图论作业 3

2025 年 6 月 3 日

1 填空题

1. 完全图 K_{2n} 共有 ________ 个不同的完美匹配。

解答. $(2n-1)!!$

注记. 完全偶图 $K_{n,n}$ 共有 $n!$ 个不同的完美匹配。

2. 超方体 Q_6 的最小覆盖包含的点数为 ________。

解答. $\frac{2^6}{2} = 32$

注记. 推论：若 G 是 k 正则偶图 $(k>0)$，则 G 有完美匹配。

n 方体是 n 正则二部图, 有完美匹配，且完美匹配的边数为顶点数的一半.

3. 图 $K_{m,n}(m \leq n)$ 的最小覆盖包含的点数为 ________。

解答. m

4. 完全图 K_{60} 能分解为 _________ 个边不重的 1-因子之并。

解答. 59

注记. 定理 完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的。

K_{2n} 可以分解为 $2n-1$ 个边不重的 1-因子之并。

有没有，能不能，数一数

5. 完全图 K_{61} 能分解为 _________ 个边不重的 2-因子之并。

解答. 30

注记. 定理： K_{2n+1}是$2-$可因子化的,且为n个H圈的并。

若一个 2-因子是连通的，则它是一个 H 圈。

6. 假设 G 是具有 n 个点、m 条边、k 个连通分支的无圈图，则 G 的荫度为 _________。

解答. 1

注记. 无环图 G 分解为边不重的生成森林的最少数目，称为图 G 的荫度，记为 $\sigma(G)$。

7. 设图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删掉 _________ 条边才可能使其成为可平面图。

解答. 1

注记. 如果在不可平面图 G 中任意删去一条边所得的图为可平面图，则称 G 为极小不可平面图，比如 K_5和$K_{3,3}$。

8. 设连通平面图 G 具有 5 个顶点，9 条边，则其面数为 ________。

解答. $\varphi = 6, (5 - 9 + \varphi = 2)$

注记. 欧拉公式：

连通平面图：$n - m + \varphi = 2$

k 个分支的平面图：$n - m + \varphi = k + 1$

9. 若图 G 是 10 阶极大平面图，则其面数等于 ________。

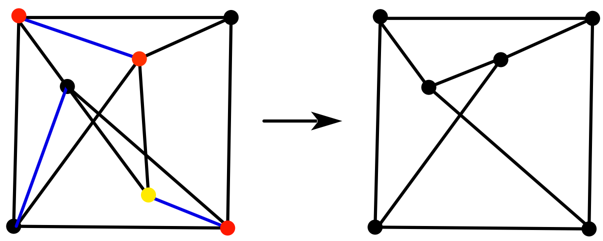
解答. 16

注记. 极大平面图:$m = 3n - 6, \varphi = 2n - 4$、、极大外平面图:$m = 2n - 3, n - 2$个外部面

10. 若图 G 是 10 阶极大外平面图，其内部面共有 ________ 个。

解答. 8

11. 请判断右图是否为可平面 (请填是或否)________。



解答. 否

删去图中蓝色的边后，收缩 2 度顶点（即黄点），可得 $K_{3,3}$

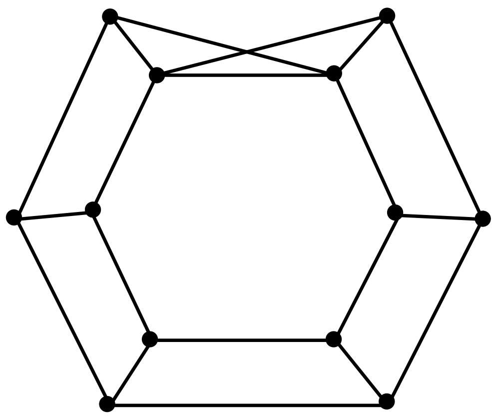
注记. 考虑：依次删除一些边。这些边满足去掉原图依旧非平面的边。直到所有的边都尝试过。我们将保留的非平面的边构成我们想要的子图。

定理 (库拉托夫斯基定理)：图 G 是可平面的当且仅当 G 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

定理 (瓦格纳定理)：简单图 G 是可平面图当且仅当 G 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构的初等收缩子图。

图 G 的初等收缩子图是对 G 进行一系列的删点、删边或者边收缩运算得到的图。

2025.5.30 考：判断该图是否是平面图。



2 不定项选择题

1. 关于非平凡树 T，下面说法错误的是 ( )

