

# 图论作业 2

2025 年 6 月 3 日

## 1 填空题

1. 图  $G$  的顶点数为  $n$  且 7 连通, 则其边数至少为 \_\_\_\_\_。

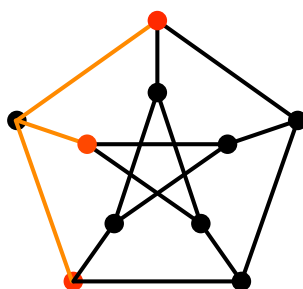
解答.  $\kappa(G) \geq 7, 2m = \sum d(v) \geq n \cdot \delta(G) \geq n \cdot \kappa(G) \geq 7n$

$\therefore m \geq \frac{7n}{2}$ , 考虑  $m$  为整数, 则边数  $m$  至少为  $\lceil \frac{7n}{2} \rceil$

注记. 定理 (惠特尼不等式): 对任意的图  $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

2. 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_。

解答. 3,3



注记. 点 (边) 连通度: 使图不连通或成为平凡图, 最少需要删去的点 (边) 数。

3. 非平凡树的点连通度和边连通度分别为 \_\_\_\_ 和 \_\_\_\_。

解答. 1,1

注记. 对非平凡树来说, 每条边都是割边 (边连通度为 1), 每个分支点 (度数大于 1 的顶点) 都是割点。  $n = 2$  (即  $K_2$ ), 去掉一个点, 变为平凡图, 点连通度为 1;  $n \geq 3$ , 一定有分支点, 点连通度为 1。

从另一个角度理解, 非平凡树每条边都是割边,  $\lambda(G) = 1$ ,  $\kappa(G) \leq \lambda(G) = 1$ , 故  $\kappa(G) = 1$

4. 长度为  $n(n \geq 3)$  的圈的 2 宽直径为 \_\_\_\_。

解答.  $n - 1$

注记.  $d_1(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $d_2(C_n) = n - 1$ 。

5. 完全图  $K_n (n \geq 5)$  的 3 宽直径为 \_\_\_\_。

解答. 2

注记.  $d_1(K_n) = 1$ ,  $d_w(K_n) = 2 \quad (2 \leq w \leq n - 1)$ 。

6. 设图  $G$  是具有  $k$  个奇度顶点, 则在  $G$  中最少添加 \_\_\_\_ 条边才能使  $G$  具有欧拉回路。

解答.  $\frac{k}{2}$

注记. 欧拉图  $G$  的每个点的度是偶数。

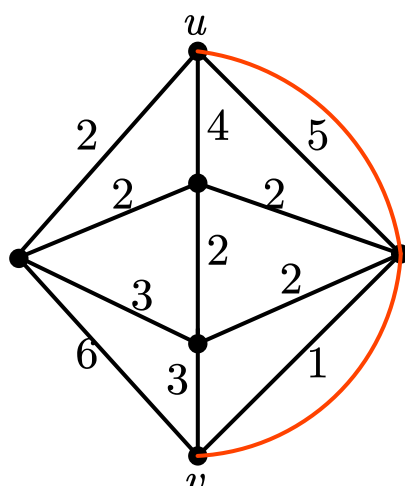
7. 完全偶图  $K_{m,n}$  ( $m, n \geq 2$  且均为偶数), 则它的最优欧拉环游共含 \_\_\_\_\_ 条边。

解答.  $mn$

注记. 满足  $m, n \geq 2$  且均为偶数时, 完全偶图  $K_{m,n}$  为欧拉图, 则它的最优欧拉环游就是它的欧拉回路,

8. 下图的最优欧拉环游的权值为 \_\_\_\_\_。

解答. 38



注记. 如果一个赋权图  $G$  中只有两个奇度顶点  $u$  与  $v$ , 求其最优环游的算法: (1) 在  $u$  与  $v$  间求出一条最短路  $P$ ; (最短路算法) (2) 在最短路  $P$  上, 给每条边添加一条平行边得到  $G$  的欧拉多重图  $G^*$ ; (3) 在欧拉多重图  $G^*$  中用 Fleury 算法求出一条欧拉回路。

