Microéconomie - Devoir Maison

Dimittri Choudhury
Jibril Boucham

31/03/2025

Exercice 1: Équilibre général et Optimum de Pareto (15 points)

1. Représenter la situation initiale dans la boîte d'Edgeworth.

La situation initiale est représentée par les dotations des agents A et B:

Agent A: $W_A = (8, 1)$

Agent B: $W_B = (12, 9)$

Bien X total: 8 + 12 = 20

Bien Y total: 1 + 9 = 10

La boîte d'Edgeworth a pour dimensions 20 unités sur l'axe des X, 10 unités sur l'axe des Y.

2. Tracer deux courbes d'indifférence pour chaque agent A et B, en particulier les courbes qui passent par les dotations initiales W_A, W_B.

Pour Agent A:

$U_A(X_A, Y_A) = X_A \cdot Y_A \Rightarrow$ courbes d'indifférence: $X_A \cdot Y_A = k$

$W_A = (8, 1) \Rightarrow U_A = 8 \cdot 1 = 8$

Points sur la courbe d'indifférence:

- $x = 8 \Rightarrow y = 1$
- $x = 4 \Rightarrow y = 2$
- $x = 2 \Rightarrow y = 4$
- $x = 1 \Rightarrow y = 8$
- $x = 0.5 \Rightarrow y = 16$

Pour Agent B:

$U_B(X_B, Y_B) = (X_B \cdot Y_B)^{2/3} \Rightarrow$ courbes d'indifférence: $X_B \cdot Y_B = k$

$W_B = (12, 9) \Rightarrow U_B = (12 \cdot 9)^{2/3} = 36$

Points sur la courbe d'indifférence:

- $x = 12 \Rightarrow y = 9$
- $x = 14 \Rightarrow y = 7{,}71$
- $x = 16 \Rightarrow y = 6{,}75$
- $x = 18 \Rightarrow y = 6$

3. L'allocation initiale est-elle un optimum de Pareto ? Sinon, représenter graphiquement tous les Pareto Améliorants qu'on obtient à partir de l'allocation initiale.

Pour savoir si l'allocation initiale est un optimum de Pareto, on calcule les TMS des agents A et B.

Agent A: $TMS_A = Y_A/X_A = 1/8 = 0{,}125$

Agent B: $TMS_B = Y_B/X_B = 9/12 = 0{,}75$

$TMS_A \neq TMS_B$ donc l'allocation initiale n'est pas Pareto optimale.

La zone Pareto améliorante se situe entre les deux courbes d'indifférence passant par W_A et W_B.

4. Donner l'équation de la courbe des contrats et la tracer dans la boîte d'Edgeworth.

La courbe des contrats est l'ensemble des allocations Pareto efficaces, c'est-à-dire les points où les courbes d'indifférence des deux agents sont tangentes, l'ensemble des points (X_A, Y_A) tel que $TMS_A = TMS_B$.

Utilité de A: $U_A = X_A Y_A \Rightarrow TMS_A = Y_A/X_A$

Utilité de B: $U_B = (X_B Y_B)^{2/3} \Rightarrow TMS_B = Y_B/X_B$

On cherche donc $Y_A/X_A = Y_B/X_B$

Égalité des TMS: $Y_A/X_A = (10-Y_A)/(20-X_A)$

En simplifiant: $Y_A = (1/2)X_A$

5. Déterminer le rapport P du prix du bien Y au prix du bien X, au point d'équilibre concurrentiel des marchés et l'allocation d'équilibre correspondante $\Psi = (\Psi_A, \Psi_B)$.

