și g pot fi necoplanare. **4.a.** identice; **b.** paralele; **c.** secante. **5.** Deoarece $AB \cap AC = \{A\}$, $AB \parallel \alpha$ și $AC \parallel \alpha$, rezultă că $(ABC) \parallel \alpha$ și cum $BC \subset (ABC)$, obținem $BC \parallel \alpha$. **6.** Punctul N este mijlocul muchiei AC. Cum $ON \cap MN = \{N\}$; $ON \parallel A'A$, $MN \parallel AB$, $A'A \cap AB = \{A\} \Rightarrow (MON) \parallel (ABB')$. **7.a.** $MN \parallel BC'$ și $MQ \parallel BD$. **c.** $ABC'D'$ este paralelogram. $MN \parallel BC' \parallel AD'$ și $MQ \parallel BD \parallel B'D'$. **8.** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$. Analog $NP \parallel CD$. **9.** $MN \parallel AB$, $PQ \parallel CD$, $AB \parallel CD$. Deci $MN \parallel PQ$ și atunci M, N, P, Q sunt coplanare. **10.** $NP \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(NP, BC) = \sphericalangle(AC, BC)$; $\Delta AMB \equiv \Delta ANC$ (I.U.) $\Rightarrow MB = NC$. **11.b.** $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$. Atunci $\Delta MNP \sim \Delta ABC$ (L.L.L.). **c.** Cum $M \notin (ABC)$, $(MNP) \parallel (ABC)$, $(MQP) \parallel (ABC)$, deducem că (MNP) și (MQP) coincid. **d.** $V \in (VAB) \cap (VDC) = g$. Cum $AB \parallel CD$, $AB \subset (VAB)$, $CD \subset (VDC)$ și $(VAB) \cap (VDC) = g \Rightarrow g \parallel AB$. Din $g \not\subset (ABC)$, $g \parallel AB$ și $AB \subset (ABC) \Rightarrow g \parallel (ABC)$. **e.** Din $g \parallel (ABC)$ și $BD \subset (ABC) \Rightarrow g \parallel BD$ sau g și BD sunt drepte necoplanare. Cum $B \notin g$, $BA \parallel g$, BA și BD sunt drepte diferite, aplicând *axioma paralelelor*, rezultă că $BD \nparallel g$. **12.a.** Fie M mijlocul muchiei CD. În ΔABM, AG_1 separă punctele B și G_2. Deci există un punct G, astfel încât $AG_1 \cap BG_2 = \{G\}$. Obținem $\frac{MG_1}{BM} = \frac{MG_2}{AM} = \frac{1}{3}$. Atunci $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta MG_1G_2 \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{MG_1}{BM} = \frac{1}{3}$. Tot din $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow \Delta\, GG_1G_2 \sim \Delta GAB \Rightarrow \frac{GG_1}{AG} = \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GG_1}{AG_1} = \frac{1}{4}$. Succesiv, analog CG_3 și DG_4 sunt concurente cu AG_1 în punctul G. **b.** $G_2G_3 \parallel MN$, unde N este mijlocul muchiei BD. **b.** $G_3G_4 \parallel PN$, unde P este mijlocul muchiei BC. **13.** Cum $\beta \parallel \gamma$, $(ACD) \cap \gamma = MQ$ și $(ACD) \cap \beta = CD \Rightarrow MQ \parallel CD$. Din $\beta \parallel \gamma$, $(BCD) \cap \gamma = NP$ și $(BCD) \cap \beta = CD \Rightarrow NP \parallel CD$. Deci $MQ \parallel NP$. Analog $MN \parallel PQ$.

Autoevaluare. **1.a.** secante; **b.** punct; **c.** paralele. **2.** Toate sunt false. **3.a.** $AM \parallel NC'$ și $AM \equiv NC' \Rightarrow ANC'M$ este paralelogram $\Rightarrow C'M \parallel AN$. **b.** $C'M \cap C'D' = \{C'\}$, $C'M \parallel AN$, $C'D' \parallel AB$ și $AB \cap AN = \{A\} \Rightarrow (MC'D') \parallel (ABN)$. **b.** Fie P mijlocul muchiei DD'. Avem: $MD' \parallel AP \parallel BN$ și $B'D' \parallel BD$.

Lecția 8. Secțiuni paralele cu baza în corpurile studiate

1.c. $\mathcal{P} = 16\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A} = 32$ cm². **2.c.** $\mathcal{P} = 20$ cm; $\mathcal{A} = 25$ cm². **4.b.** $R = 3$ cm; $\mathcal{A} = 9\pi$ cm². **8.b.** $R = 6$ cm și $r = 3$ cm. Cu *teorema fundamentală a asemănării,* obținem că generatoarele formate au aceeași lungime, 5 cm. **9.b.** Cu *teorema fierăstrăului*, obținem $MN \parallel AB$. Deci $\Delta SMN \sim \Delta SAB$. $\mathcal{P} = 40$ cm; $\mathcal{A} = 100$ cm². **c.** $\Delta SMG \sim \Delta SAE$. Obținem că $G \in SE$, astfel încât $SE = 3 \cdot GE$, iar SE este mediană în ΔSAB.

Autoevaluare. **2.** Triunghi echilateral, dreptunghi, respectiv hexagon regulat. **3.b.** $\mathcal{A} = 16$ cm², respectiv 6 cm.

Lecția 9. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan. Aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

3. $VA \perp \alpha$ și $AD \subset \alpha \Rightarrow VA \perp AD$; $VD = 15$ m. **4.** În ΔABC, echilateral, CM este mediană, deci și înălțime. Atunci $CM \perp AB$. Analog $DM \perp AB$. Deoarece $AB \perp CM$, $AB \perp DM$ și $CM \cap DM = \{M\} \Rightarrow AB \perp (CDM)$. Cum $AB \perp (CDM)$ și $CD \subset (CDM) \Rightarrow AB \perp CD$. **5.a.** $A'A \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow A'A \perp AC$. Obținem $A'C = 6\sqrt{2}$ cm. Fie $AD \perp A'C \Rightarrow d(A, A'C) = AD = 3\sqrt{2}$ cm. **b.** $AB = 3\sqrt{3}$ cm și $BC = 3$ cm; $A'A \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow A'A \perp BC$. Cum $BC \perp AB$, $BC \perp A'A$ și $AB \cap A'A = \{A\} \Rightarrow BC \perp (A'AB) \Rightarrow d(C, (A'AB)) = BC = 3$ cm. **6.a.** $MB = 4\sqrt{5}$ cm; $d(A, MB) = 1{,}6\sqrt{5}$ cm. **b.** Unghiul ACB înscris în cerc se sprijină pe diametrul AB și, în consecință, este unghi drept. Obținem $AC = 4$ cm și $BC = 4\sqrt{3}$ cm. Din $MA \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow MA \perp BC$. Cum $BC \perp AC$, $BC \perp MA$ și $AC \cap MA = \{A\} \Rightarrow BC \perp (ACM) \Rightarrow d(B, (ACM)) = BC = 4\sqrt{3}$ cm. **7.a.** $AB \not\subset (D'DC)$, $AB \parallel CD$ și $CD \subset (D'DC) \Rightarrow AB \parallel (D'DC)$. **b.** Cum $D'D \perp (ABC)$ și $BD \subset (ABC) \Rightarrow D'D \perp BD$. **c.** Din $D'D \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC) \Rightarrow D'D \perp BC$. Cum $BC \perp DC$, $BC \perp D'D$ și $DC \cap D'D = \{D\} \Rightarrow BC \perp (D'DC)$. **d.** $AC \perp BD$ și $AC \perp D'D$. **e.** În $\Delta D'DB$, segmentul MO este linie mijlocie. Din $D'D \perp (ABC)$ și $MO \parallel D'D \Rightarrow MO \perp (ABC)$. **f.** $\sphericalangle(BC, D'A) = \sphericalangle(AD, D'A) = \sphericalangle D'AD$. În $\Delta D'AD$, $\text{tg}\sphericalangle D'AD = \sqrt{3}$. **8.** OB este raza cercului circumscris triunghiului echilateral BCD. Deci $BC = OB \cdot \sqrt{3} = AB$. Segmentul AO este înălțimea tetraedrului regulat. Deci $AO \perp (BCD)$ și cum $OB \subset (BCD) \Rightarrow AO \perp OB \Rightarrow \Delta AOB$ este dreptunghic în O și obținem $AB^2 = AO^2 + OB^2 \Leftrightarrow (OB\sqrt{3})^2 = (12 \text{ cm})^2 + OB^2 \Leftrightarrow OB = 6\sqrt{2}$ cm. Deci $AB = 6\sqrt{6}$ cm. Desfășurând pe un plan fețele ABC și ACD, obținem rombul $ABCD$. Lungimea drumului minim este egală cu $18\sqrt{2}$ cm. **9.a.** În ΔABC, echilateral, $AB = OA \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm. Deci $OA = 9$ cm. VO este înălțimea piramidei $\Rightarrow VO \perp (ABC)$ și cum $OA \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp OA$. **b.** Fie $OA \cap BC = \{M\}$. Deoarece $BC \perp VO$, $BC \perp AM$ și $VO \cap AM = \{O\} \Rightarrow BC \perp (VOA)$. **c.** $\alpha \parallel (ABC)$, $(VAB) \cap \alpha = MN$, $(VAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow \Delta VMN \sim \Delta VAB$. **d.** $\sphericalangle(MN, BC) = \sphericalangle(AB, BC)$; **e.** În ΔVOA, fie $E \in OA$, astfel încât $ME \parallel VO \Rightarrow \Delta MEA \sim \Delta VOA \Rightarrow \frac{ME}{VO} = \frac{AM}{VA} \Leftrightarrow \frac{ME}{12 \text{ cm}} = \frac{10 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \Rightarrow ME = 8$ cm. Din $ME \parallel VO$ și $VO \perp (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow ME \perp (ABC) \Rightarrow d(M, (ABC)) = ME = 8$ cm. **f.** $MNPABC$ este trunchi de piramidă triunghiulară regulată și deci $\Delta MNP \sim \Delta ABC$. **10.** VO este înălțimea conului $\Rightarrow VO \perp (ABC)$ și cum $OA \subset (ABC) \Rightarrow VO \perp OA$. Obținem $VO = 9$ cm. Deoarece diametrul AB înjumătățește coarda CD, rezultă că $AB \perp CD$. Cum $CD \perp VO$, $CD \perp AB$ și $VO \cap AB = \{O\} \Rightarrow CD \perp (VAB)$. **11.a.** $OA = 6\sqrt{2}$ cm; $d(V, (ABC)) = VO = 6\sqrt{7}$ cm. **b.** În ΔVOA, fie $F \in OA$, astfel încât $EF \parallel VO \Rightarrow \Delta EFA \sim \Delta VOA$ și obținem $EF = 4\sqrt{7}$ cm. Din $EF \parallel VO$ și $VO \perp (ABC) \Rightarrow EF \perp (ABC)$. **c.** $AO \perp VO$, $AO \perp BD$ și $VO \cap BD = \{O\} \Rightarrow$ $\Rightarrow AO \perp (VBD) \Rightarrow d(A, (VBD)) = AO = 6\sqrt{2}$ cm. **d.** Fie M mijlocul muchiei BC și $OH \perp VM$, cu $H \in VM$. Obținem $OM = 6$ cm, $VM = 12\sqrt{2}$ cm și $OH = 1{,}5\sqrt{14}$ cm. Din $BC \perp VO$, $BC \perp OM$ și $VO \cap OM = \{O\} \Rightarrow BC \perp (VOM)$ și cum $OH \subset (VOM) \Rightarrow BC \perp OH$. Așadar $OH \perp VM$, $OH \perp BC$, $VM \cap BC = \{M\} \Rightarrow OH \perp (VBC) \Rightarrow d(O, (VBC)) = OH = 1{,}5\sqrt{14}$ cm. **12.a.** $OA = AB = 12$ cm. Cum $VO \perp (ABC) \Rightarrow d(V, (ABC)) = VO = 8$ cm. **b.** Fie $AC \cap BE = \{T\}$. Patrulaterul $ABCO$ este romb. Deci $AT \perp BE$ și obținem $AT = 6\sqrt{3}$ cm. Cum $AT \perp BE$, $AT \perp VO$ și $VO \cap BE = \{O\} \Rightarrow AT \perp (VBE) \Rightarrow$ $\Rightarrow d(A, (VBE)) = AT$. **c.** În ΔVOT fie $OH \perp VT$, cu $H \in VT$. Obținem $OT = 6$ cm și $OH = 4{,}8$ cm. Din $AT \perp (VBE)$ și $OH \subset (VBE) \Rightarrow AC \perp OH$. Deci $OH \perp VT$, $OH \perp AC$ și $VT \cap AC = \{T\} \Rightarrow OH \perp (VAC) \Rightarrow d(O, (VAC)) = OH$. **d.** Patrulaterul $ABCF$ este trapez isoscel cu $AB \parallel CF$. $V \in (VAB) \cap (VFC) = g$. Deoarece $AB \parallel CF$, $AB \subset (VAB)$, $CF \subset (VFC)$ și $(VAB) \cap (VFC) = g$, rezultă $g \parallel AB$ și atunci $\sphericalangle(g, BE) = \sphericalangle(AB, BE) = 60°$. **13.a.** Fie $AC \cap BD = \{O\}$. $BD = C'B = C'D = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm. Așadar $\Delta C'BD$ este echilateral și, cum $C'C = CD = CB$, rezultă că $CBC'D$ este piramidă triunghiulară regulată. Deoarece $\Delta C'BD$ este echilateral și G este centrul de greutate al acestuia, rezultă că G este centrul cercului circumscris bazei acestei piramide. Deci CG este înălțimea piramidei $CBC'D$. Din $CG \perp (C'BD)$ și $C'O \subset (C'BD) \Rightarrow CG \perp C'O$. Obținem $OG = C'O : 3 = \sqrt{6}$ cm, iar $CG = 2\sqrt{3}$ cm. **b.** $A'B = A'C' = A'D = BD = C'B = C'D \Rightarrow A'BC'D$ este tetraedru regulat. Cum G este centrul cercului circumscris bazei, rezultă că $A'G \perp (C'BD)$. Deoarece $G \in (C'BD)$, $A'G \perp (C'BD)$ și $CG \perp (C'BD)$, deducem că dreptele $A'G$ și CG coincid.

