图论作业 1

2025 年 6 月 3 日

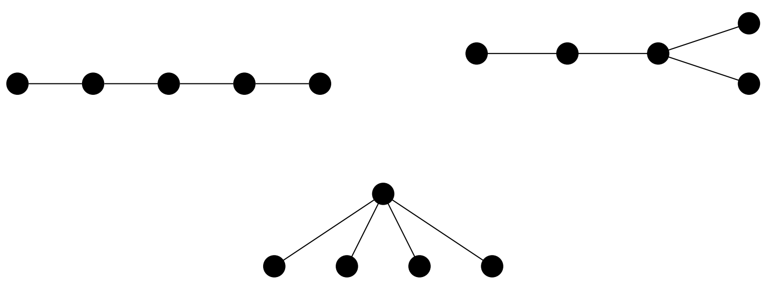
1 填空题

1. 非同构的 4 阶和 5 阶树的个数分别为 ________ 和 ________。

解答. 按树中存在的最长路进行枚举。

4 阶树：

5 阶树：



因此，4 阶树有 2 种，5 阶树有 3 种。

2. 若G为n阶k正则图,则G的补图的边数为______________。

解答. 完全图 K_n 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。

G 的补图 $\overline{G}$ 的边数为:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{nk}{2} = \frac{n(n-1-k)}{2}$$

注记. 补图的概念：在完全图中去掉原图的所有边后剩余的边构成的图。

自补图：$n \equiv 0, 1 (\mathrm{mod}\ 4)$

补图中点的度数：$n - 1 - d_G(v)$

3. 完全图 K_3 与超立方体 Q_3 的积图的边数为 ______________。

解答. K_3 有 3 个顶点，3 条边；Q_3 有 8 个顶点，12 条边。

积图 $G \times H$ 的边数公式为：$n_1 m_2 + n_2 m_1$

因此：$|E(K_3 \times Q_3)| = 3 \times 12 + 8 \times 3 = 36 + 24 = 60$

注记. 超立方体 Q_n 是具有 2^n 个顶点，$n2^{n-1}$ 条边的 n 正则二部图。

4. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

则图 G 的边数为 ______________。

解答. A^2的元素$a_{ii}^{(2)}$是v_i的度数。由握手定理$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$,则有:

$$m = \frac{3+2+3+2+2}{2} = 6$$

注记. 设 A 为简单图 G 的邻接矩阵，则 A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数。A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍。

5. 已知简单图 G 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 G 中长度为 2 的途径的数目为 ____________。

解答. 长度为 2 的途径数目等于 A^2 的所有元素之和。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

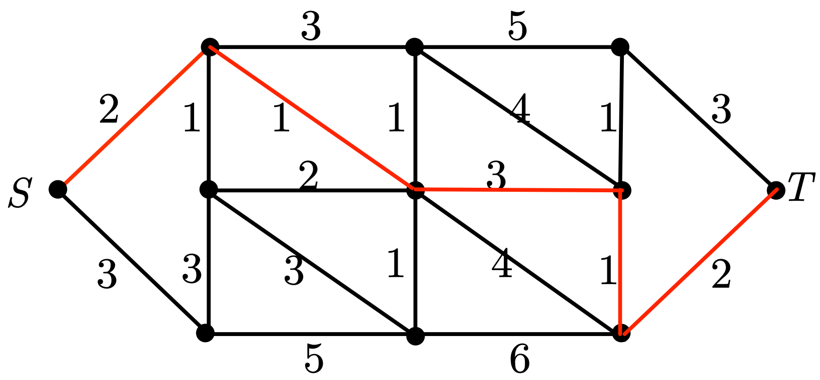
所有元素之和为：$(3+2+3+2+2)+(1+1+2+1+1+1+2)\times 2 = 30$

注记. A 是 n 阶标号图 G 的推广的邻接矩阵，则 A^k 的第 (i,j) 元素 $a_{ij}^{(k)}$ 表示从顶点 i 到顶点 j 长度为 k 的途径数目。

需要注意，途径 $w = v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$，因此 $v_0 \to v_1$的途径和$v_1 \to v_0$ 是不同的，需要计算矩阵中的所有元素。

6. 下图中从 S 到 T 的最短路的长度为 ____________。

解答. 根据 Dijkstra 算法或直接观察可得最短路径长度为 9。



注记. 最短路问题可用 Dijkstra 算法求解。

7. 设 G 是 n 阶简单图，且不含完全子图 K_3，则其边数一定不会超过 ________。

解答. 不含 K_3 的 n 阶简单图的边数不超过 $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。