À l'équilibre concurrentiel, on sait que $TMS_A = TMS_B = P_Y/P_X = P$

On a déterminé que $TMS_A = Y_A/X_A = 1/2$

Donc P = 1/2

Pour calculer les allocations d'équilibre, on utilise les contraintes budgétaires:

$R_A = 8 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 10$

$R_B = 12 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 30$

Pour A:

$X_A + 2((1/2)X_A) = 10 \Rightarrow 2X_A = 10 \Rightarrow X_A = 5$

$Y_A = (1/2)X_A = 2{,}5$

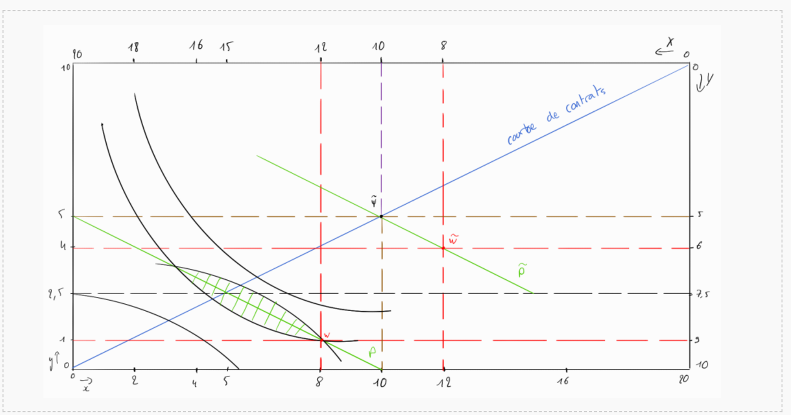
Pour B:

$X_B + 2((1/2)X_B) = 30 \Rightarrow 2X_B = 30 \Rightarrow X_B = 15$

$Y_B = (1/2)X_B = 7{,}5$

On a donc $\Psi_A = (5, 2{,}5)$ et $\Psi_B = (15, 7{,}5)$.

6. Représenter graphiquement, sur la même boîte d'Edgeworth, l'équilibre concurrentiel P et l'allocation d'équilibre de chaque agent.



Graphique 1: Boîte d'Edgeworth montrant la courbe des contrats (ligne bleue diagonale), les dotations initiales W et $\tilde{W}$, les allocations d'équilibre Ψ et $\tilde{\Psi}$, et la zone Pareto-améliorante (hachurée en vert).

Le graphique ci-dessus représente la boîte d'Edgeworth avec:

- Les dotations initiales $W_A = (8, 1)$ et $W_B = (12, 9)$
- Les allocations d'équilibre $\Psi_A = (5, 2{,}5)$ et $\Psi_B = (15, 7{,}5)$
- La courbe des contrats (en bleu) d'équation $Y_A = (1/2)X_A$
- La zone hachurée en vert représente l'ensemble des allocations Pareto-améliorantes par rapport à l'allocation initiale
- Les courbes d'indifférence passant par les dotations initiales et les allocations d'équilibre

7. Expliquer brièvement pourquoi l'allocation d'équilibre Ψ est un optimum de Pareto.

À l'équilibre concurrentiel, les agents maximisent leur utilité sous contrainte budgétaire et le rapport des prix est commun.

$TMS_A = Y_A/X_A = 2{,}5/5 = 0{,}5$

$TMS_B = Y_B/X_B = 7{,}5/15 = 0{,}5$

Donc $TMS_A = TMS_B = 0{,}5 = P$

Les courbes d'indifférence sont tangentes, ce qui est la condition d'efficacité de Pareto.

Les ressources sont intégralement utilisées:

$X_A + X_B = 5 + 15 = 20$ et $Y_A + Y_B = 2{,}5 + 7{,}5 = 10$

Il n'y a ni gaspillage ni surplus, donc l'allocation est faisable et efficiente.

8. Supposons maintenant que le planificateur social n'est pas satisfait de l'optimum Pareto Ψ, et cherche à implémenter l'allocation égalitaire $\tilde{\Psi}_A = \tilde{\Psi}_B = (10, 5)$.

a) Serait-il possible de réaliser $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_A, \tilde{\Psi}_B)$ comme un équilibre concurrentiel (walrasien) avec des transferts? Justifier votre réponse.