(A) T 至少包含一个完美匹配；

(B) T 至多包含一个完美匹配；

(C) T 的荫度可能大于 1；

(D) T 是只有一个面的平面图；

(E) T 的对偶图可能是简单图。

解答. ACE

(A)(B) 非平凡树 T 至多包含一个完美匹配。(C) 树的荫度是 1

(D)(E) 树只有外部面，它的对偶图肯定有自环。

2. 下列说法正确的是 ( )

(A) 三正则的偶图一定存在完美匹配；

(B) 三正则的哈密尔顿图一定存在完美匹配；

(C) 无割边的三正则图一定存在完美匹配；

(D) 有割边的三正则图一定没有完美匹配；

(E) 存在完美匹配的三正则图的边数一定是 3 的倍数。

解答. ABCE

(B) 哈密尔顿图无割边，无割边的 3 正则图有完美匹配；或者，3 正则图有偶数个顶点，H 图有偶圈，隔一条边去一条边就是完美匹配，可以 1-因子分解。

(E) 由 3n=2m 可得

注记. 推论 (Peterson): 每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配。

推论: 若 G 是 k 正则偶图 ($k > 0$)，则 G 有完美匹配。

无割边的三正则图一定存在完美匹配，但不一定可以 1 因子分解。

有割边的三正则图可能有完美匹配，但一定不可以 1 因子分解。

3. 下列说法正确的是 ( )

(A) 在偶图中，最大匹配包含的边数等于最小覆盖包含的点数；

(B) 任一非平凡正则偶图包含完美匹配；

(C) 任一非平凡正则偶图可以 1-因子分解；

(D) 偶度正则偶图可以 2-因子分解；

(E) 任意 k-正则偶图 ($k \geq 2$) 一定不包含割边。

解答. ABCDE

(A)König 定理

注记.

4. 下列说法中错误的是 ( )

(A) 完全图 K_{101} 包含 1-因子；

(B) 完全图 K_{101} 包含 2-因子；

(C) 完全图 K_{102} 包含 1-因子；

(D) 完全图 K_{102} 包含 2-因子；

(E) 图 G 的一个 1-因子对应 G 的一个完美匹配；

(F) 图 G 的一个 2-因子对应 G 的一个哈密尔顿圈。

解答. AF

(A) 图 G 存在完美匹配的一个必要条件是 G 的点数必然为偶数。

(B) 定理 图 K_{2n+1} 是 2-可因子化的，且为 n 个 H 圈的并。

(C) 定理 : 完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的，$2n-1$ 个不同的 1-因子

(E)1-因子的边集构成一个完美匹配。

(F) 连通的 2-因子对应 H 圈

5. 下列说法正确的是 ( )

(A) 超立方体 Q_n 一定可以 1-因子分解；

(B) 最大度小于 3 的偶数阶连通图一定可以 1-因子分解；

(C) 三正则的哈密尔顿图一定可以 1-因子分解；

(D) 无割边的 3 正则图一定可以 1-因子分解；

(E) 有割边的 3 正则图一定不可以 1-因子分解。

解答. ACE

注记.

(B) 非平凡树 T 至多包含一个完美匹配，不能 1-因子分解

(C) 定理: 具有 Hamilton 圈的 3 正则图是 1-可因子化的。反之不成立

6. 下列说法正确的是 ( )

(A) 完全图 K_{2n} 是 $2n-1$ 个完美匹配的并；

(B) 完全图 K_{2n} 是 n 个哈密尔顿圈的并；

(C) 完全图 K_{2n} 是 1 个完美匹配与 $n-1$ 个哈密尔顿圈的并；

(D) 若图 G 是 $2k$ 正则连通图，则 G 可以分解为 k 个 2-因子的并；

(E) 无割边的 3 正则图可以分解为一个 1-因子与一个 2-因子的并。

解答. ACDE

(B) 完全图 K_{2n+1} 是 n 个哈密尔顿圈的并；

注记.

