图论作业 2

2025 年 6 月 3 日

1 填空题

1. 图 G 的顶点数为 n 且 7 连通，则其边数至少为 ________。

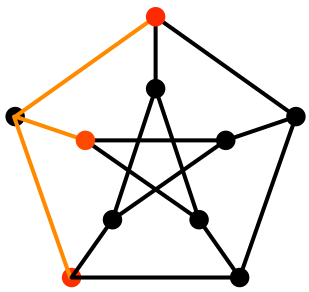
解答. $\kappa(G) \geq 7, 2m = \sum d(v) \geq n \cdot \delta(G) \geq n \cdot \kappa(G) \geq 7n$

$\therefore m \geq \frac{7n}{2}$,考虑$m$为整数,则边数$m$至少为$\lceil \frac{7n}{2} \rceil$

注记. 定理（惠特尼不等式）：对任意的图 G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

2. 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 _____ 和 _____。

解答. 3,3



注记. 点（边）连通度：使图不连通或成为平凡图，最少需要删去的点（边）数。

3. 非平凡树的点连通度和边连通度分别为 _____ 和 _____。

解答. 1,1

注记. 对非平凡树来说，每条边都是割边 (边连通度为 1)，每个分支点 (度数大于 1 的顶点) 都是割点。$n=2$(即K_2)，去掉一个点，变为平凡图，点连通度为 1；$n\geq 3$，一定有分支点，点连通度为 1。
从另一个角度理解，非平凡树每条边都是割边，$\lambda(G)=1$，$\kappa(G)\leq\lambda(G)=1$，故 $\kappa(G)=1$

4. 长度为 $n(n3)$ 的圈的 2 宽直径为 _____。

解答. $n-1$

注记. $d_1(C_n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, d_2(C_n)=n-1$。

5. 完全图 $K_n(n\geq 5)$ 的 3 宽直径为 _____。

解答. 2

注记. $d_1(K_n)=1$，$d_w(K_n)=2\quad(2\leq w\leq n-1)$。

6. 设图 G 是具有 k 个奇度顶点，则在 G 中最少添加 _____ 条边才能使 G 具有欧拉回路。

解答. $\frac{k}{2}$

注记. 欧拉图 G 的每个点的度是偶数。

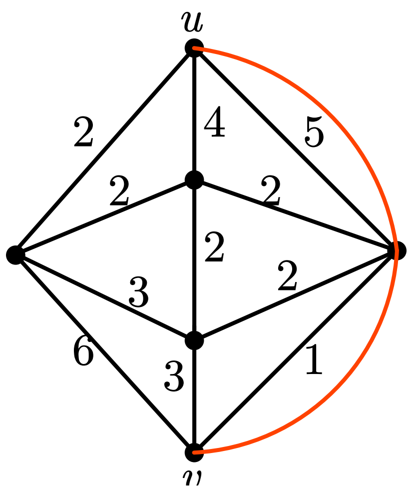
7. 完全偶图 $K_{m,n}(m,n \geq 2$且均为偶数$)$，则它的最优欧拉环游共含 _____ 条边。

解答. mn

注记. 满足 $m,n \geq 2$ 且均为偶数时，完全偶图 $K_{m,n}$ 为欧拉图，则它的最优欧拉环游就是它的欧拉回路，

8. 下图的最优欧拉环游的权值为 _____。

解答. 38



注记. 如果一个赋权图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v，求其最优环游的算法：(1) 在 u 与 v 间求出一条最短路 P；(最短路算法) (2) 在最短路 P 上，给每条边添加一条平行边得到 G 的欧拉多重图 G^*；(3) 在欧拉多重图 G*中用 Fleury 算法求出一条欧拉回路。

9. 具有 5 个点的非哈密尔顿简单图最多包含 _____ 条边，它们分别为 _____ 和 _____。

解答. $7, C_{1,5}, C_{2,5}$

注记. 设 G 是 n阶$(n \geq 3)$ 简单图，若

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1,$$

则 G 是 H 图；并且具有 n 个顶点、$\binom{n-1}{2} + 1$ 条边的非 H 图只有 $C_{1,n}$ 以及 $C_{2,5}$。

10. 超立方体 Q_5 的线图有 ____ 条边。

解答. $Q_5:\quad n = 2^5 = 32, m = 5 \times 2^4 = 80, 5$正则偶图，则其线图的边数：

$$-80 + \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2 = 320$$

注记. 若G具有n个点、m条边，则线图$L(G)$的边数为：

$$|E(L(G))| = -m + \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d^2(v)。$$