Autoevaluare. **1.a.** A; **b.** F; de exemplu, în cubul $ABCDA'B'C'D'$, $A'A \perp AB$, $A'A \perp BC$ și $AB \nparallel BC$; **c.** A. **2.a.** $\Delta AOC \equiv \Delta BOC$ (I.C.); **b.** Din $OC \perp OA$, $OC \perp OB$ și $OA \cap OB = \{O\}$. **c.** $BC \perp OM$, $BC \perp AM$ și $OM \cap AM = \{M\}$. **3.a.** $VO = 9\sqrt{3}$ cm. **b.** Fie $T \in OA$, cu $ET \parallel VO$. Obținem $d(E, (ABC)) = ET = 3\sqrt{3}$ cm. **c.** Fie M mijlocul muchiei BC și $OH \perp VM$, $H \in VM$. Arătăm că $BC \perp (VOM)$ și $OH \perp (VBC)$. Obținem $= OH = 4{,}5 \cdot \sqrt{3}$ cm.

Lecția 10. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prismei drepte și a cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă și a trunchiului de con circular drept

1.a. $(A'B'C') \parallel (ABC)$ și $O \in (ABC) \Rightarrow d(O, (A'B'C')) = d(A, (A'B'C')) = AA' = 4$ cm; **b.** Fie $OM \perp BC$, cu $M \in BC$. Cum $OM \perp BC$, $OM \perp BB'$ și $BC \cap BB' = \{B\} \Rightarrow OM \perp (B'BC) \Rightarrow d(O, (B'BC)) = OM = 2$ cm. **c.** $AB \parallel (CDD') \Rightarrow d(AB, (CDD')) = d(A, (CDD')) = AD = 4$ cm; **d.** $(BCC') \parallel (ADD') \Rightarrow$ $\Rightarrow d((BCC'), (ADD')) = d(B, (ADD')) = BA = 4$ cm. **2.** $\mathcal{P}_{desf.} = 2 \cdot (2\pi R + G) = 24\pi \text{ cm} + 9$ cm; $\mathcal{L}_\ell = 24\pi$ cm; $G = h = 4{,}5$ cm. **3.a.** $CM = AB\sqrt{3} : 2 = 6$ cm; $\mathcal{A}_b = 12\sqrt{3}$ cm^2. **b.** $C'C = 6\sqrt{3}$ cm. **c.** $(A'B'C') \parallel (ABC)$ și $G \in (A'B'C') \Rightarrow d(G, (ABC)) = d(C, (ABC)) = CC'$; **d.** $AM = 2\sqrt{3}$ cm. **4.a.** $P_b = 24$ cm. **b.** $D'D = 8$ cm. **c.** Cum $AO \perp BD$, $AO \perp BB'$ și $BD \cap BB' = \{B\} \Rightarrow AO \perp (BB'D) \Rightarrow d(A, (BB'D)) = AO = 3\sqrt{2}$ cm. **d.** Fie $OM \perp BC$, $M \in BC$; $d(O, (BC'C)) = OM = 3$ cm. **5.a.** $\frac{AB}{4} = \frac{BC}{3} = \frac{D'D}{5} = \frac{AB + BC + D'D}{4 + 3 + 5} = \frac{24 \text{ cm}}{12} = 2$ cm; $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și $D'D = 10$ cm; $P_b = 28$ cm. **b.** $h = D'D = 10$ cm. **c.** $d(O, (BC'C)) = OT = 4$ cm (OT este linie mijlocie în ΔABC). **d.** Fie $AE \perp BD$, $E \in BD$; $AE = 4{,}8$ cm. Cum $AE \perp BD$, $AE \perp BB'$ și $BD \cap BB' = \{B\} \Rightarrow AE \perp (BB'D) \Rightarrow d(A, (BB'D)) = AE = 4{,}8$ cm. **6.a.** $AB = 10$ cm și $A'A = 15$ cm; $d(A'B'C'), (ABC) = A'A = 15$ cm. **b.** Fie $AC \cap OB = \{T\}$; $CT \perp OB$ și $CT = 5\sqrt{3}$ cm; $d(C, (B'OB)) = CT$. **c.** În ΔBCE, CO este mediană și $CO = BE : 2$. Deci $EC \perp BC$ și cum $EC \perp BB'$, $BC \cap BB' = \{B\} \Rightarrow$ $\Rightarrow EC \perp (B'BC) \Rightarrow d(E, (B'BC)) = EC = 10\sqrt{3}$ cm. **d.** $d(E, (B'BC)) = ET = 15$ cm. **7.** Fie O și O' centrele bazei mari, respectiv bazei mici. În trapezul dreptunghic $AOO'A'$, $OA = 4\sqrt{3}$ cm și $O'A' = 2\sqrt{3}$ cm. Fie $A'E \perp OA$, $E \in OA$. Obținem $A'E = 6 \text{ cm} = O'O$. **8.** $A'A = 10$ cm; $\mathcal{A}_{A'AO} = 48$ cm^2; $d(O, A'A) = 9{,}6$ cm. **9.** $h = 24$ cm. **10.** $G = 10$ cm, $h = 8$ cm, $R = 8$ cm și $r = 2$ cm. **11.** 11 cm. **12.** $(AB'D') \parallel (C'BD)$; punctele A', G', G, C sunt coliniare; $d((AB'D'), (C'BD)) = G'G = A'C : 3 = 4\sqrt{3}$ cm. (Vezi rezolvarea problemei 13 de la Lecția 9.)

Autoevaluare. **1.a.** distanța; **b.** mică; **c.** $h = G$. **2.a.** 100π cm^2. **b.** $4\sqrt{3}$ cm; **c.** $10\sqrt{3}$ cm. **3.a.** $4\sqrt{3}$ cm. **b.** Fie E mijlocul muchiei AC. Cum $PE \parallel A'A$ și $A'A \perp (ABC) \Rightarrow d(P, (ABC)) = PE = 2\sqrt{3}$ cm. **c.** $d(C, (A'AB)) = CM = 6\sqrt{3}$ cm, unde M este mijlocul muchiei AB.

