

图论作业 3

2025 年 6 月 3 日

1 填空题

1. 完全图 K_{2n} 共有 _____ 个不同的完美匹配。

解答. $(2n - 1)!!$

注记. 完全偶图 $K_{n,n}$ 共有 $n!$ 个不同的完美匹配。

2. 超方体 Q_6 的最小覆盖包含的点数为 _____。

解答. $\frac{2^6}{2} = 32$

注记. 推论: 若 G 是 k 正则偶图 ($k > 0$), 则 G 有完美匹配。

n 方体是 n 正则二部图, 有完美匹配, 且完美匹配的边数为顶点数的一半。

3. 图 $K_{m,n}$ ($m \leq n$) 的最小覆盖包含的点数为 _____。

解答. m

4. 完全图 K_{60} 能分解为 _____ 个边不重的 1-因子之并。

解答. 59

注记. 定理 完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的。

K_{2n} 可以分解为 $2n-1$ 个边不重的 1-因子之并。

有没有，能不能，数一数

5. 完全图 K_{61} 能分解为 _____ 个边不重的 2-因子之并。

解答. 30

注记. 定理： K_{2n+1} 是 2-可因子化的，且为 n 个 H 圈的并。

若一个 2-因子是连通的，则它是一个 H 圈。

6. 假设 G 是具有 n 个点、 m 条边、 k 个连通分支的无圈图，则 G 的荫度为 _____。

解答. 1

注记. 无环图 G 分解为边不重的生成森林的最少数目，称为图 G 的荫度，记为 $\sigma(G)$ 。

7. 设图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删掉 _____ 条边才可能使其成为可平面图。

解答. 1

注记. 如果在不可平面图 G 中任意删去一条边所得的图为可平面图，则称 G 为极小不可平面图，比如 K_5 和 $K_{3,3}$ 。

8. 设连通平面图 G 具有 5 个顶点, 9 条边, 则其面数为 _____。

解答. $\varphi = 6, (5 - 9 + \varphi = 2)$

注记. 欧拉公式:

连通平面图: $n - m + \varphi = 2$

k 个分支的平面图: $n - m + \varphi = k + 1$

9. 若图 G 是 10 阶极大平面图, 则其面数等于 _____。

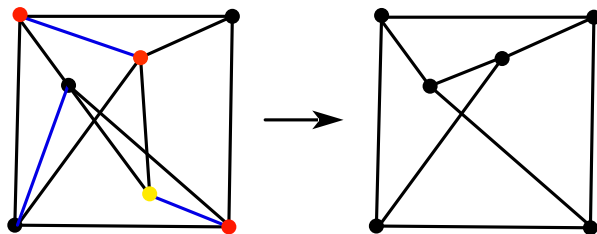
解答. 16

注记. 极大平面图: $m = 3n - 6, \varphi = 2n - 4$ 、极大外平面图: $m = 2n - 3, n - 2$ 个外部面

10. 若图 G 是 10 阶极大外平面图, 其内部面共有 _____ 个。

解答. 8

11. 请判断右图是否为可平面 (请填是或否)_____。



解答. 否

删去图中蓝色的边后, 收缩 2 度顶点 (即黄点), 可得 $K_{3,3}$

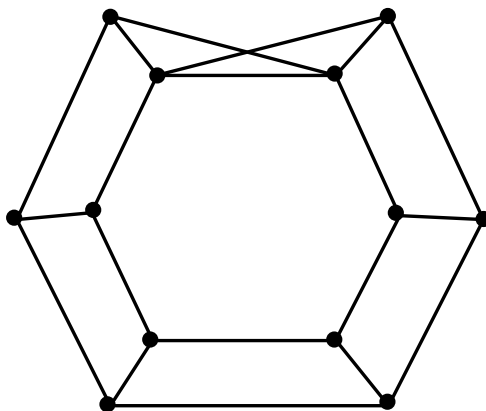
注记. 考虑：依次删除一些边。这些边满足去掉原图依旧非平面的边。直到所有的边都尝试过。我们将保留的非平面的边构成我们想要的子图。

定理 (库拉托夫斯基定理)：图 G 是可平面的当且仅当 G 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

定理 (瓦格纳定理)：简单图 G 是可平面图当且仅当 G 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构的初等收缩子图。

图 G 的初等收缩子图是对 G 进行一系列的删点、删边或者边收缩运算得到的图。

2025.5.30 考：判断该图是否是平面图。



2 不定项选择题

1. 关于非平凡树 T , 下面说法错误的是 ()

- (A) T 至少包含一个完美匹配;
- (B) T 至多包含一个完美匹配;
- (C) T 的荫度可能大于 1;
- (D) T 是只有一个面的平面图;
- (E) T 的对偶图可能是简单图。

