图论作业 4

2025 年 6 月 3 日

1　填空题

1.　长度至少为 3 的奇圈的点色数和边色数分别为 _____ 和 _____。

解答.

注记.　3，3

表中圈的长度至少为 3

	点色数	边色数
奇圈	3	3
偶圈	2	2
K_n	n	n(偶数)、$n-1$（奇数）
二部图	2	Δ

2.　彼得森图的点色数和边色数分别为 __________ 和 __________。

解答.　3，4

3. 已知树 T 的度序列为 $(1,1,1,2,2,2,3)$，则 T 的点色数和边色数分别为 ________ 和 ________。

解答. 2，3

注记. 偶图的点色数是 2，边色数是 Δ

4. n 方体 Q_6 的点色数和边色数分别为 ________ 和 ________。

解答. 2，6

5. 设 G 是奇数阶非平凡 $k(k \geq 2)$ 正则图，则 G 的边色数为 ________。

解答. $k+1$

注记. 对奇数阶图，$\frac{n-1}{2} \cdot \Delta \begin{cases} < m, \Delta+1 \\ \geq m, \Delta \end{cases}$

6. 完全二部图 $Km, n(m \geq n)$ 的边独立数和点覆盖数分别为 ________ 和 ________。

解答. m，n

注记.

7. 已知树 T 的度序列为 $(1,1,1,1,2,2,4)$，则其色多项式为 ________。

解答. $k(k-1)^6$

注记. 空图：k^n

完全图：$[k]_n = k(k-1)\cdots(k-n+1)$

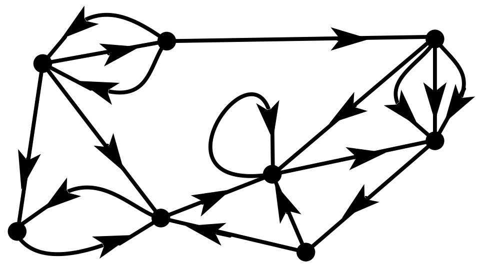
树：$k(k-1)^{n-1}$

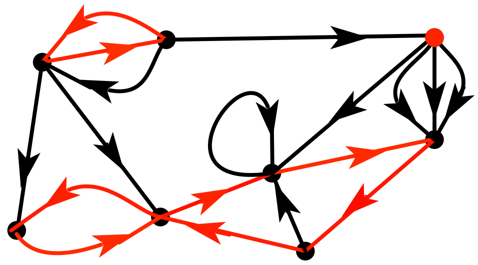
8. 拉姆齐数 $R(3,\,3)=$ 。

解答. 6

注记.

9. 图中强连通分支的个数为 ________。



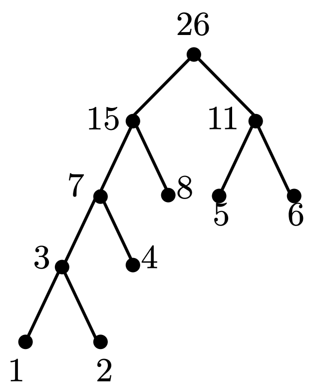


解答. 3

注记.

10. 树叶带权分别为 $1,2,4,5,6,8$ 的最优二元树权值为 ________。

解答. $(1+2)\times 4+4\times 3+(8+5+6)\times 2=62$



11. 设 T 是具有 t 片树叶，i 个分支点的完全树，则分支点的出度为 ________。

解答. $mi = t + i - 1$，则 $m = \frac{t+i-1}{i}$

12. 具有 m 条边的简单图共有 ________ 个不同的定向图。

解答. 2^m

2 不定项选择题

1. 下列说法错误的是 ( )

(A) 在正常着色下，图 G 的每个色组在 G 的补图中导出的子图是完全图；

(B) 若图 G 非连通，则图 G 的补图必为连通图；

(C) 图 G 与其补图具有相同的频序列；

(D) 存在 14 阶的自补图；

(F) 存在 6 阶可平面图 G，其补图也是可平面图；

(G) 存在 8 阶外可平面图 G，其补图也是外可平面图。

解答. DG

(D)$14 \div 4 = 3 \cdots 2$，余数不是 0 或 1。(G)$n \geq 7$ 阶外可平面图 G 的补图不是外可平面图，且 7 为最小值。

2. 关于完全图 K_n，下列说法错误的是 ( )

(A) 点色数为 n;

(B) 边色数为 n;

(C) 点连通度为 $n{-}1$;

(D) 边连通度为 $n{-}1$;

(E) 是临界图;

(F) 是唯一可着色图。

解答. B

3. 设 G 是惟一 k ($k \geq 2$) 可着色图，下列说法正确的是 ( )

(A) 最小度 $\delta(G) \geq k{-}1$;

(B) 图 G 是 $k-1$ 连通的;

(C) 在 G 的任一正常 k 着色中，G 的任意两个色组的并导出的子图是连通的;

(D) 在 G 的任一正常 k 着色中, G 的任意 l 个色组的并导出的子图是 $l{-}1$ 连通的;

(E) 若 G 是 $k{-}1$ 正则的，则 G 必为 K_k。

解答. ABCDE

注记.

