

Colección Temas Selectos

Análisis dimensional y vectores

Teoría y práctica

Niveles básico - intermedio - avanzado

Física



Antonio Montalvo Correa





ANÁLISIS DIMENSIONAL Y VECTORES

Autor: Antonio de Jesús Montalvo Correa

© Titular de la obra: Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Editor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Diseño de portada: Edgar Refugio Aliaga, Gastón Ruiz Quiroz

Digitación y diagramación: Julian Pacheco Quincho

Graficación: Hugo Papa Trejo

Corrección de estilo: Alex Ortiz Alcántara

© Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Av. Alfonso Ugarte N.º 1426 - Breña. Lima-Perú. Telefax: 332-3786

Para su sello editorial Lumbres Editores

Página web: www.elumbres.com.pe

Primera edición: septiembre de 2012

Tiraje: 10 000 ejemplares

ISBN: 978-612-307-220-9

Registro del proyecto editorial N.º 315010511008G2

"Hecha el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú"

N.º 2012-08910

Prohibida su reproducción total o parcial

Derechos reservados D. LEG. N.º 822

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la
Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de septiembre de 2012
Calle Las Herramientas N.º 1873 - Lima-Perú. Teléfono: 336-5889

Índice

■ PRESENTACIÓN	7
■ INTRODUCCIÓN	9
■ ANÁLISIS DIMENSIONAL	
Magnitudes	11
Clasificación de magnitudes	11
Por su origen	11
Magnitudes fundamentales	11
Magnitudes derivadas	12
Por su naturaleza	12
Magnitudes escalares	12
Magnitudes vectoriales	12
Análisis dimensional	13
Problemas resueltos	17
Problemas propuestos	45
Claves	54
■ ANÁLISIS VECTORIAL	
Nociones previas	55
Vector	56
Representación gráfica de un vector	56
Elementos de un vector	57
Módulo del vector	57
Dirección del vector	57
Línea de acción	58
Representación cartesiana de un vector en el plano	59

Capítulo 1. Vectores	
1.1. Conceptos de vectores	61
Vectores colineales	61
Vectores paralelos	61
Vectores opuestos	62
Vectores iguales	62
Vectores coplanares	62
Vectores concurrentes	63
Vector unitario (\vec{u})	63
Vectores unitarios en el plano cartesiano	64
Componentes cartesianas de un vector en el plano	65
Multiplicación de un vector por un escalar	67
1.2. Operaciones con vectores	68
Métodos gráficos	69
Método del triángulo	69
Método del paralelogramo	70
Método del polígono	71
Métodos analíticos	72
Método del triángulo	73
Método del paralelogramo	74
1.3. Productos de vectores	75
Producto escalar	78
Propiedades	78
Producto vectorial	79
Problemas resueltos	85
Problemas propuestos	145
1.4. Aplicaciones	158
BIBLIOGRAFÍA	159

PRESENTACIÓN

La Asociación Fondo de Investigadores y Editores - Afined, promotora de Lumbreras Editores, presenta a la comunidad educativa el texto *Análisis dimensional y vectores*, perteneciente a una nueva serie de temas escogidos donde se realza el valor analítico y crítico en la enseñanza de las ciencias.

La nueva Colección Temas Selectos se caracteriza por brindar a los alumnos preuniversitarios contenidos dinámicos y precisos que afianzan sus conocimientos en temas específicos en los cursos de matemáticas, ciencias naturales y razonamiento matemático. De esta forma, Lumbreras Editores abre una nueva línea de publicaciones poniendo énfasis en el enfoque didáctico y cuidadoso en la relación teoría-práctica.

Hay temas principales en cada materia que necesitan de mayor profundización y análisis para la comprensión y resolución de los ejercicios, por eso nuestra editorial seguirá publicando nuevos títulos hasta completar una nutrida colección que permita mantener el reconocimiento y la confianza de los estudiantes, al manejar una teoría sucinta, directa, con ejercicios aplicativos y problemas resueltos y propuestos por niveles.

Lumbreras Editores quiere reconocer el esfuerzo conjunto que ha significado esta publicación, en la cual ha participado un grupo de profesionales de primer nivel, cuyo esfuerzo es un apoyo fundamental a nuestro anhelo de una educación científica y humanística integral. En este proceso, deseamos reconocer la labor del profesor Antonio Montalvo Correa, de la plana de Física de las academias Aduni y César Vallejo, por su labor en la elaboración del presente material, gracias a su valiosa trayectoria en la enseñanza preuniversitaria.

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

ANÁLISIS DIMENSIONAL

MAGNITUDES

Desde inicios de su historia, el hombre percibió la necesidad de desarrollar convenciones o signos para comunicarse con sus semejantes. Poco a poco al hombre primitivo le pareció insuficiente los sonidos onomatopéyicos o los signos, apareciendo así, progresivamente, el lenguaje. Sin embargo, le pareció tan necesario el lenguaje de las palabras como el lenguaje de medir o de la numeración. Pero las necesidades colectivas de trabajo, relación e intercambio creaban entre las personas lazos que obligaban a establecer equivalencias en las mediciones, es decir, hacer ciertas comparaciones de un objeto respecto a otro. En la actualidad, uno de los aspectos más importantes de la vida cotidiana del hombre es calcular, medir y comparar; entonces llamaremos magnitud a todo aquello que puede ser expresado cuantitativamente o, simplemente, a todo aquello que pueda ser medido.

CLASIFICACIÓN DE MAGNITUDES

POR SU ORIGEN

- Magnitudes fundamentales
- Magnitudes derivadas

Magnitudes fundamentales

Se denominan magnitudes fundamentales a aquellas magnitudes que sirven como base para fijar las unidades de un sistema de unidades, en la que se expresan las demás magnitudes.

Debemos tener en cuenta que cada una de las magnitudes fundamentales tienen una definición exacta.

Las magnitudes fundamentales son:

MAGNITUD FÍSICA BÁSICA	UNIDAD BÁSICA	SÍMBOLO DE LA UNIDAD
longitud	metro	m
tiempo	segundo	s
masa	kilogramo	kg
temperatura	Kelvin	k
intensidad de corriente	ampere	A
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

Magnitudes derivadas

Las magnitudes derivadas son aquellas magnitudes que se expresan en función de magnitudes fundamentales.

Entre las magnitudes derivadas tenemos:

- velocidad
- fuerza
- momento lineal
- trabajo
- aceleración
- presión
- energía

Ejemplo

Respecto al Sistema Internacional de Unidades, indique las proposiciones verdaderas o falsas según corresponda.

- I. El grado Celsius es unidad de una cantidad física fundamental.
- II. La cantidad de sustancia y la masa son la misma cantidad física fundamental.
- III. El newton es unidad de una cantidad física fundamental.

Resolución**I. Falsa**

Cuando se trata de la temperatura, la unidad básica es el grado Kelvin.

II. Falsa

Si bien es cierto que la cantidad de sustancia y la masa son magnitudes fundamentales, sin embargo, conceptualmente ambas son diferentes.

III. Falsa

El newton es una unidad que pertenece a una magnitud derivada denominada fuerza.

POR SU NATURALEZA

- Magnitudes escalares
- Magnitudes vectoriales

Magnitudes escalares

Es aquella magnitud que queda definida por un número real y una unidad de medida.

Ejemplo

masa = 4 kg ← unidad de medida
↑
número real

tiempo = 5 s ← unidad de medida
↑
número real

Magnitudes vectoriales

Es aquella magnitud que queda definida por un número real, una unidad de medida y una dirección.

Ejemplo

velocidad = -4 m/s ← unidad de medida
↑
dirección ↓
número real

fuerza = +20 N ← unidad de medida
↑
dirección ↓
número real

Otra forma de representar una magnitud vectorial puede ser, por ejemplo:

- velocidad = 15 m/s hacia el norte.
- fuerza = 200 N hacia arriba.

Nota

Un estudio más detallado de las magnitudes vectoriales lo veremos más adelante en el análisis vectorial.

ANÁLISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional es una herramienta muy importante que nos permite hacer mediciones o comparaciones ya sea de manera directa o indirecta. Gracias al análisis dimensional podemos relacionar las magnitudes fundamentales con las magnitudes derivadas, aprovechando el hecho de que las dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas.

Observación

El símbolo empleado para representar una ecuación dimensional son los corchetes [].

Ejemplos

- [aceleración], se lee ecuación dimensional de la aceleración.
[volumen], se lee ecuación dimensional del volumen.

Para determinar las ecuaciones dimensionales de las magnitudes derivadas, tomamos como base a las magnitudes fundamentales.

2. $[\text{área}] = [\text{base}][\text{altura}] = L \times L = L^2$

$$[\text{velocidad}] = \frac{[\text{distancia}]}{[\text{tiempo}]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

Veamos las ecuaciones dimensionales de algunas magnitudes derivadas.

MAGNITUD FÍSICA BÁSICA	ECUACIÓN DIMENSIONAL
área	L^2
volumen	L^3
velocidad	LT^{-1}
aceleración	LT^{-2}
fuerza	MLT^{-2}
trabajo	ML^2T^{-2}
potencia	ML^2T^{-3}
energía	ML^2T^{-2}
presión	$ML^{-1}T^{-2}$
impulso	MLT^{-1}
frecuencia	T^{-1}
carga eléctrica	IT
calor	ML^2T^{-2}
velocidad angular	T^{-1}

- Determine la ecuación dimensional del trabajo W .

$$W = \text{fuerza} \cdot \text{distancia}$$

Resolución

Piden determinar $[W]$, entonces:

$$[W] = [\text{fuerza}] \cdot [\text{distancia}]$$

$$\rightarrow [W] = (MLT^{-2}) \cdot (L)$$

$$\therefore [W] = ML^2T^{-2}$$

MAGNITUD FÍSICA BÁSICA	ECUACIÓN DIMENSIONAL
longitud	L
tiempo	T
masa	M
temperatura	θ
intensidad de corriente	I
cantidad de sustancia	mol
intensidad lumínosa	J

- 4 Determine la ecuación dimensional de la fuerza centrípeta \vec{F}_{cp} .

$$\vec{F}_{cp} = \frac{(\text{masa})(\text{velocidad})^2}{\text{radio}}$$

Resolución

Piden calcular $[\vec{F}_{cp}]$, entonces

$$[\vec{F}_{cp}] = \frac{[\text{masa}][\text{velocidad}]^2}{[\text{radio}]}$$

$$[\vec{F}_{cp}] = \frac{M(LT^{-1})^2}{L}$$

$$[\vec{F}_{cp}] = \frac{M(L^2T^{-2})}{L}$$

$$\rightarrow [\vec{F}_{cp}] = MLT^{-2}$$

5. Si A =área y B =volumen, calcule la dimensión de x , siendo $x = (A \cdot B)^4$.

Resolución

Piden $[x]$ entonces

$$[x] = ([A] \cdot [B])^4$$

$$[x] = (L^2 \cdot L^3)^4$$

$$\rightarrow [x] = L^{20}$$

6. Si la ecuación $x+d=z^3$ es dimensionalmente correcta, determine las dimensiones de z .

Considere que d es la distancia.

Resolución

Debemos tener presente que en toda ecuación dimensionalmente correcta, los términos que se suman o se restan deben tener la misma ecuación dimensional.

Por ejemplo, si la ecuación $A+B=C$ es dimensionalmente correcta, entonces se debe cumplir que $[A]=[B]=[C]$, es decir, ambas magnitudes deben presentar la misma ecuación dimensional (a esta igualdad se le denomina principio de homogeneidad).

En el ejemplo dado se tiene

$$x+d=z^3$$

$$\rightarrow [x]=[d]=[z]^3$$

Como d es la distancia

$$\rightarrow [d]=L$$

Además, como la ecuación dada es dimensionalmente correcta, entonces los otros términos deben tener las dimensiones de la distancia. Por lo que

$$[x]=L \wedge [z]^3=L$$

$$\rightarrow [z]=L^{-3}$$

7. Determine cuál o cuáles de las proposiciones son correctas.

I. $LT^{-2}-LT^{-2}=0$

II. $M^2+M^2=M^2$

III. $LM^{-2} \cdot TL^{-2}=M^{-2}TL^{-1}$

Resolución

I. Falsa

El hecho de restar las unidades de dos magnitudes iguales no quiere decir que resultará cero, entonces

$$LT^{-2}-LT^{-2}=LT^{-2}$$

II. Verdadera

De la misma manera la suma de dos magnitudes iguales resulta

$$M^2 + M^2 = M^2$$

III. Verdadera

Como se trata de la multiplicación de magnitudes, no es necesario que ellas sean del mismo origen

$$LM^{-2} \cdot TL^{-2} = M^{-2} TL^{-1}$$

3. Determine las dimensiones de R y de b , para que la ecuación

$$(Ra) + (bF)^2 = \log 2$$

sea dimensionalmente correcta.

Considere

a =aceleración y F =fuerza.

Resolución

Piden determinar $[R]$ y $[b]$

$$\rightarrow [R][a] + ([b][F])^2 = [\log 2]$$

Entonces

$$[R]LT^{-2} + [b]^2 (MLT^{-2})^2 = 1$$

Del principio de homogeneidad

- $[R]LT^{-2} = 1$

$$\rightarrow [R] = L^{-1}T^2$$

- $[b]^2 (MLT^{-2})^2 = 1$

$$\rightarrow [b] = M^{-1}L^{-1}T^2$$

9. Si se cumple que $A+B=\frac{1}{B}$, entonces señale la proposición verdadera y la falsa.
- I. A y B son magnitudes adimensionales.
 - II. A y B son razones trigonométricas.

*Resolución***I. Verdadera**

Para que esta igualdad se dé, ambas magnitudes deben cumplir con el principio de homogeneidad

$$[A]=[B]=\frac{1}{[B]}$$

Como podemos observar, ello solo se cumple si las magnitudes son números.

II. Falsa

No solo son razones trigonométricas, sino también pueden ser logaritmos o algún ángulo dado.

10. Indique las proposiciones verdaderas o falsas según corresponda.

- I. Solo se pueden sumar o restar cantidades físicas de la misma dimensión.
- II. Todos los términos de una ecuación física deben tener las mismas dimensiones.

Observación

La ecuación dimensional de todo ángulo, razón trigonométrica, logaritmo y, en general, de toda cantidad adimensional es la **unidad**.

- $[45^\circ] = 1$
- $[\log] = 1$
- $[\cos 30^\circ] = 1$

*Resolución***I. Verdadera**

Por ejemplo, sea la suma

$$5 \text{ m} + 3 \text{ m} = 8 \text{ m.}$$

Podemos observar que al sumar los metros, nos da como resultado metros. Sin embargo, sería falso decir que se cumple

$$5 \text{ m} + 3 \text{ s} = 8 \text{ m/s.}$$

Entonces, para realizar la adición o sustracción de cantidades físicas, estas deben ser de la misma magnitud.

II. Verdadera

Por ejemplo, sea la ecuación

$$v_f = v_0 + at,$$

donde v_f y v_0 son la rapidez final e inicial, a es la aceleración y t es el tiempo. Esta ecuación será dimensionalmente correcta si las unidades de cada término son las mismas.

11. Si la ecuación $E = \sqrt{2}kv^2$ es dimensionalmente correcta, ¿cuál es la dimensión de k ? (E es energía y v es velocidad).

Resolución

Determinemos cuáles son las dimensiones de la ecuación dada

$$[E] = [\sqrt{2}][k][v]^2$$

$$ML^2T^{-2} = 1 \cdot [k](LT^{-1})^2$$

$$ML^2T^{-2} = [k]L^2T^{-2}$$

$$\rightarrow [k] = M$$

12. La ecuación $d = \frac{v^x}{a(\operatorname{sen}\theta)}$ es dimensionalmente correcta.

Donde

d = distancia

a =aceleración

v =velocidad

¿Cuál es el valor de x ?

Resolución

Del problema

$$[d] = \frac{[v]^x}{[a][\operatorname{sen}\theta]}$$

$$L = \frac{(LT^{-1})^x}{LT^{-2} \cdot 1}$$

$$L^2T^{-2} = L^xT^{-x}$$

$$\rightarrow x=2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

NIVEL BÁSICO

PROBLEMA N.º 1

Si la ecuación dada
 $dN^{\text{sen}30^\circ} = P$

es dimensionalmente correcta, calcule las dimensiones de N .

Considere

d : densidad

P : presión

- A) $L^{-4}T^{-4}$ B) L^2T^{-2} C) LT^4
 D) L^4T^{-4} E) $L^{-4}T^4$

Resolución

Tener presente

$$\text{sen}30^\circ = 1/2$$

$$\rightarrow P = dN^{1/2}$$

Ahora

$$[P] = [d][N]^{1/2}$$

$$ML^{-1}T^{-2} = ML^{-3}[N]^{1/2}$$

$$L^2T^{-2} = [N]^{1/2}$$

$$\therefore [N] = L^4T^{-4}$$

PROBLEMA N.º 2

La energía cinética viene dada por

$$E_c = \frac{1}{2}m^x v^y.$$

Determine $x+y$, siendo m : masa y v : rapidez.

- A) 2 B) 5 C) 3
 D) 4 E) 1

Resolución

Dado que la energía cinética depende de la masa y de la rapidez, entonces

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2} \right] [m]^x [v]^y$$

$$ML^2T^{-2} = 1 \cdot M^x (LT^{-1})^y$$

$$ML^2T^{-2} = M^x L^y T^{-y}$$

Se observa que

- $M = M^x$

$$\rightarrow x = 1$$

- $L^2 = L^y$

$$\rightarrow y = 2$$

$$\therefore x + y = 3$$

CLAVE (D)

CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 3

Calcule el valor xy^y en la siguiente expresión dimensionalmente correcta

$$d = \sqrt{20}a^x t^y.$$

Donde

d : distancia

a : aceleración

t : tiempo

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

PROBLEMA N.º 4

De las siguientes proposiciones, determine cuál(es) de ellas son correctas.

I. $v = at$

II. $d = \frac{1}{2}at^2$

III. $a = \frac{v^2}{2d}$

Donde

a : aceleración

d : distancia

v : rapidez

t : tiempo

A) VFV B) VVF C) VVV

D) VFF E) FVV

Resolución**Resolución**

De la expresión dada

$$[d] = [\sqrt{20}][a]^x[t]^y$$

$$L = 1 \cdot (LT^{-2})^x(T)^y$$

$$L = L^x T^{y-2x}$$

se observa que

- $L = L^x$

- › $x = 1$

- $T^0 = T^{y-2x}$

$$0 = y - 2x$$

- › $y = 2$

$$\therefore xy^y = 2^2 = 4$$

I. Verdadera

$$[v] = [a][t]$$

$$LT^{-1} = (LT^{-2})(T)$$

$$\rightarrow LT^{-1} = LT^{-1}$$

II. Verdadera

$$[d] = \left[\frac{1}{2}\right][a][t]^2$$

$$L = 1 \cdot (LT^{-2})T^2$$

$$\rightarrow L = L$$

III. Verdadera

$$[a] = \frac{[v]^2}{[2][d]}$$

$$LT^{-2} = \frac{(LT^{-1})^2}{1 \cdot L}$$

$$\rightarrow LT^{-2} = LT^{-2}$$

CLAVE **D**

CLAVE **C**

PROBLEMA N.º 5

En la siguiente ecuación física

$$E=Av^2+BP,$$

donde E : energía, v : velocidad y P : presión, calcule $[A/B]$.

- | | | |
|---------------|--------------|------------|
| A) ML^{-3} | B) ML^2 | C) MLT^4 |
| D) $ML^{-3}T$ | E) ML^{-4} | |

Resolución

Se tiene que

$$E=Av^2+BP$$

Entonces

$$[E]=[A][v]^2+[B][P]$$

Podemos observar que tanto E como cada sumando debe tener las mismas dimensiones, por lo que

$$[E]=[A][v]^2=[B][P]$$

De esta manera

- $[E]=[A][v]^2$

$$ML^2T^{-2}=[A](LT^{-1})^2$$

$$ML^2T^{-2}=[A]L^2T^{-2} \rightarrow [A]=M$$

- $[E]=[B][P]$

$$ML^2T^{-2}=[B]ML^{-1}T^{-2}$$

$$\rightarrow [B]=L^3$$

$$\therefore [A/B]=\frac{[A]}{[B]}=\frac{M}{L^3}$$

$$\rightarrow [A/B]=ML^{-3}$$

CLAVE (A)

PROBLEMA N.º 6

Sabiendo que la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$H=aF-bp,$$

donde: F : fuerza y p : impulso, indique qué magnitud representa a/b .

- | | | |
|------------|----------------|-----------|
| A) energía | B) velocidad | C) tiempo |
| D) fuerza | E) aceleración | |

Resolución

Del problema

$$[H]=[a][F]-[b][p]$$

No deberíamos preocuparnos por las dimensiones de H ya que esta relación cumple con el principio de homogeneidad, entonces

$$[H]=[a][F]=[b][p]$$

$$\rightarrow [a][F]=[b][p]$$

$$[a]MLT^{-2}=[b]MLT^{-1}$$

$$\frac{[a]}{[b]}=\frac{MLT^{-1}}{MLT^{-2}}$$

$$\therefore \left[\frac{a}{b} \right] = T$$

CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 7

Dada la siguiente ecuación dimensionalmente correcta

$$A=P+\frac{1}{2}xv^2,$$

donde P : presión y v : velocidad, determine las unidades de x en el S. I.

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|----------------|
| A) kg/m^3 | B) kg/m^2 | C) kg |
| D) $\text{kg}\cdot\text{s}$ | E) $\text{kg}\cdot\text{s}/\text{m}$ | |

Resolución

$$[A] = [P] + \left[\frac{1}{2} \right] [x][v]^2$$

Del principio de homogeneidad

$$[A] = [P] = \left[\frac{1}{2} \right] [x][v]^2$$

Entonces

$$[P] = \left[\frac{1}{2} \right] [x][v]^2$$

$$ML^{-1}T^{-2} = 1 \cdot [x](LT^{-1})^2$$

$$\rightarrow [x] = ML^{-3}$$

Como

$$[x] = \frac{M}{L^3} = \frac{[\text{masa}]}{[\text{longitud}]^3}$$

sus unidades serán

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

CLAVE (A)

PROBLEMA N.º 8

Si la ecuación

$$x = a + bt + \frac{1}{2}ct^2$$

es dimensionalmente correcta, calcule $\left[\frac{ab}{c} \right]$.
x: distancia y t: tiempo

- A) T
C) LT^{-1}
D) $L^{-1}T$

- B) LT^{-2}
E) LT

Resolución

Dada la ecuación

$$[x] = [a] + [b][t] + \left[\frac{1}{2} \right] [c][t]^2$$

Del principio de homogeneidad

- $[x] = [a]$

$$\rightarrow [a] = L$$

- $[x] = [b][t]$

$$L = [b]T$$

$$\rightarrow [b] = LT^{-1}$$

- $[x] = \left[\frac{1}{2} \right] [c][t]^2$

$$L = 1 \cdot [c]T^2$$

$$\rightarrow [c] = LT^{-2}$$

Piden calcular

$$\left[\frac{ab}{c} \right] = \frac{[a][b]}{[c]} = \frac{L \cdot LT^{-1}}{LT^{-2}}$$

$$\therefore \left[\frac{ab}{c} \right] = LT$$

CLAVE (E)

PROBLEMA N.º 9

Si A representa el área, ¿cuáles serán las dimensiones de x e y, respectivamente?

$$7A\log 20^\circ = 2x^{1/2} + 5y^2 \operatorname{sen} 30^\circ$$

- A) $L; L^4$
B) $L^{-4}; L$
C) L, L^{-4}
D) $L^4; L$
E) $L^{-4}; L^{-4}$

Resolución

Dada la ecuación

$$[7][A][\log 20^\circ] = [2][x]^{1/2} + [5][y]^2[\sin 30^\circ]$$

Del principio de homogeneidad

- $[7][A][\log 20^\circ] = [2][x]^{1/2}$

$$1 \cdot L^2 \cdot 1 = 1 \cdot [x]^{1/2}$$

$$\rightarrow [x] = L^4$$

- $[7][A][\log 20^\circ] = [5][y]^2[\sin 30^\circ]$

$$1 \cdot L^2 \cdot 1 = 1 \cdot [y]^2 \cdot 1$$

$$\rightarrow [y] = L$$

CLAVE (D)

Entonces

$$a = b^x c^y \quad (I)$$

$$\rightarrow [a] = [b]^x [c]^y$$

$$LT^{-2} = (L^2)^x (T)^y$$

$$LT^{-2} = L^{2x} T^y$$

Por lo que

- $L = L^{2x} \rightarrow 1 = 2x$

$$x = 1/2$$

- $T^{-2} = T^y \rightarrow y = -2$

Reemplazando en la ecuación (I)

$$a = b^{1/2} c^{-2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{b}}{c^2}$$

CLAVE (D)**PROBLEMA N.º 10**Se tiene que $b = 20 \text{ m}^2$ y $c = 2s$. ¿Cuál sería la relación correcta para representar a la aceleración a ?

- A) $a = b/c$ B) $a = \sqrt{b}/c$ C) $a = \sqrt{b} \cdot c$
 D) $a = \sqrt{b}/c^2$ E) $a = b/c^2$

Resolución

Dato

- $b = 20 \text{ m}^2$
- $\rightarrow [b] = L^2$
- $c = 2s$
- $\rightarrow [c] = T$

Piden determinar la relación correcta para representar la aceleración a en términos de b y c .**NIVEL INTERMEDIO****PROBLEMA N.º 11**

Señale si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F):

- Una expresión dimensional es una cantidad física cuya representación se encuentra establecida mediante símbolos en el S. I.
- Se denomina ecuación dimensional a aquella ecuación que resulta al representar las ecuaciones involucradas, en una ley física mediante sus expresiones dimensionales.
- Una ecuación dimensional es homogénea cuando las unidades a ambos lados del signo igual son las mismas.

- A) VVF B) VFV C) FVV
 D) VVV E) FFV

**Resolución****I. Verdadera**

Sea A una cantidad física, entonces

$$[A] = L^x M^y T^z \dots,$$

donde $x; y; z$ son números y $L; M; T; \dots$; son símbolos que representan las cantidades físicas fundamentales en el Sistema Internacional.

II. Verdadera

Sean las ecuaciones

$$A=B \cdot C \text{ o } A=B+C,$$

entonces las ecuaciones dimensionales serán

$$[A] = [B][C] \text{ o } [A] = [B] + [C],$$

donde observamos que $[A]$; $[B]$ y $[C]$ son las dimensiones de las cantidades involucradas en una ecuación dada.

III. Verdadera

Sea la ecuación

$$A=B+C,$$

entonces esta ecuación será dimensionalmente correcta si se cumple que $[A]=[B]=[C]$.

CLAVE **D**

PROBLEMA N.º 12

Señale si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- I. Una longitud de $10 \mu\text{m}$ es igual a 0.01 nm .
- II. Cuando se tiene una ecuación física, todas las constantes son adimensionales.
- III. La cantidad de carga eléctrica tiene como expresión dimensional IT .

- A) VVV B) FVF C) VVF
 D) VFV E) FVV

Resolución

Veamos la siguiente tabla:

Prefijos para las unidades del S.I.

POTENCIA	PREFIJO	ABREVIATURA
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{-1}	deci-	d
10^1	deca-	da
10^3	kilo-	k
10^6	mega-	M
10^9	giga-	G
10^{12}	terá-	T
10^{15}	peta-	P

Algunas conversiones

$$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ litro} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$$

$$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$$

$$10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$$

I. Falsa

De la tabla dada

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Pero

$$1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$

$$\rightarrow 1 \text{ nm} = 10^{-3} (1 \mu\text{m})$$

$$\therefore 1 \mu\text{m} = 10^3 \text{ nm}$$

Entonces

$$10 \mu\text{m} = 10 \times 10^3 \text{ nm}$$

Donde F es la fuerza electrostática, d es la distancia y q_1 y q_2 son cantidades de carga.

A) $ML^3T^{-4}I^{-2}$ B) $MLT^{-2}I$ C) $ML^2T^{-2}I^3$

D) ML^3TI^{-2}

E) MLT/I

Resolución

Del problema

$$[F] = \frac{[k][q_1][q_2]}{[d]^2}$$

$$MLT^{-2} = \frac{[k](IT)(IT)}{L^2}$$

II. Verdadera

En una ecuación física, todas las constantes (números reales) son adimensionales.

$$MLT^{-2} = [k]I^2T^2L^{-2}$$

III. Verdadera

La intensidad de corriente viene dada por la siguiente expresión

$$\therefore [k] = ML^3I^{-2}T^{-4}$$

CLAVE (A)

$$I = \frac{Q}{t}$$

Donde

Q: cantidad de carga

t: tiempo

Entonces

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} \rightarrow [Q] = IT$$

PROBLEMA N.º 14

Dada la siguiente ecuación

$$S = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{3}{2}kT},$$

determine las dimensiones de k si S es adimensional; m: masa; v: rapidez; T: tiempo

PROBLEMA N.º 13

Determine la ecuación dimensional de la constante de coulomb k si se sabe que esta ley se encuentra expresada como

$$I = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

- A) $MLT^2\theta$
 B) $ML^2T^{-2}\theta^{-1}$
 C) $ML^2T^2\theta$
 D) $ML^2T^2\theta^{-2}$
 E) $ML^{-1}T^2\theta$

**Resolución**

De la ecuación dada

$$[S] = \frac{\left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2}{\left[\frac{3}{2}\right][k][T]}$$

$$1 = \frac{1 \cdot M \cdot (LT^{-1})^2}{1 \cdot [k]\theta}$$

$$\therefore [k] = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 15

Determine cuál será la expresión dimensional de una cantidad física cuyas unidades se expresan en joule por kilogramo Kelvin.

- A) $L^2T^{-2}\theta^{-1}$ B) $M^2L^2T^{-2}\theta$ C) $M^2L^2T^{-2}\theta^{-1}$
 D) $L^2T^{-2}\theta$ E) $L^{-2}T^2\theta$

Resolución

Sea la cantidad física A cuyas unidades es

$$A = \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\rightarrow A = \frac{[energía]}{[masa][temperatura]}$$

$$\rightarrow |A| = \frac{[energía]}{[masa][temperatura]}$$

$$|A| = \frac{ML^2T^{-2}}{M \cdot \theta}$$

$$\therefore |A| = L^2T^{-2}\theta^{-1}$$

CLAVE (A)

PROBLEMA N.º 16

La teoría nos indica que cuando un cuerpo se mueve con una velocidad cercana a la luz, su energía está dada por la siguiente ecuación

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^x c^y}$$

Si p es la cantidad de movimiento lineal y m es la masa del cuerpo, ¿cuál debe ser el valor de $x+y$ para que la ecuación sea dimensionalmente correcta?

- A) 0,5 B) 1 C) 2
 D) 6 E) 4

Resolución

Del problema

- El módulo de la cantidad de movimiento $p=mv$
donde m =masa y v =rapidez
 $\rightarrow [p]=[m][v]$
 $[p]=MLT^{-1}$
- c es la rapidez de la luz
 $[c]=LT^{-1}$

Entonces

$$\begin{aligned} [E]^2 &= [p]^2[c]^2 + [m]^x[c]^y \\ (ML^2T^{-2})^2 &= (MLT^{-1})^2(LT^{-1})^2 + M^x(LT^{-1})^y \\ M^2L^4T^{-4} &= M^2L^4T^{-4} + M^xL^yT^{-y} \end{aligned}$$

Del principio de homogeneidad

$$M^2L^4T^{-4} = M^xL^yT^{-y}$$

Entonces

- $M^2=M^x \rightarrow x=2$
- $L^4=L^y \rightarrow y=4$

$$\therefore x+y=6$$

CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 17

Si la expresión

$$W = \left(\frac{m}{t^2} \right)^a t^b v^c$$

es dimensionalmente correcta (m : masa, t : tiempo, v : velocidad y W : trabajo), calcule $a+b+c$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

De la expresión dada se tiene

$$[W] = \left(\frac{[m]}{[t]^2} \right)^a [t]^b [v]^c$$

$$ML^2T^{-2} = \left(\frac{M}{T^2} \right)^a \cdot T^b \cdot (LT^{-1})^c$$

$$ML^2T^{-2} = M^a T^{-2a} \cdot T^b \cdot L^c T^{-c}$$

$$ML^2T^{-2} = M^a L^c T^{b-c-2a}$$

Entonces

- $M=M^a$
→ $a=1$
- $L^2=L^c$
→ $c=2$
- $T^{-2}=T^{b-c-2a}$
• $-2=b-c-2a$
 $-2=b-2-2(1)$
∴ $b=2$

Por lo tanto $a+b+c=5$

PROBLEMA N.º 18

Determine las dimensiones de a y b si la ecuación

$$P = \frac{aF}{R} + bd^2,$$

es dimensionalmente correcta.

Considere

F =fuerza

P =presión

R =radio

d =densidad

A) $L^{-1}; ML^{-2}T^{-2}$

B) $L^{-1}; M^{-1}L^{-2}T^{-2}$

C) $L^{-1}; M^{-1}L^5T^{-2}$

D) $L^{-1}; M^{-1}L^{-5}T^{-2}$

E) $L^{-1}; M^{-1}L^{-7}T^{-2}$

Resolución

$$[P] = \frac{[a][F]}{[R]} + [b][d]^2$$

$$ML^{-1}T^{-2} = \frac{[a]MLT^{-2}}{L} + [b](ML^{-3})^2$$

$$ML^{-1}T^{-2} = [a]MT^{-2} + [b]M^2L^{-6}$$

Del principio de homogeneidad

- $ML^{-1}T^{-2} = [a]MT^{-2}$
→ $[a]=L^{-1}$
- $ML^{-1}T^{-2} = [b]M^2L^{-6}$
→ $[b]=M^{-1}L^5T^{-2}$

CLAVE (E)

CLAVE (C)

**PROBLEMA N.º 19**

Si la ecuación $Q^n P^2 + SP + R = \frac{Q+5\tan\beta}{v}$ es dimensionalmente correcta, en donde v es la rapidez, determine $[P]$.

- A) LT
B) $L^{-1/2}T^{1/2}$
C) $L^{-1/2}T$
D) $LT^{1/2}$
E) L^2

- A) $\text{kg} \cdot C \cdot s$
B) $\text{kg} \cdot A$
C) $\text{kg} \cdot \frac{C^2}{s}$
D) $\text{kg} \cdot \frac{A}{s}$
E) $\text{kg} \cdot \frac{s}{C}$

Resolución

$$[P] = \left([m] + \frac{[\alpha]}{[q]} \right)^{\operatorname{sen}(w\beta)}$$

Resolución

$$[Q]^n [P]^2 + [S][P] + [R] = \frac{[Q] + [S][\log\beta]}{[v]}$$

$$[Q]^n [P]^2 + [S][P] + [R] = \frac{[Q] + 1 \cdot 1}{LT^{-1}}$$

Se observa que $[Q]=1$

Entonces

$$1 \cdot [P]^2 + [S][P] + [R] = LT^{-1}$$

Usando el principio de homogeneidad se obtiene

$$[P]^2 = LT^{-1}$$

$$\Rightarrow [P] = L^{-1/2}T^{1/2}$$

CLAVE **(B)**

PROBLEMA N.º 20

Si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$P = \left(m + \frac{\alpha}{q} \right)^{\operatorname{sen}(w\beta)}$$

donde m : masa; q : cantidad de carga; w : rapidez angular; determine la unidad de α/q .

Para que la expresión sea dimensionalmente correcta

$$[m] = \frac{[\alpha]}{[q]}$$

$$M = \frac{[\alpha]}{IT}$$

$$\rightarrow [\alpha] = MIT$$

Además, $\operatorname{sen}(w\beta)$ debe ser un número por lo que

$$[w\beta] = 1$$

$$[w][\beta] = 1$$

$$\frac{1}{T}[\beta] = 1$$

$$\rightarrow [\beta] = T$$

$$\therefore \frac{[\alpha]}{[\beta]} = \frac{MIT}{T} = MI$$

$$MI = [\text{masa}][\text{amperio}]$$

Por lo tanto

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{ tiene como unidad } \text{kg} \cdot A$$

CLAVE **(B)**

PROBLEMA N.º 21

Dada la siguiente ecuación correcta

$$m \cdot n \cdot a = 4V \cdot \cos\left(\frac{3c}{F}\right),$$

determine la ecuación dimensional de ac .

Donde F : fuerza; V : volumen; m y n son masas.

- A) MLT
 B) $M^{-1}L^4T^{-2}$
 C) ML^2T^{-3}
 D) LT^3
 E) ML^2

Indique el tipo de movimiento que realiza el cuerpo y cuál de las expresiones, F , G o H , es dimensionalmente correcta.

$$F = \frac{A^2}{C} + B; G = \frac{C^2}{B} + A; H = \frac{B^2}{A} + C$$

- A) MRUV; H
 B) MRUV; F
 C) MRU; H
 D) MRU; F
 E) MRUV; G

Resolución

$$[m][n][a] = [4][v]\left[\cos\left(\frac{3c}{d}\right)\right]$$

$$M \cdot M \cdot [a] = 1 \cdot L^3 \cdot 1$$

$$\rightarrow [a] = L^3 M^{-2}$$

Además, $\frac{3c}{d}$ es un número, por lo que $\frac{[3][c]}{[d]} = 1$.

$$\rightarrow [c] = [d] = MLT^{-2}$$

$$\therefore [ac] = [a][c] = L^3 M^{-2} \cdot MLT^{-2}$$

$$\rightarrow [ac] = M^{-1}L^4T^{-2}$$

Resolución

$$[x] = -[A] + [B][t] - [C][t]^2$$

$$L = -[A] + [B]T - [C]T^2$$

Del principio de homogeneidad

$$L = [A] + [B]T = [C]T^2$$

Entonces

$$[A] = L$$

$$[B] = LT^{-1}$$

$$[C] = LT^{-2}$$

Ahora

- $F = \frac{A^2}{C} + B$

$$\rightarrow [F] = \frac{[A]^2}{[C]} + [B]$$

$$[F] = \frac{L^2}{LT^{-2}} + LT^{-1}$$

$$[F] = LT^2 + LT^{-1}$$

PROBLEMA N.º 22

Considere la siguiente ecuación del movimiento de un cuerpo

$$x = -A + Bt - Ct^2$$

(x : distancia, t : tiempo; además, A ; B ; C son constantes no nulas).



Se observa que la ecuación dimensional de F no es correcta ya que

$$LT^2 \neq LT^{-1}$$

- $G = \frac{C^2}{B} + A$

$$\rightarrow [G] = \frac{[C]^2}{[B]} + [A]$$

$$[G] = \frac{(LT^{-2})^2}{LT^{-1}} + L$$

$$[G] = LT^{-3} + L$$

De igual manera, G es dimensionalmente incorrecta.

$$LT^{-3} \neq L$$

- $H = \frac{B^2}{A} + C$

$$\rightarrow [H] = \frac{[B]^2}{[A]} + [C]$$

$$[H] = \frac{(LT^{-1})^2}{L} + LT^{-2}$$

$$[H] = LT^{-2} + LT^{-2}$$

∴ $[H]$ es correcta.

Además, como

$[H] = LT^{-2}$, estas son las dimensiones de la aceleración, por lo que el movimiento será un MRUV.

PROBLEMA N.º 23

Si las expresiones dadas

$$az = xy; x = \frac{my}{\sqrt{y^2 - v^2}}$$

son dimensionalmente correctas, determine la dimensión de z . Donde m , v y a son masa, velocidad y aceleración.