Lecția 11. Plane perpendiculare. Secțiuni diagonale și secțiuni axiale

3.b. $VO \perp (ABC)$, $VO \subset (VBD) \Rightarrow (VBD) \perp (ABC)$. **4.a.** Din $VO \perp (ABC)$, $VO \subset (VAM) \Rightarrow (VAM) \perp (ABC)$. **b.** Vezi Teorema 3: $(VAM) \perp (ABC)$, $T \in VA \subset (VAM)$, $TE \perp (ABC) \Rightarrow TE \subset (VAM)$. **c.** $BC \perp (VAM)$ și cum $BC \subset (VBC) \Rightarrow (VBC) \perp (VAM)$. Eventual, vezi Teorema 2: $(VBC) \perp (VAM)$, $(VBC) \cap (VAM) = VM$, $AH \perp VM$ și $AH \subset (VAM) \Rightarrow AH \perp (VBC)$. **5.** Fie $ABB'A'$ secțiunea axială cu $AB = 2 \cdot R$; $\mathcal{P} = 10 \cdot R = 40$ cm $\Rightarrow R = 4$ cm;

$AB = 8$ cm, $B'B = 12$ cm, iar $B'A = \sqrt{208}$ cm $< \sqrt{225}$ cm $= 15$ cm. Rămâne un capăt în afara suportului. **6.** $\mathcal{P}_b = 12\sqrt{2}$ cm. Fie O centrul bazei. Deoarece $VO \perp (ABC)$, $VO \subset (VAC) \Rightarrow (VAC) \perp (ABC)$. Din $AO \perp (VBD)$ și $AO \subset (VAC) \Rightarrow (VAC) \perp (VBD)$. **7.b.** $BC \perp (A'AM)$ și $BC \subset (A'BC) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A'BC) \perp (A'AM)$. **c.** Fie $AH \perp A'M, H \in A'M$; $AM = 6\sqrt{3}$ cm, $A'M = 12$ cm, iar $AH = 3\sqrt{3}$ cm. Cum $(A'BC) \perp (A'AM)$, $(A'BC) \cap (A'AM) = A'M$, $AH \perp A'M$ și $AH \subset (A'AM) \Rightarrow AH \perp (A'BC)$. **8.** Patrulaterul $ABCO$ este romb cu $AC = 6\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_{ACC'A'} = \mathcal{A}_{AEE'A'} = 36\sqrt{3}$ cm² și $\mathcal{A}_{ADD'A'} = 72$ cm². **9.** $r = 4$ cm, $R = 16$ cm, 15 cm, respectiv 20 cm. **10.** $\mathcal{A}_{VAB} = R \cdot h = 12$ cm². Din $(VAB) \perp (VDC)$, $(VAB) \cap (VDC) = VO$, $AB \perp VO$ și $AB \subset (VAB) \Rightarrow AB \perp (VDC)$ și cum $DC \subset (VDC) \Rightarrow AB \perp DC$. Obținem $VB = CV = 5$ cm, $BC = 4\sqrt{2}$ cm și $\mathcal{A}_{VBC} = 2\sqrt{34}$ cm². **11.** Aplicăm Teorema 4. **12.a.** $D'O = 16$ cm $= AC$ și $\mathcal{A}_{D'AC} = 128$ cm². **b.** Fie $DH \perp D'O$, cu $H \in D'O$. Cum $AC \perp (D'DO)$ și $AC \subset (D'AC) \Rightarrow (D'AC) \perp (D'DO)$. Din $(D'AC) \perp (D'DO)$, $(D'AC) \cap (D'DO) = D'O$, $DH \perp D'O$ și $DH \subset (D'DO) \Rightarrow DH \perp (D'AC) \Rightarrow d(D, (D'AC)) = DH = 4\sqrt{3}$ cm. **c.** Secțiunile diagonale $ACC'A'$ și $BDD'B'$ sunt secțiunile axiale cu aria maximă, egală cu $128\sqrt{3}$ cm². O secțiune axială cu aria minimă este dreptunghiul cu vârfurile în mijloacele muchiilor AD, BC, $B'C'$, respectiv $A'D'$ și are aria egală cu $64\sqrt{6}$ cm². **13.a.** $\mathcal{A}_{ACC'A'} = \mathcal{A}_{BDD'B'} = 48$ cm². **b.** Fie $C'M \perp AC$, cu $M \in AC$. Obținem $AM = 6\sqrt{2}$ cm, $C'M = O'O = 6\sqrt{2}$ cm și $AC' = 12$ cm. **c.** $\Delta AOQ \sim \Delta AMC'$. $OQ = 4\sqrt{2}$ cm. **14.a.** Secțiunile $ACC'A'$ și $BDD'B'$ sunt trapeze isoscele, congruente. **b.** $\Delta A'QC' \sim \Delta CQA$ (U.U.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{A'Q}{CQ} \Leftrightarrow \dfrac{A'C':2}{AC:2} = \dfrac{A'Q}{CQ}$. Deci $\dfrac{A'O'}{CO} = \dfrac{A'Q}{CQ}$ și cum $\sphericalangle QA'O' \equiv \sphericalangle QCA \Rightarrow \Delta A'QO' \sim \Delta CQO$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle A'QO' \equiv \sphericalangle CQA \Rightarrow O, Q, O'$ sunt coliniare (reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf) $\Leftrightarrow AC' \cap A'C \cap O'O = \{Q\}$. Analog $BD' \cap B'D \cap O'O = \{Q'\}$. $\dfrac{QO'}{QO} = \dfrac{Q'O'}{Q'Q} = \dfrac{A'B'\sqrt{2}}{AB\sqrt{2}} \Rightarrow$ punctele Q' și Q coincid.

Autoevaluare. **1.a.** 36 cm²; **b.** 5 cm; **c.** 8 cm. **2.** $\mathcal{A}_{VAD} = 72$ cm² și $\mathcal{A}_{VAC} = \mathcal{A}_{VAE} = 45\sqrt{3}$ cm². **3.b.** Din $BD \perp (A'AC)$ și $BD \subset (A'BD) \Rightarrow (A'BD) \perp (A'AC)$. **c.** $A'O = 4\sqrt{6}$ cm. Fie $AH \perp A'O$, cu $H \in A'O$. Cum $(A'BD) \perp (A'AC)$, $(A'BD) \cap (A'AC) = A'O$, $AH \perp A'O$, $AH \subset (A'AC) \Rightarrow AH \perp (A'BD)$.

Lecția 12. Proiecții pe un plan. Unghiul dintre o dreaptă și un plan

1.a. $MN = PQ = 4\sqrt{3}$ cm. **b.** $4\sqrt{6}$ cm; **c.** 8 cm; **d.** $8\sqrt{3}$ cm. **2.a.** $O \in (A'AB) \cap \alpha = A'B'$. **b.** $AA' \parallel BB' \Rightarrow \Delta AOA' \sim \Delta BOB'$. **3.a.** $AA' \perp \alpha$, $OO' \perp \alpha$ și $BB' \perp \alpha \Rightarrow AA' \parallel OO' \parallel BB'$, iar AA' și BB' determină $(A'AB)$. Punctul $O \in AB \subset (A'AB)$, iar $OO' \parallel AA'$, deci $OO' \subset (A'AB)$ cu $O' \in (A'AB) \cap \alpha = A'B'$. **b.** Aplicăm teorema paralelelor neechidistante: $AA' \parallel OO' \parallel BB'$, AB și $A'B'$ secante. **4.a.** $AO \perp \alpha$; $\Delta AOB \equiv \Delta AOC$ (I.C.) $\Rightarrow OB \equiv OC$; $\sphericalangle BOC = 90°$; **b.** $\sphericalangle ABO = 30°$; **c.** $OB = 2\sqrt{3}$ cm. **5.a.** $\sphericalangle MAC = 60°$; $MC = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 6$ cm și $CD = 3\sqrt{2}$ cm; $\text{tg}(\sphericalangle MDC) = \sqrt{6}$; **b.** $\sqrt{7}/7$; **c.** $\text{tg}(\sphericalangle OMD) = \sqrt{13}/13$. **6.** $OO' \parallel BB'$, deci determină un plan β. Cum $OB \parallel \alpha$, $OB \subset \beta$ și $\alpha \cap \beta = O'B' \Rightarrow OB \parallel O'B'$. Patrulaterul $OO'B'B$ este dreptunghi. Deci $OB \perp OO'$. Cum $OB \perp (OO', AA')$ și $OB \parallel O'B' \Rightarrow O'B' \perp (OO', AA')$. **7.a.** 0°; **b.** $\sphericalangle(EG, FG) = 45°$; **c.** $\sphericalangle(BG, OG) = 30°$. **8.a.** $AC = 30$ cm, $AC' = 50$ cm; $\cos(\sphericalangle C'AC) = 0{,}6$. **b.** Fie $N = \text{pr}_{(ABC)}M \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow d(M, (ABC)) = MN$. Punctele A, C' și M, respectiv A, C și N sunt coliniare. Cum $C'C \parallel MN$ $\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta AC'C$. Obținem $MN = 72$ cm. **9.a.** $A'C' \parallel (ABC)$; $4\sqrt{2}$ cm. **b.** Fie O și O' centrele bazei mari, respectiv bazei mici. Fie $E \in OA$, astfel încât $A'E \parallel O'O$. Obținem $\text{pr}_{(ABC)}A'A = AE = 2\sqrt{2}$ cm. **c.** 4 cm. **10.a.** Fie $\text{pr}_{(ABM)}A = E$; $\text{pr}_{(ABM)}AD = AE = 4$ cm. **b.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 48\sqrt{5}$ cm²; **c.** $\sphericalangle DME = 45°$. **11.a.** $VA = 6$ cm și $OA = 3\sqrt{2}$ cm; $\sphericalangle VAO = 45° = \sphericalangle AVO$; **c.** $OM = 3$ cm și $VM = 3\sqrt{3}$ cm. În ΔVOM, fie $OH \perp VM$, cu $H \in VM$. Se arată că $\text{pr}_{(VBC)}O = H$, deci $\text{pr}_{(VBC)}VO = VH$. Prin urmare $= \sin(\sphericalangle OVH) = \sin(\sphericalangle OVM) = \sqrt{3}:3$. **12.a.** Fie O centrul bazei BCD. Obținem $\text{pr}_{(BCD)}AB = BO = 6$ cm; **b.** $\text{pr}_{(BCD)}AM = OM = 3$ cm; **c.** Fie $BH \perp AM$, cu $H \in AM$. Cum $BH \perp (ACD) \Rightarrow \text{pr}_{(ACD)}BM = HM = 3$ cm. **13.** Fie M și M' mijloacele muchiilor BC, respectiv $B'C'$. Punctul G' aparține medianei $A'M'$, astfel încât $A'G' = 2 \cdot G'M'$. Cum $\text{pr}_{(ABC)}A'M' = AM$, $G' \in A'M' \Rightarrow \text{pr}_{(ABC)}G' \in AM$. Conform teoremei paralelelor neechidistante, din $A'M' \parallel AM$, AA', GG', MM' secante $\Rightarrow \dfrac{A'G'}{AG} = \dfrac{G'M'}{GM} \Leftrightarrow \dfrac{AG}{GM} = \dfrac{A'G'}{G'M'} = \dfrac{2}{1}$. Deci punctul G aparține medianei AM, astfel încât $AG = 2 \cdot GM$.