4. 下列说法正确的是 ( )

(A) 图 G 的独立集是其补图的团;

(B) 点子集 S 是 G 的独立集当且仅当 S 的补集是 G 的覆盖;

(C) 若图 G 没有孤立点, 则 G 的边独立数与边覆盖数之和等于图 G 的阶数;

(D) 若图 G 是偶图，则图 G 的边独立数等于点覆盖数;

(E) 若图 G 是没有孤立点的偶图，则图 G 的点独立数等于边覆盖数。

解答. ABCDE

5. 下列说法正确的是 ( )

(A) 在有向图中，顶点的出度之和等于边数的两倍;

(B) 在有向欧拉图中，各点的度数必为偶数;

(C) 在有向图的邻接矩阵中，所有元素之和等于边数的两倍;

(D) 在无环有向图的关联矩阵中，各行元素之和均等于 0;

(E) 在无环有向图的关联矩阵中，所有元素之和等于 0。

解答.

BE

6. 对于有向图，下列说法错误的是 ( )

(A) 有向图 D 中任意一顶点只能处于 D 的某一个强连通分支中;

(B) 在有向图 D 中，顶点 v 可能处于 D 的不同的单向连通分支中;

(C) 有向连通图中顶点间的强连通关系是等价关系;

(D) 有向连通图中顶点间的单向连通关系是等价关系;

(E) 强连通图的所有顶点必然处于某一有向闭途径中。

解答. D

3 解答题

1. 现有 5 个人 A, B, C, D, E 被邀请参加桥牌比赛。比赛的规则是： 每一场比赛由 2 个二人组进行对决； 要求每个二人组 (X, Y) 都要与其它二人组 (U, V) 进行对决。若每个人都要与其他任意一个人组成一个二人组，且每个组在同一天不能有多于一次的比赛，则最少需要安排多少天比赛?

解答.
以二人组为顶点，两点连线当且仅当两组有比赛。
得到的图为彼得森图，边色数为 4，因此最少需要安排 4 天比赛.

2. 有 6 名博士生要进行论文答辩，答辩委员会成员分别是
A_1=张教授，李教授，王教授；A_2=赵教授，钱教授，刘教授；
A_3=严教授，王教授，刘教授；A_4=赵教授，梁教授，刘教授；
A_5=张教授，钱教授，孙教授；A_6=李教授，王教授，严教授。
要使教授们参加答辩不至于发生时间冲突，至少安排几次答辩时间段？请给出一种最少时间段下的安排。

解答. 以博士生为顶点，两点连线当且仅当有相同教授担任答辩委员会成员。

3. 有 6 名选手参加中国象棋循环比赛，任意两名选手均要进行一场比赛，每名选手每天最多参加一场比赛。试确定完成比赛所需要的最少天数并给出一种对应的赛程安排表。

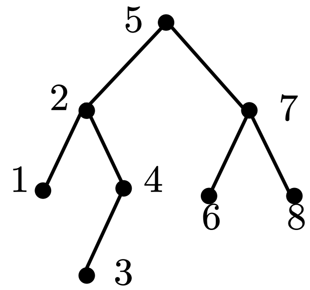
解答.
以选手为顶点，两点连线当且仅当选手要进行比赛，构造出的图为 K_6，可以分解为 5 个 1-因子的并，因此，最少天数为 5 天。

天数	选手
1	1-6,2-5,3-4
2	2-6,3-1,4-5
3	3-6,4-2,5-1
4	4-6,5-3,1-2
5	5-6,1-4,2-3

4. 设 T 是 8 阶二元有序树, 已知 T 的先序遍历和中序遍历分别为 52143768 与 12345678。构造树 T 并求其后序遍历。

解答.

后序遍历：13426875



5. 某地包含 5 个行政区域 A、B、C、D 和 E，位置关系如下图所示。拟用 4 种颜色对这 5 个区域着色使得相邻的两个区域的颜色不同，问

(a) 共有多少种不同的着色方案？(b) 为使得相邻区域颜色不同，最少需要多少种颜色？

解答.

求色多项式；(a)72　(b)3

6. 设 T 是一棵高为 h 的 n 阶二元树，证明：$h+1 \leq n \leq 2^(h+1)-1$。

解答. 设第 i 层有 $n_i(i=0,1,\cdots,h)$ 个点，$1 \leq n_i \leq 2^i$ 则有：

$$h+1 \leq n = \sum_{i=0}^{h} n_i \leq \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1}-1$$

7. 欧洲的某 $n(n \geq 5)$ 支足球队进行了若干场比赛，每两支球队至多进行一场比赛，比赛无平局。结果发现：所有球队中，恰有一支球队全胜，并且对其中任意两支球队 A 和 B，均存在另外一支球队 C，或者 A 和 B 都战胜了 C，或者 A 和 B 都输给了 C。请用图论的知识描述比赛的结果，并构造一个具体的图来表示一种可能的比赛结果。

解答. 有向图