A) LT^{-1}

B) ML^{-1}

C) LT

D) MT^{-1}

E) MT

Resolución

$$[x] = \frac{[m][y]}{\sqrt{[y]^2 - [v]^2}}$$

Para que la parte del denominador sea correcta, las dimensiones de y y v deben ser iguales, por lo tanto $[y] = [v]$

$$[x] = \frac{M[y]}{\sqrt{[y]^2}}$$

$$\rightarrow [x] = M$$

Piden calcular z a partir de la ecuación

$$[a][z] = [x][y]$$

$$(LT^{-2})[z] = M \cdot LT^{-1}$$

$$\rightarrow [z] = MT$$

CLAVE **A**

CLAVE **E**

PROBLEMA N.º 24

La fuerza de rozamiento que experimenta una pequeña esfera dentro de un líquido está dada por la siguiente expresión

$$F = kn^a r^{2b} v^c,$$

donde k : constante, F : fuerza de rozamiento; r : radio, v : velocidad; n : viscosidad

$$\left(\text{viscosidad} = \frac{\text{masa}}{\text{longitud} \times \text{tiempo}} \right)$$

Calcule $a+b+c$.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

Resolución

Dato

$$[n] = \frac{[\text{masa}]}{[\text{longitud}][\text{tiempo}]}$$

$$[n] = \frac{M}{LT} \rightarrow [n] = ML^{-1}T^{-1}$$

Del problema

$$[F] = [k][n]^a[r]^{2b}[v]^{2c}$$

$$MLT^{-2} = 1 \cdot (ML^{-1}T^{-1})^a (L)^{2b} (LT^{-1})^{2c}$$

$$MLT^{-2} = M^a L^{2b+2c-a} T^{-a-2c}$$

Entonces

$$M = M^a \rightarrow a = 1$$

$$T^{-2} = T^{-a-2c} \rightarrow -2 = -a - 2c$$

$$-2 = -1 - 2c$$

$$c = 1/2$$

- $L = L^{2b+2c-a} \rightarrow 1 = 2b + 2c - a$

$$1 = 2b + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 25

Dada la siguiente ecuación dimensionalmente correcta

$$A = ve^{-Bt^2},$$

donde v : velocidad y t : tiempo, determine la dimensión de A/B .

- A) LT^{-1} B) LT C) $L^{-1}T$
 D) $L^{-1}T^{-1}$ E) L^2T^{-1}

Resolución

Como e es la base del logaritmo neperiano, entonces

$$[e] = 1$$

Del problema

$$Bt^2 = \text{número} \rightarrow [B][t]^2 = 1$$

$$[B]T^2 = 1$$

$$[B] = T^{-2}$$

Del problema

$$[A] = [v][e]^{-Bt^2}$$

$$[A] = (LT^{-1}) \cdot 1 = LT^{-1}$$

$$\therefore [A/B] = \frac{[A]}{[B]} = \frac{LT^{-1}}{T^{-2}} \rightarrow \left[\frac{A}{B} \right] = LT$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 26

Determine las dimensiones de S , si la expresión

$$S = Wvk(\pi - (\log b)^3)^4$$

es dimensionalmente correcta.

Donde W : trabajo; v : velocidad.

- A) ML^2T^4 B) ML^2T^{-2} C) MT^{-3}
 D) ML^3T^{-3} E) ML^2T^{-3}

Resolución

Para que pueda darse la diferencia $\pi - (\log k)^3$, $\log k$ debe ser un número; por lo tanto, k debe ser una constante adimensional.

De esta manera

$$[S] = [w][v][k](\pi - (\log b)^3)^4$$

$$[S] = ML^2T^{-2} \cdot LT^{-1} \cdot 1 \cdot 1$$

$$\rightarrow [S] = ML^3T^{-3}$$

CLAVE **D**

Resolución

$$[v] = \frac{[F]}{[k\eta]} \left[1 - e^{-\frac{(k\eta)t}{A}} \right]$$

$$\rightarrow LT^{-1} = \frac{MLT^{-2}}{[k\eta]} \cdot 1$$

$$\therefore [k\eta] = MT^{-1}$$

Para que la ecuación dada sea dimensionalmente

correcta $e^{-\frac{(k\eta)t}{A}}$ debe ser adimensional.

Por lo que

$\frac{k\eta t}{A}$ es un número

$$\rightarrow \left[\frac{k\eta t}{A} \right] = 1$$

$$\frac{[k\eta][t]}{[A]} = 1$$

$$\frac{MT^{-1} \cdot T}{[A]} = 1$$

$$[A] = M$$

$$\therefore [k\eta A] = M^2T^{-1}$$

CLAVE **D**

PROBLEMA N.º 27

Cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido, su rapidez varía de acuerdo a la siguiente expresión

$$v = \frac{F}{k\eta} \left[1 - e^{-\frac{(k\eta)t}{A}} \right],$$

(donde v : rapidez, F : fuerza, t : tiempo).

Determine la ecuación dimensional de $[k\eta A]$.

- A) ML B) $M^{-1}T^2$ C) M
 D) M^2T^{-1} E) MT^{-2}

PROBLEMA N.º 28

Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta

$$x = a \operatorname{sen}(bcx),$$

donde $[a] = L$ y $[c] = T$, determine la dimensión de b .

- A) TL B) L^{-1} C) $T^{-1}L^{-1}$
 D) L^{-2} E) TL^{-1}

Resolución

Dada la ecuación

$$[x] = [a][\operatorname{sen}(bcx)]$$

$$\rightarrow [x] = L \cdot 1 = L$$

Las dimensiones de una razón trigonométrica es la unidad, por lo que

$$[\operatorname{sen}(bcx)] = 1$$

$$\rightarrow bcx = \text{número}$$

$$[bcx] = 1$$

$$[b][c][x] = 1$$

$$[b]T \cdot L = 1$$

$$\therefore [b] = L^{-1}T^{-1}$$

Resolución

$$[a] = [R] \left[\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{vt}{\lambda}\right) \right]$$

Como

$$\left[\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{vt}{\lambda}\right) \right] = 1$$

$$\rightarrow \left[\frac{vt}{\lambda} \right] = [\text{número}] = 1$$

$$\frac{[v][t]}{[\lambda]} = 1$$

$$\frac{(LT^{-1})(T)}{[\lambda]} = 1$$

$$\therefore [\lambda] = L$$

Como podemos observar, λ representa una longitud.

CLAVE (C)CLAVE (A)**PROBLEMA N.º 29**

¿Cuál debería ser la unidad de λ para que la expresión dada sea dimensionalmente correcta?

A) $R \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{vt}{\lambda}\right)$

Donde

a: aceleración

v: rapidez

t: tiempo

A) km

B) kg

C) m/s^2 D) N/m^3 E) J/m^3 **PROBLEMA N.º 30**

Un cuerpo a una cierta temperatura irradia energía, la cual viene expresada mediante la expresión

$$H = E\sigma AT^\gamma$$

A: área

T: temperatura

H: energía por unidad de tiempo

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 k^4},$$

Calcule γ .

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

**Resolución**

Debemos tener en cuenta

- $H = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}}$

$$[H] = \frac{[\text{energía}]}{[\text{tiempo}]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$$

$$\rightarrow [H] = ML^2T^{-3}$$

- $[E] = [\text{número}] = 1$

- $[A] = L^2$

- $[T] = \theta$

- $[\sigma] = [5,67 \times 10^{-8}] \frac{[W]}{[m]^2 [k]^4}$

$$= [5,67 \times 10^{-8}] \frac{[\text{potencia}]}{[\text{distancia}]^2 [\text{temperatura}]^4}$$

$$\rightarrow [\sigma] = 1 \cdot \frac{ML^2T^{-3}}{L^2 \cdot \theta^4}$$

$$[\sigma] = MT^{-3}\theta^{-4}$$

Entonces

$$[H] = [E][\sigma][A][T]^{\gamma}$$

$$ML^2T^{-3} = 1 \cdot MT^{-3}\theta^{-4} \cdot L^2 \cdot \theta^{\gamma}$$

$$ML^2T^{-3} = MT^{-3}L^2\theta^{\gamma-4}$$

$$\therefore \theta^0 = \theta^{\gamma-4}$$

$$0 = \gamma - 4 \rightarrow \gamma = 4$$

CLAVE D

PROBLEMA N.º 31

Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta

$$\frac{M\cos\theta}{m(k^2 + P)}$$

determine la ecuación dimensional de C .

Donde

M : momento de una fuerza

m : masa

P : peso

A) ML B) MLT^{-1} C) ML^2

D) $M^{-1}L$ E) ML^{-1}

Resolución

Debemos tener en cuenta que el momento de una fuerza lo podemos escribir como

$$M = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

$$\rightarrow [M] = [\text{fuerza}] \times [\text{distancia}]$$

$$[M] = MLT^{-2} \cdot L$$

$$[M] = ML^2T^{-2}$$

Además

$$\text{peso} = \text{masa} \times \text{gravedad}$$

$$[\text{peso}] = [\text{masa}] \times [\text{gravedad}]$$

$$[P] = MLT^{-2}$$

De la ecuación dada

$$[C] = \frac{[M][\cos\theta]}{[M](k^2 + P)}$$

Para poder sumar $k^2 + P$, ambos sumandos deben ser de la misma magnitud.

Entonces

$$[C] = \frac{[M] \cdot 1}{[M][P]}$$

$$[C] = \frac{ML^2T^{-2} \cdot 1}{M \cdot MLT^{-2}}$$

$$\therefore [C] = M^{-1}L$$

CLAVE D

PROBLEMA N.º 32

Determine bajo qué condiciones la siguiente expresión

$$\frac{F(\theta+b)}{\sqrt{R}} + \frac{2R\sin\theta}{bc}$$

puede ser efectuada, siendo F : fuerza, R : radio y $\theta = \pi/6$.

- A) solo es posible si $b = \frac{\pi}{2}$
- B) solo es posible si b adopta las unidades de la aceleración y $b = \frac{\pi}{2}$
- C) solo es posible si b es una cantidad adimensional y $[b] = M^{-1}L^{-1/2}T^2$
- D) solo es posible si b y c son cantidades adimensionales
- E) solo es posible si la magnitud de b es igual a la de c

Resolución

Del principio de homogeneidad

$$\frac{[F][\theta+b]}{[R]^{1/2}} = \frac{[2][R][\sin\theta]}{[b][c]}$$

Para que esta igualdad sea dimensionalmente correcta, b debe ser una cantidad adimensional y que solo así podrá sumarse con θ .

$$\rightarrow \frac{[F]}{[R]^{1/2}} \cdot 1 = \frac{1 \cdot [R] \cdot 1}{1 \cdot [c]}$$

$$\frac{MLT^{-2}}{L^{1/2}} = \frac{L}{[c]}$$

$$\therefore [c] = M^{-1}L^{+1/2}T^2$$

CLAVE C

PROBLEMA N.º 33

Si la siguiente ecuación dimensional es correcta

$$y = \frac{kve^{avt}}{\sin(wt)} + d,$$

calcule $[vkw]$.

Donde

a : aceleración

E : energía

t : tiempo

d : densidad

e : base del logaritmo neperiano

- A) $M^{-1}L^{-2}T^{-3}$
- B) $M^{-2}L^{-1}T^{-2}$
- C) $M^{-1}T^{-2}$
- D) $ML^{-3}T^{-1}$
- E) $M^{-2}L^{-2}T$

Resolución

$$[y] = \frac{[k][v][e]^{(avt)}}{[\sin(wt)]} + [D]$$

Dado que la ecuación mostrada es dimensionalmente correcta, esta debe cumplir con el principio de homogeneidad por lo que

$$[y] = \frac{[k][v][e]^{(avt)}}{[\sin(wt)]} = [D]$$

$$\rightarrow \frac{[k][v][e]^{(avt)}}{[\sin(wt)]} = [D]$$

$$\frac{[k][v]}{1} \cdot 1 = ML^{-3}$$

$$\therefore [kv] = ML^{-3}$$

Además

- $[\sin(wt)] = 1 \rightarrow [wt] = [\text{número}] = 1$
- $[w][t] = 1$
- $[w]T = 1 \rightarrow [w] = T^{-1}$
- $\therefore [vkw] = ML^{-3}T^{-1}$

CLAVE D

**PROBLEMA N.º 34**

Sobre un cuerpo actúa una fuerza que depende del tiempo según la expresión

$$F = Ae^{at} \operatorname{sen}\left(\frac{bc+t}{d}\right). \text{ Determine } \left[\frac{abc}{Ad}\right].$$

Donde

t: tiempo

e: base del logaritmo natural

F: fuerza

- A) $M^{-1}L^{-1}T$ B) $M^{-1}LT^{-1}$ C) $ML^{-1}T^{-1}$
 D) $M^{-1}L^{-1}T^3$ E) MLT^{-3}

Entonces

$$\frac{[b][c]+[t]}{[d]} = \frac{T}{[d]} = 1$$

$$\rightarrow [d] = T$$

Además de la ecuación (I) se tiene

$$MLT^{-2} = [A] \cdot 1 \cdot 1 \rightarrow [A] = MLT^{-2}$$

Piden

$$\left[\frac{abc}{Ad}\right] = \frac{[a][bc]}{[A][d]} = \frac{T^{-1} \cdot T}{MLT^{-2} \cdot T}$$

$$\therefore \left[\frac{abc}{Ad}\right] = M^{-1}L^{-1}T$$

CLAVE **(A)**

Resolución

$$[F] = [A][e]^{at} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{bc+t}{d}\right) \right] \quad (\text{I})$$

Esta ecuación es dimensionalmente correcta si

- $[e]^{at} = 1$
- $[at] = [\text{número}] = 1$
- $[a][t] = 1$
- ∴ $[a] = T^{-1}$

PROBLEMA N.º 35

Si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$ABC - \frac{z}{x}D + BF = DC(1+AB)^{zx},$$

determine la ecuación dimensional de *B* y *D*.

Donde

C: trabajo

F: fuerza

- A) $LT^{-2}; 1$ B) $L^{-1}T^{-3}; 1$ C) $LT^2; 1$
 D) $MLT; 1$ E) $L; 1$

Resolución

Para que la ecuación dada sea dimensionalmente correcta, *A* y *B* deben ser adimensionales, es decir

$$[AB] = 1$$

La suma será correcta si

$$[b][c] = [t]$$

$$[b][c] = T$$

Del principio de homogeneidad

$$[ABC] = \left[\frac{z}{x} D \right] = [BF] = [DC(1+AB)^{zx}]$$

$$\rightarrow [ABC] = [DC(1+AB)^{zx}]$$

$$[AB][C] = [D][C](1+AB)^{zx}]$$

$$1 \cdot [C] = [D][C] \cdot 1$$

$$\therefore [D] = 1$$

También observamos

$$[ABC] = [BF]$$

$$[AB][C] = [B][F]$$

$$1 \cdot ML^2 T^{-2} = [B] \cdot ML T^{-2}$$

$$\therefore [B] = L$$

CLAVE (E)

Resolución

De la expresión dada, se tiene

$$\frac{Ax + By}{x + y^2} = (\sqrt{20})^2 \text{ (metros)}^2$$

$$\rightarrow \frac{[A][x] + [B][y]}{[x] + [y]^2} = [\sqrt{20}]^2 \text{ [metros]}^2$$

Para que ello sea correcto $[x] = [y]^2$, entonces

$$\frac{[A][y]^2 + [B][y]}{[y]^2} = l^2$$

De esta manera

- $[A][y]^2 = l^2[y]^2$

$$\rightarrow [A] = l^2$$

- $[B][y] = l^2[y]^2$

$$\rightarrow [B] = l^2 \cdot [y]$$

$$[B] = l^2 \cdot (ML T^{-2})$$

$$\therefore [B] = ML^3 T^{-2}$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 36

Basada la expresión

$$\sqrt{x + \frac{By}{y^2}} = \sqrt{20} \text{ metros}$$

dimensionalmente correcta, determine las dimensiones de B y A si $y = \sqrt{20}$ newton.

A) $MI^2 T^{-1}$ y ML^2

B) $MI^3 T^{-2}$ y L^2

C) $M^{-1} L^{-2}$ y L^2

D) $MI^{-2} L^2$ y L^2

E) $M^{-1} L^{-2} T^{-3}$ y L^{-2}

PROBLEMA N.º 37

Si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$P \cos 45^\circ = 4d^x v^y t^z, \text{ calcule } (x+y)^z.$$

Donde

P : potencia

d : densidad

v : velocidad

t : tiempo

A) 1

B) 9

C) 16

D) 25

E) 36

Resolución

$$\begin{aligned}[P][\cos 45^\circ] &= [4][d]^x[v]^y[t]^z \\ ML^2T^{-3} \cdot 1 &= (ML^{-3})^x(LT^{-1})^y(T)^z \\ ML^2T^{-3} &= M^x L^{y-3x} T^{z-y}\end{aligned}$$

Entonces

- $M=M^x \rightarrow x=1$
- $L^2=L^{y-3x}$
 $\rightarrow 2=y-3x$
 $2=y-3(1)$
 $y=5$
- $T^{-3}=T^{z-y} \rightarrow -3=z-y$
 $-3=z-5$
 $z=2$
 $\therefore (x+y)^z=(1+5)^2$
 $(x+y)^z=36$

CLAVE (E)**Resolución**

$$\begin{aligned}[k] &= \frac{[F]}{[A]} \left(\frac{[L_0]}{[L]-[L_0]} \right) \\ [k] &= \frac{MLT^{-2}}{L^2} \left(\frac{L}{L} \right)\end{aligned}$$

$$\rightarrow [k]=ML^{-1}T^{-2}$$

CLAVE (B)**PROBLEMA N.º 39**

Se sabe que la unidad de la viscosidad es el poise. Si esta viscosidad viene dada por

$$\mu = \frac{PTR^4}{8LV},$$

donde T es el tiempo necesario para que un volumen V de líquido recorra una longitud L de un tubo de radio R sometido a una presión P .

Determine las dimensiones de la viscosidad.

- A) $ML^{-1}T^{-2}$ B) $ML^{-1}T^{-1}$ C) $ML^{-2}T^{-2}$
D) $ML^{-1/2}T^{1/2}$ E) $ML^{-1/2}T^2$

PROBLEMA N.º 38

Si sobre una barra de longitud L_0 y de sección transversal A se le aplica una fuerza F , esta se alarga una longitud L . Determine las dimensiones de k si se cumple la siguiente relación

$$k = \frac{F}{A} \left(\frac{L_0}{L-L_0} \right).$$

- A) $ML^{-1}T^{-1}$
B) $ML^{-1}T^{-2}$
C) $ML^{-2}T^{-2}$
D) $ML^{-1}T^2$
E) $ML^{-1/2}T^{-1/2}$

Resolución

$$\begin{aligned}[\mu] &= \frac{[P][T][R]^4}{[8][L][V]} \\ \rightarrow [\mu] &= \frac{(ML^{-1}T^{-2})(T)L^4}{1 \cdot L \cdot L^3} \\ \therefore [\mu] &= ML^{-1}T^{-1}\end{aligned}$$

Entonces, sus unidades serán

$$\mu = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 40

Si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$\sqrt{h} = k(\operatorname{sen}4\theta)F^{a-1}W^{b-1}, \text{ calcule } b-a.$$

Donde

F : fuerza

W : trabajo

k : constante adimensional

Luego en (II)

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b-a = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

CLAVE (A)

- A) 1 B) 2 C) 1,5
D) 0,5 E) 2,5

NIVEL AVANZADO**Resolución**

Si la ecuación dada la elevamos al cuadrado y tomamos sus ecuaciones dimensionales, obtenemos

$$[h] = [k]^2 [\operatorname{sen}4\theta]^2 [F^{a-1}]^2 [W^{b-1}]^2$$

$$L = 1 \cdot 1 \cdot (MLT^{-2})^{2a-2} (ML^2T^{-2})^{2b-2}$$

$$L = M^{2a-2+2b-2} L^{2a-2+4b-4} T^{-4a+4-4b+4}$$

Entonces

- $L = L^{2a+4b-6}$
- $1 = 2a+4b-6$

$$7 = 2a+4b \quad (\text{I})$$

- $M^0 = M^{2a+2b-4}$

$$0 = 2a+2b-4$$

$$4 = 2a+2b$$

$$2 = a+b \quad (\text{II})$$

De las ecuaciones (II) en (I) obtenemos

$$b = \frac{3}{2}$$

PROBLEMA N.º 41

La presión (P) que ejerce un fluido en movimiento puede hallarse en cierto caso particular por

$$P = mv^{x\left(at-\frac{k}{s}\right)},$$

donde m : masa; t : tiempo; s : área; a : aceleración.

Determine las unidades de k .

- A) $\frac{m}{s}$ B) $\frac{m^2}{s}$ C) $m^3 \cdot s$
 D) $\frac{m^3}{s}$ E) $m \cdot s$

Resolución

$$[P] = [m][v]^{x\left(at-\frac{k}{s}\right)}$$

Esta ecuación será dimensionalmente correcta si $x\left(at-\frac{k}{s}\right)$ es un número

$$\rightarrow [x]\left([a][t]-\frac{[k]}{[s]}\right)=1$$

Donde

$$[\sigma][t] = \frac{[k]}{[s]}$$

$$(LT^{-2})T = \frac{[k]}{L^2}$$

$$\rightarrow [k] = L^3 T^{-1}$$

Por lo tanto, las unidades de k serán m^3/s .CLAVE D

Entonces

- $M=M^x$
 $\rightarrow x=1$
- $L^{-1}=L^{z-3x}$
 $\rightarrow -1=z-3x$
 $-1=z-3(1)$

$$z=2$$

- $T^{-2}=T^{-y}$
 $\rightarrow y=2$

$\therefore 2x+y+z=2(1)+2+2=6$

CLAVE B**PROBLEMA N.º 42**

La energía por unidad de volumen que transporta una onda que se propaga en una varilla está determinada por la ecuación $\mu = \frac{1}{2} \rho^x w^y A^z$, donde ρ es la densidad, w es la frecuencia angular de oscilación y A es la amplitud. Determine el valor de $2x+y+z$.

- A) 2 B) 6 C) 10
 D) -4 E) -8

Resolución

Dato

$$\mu = \frac{\text{energía}}{\text{volumen}}$$

$$\mu = \frac{[\text{energía}]}{[\text{volumen}]} = \frac{ML^2 T^{-2}}{L^3}$$

$$\rightarrow [\mu] = ML^{-1} T^{-2}$$

Ahora del problema

$$[\mu] = 1 \cdot [\rho]^x [w]^y [A]^z$$

$$ML^{-1} T^{-2} = (ML^{-3})^x (T^{-1})^y (L)^z$$

$$ML^{-1} T^{-2} = M^x L^{z-3x} T^{-y}$$

PROBLEMA N.º 43

La rapidez de la propagación (v) de las vibraciones acústicas en un medio determinado depende del módulo de Young (E) y de la densidad del medio (ρ) como se indica

$$v = E^x \rho^y.$$

Si E se expresa en N/m^2 , ¿a qué es igual $x-y$?

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 0,5 E) 1,5

Resolución

Dato

$$E = \frac{\text{newton}}{(\text{metro})^2}$$

$$E = \frac{[\text{fuerza}]}{[\text{longitud}]^2} = \frac{MLT^{-2}}{L^2}$$

$$\rightarrow [E] = ML^{-1} T^{-2}$$

Del problema

$$[v] = [E]^x [\rho]^y$$

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^x (ML^{-3})^y$$

$$LT^{-1} = M^{x+y} L^{-x-3y} T^{-2x}$$

Entonces

- $T^{-1} = T^{-2x}$

- $-1 = -2x$

$$x = 1/2$$

- $M^0 = M^{x+y}$

- $0 = x + y$

$$0 = \frac{1}{2} + y$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

- $x - y = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

CLAVE (B)

Resolución

Dato

- $N = \frac{2\pi}{\text{tiempo}}$

$$\rightarrow N = \frac{[2\pi]}{[\text{tiempo}]}$$

$$[N] = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

- $\tau = \text{fuerza} \times \text{distancia}$

$$[\tau] = [\text{fuerza}] \times [\text{distancia}]$$

$$[\tau] = (MLT^{-2})(L)$$

$$[\tau] = ML^2T^{-2}$$

Del problema

$$\tau = kN^x \rho^y D^z$$

Como el torque depende de N , ρ y D , entonces para que esta ecuación sea dimensionalmente correcta debemos encontrar los valores de los exponentes x ; y ; z .

De esta manera

$$[\tau] = [k][N]^x [\rho]^y [D]^z$$

$$ML^2T^{-2} = 1 \cdot (T^{-1})^x (ML^{-3})^y (L)^z$$

$$ML^2T^{-2} = T^{-x} M^y L^{z-3y}$$

PROBLEMA N.º 44

El torque (τ) en un acoplamiento hidráulico varía con las revoluciones por minuto (N) del eje de entrada, la densidad (ρ) del aceite y del diámetro (D) del acoplamiento. Determine una expresión para el torque. Considere k como una constante adimensional.

A) $kND\rho$

B) $k(DN\rho)^{3/2}$

C) $kN^2D^5\rho$

D) $kND^5\rho$

E) $kN^2D^4\rho^2$

Entonces

- $M = M^y \rightarrow y = 1$

- $T^{-2} = T^{-x} \rightarrow x = 2$

- $L^2 = L^{z-3y} \rightarrow 2 = z - 3y$

$$2 = z - 3(1)$$

$$z = 5$$

$$\therefore \tau = kN^2 \rho D^5$$

CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 45

La presión P de un fluido sobre una pared depende de la rapidez v , de su densidad D . Si su fórmula empírica es $P = \sqrt{v}v^x D^y$, determine la fórmula física correcta.

- A) $\sqrt{3}v^2D$ B) vD^2 C) $\sqrt{D}v$
 D) $\sqrt{2}v^2D$ E) vD

Resolución

$$[P] = [x]^{1/2} [v]^x [D]^y$$

Podemos observar que como x es un componente, entonces debe ser un número.

Por lo tanto

$$[P] = 1 \cdot [v]^x [D]^y$$

$$ML^{-1}T^{-2} = (LT^{-1})^x (ML^{-3})^y$$

$$ML^{-1}T^{-2} = M^y T^{-x} L^{x-3y}$$

Entonces

- $M = M^y$

$$\rightarrow y = 1$$

- $L^{-1} = L^{x-3y}$

$$\rightarrow -1 = x - 3y$$

$$-1 = x - 3(1)$$

$$x = 2$$

En la ecuación dada en el problema obtenemos

$$P = \sqrt{2}v^2D$$

PROBLEMA N.º 46

Dada la ecuación dimensionalmente correcta

$$vx = a^{\cos 60^\circ} + EP^2, \text{ calcule la dimensión de } \frac{P}{x^{1/2}}.$$

Donde

V : velocidad

E : energía

A) $M^{-1/2}L^{-1/2}T^{1/2}$

B) $M^{-1/2}L^{-1/3}T^{1/2}$

C) $M^{-1/2}L^{-1/2}T^{1/3}$

D) $M^{-3/2}L^{-1/2}T^{1/2}$

E) $M^{-3/2}L^{-1/2}T^{3/2}$

Resolución

$$[v][x] = [a]^{1/2} + [E][P]^2$$

Del principio de homogeneidad

$$[v][x] = [a]^{1/2} = [E][P]^2$$

Entonces

$$[v][x] = [E][P]^2$$

$$LT^{-1}[x] = ML^2T^{-2}[P]^2 \rightarrow \frac{[P]^2}{[x]} = \frac{LT^{-1}}{ML^2T^{-2}}$$

$$\frac{[P]^2}{[x]} = M^{-1}L^{-1}T$$

Sacando la raíz cuadrada

$$\frac{[P]}{[x]^{1/2}} = \sqrt{M^{-1}L^{-1}T}$$

$$\therefore \frac{[P]}{[x]^{1/2}} = M^{-1/2}L^{-1/2}T^{1/2}$$

CLAVE A

CLAVE D

PROBLEMA N.º 47

La ecuación de estado para un gas real viene dada por

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT,$$

donde

P : presión absoluta del gas

$$v = \frac{V}{n} = \text{volumen molar} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \right)$$

a y b son constantes que dependen del tipo del gas

R : constante universal de los gases

T : Temperatura absoluta del gas

Indique las proposiciones verdaderas (V) o falsas

(I) según corresponda

I) $[a] = [b]$

II) $[ab] = [RTv^2]$

III) $[b] = L^3 N^{-1}$

- A) FFV B) FFF C) FVF
 D) VFF E) FVV

Resolución

Dato

$$v = \frac{(\text{metro})^3}{\text{mol}}$$

$$|v| = \frac{[\text{metro}]^3}{[\text{mol}]}$$

$$|v| = \frac{L^3}{N} = L^3 N^{-1}$$

$$\bullet \quad R = \frac{J}{\text{mol} \cdot \text{k}}$$

$$R = \frac{(\text{energía})}{(\text{mol}) \cdot (\text{temperatura})}$$

$$\rightarrow [R] = \frac{[\text{energía}]}{[\text{mol}] \cdot [\text{temperatura}]}$$

$$[R] = \frac{ML^2 T^{-2}}{N \cdot \theta} = ML^2 T^{-2} N^{-1} \theta^{-1}$$

Del problema

$$\left([P] + \frac{[a]}{[v]^2} \right) ([v] - [b]) = [R][T]$$

$$[P][v] + \frac{[a]}{[v]} - [P][b] - \frac{[a][b]}{v^2} = [R][T]$$

Entonces

$$[P][b] = \frac{[a]}{[v]}$$

$$[b] ML^{-1} T^{-2} = \frac{[a]}{L^3 N^{-1}}$$

También

$$\frac{[a]}{[v]} = \frac{[a][b]}{[v]^2}$$

$$\rightarrow [b] = [v] = L^3 N^{-1}$$

Ahora

I. Falsa

$$[a] \neq [b]$$

Además, la constante de Planck viene dada por $h=E/f$, donde E es energía y f es frecuencia.

$$\rightarrow [h] = \frac{[E]}{[f]}$$

II. Verdadera

$$[ab] = [RTv^2]$$

Del principio de homogeneidad

$$\frac{[a][b]}{[v]^2} = [R][T]$$

$$\rightarrow [ab] = [RTv^2]$$

$$[h] = \frac{ML^2T^{-2}}{T^{-1}}$$

$$[h] = ML^2T^{-1} \quad (\text{I})$$

También

$$[c] = LT^{-1} \quad (\text{II})$$

III. Verdadera

$$[b] = L^3N^{-1}$$

Entonces, al multiplicar (I) y (II) se obtiene

$$[h][c] = (ML^2T^{-1})(LT^{-1})$$

$$[h][c] = ML^3T^{-2}$$

$$\rightarrow y = hc$$

CLAVE A**PROBLEMA N.º 48**

La magnitud y tiene por unidades $\text{kg m}^3\text{s}^{-2}$. Si h es la constante de Planck y c es la rapidez de la luz, ¿cuál de las siguientes alternativas es una ecuación dimensionalmente correcta?

- A) $y = hc$
- B) $y = hc^2$
- C) $y = hc^{-1}$
- D) $y = h^2c$
- E) $y = h^{-1}c^2$

PROBLEMA N.º 49

Haciendo uso del análisis dimensional deduzca una ecuación empírica para hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre un cuerpo con movimiento circular sabiendo que depende de la masa del cuerpo, de su rapidez lineal y del radio de curvatura.

- A) $kmvr$
- B) kmv/r
- C) kmr/v
- D) kmv^2/r
- E) kmr/v^2

Resolución

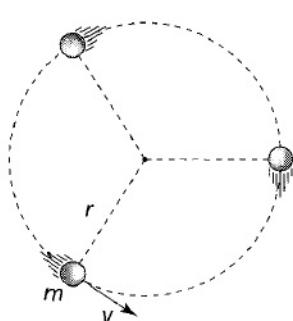
Dato

$$y = \text{kg m}^3\text{s}^{-2}$$

$$\rightarrow [y] = ML^3T^{-2}$$

Resolución

Dado el movimiento



En este caso se presenta la fuerza centrípeta que depende de R , m , v .

$$F_{cp} = (m; R; v)$$

Por lo tanto

$$F_{cp} = M^x R^y v^z \quad (I)$$

$$\rightarrow [F_{cp}] = [m]^x [R]^y [v]^z$$

$$MLT^{-2} = M^x L^y (LT^{-1})^z$$

$$MLT^{-2} = M^x L^{y+z} T^z$$

Entonces

- $M = M^x$
- $\rightarrow x = 1$
- $T^{-2} = T^{-z}$
- $\rightarrow z = 2$
- $L = L^{y+z}$
- $1 = y + z$
- $1 = y + 2$
- $y = -1$

Reemplazando en la ecuación (I)

$$F_{cp} = m R^{-1} v^2$$

$$\therefore F_{cp} = k \frac{mv^2}{r}$$

Donde k es una constante adimensional.

CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 50

Una cuerda se mantiene de forma horizontal debido a la acción de una fuerza F . Si se le hace oscilar verticalmente, se encuentra que el periodo de oscilación T depende de su longitud (L), de su masa por unidad de longitud (λ) y de la fuerza F aplicada.

Entonces, T es directamente proporcional a

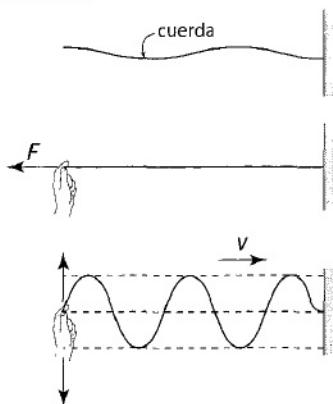
A) $L^{-1}(\lambda/F)^{1/2}$.

B) $L(F/\lambda)^{1/2}$.

C) $(\lambda L/F)^{1/2}$.

D) $L(F/\lambda)^{-1/2}$.

E) $\lambda L F^{-1/2}$.

Resolución

Dato

- $\lambda = \frac{\text{masa}}{\text{longitud}}$

$$\rightarrow [\lambda] = \frac{[\text{masa}]}{[\text{longitud}]}$$

$$[\lambda] = \frac{M}{L} = ML^{-1}$$

- [periodo] = T del problema

$$T = (L; \lambda; F)$$

$$\rightarrow T = L^x \lambda^y F^z \quad (\text{I})$$

Entonces

- $T = T^{-2z} \rightarrow 1 = -2z$

$$z = -1/2$$

- $M^0 = M^{y+z} \rightarrow 0 = y + z$

$$0 = y - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

- $L^0 = L^{x-y+z} \rightarrow 0 = x - y + z$

$$0 = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

En la ecuación (I)

$$T = L \lambda^{1/2} F^{-1/2}$$

Luego

$$[T] = [L]^x [\lambda]^y [F]^z$$

$$T = L^x (ML^{-1})^y (MLT^{-2})^z$$

$$T = L^{x-y+z} M^{y+z} T^{-2z}$$

$$\rightarrow T = L \left(\frac{\lambda}{F} \right)^{1/2}$$

$$\therefore T = L \left(\frac{F}{\lambda} \right)^{-1/2}$$

CLAVE (D)

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Determine las unidades de x si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$W = \frac{Fv^2}{xk}.$$

Donde

W : trabajo

F : fuerza

v : rapidez

k : constante numérica

- A) m B) $m \cdot s$ C) $m \cdot s^2$
 D) $m \cdot s^{-2}$ E) $m \cdot s^{-1}$

2. Calcule las dimensiones de A y B para que la ecuación sea dimensionalmente correcta:

$$x = At^3 + Bt.$$

Donde

x : longitud

t : tiempo

- A) $LT^3; LT^{-1}$ B) $LT^{-2}; LT^{-4}$ C) $LT^{-3}; LT^{-1}$
 D) $LT^{-1}; LT$ E) $LT; LT^{-3}$

3. Determine las dimensiones de c en la siguiente ecuación homogénea

$$A \log 20 = \sqrt{BC + v^2}.$$

Donde

B : área

v : rapidez

- A) LT B) $L^{-1}T^{-1}$ C) L^2
 D) T^2 E) T^{-2}

4. Dada la siguiente ecuación dimensionalmente homogénea

$$A = -BC \operatorname{sen}(wt + \phi),$$

determine $[A]$.

Considere que $[B] = [w]^2$ y que C es una longitud.

- A) LT^{-2} B) LT^{-1} C) L^2T
 D) $L^{-1}T^2$ E) $L^{-1}T^{-2}$

5. Determine las dimensiones de x en la ecuación

$$\frac{1}{V_1 + V_2} = \pi x^2 \cos 60^\circ,$$

donde V_1 y V_2 son velocidades.

- A) $M^{1/2}T^{1/2}$ B) $L^{1/2}T^2$ C) $M^{1/2}L^{1/2}$
 D) $L^{-1/2}T^{1/2}$ E) $L^{1/2}$



6. Calcule las unidades de x en el S. I.

$$x = \frac{2\pi^2 L^2 (L - R) \sin \theta}{t^2 A}$$

Donde

L y R : longitudes

t : tiempo

A : área

A) m/s

B) s^{-2}

C) m/s^2

D) m^2

E) es adimensional

7. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta, calcule el valor de $x+y$.

$$L^4 = \frac{(R_1 \sin \theta)^x + (R_2 \sin \beta)^y}{(R_1 \cos \theta)^2 - (R_2 \cos \beta)^2}$$

$L; R_1; R_2$ son distancias

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

8. Determine las unidades de x en la ecuación

$$H = \sqrt{\frac{4x}{m \sin \theta} + \frac{g}{d}}$$

Donde

g : aceleración de la gravedad

m : masa

d : longitud

- A) kg/s B) $\text{kg} \cdot \text{s}$ C) $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
D) kg s^3 E) $\text{kg} \cdot \text{s}^2$

9. Dada la ecuación dimensionalmente correcta

$$P = \left(\frac{b}{h} + ah \right)^2,$$

donde P se mide en kg/m^3 y h se mide en metros, calcule $[a/b]$.

- A) L B) L^2 C) L^3
D) L^{-1} E) L^{-2}

10. Cuando un cuerpo se encuentra en un líquido ya sea sumergido total o parcialmente, experimenta una fuerza denominada empuje (E), lo cual se puede representar como $E = \rho^x g^y v^z$, siendo ρ densidad, g la aceleración de la gravedad y v volumen.

Calcule $(x+y+z)$.

- A) 1 B) $1/2$ C) 2
D) 3 E) $3/2$

NIVEL INTERMEDIO

11. Determine las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F).

- I. Si en una ecuación que es dimensionalmente correcta a uno de sus términos se le multiplica por $\log(a\beta)$, esta deja de ser dimensionalmente correcta.
II. La expresión $\sin(a\beta)$, donde a es la aceleración, es adimensional.
III. Dada la ecuación
 $y = A \sin(wt) + B \sin(wt)$
se podría decir que A y B tienen la misma dimensión.

- A) FVF B) FFV C) FFF
D) FVV E) VVV

12. Dada la ecuación

$$R = k_1(A_1 - A_2) + k_1 k_2,$$

se puede afirmar que

- A) A_1 y A_2 son adimensionales siempre y cuando k_2 sea la aceleración.
- B) R es un número.
- C) Si R es un número, es porque k_1 también es un número.
- D) Si k_2 es un número, entonces las unidades de R serán las mismas que k_1 .
- E) R es la aceleración.

13. Una de las leyes establecidas por Newton es la ley de gravitación universal, la cual viene dada por la siguiente ecuación

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{d^2},$$

donde

F : fuerza

m_1 y m_2 : masas

d : distancia

Calcule las dimensiones de G .

- A) LMT^{-1}
- B) L^3MT^{-2}
- C) L^2MT^{-2}
- D) $L^3M^{-1}T^{-2}$
- E) $L^3M^{-1}T^{-1}$

14. Calcule $x+y+z$, si

$$(\log 12)^2 \text{ ergios} = \sqrt[x-1]{A} \cdot \sqrt[B^y]{C^z}$$

Donde

A : aceleración

B : masa

C : velocidad

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

15. Determine las dimensiones de x si la ecuación dada es dimensionalmente correcta.

$$Rx + Z + 2\sqrt{5} \text{ cm} = 4\pi^2 A \cos(2\pi RZ)$$

- A) L
- B) L^2
- C) L^3
- D) L^{-1}
- E) L^{-2}

16. En la siguiente ecuación dimensionalmente correcta

$$E = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{C}\right)^2}}$$

donde: m : masa y C la rapidez de la luz.
Determine las dimensiones de E .

- A) MLT^{-1}
- B) ML^2T^{-1}
- C) M^2LT^{-1}
- D) MLT
- E) $ML^{-1}T$

17. Cuando se hizo una investigación en un laboratorio, un profesor encontró la siguiente relación

$$F \cdot d = 4\pi mx^2,$$

donde F es la fuerza, d la longitud y m la masa. Respecto al análisis dimensional, determine la cantidad física que podría representar x .

- A) tiempo
- B) aceleración
- C) rapidez
- D) distancia
- E) trabajo



18. Dada la expresión dimensionalmente correcta $K = \frac{\cos\pi/6 + \gamma M}{5 + P\beta}$, determine las dimensiones de γ y β .