11. 完全图 K_5 的线图的补图的边数为 ____。

解答. $K_5:\quad n = 5, m = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

K_5 线图的边数：$-10 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2 = 30$

K_5 线图的点数=K_5 的边数=10

$\therefore K_5$ 线图的补图的边数：$m(K_{10}) - 30 = 15$

注记. 完全图、补图、线图。

2　不定项选择题

1.　下列说法正确的是 ( )

(A) 有割边的图一定有割点；

(B) 有割点的图一定有割边；

(C) 割点至少属于图的两个块；

(D) 割边不在图的任一圈中；

(E) 图的割点也是子图的割点。

解答.　CD

$(A)K_2$;　(B)8字形图

(C) 定理：点v是图G的割点当且仅当v至少属于G的两个不同的块

(E)8字形图的子图K_3没有割点

注记.　2025 年考了证明题：对于阶数至少为 3 的连通图，割边处一定有割点。

2.　下面说法正确的是 ( )

(A) 没有割点的非平凡连通图一定是 2 连通图；

(B) 在 2 连通图中，一定没有割边；

(C) 完全图一定没有割边；

(D) 完全图一定没有割点；

(E) 非平凡树一定有割边；

(F) 非平凡树一定有割点。

解答.　BDE

K_2 无割点，点连通度为 1，有割边，则 (A)(C)(F) 都错

(F) 应改为阶数至少为 3 的非平凡树一定有割点。

3. 设图 G 是一个块，下列说法错误的是 ( )

(A) 图中一定有圈；

(B) 图中一定无环；

(C) 图中一定无割边；

(D) 图中一定无割点；

(E) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两点必位于某一圈上；

(F) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两条边必位于某一圈上；

(G) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中没有割边。

解答. ABC

注记. 块：没有割点的连通图

(1) 仅有一个点的块，要么是孤立点，要么是环；

(2) 仅有一条边的块，要么是割边，要么是环；

(3) 至少有两个点的块无环；

(4) 至少有三个点的块无环、无割边。

定理: 设图 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G 无环并且任意两点都位于同一个圈上。

推论: 设 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G 无孤立点且任意两条边都在同一个圈上。

4. 设 $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$ 分别表示图 G 的点连通度、边连通度和最小度。下面说法错误的是 ( )

(A) 存在图 G，使得 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$；

(B) 存在图 G，使得 $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$；

(C) 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，则 G 连通且 $\lambda(G) = \delta(G)$)；

(D) 若图 G 是 k 连通的，则 $\kappa(G)=k$；

(E) 若图 G 是 k 连通的，则 $\lambda(G)\geq k$。

解答. D

(C) 定理设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G)\geq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，则 G 连通且 $\lambda(G)=\delta(G)$)；

(D) (E) 图G是k连通的,则$\kappa(G)\geq k$,又$\kappa(G\geq\delta(G)$

5. 下面说法正确的是 ( )

(A) 若图G是k连通的,则G中必存在k点割；

(B) 若图G是k边连通的,则G中必存在k边割；

(C) 若图G的连通度是k,则G中必存在k点割；

(D) 若图G的边连通度是k,则G中必存在k边割；

(E) 若图G是k连通的,则G也是k边连通的；

(F) 若图G是k边连通的,则G也是k连通的；

(G) 存在最小度为3的4连通图。

解答. DE

(A)(C) 顶点割不一定存在 (完全图没有顶点割，实际上也只有以完全图为生成子图的图没有顶点割。)

(B) 若图G是k边连通的,则$\lambda(G)\geq k$；

(E) 若图G是k连通的,$\kappa(G)\geq k$,$\lambda(G)\geq\kappa(G)\geq k$,则$G$也是$k$边连通的；

(G) $\delta(G)\geq\kappa(G)\geq 4$

注记.