L'allocation égalitaire $\tilde{\Psi} = ((10, 5), (10, 5))$ est Pareto efficace car elle se trouve sur la courbe des contrats (elle vérifie bien Y = (1/2)X). Elle respecte donc la condition de tangence des TMS ($TMS_A = TMS_B = 0{,}5$).

Ce n'est pas l'équilibre concurrentiel spontané issu des dotations initiales, mais il est possible de la réaliser avec un transfert de dotation entre A et B. Ce transfert modifie les dotations initiales de sorte que les préférences et les prix mènent naturellement à cette allocation comme équilibre.

b) Donner le montant du transfert entre les agents A et B, et la nouvelle allocation initiale $\tilde{W} = (\tilde{W}_A, \tilde{W}_B)$, nécessaire pour atteindre $\tilde{\Psi}$.

On cherche l'allocation $\tilde{W} = (\tilde{W}_A, \tilde{W}_B)$ nécessaire pour atteindre $\tilde{\Psi}_A = \tilde{\Psi}_B = (10, 5)$.

Cette redistribution permet de réaliser l'allocation égalitaire comme un équilibre concurrentiel avec transferts, car elle respecte la faisabilité de l'optimum de Pareto.

Transfert nécessaire:

- Agent A: +4 unités de X et +4 unités de Y.
- Agent B: -4 unités de X et -4 unités de Y.

On a donc:

$\tilde{W}_A = (12, 5)$ et $\tilde{W}_B = (8, 5)$

En recalculant les revenus:

$R_A = 12 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 22$

$R_B = 8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 18$

Pour A:

$2X_A = 22 \Rightarrow X_A = 11$

$Y_A = (22-11)/2 = 5{,}5$

Pour B:

$2X_B = 18 \Rightarrow X_B = 9$

$Y_B = (18-9)/2 = 4{,}5$

c) Indiquer soigneusement dans la boîte d'Edgeworth, W, $\tilde{\Psi}$ et le nouvel équilibre concurrentiel $\tilde{P}$.

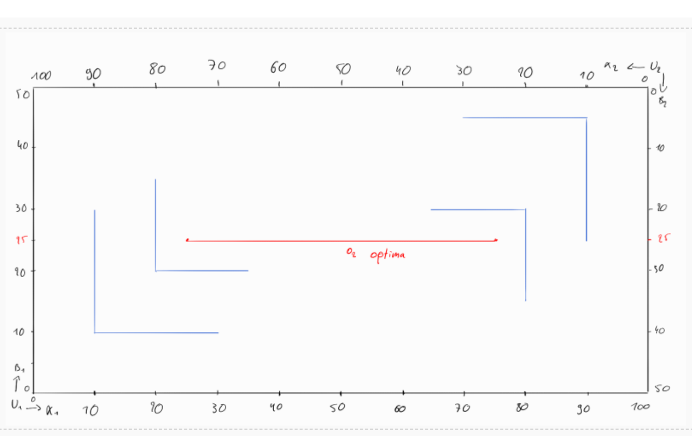
> *Dans la boîte d'Edgeworth, nous indiquons:*
>
> - *Les dotations initiales $W_A = (8, 1)$ et $W_B = (12, 9)$*
> - *Les nouvelles dotations après transfert $\tilde{W}_A = (12, 5)$ et $\tilde{W}_B = (8, 5)$*
> - *L'allocation égalitaire désirée $\tilde{\Psi}_A = \tilde{\Psi}_B = (10, 5)$*
> - *Le nouvel équilibre concurrentiel $\tilde{P} = 0{,}5$*

Exercice 2: Optimum de Pareto avec des compléments parfaits (5 points)

1. Construisez le diagramme d'Edgeworth associé en ajoutant quelques courbes d'indifférence pour chaque agent.

Pour un niveau d'utilité u, la courbe d'indifférence correspond à la paire (x_i, y_i) tel que $\min(x_i, y_i) = u$.

Les courbes d'indifférence des compléments parfaits sont en forme de L, avec le changement dans l'un des biens n'affectant pas l'utilité globale de l'autre tant que ce bien reste en excès.