注记. Turán 定理：若 G 是 n 阶简单图，并且不包含 K_{l+1}，则边数 $m(G) \leq m(T_{l,n})$

$$m(T_{l,n}) = \frac{(l-1)n^2 + r^2}{2l} - \frac{r}{2}, 其中 n \equiv r(\mathrm{mod} l)$$

8. 设 n 阶图 G 是具有 k 个分支的森林，则其边数为 ________。

解答. 森林是无圈的图，每个分支都是树。设 k 个分支的顶点数分别为 $n_1, n_2, \ldots, n_k$，则：每个分支作为树有 $n_i - 1$ 条边

总边数为：$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k$

注记. 掌握证明方法，2025 年考了证明题。

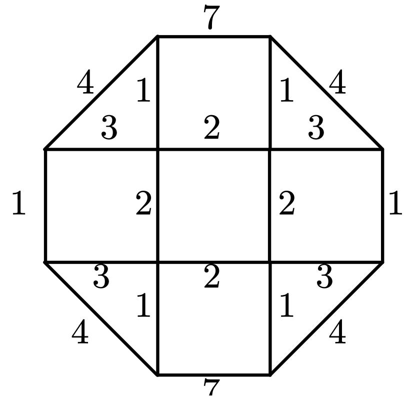
9. 完全图 K_5 的生成树的个数为 ________。

解答. K_5 的生成树个数为 $5^{5-2} = 5^3 = 125$。

注记. n 阶完全图 K_n 的生成树个数为 n^{n-2}

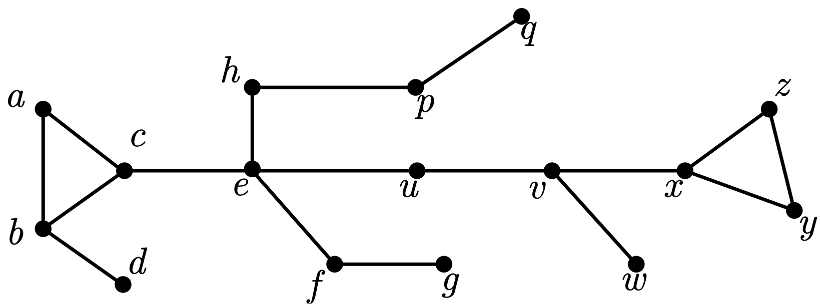
10. 下图的最小生成树的权重为 ______________。

解答. 使用破圈法，删除权重为 7, 7, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2 的边，得到最小生成树的权重为 18。



注记. 最小生成树算法包括 Kruskal 算法（按边权排序）和破圈法。

11. 下图的直径为 _________,所有中心点构成的集合为 ______________。



解答. 通过计算各点的离心率，找到最大离心率即为直径。中心点是离心率等于半径（最小离心率）的顶点。根据图的结构，直径为 7（q 到 z/y），中心点集合为 $\{e, u\}$。

注记. 若图是树，则可通过不断删去叶子点来找到中心点。

2 不定项选择题

1. 关于图的度序列，下列命题正确的是：

(A) 同构的两个图的度序列相同；

(B) 非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列当且仅当 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ 是偶数；

(C) 非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列当且仅当 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中有偶数个奇数；

(D) 如果正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是一棵树的度序列且 $n \geq 2$，那么序列中至少有两个 1；

(E) 存在一棵非平凡树以正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 为度序列当且仅当 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)$；

(F) 若图 G 的顶点度数之和大于等于图 H 的顶点度数之和，则图 G 度优于图 H；

(G) 如果非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是简单图的度序列，那么在同构意义下只能确定一个图。

解答. ABCDE

注记. B、C 等价，D 非平凡树至少有两片树叶

2. 对于序列 $(5, 5, 4, 4, 4, 1, 1)$，下列说法正确的是：

(A) 可能是简单图的度序列；

(B) 可能是非简单图的度序列；

(C) 可能是森林的度序列；

(D) 一定是包含圈的图的度序列；

(E) 不是任意图的度序列。

解答. ABD

$n=7, m=12, m>n-1,$ 所以一定有圈(解答题3给出了证明)