Donde

M : momento de una fuerza

P : peso de un cuerpo

- A) $M^{-1}L^{-2}T^2; M^{-1}L^{-1}T^2$
- B) $MLT^{-2}; MLT^{-2}$
- C) $M^{-1}L^{-2}T^2; M^{-1}LT^{-2}$
- D) $MLT^{-2}; ML^{-1}T^{-2}$
- E) $M^{-1}L^{-2}T^2; MLT^{-2}$

19. El ángulo de torsión (θ) de un eje de sección circular de diámetro D , sometido a un torque τ , viene dado por

$$\theta = \frac{\tau D}{GJ}.$$

Determine las dimensiones de J si G tiene las mismas dimensiones que la presión.

- A) L^4T
- B) L^2T^{-2}
- C) L^3T^{-1}
- D) L^3M
- E) L^4

20. De la siguiente relación

$$V^2 = V_0^2 + 2g^x R^y \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

calcule $x+y$, si se sabe que V y V_0 son la rapidez, h es la altura, R es el radio y g la aceleración de la gravedad.

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

21. La rapidez de una onda en la superficie de un líquido en un canal cuya profundidad es H viene dada por

$$V^2 = \left(\frac{k\sigma}{d} + \frac{g}{\sigma} \right) (\sigma\lambda) \tan\alpha. \text{ Determine las dimensiones de } \sigma.$$

Donde

k : fuerza / longitud

g : aceleración de la gravedad

d : densidad

λ : longitud de onda

- A) ML^2
- B) LT^{-2}
- C) L
- D) MLT^{-1}
- E) L^{-1}

22. En la ecuación

$$at_1 = (at_2 + bd\operatorname{tan}\theta)(1+b)^{1/2}, \text{ calcule las dimensiones de } a.$$

Donde

t_1 y t_2 : tiempo

d : distancia

- A) LT
- B) LT^{-1}
- C) LT^2
- D) LT^{-2}
- E) L^2T

23. El periodo de oscilación de un M.A.S. viene dado por

$$T = 2\pi m^x k^y$$

m : masa

k : constante elástica (N/m)

Calcule ($x+y$).

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

24. Si la ecuación de estado para algunos gases reales es

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \frac{k}{273}, \text{ calcule } [a/b].$$

Donde

P: presión

V: volumen

k: temperatura

A) ML^5T^{-2}

B) $M^2L^5T^{-2}$

C) ML^2T^3

D) MLT

E) ML^2T^{-2}

25. La rapidez de un líquido en un tubo cilíndrico a una distancia r del eje central es

$$v = \frac{\Delta P}{4nL} (R^2 - r^2). \text{ Calcule la dimensión de } n.$$

Donde

P: presión

R y r: radios

L: longitud

A) ML^2T^{-1} B) $ML^{-1}T^{-2}$ C) $ML^{-1}T^{-1}$

D) $M^2L^{-1}T^{-1}$ E) ML^2T^{-2}

26. En un condensador, la capacitancia eléctrica (C) se define como

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2},$$

donde

Q: cantidad de carga

V_1 y V_2 : potencia eléctrica (Joule / Coulomb).

Determine [C].

A) $M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

B) $M^{-1}L^2T^{-4}I$

C) $M^{-1}L^{-2}T^{-4}I^2$

D) $M^{-1}L^{-2}T^{-4}I^{-2}$

E) $M^{-1}L^2T^{-4}I^{-2}$

27. El calor absorbido o disipado por un cuerpo cuando este varía su temperatura viene dado por

$$Q = mCeAT$$

donde

Q: calor, cuya unidad es la caloría (1 Joule = 0,24 calorías)

T: temperatura

M: masa

Calcule [Ce].

A) $L^2T^{-2}\theta$ B) $L^2T^{-2}\theta^{-1}$ C) $L^2T^2\theta$

D) $L^2T^{-2}\theta^2$ E) $L^2T^{-2}\theta^2$

28. ¿Cuál será la ecuación dimensional de H

$$H = \frac{m\omega^2 A \cos \omega t}{\sqrt{F^2 f^2 \sin \beta}} ?$$

Donde

m: masa

F: fuerza

ω : frecuencia angular (rad/s)

A: amplitud

f: frecuencia

A) T

B) T^2

C) T^{-1}

D) T^{-2}

E) es adimensional



29. Cuando un cuerpo es abandonado desde una cierta altura h , luego de un intervalo de tiempo adquiere una rapidez v . Si la aceleración de la gravedad viene dada por

$$g = \frac{1}{2} h^x v^y,$$

calcule y .

- A) $1/2$ B) 1 C) 2
 D) $1/4$ E) 3

30. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta

$$F = ak^{cx} + b \operatorname{sen}(x^2 d + \pi), \text{ determine } \left[\frac{ac}{d} \right].$$

Donde

F : fuerza

k : constante adimensional

x : longitud

- A) MLT^2 B) $M^{-1}L^2T^{-2}$ C) $ML^{-3}T^2$
 D) ML^2T^{-2} E) ML^2T^2

31. Dada la siguiente expresión

$$\frac{\gamma}{m^2} + \frac{m}{\beta} = \frac{\sqrt{A}}{\beta^2 + aL}, \text{ determine } [\gamma].$$

Donde

a : aceleración

m : masa

L : longitud

- A) $M^3L^{-1}T$ B) M^3LT^{-1} C) $M^3L^{-1}T^{-1}$
 D) $M^3L^{-2}T^2$ E) $M^3L^2T^{-2}$

32. Determine las dimensiones de γ en la ecuación

$$\sqrt{\gamma} = A^{\operatorname{sen}45^\circ} \frac{(A + a)}{f}, \text{ donde}$$

a : aceleración y f : frecuencia.

A) $L^{7/2}T^{-5}$

B) $L^{-5}T^{7/2}$

C) $L^5T^{7/2}$

D) $L^{3/2}T^{-5}$

E) $L^{7/2}T^{3/2}$

33. Si la ecuación es dimensionalmente correcta, determine α .

$$\sqrt[3]{a^2 + b^3} = \tan \alpha \cdot ab^{\cos x}$$

- A) 30° B) 60° C) 120°
 D) 180° E) 90°

34. Si la siguiente expresión es dimensionalmente correcta

$$P = aF + b\rho + ct^2, \text{ determine } [abc].$$

Donde

P : presión

t : tiempo

ρ : densidad

F : fuerza

A) MLT^{-6}

B) $ML^{-1}T^{-6}$

C) $ML^{-1}T^6$

D) $M^{-1}L^{-1}T^{-6}$

E) $M^{-1}LT^{-6}$

35. En la siguiente expresión dimensionalmente correcta

$$w^2 \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3t^2}} + \frac{a-y}{\pi z},$$

Donde

w: rapidez angular

a: aceleración

t: tiempo

Calcule [xyz].

- A) $L T^3$ B) $L^2 T^3$ C) $L^{-2} T^3$
 D) $L^{-2} T^{-3}$ E) $L^2 T^{-3}$

36. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta

$$P = c(B + nH) \left(m + \left(\frac{nA}{D} \right)^2 \right) D^{3/2}, \text{ determine las dimensiones de } c, H \text{ y } D.$$

Donde

P: presión

B: diámetro

A: área

m y n: adimensionales

- A) $ML^{-4}T^{-2}; L; L^2$
 B) $ML^{-5}T^{-2}; L; L^2$
 C) $ML^{-4}T^{-2}; L^2; L$
 D) $ML^{-4}T^{-2}; L^{-2}; L$
 E) $ML^{-4}T^{-2}; L^{-2}; L^{-2}$

17. En la ecuación homogénea

$$W = \left(\frac{Bk - Ck^2}{D(Ek - F)} \right)^{\operatorname{sen} 37^\circ}, \text{ determine } [F].$$

B: altura

C: masa

E: fuerza

- A) $L^2 T^{-1}$ B) $L^2 T^{-2}$ C) $L^{-2} T$
 D) $L^{-2} T^{-1}$ E) $L^{-2} T^2$

38. Determine la dimensión de k para que la siguiente expresión dimensionalmente correcta

$$t = \frac{1}{k} \left(2g + \frac{v}{3t} \tan 30^\circ \right)^{\frac{1}{2}} L$$

L: longitud

g: aceleración de la gravedad

t: tiempo

- A) $L^{1/2}$ B) L C) $L^{-1/2}$
 D) $L^{-3/2}$ E) $L^{3/2}$

39. Dada la ecuación de onda

$$y = A e^{-kt} \operatorname{sen}(bt + \alpha),$$

donde y es la posición de las partículas que oscilan y e es la base del logaritmo neperiano, encuentre la ecuación dimensional de

$$M = \frac{A^2 k^3}{b}.$$

- A) $L^2 T^{-2}$ B) $L T^{-1}$ C) $L^2 T^{-1}$
 D) $L T^{-2}$ E) $L T^2$

40. Si la ecuación es dimensionalmente correcta, determine [y] en $y \operatorname{sen} \theta = A x e^{-Ad} \log(axv)$.

Donde

a: aceleración

v: volumen

e: base del logaritmo neperiano

d: densidad

- A) $ML^{-5}T^{-2}$
 B) $M^{-1}L^{-2}T^{-2}$
 C) $M^{-1}L^5T^2$
 D) ML^3T^2
 E) $M^{-2}T^{-2}L^3$

NIVEL AVANZADO

41. A la resistencia que los líquidos ofrecen a los cuerpos se les denomina viscosidad. La fuerza debido a la viscosidad es proporcional a la rapidez del cuerpo ($F_{\text{visc}}=kv$). Si consideramos a un cuerpo de forma esférica, entonces $k=6\pi Rn$. Siendo R radio, calcule [n].

- A) $MT^{-1}L^{-1}$ B) $MT^{-2}L^{-1}$ C) $M^{-1}TL^{-1}$
 D) $MT^{-2}L^{-2}$ E) $MT^{-2}L$

42. Si la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta

$W=Pf^x+mv^yR^{-1}$, determine los valores de x e y .

Donde

R : radio

W : peso

f : frecuencia de oscilación

m : masa

P : cantidad de movimiento

- A) 1; 2 B) 0; 1 C) 2; -1
 D) 1; 2 E) 2; 2

43. Si la ecuación es dimensionalmente correcta

$$E = \frac{\rho f \log \sqrt{\mu}}{(M\sqrt{a} - kv)^2}, \text{ determine } [E].$$

Donde

ρ : densidad

a : aceleración

v : rapidez

μ : coeficiente de fricción

M : momento de una fuerza

f : frecuencia de oscilación

- A) $L^{-8}MT^{-2}$
 B) $L^{-8}M^{-1}T^5$
 C) $L^{-8}M^{-1}T^{-2}$
 D) $L^{-8}MT^5$
 E) $L^{-8}M^{-1}T^{-5}$

44. Determine la dimensión de z si la ecuación dada es dimensionalmente correcta

$$P=EV^x \cos \theta + agv_0 - Vbc.$$

Donde

P : presión

E : energía

g : aceleración de la gravedad

v_0 : rapidez inicial

V : volumen

b : área

Además, $S=z-a^xV^{2x}$.

- A) $M^{-1}L^{-3}T^{-1}$
 B) $M^{-1}L^3T$
 C) $M^{-1}L^{-3}T$
 D) $M^{-2}L^{-3}T^{-1}$
 E) $M^{-2}L^{-3}T^{-2}$

45. La fuerza resistiva sobre un glóbulo rojo (esférico) en la sangre depende del radio R , de la viscosidad η y de la rapidez v .

Además, experimentalmente se obtuvo que $R=2\mu\text{m}$, $v=7\times10^{-7}\text{ m/s}$, $\eta=3\times10^{-3}\text{ kg/ms}$ y la fuerza resistiva es $252\pi\times10^{-16}\text{ N}$. Luego, la expresión para denotar la fuerza resistiva es

- A) $6\pi v \eta R$ B) $\pi v^2 \eta R$ C) $\pi v \eta^2 R$
 D) $6\pi v^2 \eta R^{1/2}$ E) $4\pi v \eta R^2$

48. En un cuerpo rígido, la energía cinética de rotación ($\text{kg m}^2/\text{s}^2$) de un cuerpo depende de su momento de inercia I (kg m^2) y de la rapidez angular w .

Determine una expresión para la energía cinética de rotación en función de las variables dadas. Considere k una constante adimensional.

- A) klw
 B) kl^2w
 C) $k^2l^2w^2$
 D) klw^2
 E) $k\frac{l}{w}$

49. En el estudio de la acústica, los decibelios vienen dados por una constante adimensional multiplicada por el logaritmo entre la presión P y una presión referencial P_0 . Determine la ecuación dimensional de los decibelios.

- A) MLT^{-1}
 B) ML^2T^{-1}
 C) MLT
 D) ML^2T^{-2}
 E) adimensional

50. Si sobre una placa se hace incidir una cierta presión de agua, la presión que la placa experimenta es

$P = \lambda Q^x \rho^y A^z$. Determine la composición final de la ecuación dada

Donde

λ : constante adimensional

ρ : densidad del agua

A : área de la placa

Q : caudal

- A) $\lambda \frac{Q\rho}{A}$
 B) $\lambda \frac{Q^2\rho}{A}$
 C) $\lambda \frac{Q\rho}{A^2}$
 D) $\lambda \frac{Q^2\rho}{A^2}$
 E) $\lambda \frac{Q^2\rho^2}{A^2}$

49. La fuerza de sustentación del ala de un avión depende del área A del ala, de la densidad ρ del aire y de la rapidez v del avión. Calcule la suma de los exponentes de A y ρ .

- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 3
 E) 4

50. El periodo de un planeta que gira en una órbita circular depende del radio de la órbita (R), de la masa (M) y de la constante (G). Si G se expresa en ($\text{m}^3/\text{kg s}^2$), determine la fórmula empírica para el periodo.

- A) $T = k \sqrt{\frac{R}{MG}}$
 B) $T = kR \sqrt{\frac{R}{MG}}$
 C) $T = kR \sqrt{\frac{1}{MG}}$
 D) $T = k \sqrt{\frac{MG}{R}}$
 E) $T = k \sqrt{\frac{R}{M^2G}}$

Claves

Nivel básico

1 - 10

1 D	11 D	21 E	31 A	41 A
2 C	12 D	22 B	32 A	42 D
3 E	13 D	23 A	33 C	43 B
4 A	14 E	24 E	34 B	44 A
5 D	15 B	25 C	35 E	45 A
6 C	16 A	26 A	36 B	46 D
7 C	17 C	27 B	37 B	47 E
8 C	18 A	28 A	38 A	48 B
9 E	19 E	29 A	39 A	49 C
10 D	20 C	30 D	40 C	50 B

Nivel intermedio

11 - 40

Nivel avanzado

41 - 50

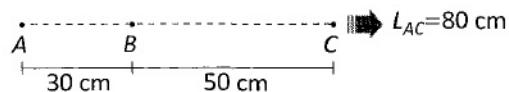
ANÁLISIS VECTORIAL

NOCIONES PREVIAS

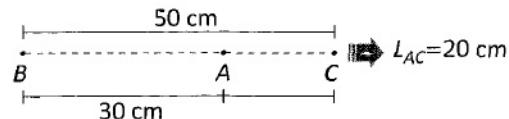
En nuestro quehacer cotidiano existen una serie de situaciones matemáticas que por su frecuencia e, incluso, simplicidad pasan desapercibidas para la mayor parte de la gente. Por ejemplo, consideremos tres objetos A ; B y C , ubicados en diferentes lugares, tal que conocemos que la medida de la longitud entre A y B es 30 cm, y entre B y C es 50 cm. Si preguntamos qué longitud hay entre A y C , ¿esta sería 80 cm? Naturalmente, y haciendo uso del sentido común, la mayoría de las personas afirmarían tal respuesta, pero esto no es del todo correcto.

Veamos

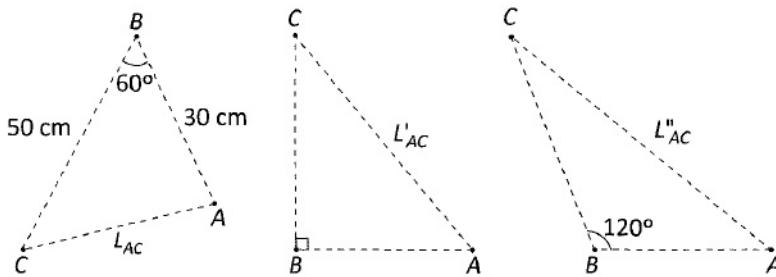
- Los objetos no solo pueden estar en línea recta y en orden



podrían estar en cualquier otro orden, por ejemplo



Aún más sutil sería pensar que los objetos podrían estar dispuestos tal que los segmentos que los unen formen ciertos ángulos tal es así que



En estos casos, si queremos determinar la longitud que existe entre A y B debemos hacer uso no de las reglas de la aritmética común, sino de una herramienta conocida como análisis vectorial (elementos de geometría), es decir, aplicar las reglas conocidas para las operaciones con vectores, por ejemplo, en el caso en el cual forman 60° , podríamos demostrar que $L_{AC} = 10\sqrt{19}$ cm; en el caso en que forman 90° , se tendrá $L'_{AC} = 10\sqrt{34}$ cm, y así sucesivamente.

En el presente capítulo examinaremos los métodos y reglas básicas de las operaciones vectoriales.

Observación

La importancia que tiene el uso de los vectores en física radica en que con ellos podemos representar las magnitudes vectoriales, lo cual nos permite una mejor descripción, comprensión y explicación de una gran variedad de fenómenos físicos.

VECTOR

- Es una herramienta matemática que sirve para representar las magnitudes vectoriales.
- Se representan geométricamente mediante un segmento de recta orientado (flecha), que presenta un origen y un extremo

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN VECTOR

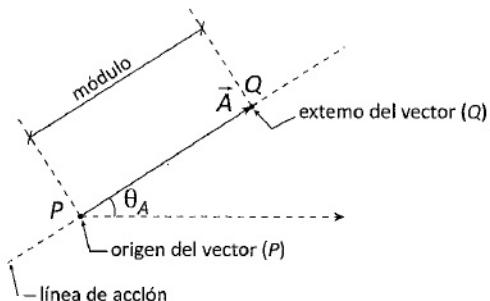


Gráfico 1

Notación

Un vector se puede representar con cualquier letra del alfabeto, con una pequeña flecha en la parte superior

\vec{A} ; se lee vector A .

También se denota indicando el origen y el extremo.

\overrightarrow{PQ} ; se lee PQ .

Nota

Ambas notaciones son válidas y pueden usarse indistintamente, es decir: $\vec{A} \equiv \overrightarrow{PQ}$.

ELEMENTOS DE UN VECTOR

Módulo del vector

La medida o el tamaño del vector y generalmente está asociado a la intensidad de la magnitud a la cual representa. Por ejemplo: las fuerzas son magnitudes vectoriales y son representadas mediante los vectores, además su unidad de medida es el newton; así, podemos representar dos fuerzas de 10 N y 50 N dirigidas hacia la derecha.



Notamos que estas guardan cierta proporcionalidad en sus tamaños o módulos.

En el gráfico 1, el módulo del vector \vec{A} se representa como el vector entre barras o,

simplemente, con la letra (sin flecha).

Módulo del \vec{A} : $|\vec{A}|$ o A

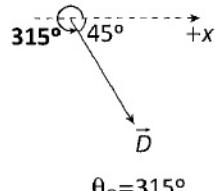
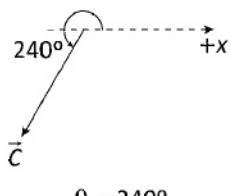
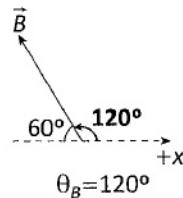
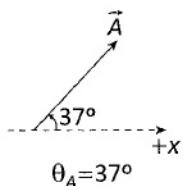
Dirección del vector

La dirección del vector está definida por la medida del ángulo obtenido a partir del semieje X positivo y la línea de acción del vector, medido en sentido antihorario.

Del gráfico 1

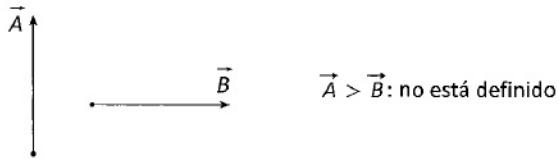
Dirección del \vec{A} : θ_A

Por ejemplo

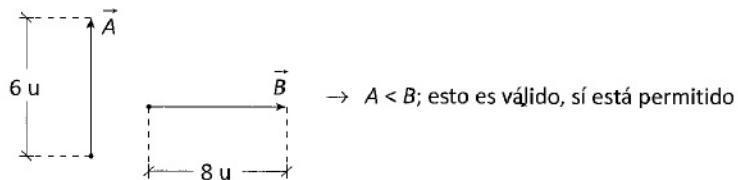


Observación

- I. Entre vectores no está definida la relación de orden, es decir, no podemos comparar los vectores aun si representan una misma magnitud.



- II. Lo que sí podemos comparar en los vectores es su módulo.

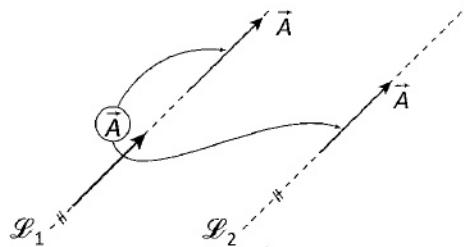


- III. El módulo de cualquier vector siempre es positivo, es decir, verifica la siguiente relación

$$\text{MÓDULO} \geq 0$$

Línea de acción

- Es la línea imaginaria en la cual se considera contenido el vector.
- Un vector puede ubicarse en cualquier punto de la línea de acción e incluso puede trasladarse a líneas de acción paralelas sin que se altere ni su módulo ni su dirección.



Usualmente, a estos vectores se les denomina vectores libres.

REPRESENTACIÓN CARTESIANA DE UN VECTOR EN EL PLANO

Para esta representación, debemos ubicar un vector en un sistema de ejes coordenados cartesianos.

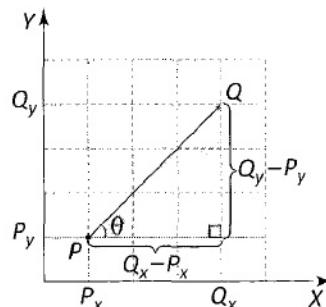
Del gráfico

- El vector \vec{PQ} lo obtenemos como la diferencia de coordenadas del extremo y el origen.

$$\vec{PQ} = Q - P$$

$$= (Q_x; Q_y) - (P_x; P_y)$$

$$\boxed{\vec{PQ} = (Q_x - P_x; Q_y - P_y)}$$



donde

$Q_x - P_x$: componente del vector \vec{PQ} contenido en el eje X.

$Q_y - P_y$: componente del vector \vec{PQ} contenido en el eje Y.

- Su módulo se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras a partir del triángulo sombreado.

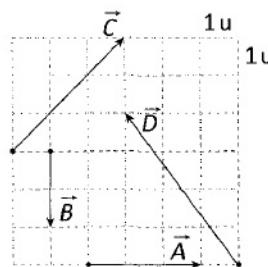
$$\boxed{|\vec{PQ}| = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}}$$

- Su dirección es

$$\boxed{\theta = \tan^{-1} \left(\frac{Q_y - P_y}{Q_x - P_x} \right)}$$

Ejemplo

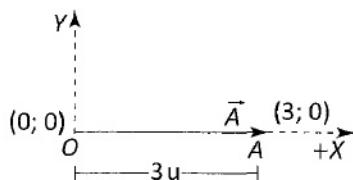
A partir del gráfico mostrado, determine cada vector con sus respectivos elementos (módulo y dirección).



Resolución

Para determinar los vectores, debemos conocer las coordenadas de cada punto, ya sea origen o extremo; para simplificar ello se suele colocar a cada vector de manera independiente de tal manera que su origen coincida con el origen de un sistema de ejes cartesianos.

- Para el vector A

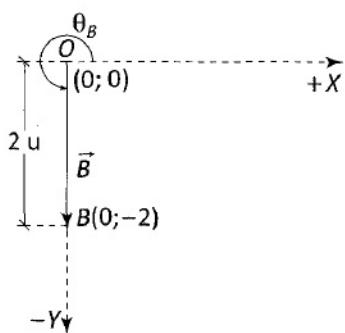
**El vector**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= A - O \\ &= (3; 0) - (0; 0) \\ \overrightarrow{OA} &= \vec{A} = (3; 0)\end{aligned}$$

Su módulo $|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$ u

Su dirección $\theta_A = 0^\circ$ (está sobre el semieje $+X$)

- Para el vector B

**El vector**

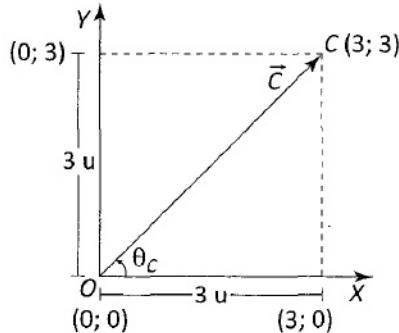
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= B - O \\ &= (0; -2) - (0; 0) \\ \overrightarrow{OB} &= \vec{B} = (0; -2)\end{aligned}$$

Su módulo: $|\vec{B}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4}$

$$\therefore |\vec{B}| = 2 \text{ u}$$

Su dirección: $\theta_B = 270^\circ$

- Para el vector C

**El vector**

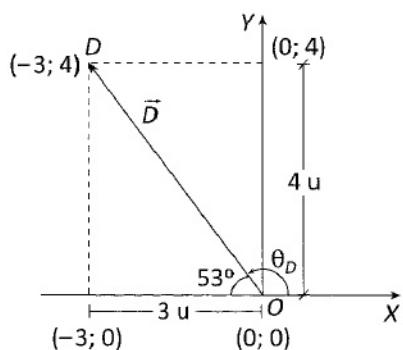
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= C - O \\ &= (3; 3) - (0; 0) \\ \overrightarrow{OC} &= \vec{C} = (3; 3)\end{aligned}$$

Su módulo: $|\vec{C}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

$$\therefore |\vec{C}| = 3\sqrt{2} \text{ u}$$

Su dirección: $\theta_C = 45^\circ$

- Para el vector D



El vector

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= D - O \\ &= (-3; 4) - (0; 0) \\ \overrightarrow{OD} &= \vec{D} = (-3; 4)\end{aligned}$$

$$\text{Su módulo: } |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25}$$

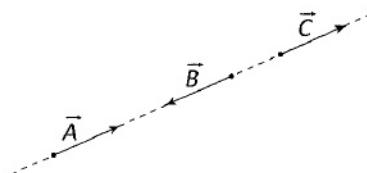
$$\therefore |\overrightarrow{OD}| = 5 \text{ u}$$

$$\text{Su dirección: } \theta_D = 127^\circ$$

TIPOS DE VECTORES

VECTORES COLINEALES

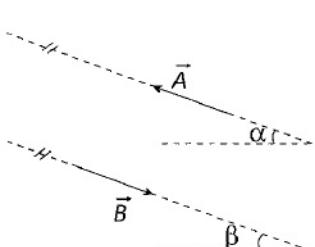
son aquellos que se encuentran contenidos en una misma línea de acción.



\vec{A} , \vec{B} y \vec{C} son vectores colineales porque están en una misma línea de acción.

VECTORES PARALELOS

son aquellos que tienen sus líneas de acción respectivamente paralelas.



Nota

Podemos expresar la condición de paralelismo en forma matemática, indicando que si

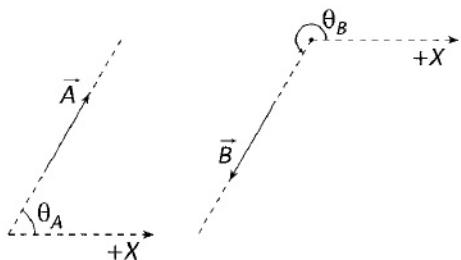
$$\alpha = \beta \rightarrow \vec{A} // \vec{B}$$

\vec{A} y \vec{B} son vectores paralelos porque sus líneas de acción son paralelas.



VECTORES OPUESTOS

Son aquellos que presentan igual módulo, pero sus direcciones se diferencian en 180° .



Sea

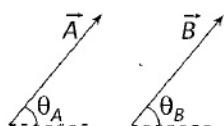
$$\theta_B - \theta_A = 180^\circ \quad y \quad |\vec{A}| = |\vec{B}|$$

entonces $\vec{B} = -\vec{A}$

\vec{B} es el opuesto de \vec{A}

VECTORES IGUALES

Son aquellos que presentan igual módulo e igual dirección.



Nota

Matemáticamente

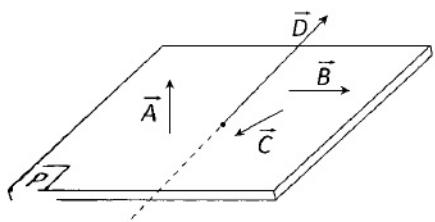
$$\text{Si } |\vec{A}| = |\vec{B}| \text{ y } q_A = q_B$$

$$\rightarrow \vec{A} = \vec{B};$$

los vectores son iguales.

VECTORES COPLANARES

Son aquellos que se encuentran contenidos en un mismo plano.

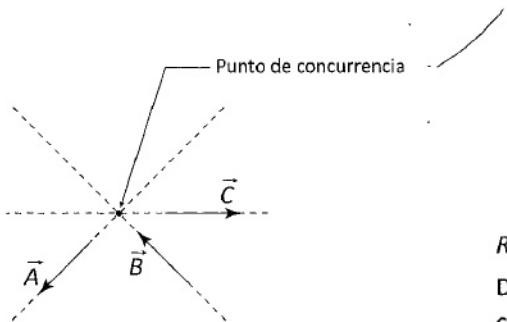


Como \vec{D} no está contenido en el plano P , no será coplanar con los demás vectores.

\vec{A}, \vec{B} y \vec{C} son vectores coplanares por estar en el mismo plano.

VECTORES CONCURRENTES

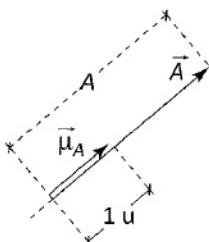
son aquellos cuyas líneas de acción se cortan en un mismo punto.



\vec{A} , \vec{B} y \vec{C} son vectores concurrentes porque todos van a un solo punto.

VECTOR UNITARIO ($\hat{\mu}$)

Representa la unidad vectorial de un vector cualquiera y se caracteriza porque su módulo es igual a la unidad.



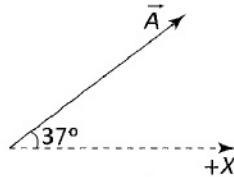
$$\hat{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

← vector
← módulo

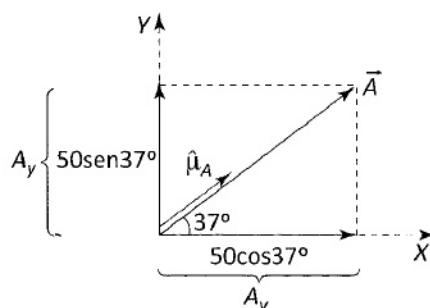
$$|\hat{\mu}_A| = 1 \text{ u}$$

Ejemplo

Dado el vector \vec{A} cuyo módulo es de 50 u, determine el vector unitario del vector \vec{A} .

**Resolución**

Determinemos el vector \vec{A} como una combinación de sus componentes



Del gráfico

$$\vec{A} = (50\cos 37^\circ; 50\sin 37^\circ)$$

$$\vec{A} = (40; 30) \text{ y } |\vec{A}| = \sqrt{40^2 + 30^2}$$

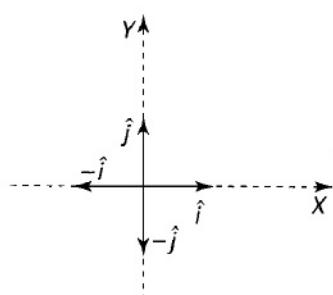
Nos piden: $\hat{\mu}_A$

Se sabe que

$$\hat{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(40; 30)}{\sqrt{40^2 + 30^2}}$$

$$\hat{\mu}_A = \frac{(40; 30)}{50} = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right)$$

$$\therefore \hat{\mu}_A = \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right) \text{ u}$$

Vectores unitarios en el plano cartesianoSea el plano XY **Resolución**

Del gráfico

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (4; 0) = 4(1; 0) = 4\hat{i} \\ \vec{B} &= (-2; 0) = 2(-1; 0) = 2(-\hat{i}) \\ \vec{C} &= (0; 3) = 3(0; 1) = 3\hat{j} \\ \vec{D} &= (0; -2) = 2(0; -1) = 2(-\hat{j})\end{aligned}$$

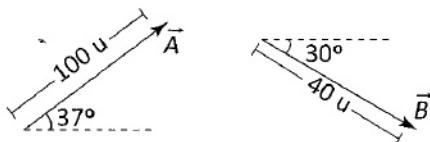
2. Exprese los vectores mostrados en términos de los vectores unitarios.

Se verifica

$$\hat{i} = (1; 0), -\hat{i} = (-1; 0)$$

$$\hat{j} = (0; 1), -\hat{j} = (0; -1)$$

$$\text{Tal que: } |\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$



donde

$$\hat{i}: \text{vector unitario en el eje } X (+)$$

$$-\hat{i}: \text{vector unitario en el eje } X (-)$$

$$\hat{j}: \text{vector unitario en el eje } Y (+)$$

$$-\hat{j}: \text{vector unitario en el eje } Y (-)$$

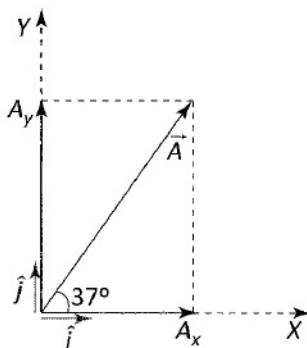
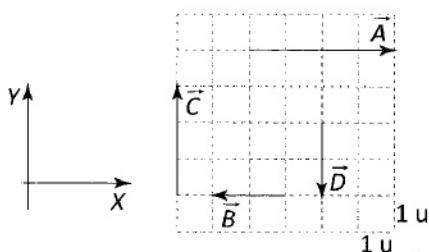
Resolución

Primero debemos ubicar el origen de cada vector de tal manera que coincida con el origen de un sistema de ejes cartesianos.

- Para el vector A

Ejemplos

1. Exprese cada vector del conjunto mostrado en términos de los vectores unitarios.



Del gráfico

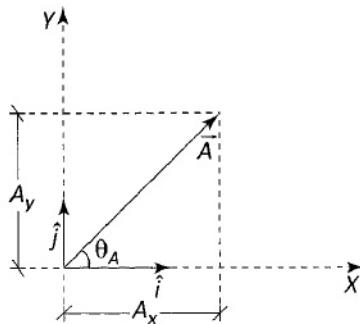
$$\vec{A} = (100 \cos 37^\circ; 100 \sin 37^\circ)$$

$$\vec{A} = (80; 60)$$

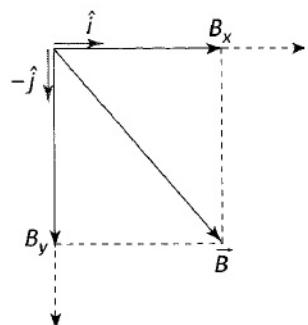
$$\vec{A} = (80; 0) + (0; 60)$$

$$\vec{A} = 80(1; 0) + 60(0; 1)$$

$$\vec{A} = 80\hat{i} + 60\hat{j}$$



- Para el vector B



Del gráfico

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

También

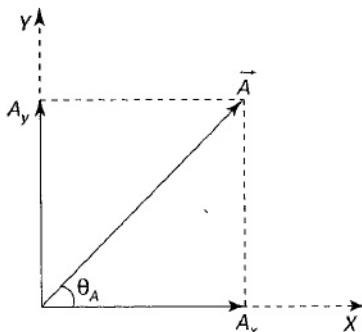
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

A demás

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Nota

Representación polar de un vector



Se verifica $\vec{A} = (A; \theta)$; siendo

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

Del gráfico

$$\vec{B} = (40 \cos 30^\circ; -40 \sin 30^\circ)$$

$$\vec{B} = (20\sqrt{3}; -20)$$

$$\vec{B} = (20\sqrt{3}; 0) + (0; -20)$$

$$\vec{B} = 20\sqrt{3}(1; 0) + 20(0; -1)$$

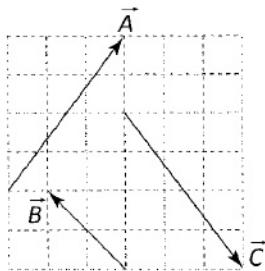
$$\vec{B} = 20\sqrt{3}\hat{i} - 20\hat{j}$$

COMPONENTES CARTESIANAS DE UN VECTOR EN EL PLANO

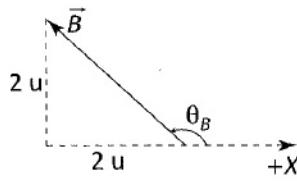
Sobre el plano XY; dado el vector A expresarlo en términos de sus componentes cartesianas.

**Ejemplo**

Expresese los vectores mostrados en su forma polar.



- Para el vector \vec{B}



Su módulo

$$B = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$B = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

Su dirección

$$\theta_A = 53^\circ$$

Finalmente

$$\vec{B} = (2\sqrt{2}; 135^\circ)$$

Resolución

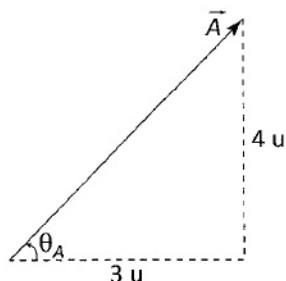
Nos piden expresar los vectores en la forma polar

$$\vec{r} = (r; \theta)$$

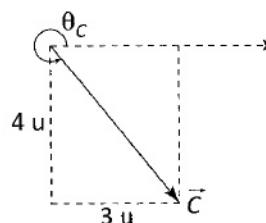
módulo ←
dirección ←

Del gráfico

- Para el vector \vec{A}



- Para el vector \vec{C}



Su módulo

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$A = 5 \text{ u}$$

Su dirección

$$\theta_A = 53^\circ$$

Finalmente

$$\vec{A} = (5; 53^\circ)$$

Su módulo

$$C = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$C = 5 \text{ u}$$

Su dirección

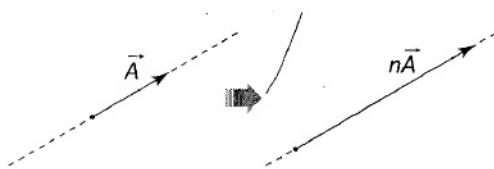
$$\theta_A = 307^\circ$$

Finalmente

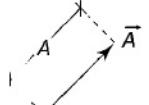
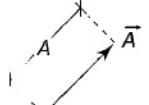
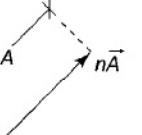
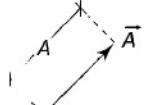
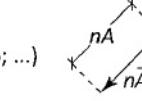
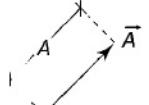
$$\vec{C} = (5; 307^\circ) = (5; -53^\circ)$$

MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Si el vector \vec{A} y un número real n , tenemos el vector $n\vec{A}$, cuyo módulo será n veces el módulo de \vec{A} y colineal al vector \vec{A} .

**Observación**

En general, n puede ser cualquier número real. A continuación, se presenta un tabla resumen respecto a los valores que puede tomar n .

	<p>Si $0 < n < 1$ ($n = 1/2; 1/3; 1/4; \dots$)</p>		<p>nos da un vector más pequeño, pero en su misma dirección.</p>
	<p>Si $n > 1$ ($n = 2; 3; 4; \dots$)</p>		<p>nos da un vector más grande, en su misma dirección.</p>
	<p>Si $-1 < n < 0$ ($n = -1/2; -1/5; -2/5; \dots$)</p>		<p>nos da un vector más pequeño y en dirección opuesta.</p>
	<p>Si $n < -1$ ($n = -5/4; -2; -3; \dots$)</p>		<p>nos da un vector de mayor tamaño, pero en dirección opuesta.</p>

Ejemplo

Sea el vector \vec{A} cuyo módulo es de 4 u. Grafique los vectores

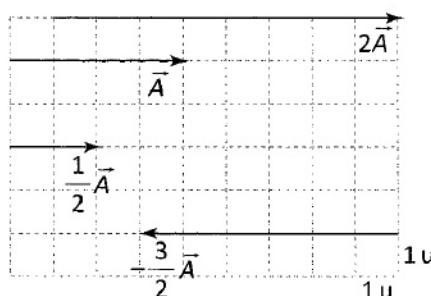
$$2\vec{A}, \frac{1}{2}\vec{A}, -\frac{3}{2}\vec{A}$$

Resolución

Consideremos una cuadrícula donde cada celda tenga una longitud de una unidad.

