UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

Curso:
Modelos Matematicos de la Ciencia

Alumno:
Richard Aviles Ferro

Profesor:
FRANCISCO QUIROZ GARCIA

AÑO:
2023

TAREA 1

- Escribir una ecuacion diferencial que describa la situacion dada

1. La cantidad de bacterias en un cultivo crece en cada momento aun ritmo que es proporcional al numero de bacterias presentes.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde:

y: es la cantidad de bacterias presentes en el cultivo.

t es el tiempo

k es la constante de proporcionalidad que determina la tasa de crecimiento de las bacterias.

2. Cuando los factores ambientales imponen un limite superior sobre su tamaño, la poblacion crece a un ritmo que es conjuntamente proporcional a su tamaño actual y a la diferencia entre su limite superior y su tamaño actual.

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

donde:

y: es la poblacion.

t: tiempo.

k: la constante de porporcionalidad que determina la tasa de crecimiento.

M: el limite superior.

TAREA 2

En los problemas 1 a 8 establezca el orden de la ecuacion diferenca ordinaria dada. Determine si la ecuacion es lineal o no lineal, comparando con la ecuacion (6)

Una ecuacion diferencial se considera lineal si se puede escribir enla forma.

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y = f(x)$

donde

$a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$

son funciones de x,$y^{(n)}$

1. $(1-x)y''-4xy'+5y=cos(x)$

Podemos observar que contiene términos no lineales en y y sus derivadas. En particular, el término $(1-x)y''$ no se puede factorizar fuera de la derivada segunda, lo que lo hace no lineal en y y sus derivadas. De manera similar, el término $-4xy'$ tampoco es lineal en y ni en sus derivadas.

3. $t^5y^{(4)}-t^3y''+6y=0$

La EDO 3 es no lineal debido a que presenta un termino $t^5y^{(4)}$ que no es lineal en y ni en sus derivadas, la cual no se ajusta a la forma lineal de la ecuacion diferencial.

6. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{k}{R^2}$

Esta edo podemos reescribirlo de la forma

$y''=-\frac{k}{R^2}$ y esta es una funcion que no depende de y, por lo tanto es una ecuacion diferencial lineal de segundo orden.

7. $sin(\theta)y'''-cos(\theta)y'=2$

Podemos ver esto al observar que contiene términos no lineales en y y sus derivadas. En particular, el término $sin(\theta)y'''$ no es lineal en y ni en sus derivadas, ya que $sin(\theta)$ depende de θ y no puede ser factorizado fuera de la tercera derivada. Además, el término $-cos(\theta)y'$ tampoco es lineal en y ni en sus derivadas. Por lo tanto, la ecuación diferencial es no lineal.

TAREA 3

Comprobar que la familia de funciones indicada es una solucion.

21. $\frac{dP}{dt}=P(1-P); P=\frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}$

$$P'=\frac{(1+c_1e^t)(c_1e^t)-(c_1e^t)(c_1e^t)}{(1+c_1e^t)^2}\rightarrow P'=\frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}$$

$$\frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}=\frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}\times(1-\frac{c_1e^t}{1+c_1e^t})$$

$$\frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}=\frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}\times\frac{1+c_1e^t-c_1e^t}{1+c_1e^t}$$

$$\frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}=\frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}$$

$$\frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2} - \frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2} \to 0 = 0$$

$\therefore$ Es una solucion de la EDO

23. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0; y = c_1e^{2x} + c_2e^{2x}$

$$y' = 2c_1e^{2x} + 2c_2e^{2x}$$

$$y'' = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{2x}$$

$$4c_1e^{2x} + 4c_2e^{2x} - 4(2c_1e^{2x} + 2c_2e^{2x}) + 4(c_1e^{2x} + c_2e^{2x}) = 0$$

$$8c_1e^{2x} + 8c_2e^{2x} - 8c_1e^{2x} - 8c_2e^{2x} = 0 \to 0 = 0$$

Si es una solucion

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from sympy import symbols,sympify,lambdify


x,y = symbols('x y')
def campo_direcciones(f,listx,listy,fun=None):
    _, ax = plt.subplots()
    xr = max(list(map(abs,listx)))
    yr = max(list(map(abs,listy)))
    if xr>yr:
        may=xr
        xi, yi = np.meshgrid(np.linspace(-may-1, may+1, 25),
                             np.linspace(-may-1, may+1, 25))
    else:
        may=yr
        xi, yi = np.meshgrid(np.linspace(-may-1, may+1, 25),
                              np.linspace(-may-1, may+1, 25))

    fxy = lambdify((y,x),sympify(f))
    dy_dx_vec = list(map(fxy,yi,xi))
    dx = np.ones_like(dy_dx_vec)