注记. 森林：无圈图，树是边数最少的连通图，边数最多的无圈图，无圈图的边数 $m \leq n-1$

3. 下列说法错误的是：

(A) 若一个图中存在闭途径，则一定存在圈；

(B) 偶图中不存在奇圈；

(C) 若图 G 不含三角形，则 G 为偶图；

(D) 图的顶点之间的连通关系一定是等价关系；

(E) 存在每个顶点的度数互不相同的非平凡简单图。

解答. ACE

(A) 完全图K_2,存在闭途径$v_1v_2v_1$

(C) 三角形只是长度为 3 的奇圈, 应该不含任何奇圈

注记. 偶图判定定理:一个图是偶图当且仅当它不包含奇圈。

定理:任意一个n阶简单图G的点的度不能互不相同。

4. 关于简单图 G 的邻接矩阵 A，下列说法错误的是:

(A) 矩阵 A 的行和等于该行对应顶点的度数；

(B) 矩阵 A 的所有元素之和等于该图边数的 2 倍；

(C) 矩阵 A 的所有特征值之和等于该图边数的 2 倍；

(D) 矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍；

(E) 矩阵 A^2 的主对角线上的元素之和等于该图边数的 2 倍；

(F) 若 G 是非连通图，则 A 相似于某个准对角矩阵。

解答. C

(D) (E)：若A的特征值为λ,则A^2的特征值为λ^2, $\sum a_{ii}^{(2)} = \sum \lambda^2$

注记. A^2的元素$a_{ii}^{(2)}$是v_i的度数。

邻接矩阵的性质:

(1) 邻接矩阵是一个对称方阵。

(2) 简单标号图的邻接矩阵的各行 (列) 元素之和是该行 (列) 对应的点的度。

(3) 若 A_1 和 A_2 是对应于同一个图的两种不同标号的邻接矩阵，则 A_1 和 A_2 是相似的，即存在一个可逆矩阵 P 使得 $A_1 = P^{-1}A_2P$。

(4)G 是连通的当且仅当没有 G 的点的一种标号法使它的邻接矩阵有约化的形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \to \text{准对角矩阵}$$

5. 图 $G = (n, m)$ 一定是树的是:

(A) 连通图;

(B) 无回路但任意添加一条边后有回路的图;

(C) 每对顶点间都有路的图;

(D) 连通且 $m = n - 1$;

(E) 无圈且 $m = n - 1$。

解答. BDE

K_3 不是树，但满足 (A)(C)，实际上树应该是连通的无圈图，且每对顶点有唯一的路。

注记. 设G是具有n个点m条边的图,则下列命题等价:

(1)G是树。 (2)G无环且任意两个不同点之间存在唯一的路。

(3)G连通,删去任一边便不连通。 (4)G连通,且$m = n-1$。
(5)G无圈,且$m = n-1$。 (6)G无圈,添加任何一条边可得唯一的圈。

3 解答题

1. 设无向图 G 有 10 条边，3 度与 4 度顶点各 2 个，其余顶点度数均小于 3，问 G 中至少有几个顶点？在顶点数最少的情况下，写出 G 的度序列，该度序列是一个图序列吗？

解答. 要使图 G 中顶点数最少，则令其余顶点度数都最大，由握手定理，$\frac{2\times10-(3+4)\times2}{2} = 3$,至少有7个点

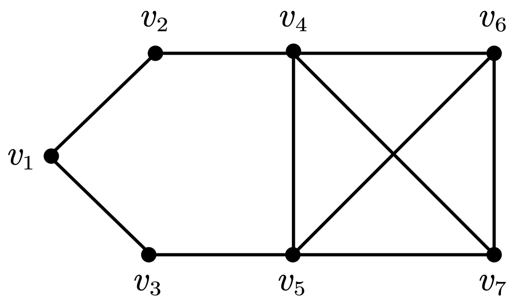
度序列：$\mathit{\Pi} = (4, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$

$\mathit{\Pi}_1 = (\ , 3, 2, 2, 1, 1, 2)$

$\mathit{\Pi}_1 = (\ , 3, 2, 2, 2, 1, 1)$

$\mathit{\Pi}_2 = (\ ,\ , 1, 1, 1, 0, 1)$

$\mathit{\Pi}_2$ 可图，因此该度序列是一个图序列。



注记.

定理：设有非负整数组 $\Pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 满足：

$$n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n, \sum d_i = 2m,$$

则 Π 是可图序列的充要条件是:

$$\Pi_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{n-1} - 1, d_n)$$

是可图序列。

2. 证明:若G是简单图且$\delta(G) \geq 2$,则G包含长度至少是$\delta(G) + 1$的圈。

解答.