解答. ACE

- (A)(B) 非平凡树 T 至多包含一个完美匹配。(C) 树的荫度是 1
(D)(E) 树只有外部面, 它的对偶图肯定有自环。

2. 下列说法正确的是 ()

- (A) 三正则的偶图一定存在完美匹配;
- (B) 三正则的哈密尔顿图一定存在完美匹配;
- (C) 无割边的三正则图一定存在完美匹配;
- (D) 有割边的三正则图一定没有完美匹配;
- (E) 存在完美匹配的三正则图的边数一定是 3 的倍数。

解答. ABCE

(B) 哈密尔顿图无割边, 无割边的 3 正则图有完美匹配; 或者, 3 正则图有偶数个顶点, H 图有偶圈, 隔一条边去一条边就是完美匹配, 可以 1-因子分解。

(E) 图 G 存在完美匹配的一个必要条件是 G 的点数 n 必然为偶数, 再由 $3n = 2m$ 可得

注记. 推论 (Peterson): 每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配。

推论: 若 G 是 k 正则偶图 ($k > 0$), 则 G 有完美匹配。

无割边的三正则图一定存在完美匹配，但不一定可以 1 因子分解。
有割边的三正则图可能有完美匹配，但一定不可以 1 因子分解。

3. 下列说法正确的是 ()

- (A) 在偶图中，最大匹配包含的边数等于最小覆盖包含的点数；
- (B) 任一非平凡正则偶图包含完美匹配；
- (C) 任一非平凡正则偶图可以 1-因子分解；
- (D) 偶度正则偶图可以 2-因子分解；
- (E) 任意 k -正则偶图 ($k \geq 2$) 一定不包含割边。

解答. ABCDE

(A) König 定理

注记.

4. 下列说法中错误的是 ()

- (A) 完全图 K_{101} 包含 1-因子；
- (B) 完全图 K_{101} 包含 2-因子；
- (C) 完全图 K_{102} 包含 1-因子；
- (D) 完全图 K_{102} 包含 2-因子；
- (E) 图 G 的一个 1-因子对应 G 的一个完美匹配；
- (F) 图 G 的一个 2-因子对应 G 的一个哈密尔顿圈。

解答. AF

- (A) 图 G 存在完美匹配的一个必要条件是 G 的点数必然为偶数。
- (B) 定理 图 K_{2n+1} 是 2-可因子化的，且为 n 个 H 圈的并。
- (C) 定理：完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的， $2n-1$ 个不同的 1-因子
- (E) 1-因子的边集构成一个完美匹配。
- (F) 连通的 2-因子对应 H 圈

5. 下列说法正确的是 ()

- (A) 超立方体 Q_n 一定可以 1-因子分解;
- (B) 最大度小于 3 的偶数阶连通图一定可以 1-因子分解;
- (C) 三正则的哈密尔顿图一定可以 1-因子分解;
- (D) 无割边的 3 正则图一定可以 1-因子分解;
- (E) 有割边的 3 正则图一定不可以 1-因子分解。

解答. ACE

注记.

- (B) 非平凡树 T 至多包含一个完美匹配, 不能 1-因子分解
- (C) 定理: 具有 Hamilton 圈的 3 正则图是 1-可因子化的。反之不成立

6. 下列说法正确的是 ()

- (A) 完全图 K_{2n} 是 $2n-1$ 个完美匹配的并;
- (B) 完全图 K_{2n} 是 n 个哈密尔顿圈的并;
- (C) 完全图 K_{2n} 是 1 个完美匹配与 $n-1$ 个哈密尔顿圈的并;
- (D) 若图 G 是 $2k$ 正则连通图, 则 G 可以分解为 k 个 2-因子的并;
- (E) 无割边的 3 正则图可以分解为一个 1-因子与一个 2-因子的并。

解答. ACDE

- (B) 完全图 K_{2n+1} 是 n 个哈密尔顿圈的并;

注记.

7. 下列说法正确的是 ()

- (A) 完全图 K_n 的荫度为 $\lceil n/2 \rceil$, 符号 $\lceil \cdot \rceil$ 代表向上取整;
- (B) 完全二部图 $K_{a,b}$ 的荫度为 $\lceil ab/(a+b-1) \rceil$, 符号 $\lceil \cdot \rceil$ 代表向上取整;
- (C) 非平凡树的荫度为 1;
- (D) 具有 m 条边的 n 阶无环图可以分解为 m 个生成森林的并;
- (E) 假设 H 是图 G 的子图, 则 $\sigma(H) \leq \sigma(G)$ 。

解答. ABCDE

8. 下列说法错误的是 ()

- (A) 任何平面图都只有一个外部面;
- (B) 简单平面图中一定有度数不超过 5 的顶点;
- (C) 平面图的各个面的次数之和可能为奇数;
- (D) 只有一个面的连通平面图一定是树;
- (E) 存在一种方法, 总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面。

解答. C

(B) 定理: 若 G 是简单平面图, 则 $\delta(G) \leq 5$

(C) 定理: 设 G 是具有 m 条边的平面图, 则 $\sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 2m$.