9. 具有 5 个点的非哈密尔顿简单图最多包含 \_\_\_\_\_ 条边, 它们分别为 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_。

**解答.**  $7, C_{1,5}, C_{2,5}$

**注记.** 设  $G$  是  $n$  阶 ( $n \geq 3$ ) 简单图, 若

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1,$$

则  $G$  是  $H$  图; 并且具有  $n$  个顶点、 $\binom{n-1}{2} + 1$  条边的非  $H$  图只有  $C_{1,n}$  以及  $C_{2,5}$ 。

**10.** 超立方体  $Q_5$  的线图有 \_\_\_\_ 条边。

**解答.**  $Q_5$ :  $n = 2^5 = 32, m = 5 \times 2^4 = 80, 5$  正则偶图, 则其线图的边数:

$$-80 + \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2 = 320$$

**注记.** 若  $G$  具有  $n$  个点、 $m$  条边, 则线图  $L(G)$  的边数为:

$$|E(L(G))| = -m + \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d^2(v).$$

**11.** 完全图  $K_5$  的线图的补图的边数为 \_\_\_\_。

**解答.**  $K_5$ :  $n = 5, m = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

$K_5$  线图的边数:  $-10 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2 = 30$

$K_5$  线图的点数 =  $K_5$  的边数 = 10

$\therefore K_5$  线图的补图的边数:  $m(K_{10}) - 30 = 15$

**注记.** 完全图、补图、线图。

## 2 不定项选择题

1. 下列说法正确的是 ( )
- (A) 有割边的图一定有割点;
  - (B) 有割点的图一定有割边;
  - (C) 割点至少属于图的两个块;
  - (D) 割边不在图的任一圈中;
  - (E) 图的割点也是子图的割点。

解答. CD

(A)  $K_2$ ; (B) 8字形图

(C) 定理: 点  $v$  是图  $G$  的割点当且仅当  $v$  至少属于  $G$  的两个不同的块

(E) 8字形图的子图  $K_3$  没有割点

注记. 2025 年考了证明题: 对于阶数至少为 3 的连通图, 割边处一定有割点。

2. 下面说法正确的是 ( )
- (A) 没有割点的非平凡连通图一定是 2 连通图;
  - (B) 在 2 连通图中, 一定没有割边;
  - (C) 完全图一定没有割边;
  - (D) 完全图一定没有割点;
  - (E) 非平凡树一定有割边;
  - (F) 非平凡树一定有割点。

解答. BDE

$K_2$  无割点, 点连通度为 1, 有割边, 则 (A)(C)(F) 都错

(F) 应改为阶数至少为 3 的非平凡树一定有割点。

3. 设图  $G$  是一个块, 下列说法错误的是 ( )

- (A) 图中一定有圈;
- (B) 图中一定无环;
- (C) 图中一定无割边;
- (D) 图中一定无割点;
- (E) 若  $G$  的阶数大于等于 3, 则  $G$  中任意两点必位于某一圈上;
- (F) 若  $G$  的阶数大于等于 3, 则  $G$  中任意两条边必位于某一圈上;
- (G) 若  $G$  的阶数大于等于 3, 则  $G$  中没有割边。

解答. ABC

注记. 块: 没有割点的连通图

- (1) 仅有一个点的块, 要么是孤立点, 要么是环;
- (2) 仅有一条边的块, 要么是割边, 要么是环;
- (3) 至少有两个点的块无环;
- (4) 至少有三个点的块无环、无割边。

定理: 设图  $G$  的阶至少为 3, 则  $G$  是块当且仅当  $G$  无环并且任意两点都位于同一个圈上。

推论: 设  $G$  的阶至少为 3, 则  $G$  是块当且仅当  $G$  无孤立点且任意两条边都在同一个圈上。

4. 设  $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$  分别表示图  $G$  的点连通度、边连通度和最小度。下面说法错误的是 ( )

