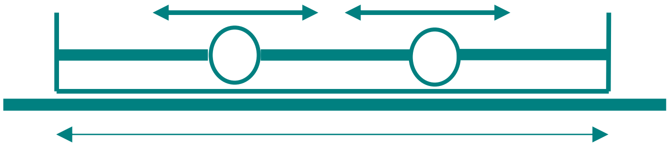
Simulação e Modelação

Trabalho nº 8
Osciladores Acoplados

Equações diferenciais pelo método de Euler-Cromer

Pretende-se simular o movimento de duas massas presas por molas (ou fios elásticos – pode usar a representação que achar mais conveniente) às paredes de uma caixa, separadas de uma distância 3L, como se ilustra em baixo:



A caixa está ainda sujeita a uma força de atrito viscoso, Fa=-a v_c, onde v_c é a velocidade da caixa. Os corpos têm massas iguais, m. Os fios elásticos têm constantes elásticas k, e igual comprimento. Assuma que o movimento das esferas se faz sem atrito.

Passo 1: Escreva as equações de Newton para cada massa.
Ajuda: as forças elásticas aplicadas sobre cada massa por cada mola são proporcionais ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio. Por exemplo, se a coordenada da massa da esquerda fôr x_1 e a coordenada da parede esquerda fôr x_c a força que a mola da esquerda exerce será $-k\,(x_1-x_c-L)$.

Passo 2: Aplique o método de Euler-Cromer (ver anexo) e simule o sistema. Faça os gráficos da energia mecânica do sistema ao longo do tempo.

Passo 3: Diagonalize o sistema de equações do movimento sem atrito (pode usar o Matlab!) e determine a frequência dos modos normais de vibração do sistema.

Passo 4: Escolha conjuntos de parâmetros para iniciar as animações em cada modo normal de vibração, e também uma situação em que o sistema oscile numa sobreposição dos dois modos normais.

Anexo

Para resolver a equação diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t)$$

podem-se usar diversos métodos.

Euler-Cromer

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta t \times \frac{F(x,t)}{m}$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \times v(t+\Delta t)$$

Leap-Frog

$$v(t+\Delta t/2) = v(t-\Delta t/2) + \Delta t \times \frac{F(x(t),t)}{m}$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \times v\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$$

Velocity-Verlet

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \times v(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \times \frac{F(x(t),t)}{m}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta t \times \frac{\big(F(x(t+\Delta t), t+\Delta t) + F(x(t),t)\big)}{2 \times m}$$

Verlet

$$x(t+\Delta t) = 2x(t) - x(t-\Delta t) + \Delta t^2 \times \frac{F(x,t)}{m}$$

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$