Autoevaluare. **1.a.** dreaptă sau un punct; **b.** 0 cm; **c.** 0°. **2.a.** 45°; **b.** 5 cm; **c.** 4 cm. **3.a.** $\sphericalangle VAO = 60°$; **b.** $OB \perp (VAC)$; 0 cm; **c.** $\sqrt{7}:7$.

Lecția 13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare

1.a. $\sphericalangle COD = 60°$; $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 120°$. **b.** 60°. **2.** $\sphericalangle AOB = 120°$. **3.** $\sphericalangle DAC = 30°$; $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul laturii AB. Cum $(ABD) \cap (ABC) = AB$, $DM \perp AB$ cu $DM \subset (ABD)$, $CM \perp AB$ cu $CM \subset (ABC) \Rightarrow \sphericalangle((ABD), (ABC)) = \sphericalangle CMD$; $\text{tg}(\sphericalangle CMD) = 0{,}(6)$. **4.** $\cos\left(\sphericalangle\left((ABC), (A'B'C')\right)\right) = \dfrac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{9\text{ cm}^2}{18\text{ cm}^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle((ABC), (A'B'C')) = 60°$. **5.** 50°. **6.b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **7.a.** 90°; **b.** 0°; **c.** 90°. **d.** $\cos(\sphericalangle(C'OO')) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **8.a.** 90°. **b.** $\sphericalangle C'AC = 30°$; $\text{tg}(\sphericalangle C'BC) = \sqrt{6}/3$. **c.** $\sqrt{21}/7$. **9.** $\cos((ABC), (A'B'C')) = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = \dfrac{12\text{ cm}^2}{15\text{ cm}^2} = \dfrac{4}{5}$. **10.a.** $\sin(\sphericalangle VAO) = 3\sqrt{13}/13$; **b.** $\text{tg}(\sphericalangle VTO) = 0{,}(3)$; **c.** $\sphericalangle VMO = 60°$. **11.a.** 30°; **b.** 45°; **c.** 60°. **12.a.** $\sphericalangle OMV = 30°$; **b.a.** $\sphericalangle AOM = 45°$; **c.** Atenție: $\sphericalangle NVM = 120°$! Deci $\sphericalangle((VAB), (VDC)) = 60°$. **13.a.** 60°; **b.** Fie $EM \perp AB$, cu $M \in AB$. Obținem $EM = 4\sqrt{3}$ cm $= d(E, (ABC))$. Deci $EM \perp (ABC)$ și cum $EM \subset (ABE) \Rightarrow (ABE) \perp (ABC)$. **c.** $\sphericalangle AEB = 60°$. **14.** Fie $AB \cap CD = \{M\}$. Diametrul AB este mediatoarea coardei CD și $AB = 8\sqrt{3}$ cm, iar $AM = 12$ cm. Cum $\sphericalangle A'MA = 60°$, obținem $A'A = 12\sqrt{3}$ cm și $\text{tg}(\sphericalangle B'MB) = 3\sqrt{3}$. **15.** Fie $VABC$ tetraedru regulat cu O centrul bazei BCD. Cum $VO \perp (ABC) \Rightarrow \text{pr}_{(ABC)}\Delta VBC = \Delta OBC$. Deci $\cos((VBC), (ABC)) = 0{,}(3)$. **16.** Fie $M \in BC$, astfel încât $DM \perp BC$. Cum $(BCD) \perp (ABC)$ și $DM \subset (BCD) \Rightarrow DM \perp (ABC) \Rightarrow d(D, (ABC)) = DM$. Fie $N \in AC$ și $P \in AB$, astfel încât $MN \perp AC$ și $MP \perp AB$. Avem $\sphericalangle((ACD), (ABC)) = \sphericalangle DNM$ și $\sphericalangle((ABD), (ABC)) = \sphericalangle DPM$. Din $\Delta DMN \equiv \Delta DMP$ (C.U.) și $\Delta BMP \equiv \Delta CMN$ (C.U.) $\Rightarrow BM \equiv CM$. Obținem $MN = 3\sqrt{3}$ cm și $DM = 3$ cm. **17.a.** Fie M mijlocul laturii BC. Avem $BC \perp \alpha$, $MT \subset \alpha$, așadar $BC \perp MT$, deci MT este mediatoarea segmentului BC în planul (BCT), de unde rezultă că $TB = TC$. **b.** Dacă $\alpha \cap (ABC) = d$, rezultă că d este mediatoarea segmentului BC. Analog, notând $\beta \cap (ABC) = g$ și $\gamma \cap (ABC) = h$, rezultă că g este mediatoarea segmentului AC, iar h este mediatoarea segmentului AB. Punctul lor de intersecție, O, se află în toate cele trei plane. Fie $\ell = \alpha \cap \beta$. Avem $BC \perp \alpha$ și $\ell \subset \alpha$, deci $BC \perp \ell$. Din $AC \perp \beta$ și $\ell \subset \beta$, rezultă $AC \perp \ell$, așadar $\ell \perp (ABC)$. Analog, dacă notăm $\ell' = \alpha \cap \gamma$, rezultă că $\ell' \perp (ABC)$ și, deoarece dreptele ℓ și ℓ' conțin punctul O, rezultă că $\ell = \ell'$, deci dreapta ℓ este intersecția celor trei plane. **c.** $\sphericalangle(\beta, \gamma) = \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle A$, $\sphericalangle(\alpha, \gamma) = \sphericalangle(d, h) = \sphericalangle B$ și $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(d, g) = \sphericalangle C$.

Autoevaluare. **1.a.** 180; **b.** 0; **c.** 90. **2.a.** F; **b.** F; **c.** A. **3.a.** 90°. **b.** $\sphericalangle A'CA = 45°$; $\text{tg}(\sphericalangle A'OA) = 2$; **c.** $\cos(\sphericalangle D'OD) = \sqrt{5}:5$.