Notemos

- El vector $2\vec{A}$ tiene el doble del módulo de \vec{A} y mantiene su dirección.
- El vector $\frac{1}{2}\vec{A}$ tiene la mitad del módulo de \vec{A} y mantiene su dirección.
- El vector $-\frac{3}{2}\vec{A}$ tiene 1,5 veces el módulo de \vec{A} , pero su dirección está invertida (opuesta).

Graficando los vectores**Nota**

Sean los vectores \vec{A} y \vec{B} . Si \vec{A} y \vec{B} son paralelos, se debe verificar

$$|\vec{A}| = K |\vec{B}|$$

$$\text{tal que } K = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{B}|}$$

OPERACIONES CON VECTORES

Están referidas usualmente a la adición de vectores (donde la diferencia es también una adición), donde la suma significa hallar la resultante, la cual puede ser determinada mediante dos métodos generales, los que a su vez cuentan con otros métodos auxiliares.

En general

Para la suma de vectores	<table border="0"> <tr> <td>Métodos gráficos</td><td> <ul style="list-style-type: none"> - Método del triángulo - Método del paralelogramo - Método del polígono </td></tr> <tr> <td>Métodos analíticos</td><td> <ul style="list-style-type: none"> - Método del triángulo (ley de senos) - Método del paralelogramo (ley del paralelogramo y ley de cosenos) </td></tr> </table>	Métodos gráficos	<ul style="list-style-type: none"> - Método del triángulo - Método del paralelogramo - Método del polígono 	Métodos analíticos	<ul style="list-style-type: none"> - Método del triángulo (ley de senos) - Método del paralelogramo (ley del paralelogramo y ley de cosenos)
Métodos gráficos	<ul style="list-style-type: none"> - Método del triángulo - Método del paralelogramo - Método del polígono 				
Métodos analíticos	<ul style="list-style-type: none"> - Método del triángulo (ley de senos) - Método del paralelogramo (ley del paralelogramo y ley de cosenos) 				

Nota

Hay otras operaciones, como el producto escalar y el producto vectorial, que serán estudiadas más adelante.

MÉTODO GRÁFICO

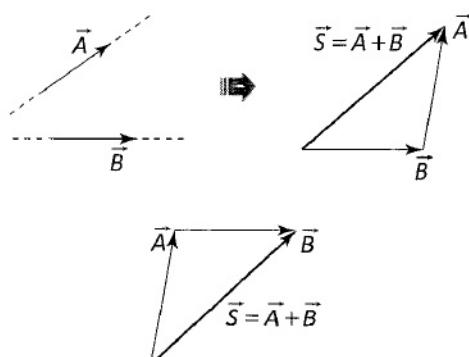
son aquellos en los cuales para determinar la resultante se usan instrumentos de dibujo tales como reglas, escuadras, compás, escalímetros, etcétera.

Con este método usualmente solo se puede representar gráficamente la resultante.

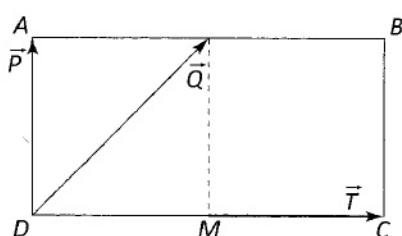
Método del triángulo

Que permite hallar la resultante de dos vectores, consiste en graficar los vectores uno a continuación del otro, tal que el extremo del primero coincida con el origen del segundo vector. Su resultante se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del segundo vector.

Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores

**Ejemplos**

- I A partir del gráfico que se muestra determine el vector resultante; $ABCD$ es un rectángulo y M : punto medio.



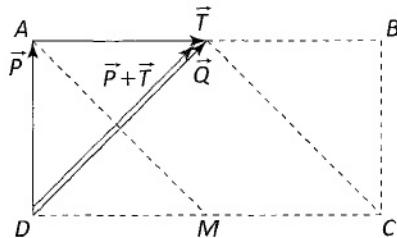
Resolución

Nos piden el vector resultante

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{T} \quad (\text{I})$$

para lo cual sumaremos los vectores agrupándolos de a dos, usando el método del triángulo.

Trasladamos paralelamente el vector \vec{T} hasta el lado AB , haciendo coincidir su origen con el extremo de \vec{P} .

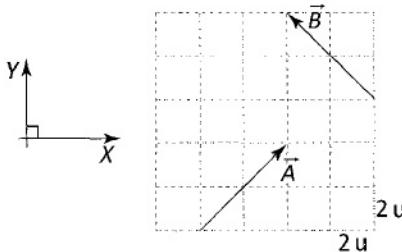


Nótese que la suma de \vec{P} y \vec{T} es un vector idéntico a \vec{Q} .

Luego en (I)

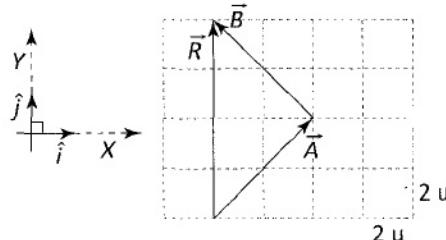
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{P} + \vec{Q} + \vec{T} \\ \vec{R} &= \vec{Q} + \vec{Q} \\ \therefore \vec{R} &= 2\vec{Q}\end{aligned}$$

2. A partir del gráfico que se muestra, halle el vector resultante.

**Resolución**

Nos piden el vector resultante de los vectores mostrados, es decir, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$,

para lo cual trasladaremos los vectores usando el método del triángulo.



Mantenemos fijo \vec{A} y trasladamos paralelamente al vector \vec{B} .

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

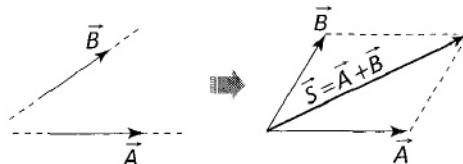
De la figura, se obtiene un vector paralelo al eje Y .

$$\therefore \vec{R} = 8\hat{j}$$

Método del paralelogramo

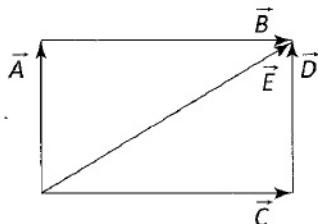
Es una variante del método del triángulo, solo que en este caso debemos hacer coincidir el origen de ambos vectores y a partir de los extremos trazamos rectas paralelas a los otros vectores formando así un paralelogramo.

Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores



Ejemplo

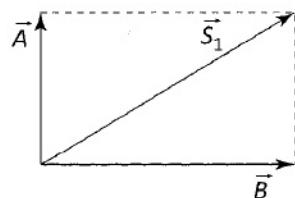
Dado un sistema de vectores, determine el vector resultante.


Resolución

Podemos agruparlos de a dos y usar el método del paralelogramo, es decir

$$\vec{R} = \underbrace{\vec{A} + \vec{B}}_{\vec{S}_1} + \underbrace{\vec{C} + \vec{D}}_{\vec{S}_2} + \vec{E} \quad (\text{I})$$

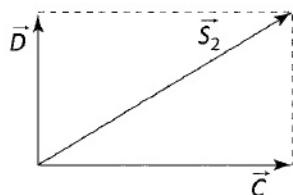
Sumamos \vec{A} y \vec{B}



$$\vec{S}_1 = \vec{A} + \vec{B},$$

y es un vector idéntico al vector \vec{E} (α)

Sumemos \vec{C} y \vec{D}



$$\vec{S}_2 = \vec{C} + \vec{D},$$

es otro vector idéntico a \vec{E} (β)

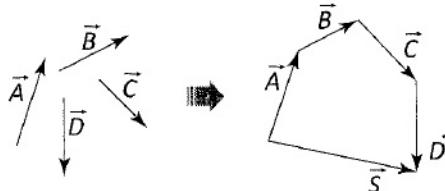
- Finalmente, (α) y (β) en (I)

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{E} \\ &= \vec{E} + \vec{E} + \vec{E} \\ \therefore \vec{R} &= 3\vec{E}\end{aligned}$$

Método del polígono

Nos permite determinar la resultante de n vectores. Consiste en colocar los vectores uno a continuación del otro, donde el vector resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último.

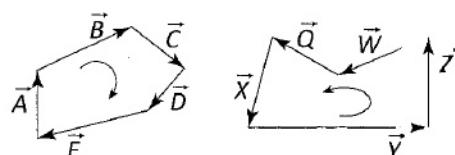
Sean los vectores libres



No interesa el orden al dibujar a los vectores pues la resultante siempre será la misma.

• Polígono cerrado

Es un caso particular. Cuando los vectores graficados cierran la figura, deben orientarse en forma horaria o antihoraria; por lo tanto, su resultante es nula.

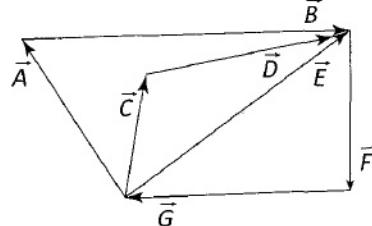


$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{R} = 0$$

Ejemplos

1. Para el sistema de vectores mostrados, determine el vector resultante.

**Resolución**

Nos piden determinar el vector resultante, para lo cual usaremos el método del paralelogramo para poder reducirlo. Sabemos que

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} + \vec{G} \quad (\alpha)$$

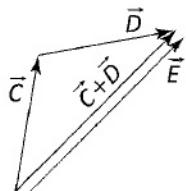
Del gráfico notamos que los vectores \vec{A} , \vec{B} , \vec{F} y \vec{G} forman un polígono cerrado y en consecuencia se verifica que su resultante es nula, es decir

$$\vec{R}_1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{F} + \vec{G} = \vec{0}$$

En (α) , tendremos

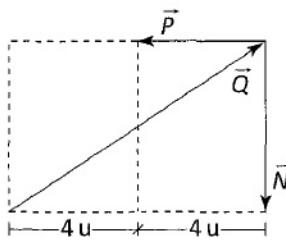
$$\vec{R} = \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$

Representando nuevamente el sistema

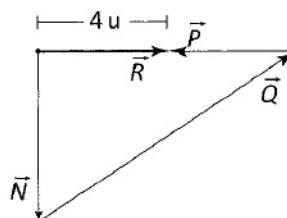


$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} \\ \vec{R} &= \underbrace{\vec{C} + \vec{D}}_{\vec{E}} + \vec{E} \\ \therefore \vec{R} &= 2\vec{E}\end{aligned}$$

2. Para el sistema de vectores que se muestra, determine el módulo del vector resultante.

**Resolución**

Nos piden determinar el módulo del vector resultante, para lo cual trasladaremos adecuadamente los vectores.



Del gráfico

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{Q} + \vec{P}$$

Su módulo

$$|\vec{R}| = 4 \text{ u}$$

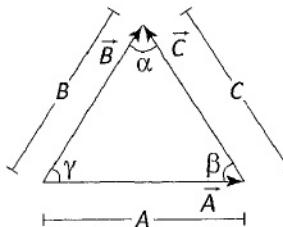
MÉTODOS ANALÍTICOS

Son aquellos por los cuales mediante el uso de ecuaciones matemáticas podemos determinar el módulo y la dirección del vector resultante.

Método del triángulo

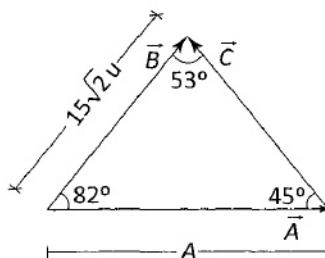
Podemos resolver un triángulo vectorial si conocemos algunos de sus lados y ángulos, usando la ley de senos.

Sean \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} vectores que forman un triángulo cuyos módulos son A ; B y C y cuyos ángulos son α , β y γ .

**Resolución**

Nos piden el módulo del vector \vec{A} .

Del triángulo vectorial, aplicaremos la ley de senos.



$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \beta}$$

$$\frac{15\sqrt{2}}{(\sqrt{2}/2)} = \frac{A}{(4/5)}$$

$$\therefore A = 24 \text{ u}$$

Se verifica

I. Ley de senos

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \delta}$$

II. Ley de cosenos

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha$$

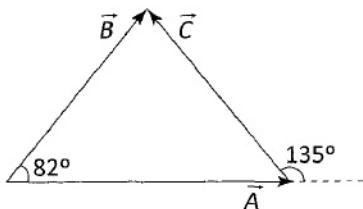
$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \delta$$

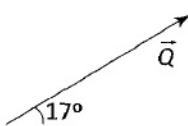
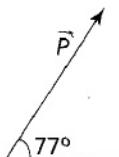
Ejemplos

- I. A partir del sistema de vectores que se muestra, determine el módulo de \vec{A} .

$$\text{Si } |\vec{B}| = 15\sqrt{2} \text{ u.}$$



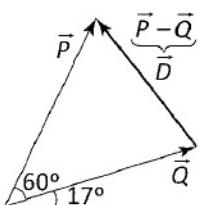
2. Se tienen dos vectores de módulo igual a 10 u, tal que forman determinados ángulos con la horizontal. Determine el módulo de la diferencia de dichos vectores.



Resolución

Nos piden el módulo de la diferencia de los vectores.

Debemos tener en cuenta que dicho módulo será el mismo si formamos $\vec{P} - \vec{Q}$ o $\vec{Q} - \vec{P}$. Para esto uniremos los orígenes de ambos vectores.



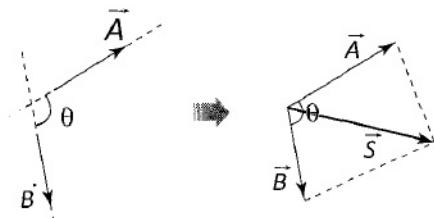
Usando la ley de cosenos

$$\begin{aligned} |\vec{D}| &= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{10^2 + 10^2 - 2(10)(10) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \\ |\vec{D}| &= 10 \text{ u} \end{aligned}$$

Método del paralelogramo

Conociendo los vectores y el ángulo que forman entre sí podemos determinar el módulo de su resultante, usando la ley del paralelogramo.

Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores:



14

Del gráfico

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$

En módulo

$$|\vec{S}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

Además, la dirección de la resultante con respecto a \vec{B} es

$$\theta = \arctan \left[\frac{\operatorname{Asen} \alpha}{B + A \operatorname{Cosen} \alpha} \right]$$

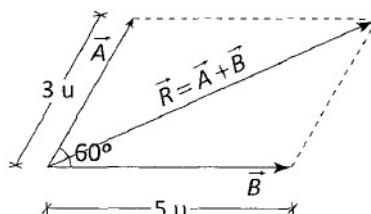
Ejemplos

- Se tienen dos vectores A y B de módulos 3 u y 5 u. Si forman 60° entre sí, determine el módulo de su resultante.

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante entre los vectores \vec{A} y \vec{B} .

Consideraremos que el módulo de \vec{A} sea 3 u y el de \vec{B} sea 5 u, hagamos una representación gráfica de los vectores.



Usaremos la ley del paralelogramo

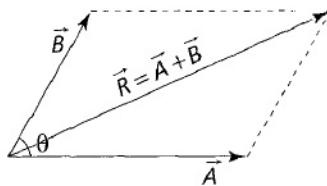
$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \\ R &= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2(3)(5)\cos 60^\circ} \\ R &= \sqrt{49} \\ R &= 7 \text{ u} \end{aligned}$$

- ✓ Se tienen dos vectores de igual módulo, si su resultante tiene un módulo igual a uno de ellos, determine el ángulo que forman entre sí.

Resolución

Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores, y θ el ángulo que forman entre sí. Nos piden determinar el valor del ángulo.

Hagamos una gráfica de los vectores y usemos el método del paralelogramo.



Se sabe que

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad (\text{I})$$

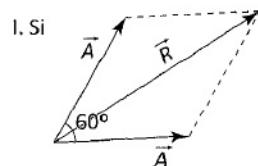
Además $R = A = B$

Reemplazando en (I)

$$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2\cos\theta}$$

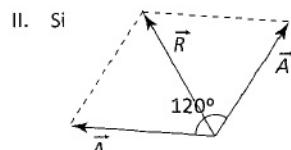
$$\cos\theta = -1/2$$

$$\therefore \theta = 120^\circ$$

Observación

Se verifica

$$R = A\sqrt{3}$$



Se verifica

$$R = A$$

Nota

De la ley del paralelogramo: $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

- I. La suma de dos vectores será máxima si $\theta = 0^\circ$.

$$S_{\text{máxima}} = A + B$$

- II. La suma de dos vectores será mínima si $\theta = 180^\circ$.

$$S_{\text{mínima}} = A - B$$

3. Si la suma máxima y mínima para dos vectores es 15 u y 5 u, respectivamente, determine el módulo de cada vector.

Resolución

Nos piden determinar el módulo de cada vector, sean \vec{A} y \vec{B} los vectores, tal que $A > B$.

De los datos

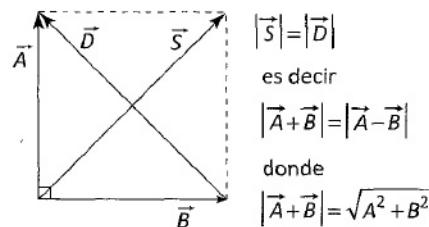
$$\vec{A} + \vec{B} = 15$$

$$\vec{A} - \vec{B} = 5$$

$$\underline{A = 10 \text{ y } B = 5}$$

Observación

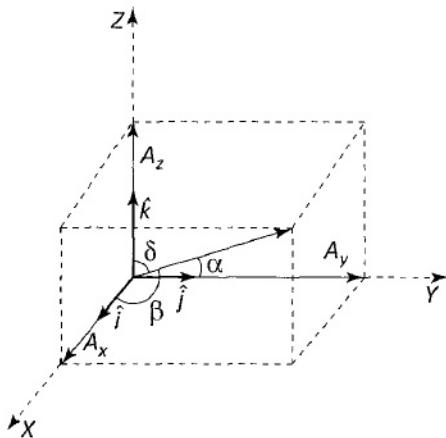
Para el caso particular en el cual formen ángulos de 90° (vectores ortogonales o perpendiculares), se verifica

**VECTORES EN EL ESPACIO**

Consideremos el sistema de ejes cartesianos X , Y y Z .

En forma cartesiana: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

En módulo: $A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$



También

$$A_x = A \cos \beta$$

$$A_y = A \cos \alpha$$

$$A_z = A \cos \delta$$

siendo α , β y δ los ángulos que forman el vector con los respectivos ejes coordenados.

Se verifica además

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta = 1,$$

Donde $\vec{A} = (A_x; A_y; A_z)$

denominados cosenos directores.

Ejemplos

I Sean los puntos

$$P = (15; -7; 12) \text{ y } Q = (-12; 4; 9),$$

halle los vectores \vec{PQ} y \vec{QP} ; además determine el módulo de cada uno de ellos.

Notamos a partir de los resultados que los vectores \vec{PQ} y \vec{QP} son opuestos, es decir, $\vec{PQ} = -\vec{QP}$.

2. En el sistema que se muestra, determine el módulo del vector resultante.

Resolución

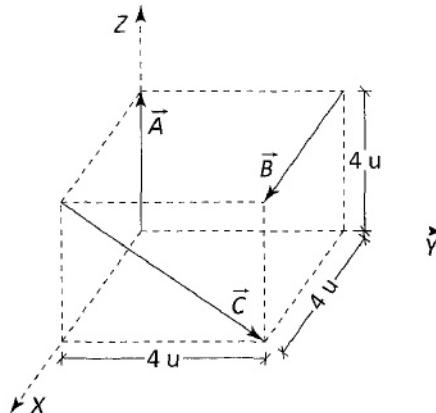
Usando la representación cartesiana del vector y extiéndola para el caso de tres coordenadas, tendremos que determinar cada uno de ellos de manera independiente.

Hallando el vector \vec{PQ}

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$$

$$\vec{PQ} = (-12; 4; 9) - (15; -7; 12)$$

$$\vec{PQ} = (-27; 11; -21)$$

*Cálculo de su módulo*

$$PQ = \sqrt{27^2 + 11^2 + 21^2}$$

$$PG = \sqrt{1291}$$

$$PQ = 35,9 \text{ u}$$

Resolución

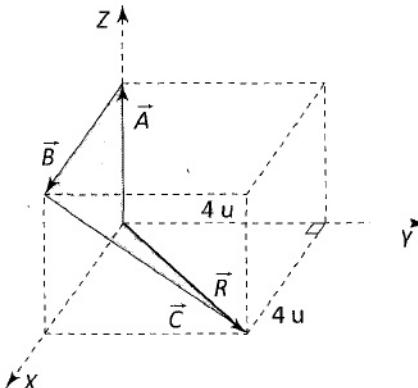
Nos piden hallar el módulo del vector resultante, para lo cual trasladaremos a los vectores de manera adecuada.

Hallando el vector \vec{QP}

$$\vec{QP} = \vec{P} - \vec{Q}$$

$$\vec{QP} = (15; -7; 12) - (-12; 4; 9)$$

$$\vec{QP} = (27; -11; 21)$$

*Cálculo de su módulo*

$$PQ = \sqrt{27^2 + 11^2 + 21^2}$$

$$PG = \sqrt{1291}$$

$$PQ = 35,9 \text{ u}$$

$$\text{Del gráfico: } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\text{Su módulo será: } R = 4\sqrt{2} \text{ u}$$

PRODUCTO ESCALAR

Si

$$\vec{A} = (A_x; A_y; A_z) \text{ y } \vec{B} = (B_x; B_y; B_z),$$

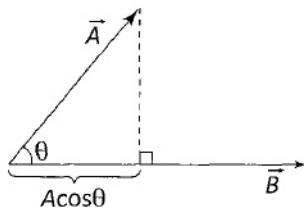
entonces el producto escalar entre \vec{A} y \vec{B} es el número escalar dado por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Si se conoce el módulo de cada vector y el ángulo que forman entre sí, se puede calcular como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

Geométricamente, se puede entender como el producto de un vector por el módulo de la proyección del otro vector sobre él.

**Propiedades**

Siendo \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} vectores y a un escalar, se verifica

- $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- $(a\vec{A}) \cdot \vec{B} = a(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (a\vec{B})$
- $\vec{0} \cdot \vec{A} = 0$

Nota

Respecto de los vectores unitarios se verifica

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

Ejemplos

1. Se sabe que los vectores

$$\vec{A} = (1, -2m) \text{ y } \vec{B} = (4, -1),$$

son perpendiculares. Halle m .

Resolución

Nos piden el valor de m , sabiendo que los vectores forman 90° entre sí.

De acuerdo al producto escalar, si dos vectores son perpendiculares, dicho producto es cero (condición de perpendicularidad).

Veamos

Se sabe que

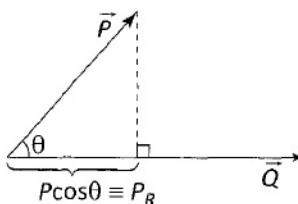
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1, -2m) \cdot (4, -1) = 4 + 2m = 0$$

resolviendo tenemos que $m = -1/2$.

2. El producto escalar del vector \vec{P} de módulo 5 u y el vector \vec{Q} de módulo 8 u es 32. Determine la componente del vector \vec{P} en \vec{Q} .

Resolución

Nos piden la componente del vector \vec{P} en \vec{Q} , o, en otras palabras, la proyección de \vec{P} en \vec{Q} . Recuerde que el resultado del producto escalar es solo un número. Graficando los vectores



Siendo $P \cdot Q = PQ\cos\theta = \underbrace{(P\cos\theta)Q}_{P_R}$
De los datos se tiene

$$32 = 8 P_R$$

$$\therefore P_R = 4 \text{ u}$$

- Los vectores \vec{P} y \vec{Q} forman 60° entre sí y $|\vec{P}| = 2 \text{ u}$. Determine el módulo de \vec{Q} para que el vector $\vec{P} - \vec{Q}$ sea perpendicular a \vec{P} .

Resolución

Nos piden $|\vec{Q}|$, para que $\vec{P} \perp (\vec{P} - \vec{Q})$.

Usaremos el producto escalar sabiendo que si dos vectores forman 90° su producto escalar es cero.

Luego

$$\vec{P} \cdot (\vec{P} - \vec{Q}) = \vec{P} \cdot \vec{P} - \vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$$

$$P^2 - P \cdot Q \cdot \cos 60^\circ = 0$$

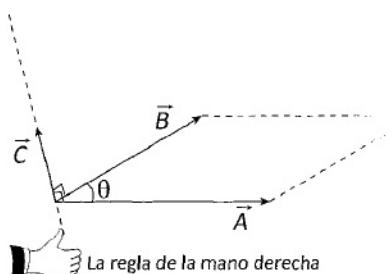
$$4 - 2|\vec{Q}| \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore |Q| = 4 \text{ u}$$

Si se conoce el módulo de cada vector y el ángulo que forman entre sí, se puede calcular como

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta$$

Geométricamente, el nuevo vector es perpendicular al plano que forman los vectores que lo originan, siendo su módulo el área del paralelogramo formado por los primeros y su orientación se determina a partir de la regla de la mano derecha.



Es decir

$$|\vec{C}| \equiv \text{Área paralelogramo}$$

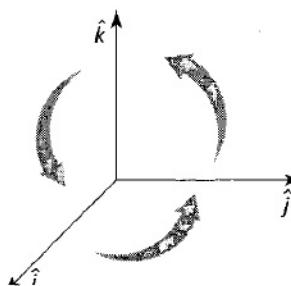
Los vectores \vec{A} , \vec{B} y $\vec{A} \times \vec{B}$ forman un trío a derechas (un sistema dextrogiro), lo que quiere decir que la dirección $\vec{A} \times \vec{B}$ es la que indica el dedo pulgar de la mano derecha cuando esta se cierra desde el vector \vec{A} hacia el vector \vec{B} , en el plano AB .

Las propiedades del producto vectorial son

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ anticomutatividad
2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ (distributivo respecto de la suma)
3. $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$
siendo m un escalar

Observación

El gráfico siguiente resume lo encontrado, proporcionando además una buena forma de recordarlo en el futuro.



Producto vectorial entre vectores.

$$\hat{i} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

Ejemplos

1. Halle un vector ortogonal a $\vec{U} = (1; -1; 0)$ y a $\vec{V} = (2; 0; 1)$, cuyo módulo sea $\sqrt{24}$ u.

Resolución

Nos piden un vector que sea perpendicular a los vectores \vec{U} y \vec{V} (aunque podemos considerar que dicho vector sea perpendicular al plano formado por \vec{U} y \vec{V}), para lo cual usaremos el producto vectorial entre \vec{U} y \vec{V} . Consideraremos que sea \vec{x} el vector pedido, es decir

$$\vec{x} = K(\vec{U} \times \vec{V}) \quad y \quad |\vec{x}| = \sqrt{24} \text{ u}$$

Hallando $\vec{U} \times \vec{V}$

$$\begin{aligned} \vec{U} \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) - \hat{j}(1 \cdot 0 - 0 \cdot 2) + \hat{k}(1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) \\ &= (\hat{i})(1) - (\hat{j})(0) + (\hat{k})(2) \\ &= \hat{i} - 0 + 2\hat{k} \\ &= (-1; -1; 2) \end{aligned}$$

Ahora determinemos su módulo

$$K \|\vec{U} \times \vec{V}\| = K \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$

$$K \sqrt{6} = \sqrt{24} \rightarrow K = 2$$

Finalmente en (α)

$$\vec{x} = 2(-1; -1; 2) = (-2; -2; 4)$$

1. Si los vectores \vec{A} y \vec{B} son paralelos, entonces, por definición

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB \operatorname{sen} \theta) \hat{u} = \vec{0}$$

Esta es la condición de paralelismo.

2. $\hat{i} \times \hat{i} = \vec{0}; \hat{j} \times \hat{j} = \vec{0}; \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

Según la aplicación anterior.

3. También se tiene, aplicando la definición, que

$$\hat{i} \times \hat{j} = \{(1)(1)(\operatorname{sen} 90^\circ)\} \hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \{(1)(1)(\operatorname{sen} 90^\circ)\} \hat{i} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \{(1)(1)(\operatorname{sen} 90^\circ)\} \hat{j} = \hat{j}$$

Y según la propiedad de anticomutatividad

2. Halle un vector \vec{U} que tenga la misma dirección de $\vec{V} = (1; -2; 3)$, de tal forma que dicho vector y $\vec{W} = (-2; 4; -1)$ formen un paralelogramo de 25 u^2 de área.

Resolución

Nos piden \vec{U} , tal que sea paralelo con $\vec{V} = (1; -2; 3)$; por lo tanto

$$\vec{U} = m\vec{V} = m(1; -2; 3)$$

$$\vec{U} = (m; -2m; 3m) \quad (k \neq 0)$$

Observación

Regla de Sarruz para hallar el determinante de una matriz:

$$\text{Sea } \vec{A} = (A_x; A_y; A_z) \text{ y } \vec{B} = (B_x; B_y; B_z) \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Operamos

$$\begin{aligned} &+ \left(\begin{array}{ccc|c} A_y B_x \hat{k} & & & A_y B_z \hat{i} \\ A_z B_y \hat{i} & & & A_x B_y \hat{k} \\ A_x B_z \hat{j} & & & A_z B_x \hat{j} \end{array} \right) + \\ &\text{resultado 2} \qquad \qquad \qquad \text{resultado 1} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = (\text{resultado 1}) - (\text{resultado 2})$$

Ahora, para formar un paralelogramo con \vec{W} , debemos obtener el producto vectorial de estos, es decir

$$\begin{aligned} \vec{U} \times \vec{W} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ m & -2m & 3m \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{matrix} 12m\hat{i} \\ -m\hat{j} \end{matrix} - \begin{matrix} 2m\hat{i} \\ 4m\hat{k} \end{matrix} \\ &= (2m\hat{i} - 6m\hat{j} + 4m\hat{k}) - (12m\hat{i} - m\hat{j} + 4m\hat{k}) \\ &= (-10m\hat{i} - 5m\hat{j}) = (-10m; -5m; 0) \end{aligned}$$



Luego su módulo será el área del paralelogramo

$$|\vec{U} \times \vec{W}| = \sqrt{100m^2 + 25m^2} = 25$$

$$125m^2 = 625$$

$$m = \pm \sqrt{5}$$

Finalmente, serán dos los vectores que cumplen la condición

$$\vec{U}_1 = (\sqrt{5}; -2\sqrt{5}; 3\sqrt{5}) \text{ o } \vec{U}_2 = (-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; -3\sqrt{5})$$

3. Por medio de la combinación de productos se pueden construir expresiones más complejas. Por ejemplo, con tres vectores podemos construir las siguientes combinaciones. Identificar su validez.

- a. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$
- b. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$
- c. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$
- d. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$
- e. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$
- f. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$
- g. $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$
- h. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

Resolución

No todas estas combinaciones tienen sentido, analicémoslas de una en una.

- a. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$ es un vector colineal con \vec{A} , y tiene la misma dirección, o con dirección contraria, si el escalar $(\vec{B} \cdot \vec{C})$ es positivo o negativo.
- b. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$ es un vector colineal con \vec{C} , y tiene la misma dirección, o con dirección contraria, si el escalar $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ es positivo o negativo.
- c. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ es un vector (resultado del producto vectorial entre dos vectores) que es perpendicular al vector $\vec{B} \times \vec{C}$; por lo tanto, se encuentra en el plano que contiene a los vectores \vec{B} , y \vec{C} y dentro de dicho plano en una dirección perpendicular al vector \vec{A} .
- d. $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ es un vector (resultado del producto vectorial entre dos vectores) que es perpendicular al vector $\vec{A} \times \vec{B}$, por lo tanto, se encuentra en el plano que contiene a los vectores \vec{A} , y \vec{B} , y dentro de dicho plano en una dirección perpendicular al vector \vec{C} .
- e. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ es un escalar, resultado del producto escalar entre los vectores \vec{A} y $(\vec{B} \times \vec{C})$.
- f. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$ **no tiene sentido!** El producto vectorial es una operación entre dos vectores, no entre un escalar y un vector, es decir $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ es un escalar.
- g. $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$ **no tiene sentido!** El producto vectorial es una operación entre dos vectores, no entre un vector y un escalar, es decir $(\vec{B} \cdot \vec{C})$ es un escalar.
- h. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ es un escalar (resultado del producto escalar entre dos vectores).

Del análisis anterior podemos deducir las siguientes propiedades:

- $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) \neq (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$ no verifica la asociativa (ver combinaciones a y b).
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ no verifica la asociativa (ver combinaciones c y d).
- En un **producto mixto** entre tres vectores (combinación de producto escalar y vectorial, ver combinaciones e, f, g y h) la expresión solo tiene sentido si se realiza primero el producto vectorial y luego el escalar; es por ello que no es necesario escribir los paréntesis:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} \equiv \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

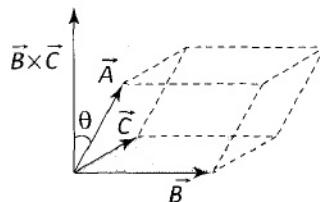
La expresión de un producto mixto en función de las componentes de los vectores viene dada como el desarrollo de un determinante

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

y utilizando las propiedades de los determinantes se puede demostrar que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

El **valor absoluto del producto mixto** (tomamos el valor absoluto ya que el resultado podría ser negativo) es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores, como se muestra en la siguiente figura



$$\text{volumen} = \text{área de la base} \cdot \text{altura} =$$

$$= |\vec{B} \times \vec{C}| |A \cos \theta| = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$$

Relación entre el volumen de paralelepípedo formado por tres vectores y su producto mixto.

Un doble producto vectorial puede desarrollarse en productos escalares de la siguiente forma

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Sale del paréntesis el vector \vec{B} , que es el **vector más cercano** al vector externo \vec{A} , el cual entra en el paréntesis multiplicándose escalarmente por el otro vector.

Sale del paréntesis el vector \vec{C} , que es el **vector más alejado** al vector externo \vec{A} , el cual entra en el paréntesis multiplicándose escalarmente por el otro vector.

Utilizando el mismo razonamiento podemos desarrollar el siguiente doble producto vectorial viendo que nos da lo mismo que el anterior

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

Nota

Diferencias entre el álgebra escalar y el álgebra vectorial

En los apartados anteriores hemos visto diferentes operaciones entre vectores y escalares. En una expresión matemática en la que aparezcan ambos tipos de magnitudes físicas, la forma de manejarlas es similar a cómo se operaba en el álgebra de escalares. Como ejemplo, supongamos la siguiente relación entre los escalares a y b y los vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ y \vec{E} :

$$a(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - b\vec{D} = \vec{E}$$

Y nos piden que despejemos el vector \vec{C} en función de las demás magnitudes. El proceso sería como sigue:

$$a(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - b\vec{D} = \vec{E} \rightarrow a(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \vec{E} + b\vec{D}$$

$$\rightarrow (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \frac{\vec{E} + b\vec{D}}{a} \rightarrow \vec{C} = \frac{\vec{E} + b\vec{D}}{a(\vec{A} \cdot \vec{B})}$$

Nótese que el denominador de la fracción es un escalar, solo tenemos escalares: a y $(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

Esta familiaridad en el manejo de los vectores, de forma similar a operar con escalares, puede conducir a error. Si nos hubiesen pedido despejar el escalar a , estaríamos tentados de realizar lo siguiente

$$a(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - b\vec{D} = \vec{E} \rightarrow a(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \vec{E} + b\vec{D}$$

$$\rightarrow a\vec{C} = \frac{\vec{E} + b\vec{D}}{(\vec{A} \cdot \vec{B})} \rightarrow a = \frac{\vec{E} + b\vec{D}}{(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}}$$

¡Y estaríamos cometiendo un grave error! En este caso el denominador de la fracción, $(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$, es un vector, y **la división por un vector ni está definida ni tiene ningún sentido!** Este detalle junto con el hecho de que el producto vectorial entre dos vectores es anticomutativo son dos de las cosas que hay que tener en cuenta cuando se manejan expresiones con vectores.

PROBLEMAS RESUELTOS

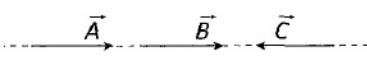
NIVEL BÁSICO

PROBLEMA N.º 1

Para los vectores mostrados

$$|\vec{A}|=8 \text{ u}, |\vec{B}|=10 \text{ u} \text{ y } |\vec{C}|=6 \text{ u},$$

halle el módulo de \vec{R} , si $\vec{R}=2\vec{A}-3\vec{B}+4\vec{C}$



- A) 26 u B) 28 u C) 32 u
D) 38 u E) 42 u

Resolución

Nos piden $|\vec{R}|$.

Nótese que los vectores son colineales, su suma dependerá de la dirección que tengan.

Siendo

$$|\vec{R}|=|2\vec{A}-3\vec{B}+4\vec{C}| \quad (\text{I})$$

Nótese que $-3\vec{B}$ y $4\vec{C}$ tienen la misma dirección, podemos sumarlos directamente.

$$\vec{S}_1=-3\vec{B}+4\vec{C}$$

Luego, su módulo será

$$|\vec{S}_1|=3|\vec{B}|+4|\vec{C}|$$

$$|\vec{S}_1|=3(10)+4(6)$$

$$\therefore |\vec{S}_1|=54 \text{ u} \quad (\alpha)$$

Ahora, para hallar \vec{R} sumaremos $2\vec{A}$ y \vec{S}_1 , teniendo en cuenta que tienen direcciones opuestas, por lo tanto su módulo será el valor absoluto de la diferencia de sus módulos, es decir

En (I)

$$\vec{R}=2\vec{A}+\vec{S}_1$$

Luego, su módulo será

$$|\vec{R}|=|2\vec{A}-\vec{S}_1|$$

De (α)

$$|\vec{R}|=|2(8)-54|$$

$$\therefore |\vec{R}|=38 \text{ u}$$

CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 2

Dos vectores son proporcionales a 8 y 6. Si la resultante mínima es 20 u, halle el módulo de la resultante máxima.

- A) 14 u

- B) 28 u

- C) 35 u

- D) 70 u

- E) 140 u

**Resolución**Nos piden: R_{\max} .Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores, tal que $A = 8k$ y $B = 6k$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} R_{\max.} &= A + B \\ &= 8k + 6k \end{aligned}$$

$$R_{\max.} = 14k$$

(I)

Veamos

$$\frac{2}{3}\vec{A} = \frac{2}{3}(12; -15) = \left(\frac{2}{3} \times 12; -\frac{2}{3} \times 15\right)$$

$$\frac{2}{3}\vec{A} = (8; -10)$$

Finalmente

$$\frac{2}{3}\vec{A} = (8; -10)$$

Por dato

$$R_{\min.} = A - B$$

$$20 = 8k - 6k$$

$$\therefore k = 10$$

(α)

CLAVE (C)

Luego (α) en (I)

$$R_{\max.} = 14(10)$$

$$\therefore R_{\max.} = 140 \text{ u}$$

CLAVE (E)**PROBLEMA N.º 4**Sabiendo que $\vec{A} = (5; 6)$ y $\vec{B} = (4; 6)$ halle el módulo de $\vec{A} + \vec{B}$.

- A) 9 u B) 12 u C) 15 u
 D) 20 u E) 25 u

ResoluciónNos piden $|\vec{A} + \vec{B}|$.

Ordenamos los vectores, y sumamos las respectivas componentes.

$$\begin{array}{r} \vec{A} = (5; 6) \\ \vec{B} = (4; 6) \\ \hline \vec{A} + \vec{B} = (9; 12) \end{array} (+)$$

Luego, hallando su módulo

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9^2 + 12^2}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = 15 \text{ u}$$

CLAVE (C)**Resolución**

Nos piden las coordenadas de un nuevo vector,

obtenido al multiplicar \vec{A} por el escalar $\frac{2}{3}$

PROBLEMA N.º 5

Sabiendo que $\vec{A} = (13; 11)$ y $\vec{B} = (7; 3)$, halle el módulo de $\vec{A} - \vec{B}$.