    ax.quiver(xi, yi, dx, dy_dx_vec, dy_dx_vec, cmap='cool', scale=80)


    for y0, x0 in zip(listy, listx):

        xn = np.arange(-abs(x0),abs(x0)+5.1, 0.1)



        sol = odeint(fxy, y0, xn)
```

```
        ax.plot(xn, sol, label=f"y({x0})={y0}")



    ax.set(xlabel='x', ylabel='y', xlim=[-may-1, may+1], ylim=[-may-1, may+1])
    ax.axhline(0,color="gray")
    ax.axvline(0,color="gray")

    ax.set(title='Campo direccional y curvas solución', aspect='equal')
    ax.legend(loc='lower left')


    plt.show()
```

TAREA 4

a)

$$\frac{dy}{dx} = 1 - xy$$

$$\frac{dy}{dx} + xy = 1$$

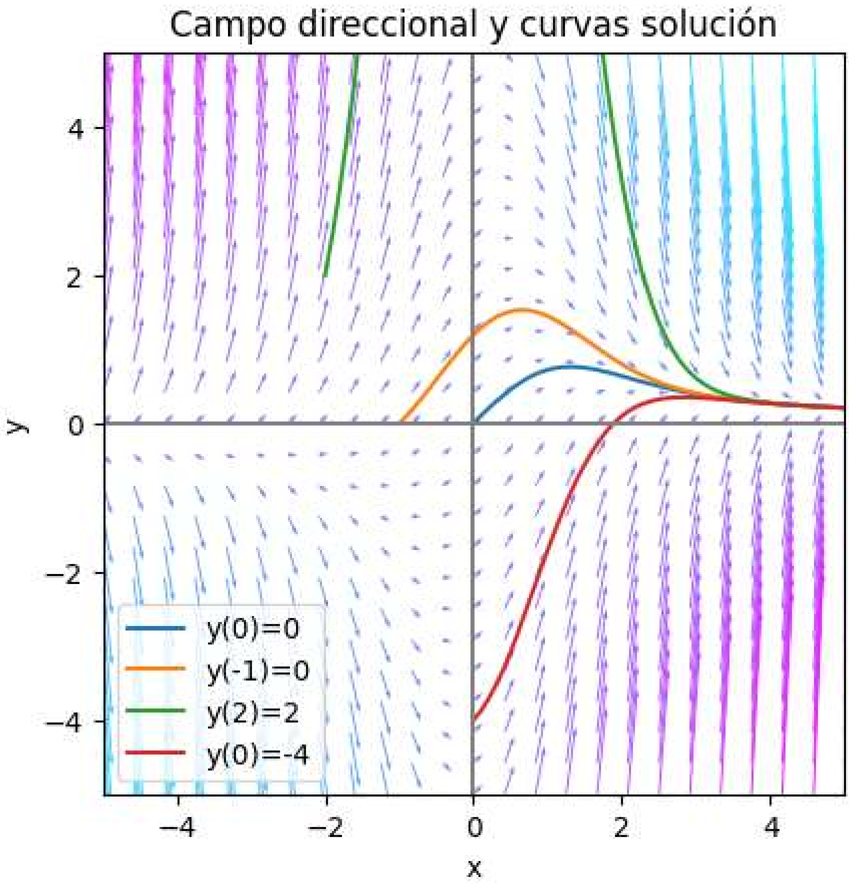
$$p(x) = x, q(x) = 1$$

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \rightarrow u(x) = e^{\int xdx} \therefore u(x) = e^{x}$$

$$u(x)y = \int u(x)q(x)dx$$

$$e^{x}y = \int e^{x}(1)dx \rightarrow y = 1 + \frac{C}{e^{x}}$$

In [ ]:
```
campo_direcciones('1-x*y',[0,-1,2,0],[0,0,2,-4])
```

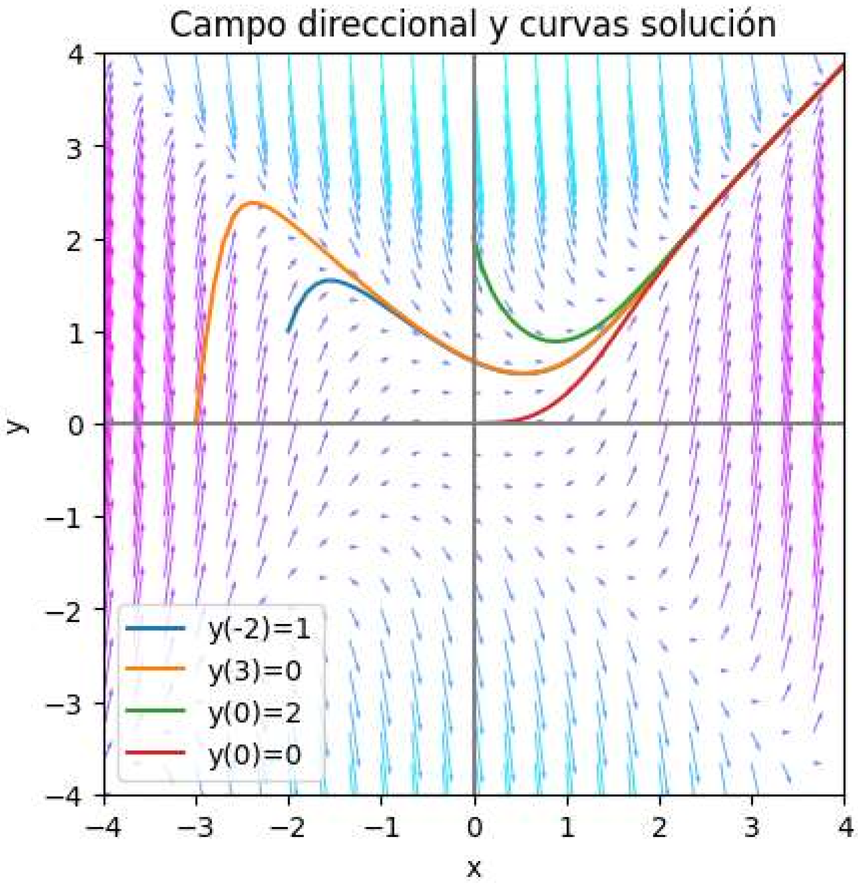


b)

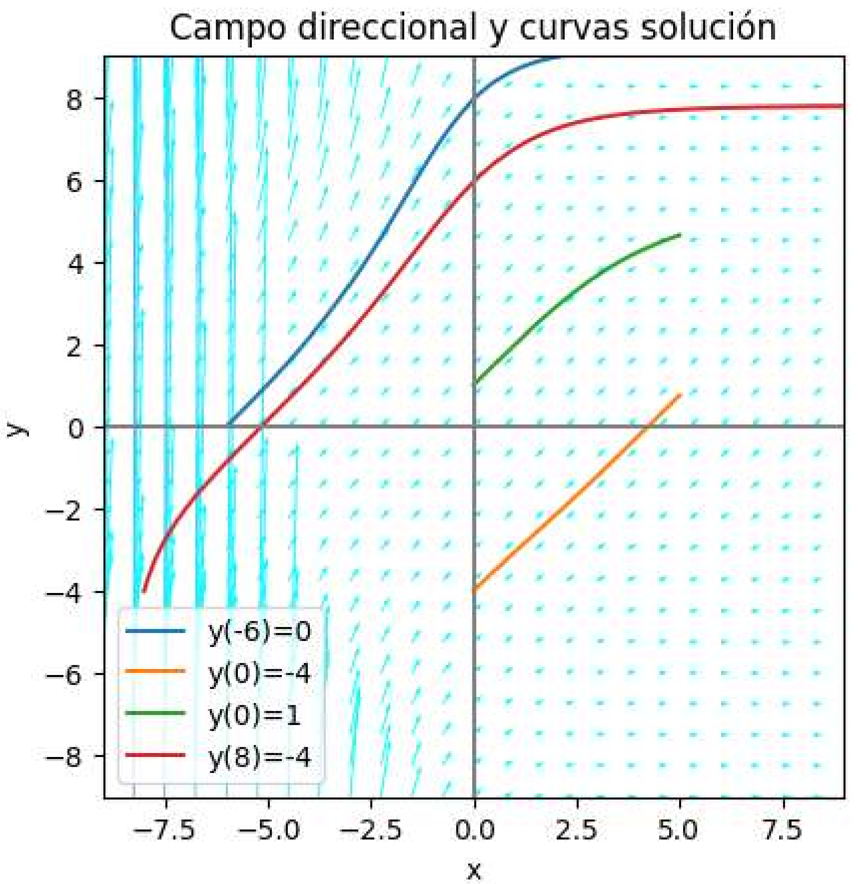
$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$$