7. 下列说法正确的是 ( )

(A) 完全图 K_n 的荫度为 $\lceil n/2 \rceil$，符号 $\lceil\ \rceil$ 代表向上取整；

(B) 完全二部图 Ka, b 的荫度为 $\lceil ab/(a+b-1) \rceil$，符号 $\lceil\ \rceil$ 代表向上取整；

(C) 非平凡树的荫度为 1；

(D) 具有 m 条边的 n 阶无环图可以分解为 m 个生成森林的并；

(E) 假设 H 是图 G 的子图，则 $\sigma(H) \leq \sigma(G)$。

解答. ABCDE

8. 下列说法错误的是 ( )

(A) 任何平面图都只有一个外部面；

(B) 简单平面图中一定有度数不超过 5 的顶点；

(C) 平面图的各个面的次数之和可能为奇数；

(D) 只有一个面的连通平面图一定是树；

(E) 存在一种方法，总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面。

解答. C

(B) 定理: 若 G 是简单平面图，则 $\delta(G) \leq 5$

(C) 定理: 设 G 是具有 m 条边的平面图，则 $\sum\limits_{f \in \Phi} \deg(f) = 2m.$

(D) 只有一个面的连通平面图一定无圈，因为圈有内部和外部

(E) 通过球极射影可将平面图的内部面转换为外部面。

9. 下列说法正确的是 ( )

(A) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割点；

(B) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割边；
(C) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含只属于一个面的边；
(D) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其每个面的边界均为圈；
(E) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其任意两个点在同一个圈上；
(F) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其任意两条边在同一个圈上。

解答. ABCDEF
(B)2 连通一定是 2 边连通的

10. 下列说法错误的是 ( )
(A) 若 (n,m) 图 G 是极大平面图且 $n \geq 3$，则 $m = 3n{-}6$；
(B) 若 (n,m) 图 G 是极大外平面图且 $n \geq 3$，则 $m = 2n{-}3$；
(C) 阶数至少为 3 的极大平面图的每个面均是三角形；
(D) 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形；
(E) 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图。

解答. D

注记. (A) 极大平面图：$n = 3n - 6, \varphi = 2n - 4$
(B) 极大外平面图：$m = 2n - 3,$ 有$n - 2$个内部面
(C) “极大平面图的三角形特征”，即每个面的边界是三角形。
(D) 定理: 设 G 是一个至少有 3 个点且所有点均在外部面上的外平面图，则 G 是极大外平面图当且仅当其外部面的边界是哈密尔顿圈，内部面是三角形。

11. 关于平面图 G 和其对偶图 G^* 的关系，下列说法中错误的是 ( )

(A) G^* 是连通平面图；

(B) G^* 的顶点数等于 G 的面数；

(C) G^* 的边数等于 G 的边数；

(D) G^* 的面数等于 G 的点数；

(E) $(G^*)^* \cong G$；

(F) 若 $G_1 \cong G_2$，则 $G_1^* \cong G_2{}^*$。

解答. DEF

(D)(E) 要求连通

(F) 同构的平面图可有不同构的对偶图

3 解答题

1. 设 G 是 $2k$ 阶简单图并且最小度 $\delta(G) \geq k \geq 1$。证明: G 存在完美匹配。

解答.

证:

$k = 1$ 时,G 是 2 阶简单图，只有一条边，则该边即为完美匹配；

$k = 2$ 时，$\delta(G) \geq 2$ 由 Dirac 定理,G 是哈密尔顿图，有哈密尔顿圈，在圈上隔一条边去一条边可取出完美匹配。

2. G 是一个偶数阶简单连通图且 $\Delta(G) = 2$，则 G 一定包含完美匹配。

解答.

$1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) = 2$

δ(G)=1 时，图 G 是路

δ(G)=2 时，图 G 是偶圈

3. 由于在考试中获得好成绩，6 名学生将获得下列书籍的奖励，分别是：代数学 (a)、微积分 (c)、微分方程 (d)、几何学 (g)、数学史 (h)、规划学 (p)、拓扑学 (t)。每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：

A：d, h, t；B：h, t；C：c, d, g, p；D：d, h；E：d, t；F：a, c, d。每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？(用图论方法求解)

解答.

考点： **定理 60 (Hall 1935)：** 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当 $|N(S)| \geq |S|$ 对所有 $S \subseteq X$ 成立