- (A) 存在图  $G$ , 使得  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$ ;
- (B) 存在图  $G$ , 使得  $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$ ;
- (C) 设  $G$  是  $n$  阶简单图, 若  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , 则  $G$  连通且  $\lambda(G) = \delta(G)$ ;

(D) 若图  $G$  是  $k$  连通的, 则  $\kappa(G) = k$ ;

(E) 若图  $G$  是  $k$  连通的, 则  $\lambda(G) \geq k$ 。

**解答.** D

(C) 定理设  $G$  是  $n$  阶简单图, 若  $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , 则  $G$  连通且  $\lambda(G) = \delta(G)$ ;

(D) (E) 图  $G$  是  $k$  连通的, 则  $\kappa(G) \geq k$ , 又  $\kappa(G) \geq \delta(G)$

5. 下面说法正确的是 ( )

(A) 若图  $G$  是  $k$  连通的, 则  $G$  中必存在  $k$  点割;

(B) 若图  $G$  是  $k$  边连通的, 则  $G$  中必存在  $k$  边割;

(C) 若图  $G$  的连通度是  $k$ , 则  $G$  中必存在  $k$  点割;

(D) 若图  $G$  的边连通度是  $k$ , 则  $G$  中必存在  $k$  边割;

(E) 若图  $G$  是  $k$  连通的, 则  $G$  也是  $k$  边连通的;

(F) 若图  $G$  是  $k$  边连通的, 则  $G$  也是  $k$  连通的;

(G) 存在最小度为 3 的 4 连通图。

**解答.** DE

(A)(C) 顶点割不一定存在 (完全图没有顶点割, 实际上也只有以完全图为生成子图的图没有顶点割。)

(B) 若图  $G$  是  $k$  边连通的, 则  $\lambda(G) \geq k$ ;

(E) 若图  $G$  是  $k$  连通的,  $\kappa(G) \geq k$ ,  $\lambda(G) \geq \kappa(G) \geq k$ , 则  $G$  也是  $k$  边连通的;

(G)  $\delta(G) \geq \kappa(G) \geq 4$

**注记.**

点连通度定义: 对  $n$  阶非平凡连通图  $G$ , 若  $G$  存在顶点割, 则称  $G$  的最

小顶点割中的点数为  $G$  的连通度；否则称  $n-1$  为其连通度。非连通图或平凡图的连通度定义为 0。边连通度定义：设  $G$  是非平凡连通图，称  $G$  的最小边割中的边数为  $G$  的边连通度；非连通图或平凡图的边连通度定义为 0。

### 区分连通度和边连通度定义的不同

6. 下面说法错误的是 ( )

- (A) 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图；
- (B) 欧拉图一定没有割点；
- (C) 欧拉图一定没有割边；
- (D) 非平凡欧拉图中一定有圈；
- (E) 至少具有 2 个点的无环欧拉图一定是 2 边连通的；
- (F) 两个欧拉图的积图一定是欧拉图。

解答. AB

- (A) 顶点度数都为偶数的连通图
- (B) 8 字形图 (C) 无割边

注记. 定理：假定  $G$  是一个连通图，则下列命题等价：

- (1)  $G$  是欧拉图。
- (2)  $G$  的每个点的度是偶数。
- (3)  $G$  的边集能划分为边不重的圈的并。

7. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是 ( )

- (A) 若  $G$  是哈密尔顿图，则对于  $V$  的每个非空顶点真子集  $S$ ，均有  $\omega(G-S) \leq |S|$ ；
- (B) 设  $G$  是阶数为  $n(n \geq 3)$  的简单图，若其最小度  $\delta \geq n/2$ ，则  $G$  是哈密尔顿图；



- (C) 设  $G$  是  $n(n \geq 3)$  阶简单图, 若  $G$  中任意两个不邻接点  $u$  与  $v$ , 满足  $d(u) + d(v) \geq n$ , 则  $G$  是哈密尔顿图;
- (D) 哈密尔顿图一定没有割边;
- (E) 哈密尔顿图一定没有割点;
- (F) 两个哈密尔顿图的积图一定是哈密尔顿图。