$$dy + (x^2 - y^2)dx = 0 \rightarrow (x^2 - y^2)dx + dy = 0$$

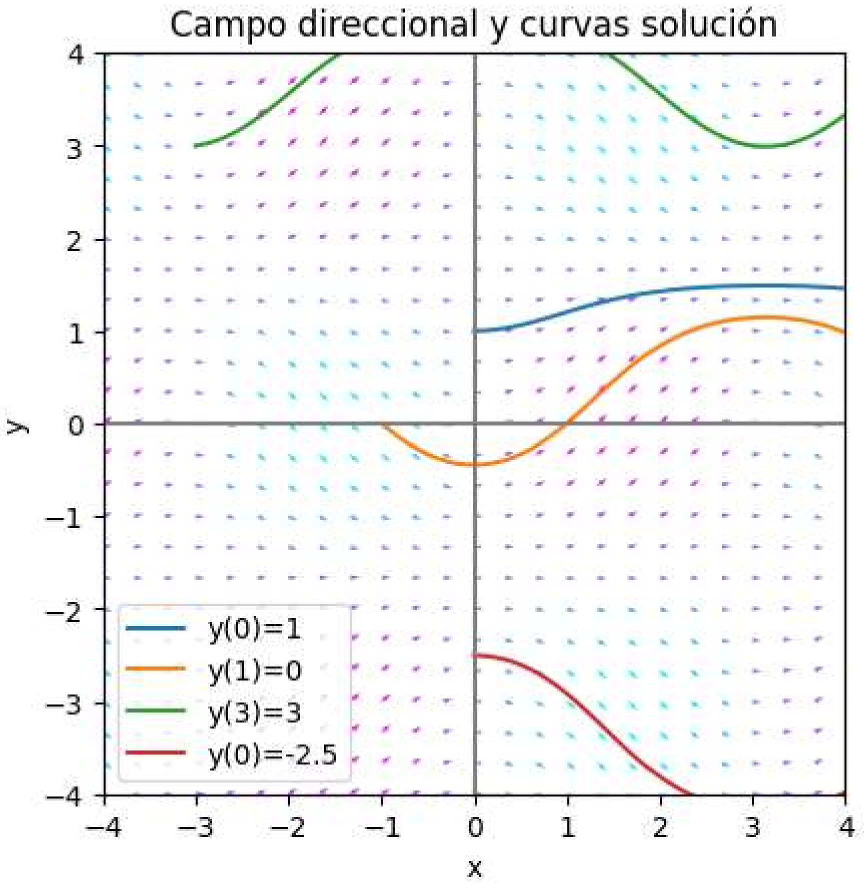
In [ ]:
```
campo_direcciones('x**2-y**2',[-2,3,0,0],[1,0,2,0])
```



In [ ]:
```
campo_direcciones('exp(-0.01*x*y**2)',[-6,0,0,8],[0,-4,1,-4])
```



In [ ]:
```
campo_direcciones('sin(x)*cos(y)',[0,1,3,0],[1,0,3,-5/2])
```



TAREA 5

9. $y\ln(x)\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$

Solucion

Separamos la edo.

$$x^2\ln(x)dx = \frac{(y+1)^2}{y}dy$$

$$\int x^2\ln(x)dx = \int \frac{(y+1)^2}{y}dy$$

$$u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2dx \to \int dv = \int x^2dx \to v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x) &= \frac{x^2\ln(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^3\ln(x)}{3} - \int \frac{x^2}{3}dx\end{aligned}$$

$$= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\int \frac{(y+1)^2}{y} dy = \int y dy + 2 \int dy + \int \frac{1}{y} dy$$

$$= \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y)$$

Reemplazando

$$\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{3} + C = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y)$$