点连通度定义：对 n 阶非平凡连通图 G，若 G 存在顶点割，则称 G 的最

小顶点割中的点数为 G 的连通度；否则称 $n{-}1$ 为其连通度。非连通图或平凡图的连通度定义为 0。边连通度定义：设 G 是非平凡连通图，称 G 的最小边割中的边数为 G 的边连通度；非连通图或平凡图的边连通度定义为 0。

区分连通度和边连通度定义的不同

6. 下面说法错误的是 ( )

(A) 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图；

(B) 欧拉图一定没有割点；

(C) 欧拉图一定没有割边；

(D) 非平凡欧拉图中一定有圈；

(E) 至少具有 2 个点的无环欧拉图一定是 2 边连通的；

(F) 两个欧拉图的积图一定是欧拉图。

解答. AB

(A) 顶点度数都为偶数的连通图

(B)8 字形图 (C) 无割边

注记. 定理：假定 G 是一个连通图，则下列命题等价：

(1) G 是欧拉图。

(2) G 的每个点的度是偶数。

(3) G 的边集能划分为边不重的圈的并。

7. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是 ( )

(A) 若 G 是哈密尔顿图，则对于 V 的每个非空顶点真子集 S，均有 $\omega(G{-}S) \leq |S|$；

(B) 设 G 是阶数为 $n(n \geq 3)$ 的简单图，若其最小度 $\delta \geq n/2$，则 G 是哈密尔顿图；

(C) 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶简单图，若 G 中任意两个不邻接点 u 与 v，满足 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 是哈密尔顿图；
(D) 哈密尔顿图一定没有割边；
(E) 哈密尔顿图一定没有割点；
(F) 两个哈密尔顿图的积图一定是哈密尔顿图。

解答. E
(A)(B)(C) 都是定理哈密尔顿简单图中一定不存在割点, 存在自环的 H 图有割点

8. 关于哈密尔顿图，下列命题正确的是 ( )
(A) 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图的最小度满足 $\delta \geq n/2$，则其闭包一定为完全图；
(B) 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图的任意两个不邻接顶点 u 与 v 满足 $d(u)+d(v) \geq n$，则其闭包一定为完全图；
(C) 设 $n(n \geq 3)$ 阶简单图 G 满足度序列判定定理的条件，则其闭包一定为完全图；
(D) 若 $n(n \geq 3)$ 阶简单图 G 的闭包不是完全图，则它一定是非哈密尔顿图；
(E) 若 $n(n \geq 3)$ 阶简单图 G 的闭包是完全图，则图 G 是哈密尔顿图。

解答. ABCE
(A)(B)(C) 满足 Dirac 定理，Ore 定理和度序列判定定理的图，其闭包一定是完全图
(D) 长度为 5 的圈，闭包是其本身（但不是完全图）

9. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是 ( )

(A) 设 G 是阶数为 $n(n \geq 3)$ 的非哈密尔顿简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图；

(B) 图 G 是哈密尔顿图当且仅当其闭包是完全图；

(C) 若 (n, m) 简单图 G 的边数：

$$|E(G)| > \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,$$

且 $n \geq 3$，则 G 是哈密尔顿图；

(D) 若图 G 的闭包是哈密尔顿图，则其闭包一定是完全图；

(E) 设 G 是阶数为 $n(n \geq 3)$ 的哈密尔顿简单图，若 n 为奇数，则 G 一定不是偶图。

解答. BD

(B) 定理 (Bondy)：简单图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图。

推论：设 G 是 n阶$(n \geq 3)$ 简单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图。

3 解答题

1. 证明：设简单图 G 是 k 边连通的 E' 是 G 的任意 k 条边构成的集合，则

$$\omega(G-E)' \leq 2$$

解答.