Lecția 14. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele

1.a. Cu T3⊥: $VA\perp(ABC)$, $AB\perp BC$, AB și $BC\subset(ABC)$ $\Rightarrow$ $VB\perp BC$ $\Rightarrow$ $d(V,BC)=VB=2\sqrt{2}$ cm. În ΔVAB, fie $AH\perp VB$, cu $H\in VB$. Cu R2 T3⊥: $AH\perp VB$, $AB\perp BC$, $VB\perp BC$, VB și $BC\subset(VBC)$ $\Rightarrow$ $AH\perp(VBC)$ $\Rightarrow$ $d(A,(VBC))=AH=\sqrt{2}$ cm. **b.** Fie $AM\perp BC$, cu $M\in BC$ și $AH\perp VM$ cu $H\in VM$; $d(V,BC)=VM=6$ cm; $d(A,(VBC))=AH=3$ cm; **c.** $d(V,BC)=4$ cm și $d(A,(VBC))=\sqrt{3}$ cm. **2.a.** 10 cm; **b.** 4,8 cm; **c.** 9,6 cm. **3.a.** Cu T3⊥, $d(V,DC)=VD=8\sqrt{2}$ cm; $\sphericalangle VDA=45°$; **b.** Fie $AE\perp BD$, cu $E\in VD$ și $AH\perp VE$, cu $H\in VE$. $d(V,BD)=VE=4\sqrt{7}$ cm, $d(A,(VBD))=AH=(8\sqrt{21}:7)$ cm, $\sphericalangle VBA=30°$. **4.a.** $AO=6\sqrt{2}$ cm; **b.** $\sphericalangle AOM=45°$; **c.** Fie $MH\perp AO$, $H\in AO$. Cu R2 T3⊥, $d(M,(AQN))=MH=3\sqrt{2}$ cm; **d.** $\sphericalangle BOP=45°$; $\sphericalangle((AQN),(BQN))=180°-45°-45°=90°$. **5.a.** $\sqrt{6}$; **b.** $8\sqrt{3}$ cm; **c.** 6 cm; **d.** 30°. **6.a.** $C'O=6\sqrt{6}$ cm; **b.** $\text{tg}(\sphericalangle C'OC)=\sqrt{2}$; **c.** $d(C,(C'BD))=CH=4\sqrt{3}$ cm. Cum $CH\perp(C'BD)$, $\alpha\parallel(C'BD)$, $C\in\alpha$ $\Rightarrow$ $d(\alpha,(C'BD))=CH$; **d.** $A'C=12\sqrt{3}$ cm. Poliedrul $A'BC'D$ este tetraedru regulat. Deci $A'H\perp(C'BD)$ și $A'H=8\sqrt{3}$ cm. **7.a.** $\sphericalangle MFE=45°$; $ON=18$ m; **b.** $\sphericalangle FOC=45°$; **c.** $BF\perp(MEF)$. Cu reciproca teoremei lui Pitagora, ΔMEF este dreptunghic în M, iar cu T3⊥, $d(B,ME)=BM=9\sqrt{3}$ cm. **8.a.** $d(V,BC)=VM=5$ cm. **b.** Fie $OH\perp VM$, cu $H\in VM$. $d(O,(VBC))=OH=2,4$ cm. **c.** $\text{ctg}(OM,VM)=0,75$. **d.** Construim dreptunghiul $ACBD$, notăm $OM\cap AD=\{T\}$ și construim $TE\parallel OH$, $E\in VM$. $d(T,(VBC))=TE=2\cdot OH=4,8$ cm și, cum $AT\parallel(VBC)$, $d(A,(VBC))=4,8$ cm. **9.a.** $O'O=3\sqrt{3}$ cm; $\Delta VO'A'\sim\Delta VOA$; $VO=9\sqrt{3}$ cm; **b.** $M'M=6$ cm; **c.** $4,5\cdot\sqrt{3}$ cm; **d.** 60°. **10.a.** $\sphericalangle AOC=60°$. Fie OM înălțime în ΔAOC, echilateral. Cu T3⊥, $d(O',AC)=O'M=6$ cm. **b.** $\sphericalangle O'MO=30°$; **c.** $1,5\cdot\sqrt{3}$ cm; **d.** $d(B,(ACC'))=BC=6\sqrt{3}$ cm. **11.a.** R1 T3⊥: $AI\perp(BCD)$, $AE\perp BC$, IE și $BC\subset(BCD)$ $\Rightarrow$ $IE\perp BC$; **b.** Analog, $IF\perp CD$. Cum $\Delta AIE\equiv\Delta AIF$ (I.C.) $\Rightarrow$ $IE\equiv IF$; $\Delta EIC\equiv\Delta FIC$ (I.C.) $\Rightarrow$ $\sphericalangle ECI\equiv\sphericalangle FCI$. **c.** Analog, $IG\perp BD$; $\Delta AIE\equiv\Delta AIG$ (I.C.) $\Rightarrow$ $IE\equiv IG$. Deci $d(I,AB)=d(I,BC)=d(I,CD)$. **12.a.** Cu R1 T3⊥, $AB\perp BC$. **b.** Cu R2 T3⊥, $AM\perp(VBC)$. **c.** R1 T3⊥: $AM\perp(VBC)$, $AN\perp CV$, MN, $CV\subset(VBC)$ $\Rightarrow$ $MN\perp CV$. **d.** $\Delta VNM\sim\Delta VBC$ (U.U.). **13.a.** Cu T3⊥: $VB\perp BC$; cu R2 T3⊥: $AM\perp(VBC)$; cu R1 T3⊥: $MN\perp CV$; **b.** Cum $CV\perp MN$, $CV\perp AN$, $MN\cap AN=\{N\}$ $\Rightarrow$ $CV\perp(AMN)$. **c.** Analog, $CV\perp(APN)$. Deci planele (AMN) și (APN) coincid. **14.a.** Cu T3⊥, $AM\perp BC$; **b.** Cu R2 T3⊥: $VH\perp(ABC)$; **c.** Cu R1 T3⊥: $VH\perp(ABC)$, $VE\perp AB$, HE și $AB\subset(ABC)$ $\Rightarrow$ $HE\perp AB$. **d.** Cu T3⊥: $CV\perp(VAB)$, $VE\perp AB$, VE și $AB\subset(VAB)$ $\Rightarrow$ $CD\perp AB$. **e.** În (ABC) avem $HE\perp AB$, $CD\perp AB$ și, în consecință, dreptele CE și HE coincid. AM și CE sunt înălțimi în ΔABC. **f.** Notăm lungimile segmentelor VA, VB, CV cu a, b, respectiv c. Obținem $VM=\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ și $AM=\dfrac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Deci $\mathcal{A}^2_{ABC}=\dfrac{BC^2\cdot AM^2}{4}=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}$.

Autoevaluare. **1.a.** F; **b.** A; **c.** F. **2.a.** $H=\text{pr}_{(BCD)}A\Rightarrow AH\perp(BCD)$. Cum $CD\perp AB$, $CD\perp AH$ și $AH\cap AB=\{A\}\Rightarrow CD\perp(ABH)$; **b.** Analog, $BD\perp(ACH)$. BH și CH sunt înălțimi în ΔBCD; **c.** Cum H este ortocentru în $\Delta BCD\Rightarrow DH$ este înălțime. Obținem $BC\perp(ADH)$. **3.a.** $VM=12$ cm. **b.** $OH=3\sqrt{3}$ cm; **c.** Fie $OT\perp CV$. Cu R1 T3⊥: $OH\perp(VBC)$, $OT\perp CV$, HT și $CV\subset(VBC)\Rightarrow HT\perp CV\Rightarrow d(H,CV)=HT=1,8\cdot\sqrt{5}$ cm.

Recapitulare și evaluare. **1.a.** F; **b.** A; **c.** A; **d.** F; **e.** A; **f.** A; **g.** F; **h.** A; **i.** F; **j.** A; **k.** A; **l.** F. **3.a.** C; **b.** E; **c.** A; **d.** D; **e.** B; **f.** C; **g.** E; **h.** B; **i.** A; **j.** C; **k.** E; **l** E. **4 a** C; **b.** C; **c.** B; **d.** A; **e.** E; **f.** D; **g.** F; **h.** B; **i.** D. **5.a.** 36; **b.** 36π; **c.** 9π; **d.** $6\sqrt{3}$; **f.** 180. **6.a.** 60; **b.** 90; **c.** 90; **d.** 90; **e.** 30; **f.** 60; **g.** 90; **h.** $\sqrt{3}$; **i.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; **j.** $\sqrt{3}$; **k.** $\sqrt{6}$; **l.** $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$; **m.** 3; **n.** 2. **7.a.** 32 cm²; **b.** $B'D'\parallel BD$ și $AD'\parallel BC'$; **c** dacă O este mijlocul lui BD, atunci $\sphericalangle((A'BD),(C'BD))=$ $=\sphericalangle A'OC'=90°$, deoarece $A'O^2+C'O^2=(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2=8^2=A'C'^2$. **8.b.** Fie P mijlocul lui AC; atunci $VP\perp AC$, $BP\perp AC\Rightarrow AC\perp(VBP)\Rightarrow AC\perp VB\Rightarrow$ $\Rightarrow MN\perp VB$. **c** Din teorema catetei, $\dfrac{VT}{TN}=\dfrac{OV^2}{ON^2}=\dfrac{16}{9}$ și $\dfrac{VS}{SM}=\dfrac{VO^2}{OM^2}=\dfrac{16}{9}$. Cum $\dfrac{VT}{TN}=\dfrac{VS}{SM}$, deducem că $ST\parallel MN\subset(ABC)$, așadar $ST\parallel(ABC)$. Astfel, $\text{pr}_{(ABC)}S'T'=ST$, iar $\dfrac{ST}{MN}=\dfrac{VS}{VM}=\dfrac{16}{25}$, prin urmare $ST=\dfrac{16}{25}\cdot MN=\dfrac{16}{25}\cdot\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{192\sqrt{3}}{25}$ cm. **9.a.** $\Delta PBC\equiv\Delta PBD$ (L.U.L.) și $\Delta QBC\equiv\Delta QBD$ (L.U.L.). **b.** $PC=PD$ și CD are lungime constantă, deci $\mathcal{P}_{PCD}$ este minim când PC este minimă, deci când $PC\perp AB$. Astfel, P este mijlocul muchiei AB, așadar $PD\perp AB$, de unde $AB\perp(PCD)$. **c** Fie M mijlocul lui CD. QM este mediana bazei în ΔQCD isoscel, deci $QM\perp CD$. $\mathcal{A}_{ACD}=\dfrac{QM\cdot CD}{2}=\min.$ $\Rightarrow QM$ min. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $QM\perp CD$. Avem că $PM\perp CD$ și $PM\perp AB$. Presupunem că $Q\neq P$. Atunci, din triunghiul PQM ($P=90°$) obținem $QM>PM$, ceea ce contrazice faptul că QM e minim. Așadar, $Q=P$. Însă, $QA=QB$, așadar Q este mijlocul lui AB. **10.a.** $CD\perp AB$, $CD\perp VO$ $\Rightarrow$ $CD\perp(VAB)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $CD\perp VO$. **b.** Dacă $OT\perp VE$, se arată că $OT\perp(VCD)$, deci $d(O,(VCD))=OT=\dfrac{VO\cdot OE}{VE}=\dfrac{12}{5}$ cm. **c.** $CD=6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{VCD}=\dfrac{VE\cdot CD}{2}=15\sqrt{3}$ cm². **11.a.** Sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele, ambele ascuțite. **b.** $BC\perp(OO'M)$ $\Rightarrow$ $A'C'\perp(OO'M)$ $\Rightarrow$ $A'C'\perp O'M'$ $\Rightarrow$ M' este mijlocul lui $A'C'$. **c.** Fie $\{Q\}=OO'\cap MM'$; se arată că Q este mijlocul lui MM'. Notăm $BC=2a$. Avem: $BM=QM=a$, $OB^2=OM^2+BM^2$, $QM^2=QO^2+OM^2$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow OM^2=49-a^2=a^2-1\Rightarrow a=5\Rightarrow BC=10$ cm.

Testul 1. **1.a.** 90; **b.** 45; **c.** $2\sqrt{6}$; **d.** $2\sqrt{2}$; **e.** 4. **2.b.** $AO\subset(ABN)$, $AO\perp(BCD)$ $\Rightarrow$ $(ABN)\perp(BCD)$. **c.** Dacă, prin absurd, $MO\parallel(ACD)$, cum $MO\subset(ABN)$ și $(ABN)\cap(ACD)=AN$, rezultă că $MO\parallel AN$. Atunci $\dfrac{BM}{MA}=\dfrac{BO}{ON}$ (Thales), fapt care nu se întâmplă. **d.** Fie Q mijlocul lui BO; atunci O este mijlocul lui QN și $OP\parallel MQ$, deci OP este linie mijlocie în ΔNMQ.

Testul 2. **1.a.** 90; **b.** 60; **c.** $3\sqrt{7}$; **d.** 0; **e.** $3\sqrt{5}$. **2.b.** $OM\parallel VC$, $VC\subset(VCD)$, $OM\not\subset(VCD)$ $\Rightarrow$ $OM\parallel(VCD)$. **c.** $VC=VD=CD$ și $OV=OC=OD$, deci $OVCD$ este piramidă regulată, cu baza VCD. Cum Q este centrul bazei, rezultă că $OQ\perp(VCD)$. **d.** Din **c**, $OQ\perp VC$. Însă $VC\parallel OM$, așadar $OQ\perp OM$.