解： 以学生和书籍作为顶点，两个顶点之间连一条边当且仅当该名学生喜欢这本书，得到图记为 G，图 G 显然是一个二部图

原问题转换成判断图 G 中是否存在可以饱和学生顶点集的最大匹配

在学生顶点集中可以找到 4 个顶点 $S=\{A,B,D,E\}$，其邻集为 $N(S)=\{d,h,t\}$，满足 $|N(S)|<|S|$

由 Hall 定理知，图 G 中不存在可以饱和学生集合的最大匹配

因此，每名学生不都可以得到他喜欢的书

4. 假定 G 是具有 m 条边的简单二部图，顶点的最大度为 Δ。证明：G 包含一个至少有 m/Δ 条边的匹配。

解答. 证：

因为顶点的最大度为 Δ，所以一个顶点最多可以覆盖 Δ 条边

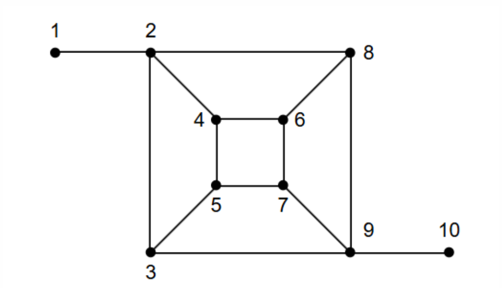
由于图 G 有 m 条边，所以最少需要 m/Δ 个顶点才能覆盖所有的边

所以最小覆盖中的点数一定大于等于 m/Δ 根据 König 定理，最大匹配中至少有 m/Δ 条边

5. 有一个街区如下图所示，其中所有街道都是直线段。为了在巷战中能控制所有的街道，需要在街口处修筑碉堡，其中一个碉堡可以控制与其关联的所有街道。问最少需要多少个碉堡？并给出一种具体修建的位置。(用图论方法解答)

解答.

考点： **定理 62 (König 1931)：** 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数



显然，上图是二部图

可以很容易找到一个匹配 $\{24, 35, 68, 79\}$，大小为 4

也可以很容易找到一个覆盖 $\{2, 5, 6, 9\}$，大小为 4

定理 61： 设 M 是匹配，K 的覆盖，若 $|M| = |K|$，则 M 是最大匹配，且 K 是最小覆盖

所以该覆盖是最小覆盖

故原问题最少需要 4 个碉堡，分别修在 $\{2, 5, 6, 9\}$ 处即可

6. 假设 G 是阶数至少为 3 的简单连通图。若 G 包含割边，则 G 一定不能 1-因子分解。

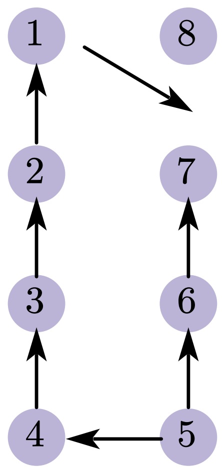
解答.
若 G 可以 1-因子分解, G 可表示为 K 个边不重的 1-因子的并, 即 $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$;
假设割边 e 在 M_1 中，因为 M_1 和 M_2 边不重，可以看为 1 个 2-因子，而 2-因子的每个连通分支是圈，与 e 是割边矛盾。
注记.

7. 证明：完全图 K_{6n-2} 可以 3-因子分解。

解答. 证:
K_{2n} 可以分解为 $2n-1$ 个边不重个 1-可因子的并。
K_{6n-2} 可以分解为 $6n-3$ 个边不重个 1-可因子的并。
每 3 个边不重的 1-因子可以看为 1 个 3-因子，则 K_{6n-2} 可以分解为 $2n-1$ 个 3 因子的并。

8. 有 8 名研究生同学喜欢外出散步，他们每人每天都和一位同学外出散步。试给出一种安排使得每名研究生在一个星期内都和不同的同学出行。(用图论方法解答)

解答. 以 8 名同学为顶点，每两人连一条边，得到的图为完全图 K_8，则问题转化为求 K_8 的完美匹配



{18	27	36	45}
{28	31	47	56}
{38	42	51	67}
{48	53	62	71}
{58	64	73	12}
{68	75	14	23}
{78	16	25	34}

9. 设简单图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点，其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大数目，使得 G 保持其可平面性。

解答. $m \leq 3n-6$

$m = \frac{10\times4+8\times5+(n-10-8)\times7}{2}$

$n \leq 34$，$34-10-8=16$

10. 设 G^* 是具有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G 的对偶图，已知 G 的边数为 10，面数为 3，求 G^* 的面数。

解答. 因为图 G 的边数为 m，面数为 φ，所以对偶图点数为 φ，边数为 m

又因为对偶图一定是连通的，根据欧拉公式：$n-m+\varphi=2$

得：$\varphi^*=9$

11. 经报道，近年发现了一种由硼和氮元素构成的化学分子，其分子结构呈球状。该分子中每个原子均有 3 个相邻的原子并以化学单键相连，且分子结构中仅有 4 长圈和 6 长圈。试计算该分子中有多少个 4 长圈？（用图论

方法求解)

解答. 设 4 次面、6 次面个数分别为 f_4,f_6

$n-m$十$f=2, f=f_4+f_6$

$4f_4+6f_6=2m$

由握手定理 $3n=2m$

所以 $f_4=6$