证明：简单图 G 是 k 边连通的，$\therefore \lambda(G) \geq k$，则 G 的最小边割集中至少含 k 条边

若 E' 是边割，又 $|E'|=k$，则 E' 是最小边割，所以 $\omega(G-E')=2$
若 E' 不是边割，那么删去 E' 中的边后不会破坏图的连通性，所以 $\omega(G-E')=1$
综上所述：$\omega(G-E)'\leq 2$

2. 证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G)\geq n-2$，则 $\kappa(G)=\delta(G)$。

解答.
证明：$n-2\leq\delta(G)\leq n-1$
若 $\delta(G)=n-1$，则图 G 是完全图 K_n, 有 $\kappa(G)=\delta(G)=n-1$;
若 $\delta(G)=n-2$，要证 $\kappa(G)=n-2$，只需证明任意删除 $n-3$ 个点后不破坏图 G 的连通性;
记图 G 删去 $n-3$ 个点后变为图 G'，剩下的点分别为 x,y,z
因为 $\delta(G')\geq\delta(G)-(n-3)=1$，所以 x、y、z 一定存在一对相邻顶点
不妨设 x 与 y 相邻，则 z 至少与 x、y 之一相邻，所以图 G' 仍是连通图
得证

3. 在 8×8 黑白方格相间的棋盘上跳动一只马，这只马能否连续地完成每一种可能的跳动恰好一次？（一只马跳动一次是指从一个长为 3、宽为 2 的黑白方格组成的长方形的一个角跳到对角上；在同一个长方形的两个对角之间的相互跳动认为是同一跳动）

解答. 以每个方格为顶点，如果两个方格恰好是某个长 3 宽 2 矩形的对角，则这两个方格之间连一条边，我们可以得到一个图，那么该图中的边与马的每一次跳动相对应;

现在问题转换为了：能否连续的经过图的每条边恰好一次，即求该图是否存在欧拉迹；图中度数为 3 的顶点有 8 个，则不存在欧拉迹。

4. 证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$，则 G 包含哈密尔顿路。

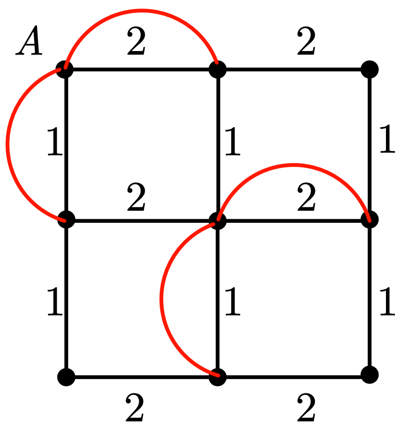
解答.

证明：在图 G 的基础上添加一个顶点 v，让点 v 与图 G 的每个顶点都相连，得到新图，记为 G';

在 G' 中，有 $\delta(G') \geq \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$

根据 Dirac 定理，图 G' 是哈密尔顿图从图 G' 的哈密尔顿圈上去掉新添加的顶点 v ，就变成了原图 G 的一条哈密尔顿路。

5. 某地的街道如图所示，其中水平方向的街道长度均为 2，竖直方向的街道长度均为 1。一辆清洁车从 A 点出发经过每条街道至少一次并且返回 A 点，求清洁车的最短行驶距离。



解答.

最短行驶距离：

$$(2 \times 6 + 1 \times 6) + (2 + 1 + 2 + 1) = 24$$

注记. 非 Euler 图求最优环游的方法

(1) 用每条边最多添一次的方法任意添一些重复边使图 G 成为一个欧拉多

重图 G'。

(2) 考查 G' 的圈，若存在圈 C，其中重复边的总权值大于该圈权值的一半(重复边权值之和大于不重复边权值之和)，则在圈 C 上交换重复边和不重复边得到一个新的欧拉多重图。重复这个过程，直到得到一个图 G^*，使得图 G^* 中每个圈上重复边的总权值不大于该圈权值的一半。

(3) 用 Fleury 算法求 G^* 的 Euler 回路。

6. 亚瑟王在王宫中召见他的 $2n$ 位骑士，其中某些骑士之间互有怨仇。已知每个骑士的仇人不超过 $n-1$ 个，证明亚瑟王的谋士摩林能够让这些骑士围着圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻。

解答.

证明：以骑士为顶点，那么两个骑士之间连一条边当且仅当两个骑士不是仇人，得到的图记为 G

原问题转换为：判断图是否为哈密尔顿图

$\delta(G) \geq 2n-1-(n-1) = n > \frac{n}{2}$，根据 Dirac 定理，$G$ 是哈密尔顿图

$\therefore$ 能够让这些骑士围着圆桌坐下