Unitatea 5. Arii și volume ale unor corpuri geometrice

Lecția 1. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul)

1.a. $D'N = 2\sqrt{10}$ cm; **b.** $CM = \sqrt{73}$ cm; **c.** $MN = 6\sqrt{3}$ cm. **2.a.** 10 cm; **b.** $\sqrt{64+9\pi^2}$ cm. **3.a.** $6\sqrt{3}$ cm. **b.** $d(M, BC) = \frac{1}{2}d(A, BC) = 3\sqrt{3}$ cm. **c.** Pe segmentul AN considerăm punctele P și O astfel încât $AP = PO = ON$. Punctul O este centrul triunghiului echilateral ACD, așadar BO este înălțime a tetraedrului regulat. MP este linie mijlocie în ΔABO, așadar $MP \parallel BO$, de unde $MP \perp AN$. Astfel, $d(M, AN) = \frac{1}{2}d(B, AN) = 2\sqrt{6}$ cm. **4.a.** $d(A, VB) = 6\sqrt{2}$ cm $= VA \Rightarrow VA \perp VB$. Dar $\sphericalangle AVB = \sphericalangle AVC$ (fețele piramidei regulate sunt triunghiuri congruente), deci $VA \perp VC$. Deducem deci $d(A, (VBC)) = VA = 6\sqrt{2}$ cm. **b.** $2\sqrt{6}$ cm. **c.** Dacă M este mijlocul lui BC și $OP \perp VM$, $P \in VM$, din a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $OP \perp (VBC)$. Avem: $d(O, (VBC)) = OP = \frac{VO \cdot OM}{VM} = 2\sqrt{2}$ cm. **5.a.** Fie $P = \text{pr}_{B'C}B$; avem: $AB \perp (BCC')$, $BP \perp B'C$, $BP, B'C \subset (BCC')$ $\overset{T_3P}{\Rightarrow}$ $AP \perp B'C \Rightarrow d(A, B'C) = AP$. Obținem $BP = 24$ cm, apoi $AP = 24\sqrt{26}$ cm. **b.** $BP \perp B'C$, $BP \perp CD$ (deoarece $CD \perp (BCC')$), $B'C \cap CD = \{C\} \Rightarrow BP \perp (B'CD) \Rightarrow d(B, (B'CD)) = 24$ cm. **c.** Construim $BQ \perp AP$. Din $BQ \perp AP, AP \perp B'C, BP \perp B'C$, folosind a doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare, obținem că $BQ \perp (B'AC)$. Astfel, $d(B, (B'AC)) = BQ = \frac{AB \cdot BP}{AP} = \frac{120}{\sqrt{26}}$ cm. **6.a.** $\frac{60}{13}$ cm; **b.** $\frac{120}{13}$ cm; **c.** $AN \parallel (VBC) \Rightarrow$ $\Rightarrow d(A, (VBC)) = d(N, (VBC)) = \frac{120}{13}$ cm. **7.a.** $VA = 2\sqrt{34}$ cm $\Rightarrow A'$ este mijlocul lui $VA \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{1}{2}$ (unde O' este centrul pătratului $A'B'C'D'$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow d((A'B'C'), (ABC)) = OO' = 4$ cm. **b.** $A'C' \parallel OC$, $A'C' = OC \Rightarrow A'C'CO$ este paralelogram $\Rightarrow$ $A'O = CC' = \sqrt{34}$ cm. **c.** Fie M, N, M', N' mijloacele segmentelor BC, AD, $B'C'$, respectiv $A'D'$. Avem: $BC \perp VM$, $BC \perp MN \Rightarrow BC \perp (VMN) \Rightarrow BC \perp N'M$; $A'D' \parallel BC \Rightarrow A'D' \perp N'M \Rightarrow d(A'D', BC) = N'M$. Notăm $P = \text{pr}_{MN}N'$. Observăm că $N'P = OO' = 4$ cm, $PM = 9$ cm, prin urmare $N'M = \sqrt{97}$ cm. **8.a.** Piramida $PABCD$ are baza pătrat și muchiile laterale egale, deci este o piramidă regulată. Rezultă că $PO \perp (ABC)$, prin urmare $P \in VO$. Notăm $PO = x$; atunci $PA = PV = 24 - x$. Cu teorema lui Pitagora în ΔPOA, $\hat{O} = 90°$, obținem $x^2 + (10\sqrt{2})^2 = (24-x)^2$, de unde $x = \frac{47}{6}$. Astfel, $d(P, (ABC)) = OP = \frac{47}{6}$ cm. **b.** Se arată că $Q \in VO$, iar proiecția S a punctului Q pe planul (VBC) aparține segmentului VM. Avem: $\Delta VSQ \sim \Delta VOM$ (U.U.) $\Rightarrow$ $\frac{QS}{OM} = \frac{VQ}{VM}$ $\Rightarrow$ $\frac{y}{10} = \frac{24-y}{26}$ (unde $y = OQ = QS$) $\Rightarrow$ $y = \frac{20}{3}$. Deducem că $d(Q, (ABC)) = OQ = \frac{20}{3}$ cm. **9.a.** $AC \perp (VBD) \Rightarrow AC \perp VD \Rightarrow \sphericalangle(AC, VD) = 90°$; **b.** $\sphericalangle(AB, NP) = \sphericalangle(CD, VC) = 60°$; **c.** $\sphericalangle(MQ, NP) = \sphericalangle(VD, VC) = 60°$. **10.a.** $\frac{24}{7}$; **b.** $\frac{336}{625}$. **11.a.** 90°; **b.** 60°; **c.** 60°. **12.a.** $\text{pr}_{(BDD')}A'D = O'D$, unde O' este centrul pătratului $A'B'C'D'$. Astfel, $\sphericalangle(A'D, (BDD')) = \sphericalangle A'DO' = 30°$; **b.** $(A'B'D) \cap (ABC) = CD$, $A'D \perp CD (A'D \subset (A'B'D))$, $AD \perp CD (AD \subset (ABC)) \Rightarrow \sphericalangle((A'B'D), (ABC)) = \sphericalangle A'DA = 45°$; **c.** $AC \perp (ADD')$, $AC \subset (ACC')$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle((BDD'), (ACC')) = 90°$. **13.a.** 90°. **b.** Dacă P este mijlocul muchiei AD, atunci $\sphericalangle(MN, BD) = \sphericalangle(MN, MP) =$ $= \sphericalangle PMN = 45°$, deoarece ΔPMN este isoscel și dreptunghic în P. **c.** Proiecția punctului M pe planul (BCD) este mijlocul Q al segmentului BO, unde O este centrul feței BCD. Avem: $\text{tg}(\sphericalangle(MN, (BCD))) = \text{tg}(\sphericalangle MNQ) = \frac{MQ}{QN} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **14.a.** 0°. **b.** Fie $\{P\} = AB \cap CD$, $\{P'\} = A'B' \cap C'D'$; avem: $(ABB') \cap (CDD') = PP'$, $PP' \perp (ABC) \Rightarrow PP' \perp AB$, $PP' \perp CD$, deci $\sphericalangle((ABB'), (CDD')) = \sphericalangle APD = 60°$. **c.** $CD \perp AC$, $CD \perp CC'$, $AC \cap CC' = \{C\} \Rightarrow$ $\Rightarrow CD \perp (ACC') \Rightarrow (E'CD) \perp (ACC')$. **15.a.** Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul. Folosind rapoartele de asemănare dintre elementele piramidelor $VA'B'C'D'$ și $VABCD$, obținem că $VA = 12$ cm $= VC = AC$. Astfel, $\sphericalangle(AA', CC') = 60°$. **b.** C' este mijlocul laturii VC a triunghiului echilateral VAC; $d(A, CC') = AC' = 6\sqrt{3}$ cm. **c.** Dacă M este mijlocul lui BC și O centrul lui $ABCD$, unghiul plan al diedrului este $\sphericalangle VMO$, iar $\text{tg}(\sphericalangle(VMO)) = \frac{VO}{OM} = \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.

Lecția 2. Prisma dreaptă: arii și volum

1.a. $A_t = 52$ cm², $\mathcal{V} = 17{,}5$ cm³. **2.** $A_t = 216$ cm², $\mathcal{V} = 216$ cm³; o arie nu poate fi egală cu un volum (eventual, putem spune că sunt *numeric* egale). **3.** $h = 8$ cm, $A_\ell = 144$ cm², $\mathcal{A}_t = 18(8+\sqrt{3})$ cm², $\mathcal{V} = 72\sqrt{3}$ cm³. **4.** $\ell = h = 4$ cm, $\mathcal{V} = 16\sqrt{3}$ cm³. **5.** $\ell = 3$ cm, $h = 5$ cm, $A_t = 78$ cm². **6.** Materialul ajunge dacă aria totală a prismei nu depășește $24 - 10\% \cdot 24 = 21{,}6$ m². Avem: $\mathcal{A}_t = (18 + 2\sqrt{3})$ m²; $18 + 2\sqrt{3} < 18 + 2 \cdot 1{,}75 = 21{,}5 < 21{,}6$, deci materialul ajunge. **7.a.** $A_t = 1650$ cm² $= 0{,}165$ m², deci nu ajung 0,16 m² de folie; **b.** $\mathcal{V} = 4500$ cm³ $= 4{,}5$ dm³; $m = \rho \cdot \mathcal{V} = 22{,}5$ kg.