(D) 只有一个面的连通平面图一定无圈, 因为圈有内部和外部

(E) 通过球极射影可将平面图的内部面转换为外部面。

9. 下列说法正确的是 ()

- (A) 若无环图 G 是 2 连通的平面图, 则其一定不包含割点;

- (B) 若无环图 G 是 2 连通的平面图, 则其一定不包含割边;
- (C) 若无环图 G 是 2 连通的平面图, 则其一定不包含只属于一个面的边;
- (D) 若无环图 G 是 2 连通的平面图, 则其每个面的边界均为圈;
- (E) 若无环图 G 是 2 连通的平面图, 则其任意两个点在同一个圈上;
- (F) 若无环图 G 是 2 连通的平面图, 则其任意两条边在同一个圈上。

解答. ABCDEF

(B) 2 连通一定是 2 边连通的

10. 下列说法错误的是 ()

- (A) 若 (n, m) 图 G 是极大平面图且 $n \geq 3$, 则 $m = 3n - 6$;
- (B) 若 (n, m) 图 G 是极大外平面图且 $n \geq 3$, 则 $m = 2n - 3$;
- (C) 阶数至少为 3 的极大平面图的每个面均是三角形;
- (D) 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形;
- (E) 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图。

解答. D

注记. (A) 极大平面图: $n = 3n - 6, \varphi = 2n - 4$

(B) 极大外平面图: $m = 2n - 3$, 有 $n - 2$ 个内部面

(C) “极大平面图的三角形特征”, 即每个面的边界是三角形。

(D) 定理: 设 G 是一个至少有 3 个点且所有点均在外部面上的外平面图, 则 G 是极大外平面图当且仅当其外部面的边界是哈密尔顿圈, 内部面是三角形。

11. 关于平面图 G 和其对偶图 G^* 的关系, 下列说法中错误的是 ()

- (A) G^* 是连通平面图;
- (B) G^* 的顶点数等于 G 的面数;
- (C) G^* 的边数等于 G 的边数;
- (D) G^* 的面数等于 G 的点数;
- (E) $(G^*)^* \cong G$;
- (F) 若 $G_1 \cong G_2$, 则 $G_1^* \cong G_2^*$ 。

解答. DEF

(D)(E) 要求连通

(F) 同构的平面图可有不同构的对偶图

3 解答题

1. 设 G 是 $2k$ 阶简单图并且最小度 $\delta(G) \geq k \geq 1$ 。证明: G 存在完美匹配。

解答.

证:

$k = 1$ 时, G 是 2 阶简单图, 只有一条边, 则该边即为完美匹配;

$k = 2$ 时, $\delta(G) \geq 2$ 由 Dirac 空理, G 是哈密尔顿图, 有哈密尔顿圈, 在圈上隔一条边去一条边可取出完美匹配。

2. G 是一个偶数阶简单连通图且 $\Delta(G) = 2$, 则 G 一定包含完美匹配。

解答.

$$1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) = 2$$

$\delta(G)=1$ 时, 图 G 是路

$\delta(G)=2$ 时, 图 G 是偶圈

3. 由于在考试中获得好成绩, 6 名学生将获得下列书籍的奖励, 分别是: 代数学 (a)、微积分 (c)、微分方程 (d)、几何学 (g)、数学史 (h)、规划学 (p)、拓扑学 (t)。每门科目只有 1 本书, 而每名学生对书的喜好是:
A: d, h, t; B: h, t; C: c, d, g, p; D: d, h; E: d, t; F: a, c, d。每名学生是否都可以得到他喜欢的书? 为什么? (用图论方法求解)

解答.

考点: 定理 60 (Hall 1935): 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图, 则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当 $|N(S)| \geq |S|$ 对所有 $S \subseteq X$ 成立

解: 以学生和书籍作为顶点, 两个顶点之间连一条边当且仅当该名学生喜欢这本书, 得到图记为 G , 图 G 显然是一个二部图

原问题转换成判断图 G 中是否存在可以饱和学生顶点集的最大匹配

在学生顶点集中可以找到 4 个顶点 $S = \{A, B, D, E\}$, 其邻集为 $N(S) = \{d, h, t\}$, 满足 $|N(S)| < |S|$

由 Hall 定理知, 图 G 中不存在可以饱和学生集合的最大匹配

因此, 每名学生不都可以得到他喜欢的书

4. 假定 G 是具有 m 条边的简单二部图, 顶点的最大度为 Δ 。证明: G 包含一个至少有 m/Δ 条边的匹配。

解答. 证:

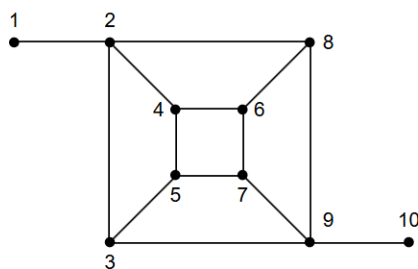
因为顶点的最大度为 Δ , 所以一个顶点最多可以覆盖 Δ 条边

由于图 G 有 m 条边，所以最少需要 m/Δ 个顶点才能覆盖所有的边
 所以最小覆盖中的点数一定大于等于 m/Δ 根据 König 定理，最大匹配中至少有 m/Δ 条边

5. 有一个街区如下图所示，其中所有街道都是直线段。为了在巷战中能控制所有的街道，需要在街口处修筑碉堡，其中一个碉堡可以控制与其关联的所有街道。问最少需要多少个碉堡？并给出一种具体修建的位置。(用图论方法解答)

解答.

考点：定理 62 (König 1931): 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数



显然，上图是二部图

可以很容易找到一个匹配 $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ ，大小为 4

也可以很容易找到一个覆盖 $\{2, 5, 6, 9\}$ ，大小为 4

定理 61: 设 M 是匹配， K 的覆盖，若 $|M| = |K|$ ，则 M 是最大匹配，且 K 是最小覆盖

所以该覆盖是最小覆盖

故原问题最少需要 4 个碉堡，分别修在 $\{2, 5, 6, 9\}$ 处即可

6. 假设 G 是阶数至少为 3 的简单连通图。若 G 包含割边, 则 G 一定不能 1-因子分解。

解答.

若 G 可以 1-因子分解, G 可表示为 K 个边不重的 1-因子的并, 即 $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$;

假设割边 e 在 M_1 中, 因为 M_1 和 M_2 边不重, 可以看作 1 个 2-因子, 而 2-因子的每个连通分支是圈, 与 e 是割边矛盾。

注记.

7. 证明: 完全图 K_{6n-2} 可以 3-因子分解。

解答. 证:

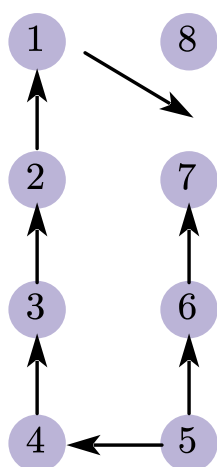
K_{2n} 可以分解为 $2n - 1$ 个边不重个 1-可因子的并。

K_{6n-2} 可以分解为 $6n - 3$ 个边不重个 1-可因子的并。

每 3 个边不重的 1-因子可以看作 1 个 3-因子, 则 K_{6n-2} 可以分解为 $2n - 1$ 个 3 因子的并。

8. 有 8 名研究生同学喜欢外出散步, 他们每人每天都和一位同学外出散步。试给出一种安排使得每名研究生在一个星期内都和不同的同学出行。(用图论方法解答)

解答. 以 8 名同学为顶点, 每两人连一条边, 得到的图为完全图 K_8 , 则问题转化为求 K_8 的完美匹配



$\{18 \ 27 \ 36 \ 45\}$
 $\{28 \ 31 \ 47 \ 56\}$
 $\{38 \ 42 \ 51 \ 67\}$
 $\{48 \ 53 \ 62 \ 71\}$
 $\{58 \ 64 \ 73 \ 12\}$
 $\{68 \ 75 \ 14 \ 23\}$
 $\{78 \ 16 \ 25 \ 34\}$

9. 设简单图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点, 其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大数目, 使得 G 保持其可平面性。

解答. $m \leq 3n - 6$

$$m = \frac{10 \times 4 + 8 \times 5 + (n - 10 - 8) \times 7}{2}$$

$$n \leq 34, \quad 34 - 10 - 8 = 16$$

10. 设 G^* 是具有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G 的对偶图, 已知 G 的边数为 10, 面数为 3, 求 G^* 的面数。

解答. 因为图 G 的边数为 m , 面数为 φ , 所以对偶图点数为 φ , 边数为 m 又因为对偶图一定是连通的, 根据欧拉公式: $n - m + \varphi = 2$
得: $\varphi^* = 9$

11. 经报道, 近年发现了一种由硼和氮元素构成的化学分子, 其分子结构呈球状。该分子中每个原子均有 3 个相邻的原子并以化学单键相连, 且分子结构中仅有 4 长圈和 6 长圈。试计算该分子中有多少个 4 长圈? (用图论

方法求解)

解答. 设 4 次面、6 次面个数分别为 f_4, f_6

$$n - m + f = 2, f = f_4 + f_6$$

$$4f_4 + 6f_6 = 2m$$

由握手定理 $3n = 2m$

所以 $f_4 = 6$