证明:不失一般性,只就连通图进行证明。

设$W = v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_k$是$G$中的一条最长路

$\because \delta(G) \geq 2$

$\therefore v_1$除v_2外的其他相邻点至少有$\delta(G) - 1$个

又W是G中的最长路,则与v_1相邻的所有点必在W上(否则存在以该相邻点v为起点的一条比W更长的路$v v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_k$

设W上最后一个与v_1相邻的点是v_m,

则$v_1 v_2 \cdots v_m v_1$是G中的一个圈,且圈长至少为$\delta(G) + 1$

3. 设G为具有n个点、m条边的简单图,若$m > n-1$,则G一定包含圈。

解答.

证明:不失一般性,只就连通图进行证明。

对G的顶点数作数学归纳。

当$n = 1$时,结论显然成立。

设结论对$n = k$时成立。

当$n = k + 1$时,分两种情况讨论。

若G中有1度顶点u,考虑$G - u$。

显然,$G - u$为k阶连通图且边数大于$k - 1$。由归纳假设知$G - u$

中存在圈。因此,图G包含圈。

若G中没有1度顶点,则$\delta(G) \geq 2$。此时,图G必然包含圈。

4. 证明:若k正则连通图G中每个圈的长度至少为4,则G至少包含$2k$个顶点。

解答.

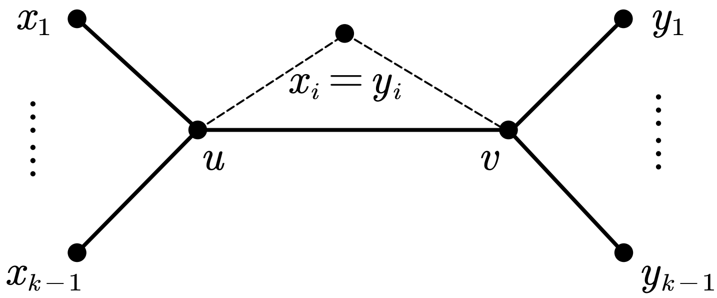
证明:在图G任取两个相邻顶点u,v

记u,v的邻点集合分别为$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}\}$和$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}\}$

则X和Y必不相交$(\forall i, x_i \neq y_i)$,否则存在长度为3的圈

此时u,v及X、Y内所有点,一共有$2k$个顶点

$\therefore G$至少包含$2k$个顶点



5. 证明:若图G的直径大于3,则图G的补图的直径小于3。

解答.

证明:在图G任取两个顶点u,v

若u、v在图G中不相邻,则在$\bar{G}$中相邻,$d_{\bar{G}}=1$

若u、v在图G中相邻,则在$\bar{G}$中不相邻

图G中至少存在一个点w,与u、v都不相邻

若不存在这样的点,则图G中除u和v外的任意点,至少与u、v之一相邻,此时:

$d_G \leq 3$,产生矛盾!

$\therefore$ 在$\bar{G}$中,存在点w与u、v都相邻,此时$d_{\bar{G}}=2$ 得证

6. 在某种无环状结构 (至少三个原子形成环) 的碳氢化合物 C_mH_n 中，每个碳原子 (C) 处有 4 条化学键，每个氢原子 (H) 处有 1 条化学键。已知该分子中恰有两个碳原子之间是以三键相连，其余碳原子之间以单键相连。当 $m = 20$ 时，试求 n 的值。(用图论方法求解并说明具体理由)

解答.

以原子为顶点,化学键为边,构造图G,若将唯一的三键看作单键,则图G是树

$\sum\limits_{v\in V} d(v) = (20\times 4 - 2\times 2) + (n\times 1) = 76 + n$

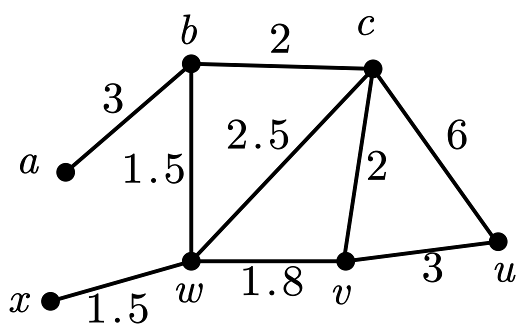
又树的边数 $|E(T)| = |V(T)| - 1 = 20 + n - 1 = 19 + n$

由握手定理,可得:

$76 + n = 2\times(19 + n)$

$\therefore n = 38$

7. 某市有 7 个化工厂，它们之间的公路及距离如图所示。拟修建一个消防站来负责这些工厂的安全工作，问消防站应设在哪个工厂，以便发生灾情时能够及时赶去处理?



解答.

寻找图的中心点(离心率最小点),计算每个顶点的离心率

应该设在w处