8.a. $\sqrt{3^2 + 4^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot 16\right)^2} = 13$ cm, deci tija încape; **b.** 56 cm². **9.a.** 150 de pachete. **b.** 72 de pachete. Observăm că la punctul **a** rezultatul este egal cu raportul dintre volumul lăzii și volumul unui pachet, în timp ce la punctul **b** nu. De ce? **10.** 10 ℓ. **11.** Fie Δh variația nivelului apei; din $\mathcal{A}_B \cdot \Delta h = 5 \cdot V_{cub}$ obținem $\Delta h = 4$ mm. **12.** 2,5 cm. **13.** Cele 27 de cubulețe au, în total, $27 \cdot 6 = 162$ fețe, dintre care $9 \cdot 6 = 54$ sunt deja vopsite, fiind fețe ale cubului inițial. Rămân de vopsit 108 fețe de cubulețe, deci mai avem nevoie de 200 ml vopsea. **14.** Dacă M este mijlocul muchiei BC, se arată că $\sphericalangle((A'BC), (ABC)) = \sphericalangle A'MA$. Fie $AB = \ell$; atunci $AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, apoi $AA' = AM \cdot \sqrt{3} = \frac{3\ell}{2}$. Obținem $\ell = 4$ cm, deci $\mathcal{V} = 24\sqrt{3}$ cm³. **15.** Se arată că $A'C' \perp C'D'$, $A'C' \perp CC'$, deci $A'C' \perp (C'CD)$, și atunci $\sphericalangle(A'C, (C'CD)) = \sphericalangle A'CC'$. Astfel, $\Delta C'A'C$ este dreptunghic isoscel. Fie $AB = \ell$; avem $A'C' = \ell\sqrt{3} = CC'$ $\Rightarrow$ $\mathcal{V} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \ell\sqrt{3} = 36$ cm³ $\Rightarrow \ell = 2$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_\ell = 24\sqrt{3}$ cm².
16. $2(L\ell + Lh + \ell h) = (4L^2 + 4\ell^2 + 4h^2) : 2 \Rightarrow (L-\ell)^2 + (L-h)^2 + (\ell-h)^2 = 0 \Rightarrow L = \ell = h$.

Autoevaluare. **1.** $A_\ell = 18$ cm², $\mathcal{A}_t = 6(3+\sqrt{3})$ cm², $\mathcal{V} = 9$ cm³. **2.** 5 ore. **3.** Dacă O este centrul bazei $ABCD$, atunci $\sphericalangle((A'BD), (C'BD)) = \sphericalangle A'OC'$. Deducem că $\sphericalangle A'OA = 60°$, $AO = 4$ cm, $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A}_\ell = 64\sqrt{6}$ cm².

Lecția 3. Piramida regulată: arii și volum

1. $\mathcal{A}_t = 144(1+\sqrt{3})$ cm², $\mathcal{V} = 288\sqrt{2}$ cm³. **2.** $\mathcal{A}_\ell = 72\sqrt{7}$ cm², $\mathcal{V} = 144\sqrt{3}$ cm³. **3.** $\mathcal{V} = 400$ cm³. **4.** $\mathcal{A}_\ell = 180\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{V} = 288\sqrt{3}$ cm³. **5.** $\mathcal{V} = 162$ cm³. **6.** $\ell = 6$ cm, $\mathcal{A}_t = 36\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{V} = 18\sqrt{2}$ cm³. **7.** În „miezul" cubului se află un tetraedru regulat de muchie 6 cm, având volumul $18\sqrt{2}$ cm³. Rămân patru piramide regulate cu muchia bazei 6 cm și muchia laterală $3\sqrt{2}$ cm, fiecare având volumul $9\sqrt{2}$ cm³. **8.** Suprafața care trebuie vopsită este de 360 m². Cantitatea de vopsea este 120 ℓ. **9.** Piramida obținută are muchia bazei de 10 cm și muchia laterală de 13 cm, deci apotema va fi 12 cm, iar înălțimea $\sqrt{119}$ cm. Obținem $A_t = 340$ cm², $\mathcal{V} = \dfrac{100\sqrt{119}}{3}$ cm³. **10.** Cantitatea de vopsea este proporțională cu aria totală. Raportul de asemănare dintre piramida mică și cea mare este $k = \dfrac{1}{2}$, deci raportul ariilor totale este $k^2 = \dfrac{1}{4}$. Necesarul de vopsea pentru piramida mică este $\dfrac{1}{4} \cdot 300 = 75$ ml. **11.** Masa unei piramide este proporțională cu volumul său. Raportul de asemănare dintre piramida mică și cea mare este $k = \dfrac{1}{2}$, deci raportul volumelor este $k^3 = \dfrac{1}{8}$. Masa piramidei mici este $\dfrac{1}{8} \cdot 400\text{ g} = 50$ g. **12.** Aria secțiunii transversale este egală cu aria secțiunii axiale. Folosind notațiile uzuale, avem: $\left(\dfrac{2\ell}{3}\right)^2 = \dfrac{\ell\sqrt{2} \cdot h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{4\ell\sqrt{2}}{9}$, iar $a_p = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2} = \dfrac{\ell\sqrt{209}}{18}$, deci $\mathcal{A}_\ell = \dfrac{\ell^2\sqrt{209}}{9} < \dfrac{\ell^2 \cdot 15}{9} < 1{,}7 \cdot \ell^2$, așadar $A_t < 2{,}7 \cdot \ell^2$. Cantitatea de vopsea necesară pentru bază, a cărei arie este ℓ^2, este $\dfrac{9}{4} \cdot 20 = 45$ g și, cum $45 \cdot 2{,}7 = 121{,}5$, înseamnă că 125 g de vopsea ajung pentru suprafața totală. **13.** Înălțimea piramidei este egală cu apotema bazei; fie x cm lungimea lor comună. Aria laterală a piramidei va fi $2x^2\sqrt{6}$ și obținem că $x = 5$ cm, deci $\mathcal{V} = \dfrac{250\sqrt{3}}{3}$ cm³. **14.** Dacă O este centrul bazei, din asemănări imediate se obține că $VO = 24$ cm, iar $OC = 18$ cm. Obținem: $AB = 18\sqrt{2}$ cm, apotema $VM = 3\sqrt{82}$ cm, $\mathcal{A}_\ell = 216\sqrt{41}$ cm². **15.** Avem: $\dfrac{\mathcal{A}_{VNP}}{\mathcal{A}_{VBC}} = \dfrac{VN}{VB} \cdot \dfrac{VP}{VC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$. Dacă A' și M' sunt proiecțiile punctelor A și M pe planul (VBC), punctele V, M' și A' sunt coliniare (aparțin apotemei de pe fața VBC), iar MM' este linie mijlocie în $\Delta VAA'$, deci $\dfrac{MM'}{AA'} = \dfrac{1}{2}$. Astfel, $\dfrac{\mathcal{V}_{VMNP}}{\mathcal{V}_{VABC}} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot MM' \cdot \mathcal{A}_{VNP}}{\frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \mathcal{A}_{VBC}} = \dfrac{1}{12}$, de unde $\mathcal{V}_{VMNP} = \dfrac{1}{12} \cdot 144 = 12$ cm³.

Autoevaluare. **1.a.** 100; **b.** 400; **c.** 260. **2.** $V_{\text{piramidă}} = 336$ cm³; $\mathcal{V}_{\text{cub}} = \dfrac{1}{8}$ cm³; nr. cubulețe $= 336 : \dfrac{1}{8} = 2688$. **3.** Dacă M este mijlocul lui BC, avem $\sphericalangle OVM = 30°$, $OM = 2\sqrt{3}$ cm, $VM = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 12$ cm, $\mathcal{A}_\ell = 72\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{A}_t = 108\sqrt{3}$ cm².

Lecția 4. Trunchiul de piramidă regulată: arii și volum

1. 114 000 m³. **2.** 60 m². **3.** $56\sqrt{3}$ cm³. **4.** $\mathcal{A}_\ell = 81\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{V} = 126\sqrt{2}$ cm³. **5.** $\mathcal{A}_t = 32\left(5 + 4\sqrt{3}\right)$ cm², $\mathcal{V} = \dfrac{832\sqrt{2}}{3}$ cm³. **6.a.** $\mathcal{A}_t = 1440$ cm²; **b** $\mathcal{V}_{\text{pir}} = 3072$ cm³. **7.** $\mathcal{A}_B = 4 \cdot \mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = \mathcal{A}_t - \mathcal{A}_\ell \Rightarrow \mathcal{A}_b = 7\sqrt{3}$ cm², deci muchia bazei mici este $2\sqrt{7}$ cm. **8.** $\mathcal{V}_{\text{tr}} = \dfrac{26}{27} \cdot \mathcal{V}_{\text{pin}} \Rightarrow \mathcal{V}_{\text{pir}} = 189$ cm³. Remarcăm faptul că numărul muchiilor bazelor trunchiului nu contează; rezultatul ar fi același, indiferent de tipul trunchiului. **9.** $\mathcal{A}_\ell = 144\sqrt{6}$ cm². **10.** $\mathcal{V} = 126\sqrt{3}$ cm³. **11.** Notăm cu $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ ariile laterale ale piramidei mari, piramidei mici, respectiv trunchiului. Avem: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, $\dfrac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}} = \left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^2$. Astfel, $\left(\dfrac{VO'}{VO}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, deci $VO' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} VO = 4\sqrt{2}$ cm și obținem $OO' = 4\left(2 - \sqrt{2}\right)$ cm. **12.** $\dfrac{896}{3}$ cm³. **13.a.** Folosind teorema catetei în triunghiul dreptunghic ACC', obținem $AC = 50$ cm, apoi $A'C' = 50 - 2 \cdot 18 = 14$ cm, iar $h = d(C', AC) = 24$ cm, deci $V = 13584$ cm³. **b.** Exprimăm în două moduri aria triunghiului $A'CC'$: $\mathcal{A}_{A'CC'} = \dfrac{1}{2} \cdot CC' \cdot d(A', CC') = \dfrac{1}{2} \cdot A'C' \cdot d(C, A'C') \Rightarrow$ $\Rightarrow d(A', CC') = \dfrac{14 \cdot 24}{30} = 11{,}2$ cm.

Autoevaluare. **1.a.** 57; **b.** $4\sqrt{3}$; **c.** 84. **2.** $\mathcal{V}_{\text{tr}} = 98$ m³, $\mathcal{V}_{\text{pir}} = 98 + 20\% \cdot 98 = 117{,}6$ m³, $h_{\text{pir}} = 3{,}528$ m. **3.** $\mathcal{A}_t = 144\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm², $\mathcal{V} = 288$ cm³.

