

Simulação e Modelação

Trabalho nº 7

Determinação de Zeros de Funções: método do ponto fixo e de Newton

Pretende-se simular o padrão gerado pelas múltiplas colisões que ocorrem quando se larga uma bola sobre uma superfície e esta sofre reflexões elásticas subsequentes. A bola é largada da posição $(x,y)=(x_0,10)$, sem velocidade inicial. Os pontos da superfície obedecem à equação $y = -\alpha x^2 + x^4 + 6$, onde α é um parâmetro fornecido pelo utilizador, e que deve variar entre 1 e 5. Elabore um programa com vista a estudar este fenómeno.

Siga os seguintes passos com vista a obter o programa pretendido.

Passo 1: Representação da Superfície

A superfície obedece à equação $y = -\alpha x^2 + x^4 + 6$. Defina uma função que use α como parâmetro de entrada e represente a superfície num gráfico.

Passo 2: Defina a função diferença entre as ordenadas da trajectória da bola e as ordenadas dos pontos da superfície

Escreva as equações para a trajectória da bola sujeita à ação da gravidade. Defina, para um mesmo valor de x a diferença entre as ordenadas da trajectória e a equação da superfície. Obtenha uma expressão que só dependa de t e cujo zero represente a colisão da bola com a superfície.

Nota: deve assumir que conhece a posição inicial da bola e a sua velocidade inicial.

Passo 3: Crie uma função que use o método do ponto fixo para determinar o instante em que se dá a colisão e depois o ponto da superfície em que ela ocorre. Repita usando o método de Newton.

Comece por verificar que se $x_0=0$, o seu programa calcula o ponto de contato corretamente.

Passo 4: Produza uma animação até a bola colidir com a superfície.

Passo 5: Determine a direcção da velocidade da bola após reflexão

Considere que a bola colide com a superfície mudando apenas a sua direcção (colisão elástica especular).

Determine o vector gradiente da função $f(x,y) = y + \alpha x^2 - x^4 - 6$, no ponto da colisão. Caso se trate da primeira colisão, use pause para parar a animação e representar um vector normal à superfície, bem como o vector velocidade da bola.

Neste passo deve testar a instrução quiver para desenhar setas no seu gráfico. A instrução quiver tem a seguinte sintaxe para traçar uma seta que parta do ponto $P=(px,py)$, com componentes $\underline{v}=(vx,vy)$: `quiver(px,py,vx,vy,0)`. O 0 no final indica que se pretende que a figura não seja redimensionada automaticamente.

Nota: ajuste os eixos para que o gráfico fique quadrangular e por forma a melhor verificar que o vector é normal à superfície. (ajuda: use `axis equal`)

Passo 6: Determinação da velocidade após a colisão

Podemos decompor qualquer vector numa componente normal à superfície, \vec{v}_\perp e outra tangencial, \vec{v}_\parallel .

Temos que: $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + \vec{v}_\parallel$. Dado que conhece \vec{v} e \hat{n} , determine \vec{v}_\parallel e \vec{v}_\perp . Como se escreverá o vector da velocidade da bola reflectida? Represente-o.

Passo 7: Volte ao passo 3 para o novo movimento e repita o processo tantas vezes quantas requeridas pelo utilizador.

Questões interessantes a abordar:

- variando x_0 , analise se a trajectória da bola depende bastante das condições iniciais.
- quantas iterações precisou de fazer em média no método do ponto fixo e que cuidados teve para o implementar.
- quantas iterações precisou de fazer em média no método de Newton e que cuidados teve para o implementar.