- A) 5 u
- B) 10 u
- C) 15 u
- D) 20 u
- E) 25 u

Resolución

Nos piden

$$\left| \frac{1}{2}\vec{A} + 3\vec{B} \right|$$

Lo primero que faremos será hallar el nuevo vector

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{A} &= \frac{1}{2}(4; 6) = (2; 3) \\ 3\vec{B} &= 3(2; 1) = (6; 3) \end{aligned} \quad (+)$$

$$\frac{1}{2}\vec{A} + 3\vec{B} = (8; 6)$$

Resolución

Nos piden $|\vec{A} - \vec{B}|$

Ordenamos los vectores y en este caso restamos las respectivas componentes.

$$\begin{array}{r} \vec{A} = (13; 11) \\ \vec{B} = (7; 3) \\ \hline \vec{A} - \vec{B} = (6; 8) \end{array} \quad (-)$$

Ahora, hallando su módulo

$$\left| \frac{1}{2}\vec{A} + 3\vec{B} \right| = \sqrt{8^2 + 6^2}$$

$$\therefore \left| \frac{1}{2}\vec{A} + 3\vec{B} \right| = 10 \text{ u}$$

Luego, hallando su módulo

$$\begin{aligned} |\vec{A} - \vec{B}| &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ \therefore |\vec{A} - \vec{B}| &= 10 \text{ u} \end{aligned}$$

CLAVE (C)

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 7

Si $A = 10$ u; $B = 10$ u y $C = 10$ u, tal que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, halle el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} .

PROBLEMA N.º 6

Sabiendo que $\vec{A} = (4; 6)$ y $\vec{B} = (2; 1)$, halle el módulo del vector $\frac{1}{2}\vec{A} + 3\vec{B}$.

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| A) 4 u | B) 6 u | C) 10 u | D) 90° |
| E) 12 u | F) 15 u | G) 180° | H) 120° |

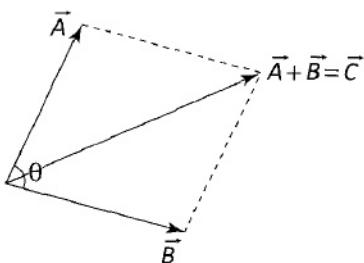
A) 37°

B) 45°

C) 60°

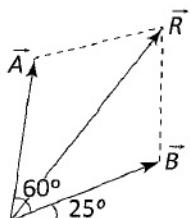
Resolución

Nos piden la medida del ángulo que forman los vectores \vec{A} y \vec{B} .

**Resolución**

Nos piden el módulo de la resultante entre los vectores \vec{A} y \vec{B} .

Para hallarlo uniremos los orígenes de los vectores (libres), obteniendo el ángulo que forman entre sí y, finalmente, usaremos la ley del paralelogramo.



Usando la ley del paralelogramo

$$\boxed{|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 2(10)(10)\cos\theta}$$

$$10^2 = 10^2 + 10^2 + 2(10)^2\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 120^\circ$$

CLAVE E

De la ley del paralelogramo

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 60^\circ}$$

$$R = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2(5)(3)(1/2)}$$

$$R = \sqrt{49}$$

$$\therefore R = 7 \text{ u}$$

CLAVE B

PROBLEMA N.º 8

Dados los vectores \vec{A} y \vec{B} , tal que $|\vec{A}|=5 \text{ u}$ y $|\vec{B}|=3 \text{ u}$, determine el módulo de su resultante.



- A) 8 u
- B) 7 u
- C) 6 u
- D) 9 u
- E) 2 u

PROBLEMA N.º 9

Si el módulo de la resultante máxima de dos vectores es 28 u y la mínima es 4 u, determine el módulo de la resultante cuando estos formen 90° entre sí.

- A) 12 u
- B) 16 u
- C) 18 u
- D) 20 u
- E) 25 u

**Resolución**

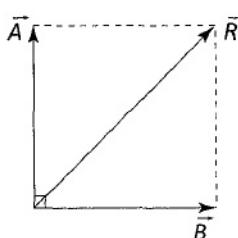
Nos piden el módulo de la resultante cuando los vectores sean perpendiculares; para esto debemos conocer los vectores.

Sean \vec{A} y \vec{B} los vectores, tal que $A > B$.

Por dato

$$\begin{aligned} S_{\text{máx.}} &= A+B = 28 \text{ u} \\ S_{\text{mín.}} &= A-B = 4 \text{ u} \\ \hline 2A &= 32 \text{ u} \\ \therefore A &= 16 \text{ u y } B = 12 \text{ u} \end{aligned}$$

Ahora, hagamos que los vectores formen 90° entre sí, tendremos

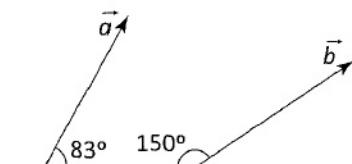


$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ R &= \sqrt{16^2 + 12^2} \\ \therefore R &= 20 \text{ u} \end{aligned}$$

CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 10

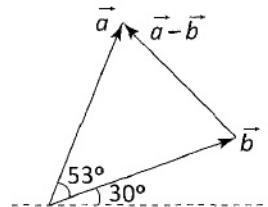
Sabiendo que $|\vec{a}|=5 \text{ u}$ y $|\vec{b}|=6 \text{ u}$, determine el módulo de la diferencia entre los vectores.



- A) 3 u B) 5 u C) 7 u
D) 11 u E) 1 u

Resolución

Nos piden el módulo del vector diferencia, para lo cual unimos los orígenes de cada vector.



De la ley de cosenos

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos 53^\circ}$$

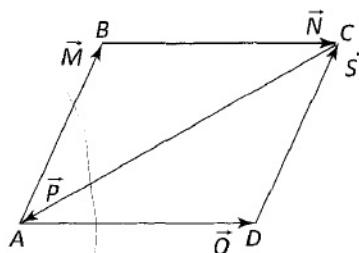
$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = 5 \text{ u}$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 11

A partir del sistema de vectores que se muestra, determine el vector resultante.

(ABCD: paralelogramo)



- A) \vec{P} B) $2\vec{P}$ C) \vec{Q}
D) $-\vec{P}$ E) $-\vec{Q}$

**Resolución**

Se pide el vector resultante \vec{R} .

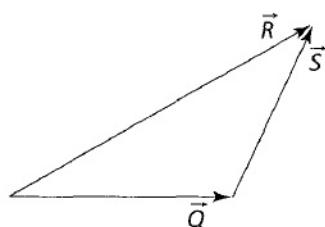
De la figura: $\vec{R} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$ (I)
se puede notar que los vectores \vec{M}, \vec{N} y \vec{P} forman un polígono cerrado, por lo tanto

$$\vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = \vec{O}$$

En (I)

$$\vec{R} = \vec{O} + \vec{Q} + \vec{S} \quad (\text{II})$$

Haciendo un nuevo gráfico, se tiene



La resultante es un vector de igual tamaño que \vec{P} , pero su dirección es opuesta, es decir, $\vec{R} = -\vec{P}$

CLAVE (D)

A) \vec{F}

B) $2\vec{F}$

C) $3\vec{F}$

D) $-\vec{F}$

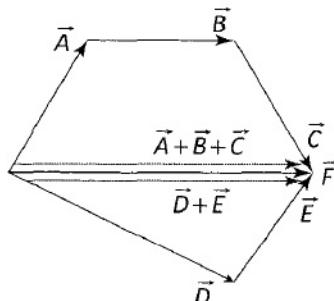
E) $-2\vec{F}$

Resolución

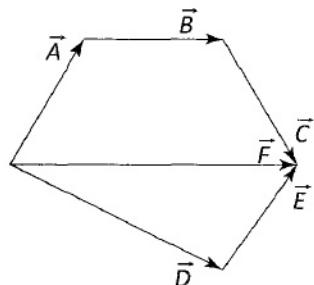
Se pide el vector resultante, para lo cual agruparemos los vectores de manera conveniente, usando el método del polígono.

Sea

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} \quad (\text{I})$$

**PROBLEMA N.º 12**

En el gráfico adjunto, halle la resultante de los vectores mostrados.



de la figura notamos

I. $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{F}$ (α)

II. $\vec{D} + \vec{E} = \vec{F}$ (β)

Luego (α) y (β) en (I)

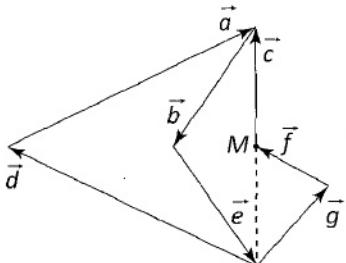
$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F} + \vec{F}$$

$$\therefore \vec{R} = 3\vec{F}$$

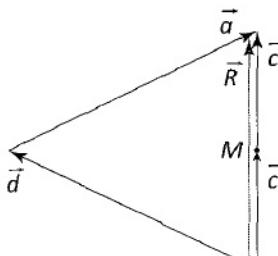
CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 13

En el sistema de vectores mostrados determine el vector resultante (M : punto medio).



Haciendo un nuevo gráfico



$$\text{Se tiene que } \vec{a} + \vec{d} = 2\vec{c}$$

En (II)

$$\vec{R} = 2\vec{c}$$

- A) \vec{c}
B) $2\vec{c}$
C) $-2\vec{c}$
D) $-\vec{c}$
E) $-3\vec{c}$

CLAVE (B)**Resolución**

Se pide el vector resultante. Agruparemos los vectores convenientemente.

Sea

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} \quad (\text{I})$$

En el gráfico notamos que $\vec{b}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ y \vec{c} forman un polígono cerrado, es decir

$$\vec{b} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{c} = \vec{0}$$

En (I)

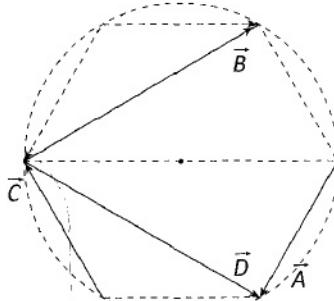
$$\vec{R} = \vec{a} + \underbrace{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g}}_{\vec{0}} + \vec{d}$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{d}$$

(II)

PROBLEMA N.º 14

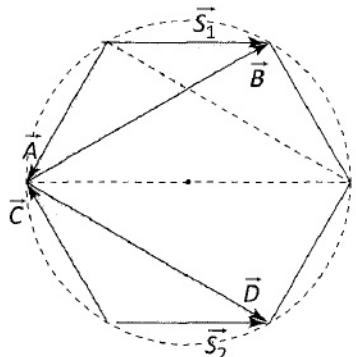
En el gráfico se muestra un hexágono regular de lado a . Halle el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



- A) a
B) $2a$
C) $a\sqrt{2}$
D) $a\sqrt{3}$
E) $a\sqrt{5}$

Resolución

Piden el módulo del vector resultante, para lo cual trasladaremos el vector \vec{A} en forma paralela hasta que su extremo coincida con el origen del vector \vec{B} ; lo mismo hacemos con \vec{C} y \vec{D} .



Sea

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} \quad (\text{I})$$

Del gráfico

$$\vec{S}_1 = \vec{A} + \vec{B} \quad (\alpha)$$

$$\vec{S}_2 = \vec{C} + \vec{D} \quad (\beta)$$

Luego (α) y (β) en (I)

$$\vec{R} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

Además, \vec{S}_1 es paralelo a \vec{S}_2

En módulo

$$R = S_1 + S_2 = a + a$$

$$\therefore R = 2a$$

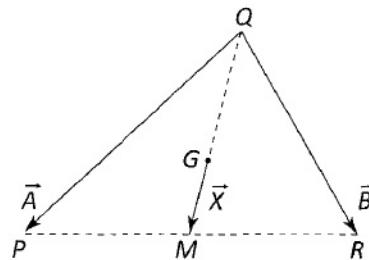
CLAVE **B**

De la figura

En el $\triangle(\text{I})$

$$\vec{A} + \vec{n} = 3\vec{x}$$

(α)

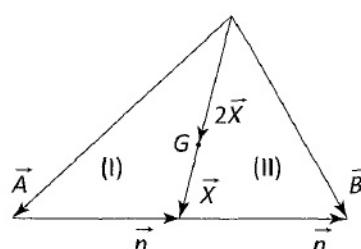


- A) $(2\vec{a} + \vec{b})/3$ B) $(\vec{a} + 2\vec{b})/6$ C) $(\vec{a} + \vec{b})/6$
 D) $(\vec{a} + \vec{b})/3$ E) $(2\vec{a} + 3\vec{b})/2$

Resolución

Nos piden \vec{x} en términos de \vec{a} y \vec{b} , para lo cual usaremos la propiedad del baricentro: $\vec{QG} = 2\vec{GM}$.

Además, usaremos también un vector auxiliar que al final debe ser eliminado.



En el $\triangle(II)$

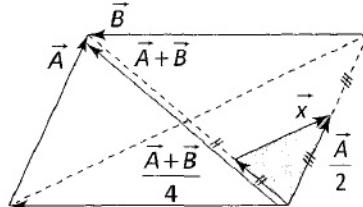
$$\vec{B} = 3\vec{x} + \vec{n}$$

(β)

Sumando (α) y (β)

$$\vec{A} + \vec{B} = 6\vec{x}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{(\vec{A} + \vec{B})}{6}$$



En el triángulo sombreado

CLAVE (C)

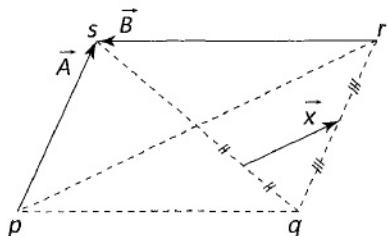
$$\frac{\vec{A}}{4} + \frac{\vec{B}}{4} + \vec{x} = \frac{\vec{A}}{2}$$

PROBLEMA N.º 16

Determine el vector \vec{x} en función de los vectores \vec{A} y \vec{B} , si $rpqs$ es un paralelogramo.

$$\vec{x} = \frac{\vec{A} - \vec{B}}{4}$$

CLAVE (A)



PROBLEMA N.º 17

Se tiene dos vectores A y B , de modo que la suma máxima es 15 u y la mínima 5 u. Determine el módulo de cada vector.

A) $\frac{\vec{A} - \vec{B}}{4}$

B) $\frac{\vec{A} - 2\vec{B}}{3}$

C) $\frac{2\vec{A} - 3\vec{B}}{4}$

D) $\frac{\vec{A} - 3\vec{B}}{4}$

A) 10 u; 5 u

B) 12 u; 3 u

C) 8 u; 7 u

D) 7 u; 2 u

E) 12 u; 7 u

Resolución

Nos piden el módulo de cada vector, sabiendo que

$$S_{\max.} = 15 \text{ u} \quad y \quad S_{\min.} = 5 \text{ u}$$

Recuerde que para la $S_{\max.}$, los vectores deben formar 0° y para la suma mínima 180° .

Resolución

Nos piden hallar \vec{x} en función de \vec{A} y \vec{B} .

Notese que el módulo de \vec{x} es una base media.

Entonces, sean \vec{A} y \vec{B} los vectores, tenemos

$$S_{\text{máx.}} = \vec{A} + \vec{B} = 15 \text{ u}$$

$$S_{\text{mín.}} = \vec{A} - \vec{B} = 5 \text{ u}$$

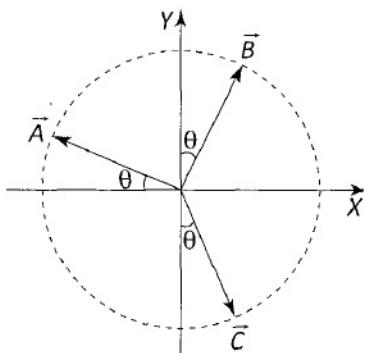
$$\vec{A} = 10 \text{ u}$$

$$\vec{B} = 5 \text{ u}$$

CLAVE A

PROBLEMA N.º 18

El gráfico muestra tres vectores de igual módulo. Halle la medida del ángulo θ para que la resultante sea mínima.



- A) 15°
- B) $37^\circ/2$
- C) $45^\circ/2$
- D) $53^\circ/2$
- E) 30°

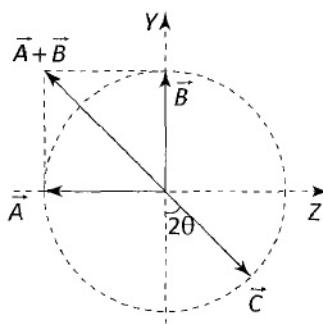
Resolución

Nos piden θ para que la resultante sea mínima.

En este caso, vamos a girar el sistema de vectores un ángulo θ , en sentido antihorario.

Esta acción no altera el módulo del vector resultante.

Note que los vectores \vec{A} y \vec{B} ahora caen sobre los ejes de coordenadas.



Se puede notar que la suma de \vec{A} y \vec{B} forma 45° con los ejes.

Para que la resultante sea mínima, el vector $(\vec{A} + \vec{B})$ y \vec{C} deben formar 180° .

Del gráfico

$$2\theta = 45^\circ$$

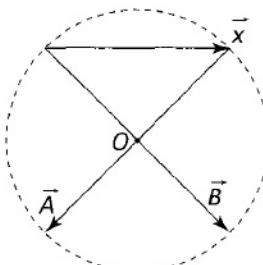
$$\therefore \theta = 45^\circ/2$$

CLAVE C

PROBLEMA N.º 19

A partir del gráfico mostrado, exprese \vec{x} en función de los vectores \vec{A} y \vec{B} (O : centro de la circunferencia).

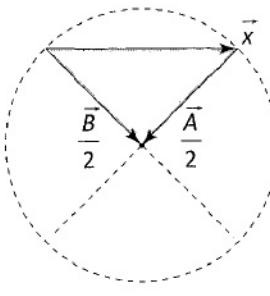
- A) $(\vec{A} - \vec{B})/2$
- B) $(2\vec{A} - \vec{B})/2$
- C) $3(\vec{A} - 2\vec{B})/6$
- D) $4(\vec{A} - \vec{B})/3$
- E) $(\vec{B} - \vec{A})/2$



Resolución

Nos piden \vec{x} en función de \vec{A} y \vec{B} .

- A) 2 u B) 4 u C) 6 u
D) 8 u E) 10 u



Nótese que el módulo de cada vector es un diámetro, por lo que O representa el punto medio de ambos.

Del triángulo vectorial sombreado

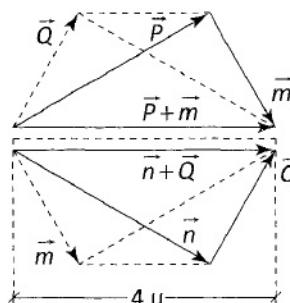
$$\vec{x} + \vec{A}/2 = \vec{B}/2$$

$$\therefore \vec{x} = (\vec{B} - \vec{A})/2$$

CLAVE (E)

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante. Trasladaremos de manera adecuada los vectores, para usar el método del polígono.



Sea la resultante

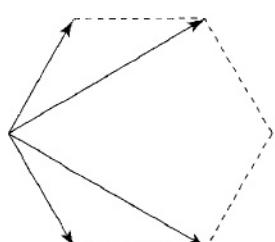
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{m} + \vec{n}$$

En módulo

$$|\vec{R}| = |\vec{P} + \vec{Q} + \vec{m} + \vec{n}| \quad (I)$$

PROBLEMA N.º 20

En el gráfico se muestra un polígono regular de 2 u de lado. Determine el módulo del vector resultante del sistema mostrado.



Además

$$|\vec{P} + \vec{m}| = |\vec{n} + \vec{Q}|$$

En (I)

$$|\vec{R}| = 2|\vec{P} + \vec{m}|$$

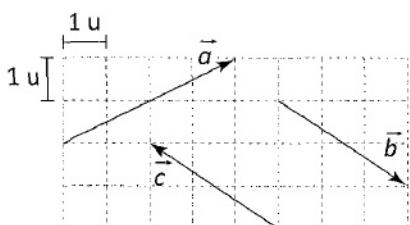
$$= 2(4)$$

$$\therefore |\vec{R}| = 8 \text{ u}$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 21

En el sistema de vectores mostrado, determine el módulo del vector resultante.



- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$
 D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{7}$
- A) 15° B) 30° C) 45°
 D) 60° E) 75°

Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

en módulo

$$|\vec{R}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$$

Del gráfico

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (4; 2) \\ \vec{b} &= (3; -2) \\ \vec{c} &= (-3; 2)\end{aligned}$$

$$\vec{R} = (4; 2)$$

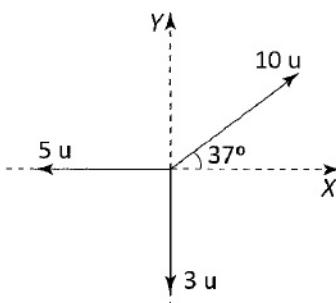
hallando su módulo

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

CLAVE **B**

PROBLEMA N.º 22

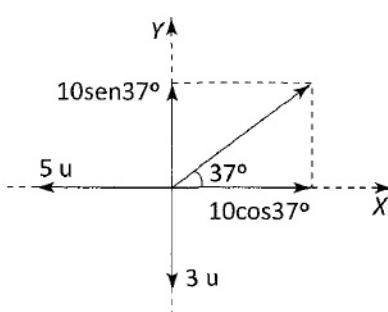
En el sistema de vectores mostrado determine la dirección la dirección del vector resultante.

**Resolución**

Nos piden: θ_R

$$\text{Se sabe que } \theta_R = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \quad (\text{I})$$

Para esto debemos reducir el sistema.



En el eje X

$$R_x = 10\cos 37^\circ - 5$$

$$R_x = 8 - 5$$

$$\therefore R_x = 3 \text{ u} \quad (\alpha)$$

En el eje Y

$$R_y = 10 \operatorname{sen} 37^\circ - 3$$

$$R_y = 6 - 3$$

$$\therefore R_y = 3 \text{ u}$$

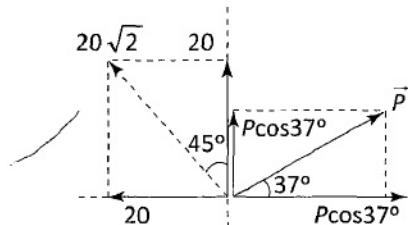
(β)

Finalmente, (α) y (β) en (I)

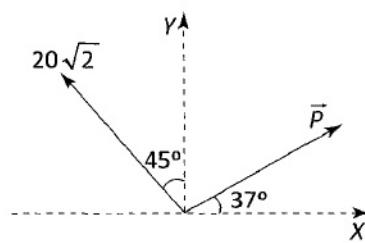
$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = 1$$

$$\therefore \theta_R = 45^\circ$$

Descomponiendo los vectores

**PROBLEMA N.º 23**

En el sistema de vectores que se muestra, determine el módulo del vector \vec{P} para que la resultante sea vertical.



- A) 18 u
B) 20 u
C) 25 u
D) 30 u

- B) 20 u
E) 35 u

Resolución

Nos piden \vec{P} para que la resultante sea vertical; esto se cumplirá si y solo si en la horizontal se verifica $R_x = 0$.

Del gráfico

$$P \cos 37^\circ = 20$$

$$P \left(\frac{4}{5} \right) = 20$$

$$\therefore P = 25 \text{ u}$$

CLAVE C**PROBLEMA N.º 24**

Sabiendo que $\vec{A} = 6\hat{i} + 2\hat{j}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$, determine el unitario del vector resultante.

A) $\frac{1}{25}(7\hat{i} + 24\hat{j})$

B) $\frac{1}{5}(4\hat{i} + 3\hat{j})$

C) $\frac{2}{5}(\hat{i} + \hat{j})$

D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$

E) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{i} + \hat{j})$

**Resolución**

Nos piden

$$\mu_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \quad (\alpha)$$

Hallando en primer lugar el vector resultante

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 6\hat{i} + 2\hat{j} \\ \vec{B} &= 2\hat{i} + 4\hat{j} \\ \hline \vec{R} &= 8\hat{i} + 6\hat{j} \end{aligned} \quad (\beta)$$

Calculamos su módulo

$$\begin{aligned} |\vec{R}| &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ |\vec{R}| &= 10 \text{ u} \end{aligned} \quad (\gamma)$$

Finalmente, (β) y (γ) en (α)

$$\hat{\mu}_R = \frac{8\hat{i} + 6\hat{j}}{10} = \frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$$

CLAVE B

A) $\sqrt{7}$

B) $2\sqrt{7}$

C) $\sqrt{5}$

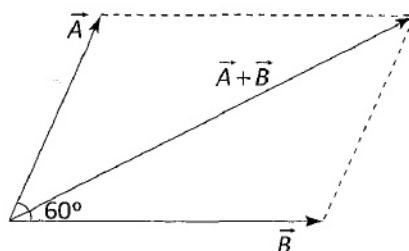
D) $2\sqrt{5}$

E) $5\sqrt{7}$

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante.

Examinemos el gráfico:



Podemos deducir que

$$|\vec{B}| = 4 \text{ u}$$

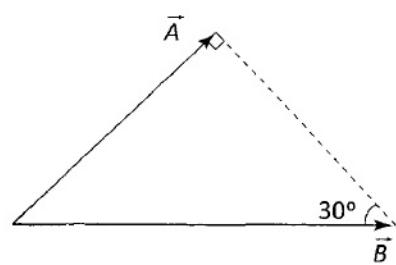
Ahora, usaremos la ley del paralelogramo

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

Reemplazando los valores

$$\begin{aligned} |\vec{A} + \vec{B}| &= \sqrt{2^2 + 4^2 + 2(2)(4)\cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{28} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = 2\sqrt{7} \text{ u}$$

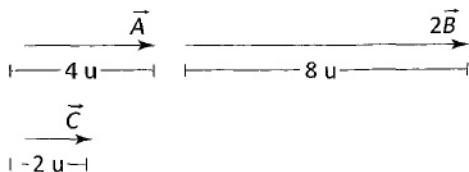
CLAVE B

NIVEL INTERMEDIO**PROBLEMA N.º 26**

Halle $|\vec{R}|$; sabiendo que

$$\vec{R} = \vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B} + 3\vec{C}$$

donde



- A) 2 u B) 4 u C) 6 u
D) 8 u E) 10 u

Resolución

Nos piden el módulo de \vec{R} , siendo

$$\vec{R} = \vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B} + 3\vec{C} \quad (\text{I})$$

Como los vectores son paralelos, hallaremos la representación cartesiana para cada uno

$$\vec{A} = 4\hat{i}; \vec{B} = 4\hat{i}; \vec{C} = -2\hat{j}$$

En (I)

$$\vec{R} = 4\hat{i} - \frac{1}{2}(4\hat{i}) + 3(-2\hat{j})$$

$$\vec{R} = 4\hat{i} - 2\hat{i} - 6\hat{j}$$

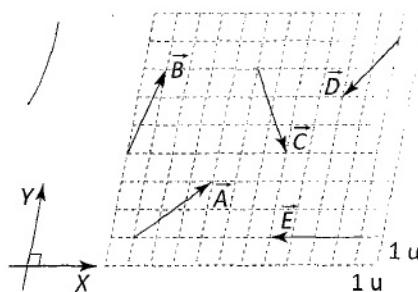
$$\vec{R} = -4\hat{i} - 6\hat{j}$$

En módulo

$$|\vec{R}| = 4 \text{ u}$$

PROBLEMA N.º 27

Halle la resultante del conjunto de vectores mostrados en la figura.



- A) $2\vec{A}$ B) $3\vec{E}$ C) $\vec{D} + \vec{E}$
D) \vec{B} E) \vec{O}

Resolución

Nos piden la resultante del sistema de vectores mostrados.

Representaremos los vectores como pares ordenados. De la figura

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (3; 2) \\ \vec{B} &= (1; 3) \\ \vec{C} &= (2; -3) \\ \vec{D} &= (-2; -2) \\ \vec{E} &= (-4; 0) \\ \hline \vec{S} &= (0; 0) \end{aligned} \quad (+)$$

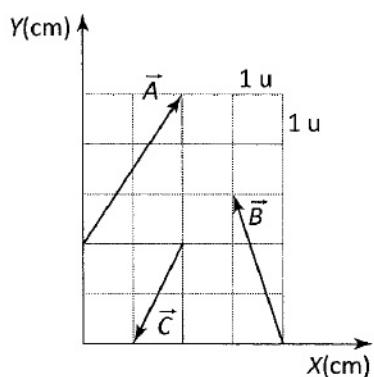
$$\therefore \vec{S} = \vec{O}$$

CLAVE **(B)**

CLAVE **(E)**

PROBLEMA N.^o 28

Sabiendo que la cuadrícula mostrada es de 1 cm de lado, determine el vector resultante.



- A) $2\hat{i}$ B) $-2\hat{i}$ C) $4\hat{j}$
 D) $-4\hat{i}$ E) $2\hat{i}+4\hat{j}$

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante. Expresamos los vectores en función de pares ordenados.

Del gráfico

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (2; 3) \\ \vec{B} &= (-1; 3) \\ \vec{C} &= (-1; -2)\end{aligned}\right. \quad (+)$$

$$\overline{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}} = \vec{S} = (0; 4)$$

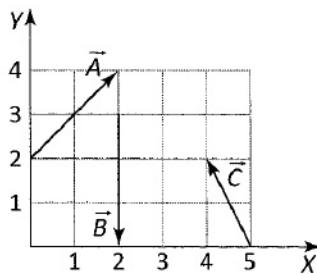
Finalmente

$$\vec{S} = 4\hat{j}$$

CLAVE **C**

PROBLEMA N.^o 29

A partir del siguiente sistema de vectores, determine el vector resultante.

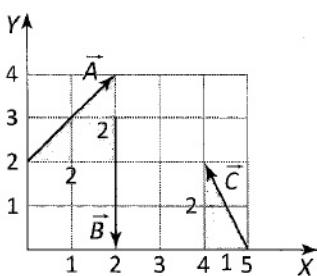


- A) $\hat{i}-\hat{j}$ B) $\hat{i}+\hat{j}$ C) $2\hat{i}-\hat{j}$
 D) $2\hat{j}$ E) $-\hat{j}$

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrado.

Hallemos la representación cartesiana de cada vector y sumamos.



Del gráfico

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (2; 2) \\ \vec{B} &= (0; -3) \\ \vec{C} &= (-1; 2)\end{aligned}\right. \quad (+)$$

$$\overline{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}} = \vec{S} = (1; 1)$$

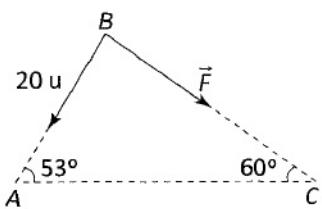
$$\therefore \vec{S} = \hat{i} + \hat{j}$$

CLAVE **B**

PROBLEMA N.º 30

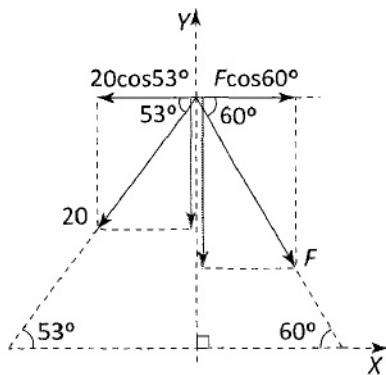
Calcule el módulo de \vec{F} para que la resultante del sistema se oriente según la perpendicular al lado AC .

- A) 16 u
- B) 18 u
- C) 20 u
- D) 22 u
- E) 24 u

**Resolución**

Nos piden el módulo de \vec{F} .

Como la resultante tiene dirección perpendicular al lado AC ; la resultante horizontal será nula.
Descomponiendo los vectores.



Por condición

En el eje X

$$F \cos 60^\circ = 20 \cos 53^\circ$$

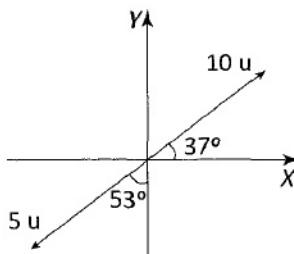
$$F \left(\frac{1}{2} \right) = 20 \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$\therefore F = 24 \text{ u}$$

CLAVE E

PROBLEMA N.º 31

A partir de los vectores que se muestran determine el módulo de su resultante.

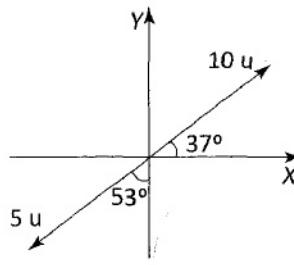


- A) $5\sqrt{2}$
- B) $\sqrt{5}$
- C) 10
- D) 5
- E) 15

Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante.

Si notamos los ángulos, deducimos que los vectores mostrados son colineales, es decir



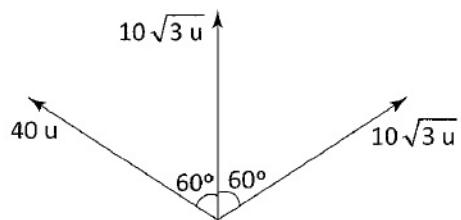
y como tienen direcciones opuestas la suma será mínima.

$$S_{\min.} = 10 - 5 = 5 \text{ u}$$

CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 32

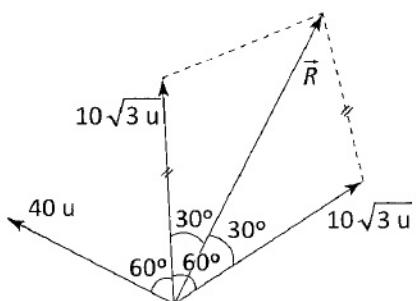
Determine el módulo del vector resultante.



- A) 30 u B) 40 u C) 50 u
 D) 60 u E) 100 u

ResoluciónNos piden R .

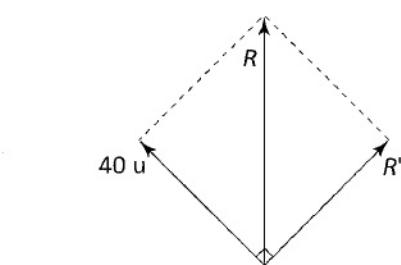
Agrupemos convenientemente los vectores \vec{v} en este caso hallaremos la resultante de los vectores de igual módulo y forman 60° entre sí.



La resultante será

$$R' = 10\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})$$

$$R' = 30 \text{ u}$$

Finalmente, sumaremos vectorialmente R' y 40 u ,Note que forman 90° entre sí.

De la figura

$$R = \sqrt{40^2 + (R')^2}$$

Pero: $R' = 30 \text{ u}$

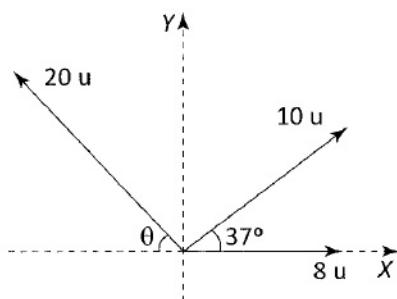
Luego

$$R = \sqrt{40^2 + 30^2}$$

$$\therefore R = 50 \text{ u}$$

CLAVE **(C)****PROBLEMA N.º 33**

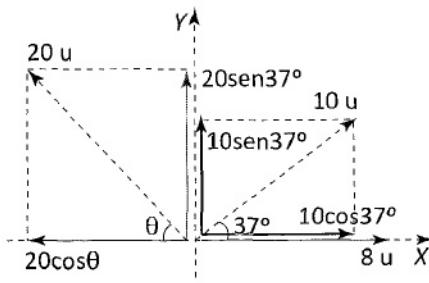
Si la resultante del sistema de vectores mostrado es vertical, determine la medida del ángulo θ .



- A) 16° B) 37° C) 45°
 D) 53° E) 74°

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante sabiendo que es vertical. Vamos a descomponer los vectores dados en los respectivos ejes



Por dato

Como la resultante del sistema es vertical, en la horizontal la resultante debe ser nula.

Del gráfico

$$20\cos\theta = 10\cos 37^\circ + 8$$

$$20\cos\theta = 8 + 8$$

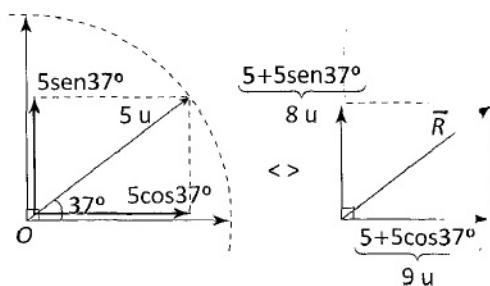
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \theta = 37^\circ$$

CLAVE (B)

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante, para lo cual descomponemos los vectores adecuadamente.



Donde

$$|\vec{R}| = \sqrt{8^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{64 + 81}$$

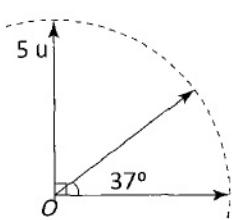
$$\therefore |\vec{R}| = \sqrt{145} \text{ u}$$

CLAVE (D)

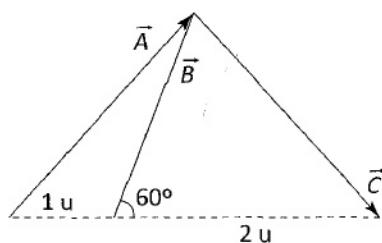
PROBLEMA N.º 34

Dado el sistema de vectores, determine el módulo de su resultante.

- A) $\sqrt{79}$ u
- B) $\sqrt{95}$ u
- C) 10 u
- D) $\sqrt{145}$ u
- E) $\sqrt{165}$ u

**PROBLEMA N.º 35**

Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrado ($b=1$ u).



- A) $2\sqrt{3}$ u
- B) $3\sqrt{5}$ u
- C) $\sqrt{13}$ u
- D) $\sqrt{19}$ u
- E) $2\sqrt{5}$ u

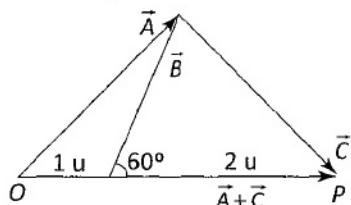
Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante.

Sea $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, en el módulo sería

$$|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}|$$

Examinemos la gráfica



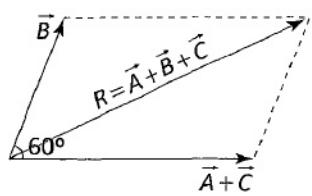
Notemos que

$$\vec{OP} = \vec{A} + \vec{C}$$

Además

$$|\vec{A} + \vec{C}| = 3 \text{ u} \quad (\text{I})$$

Reordenando la figura



Aplicaremos la ley de paralelogramo a los vectores \vec{B} y $(\vec{A} + \vec{C})$.

$$|\vec{R}| = \sqrt{B^2 + |\vec{A} + \vec{C}|^2 + 2B|\vec{A} + \vec{C}|\cos 60^\circ}$$

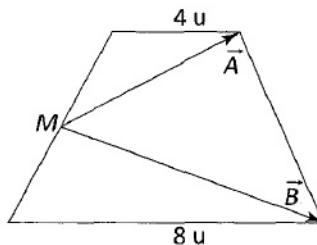
$$|\vec{R}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2(1)(3) \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore |\vec{R}| = \sqrt{13} \text{ u}$$

PROBLEMA N.º 36

En el trapezo se indican los vectores \vec{A} y \vec{B} . Determine el módulo de la suma vectorial.

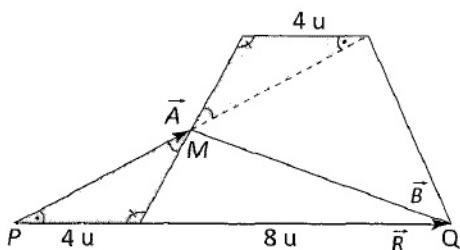
(M: punto medio)



- A) 4 u B) 10 u C) 12 u
D) 16 u E) 20 u

Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante. Para lo cual trasladaremos adecuadamente al vector \vec{A} .



De la figura, los triángulos sombreados son congruentes.

Luego

$$\vec{PQ} = \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

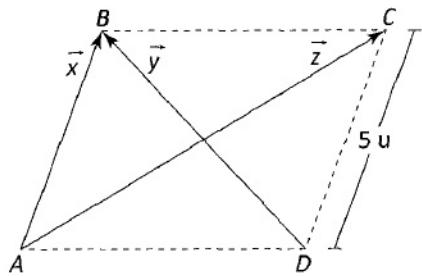
De donde, en módulo será

$$|\vec{PQ}| = |\vec{R}| = 12 \text{ u}$$

CLAVE C

PROBLEMA N.º 37

Dado el paralelogramo $ABCD$, determine el módulo del vector resultante.



Su módulo

$$\vec{R} = |\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}| \quad (\text{I})$$

De la figura notamos que $(\vec{z} + \vec{y})$ y \vec{x} son colineales.