Lecția 5. Cilindrul circular drept: arii și volum

1.a. $10\sqrt{2}$ cm; **b.** 100π cm²; **c.** 250π cm³. **2.** 8 kg. **3.** $R = 6$ cm, $G = 4$ cm, $\mathcal{V} = 144\pi$ cm³. **4.** $2 \cdot \mathcal{A}_B = \mathcal{A}_t - \mathcal{A}_\ell \Rightarrow R = 3$ cm, $G = 4$ cm, $\mathcal{V} = 36\pi$ cm³. **5.** $R = 6$ cm, $G = 1$ cm, $\mathcal{A}_t = 84\pi$ cm². **6.** $\mathcal{A}_\ell = 16\pi\sqrt{3}$ cm². **7.** Există două situații: **I.** $R = 2$ cm, $G = 6$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = 24\pi$ cm³; **II.** $R = 3$ cm, $G = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = 36\pi$ cm³. **8.** Din $2R \cdot G = 12$ și $4R^2 + G^2 = 25$, notând $R^2 = x$, obținem că $4x^2 - 25x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(4x-9) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \left\{4, \dfrac{9}{4}\right\}$. Există două situații: **I.** $R = 2$ cm, $G = 3$ cm $\Rightarrow A_t = 20\pi$ cm²; **II.** $R = \dfrac{3}{2}$ cm, $G = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_t = \dfrac{33\pi}{2}$ cm². **9.** $A_\ell = 4 \cdot 6 = 24$ cm². Pentru calculul ariei totale, distingem două situații: **I.** $2\pi R = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_B = \dfrac{4}{\pi}$ cm² $\Rightarrow \mathcal{A}_t = 8\left(3 + \dfrac{1}{\pi}\right)$ cm²; **II.** $2\pi R = 6$ cm $\Rightarrow \mathcal{A}_B = \dfrac{9}{\pi}$ cm² $\Rightarrow \mathcal{A}_t = 6\left(4 + \dfrac{3}{\pi}\right)$ cm². **10.** Există două situații: **I.** $2\pi R = 20$ cm, $G = 30$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = \dfrac{3\,000}{\pi}$ cm³; **II.** $2\pi R = 30$ cm, $G = 20$ cm $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{V} = \dfrac{4\,500}{\pi}$ cm³. Volumul este mai mare în cel de-al doilea caz. **11.** $\mathcal{A}_t = 502{,}5\pi$ cm², $\mathcal{V} = 125\pi$ cm³. **12.** Baza prismei va fi un pătrat înscris în cercul bazei cilindrului, de rază 12 cm. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 0{,}0288\text{ m}^2 \cdot 2{,}5\text{ m} = 0{,}072$ m³. **13.** Unghiul AEB este înscris într-un semicerc, deci este drept. $AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow AB = 8$ cm $\Rightarrow R = 4$ cm. Apoi, $\left(d(E, CD)\right)^2 = \left(d(E, AB)\right)^2 + G^2$, de unde $G = 2$ cm. Astfel, $\mathcal{A}_t = 48\pi$ cm². **14.** Considerăm $C \in \mathcal{C}(O, R)$ cu $B'C \parallel OO'$. Avem: $OO'B'C$ dreptunghi $\Rightarrow O'B' \parallel OC \Rightarrow \sphericalangle AOC = \sphericalangle A'O'B' = 30° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle BOC = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ echilateral $\Rightarrow BB'^2 = R^2 + G^2 \Rightarrow R = 4$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = 48\pi$ cm³.

Autoevaluare. **1.a.** 4; **b.** 25π; **c.** 100π. **2.** Volumul părții goale a cilindrului este 40π cm^3. Volumul cubului este 125 cm^3. Cum $40\pi > 40 \cdot 3{,}14 = 125{,}6$, apa are loc să se ridice în cilindru. **3.b.** $\mathcal{V} = 128\pi$ cm^3; **c.** 45°.

Lecția 6. Conul și trunchiul de con: arii și volume

1. $\mathcal{A}_\ell = 18\pi$ cm^2, $\mathcal{A}_t = 27\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 9\sqrt{3}\pi$ cm^3. **2.** $R = 4$ cm, $h = 2\sqrt{21}$ cm, $\mathcal{V} = \dfrac{32\sqrt{21}}{3}\pi$ cm^3. **3.** $R^2 + h^2 = G^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x \in \{5, -3\}$; convine doar $x = -3$, când $R = 5$ cm, $G = 13$ cm, iar $\pi R(G + R) = 90\pi$ cm^2. **4.** $\mathcal{A}_\ell = 50\sqrt{3}\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 125\pi$ cm^3. **5.** Folosind teorema catetei în ΔVOA, obținem $VO = 40$ cm și $AO = 30$ cm, deci $\mathcal{V} = 12\,000\pi$ cm^3. **6.** $A_\ell = 36\pi$ cm^2, $\mathcal{A}_t = 45\pi$ cm^2. **7.a.** $\mathcal{A} = 2\,400\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 12\,000\pi$ cm^3; **b.** $\mathcal{A} = 3\,600\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 16\,000\pi$ cm^3; **c.** $\mathcal{A} = 1\,680\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 9\,600\pi$ cm^3. **8.** 75 ml. **9.** 50 g, respectiv 350 g. **10.** $\mathcal{A} = 810\pi$ cm^2, $\mathcal{A}' = 360\pi$ cm^2, $\mathcal{A}'' = 650\pi$ cm^2. Are loc egalitatea $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}'' - 2\mathcal{A}'''$, unde $\mathcal{A}'''$ este aria bazei conului mic. **11.** Raportul de asemănare dintre conul mic și cel mare este $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Înălțimea trunchiului este $2\left(3 - \sqrt{6}\right)$ cm și se arată că $2\left(3 - \sqrt{6}\right) < 1{,}11$. **12.** $\mathcal{V}_{\text{găleată}} = 7\,104\pi$ cm^3, $\mathcal{V}_{\text{pahar}} = 192\pi$ cm^3, număr pahare: 37. **13.** 24 cm. **14.** $d(A, BC) = AC = 12\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow g = BC = 12$ cm, $2R = AB = 24$ cm $\Rightarrow R = 12$ cm, $r = 6$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathcal{V} = 504\sqrt{3}\pi$ cm^3. **15.** Conul din care provine trunchiul are generatoarea de 12 cm și raza de 6 cm, deci înălțimea sa este $6\sqrt{3}$ cm. Înălțimea trunchiului va fi $3\sqrt{3}$ cm.

Autoevaluare. **1.a.** 25π; **b.** 50π; **c.** 75π. **2.** Cu 10 centimetri. **3.a.** 216π cm^2; **b.** $576\sqrt{3}\pi$ cm^3.

Lecția 7. Sfera

2. $\mathcal{A} = 36\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 36\pi$ cm^3. **3.** Densitatea aluminiului este $\rho_{Al} = 2{,}7$ g/cm^3, deci masa bilei din aluminiu este 2442 g. **4.** 450 ml. **5.** 150 g. **6.** $R = 4$ cm, $\mathcal{A} = 64\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = \dfrac{256\pi}{3}$ cm^3. **7.** 612,7 g. **8.** $R = 5$ cm, $\mathcal{A} = 100\pi$ cm$^2 = \pi$ dm^2; cantitatea de vopsea este suficientă. **9.** 24π cm. **10.** 21 cm sau 3 cm. **11.** 15 cm. **12.** O este mijlocul muchiei BC; $\mathcal{A} = 100\pi$ cm^2. **13.** $R = 6$ cm, $\mathcal{A} = 144\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 288\pi$ cm^3.

Recapitulare și evaluare. **1.a.** C; **b.** D; **c.** B; **d.** A. **2.a.** F; **b.** A; **c.** F; **d.** A; **e.** A. **3.a.** $36\sqrt{3}\pi$; **b.** $54\sqrt{3}\pi$; **c.** 12; **d.** 60; **e.** 60. **4.a.** C; **b.** D; **c.** A; **d.** E; **e.** B. **5.a.** 8; **b.** $4\sqrt{13}$; **c.** $\dfrac{32}{3}$; **d.** $504\sqrt{3}$; **e.** $672\sqrt{3}$. **6.a.** $A_t = 64\left(1 + \sqrt{3}\right)$ cm^2, $V_{pir} = \dfrac{256\sqrt{2}}{3}$, $V_{con} = \dfrac{\pi R^2 \cdot 4\sqrt{2}}{3}$, deci $\pi R^2 = 64$, de unde $R^2 = \dfrac{64}{\pi} > \dfrac{64}{3{,}2} = 20$, prin urmare $R > 2\sqrt{5}$ cm. **c.** $BD \perp (VAC) \Rightarrow BD \perp VA$; $VO = AO = OC \Rightarrow VA \perp VC$; deducem că $VA \perp \alpha$, așadar $d(A, \alpha) = VA = 8$ cm. **7.a.** 185 dm^2; **b.** 200 l. **c.** Cubul nu se scufundă complet. Dacă apa se ridică cu x dm, atunci $x(5^2 - 3^2) = 32(1 + x)$, de unde $x = \dfrac{9}{7}$ dm. **8.a.** $36\sqrt{3}$ cm^3; **b.** $OG \parallel VA \Rightarrow \sphericalangle\left(OG(ABC)\right) = \sphericalangle(AV, AO)$, iar tangenta acestui unghi este $\dfrac{2}{3}$; **c.** $d(G, VB) = d(G, VC) = \dfrac{5\sqrt{39}}{13}$, iar $d(G, VA) = d(O, VA) = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$; **9.c.** $V = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ cm^3. **10.a.** 64π cm^2; **b.** $OABC$ este piramidă patrulateră regulată cu $AB = 6$ cm, $OA = 4$ cm. Obținem $d\left(O, (ABC)\right) = 2$ cm. **c.** $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

Testul 1. **1.a.** 10; **b.** 240; **c.** 384; **d.** 336; **e.** $\dfrac{16}{3}$. **2.b.** 3,1 l; **c.** 37,2 cm; **d.** cu 1,8 cm.

Testul 2. **1.a.** $2\sqrt{43}$; **b.** $60\sqrt{2}$; **c.** 240; **d.** 360; **e.** $30\sqrt{2}$. **2.b.** $72\sqrt{3}\pi$ cm^3; **c.** $12\sqrt{2}$ cm; **d.** $3\sqrt{6}$ cm.