Graphique 2: Diagramme d'Edgeworth pour l'économie avec 100 unités du bien α et 50 unités du bien β. La ligne rouge horizontale à β = 25 montre l'ensemble des optima de Pareto (O_2 optima).

Sur ce graphique, on peut observer:

- Les courbes d'indifférence en forme de L caractéristiques des compléments parfaits
- La ligne horizontale rouge à β = 25 représente l'ensemble des allocations Pareto optimales
- Les dimensions de la boîte d'Edgeworth sont de 100 unités sur l'axe des α et 50 unités sur l'axe des β

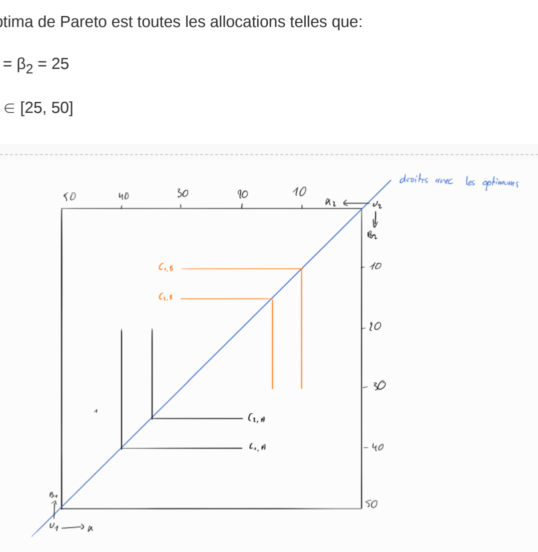
2. Déterminer graphiquement l'ensemble des optima de Pareto réalisables dans cette économie.

Dans cette économie, pour maximiser l'utilité, chaque agent doit consommer les deux biens en quantités égales, c'est-à-dire que $x_i = y_i$.

L'ensemble des optima de Pareto est toutes les allocations telles que:

$\beta_1 + \beta_2 = 50 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 25$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 50 \Rightarrow \alpha_1 \in [25, 50]$



Graphique 3: Diagramme d'Edgeworth avec les courbes d'indifférence en forme de L et la droite des optimums (diagonale bleue).

Sur ce graphique, on peut observer:

- La droite bleue diagonale représente les points où $\alpha_i = \beta_i$ pour les deux agents (droite avec les optimums)
- Les courbes d'indifférence en forme de L ($C_{1,A}$, $C_{1,B}$, etc.) caractéristiques des compléments parfaits
- L'ensemble des optima de Pareto correspond aux points de tangence entre les courbes d'indifférence des deux agents

3. Répondre à nouveau aux questions 1 et 2 si la quantité totale du bien α augmente à 100 unités et la quantité du bien β reste 50. Esquisser la solution dans une nouvelle boîte d'Edgeworth, en utilisant attentivement la définition du critère de Pareto.

Dans ce cas, la boîte d'Edgeworth a pour dimensions 100 unités sur l'axe des X et 50 unités sur l'axe des Y.

Comme les agents ont des préférences pour des compléments parfaits, ils souhaitent consommer les biens en quantités égales. Cependant, il y a maintenant plus de bien α (100) que de bien β (50).

L'ensemble des optima de Pareto reste caractérisé par:

$\beta_1 + \beta_2 = 50 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 25$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 100$

Comme il y a un excès de bien α, les allocations optimales de Pareto seront telles que chaque agent consomme autant du bien β que possible (limité à 25 unités chacun), et le bien α en excès peut être réparti de différentes façons sans affecter l'efficience.

> *Dans ce nouveau diagramme d'Edgeworth, l'ensemble des optima de Pareto correspond toujours à la ligne horizontale au niveau β = 25, mais s'étend maintenant sur toute la largeur de la boîte (100 unités). Les allocations optimales incluent toutes les répartitions où chaque agent reçoit exactement 25 unités du bien β, et n'importe quelle répartition du bien α totalisant 100 unités.*