$$\frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y) = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{3} + C$$

10. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

Solucion

$$\frac{1}{(2y+3)^2} dy = \frac{1}{(4x+5)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{(2y+3)^2} dy = \int \frac{1}{(4x+5)^2} dx$$

$$u = 2y + 3 \rightarrow du = 2dy : dy = \frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2u^2} du \rightarrow -\frac{1}{2u} \rightarrow -\frac{1}{4y+6}$$

$$-\frac{1}{4y+6} = -\frac{1}{16x+20} + C$$

11. $\csc(y)dx + \sec^2(x)dy = 0$

Solucion

$$\frac{1}{\csc(y)} dy = -\frac{1}{sec^2(x)} dx$$

$$\sin(y)dy = -\cos^2(x)dx$$

$$\int \sin(y)dy = -\int \frac{\cos(2x)+1}{2} dx = -\frac{1}{2} \int (\cos(2x)+1)dx$$

$$-\cos(y) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x + C\right]$$

$$\cos(y) = -\frac{\sin(2x)}{4} - x/2 + C$$

16. $\frac{dQ}{dt} = k(Q-70)$

Solucion

$$\frac{1}{Q-70}dQ = kdt$$

$$\int \frac{1}{Q-70}dQ = k\int dt$$

$$\ln(Q-70) = kt + C$$

$$Q - 70 = e^{kt+C}$$

$$Q = c_1e^{kt} + 70$$