Luego

En (I)

$$\begin{aligned} |\vec{R}| &= |\vec{x}| + |\vec{y} + \vec{z}| \\ &= 5 + 10 \end{aligned}$$

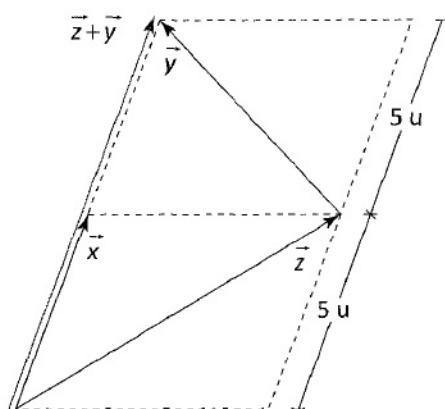
$$\therefore |\vec{R}| = 15 \text{ u}$$

CLAVE (C)

- A) 10 u B) 5 u C) 15 u
D) 20 u E) 25 u

Resolución

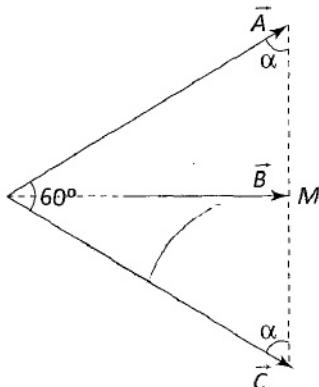
Nos piden el módulo del vector resultante, para lo cual trasladaremos a los vectores de manera adecuada.

**PROBLEMA N.º 38**

Determine el módulo de la resultante de los vectores mostrados, si se cumple

$$|\vec{A}| = |\vec{C}| = |\sqrt{3} \vec{B}| = 4\sqrt{3}$$

M: punto medio



- A) 6 u B) 8 u C) 12 u
D) 16 u E) 20 u

Sea $\vec{R} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

101

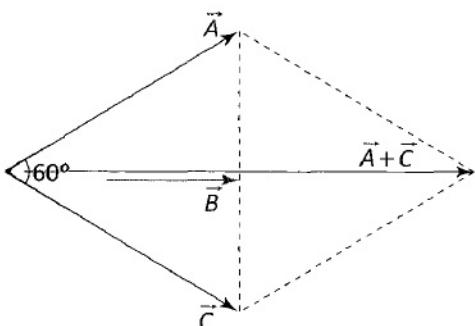
Resolución

Nos piden el módulo de la resultante.

$$\text{Sea } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\text{Entonces: } |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| \quad (\delta)$$

De la figura



Se puede notar que el vector \vec{B} es paralelo con $\vec{A} + \vec{C}$, en (δ)

$$|\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{C}| + |\vec{B}| \quad (I)$$

Notese $|\vec{A}| = |\vec{C}|$

Por propiedad $|\vec{A} + \vec{C}| = |\vec{A}| \sqrt{3}$

Luego en (I)

$$|\vec{R}| = (4\sqrt{3})\sqrt{3} + 4$$

$$\therefore |\vec{R}| = 16 \text{ u}$$

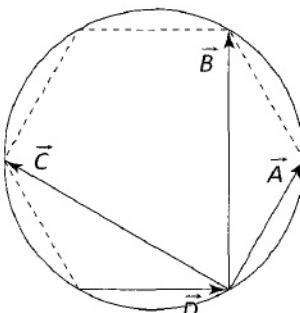
CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 39

Un hexágono regular que se muestra tiene lado L .

Determine el vector \vec{E} en función del vector \vec{C} ,

$$\text{si } i = 2\vec{A} + 2\vec{B} - 2\vec{D} + \vec{C}.$$

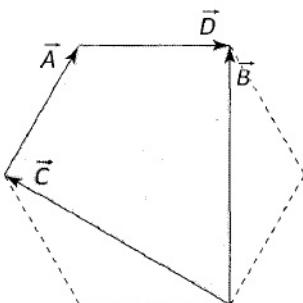


- A) $4\vec{C}$
B) $3\vec{C}$
C) $2\vec{C}$
D) $\vec{0}$
E) $\frac{3}{2}\vec{C}$

Resolución

Nos piden determinar el vector \vec{E} en términos de \vec{C} , para lo cual vamos a trasladar algunos vectores de manera conveniente.

Redibujando el sistema



De la figura sombreada

$$\vec{B} = \vec{C} + \vec{A} + \vec{D}$$

Donde

$$\vec{C} = -\vec{A} + \vec{B} - \vec{D}$$

Multiplicamos $\times 2$

$$2\vec{C} = -2\vec{A} + 2\vec{B} - 2\vec{D} \quad (II)$$

Del dato

$$\vec{E} = \underbrace{-2\vec{A} + 2\vec{B} - 2\vec{D}}_{2\vec{C}} + \vec{C}$$

De (I)

$$\vec{E} = 2\vec{C} + \vec{C}$$

$$\therefore \vec{E} = 3\vec{C}$$

En el triángulo sombreado

$$2\vec{x} + \frac{\vec{B}}{2} = \vec{A}$$

$$2\vec{x} = \vec{A} - \frac{\vec{B}}{2}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{4}(2\vec{A} - \vec{B})$$

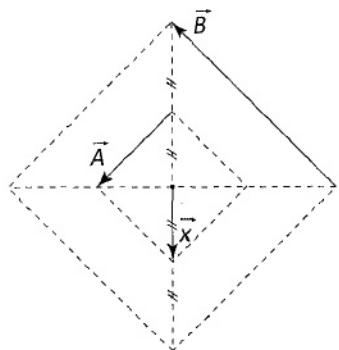
CLAVE (B)

CLAVI. (E)

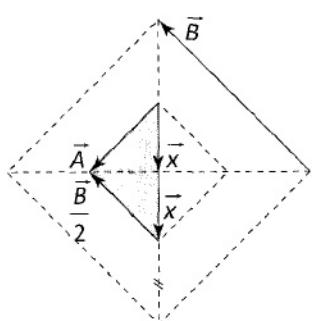
PROBLEMA N.º 40

En el sistema vectorial mostrado halle \vec{x} en función de \vec{A} y \vec{B} , si $|\vec{B}|=2|\vec{A}|$.

- A) $\frac{2}{3}(\vec{A} - 2\vec{B})$
- B) $\frac{1}{2}(2\vec{A} - \vec{B})$
- C) $\frac{1}{3}(2\vec{B} - \vec{A})$
- D) $\frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A})$
- E) $\frac{1}{4}(2\vec{A} - \vec{B})$

**Resolución**

Nos piden \vec{x} , en términos de \vec{A} y \vec{B} . Trasladasmos de manera conveniente los vectores y completamos el triángulo vectorial.

**PROBLEMA N.º 41**

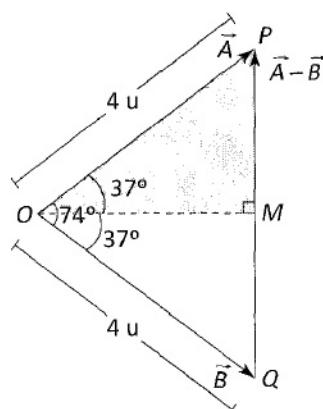
Dos vectores de módulos iguales a 4 u forman 74° entre sí. Determine el módulo del vector diferencia de dichos vectores.

- A) 1,2 u
- B) 2,4 u
- C) 3,6 u
- D) 4,8 u
- E) 5,6 u

Resolución

Nos piden el módulo de la diferencia de los vectores.

Sean los vectores \vec{A} y \vec{B} , los graficaremos según los datos



Como $|\vec{A}| = |\vec{B}|$, el triángulo vectorial OPQ es isósceles. Del vértice O bajamos la \perp al lado desigual y esta resulta ser la mediana, mediatrix, bisectriz, altura.

En el $\triangle AMP$

$$MP = \frac{|\vec{A} - \vec{B}|}{2}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = 2MP$$

(I)

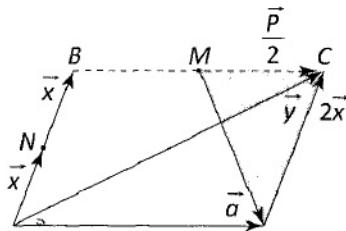
Además

$$MP = 4 \operatorname{sen} 37^\circ = 4(3/5)$$

$$\therefore MP = 2,4$$

Resolución

Se pide \vec{a} en términos de \vec{x} e \vec{y} .



Finalmente, en (I)

$$|\vec{A} - \vec{B}| = 2(2,4)$$

$$\therefore |\vec{A} - \vec{B}| = 4,8 \text{ u}$$

CLAVE (D)

Introducimos el vector auxiliar \vec{P} .

- En el $\triangle MCD$ tenemos

$$\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{P}/2$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{2} - 2\vec{x} \quad (\text{I})$$

- En el $\triangle ACD$

$$\vec{P} + 2\vec{x} = \vec{y}$$

$$\vec{P} = \vec{y} - 2\vec{x} \quad (\text{II})$$

- Luego (II) en (I)

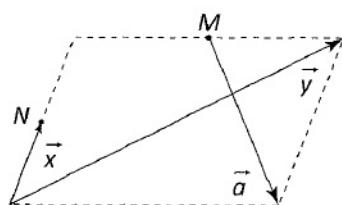
$$\vec{a} = \frac{(\vec{y} - 2\vec{x})}{2} - 2\vec{x}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{\vec{y} - 6\vec{x}}{2}$$

CLAVE (D)

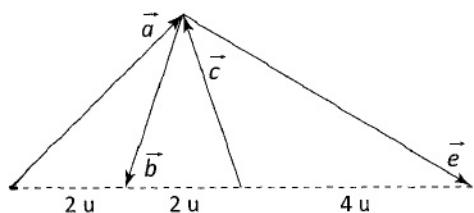
PROBLEMA N.º 42

En el paralelogramo mostrado, M y N son puntos medios. Calcule \vec{a} en función de \vec{x} e \vec{y} .



PROBLEMA N.º 43

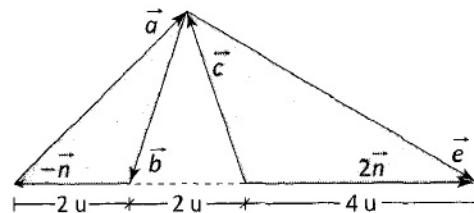
Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados.



- A) 2 u B) 4 u C) 6 u
D) 8 u E) 10 u

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante



Sea la resultante

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{S} = \vec{n}$$

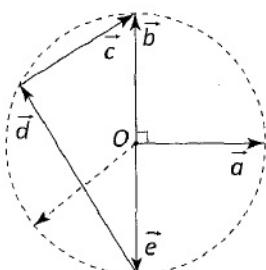
En módulo

$$|\vec{S}| = |\vec{n}| = 2 \text{ u}$$

CLAVE **(A)**

PROBLEMA N.º 44

Determine el módulo de la suma de los vectores, mostrados si el radio de la circunferencia de centro O es 2 u.



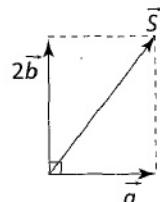
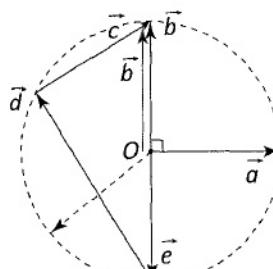
- A) $\sqrt{3}$ u B) $\sqrt{5}$ u C) $4\sqrt{2}$ u
D) $2\sqrt{3}$ u E) $2\sqrt{5}$ u

Resolución

Nos piden el módulo de la suma para el sistema mostrado.

Se puede notar: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{e}| = 2 \text{ u}$

Usando el método del polígono.



tenemos $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \underbrace{\vec{c} + \vec{d} + \vec{e}}_{\vec{b}}$

en la figura $\vec{S} = \vec{a} + 2\vec{b}$

o módulo

$$\begin{aligned} |\vec{S}| &= \sqrt{a^2 + (2b)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ |\vec{S}| &= 2\sqrt{5} \text{ u} \end{aligned}$$

CLAVE E

En el triángulo sombreado

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$$

Su módulo

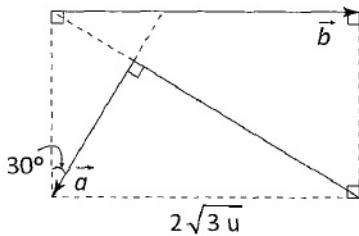
$$\begin{aligned} |\vec{S}| &= 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{S}| = 3 \text{ u}$$

CLAVE C

PROBLEMA N.º 45

Determine el módulo del vector resultante.



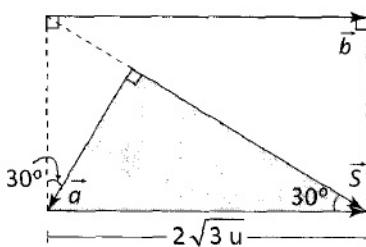
- A) 1 u B) 2 u C) 3 u
D) 4 u E) 5 u

RESOLUCIÓN

os piden el módulo del vector resultante.

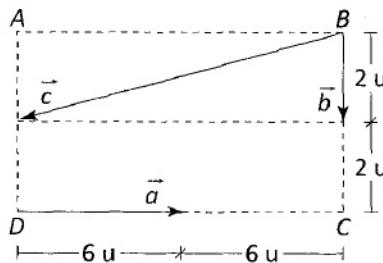
uiremos el método del polígono para dos vec-

tores



PROBLEMA N.º 46

Si ABCD es un rectángulo, determine el vector resultante del sistema de vectores mostrados.

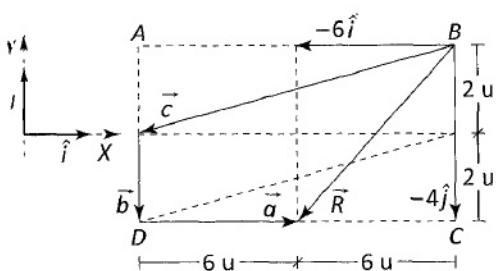


- A) $(-3\hat{i} + 4\hat{j}) \text{ u}$
B) $(-6\hat{i} - 4\hat{j}) \text{ u}$
C) $(6\hat{i} - 4\hat{j}) \text{ u}$
D) $(4\hat{i} - 8\hat{j}) \text{ u}$
E) $(3\hat{i} + 10\hat{j}) \text{ u}$

Resolución

Nos piden determinar al vector resultante.

Vemos que $ABCD$ es un rectángulo



Usaremos el método del polígono, para lo cual trasladamos paralelamente al vector \vec{b} y trazamos la resultante.

Para determinar la resultante en función de los componentes de la figura

$$\vec{R} = (-6\hat{i} - 4\hat{j}) \text{ u}$$

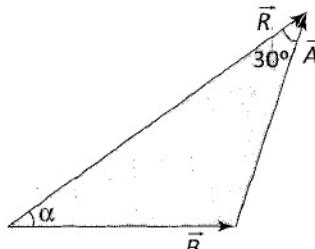
CLAVE (B)

Resolución

Nos piden determinar la medida del ángulo α .

A partir de la figura construyamos un triángulo.

Usaremos la ley de senos



$$\frac{|\vec{A}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\vec{B}|}{\operatorname{sen}30^\circ}$$

$$\frac{6}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{5}{(1/2)}$$

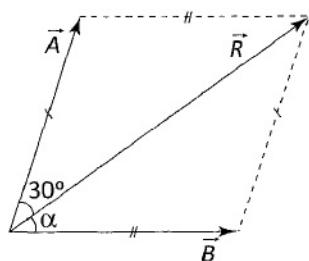
$$\operatorname{sen}\alpha = 3/5$$

$$\therefore \alpha = 37^\circ$$

CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 47

En el sistema mostrado, halle el ángulo α , sabiendo que $|\vec{A}|=6 \text{ u}; |\vec{B}|=5 \text{ u}$.

**PROBLEMA N.º 48**

Si se verifica $2\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$, donde $\vec{A} = (x; y)$; $\vec{B} = (3; x)$, halle los valores de x e y .

- A) 16° B) 30° C) 37°
 D) 45° E) 60°

- A) $\frac{2}{3} y \frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{3} y \frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5} y \frac{4}{5}$

- D) $-\frac{3}{2} y \frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5} y \frac{4}{5}$

Resolución

Se pide determinar x e y . Para que se verifique la relación

$$2\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$$

Del dato $2(x; y) + (3; x) = \vec{0}$

$$(2x; 2y) + (3; x) = \vec{0} = (0; 0)$$

$$(2x+3; 2y+x) = (0; 0)$$

$$2x+3=0 \quad \wedge \quad 2y+x=0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad 2y - \frac{3}{2} = 0$$

$$y = 3/4$$

CLAVE **D**

Resolución

Se pide el módulo de la resultante entre \vec{R}_1 y \vec{R}_2 ; hallaremos cada vector

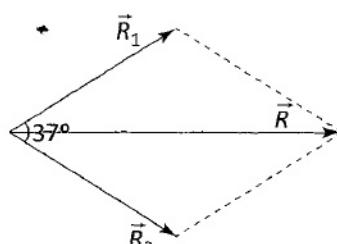
- $\vec{R}_1 = (2\hat{i} - 3\hat{j}) + (4\hat{i} + 11\hat{j})$

$$\vec{R}_1 = 6\hat{i} + 8\hat{j}$$

- $\vec{R}_2 = (-7\hat{i} - 7\hat{j}) - (4\hat{i} + 11\hat{j})$

$$\vec{R}_2 = -11\hat{i} - 18\hat{j}$$

Graficando los vectores \vec{R}_1 y \vec{R}_2 , y usando el método del paralelogramo



Además

$$|\vec{R}_1| = 10 \text{ u}$$

$$|\vec{R}_2| = 21,1 \text{ u}$$

PROBLEMA N.º 49

Si $\vec{R}_1 = \vec{A} + \vec{B}$, $\vec{R}_2 = \vec{C} - \vec{B}$ y

$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$; $\vec{B} = 4\hat{i} + 11\hat{j}$ y $\vec{C} = -7\hat{i} - 7\hat{j}$,

calcular la resultante entre \vec{R}_1 y \vec{R}_2 sabiendo que forman un ángulo de 37° .

Tendremos como módulo

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos 37^\circ}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{10^2 + (21,1)^2 + 2(10)(21,1)(4/5)}$$

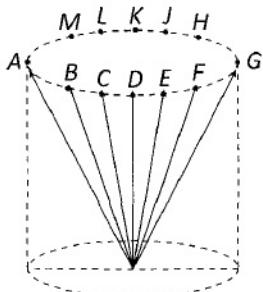
$$|\vec{R}| = 29,7 \text{ u}$$

CLAVE **B**

-) 27,9 u
-) 29,7 u
-) 30,2 u
-) 32,4 u
-) 40,6 u

PROBLEMA N.º 50

El gráfico muestra un cilindro recto de radio R y altura h . Desde el centro de la base inferior se construyen 12 vectores que terminan en los 12 puntos equidistantes A, B, C, \dots , entre sí. Halle el módulo del vector resultante.



- A) $10h$
B) $11h$
C) $12h$
D) $13h$
E) $14h$

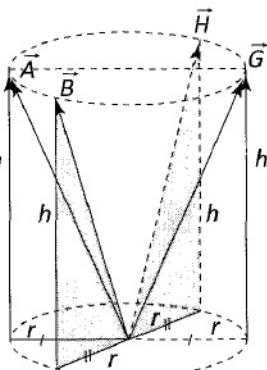
Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante.

Al descomponer los vectores, notamos que 2 a 2 sus componentes de la base se anulan.

Es decir

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{G} &= 2\vec{h} \\ \vec{B} + \vec{H} &= 2\vec{h} \\ \vec{C} + \vec{J} &= 2\vec{h} \\ \vdots \\ \vec{F} + \vec{M} &= 2\vec{h} \\ \vec{R} &= 6(2\vec{h}) \\ \vec{R} &= 12\vec{h}\end{aligned}$$



En módulo

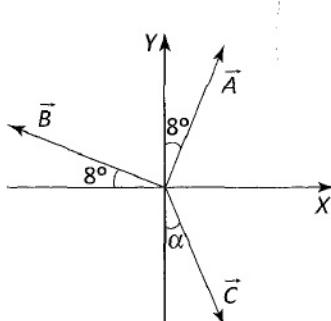
$$|\vec{R}| = 12h$$

CLAVE **C**

PROBLEMA N.º 51

Halle α y $|\vec{A}|$ para que la resultante de los 3 vectores mostrados sea nula.

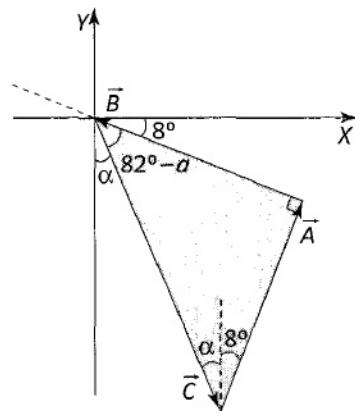
Si $|\vec{B}| = 7\text{ u}$ y $|\vec{C}| = 25\text{ u}$



- A) 12 u
B) 18 u
C) 24 u
D) 30 u
E) 36 u

Resolución

Nos piden α y el módulo del vector \vec{A} , para lo cual construiremos un polígono. Como la resultante es nula el polígono debe ser cerrado.



De la ley de senos

$$\frac{A}{\operatorname{sen}(82^\circ - \alpha)} = \frac{B}{\operatorname{sen}(8^\circ + \alpha)} = \frac{C}{\operatorname{sen}90^\circ}$$

Entre B y C

$$\frac{7}{\operatorname{sen}(8^\circ + \alpha)} = \frac{25}{1}$$

$$\operatorname{sen}(8^\circ + \alpha) = \frac{7}{25}$$

$$\therefore \alpha = 8^\circ$$

Entre A y C

$$\frac{A}{\operatorname{sen}74^\circ} = \frac{B}{\operatorname{sen}90^\circ} \rightarrow A = \frac{24}{25} \cdot 25$$

$$\therefore A = 24 \text{ u}$$

Resolución

Nos piden determinar el vector resultante, para lo cual expresaremos los vectores como pares ordenados.

Del gráfico

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (8; 10) \\ \vec{B} &= (-8; 6) \\ \vec{C} &= (-5; -8) \\ \vec{D} &= (4; -6) \end{aligned} \quad (+)$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{R} = (-1; 2)$$

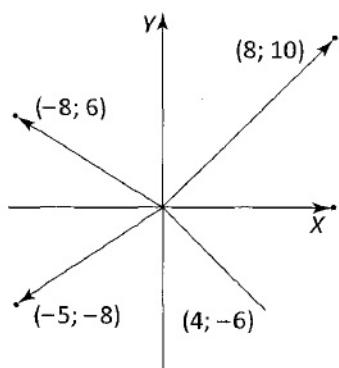
$$\therefore \vec{R} = -\hat{i} + 2\hat{j}$$

CLAVE C

CLAVE C

PROBLEMA N.º 52

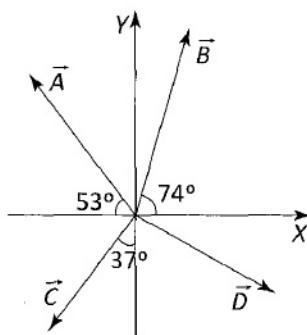
En el sistema de vectores mostrados, determine el vector resultante.



- | | | | | | |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|-----------------|-----------------|----------------|
| A) $\hat{i} - 4\hat{j}$ | B) $-\hat{i} - 3\hat{j}$ | C) $-\hat{i} + 2\hat{j}$ | A) $18\hat{i}$ | B) $-12\hat{i}$ | C) $23\hat{i}$ |
| D) $\hat{i} - 3\hat{j}$ | E) $-2\hat{i} + 4\hat{j}$ | | D) $-25\hat{i}$ | | E) $40\hat{i}$ |

PROBLEMA N.º 53

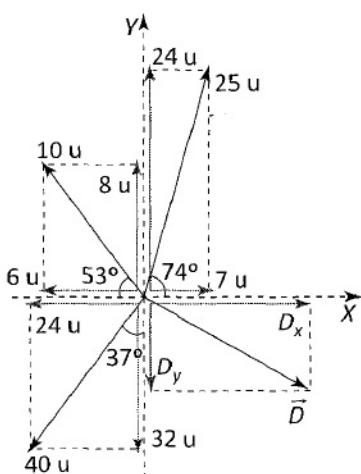
Dado los vectores $|\vec{A}| = 10 \text{ u}$; $|\vec{B}| = 25 \text{ u}$; $|\vec{C}| = 40 \text{ u}$, determine el vector \vec{D} para que la resultante del sistema de vectores sea nula.



Resolución

Nos piden determinar el vector \vec{D} .

Vamos a descomponer los vectores en los respectivos ejes sabiendo que la resultante en cada uno de ellos debe ser nula.



En el eje X

$$7 + D_x = 30 \\ D_x = 23 \quad (\text{I})$$

En el eje Y

$$8 + 24 = 32 + D_y \\ D_y = 0 \quad (\text{II})$$

Finalmente

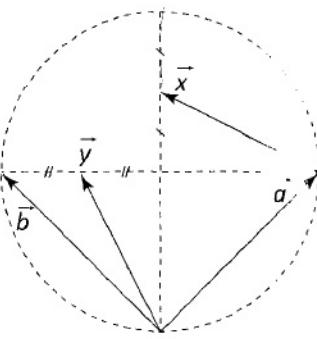
$$\vec{D} = D_x \hat{i} + D_y \hat{j} \\ \vec{D} = 23 \hat{i}$$

CLAVE C

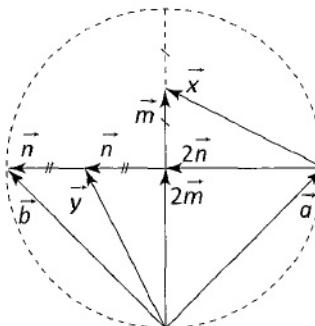
PROBLEMA N.º 54

Halle el vector $\vec{x} + \vec{y}$ en función de los vectores \vec{a} y \vec{b} .

- A) $\frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}$
- B) $\vec{b} + 2\vec{a}$
- C) $\frac{3\vec{b}}{2}$
- D) $\frac{2\vec{a}}{3}$
- E) $\vec{b} + \frac{3\vec{a}}{2}$

**Resolución**

Nos piden la suma de \vec{x} e \vec{y} en términos de los vectores \vec{a} y \vec{b} . Para esto descomponemos los vectores de manera conveniente



Del gráfico

$$\begin{aligned} \vec{x} &= 2\vec{n} + \vec{m} \\ \vec{y} &= 2\vec{m} + \vec{n} \\ \hline \vec{x} + \vec{y} &= 3(\vec{m} + \vec{n}) \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Además

$$\vec{b} = 2(\vec{m} + \vec{n})$$

(II)

Luego (II) en (I)

$$\vec{x} + \vec{y} = \frac{3}{2}\vec{b}$$

CLAVE C

En el triángulo sombreado

$$\frac{\vec{B}}{2} + 3\vec{x} = \vec{A}$$

$$3\vec{x} = \vec{A} - \frac{\vec{B}}{2}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{6}(2\vec{A} - \vec{B})$$

CLAVE A

PROBLEMA N.º 55

Determine el vector \vec{x} en función de los vectores \vec{A} y \vec{B} si se sabe que M y N son puntos medios de los respectivos lados.

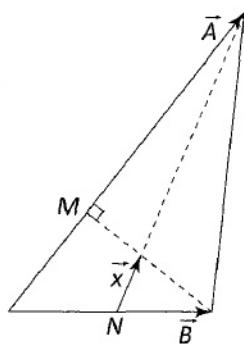
A) $1/6(2\vec{A} - \vec{B})$

B) $\frac{2}{3}(2\vec{A} - \vec{B})$

C) $\frac{1}{3}(\vec{A} - 2\vec{B})$

D) $\frac{2}{5}(2\vec{A} - 3\vec{B})$

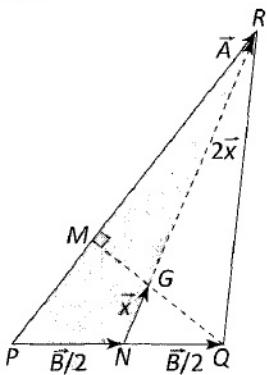
E) $1/3(\vec{A} - \vec{B})$



Resolución

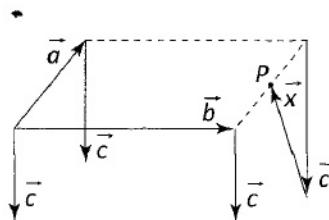
Nos piden \vec{x} en términos de \vec{A} y \vec{B} . Usaremos la propiedad del baricentro.

$$GR = 2NG$$



PROBLEMA N.º 56

Halle \vec{x} en términos de \vec{a} y \vec{c} , si P es punto medio del lado del paralelogramo que se muestra en el gráfico.

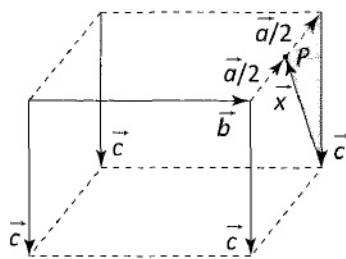


A) $-(\vec{a} + \vec{c})$ B) $-(\vec{a} + \vec{c}/2)$ C) $-1/2(\vec{a} + \vec{c})$

D) $-1/2(\vec{a} + 2\vec{c})$ E) $1/2(\vec{a} - \vec{c})$

Resolución

Nos piden determinar \vec{x} en términos de \vec{a} y \vec{c} , para lo cual completaremos el gráfico y trasladaremos los vectores de manera conveniente.



En el triángulo sombreado

$$\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2} + \vec{c} = \vec{0}$$

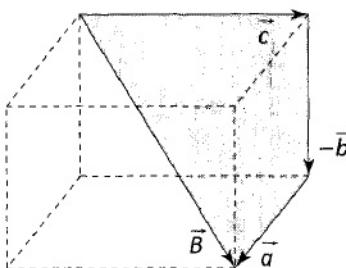
$$\therefore \vec{x} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{c})$$

CLAVE (D)

Se verifica que

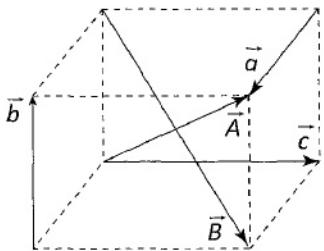
$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad (\text{I})$$

Para \vec{B}



PROBLEMA N.º 57

En el sistema mostrado, determine la suma de \vec{A} y \vec{B} en función de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .



- A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ B) $2(\vec{a} + \vec{c})$ C) $2(\vec{b} + \vec{c})$
 D) $(\vec{a} + \vec{b})$ E) $\vec{a} - \vec{c}$

Se verifica que

$$\vec{B} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{II})$$

Luego hacemos (I)+(II)

$$\begin{array}{r} \vec{A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{B} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a} \\ \hline \vec{A} + \vec{B} = 2(\vec{a} + \vec{c}) \end{array} (+)$$

CLAVE (B)

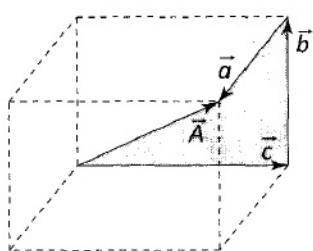
Resolución

Nos piden $\vec{A} + \vec{B}$ en términos de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

Hallaremos cada vector de manera independiente, para luego sumarlos

De la figura

Para \vec{A}



PROBLEMA N.º 58

Sean los vectores

$$\vec{x} = 3t\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}; \quad \vec{y} = 2\hat{i} + (t-1)\hat{j} + \hat{k} \quad y$$

$$\vec{z} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 0,5t\hat{k}.$$

Determine el tiempo para el cual la resultante de los vectores sea paralela al plano xy .

- A) 2 s B) 4 s C) 6 s
 D) 8 s E) 10 s

Resolución

Nos piden el tiempo para el cual la resultante sea paralela al plano xy , para esto la componente en el eje Z debe ser cero.

Es decir

$$\begin{aligned}\vec{x} &= 3t\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} \\ \vec{y} &= 2\hat{i} + (t-1)\hat{j} + \hat{k} \\ \vec{z} &= 3\hat{i} + 7\hat{j} + 0,5t\hat{k}\end{aligned}\quad (+)$$

$$\vec{R} = (5+3t)\hat{i} + (10+t)\hat{j} + (-4+0,5t)\hat{k}$$

De la condición

$$(-4+0,5t)\hat{k} = \vec{0}$$

$$-4 + 0,5t = 0$$

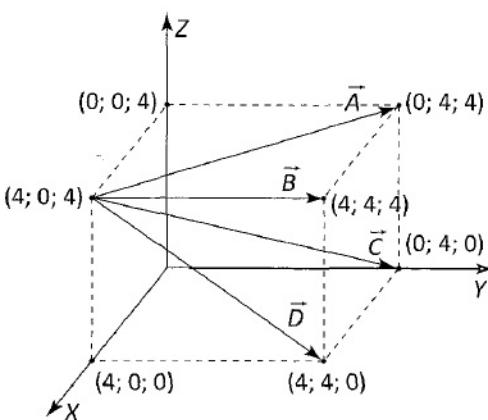
$$\therefore t = 8 \text{ s}$$

CLAVE D

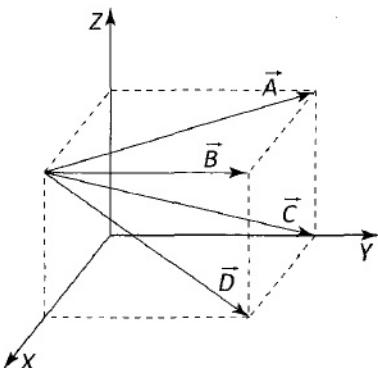
- A) $\sqrt{5} \text{ u}$ B) $4\sqrt{6} \text{ u}$ C) $4\sqrt{5} \text{ u}$
 D) $8\sqrt{6} \text{ u}$ E) $4\sqrt{3} \text{ u}$

Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante. Representaremos como par ordenado cada vector y luego hallaremos el módulo pedido.

**PROBLEMA N.º 59**

Dado el gráfico mostrado, determine $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}|$, si se trata de un cubo de lado igual a 4 u.



Del gráfico

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (0; 4; 4) - (4; 0; 4) = (-4; 4; 0) \\ \vec{B} &= (4; 4; 4) - (4; 0; 4) = (0; 4; 0) \\ \vec{C} &= (0; 4; 0) - (4; 0; 4) = (-4; 4; -4) \\ \vec{D} &= (4; 4; 0) - (4; 0; 4) = (0; 4; -4)\end{aligned}\quad (+)$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{S} = (-8; 16; -8)$$

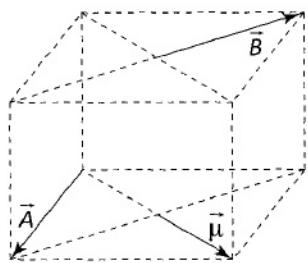
$$|\vec{S}| = \sqrt{8^2 + 16^2 + 8^2}$$

$$|\vec{S}| = 8\sqrt{6} \text{ u}$$

CLAVE D

PROBLEMA N.º 60

Determine el módulo de $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \hat{\mu}$, siendo $\hat{\mu}$ un vector unitario.



- A) 4 u B) 1 u C) 3 u
D) 2 u E) 0

Resolución

Nos piden el módulo de \vec{R} . Para hallar dicha resultante, trasladaremos de manera conveniente los vectores.

Se sabe que

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \hat{\mu} \quad (\text{I})$$

Del gráfico

$$\vec{A} + \vec{B} = \hat{\mu}$$

En (I)

$$\vec{R} = \hat{\mu} + \hat{\mu}$$

$$\vec{R} = 2\hat{\mu}$$

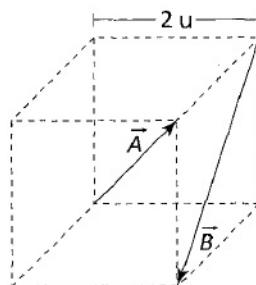
En módulo

$$\therefore R = 2 \text{ u}$$

CLAVE **(D)**

PROBLEMA N.º 61

Determine el módulo del vector resultante de los vectores A y B ubicados en el cubo mostrado.

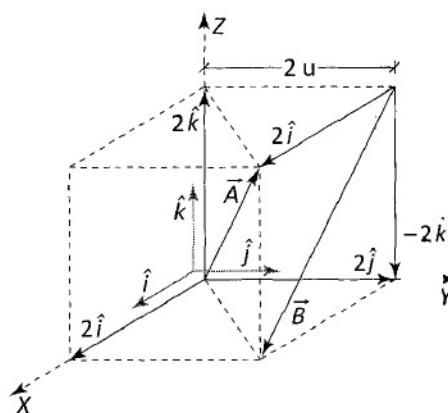


- A) $2\sqrt{5}$ u
B) 4 u
C) 6 u
D) $4\sqrt{5}$ u
E) $6\sqrt{5}$ u

Resolución

Nos piden el módulo del vector resultante de los vectores A y B .

Hagamos coincidir el origen del vector A con el origen del sistema de ejes coordenados.



Ahora, hallamos los vectores en función de sus componentes y sumamos.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})u \\ \vec{B} &= (2\hat{j} - 2\hat{k})u \\ \hline \vec{A} + \vec{B} &= (4\hat{i} + 2\hat{j})u\end{aligned}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{4^2 + 2^2}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

CLAVE A

Operamos

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 484$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = 22$$

PROBLEMA N.^o 62

Halle el módulo de $\vec{a} - \vec{b}$ si se sabe que $a = 13$ u, $b = 19$ u y que el módulo de su suma es 24 u.

- A) 21
- B) 22
- C) 23
- D) 32
- E) 33

Resolución

Nos piden el módulo de la diferencia entre los vectores \vec{a} y \vec{b} .

De la ley de cosenos

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta}$$

Siendo θ el ángulo formado por los vectores

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 13^2 + 19^2 - 2ab \cdot \cos \theta \quad (\text{I})$$

PROBLEMA N.^o 63

Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ y $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{c}| = 8$, calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A) 15
- B) 25
- C) 35
- D) 40
- E) 45

Resolución

Nos piden el producto escalar entre \vec{a} y \vec{b} , es decir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta \quad (\text{II})$$

De la condición

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \vec{0} \\ \rightarrow \vec{a} + \vec{b} &= -\vec{c}\end{aligned}$$

Por dato, tenemos la suma. Para relacionarla usaremos la ley del paralelogramo

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

$$24^2 = 13^2 + 19^2 + 2ab \cos \theta \quad (\text{III})$$

Sumamos (I) y (III)

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 + 24^2 = 2(13^2 + 19^2)$$

CLAVE B

Tomando módulos y elevando al cuadrado

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{-c}|^2$$

De la ley del paralelogramo

$$|\vec{a}|^2 + 2\cancel{ab\cos\theta} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

Reemplazando los datos

$$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5^2 = 8^2$$

Operando tenemos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 35$$

CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 64

Dado los vectores $\vec{a} = (5; 2)$; $\vec{b} = (-3; 4)$ y $\vec{c} = (7; 4)$, resolver la siguiente ecuación vectorial $2\vec{x} + 5\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{c}$.

- A) $(-3; 9)$
- B) $(-3; 6)$
- C) $(3; 6)$
- D) $(6; -3)$
- E) $(9; -3)$

Resolución

Al resolver la ecuación vectorial debemos encontrar el valor de \vec{x} que satisfaga dicha ecuación.

Es decir

$$2\vec{x} + 5(5; 2) - 3(-3; 4) = 4(7; 4)$$

$$2\vec{x} + (25; 10) + (9; -12) = (28; 16)$$

Resolviendo tenemos

$$2\vec{x} = (-6; 18)$$

$$\therefore \vec{x} = (-3; 9)$$

CLAVE (A)

PROBLEMA N.º 65

El vector \vec{c} se puede expresar de la siguiente manera: $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$. Si $\vec{c} = (9; 4)$, $\vec{a} = (2; -3)$ y $\vec{b} = (1; 2)$, determine s^r .

- A) 1
- B) 49
- C) 81
- D) 16
- E) 25

Resolución

Debemos tener en cuenta que r y s son números reales.