**解答.** E

(A)(B)(C) 都是定理哈密尔顿简单图中一定不存在割点, 存在自环的 H 图有割点

8. 关于哈密尔顿图, 下列命题正确的是 ( )

- (A) 设  $n(n \geq 3)$  阶简单图的最小度满足  $\delta \geq n/2$ , 则其闭包一定为完全图;
- (B) 设  $n(n \geq 3)$  阶简单图的任意两个不邻接顶点  $u$  与  $v$  满足  $d(u) + d(v) \geq n$ , 则其闭包一定为完全图;
- (C) 设  $n(n \geq 3)$  阶简单图  $G$  满足度序列判定定理的条件, 则其闭包一定为完全图;
- (D) 若  $n(n \geq 3)$  阶简单图  $G$  的闭包不是完全图, 则它一定是非哈密尔顿图;
- (E) 若  $n(n \geq 3)$  阶简单图  $G$  的闭包是完全图, 则图  $G$  是哈密尔顿图。

**解答.** ABCE

- (A)(B)(C) 满足 Dirac 定理, Ore 定理和度序列判定定理的图, 其闭包一定是完全图
- (D) 长度为 5 的圈, 闭包是其本身 (但不是完全图)

9. 关于哈密尔顿图, 下列命题错误的是 ( )

(A) 设  $G$  是阶数为  $n(n \geq 3)$  的非哈密尔顿简单图, 则  $G$  度弱于某个  $C_{m,n}$  图;

(B) 图  $G$  是哈密尔顿图当且仅当其闭包是完全图;

(C) 若  $(n, m)$  简单图  $G$  的边数:

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1,$$

且  $n \geq 3$ , 则  $G$  是哈密尔顿图;

(D) 若图  $G$  的闭包是哈密尔顿图, 则其闭包一定是完全图;

(E) 设  $G$  是阶数为  $n(n \geq 3)$  的哈密尔顿简单图, 若  $n$  为奇数, 则  $G$  一定不是偶图。

**解答.** BD

(B) 定理 (Bondy): 简单图  $G$  是  $H$  图当且仅当它的闭包是  $H$  图。

推论: 设  $G$  是  $n$  阶 ( $n \geq 3$ ) 简单图, 若  $G$  的闭包是完全图, 则  $G$  是  $H$  图。

### 3 解答题

1. 证明: 设简单图  $G$  是  $k$  边连通的  $E'$  是  $G$  的任意  $k$  条边构成的集合, 则

$$\omega(G - E') \leq 2$$

**解答.**

证明: 简单图  $G$  是  $k$  边连通的,  $\therefore \lambda(G) \geq k$ , 则  $G$  的最小边割集中至少含  $k$  条边

若  $E'$  是边割, 又  $|E'| = k$ , 则  $E'$  是最小边割, 所以  $\omega(G - E') = 2$

若  $E'$  不是边割, 那么删去  $E'$  中的边后不会破坏图的连通性, 所以  $\omega(G - E') = 1$

综上所述:  $\omega(G - E') \leq 2$

2. 证明: 若  $n$  阶简单图  $G$  满足  $\delta(G) \geq n-2$ , 则  $\kappa(G) = \delta(G)$ 。

**解答.**

证明:  $n-2 \leq \delta(G) \leq n-1$

若  $\delta(G) = n-1$ , 则图  $G$  是完全图  $K_n$ , 有  $\kappa(G) = \delta(G) = n-1$ ;

若  $\delta(G) = n-2$ , 要证  $\kappa(G) = n-2$ , 只需证明任意删除  $n-3$  个点后不破坏图  $G$  的连通性;