Reemplazando los vectores en la expresión

$$\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$$

$$(9; 4) = r(2; -3) + s(1; 2)$$

$$(9; 4) = (2r + s; -3r + 2s)$$

Identificando componentes

$$2r + s = 9$$

$$-3r + 2s = 4$$

Operando

$$r = 2 \wedge s = 5$$

Finalmente, nos piden

$$s^r = 5^2 = 25$$

CLAVE (F)

PROBLEMA N.º 66

Halle un vector unitario paralelo a la resultante de los vectores $\vec{A}=(2; 2; 2)$ y $\vec{B}=(1; -1; -1)$.

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1)$

B) $\frac{1}{\sqrt{13}}(2; 0; 3)$

A) $\frac{1}{2\sqrt{3}}(1; 1; 1)$

B) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1)$

C) $\frac{1}{\sqrt{5}}(1; -2; 0)$

C) $-2\sqrt{3}(-1; -1; 1)$

D) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; 1)$

E) $\frac{1}{\sqrt{11}}(3; 1; 1)$

D) $2\sqrt{3}(1; 1; 1)$

E) $\sqrt{3}(1; -1; 1)$

Resolución

Nos piden un vector unitario \hat{u} , tal que sea paralelo al vector $\vec{A}+\vec{B}$; es decir, podemos determinar el unitario de la suma y este será el vector pedido.

$$\hat{u}=\hat{u}_{A+B}=\frac{(\vec{A}+\vec{B})}{|\vec{A}+\vec{B}|} \quad (\text{I})$$

Hallamos la suma

$$\begin{array}{r} \vec{A}=(2; 2; 2) \\ \vec{B}=(1; -1; -1) \\ \hline \vec{A}+\vec{B}=(3; 1; 1) \end{array} \quad (+)$$

Cálculo del módulo de la suma

$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{3^2+1^2+1^2}$$

$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{11}$$

Finalmente, en (I)

$$\hat{u}=\hat{u}_{A+B}=\frac{1}{\sqrt{11}}(3; 1; 1)$$

CLAVE E

Resolución

Nos piden hallar \vec{P} .

$$\text{Sea } \vec{P}=(P_x; P_y; P_z) \quad (\text{I})$$

Y su módulo

$$|\vec{P}|=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}, \text{ pero}$$

Se sabe que $P_x=P_y=P_z$.

Entonces

$$|\vec{P}|=\sqrt{3P_x^2}=P_x\sqrt{3}=6$$

$$P_x=2\sqrt{3}$$

Luego en (I)

$$\vec{P}=(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$$

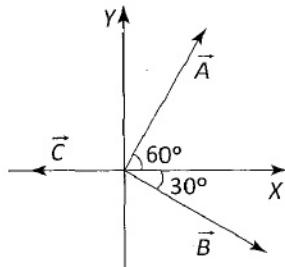
$$=2\sqrt{3}(1; 1; 1)$$

$$\therefore \vec{P}=2\sqrt{3}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

CLAVE D

PROBLEMA N.º 68

Halle $|\vec{A} \times \vec{B}|$, si $|\vec{C}|=2$ u y $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 6\hat{i}$



- A) $2\sqrt{3}$ u B) $20\sqrt{3}$ u C) 36 u
D) $16\sqrt{3}$ u E) $10\sqrt{3}$ u

Resolución

Nos piden el módulo del producto vectorial entre \vec{A} y \vec{B} .

Es decir

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \quad (\text{I})$$

Donde θ es el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} ; de la figura $\theta = 90^\circ$.

En (I)

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \quad (\alpha)$$

Del dato

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 6\hat{i}; \text{ además } |\vec{C}| = 2 \text{ u}$$

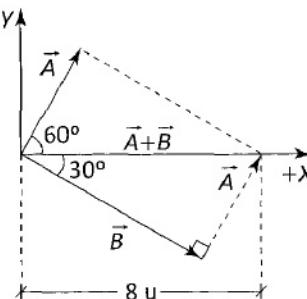
De la figura

$$\begin{aligned} \vec{C} &\text{ está sobre el eje } X \\ \therefore \vec{C} &= -2\hat{i} \end{aligned}$$

En el dato

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} - 2\hat{i} &= 6\hat{i} \\ \vec{A} + \vec{B} &= 8\hat{i} \end{aligned}$$

El vector suma entre \vec{A} y \vec{B} está sobre el eje $+X$
Redibujando los vectores



Podemos obtener

$$|\vec{A}| = 4 \text{ u} \text{ y } |\vec{B}| = 4\sqrt{3} \text{ u}$$

Finalmente en (α)

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}| &= 16\sqrt{3} \text{ u} \\ &= 16\sqrt{3} \text{ u} \end{aligned}$$

CLAVE **(D)**

PROBLEMA N.º 69

Dados los vectores $\vec{P} = (n; 1)$ y $\vec{Q} = (2n; n)$, halle n para que sean paralelos.

- A) -1 B) $1/3$ C) 2
D) $-1/2$ E) 3

Resolución

los piden n para que $\vec{P} \parallel \vec{Q}$.

debemos que para tal condición basta con que un vector sea múltiplo del otro, es decir

$$\vec{P} = K\vec{Q}/K \in \mathbb{R}$$

$$(n; 1) = K(2n; n)$$

$$(n; 1) = (2Kn; Kn)$$

ualamos los respectivos componentes

$$n = 2Kn \rightarrow K = 1/2$$

$$1 = Kn \rightarrow n = 2$$

CLAVE C

PROBLEMA N.º 70

Si $\vec{A} = (1; -1; 1)$ y $\vec{B} = (2; 1; -1)$, halle el vector \vec{P} , de tal manera que se verifique $\vec{A} \times \vec{P} = \vec{B}$.

A) $(2; 0; -1)$ B) $(2; -1; 1)$ C) $\frac{2}{3}(1; -2; 4)$

D) $\frac{3}{4}(1; -1; 2)$ E) $\frac{1}{3}(1; -4; -2)$

Resolución

os piden \vec{P} , tal que se verifique $\vec{A} \times \vec{P} = \vec{B}$ siendo $\vec{P} = (P_x; P_y; P_z)$

decir

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{P} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (-P_z \hat{i} + P_y \hat{k} + P_x \hat{j}) \\ P_x \hat{k} + P_y \hat{i} + P_z \hat{j} & \end{aligned}$$

denando, tenemos

$$\vec{P} = (-P_z - P_x) \hat{i} + (P_x - P_z) \hat{j} + (P_y - P_x) \hat{k} = (2; 1; -1)$$

Identificando se tiene

$$P_y + P_z = -2$$

$$P_x - P_z = 1$$

$$P_y + P_x = -1$$

Resolviendo

$$P_x = 1/3; P_y = -4/3 \text{ y } P_z = -2/3$$

Finalmente

$$\vec{P} = \frac{1}{3}(1; -4; -2)$$

CLAVE E

PROBLEMA N.º 71

Determine qué vector debemos sumar al vector $(3; -2; 4)$ para que se obtenga el vector $(8; 0; 0)$.

- A) $(5; 2; -4)$ B) $(4; 2; -1)$ C) $(5; 0; -1)$
 D) $(2; 0; -1)$ E) $(-4; -2; 0)$

Resolución

Sea el vector pedido $\vec{A} = (A_x; A_y; A_z)$

Luego, por condición del problema tenemos que

$$\vec{A} + (3; -2; 4) = (8; 0; 0)$$

$$(A_x; A_y; A_z) + (3; -2; 4) = (8; 0; 0)$$

$$(A_x + 3; A_y - 2; A_z + 4) = (8; 0; 0)$$

Identificando las componentes

$$A_x + 3 = 8 \rightarrow A_x = 5; A_y - 2 = 0 \rightarrow A_y = 2$$

$$\text{y } A_z + 4 = 0 \rightarrow A_z = -4$$

Finalmente, el vector \vec{A} será

$$\vec{A} = (5; 2; -4)$$

CLAVE A

PROBLEMA N.º 72

Encuentre el producto vectorial de los vectores

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

A) $(-1; 0; 1)$ B) $2(1; 0; 1)$ C) $\sqrt{2}(1; 0; 1)$

D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1; 0; 1)$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)$

- A) $-26\hat{i} + 17\hat{j} + 5\hat{k}$
 B) $-13\hat{i} + 5\hat{k}$
 C) $7\hat{i} - 11\hat{j} + 5\hat{k}$
 D) $12\hat{i} - 7\hat{j} + 10\hat{k}$
 E) $11\hat{i} - 22\hat{j} + 5\hat{k}$

Resolución

Nos piden un vector unitario, perpendicular al plano formado por otros vectores.

Por definición, el vector \perp al plano formado por \vec{A} y \vec{B} es su producto vectorial.

ResoluciónNos piden el producto vectorial entre \vec{A} y \vec{B} .

Por definición

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Reemplazando los valores correspondientes

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-20\hat{i} + 9\hat{k} + 2\hat{j})$$

$$-(4\hat{k} + 6\hat{i} - 15\hat{j})$$

Por lo tanto

$$\hat{u} = \frac{(\vec{A} \times \vec{B})}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \quad (\alpha)$$

Hallamos $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3\hat{i} + 4\hat{k} - 2\hat{j})$$

$$(3\hat{k} - 4\hat{i} - 2\hat{j})$$

Ordenamos

$$\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} + \hat{k}$$

Ordenamos

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-26\hat{i} + 17\hat{j} + 5\hat{k})$$

CLAVE (A)

Su módulo

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{2}$$

En (α)

$$\hat{u} = \left(\frac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)$$

CLAVE (E)**PROBLEMA N.º 73**

Halle un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores

$$\vec{A} = (2; 3; -2) \quad \text{y} \quad \vec{B} = (1; 2; -1)$$

PROBLEMA N.º 74

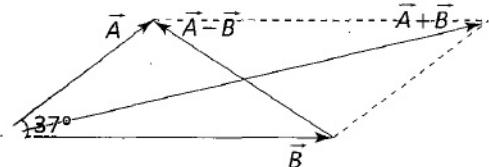
Dos vectores \vec{A} y \vec{B} de 3 u y 5 u, respectivamente, forman un ángulo de 37° . Determine el módulo de la suma y de la diferencia e indicar el menor módulo.

- A) 1,18 B) 2,26
 C) 3,16 D) 4,32 E) 5,81

Resolución

Nos piden tanto el módulo de la suma como el módulo de la diferencia.

Graficando los vectores y usando la ley del paralelogramo para la suma y la ley de cosenos para la diferencia.



Álculo de $|\vec{A} + \vec{B}|$ del gráfico

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2(3)(5)\cos 37^\circ}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{58}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = 7,62 \text{ u}$$

Álculo de $|\vec{A} - \vec{B}|$ del gráfico

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 37^\circ}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{10}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = 3,16 \text{ u}$$

CLAVE (C)

PROBLEMA N.º 75

Encuentre el valor de a , de manera que los vectores $\vec{A} = (-a; 2)$ y $\vec{B} = (-1; 3)$ sean perpendiculares.

- A) -3 B) -4
 C) 4 D) -6 E) 6

Resolución

Nos piden a , tal que $\vec{A} \perp \vec{B}$. Por condición de perpendicularidad, se debe verificar que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

Es decir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-a; 2) \cdot (-1; 3) = 0$$

$$a + 6 = 0$$

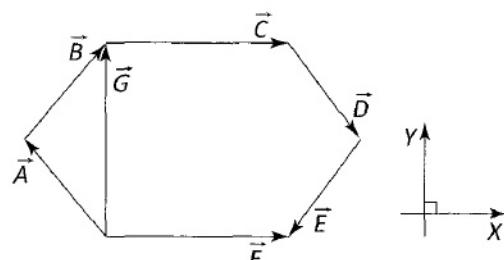
$$\therefore a = -6$$

CLAVE (D)

NIVEL AVANZADO**PROBLEMA N.º 76**

Determine el vector

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} + \vec{G}$, si la figura es un hexágono regular de lado a .



A) $\frac{a}{3}(-2\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$

B) $a(-2\hat{i} - 2\hat{j})$

En (I)

$$\vec{R} = 2a\hat{i} + a\sqrt{3}\hat{j}$$

C) $\frac{a}{2}(\sqrt{3}\hat{i} - \hat{j})$

$$\vec{R} = a(2\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$$

D) $a(2\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$

E) $\frac{a}{2}(\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$

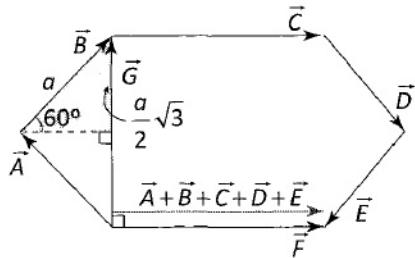
CLAVI (D)

Resolución

Nos piden hallar el vector resultante del sistema de vectores mostrados.

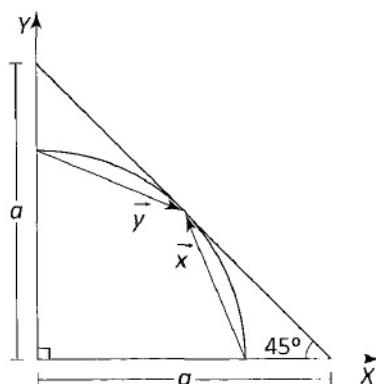
PROBLEMA N.º 77

En el gráfico que se muestra, determine $\vec{x} + \vec{y}$.



Del gráfico

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \underbrace{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}}_{\vec{F}} + \vec{F} + \vec{G} \\ \vec{R} &= 2\vec{F} + \vec{G}\end{aligned}\quad (\text{I})$$



Reconstruyendo la gráfica, nótese que

$|\vec{G}| = a\sqrt{3}$ u y $|\vec{F}| = 2a$ u

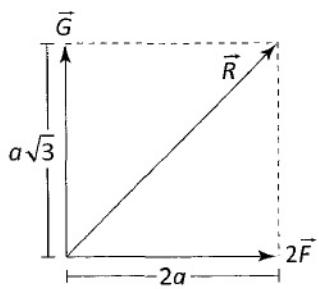
A) $\sqrt{2}a(\hat{i} + \hat{j})$

B) $\frac{2}{3}a(1 - \sqrt{2})(-\hat{i} - \hat{j})$

C) $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{2})(\hat{i} + \hat{j})$

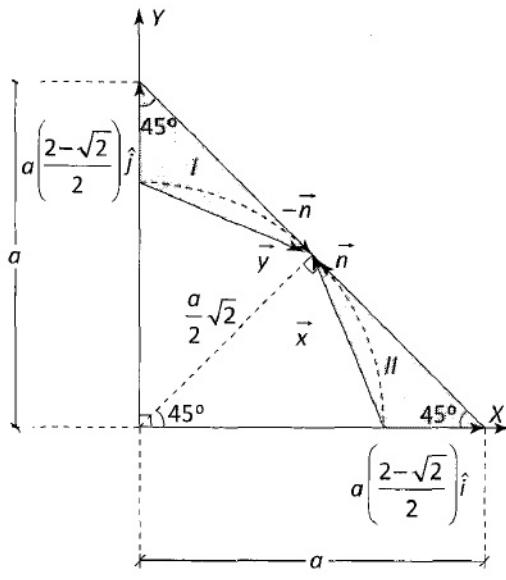
D) $\frac{a}{3}(2 - \sqrt{3})(-\hat{i} + \hat{j})$

E) $\frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})(\hat{i} + \hat{j})$



Resolución

Nos piden determinar la resultante entre \vec{x} e \vec{y} . Consideremos los datos geométricos del problema.



De donde

- I. En el \triangle sombreado I

$$\vec{y} = a \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \hat{j} - \vec{n} \quad (\alpha)$$

- II. En el \triangle sombreado II

$$\vec{x} = a \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \hat{i} + \vec{n} \quad (\beta)$$

sumando (α) y (β)

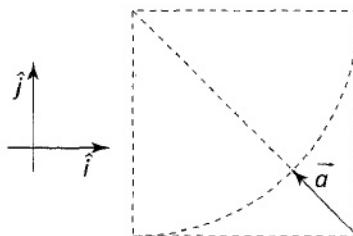
$$\vec{x} + \vec{y} = a \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) (\hat{i} + \hat{j})$$

$$\therefore \vec{x} + \vec{y} = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2}) (\hat{i} + \hat{j})$$

CLAVE E

PROBLEMA N.º 78

En el gráfico se muestra un cuadrado cuyo lado mide dos unidades y un arco de circunferencia. Determine el vector \vec{a} .



A) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(\hat{i} - \hat{j})$

B) $(\sqrt{2} - 1)(-\hat{i} - \hat{j})$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})$

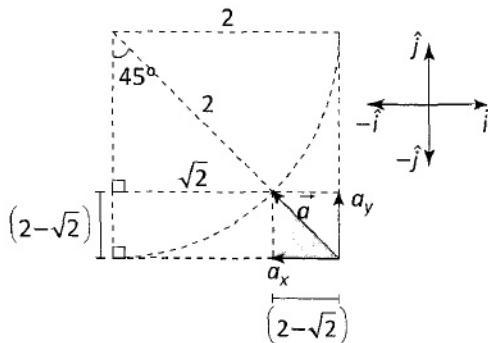
D) $(2 - \sqrt{2})(-\hat{i} + \hat{j})$

E) $\sqrt{2}(\hat{i} - \hat{j})$

Resolución

Nos pide determinar \vec{a} . En términos de los vectores unitarios.

Examinando el gráfico



Sea el vector

$$\vec{a} = m\hat{i} + n\hat{j} \quad (\text{I})$$

Debemos determinar los valores de m y n .

Se tiene

$$\vec{a} = (2 - \sqrt{2})(-\hat{i}) + (2 - \sqrt{2})\hat{j}$$

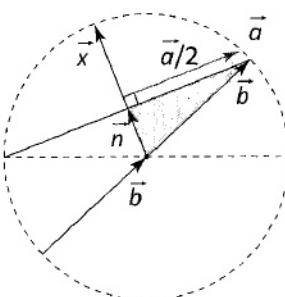
$$\vec{a} = (2 - \sqrt{2})(-\hat{i} + \hat{j})$$

CLAVE **D**

Resolución

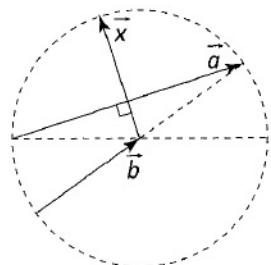
Nos piden \vec{x} en términos de \vec{a} y \vec{b} .

Graficando a los vectores



PROBLEMA N.º 79

En el gráfico, halle \vec{x} en función de \vec{a} y \vec{b} .



- A) $\left(\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{3}\right)$
- B) $\frac{\vec{a}}{2}(2b/\|\vec{a}-\vec{b}\|)$
- C) $2\vec{b}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}-\vec{a}\|} - 1\right)$
- D) $\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}-\vec{a}\|} - 1\right)(\vec{b}-\vec{a})$
- E) $\left(\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right|} - 1\right)\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)$

Por definición

$$\hat{\mu}_x = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

$$\rightarrow \vec{x} = \|\vec{x}\| \hat{\mu}_x \quad (\text{I})$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \vec{x} \perp \vec{n} &\rightarrow \hat{\mu}_x = \hat{\mu}_n = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \\ \rightarrow \hat{\mu}_x = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} & \end{aligned} \quad (\text{II})$$

De la figura sombreada

$$\vec{n} + \vec{a}/2 = \vec{b}$$

$$\vec{n} = \vec{b} - \vec{a}/2 \quad (\alpha)$$

Luego (α) en (II)

$$\hat{\mu}_x = \frac{\vec{b} - \vec{a}/2}{\|\vec{b} - \vec{a}/2\|} \quad (\beta)$$

Del gráfico

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{b} - \vec{n}\| = \|\vec{b} - \left|\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right|\| \quad (\gamma)$$

Finalmente, (β) y (γ) en (I)

$$\vec{x} = \left(\vec{b} - \left| \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \right| \right) \left(\frac{\vec{b} - \vec{a}/2}{|\vec{b} - \vec{a}/2|} \right)$$

$$\therefore \vec{x} = \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b} - \vec{a}/2|} - 1 \right) \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \right)$$

CLAVE E

Luego los vectores serán

$$\vec{F}_2 = (3; -4) \wedge \vec{F}_3 = (-6; -4)$$

Hallamos la suma

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-3; -8) \quad (\alpha)$$

Cálculo de su módulo

$$|\vec{F}_2 + \vec{F}_3| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \quad (\beta)$$

PROBLEMA N.^o 80

Sabiendo que la resultante de las fuerzas $\vec{F}_1 = (3; 8)N$, $\vec{F}_2 = (x; -4)N$ y $\vec{F}_3 = (-6; y)N$ es igual a cero, halle el vector unitario de la resultante de \vec{F}_2 y \vec{F}_3 .

A) $\frac{1}{\sqrt{113}}(-8; -7)$

B) $\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$

C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1)$

D) $\frac{1}{\sqrt{73}}(-3; -8)$

E) $\frac{1}{\sqrt{65}}(-7; 4)$

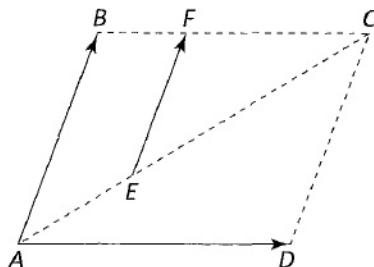
Finalmente, (α) y (β) en (I)

$$\hat{u} = \frac{(-3; -8)}{\sqrt{73}} = -\frac{3}{\sqrt{73}}\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{73}}\hat{j}$$

CLAVE D

PROBLEMA N.^o 81

Determine $p-q$ si $ABCD$ es un paralelogramo en donde se cumple que $AC = 5AE$; $BC = 3BF$ y además $\vec{EF} = p(\vec{AD}) + q(\vec{AB})$.



Resolución

Nos piden el unitario del vector que resulta de sumar \vec{F}_2 y \vec{F}_3 .

Por definición

$$\hat{u} = \frac{\vec{F}_2 + \vec{F}_3}{|\vec{F}_2 + \vec{F}_3|} \quad (\text{I})$$

Por dato tenemos

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$(3; 8) + (x; -4) + (-6; y) = \vec{0}$$

$$(x-3; 4+y) = (0; 0)$$

Identificamos los componentes

$$x-3=0 \wedge 4+y=0$$

$$x=3 \wedge y=-4$$

A) $-4/3$

B) $-1/3$

C) $-2/3$

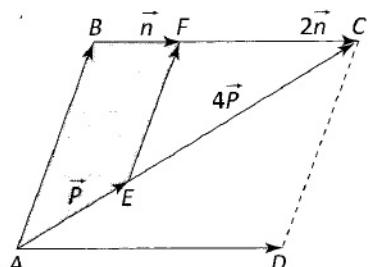
D) $+2/3$

E) $4/3$

Resolución

Nos piden $p-q$.

Grafiquemos los vectores representando los datos.



De la figura

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

(α)

Reemplazando (I) y (II)

$$\vec{AB} + \frac{\vec{AD}}{3} = \frac{\vec{AD} + \vec{AB}}{5} + \vec{EF}$$

De donde

$$\vec{EF} = \left(\frac{2}{15} \right) \vec{AD} + \left(\frac{12}{15} \right) \vec{AB}$$

Identificando los coeficientes

$$p = \frac{2}{15} \quad \wedge \quad q = \frac{12}{15}$$

Finalmente

$$p - q = \frac{2}{15} - \frac{12}{15}$$

$$\therefore p - q = -\frac{2}{3}$$

Por dato

$$\vec{AC} = 5\vec{AE}$$

CLAVE C

En (α)

$$5\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

(I)

$$\therefore \vec{AE} = \frac{\vec{AB} + \vec{AD}}{5}$$

Del dato

$$\vec{BC} = 3\vec{BF}$$

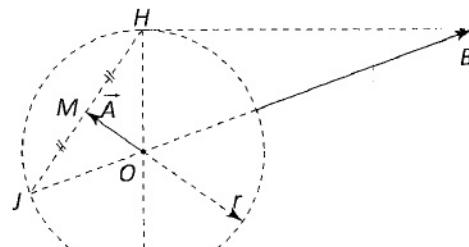
Además

$$\vec{BC} = \vec{AD} \rightarrow \vec{BF} = \frac{\vec{AD}}{3}$$

(II)

PROBLEMA N.º 82

En el gráfico mostrado, M es punto medio de JH . Si $|2\vec{A}-\vec{B}|=2\sqrt{3}$ u y $r=2$ u, calcule $|\vec{A}-\vec{B}|$.



A) $\sqrt{3}$ u

B) $\sqrt{7}$ u

C) $\sqrt{5}$ u

D) $\sqrt{13}$ u

E) $\sqrt{11}$ u

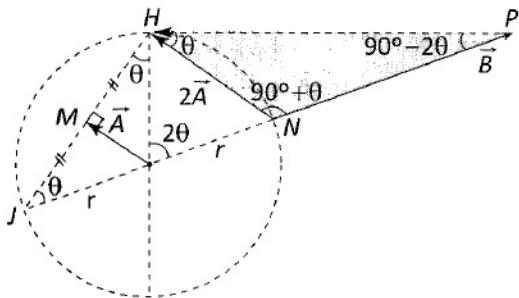
Del polígono sombreado

$$\vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AE} + \vec{EF}$$

Resolución

Nos piden el módulo de la diferencia entre los vectores \vec{A} y \vec{B} .

Veamos el gráfico



De la figura sombreada

$$\vec{PH} = 2\vec{A} - \vec{B}$$

En módulo

$$|\vec{PH}| = |2\vec{A} - \vec{B}| = 2\sqrt{3} \quad (I)$$

En el JHN

$$|\vec{NH}| = 2|\vec{A}| = 2r \cdot \sin\theta = 4 \sin\theta \quad (\text{II})$$

En el $\triangle HNP$, aplicando la ley de senos

$$\frac{|\overrightarrow{PH}|}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{|\overrightarrow{NH}|}{\sin(90^\circ - 2\theta)} = \frac{|\overrightarrow{B}|}{\sin\theta} \quad (\alpha)$$

Reemplazando (I) y (II) en (α)

$$\frac{2\sqrt{3}}{\cos\theta} = \frac{4\sin\theta}{\cos 2\theta} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\rightarrow \tan 2\theta = \sqrt{3}$$

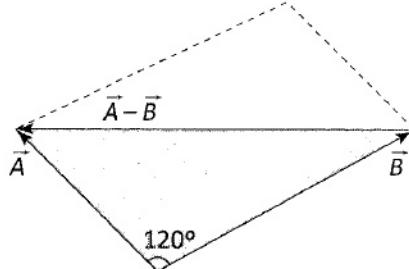
En (α) y reemplazando

$$\frac{|\vec{B}|}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} \rightarrow |\vec{B}| = 2 \text{ u}$$

En (II)

$$\rightarrow |\vec{A}| = 1 \text{ u}$$

Finalmente



Utilizando la ley de cosenos

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos 120^\circ}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2(1)(2) \cdot (-1/2)}$$

$$\therefore |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{7} u$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.^o 83

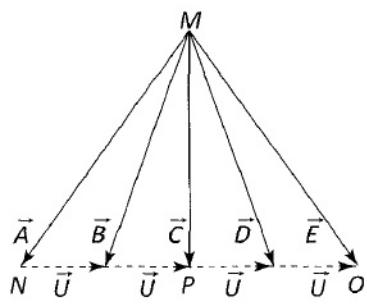
Halle el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrado, si $\theta = 120^\circ$ y $|\vec{A}| = |\vec{E}| = 10\text{ u.}$

- A) $2\frac{\sqrt{37}}{5}$
 B) $5\sqrt{37}$
 C) $4\sqrt{37}$ u
 D) $\frac{\sqrt{5}}{25}$ u
 E) $\frac{\sqrt{37}}{2}$ u

Resolución

Nos piden el módulo de la resultante.

De la gráfica



se deduce también que el $\triangle NMO$ es isósceles.

$$\therefore MP \perp NO$$

Pero

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + 4\vec{U} \quad (\gamma)$$

Del sistema de vectores tenemos

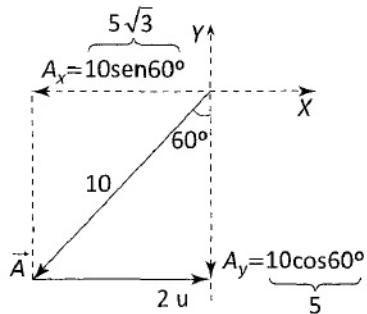
$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{U}; \vec{C} = \vec{A} + 2\vec{U}; \vec{D} = \vec{A} + 3\vec{U} \text{ y } \vec{E} = \vec{A} + 4\vec{U}$$

En (γ)

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{A} + \vec{U} + \vec{A} + 2\vec{U} + \vec{A} + 3\vec{U} + \vec{A} + 4\vec{U} + 4\vec{U}$$

$$\vec{R} = 5\vec{A} + 14\vec{U} \quad (\text{I})$$

hallamos los vectores \vec{A} y \vec{U} a partir del gráfico.



Se tiene

$$\vec{A} = -5\sqrt{3}\hat{i} - 5\hat{j} \text{ y } \vec{U} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\hat{i}$$

Reemplazando en (I)

$$\vec{R} = 5(-5\sqrt{3}\hat{i} - 5\hat{j}) + 14\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\hat{i}\right)$$

$$\vec{R} = 10\sqrt{3}\hat{i} - 25\hat{j}$$

En módulo

$$|\vec{R}| = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (25)^2}$$

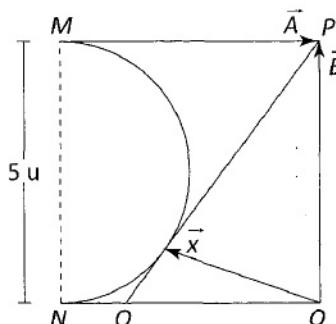
$$\therefore |\vec{R}| = 5\sqrt{37} \text{ u}$$

CLAVE (B)

PROBLEMA N.º 84

En el gráfico mostrado PQ es tangente a la semicircunferencia mostrada.

Halle x en función de \vec{A} y \vec{B} . $MNOP$ es un cuadrado



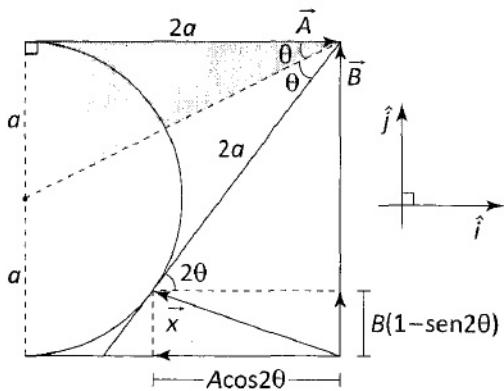
$$\text{A)} \frac{A\hat{i}}{5} - \frac{2}{5}B\hat{j} \quad \text{B)} \frac{A\hat{i}}{3} - \frac{2}{3}B\hat{j} \quad \text{C)} -\frac{2}{3}A\hat{i} + \frac{5}{3}B\hat{j}$$

$$\text{D)} -\frac{2}{5}A\hat{i} - \frac{B\hat{j}}{5} \quad \text{E)} -\frac{3}{5}A\hat{i} + \frac{B\hat{j}}{5}$$

Resolución

Nos piden determinar \vec{x} en términos de \vec{A} y \vec{B} .

Examinemos la gráfica



Tenemos que

$$\vec{x} = A \cos 2\theta (-\hat{i}) + B(1 - \sin 2\theta) \hat{j} \quad (\alpha)$$

Del □ sombreado

$$\theta = 53^\circ / 2 \rightarrow 2\theta = 53^\circ$$

Reemplazamos en (α)

$$\vec{x} = A \cos 53^\circ (-\hat{i}) + B(1 - \sin 53^\circ) \hat{j}$$

$$= A \left(\frac{3}{5}\right) (-\hat{i}) + B \left(1 - \frac{4}{5}\right) \hat{j}$$

$$\vec{x} = -\frac{3}{5} A \hat{i} + \frac{B}{5} \hat{j}$$

CLAVE E

PROBLEMA N.º 85

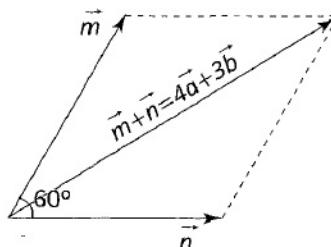
Si tienen los vectores $(2\vec{a}+6\vec{b})$ y $(2\vec{a}-3\vec{b})$ tal que forman un ángulo de 60° . Si $|\vec{a}+3\vec{b}|=1,5$ y $|\vec{a}-3\vec{b}|=5$ u, determine el módulo de $4\vec{a}+3\vec{b}$.

- A) 2 u B) 3 u C) 5 u
D) 6 u E) 7 u

Resolución

Nos piden el módulo de $4\vec{a}+3\vec{b}$.

Sea $\vec{m}=2\vec{a}+6\vec{b}$ y $\vec{n}=2\vec{a}-3\vec{b}$, se sabe que forman 60° entre sí. Si sumamos \vec{m} y \vec{n} obtenemos el vector perdido



Aplicando la ley del paralelogramo

$$|4\vec{a}+3\vec{b}| = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos 60^\circ} \quad (\text{I})$$

Por dato

$$|\vec{m}| = 2 |\vec{a}+3\vec{b}| = 2(1,5) = 3 \text{ u}$$

$$|\vec{n}| = |\vec{2a}-3\vec{b}| = 5 \text{ u}$$

Reemplazando en (I)

$$|4\vec{a}+3\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2(3)(5)\cos 60^\circ}$$

$$\therefore |4\vec{a}+3\vec{b}| = 7 \text{ u}$$

CLAVE E

PROBLEMA N.º 86

Si $\vec{A} \times \vec{B} = 24\hat{i} + 7\hat{j}$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = 25$, determine la tangente del ángulo entre \vec{A} y \vec{B} .

- A) 1 B) 2 C) 1/2
D) -1 E) 1/3

Resolución

Nos piden $\tan\theta$, siendo θ el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} .

Se sabe que $\vec{A} \times \vec{B} = 24\hat{i} + 7\hat{j}$

Su módulo

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$$

A) $0,23\hat{i} - 0,72\hat{j} - 0,65\hat{k}$

B) $0,23\hat{i} + 0,72\hat{j} + 0,65\hat{k}$

C) $-0,12\hat{i} + 0,72\hat{j} + 0,67\hat{k}$

D) $1,2\hat{i} + 4,2\hat{j} + 3,6\hat{k}$

E) $1,2\hat{i} - 4,2\hat{j} - 3,6\hat{k}$

Además

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin\theta = 25 \quad (\text{I})$$

Del otro dato

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta = 25 \quad (\text{II})$$

Luego hacemos (I) ÷ (II)

$$\frac{|\vec{A}| |\vec{B}| \sin\theta}{|\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta} = \frac{25}{25}$$

$$\therefore \tan\theta = 1$$

CLAVE A

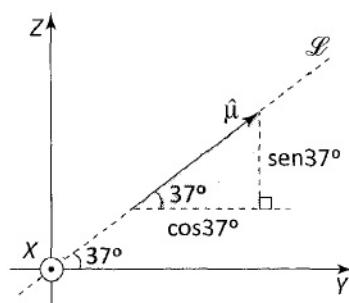
Resolución

Nos piden hallar el vector unitario $\hat{\mu}_1$. De la ecuación dada

$$6\hat{\mu}_1 = \vec{v} + 5\hat{\mu} \quad (\text{I})$$

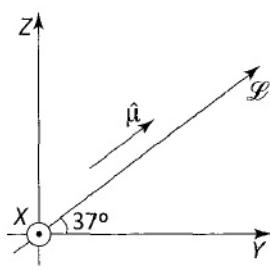
Del dato $\vec{v} = (-2t; t; 3t) \quad (\text{II})$

Nos falta $\hat{\mu}_1$ el cual se obtendrá de la figura que se muestra

**PROBLEMA N.º 87**

Halle el vector unitario $\hat{\mu}_1$ que satisface la siguiente ecuación vectorial

$6\hat{\mu}_1 = \vec{v} + 5\hat{\mu}$, siendo $\vec{v} = -2t\hat{i} + t\hat{j} + 3t\hat{k}$ y t : tiempo.