记图  $G$  删去  $n-3$  个点后变为图  $G'$ , 剩下的点分别为  $x, y, z$

因为  $\delta(G') \geq \delta(G) - (n-3) = 1$ , 所以  $x, y, z$  一定存在一对相邻顶点

不妨设  $x$  与  $y$  相邻, 则  $z$  至少与  $x, y$  之一相邻, 所以图  $G'$  仍是连通图  
得证

3. 在  $8 \times 8$  黑白方格相间的棋盘上跳动一只马, 这只马能否连续地完成每一种可能的跳动恰好一次? (一只马跳动一次是指从一个长为 3、宽为 2 的黑白方格组成的长方形的一个角跳到对角上; 在同一个长方形的两个对角之间的相互跳动认为是同一跳动)

**解答.** 以每个方格为顶点, 如果两个方格恰好是某个长 3 宽 2 矩形的对角, 则这两个方格之间连一条边, 我们可以得到一个图, 那么该图中的边与马的每一次跳动相对应;

现在问题转换为了: 能否连续的经过图的每条边恰好一次, 即求该图是否存在欧拉迹; 图中度数为 3 的顶点有 8 个, 则不存在欧拉迹。

4. 证明：若  $n$  阶简单图  $G$  满足  $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$ ，则  $G$  包含哈密尔顿路。

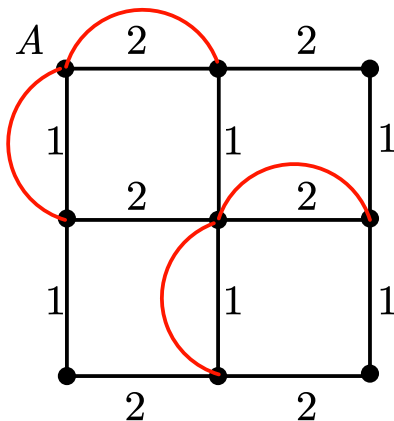
**解答.**

证明：在图  $G$  的基础上添加一个顶点  $v$ ，让点  $v$  与图  $G$  的每个顶点都相连，得到新图，记为  $G'$ ；

在  $G'$  中，有  $\delta(G') \geq \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$

根据 Dirac 定理，图  $G'$  是哈密尔顿图从图  $G'$  的哈密尔顿圈上去掉新添加的顶点  $v$ ，就变成了原图  $G$  的一条哈密尔顿路。

5. 某地的街道如图所示，其中水平方向的街道长度均为 2，竖直方向的街道长度均为 1。一辆清洁车从 A 点出发经过每条街道至少一次并且返回 A 点，求清洁车的最短行驶距离。



**解答.**

最短行驶距离：

$$(2 \times 6 + 1 \times 6) + (2 + 1 + 2 + 1) = 24$$

**注记.** 非 Euler 图求最优环游的方法

(1) 用每条边最多添一次的方法任意添一些重复边使图  $G$  成为一个欧拉多

重图  $G'$ 。

(2) 考查  $G'$  的圈，若存在圈  $C$ ，其中重复边的总权值大于该圈权值的一半（重复边权值之和大于不重复边权值之和），则在圈  $C$  上交换重复边和不重复边得到一个新的欧拉多重图。重复这个过程，直到得到一个图  $G^*$ ，使得图  $G^*$  中每个圈上重复边的总权值不大于该圈权值的一半。

(3) 用 Fleury 算法求  $G^*$  的 Euler 回路。

6. 亚瑟王在王宫中召见他的  $2n$  位骑士，其中某些骑士之间互有怨仇。已知每个骑士的仇人不超过  $n-1$  个，证明亚瑟王的谋士摩林能够让这些骑士围着圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻。

**解答.**

证明：以骑士为顶点，那么两个骑士之间连一条边当且仅当两个骑士不是仇人，得到的图记为  $G$

原问题转换为：判断图是否为哈密尔顿图

$\delta(G) \geq 2n - 1 - (n - 1) = n > \frac{n}{2}$ ，根据 Dirac 定理， $G$  是哈密尔顿图

$\therefore$  能够让这些骑士围着圆桌坐下