Tenemos que

$$\hat{\mu} = (0; \cos 37^\circ; \sin 37^\circ)$$

$$\hat{\mu} = \left(0; \frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) \quad (\text{III})$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$6\hat{\mu}_1 = (-2t; t; 3t) + 5\left(0; \frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

$$6\hat{\mu}_1 = (-2t; t+4; 3t+3)$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}(-2t; t+4; 3t+3) \quad (\text{IV})$$

hora, como $\hat{\mu}_1$ es unitario, se verifica

$$|\hat{\mu}_1| = \frac{1}{6} \sqrt{(2t)^2 + (t+4)^2 + (3t+3)^2} = 1$$

tiene

$$14t^2 + 26t - 11 = 0$$

resolviendo

$$t = 0,3551 \text{ s}$$

nalmente, reemplazamos t en (δ)

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}(-2(0,3551); 0,3551 + 4; 3(0,3551) + 3)$$

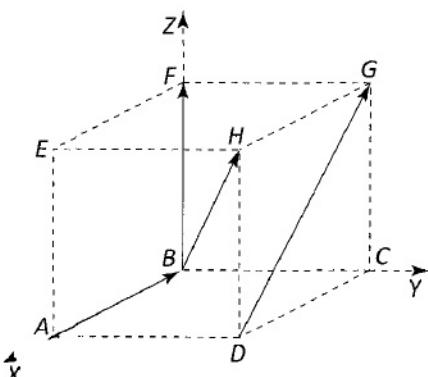
$$\hat{\mu}_1 = -0,12\hat{i} + 0,72\hat{j} + 0,67\hat{k}$$

CLAVE C

PROBLEMA N.º 88

La arista del cubo es 5 unidades, obtenga

$$[\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{DG}) \times (\overrightarrow{AB})]$$



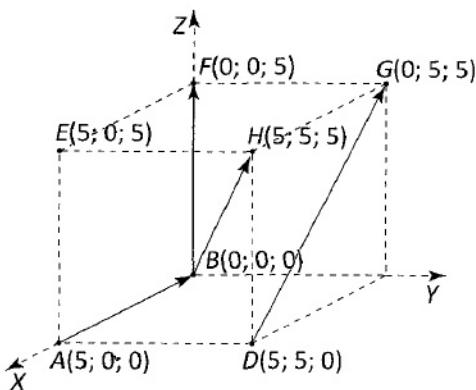
- A) $625\hat{j}$ B) $-125\hat{i}$ C) $-525\hat{k}$
 D) $375\hat{j}$ E) $-275\hat{i}$

Resolución

Nos piden determinar la expresión

$$M = [(\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{DG})] \times (\overrightarrow{AB}).$$

Busquemos información de la gráfica



Tenemos

$$\overrightarrow{AB} = (-5; 0; 0) = -5\hat{i}$$

$$\overrightarrow{BF} = (0; 0; 5) = +5\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BH} = (5; 5; 5) = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\overrightarrow{DG} = (-5; 0; 5) = -5\hat{i} + 5\hat{k}$$

Hallamos el producto escalar

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH} = (0; 0; 5) \cdot (5; 5; 5)$$

$$= 0 + 0 + 25$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BH} = 25$$

Ahora en la expresión

$$M = [25(-5\hat{i} + 5\hat{k})] \times (-5\hat{i})$$

$$M = -625(-\hat{i} + \hat{k}) \times (\hat{i})$$

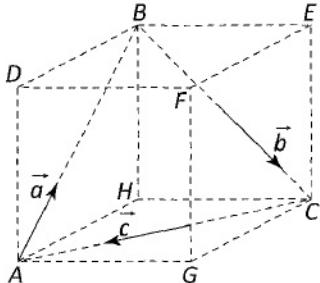
$$M = -625 \underbrace{(\hat{i} \times \hat{i} + \hat{k} \times \hat{i})}_{0}$$

$$\therefore M = -625\hat{j}$$

CLAVE A

PROBLEMA N.º 89

Según la figura, simplifique \vec{Q} en función de $\vec{a}; \vec{b}$ y \vec{c} , si $\vec{AB} = 3\vec{a}$, $\vec{BC} = 2\vec{b}$ y $\vec{AC} = -6\vec{c}$.
 $Q = 2(\vec{CE} + \vec{DB}) - 3(\vec{DF} + \vec{BH}) + (\vec{FE} + \vec{AG})$



Se tiene

- $\vec{CE} + \vec{DB} = \vec{AB} = 3\vec{a}$
- $\vec{DF} + \vec{BH} = \vec{BC} = 2\vec{b}$
- $\vec{AG} + \vec{FE} = \vec{AC} = -6\vec{c}$

Reemplazando en la expresión Q

$$\begin{aligned} Q &= 2(\vec{CE} + \vec{DB}) - 3(\vec{DF} + \vec{BH}) + (\vec{FE} + \vec{AG}) \\ &= 2 \underbrace{\vec{AB}}_{(3\vec{a})} - 3 \underbrace{\vec{BC}}_{(2\vec{b})} + \underbrace{\vec{AC}}_{(-6\vec{c})} \\ \therefore Q &= 6(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \end{aligned}$$

CLAVE (D)

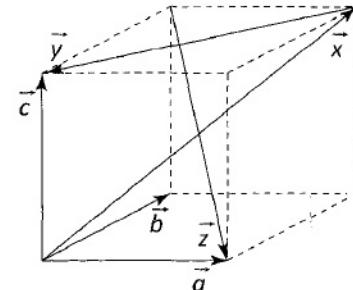
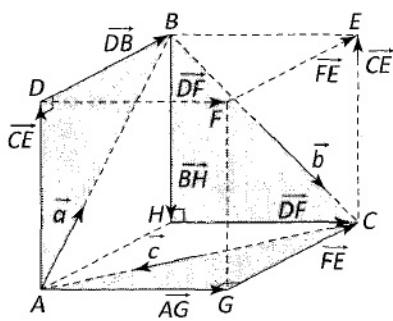
- A) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
 B) $2(3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$
 C) $3(\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c})$
 D) $6(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$
 E) $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Resolución

Nos piden simplificar la expresión Q sabiendo que

$$\vec{AB} = 3\vec{a}; \vec{BC} = 2\vec{b} \text{ y } \vec{AC} = -6\vec{c}.$$

Examinemos el gráfico



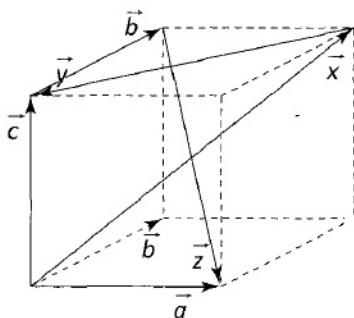
- A) $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$
 B) $\vec{a} - 2\vec{b}$
 C) $2\vec{a} + \vec{c}$
 D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 E) $\vec{b} + 2\vec{c}$

Resolución

Nos piden la resultante de todos los vectores.

$$\text{Sea } \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \quad (\text{I})$$

Examinemos la figura



Tenemos

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{c} \quad (\alpha)$$

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{z} \quad (\beta)$$

Reemplazamos (α) y (β) en (I)

$$\vec{R} = \vec{a} + \underbrace{\vec{b} + \vec{c} + \vec{z}}_{\vec{a}} + \vec{x} + \vec{y}$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{c}$$

$$\therefore \vec{R} = 2\vec{a} + \vec{c}$$

CLAVE C

Resolución

$$\text{Nos piden hallar } \frac{|\hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B|}{|\hat{\mu}_{A+B}|} \quad (\text{I})$$

para lo cual determinaremos los respectivos vectores unitarios y también sus módulos

- Para $\vec{A}: \hat{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(3\hat{i} + 4\hat{j})}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\hat{i}}{5} + \frac{4\hat{j}}{5} \quad (\alpha)$

- Para $\vec{B}: \hat{\mu}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = -\frac{4\hat{j}}{4} = -\hat{j} \quad (\beta)$

• Para $\vec{A} + \vec{B}$:

$$\hat{\mu}_{A+B} = \frac{(\vec{A} + \vec{B})}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{j}}{3} = \hat{i} \quad (\gamma)$$

Luego (α) , (β) y (γ) en (I)

$$\frac{|\hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B|}{|\hat{\mu}_{A+B}|} = \frac{\left| \frac{3\hat{i}}{5} + \frac{4\hat{j}}{5} - \hat{j} \right|}{\left| \hat{i} \right|} = \frac{\left| \frac{3\hat{i}}{5} - \frac{\hat{j}}{5} \right|}{1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2}}{1}$$

$$\therefore \frac{|\hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B|}{|\hat{\mu}_{A+B}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

CLAVE B

PROBLEMA N.º 91

Si $\hat{\mu}_P$ denota un vector unitario asociado al vector P , calcule

$$|\hat{\mu}_A + \hat{\mu}_B| \div |\hat{\mu}_{A+B}|; \text{ sabiendo que } \vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} \text{ y } \vec{B} = -4\hat{j}.$$

A) $2\sqrt{10}/5$ B) $\sqrt{10}/5$ C) $\sqrt{5}/2$

D) $\sqrt{2}/5$ E) $\sqrt{5}/\sqrt{2}$

PROBLEMA N.º 92

Se tienen dos vectores: $\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j}$ y $\vec{s} = s_x\hat{i} + s_y\hat{j}$ y forman un ángulo de 60° , de tal forma que $|\vec{s}| = 1$, $r_x = \sqrt{2}r_y$ y $\vec{r} \cdot \vec{s} = 1,5$.

Determine el valor de $P = r_x^2 + r_y^2 + s_x^2 + s_y^2$.

A) 8 B) -8 C) 4

D) 10 E) -10

Resolución

Nos piden determinar el valor de P .

$$\text{Nótese que: } r^2 = r_x^2 + r_y^2 + s^2 = s_x^2 + s_y^2$$

$$\text{De donde: } P = r^2 + s^2 \quad (\text{I})$$

Por dato

- $|\vec{s}| = 1$, es decir: $s_x^2 + s_y^2 = 1^2 \quad (\alpha)$

• Del producto escalar

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = \frac{3}{2}$$

$$r \cdot s \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$$

$$r \cdot (1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \rightarrow r = 3 \quad (\beta)$$

Finalmente, (α) y (β) en (I)

$$P = 3^2 + 1^2$$

$$\therefore P = 10$$

CLAVE (D)

PROBLEMA N.º 93

Si se sabe que $\vec{A} = 2\hat{i}$; $\vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$,

calcule: $\vec{A} \cdot \vec{B} (\vec{A} + \vec{A} \times \vec{B})$

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| A) $2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ | B) $6(\hat{i} - 2\hat{j})$ |
| C) $12(\hat{i} - \hat{k})$ | E) $16(\hat{i} - 3\hat{k})$ |
| D) $8(-\hat{i} - 2\hat{k})$ | |

Resolución

Nos piden determinar la expresión

$$M = \vec{A} \cdot \vec{B} (\vec{A} + \vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{I})$$

Hallaremos de manera separada los productos entre vectores.

• Hallamos $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2; 0) \cdot (4; -3) = 8 \quad (\alpha)$$

• Hallamos $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i}) \times (4\hat{i} - 3\hat{j})$$

$$= 8\hat{j} \times \hat{i} - 6\hat{i} \times \hat{j}$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = -6\hat{k} \quad (\beta)$$

Luego reemplazamos (α) y (β) en (I)

$$M = 8(2\hat{i} + (-6\hat{k}))$$

$$M = 16\hat{i} - 48\hat{k}$$

CLAVE (E)

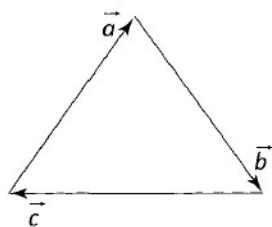
PROBLEMA N.º 94

Los vectores $\vec{a} = 3\hat{i} + 10\hat{j}$; $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$; y $\vec{c} = -12\hat{i} - 6\hat{j}$ forman un polígono cerrado. Determine el producto escalar $\vec{b} \cdot \vec{c}$ (en valor absoluto).

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 84 | B) 70 | C) 56 |
| D) 42 | | E) 14 |

Resolución

Nos piden el valor del producto $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Por dato, nos dicen que los vectores forman un polígono de tres lados, en este caso un triángulo



il que

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$3\hat{i} + 10\hat{j} + \vec{b} + (-12\hat{i} - 6\hat{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{b} = 9\hat{i} - 4\hat{j}$$

nalmente

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (9\hat{i} - 4\hat{j}) \cdot (-12\hat{i} - 6\hat{j})$$

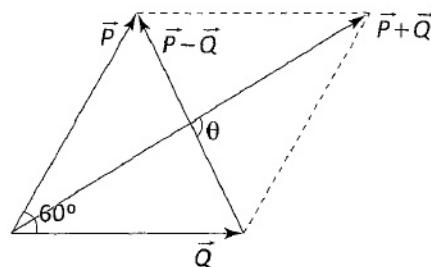
$$= (9; -4) \cdot (-12; -6)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = -84$$

valor absoluto

$$|\vec{b} \cdot \vec{c}| = 84$$

CLAVE A



Notamos que el ángulo pedido es θ .

Usando la definición de producto escalar tenemos

$$(\vec{P} + \vec{Q}) \cdot (\vec{P} - \vec{Q}) = |\vec{P} + \vec{Q}| |\vec{P} - \vec{Q}| \cos \theta$$

De donde

$$\cos \theta = \frac{(\vec{P} + \vec{Q}) \cdot (\vec{P} - \vec{Q})}{|\vec{P} + \vec{Q}| |\vec{P} - \vec{Q}|} \quad (I)$$

Hallaremos cada término de la expresión de manera independiente

$$I. \quad (\vec{P} + \vec{Q}) \cdot (\vec{P} - \vec{Q})$$

$$= P^2 - Q^2 \\ = 4^2 - 3^2 = 7 \quad (\alpha)$$

$$II. \quad |\vec{P} + \vec{Q}|^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 4^2 + 3^2 + 2(4)(3)(1/2)$$

$$|\vec{P} + \vec{Q}| = \sqrt{37} \quad (\beta)$$

$$III. \quad |\vec{P} - \vec{Q}|^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos 60^\circ$$

$$= 4^2 + 3^2 - 2(4)(3)(1/2)$$

$$|\vec{P} - \vec{Q}| = \sqrt{13} \quad (\gamma)$$

PROBLEMA N.º 95

$P=4$, $Q=3$, y el ángulo formado por dichos vectores es 60° , halle el ángulo formado por los vectores $\vec{P} + \vec{Q}$ y $\vec{P} - \vec{Q}$.

$\cos^{-1}(0,295)$

$\cos^{-1}(0,271)$

53°

$\cos^{-1}(0,319)$

74°

SOLUCIÓN

Si piden el ángulo formado por la suma y la diferencia de los vectores \vec{P} y \vec{Q} .

Presentemos gráficamente la situación.

Finalmente, reemplazamos (α), (β) y (γ) en (I)

$$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{37}\sqrt{13}} = 0,319$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}(0,319)$$

De (I)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_B B \quad (\text{II})$$

CLAVE (D)

También se sabe que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1; 2; 1) \cdot (4; 4; 7)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4+8+7) = 19$$

PROBLEMA N.º 96

Halle la proyección del vector $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ sobre el vector $\vec{B} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$.

- A) 1,7
- B) 2,1
- C) 2,2
- D) 3,1
- E) 5,4

Finalmente, en (II)

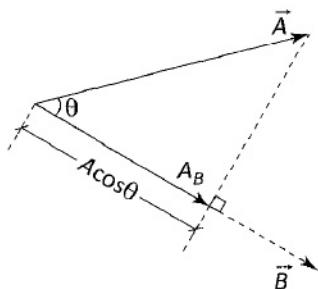
$$19 = A_B \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}$$

$$\rightarrow A_B = \frac{19}{9} = 2,1$$

CLAVE (B)

Resolución

Nos piden la proyección de \vec{A} sobre el vector \vec{B} , para lo cual representemos de manera esquemática los vectores \vec{A} y \vec{B} .



De la figura

$$\left. \begin{array}{l} \text{Proyección de } A \text{ sobre } B \\ \hline \end{array} \right\} A_B = A \cos \theta \quad (\text{I})$$

De la definición del producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = (A \cos \theta) B$$

PROBLEMA N.º 97

Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$; $\vec{B} = \hat{i} + \hat{k}$; y $\vec{C} = \hat{j} + \hat{k}$. Determine

- Un vector unitario en la dirección del vector $\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}$.
- Un vector perpendicular al plano formado por los vectores \vec{B} y \vec{C} .
- El área del paralelogramo formado por \vec{A} y \vec{B} .

Resolución

- Nos piden un vector unitario en la dirección del vector $\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}$, por definición

$$\hat{\mu} = \frac{(\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C})}{|\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}|} \quad (\text{II})$$

Hallamos $\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}$

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + \hat{k}$$

$$\begin{array}{r} -3\vec{C} = -3\hat{j} - 3\hat{k} \\ \hline \vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k} \end{array}$$

Su módulo

$$|\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}$$

$$|\vec{A} + \vec{B} - 3\vec{C}| = \sqrt{29} = 5,39 \text{ u}$$

En (I)

$$\hat{\mu} = \left(\frac{3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}}{5,39} \right)$$

$$\hat{\mu} = 0,56\hat{i} - 0,74\hat{j} - 0,37\hat{k}$$

Un vector perpendicular al plano formado por \vec{B} y \vec{C} ; puede ser su producto vectorial $(\vec{B} \times \vec{C})$.

Es decir

$$\vec{P} = \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - 1) - \hat{j}(1 - 0) + \hat{k}(1 - 0) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{P} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\therefore \vec{P} = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

- c) Nos piden el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{A} y \vec{B} , esta resulta ser el módulo de su producto vectorial, es decir

$$\text{área} = |\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2\hat{i} & & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |(-\hat{i}) - (-\hat{k} + 2\hat{j})|$$

$$\text{área} = |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$\therefore \text{área} = 2,4 \text{ u}^2$$

PROBLEMA N.º 98

Dados los siguientes vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$; y $\vec{C} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, determine

- a) Si \vec{A} y \vec{B} son o no perpendiculares.
 b) Calcule $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$.

Resolución

- a) Para que \vec{A} y \vec{B} sean perpendiculares se debe verificar que su producto escalar sea cero.

Es decir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3; 2; 2) \cdot (1; -3; 4)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 - 6 + 8 = 5$$

Por lo tanto, \vec{A} y \vec{B} no son perpendiculares.

- b) La única interpretación posible de este producto, denominado producto triple, es que geométricamente representa el volumen del paralelogramo cuyas aristas son los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

Es decir

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (3; 2; 2) \cdot \vec{B} \times \vec{C} \quad (\delta)$$

Hallando

$$\vec{B} \times \vec{C}$$

Se tiene

$$|\vec{B} \times \vec{C}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3\hat{i} + 3\hat{k} + 8\hat{j}) - (-6\hat{k} + 12\hat{i} - \hat{j})$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = -9\hat{i} + 9\hat{j} + 9\hat{k}$$

$$\therefore \vec{B} \times \vec{C} = (-9; 9; 9)$$

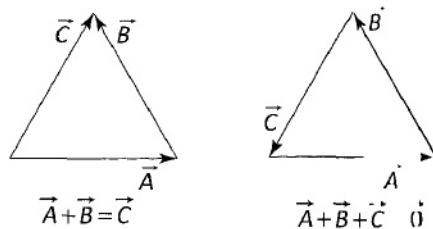
Reemplazamos en (δ)

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (3; 2; 2) \cdot (-9; 9; 9) \\ &= -27 + 18 + 18 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 9 \text{ u}^3$$

Resolución

Hay que demostrar que los vectores forman un triángulo, para lo que se necesita que la resultante de dos de ellos sea el tercero, o que la resultante de los tres sea el vector nulo, como se ve en las figuras



De los datos tenemos

$$\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} = \vec{C},$$

con lo que tendremos un triángulo.

En segundo lugar, para que sea rectángulo, el producto escalar entre dos de ellos debe ser cero.

Consideraremos

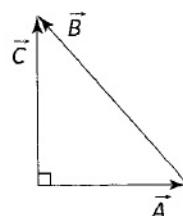
$$\text{I. } \vec{A} \cdot \vec{B} = (2; 1; -4) \cdot (1; -3; 5)$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = -21 \neq 0$$

$$\text{II. } \vec{A} \cdot \vec{C} = (2; 1; -4) \cdot (3; -2; 1)$$

$\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$; esto significa que \vec{A} y \vec{C} son perpendiculares.

Por lo tanto, el triángulo será rectángulo.



PROBLEMA N.º 99

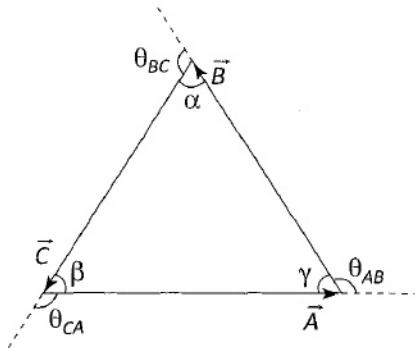
Demuestre que los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, y $\vec{C} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ forman un triángulo rectángulo.

PROBLEMA N.^o 100

Usando el producto vectorial, demuestre la ley de senos.

Resolución

Supongamos un triángulo formado por los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} , tal como se muestra en la figura



$$\text{Entonces: } \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

Multiplicando vectorialmente por \vec{A} se tiene

$$\vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{0}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} = \vec{0} \quad (\text{I})$$

Multiplicando vectorialmente por \vec{B}

$$\vec{B} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \times \vec{0}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{C} = \vec{0} \quad (\text{II})$$

Multiplicando vectorialmente por \vec{C}

$$\vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B} + \vec{C} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{0}$$

$$\vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{III})$$

De (I)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{A}$$

De (II)

$$\vec{B} \times \vec{A} = \vec{C} \times \vec{B}$$

De (III)

$$\vec{C} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$$

De donde se tiene

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$$

Por definición

$$AB \sin \theta_{AB} \hat{\mu} = AC \sin \theta_{AC} \hat{\mu} = BC \sin \theta_{BC} \hat{\mu}$$

Como tienen la misma dirección (son vectores axiales)

$$AB \sin \theta_{AB} = CA \sin \theta_{AC} = BC \sin \theta_{BC}$$

$$\text{Además } \sin(180 - \theta) = \sin \theta$$

$$\rightarrow AB \sin \gamma = CA \sin \beta = BC \sin \alpha$$

Dividiendo entre $A \cdot B \cdot C$ tendremos

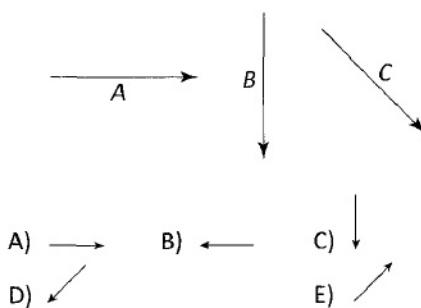
$$\frac{\sin \gamma}{C} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \alpha}{A}$$

Con lo cual estamos demostrando la ley de senos.

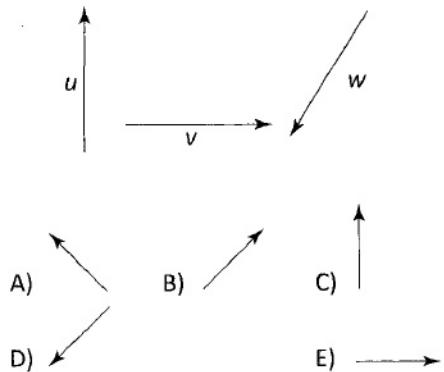
PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

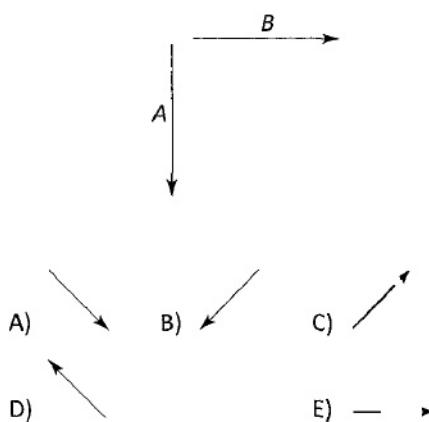
1. Dada la dirección de los vectores que se indican en la figura ¿cuál podría ser la dirección del vector $\vec{A} - 2\vec{B} - \vec{C}$?



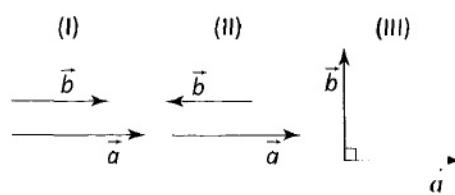
2. Para los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} de la figura, ¿cuál de los siguientes vectores representa mejor al vector $\vec{u} - 2\vec{v} + \frac{\vec{w}}{4}$?



3. Sean los vectores \vec{A} y \vec{B} no nulos, entonces el vector $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ está representado por

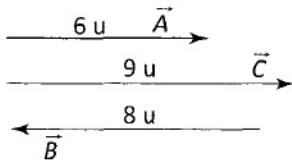


4. En los casos (I) y (II), el módulo de la resultante es de 17 u y 7 u, respectivamente. Determine el módulo de la resultante en el caso (III).



- A) 6 u B) 7 u C) 13 u
 D) 15 u E) 24 u

- i. Calcule el módulo de $\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}$ si



- A) 2 u B) 3 u C) 4 u
D) 5 u E) 6 u

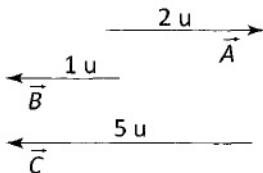
- ii. Dados los vectores $\vec{A} = (3; 5)$ y $\vec{B} = (6; 4)$, determine el módulo de $2\vec{A} - 3\vec{B}$.

- A) $\sqrt{29}$ u B) 8 u C) 12 u
D) $\sqrt{119}$ u E) $\sqrt{148}$ u

- iii. Dado los vectores $\vec{A} = (3; 4)$, $\vec{B} = (6; 4)$ y $\vec{C} = (9; 8)$, determine: $|2\vec{A} + 2\vec{B} - 3\vec{C}|$.

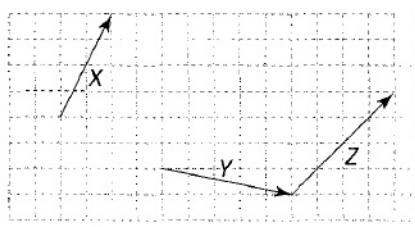
- A) 12 u B) $12\sqrt{2}$ u C) 14 u
D) $14\sqrt{2}$ u E) 24 u

- iv. Para el conjunto de vectores mostrados determine $|2\vec{A} + 3\vec{B} - \vec{C}|$ si



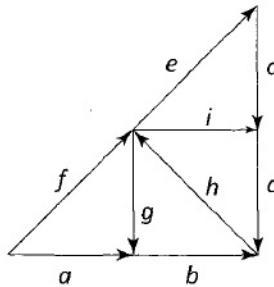
- A) 1 u B) 3 u C) 6 u
D) 9 u E) 12 u

9. Para los vectores mostrados en la figura, la opción que mejor representa la dirección del vector $\vec{X} - \vec{Y} + \vec{Z}$ es



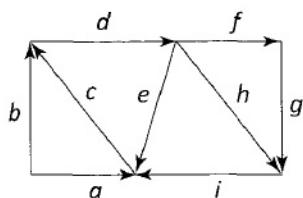
- A) B) C)
D) E)

10. Del diagrama de vectores mostrados, indique cuál de las ecuaciones vectoriales es falsa.



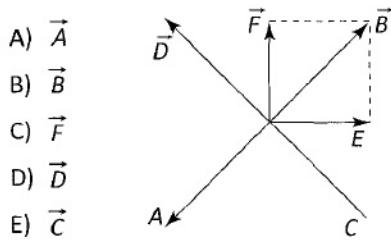
- A) $\vec{a} - \vec{g} - \vec{f} = 0$
B) $\vec{b} + \vec{h} + \vec{g} = 0$
C) $\vec{i} = \vec{e} + \vec{d}$
D) $\vec{i} + \vec{c} = \vec{h}$
E) $\vec{f} + \vec{e} + \vec{d} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = 0$

11. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta para el diagrama vectorial mostrado?



- A) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
- B) $\vec{c} = \vec{d} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{i}$
- C) $\vec{c} = \vec{d} + \vec{h} + \vec{i}$
- D) $\vec{h} = \vec{i} + \vec{c} + \vec{d}$
- E) $|\vec{a} - \vec{e} + \vec{f}| = |\vec{i} + \vec{c}|$

12. A partir del diagrama de vectores adjunto, y dado que $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ y $|\vec{C}| = |\vec{D}|$, encuentre el vector resultante.



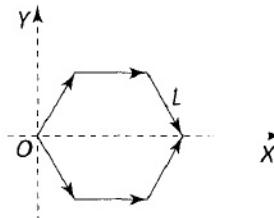
13. Los vectores mostrados en la figura tienen igual módulo. El módulo del vector resultante es

- A) 0
 - B) 2
 - C) 5
 - D) 7
 - E) 10
-
- Un rombo formado por cuatro vectores iguales de módulo 5, que parten del mismo punto y apuntan hacia los vértices de un cuadrado de lado 5.

Tomado de la Olimpiada de Física de Colombia del 21 de septiembre de 1993

14. Sobre los lados de un hexágono regular de lado L se encuentran vectores como se indica en la figura. La magnitud del vector suma resultante es

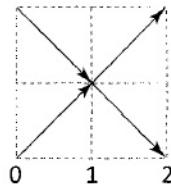
- A) L
- B) $2L$
- C) $3L$
- D) $4L$
- E) $6L$



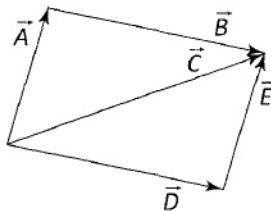
Tomado de la Olimpiada de Física de Colombia del 22 de septiembre de 1997

15. Si se suman los cuatro vectores de la figura, la magnitud del vector resultante es

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 4
- E) 8

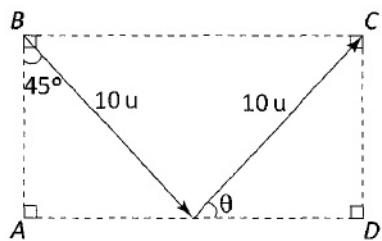


16. Del sistema de vectores encontrar el vector resultante.



- A) \vec{C}
- B) $2\vec{C}$
- C) $3\vec{C}$
- D) $\vec{0}$
- E) $2\vec{B}$

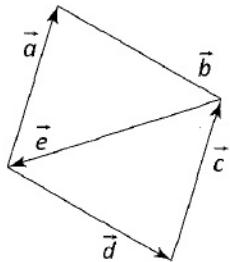
7. Halle el módulo de la resultante de los vectores mostrados. $ABCD$ es un rectángulo.



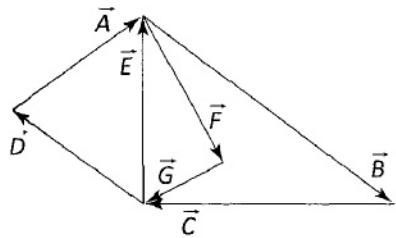
- A) 10 u B) $10\sqrt{2}$ u C) 20 u
D) $20\sqrt{2}$ u E) 30 u

8. Determine la resultante del sistema de vectores que se muestra.

- A) \vec{e}
B) $2\vec{e}$
C) $\vec{0}$
D) $-\vec{e}$
E) $-2\vec{e}$



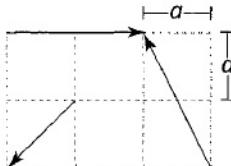
9. En el sistema de vectores que se muestra, determine su resultante.



- A) \vec{E}
B) $2\vec{E}$
C) \vec{B}
D) $\vec{0}$
E) $2\vec{B}$

20. Determine el módulo de los vectores mostrados.

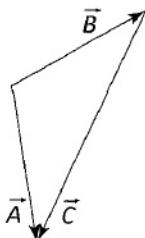
- A) a
B) $2a$
C) $a\sqrt{2}$
D) $2a\sqrt{2}$
E) $4a$



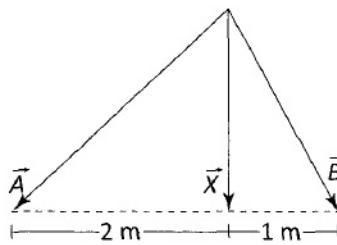
NIVEL INTERMEDIO

21. Determine el módulo del vector \vec{A} , si se sabe que el módulo del sistema dado es 12 u.

- A) 3 u
B) 5 u
C) 6 u
D) 12 u
E) 24 u

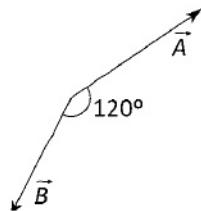


22. Exprese \vec{X} en función de \vec{A} y \vec{B} .



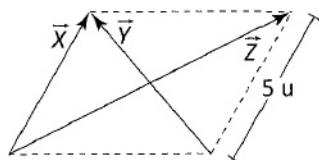
- A) $(\vec{A}-2\vec{B})/3$
B) $(2\vec{A}+3\vec{B})/4$
C) $(\vec{A}+\vec{B})/2$
D) $(\vec{A}-\vec{B})/3$
E) $(\vec{A}+2\vec{B})/3$

23. Determine el menor módulo del vector resultante de los vectores mostrados ($|\vec{A}|=4 \text{ u}$).



- A) 2 u B) $2\sqrt{3}$ u C) $4\sqrt{3}$ u
D) 4 u E) $3\sqrt{2}$ u

24. Dado el paralelogramo ABCD, determine el módulo del vector resultante.



- A) 9 u B) 10 u C) 15 u
D) 24 u E) 24 u

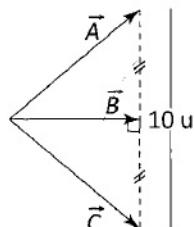
25. El módulo de la resultante máxima de dos vectores es 20 u, y cuando estos forman 120° su resultante es 10 u.

¿Cuál será el módulo de la resultante cuando los vectores formen 74° entre sí?

- A) 12 u
B) 15 u
C) 16 u
D) 20 u
E) 24 u

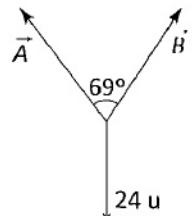
26. Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrado sabiendo que $|\vec{A}|=13$.

- A) 12 u
B) 24 u
C) 36 u
D) 48 u
E) 60 u

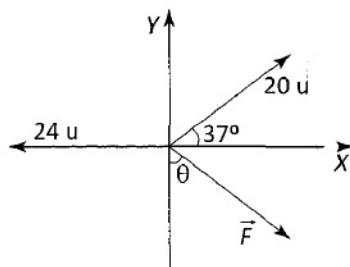


27. Si la resultante del sistema de vectores mostrados es cero, determine el módulo de la resultante de \vec{A} y \vec{B} .

- A) 12 u
B) 18 u
C) 20 u
D) 24 u
E) 30 u

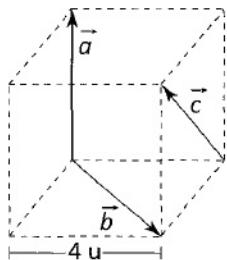


28. Determine el módulo del vector \vec{F} , si la resultante del sistema mostrado es nula.



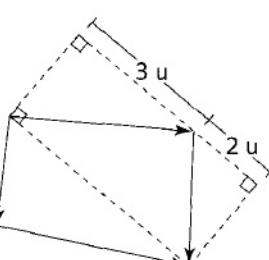
- A) $0,5\sqrt{13}$ u B) $\sqrt{13}$ u C) $2\sqrt{13}$ u
D) $4\sqrt{13}$ u E) $6\sqrt{13}$ u

29. En el cubo mostrado, determine el módulo de la resultante del sistema de vectores.



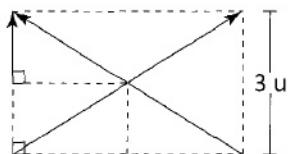
- A) 12 u B) 24 u C) 36 u
D) 48 u E) $4\sqrt{38}$ u

32. Determine el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



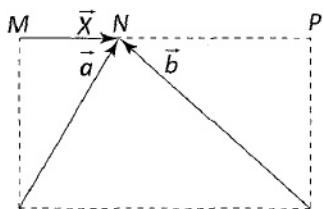
- A) 6 u B) 8 u C) 10 u
D) 12 u E) 20 u

30. Halle la resultante de los vectores mostrados.



- A) 6 U (\rightarrow) B) 7 U (\downarrow) C) 7,5 U (\uparrow)
D) 8 U (\leftarrow) E) 8 U (\rightarrow)

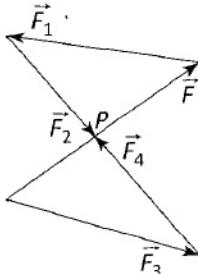
31. Determine \vec{X} en función de los vectores \vec{a} y \vec{b} , si $2MN=NP$.



- A) $(\vec{a}-\vec{b})/2$ B) $(2\vec{a}-\vec{b})/3$ C) $(\vec{a}-\vec{b})/3$
D) $(\vec{a}+\vec{b})/3$ E) $(\vec{a}+2\vec{b})/3$

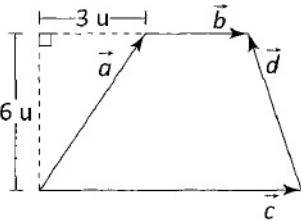
33. Si el módulo de la fuerza \vec{F} es 10 N y P es el punto medio de dicho vector, ¿qué módulo tiene la fuerza resultante del sistema mostrado?

- A) 5 N B) 10 N C) 15 N
D) 20 N E) 0 N

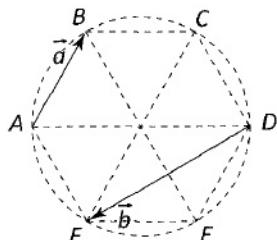


34. Si el vector \vec{b} tiene un módulo de 5 u, determine el módulo de la resultante del sistema mostrado

- A) 5 u B) 12 u C) 15 u
D) 16 u E) 20 u

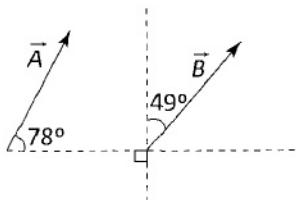


35. Si $ABCDEF$ es un hexágono regular, determine el módulo de la resultante de los vectores \vec{a} y \vec{b} , siendo ($|\vec{a}|=2\text{ u}$).



- A) 1 u B) 2 u C) 3 u
D) 4 u E) 5 u

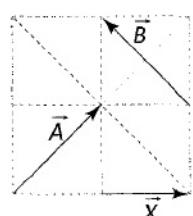
36. Dados los vectores \vec{A} y \vec{B} , halle el módulo de $\vec{A}+\vec{B}$ si $|\vec{A}|=5\text{ u}$ y $|\vec{B}|=2\text{ u}$.



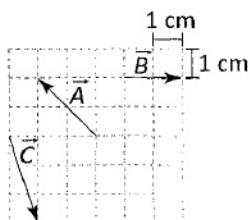
- A) $\sqrt{2}\text{ u}$ B) $\sqrt{3}\text{ u}$ C) $3\sqrt{5}\text{ u}$
D) $2\sqrt{5}\text{ u}$ E) $\sqrt{7}\text{ u}$

37. Si $PQRS$ es un cuadrado y además $\vec{X}=m\vec{A}+n\vec{B}$, determine $m+n$.

- A) 1
B) 2
C) 2,5
D) 3
E) 0

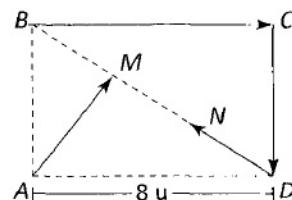


38. En el conjunto de vectores que se muestran, determine el módulo del vector resultante.



- A) 1 cm B) 2 cm C) $\sqrt{2}\text{ cm}$
D) $2\sqrt{2}\text{ cm}$ E) 4 cm

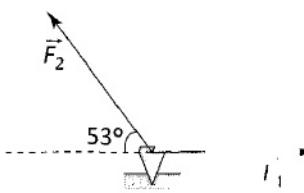
39. Halle el módulo del vector resultante del sistema vectorial mostrado
(considere: $BM=MN=ND$).



- A) 6 u B) 8 u C) 10 u
D) 12 u E) 16 u

40. Sobre una estaca se aplican dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 tal como se indica, sabiendo que $|\vec{F}_1|=40\text{ N}$. Determine la mínima fuerza que reemplace al sistema.

- A) 16 N
B) 24 N
C) 32 N
D) 40 N
E) 48 N



11. Sean los vectores \vec{a} y \vec{b} , tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, y $|\vec{a}| = p$, $|\vec{b}| = q$. Determine $E = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|}{|\vec{a} - \vec{b}|}$

- A) 0 B) -1 C) -2
D) 1 E) 2

12. Halle un vector \vec{A} paralelo al vector $\vec{B} = (-2; 1; 3)$, y que además $\vec{A} \cdot \vec{B} = 28$.

- A) $(-1; 2; 3)$
B) $(-2; 1; -3)$
C) $(-3; 2; -3)$
D) $(-4; 2; 6)$
E) $(4; -2; -6)$

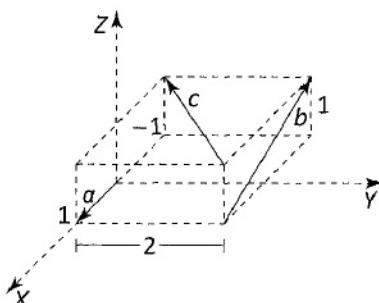
13. Un vector \vec{A} está dirigido a lo largo de la diagonal de un cubo. Calcule el ángulo que este vector forma con su proyección sobre el plano $Y-Z$.

- A) 65°
B) 55°
C) 45°
D) 35°
E) 25°

14. Halle un vector cuyas componentes tengan la misma dirección que el vector $8\hat{i} + 9\hat{j} + 12\hat{k}$ y cuyo módulo sea 51 u.

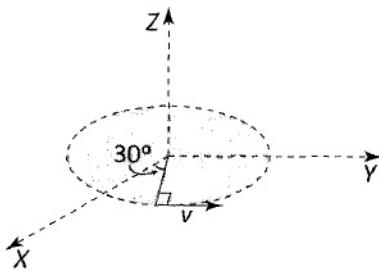
- A) $49\hat{i} + 10\hat{j} + 10\hat{k}$
B) $10\hat{i} + 10\hat{j} + 49\hat{k}$
C) $24\hat{i} + 27\hat{j} + 36\hat{k}$
D) $30\hat{i} + 21\hat{j} + \sqrt{1260}\hat{k}$
E) $21\hat{i} + 30\hat{j} + \sqrt{1260}\hat{k}$

45. Para el gráfico de la figura, determine el vector unitario del vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



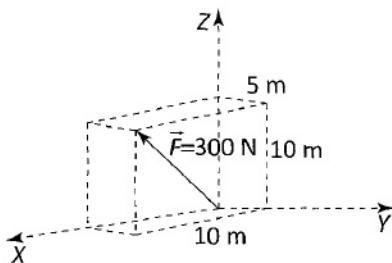
- A) $-(3/\sqrt{14})\hat{i} - (2/\sqrt{14})\hat{j} + (1/\sqrt{14})\hat{k}$
B) $-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$
C) $(1/\sqrt{6})\hat{i} - (2/\sqrt{6})\hat{j} + (1/\sqrt{6})\hat{k}$
D) $(3/\sqrt{17})\hat{i} - (2/\sqrt{17})\hat{j} + (2/\sqrt{17})\hat{k}$
E) $(3/\sqrt{14})\hat{i} + (2/\sqrt{14})\hat{j} - (1/\sqrt{14})\hat{k}$

46. Si el vector \vec{v} tiene una dirección tangente a la trayectoria circular, que es paralela al plano $X-Y$, entonces es cierto que los ángulos directores para esa situación son

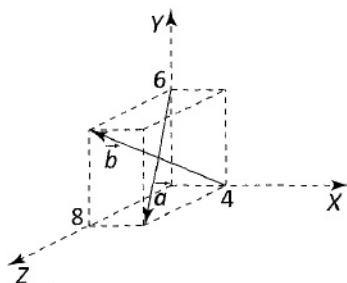


- | α | β | γ |
|----------------|------------|------------|
| A) 30° | 0 | 30° |
| B) 120° | 0 | 30° |
| C) 120° | 30° | 90° |
| D) 30° | 60° | 90° |
| E) 30° | 90° | 60° |

47. El vector \vec{F} de la figura se dirige de acuerdo a la diagonal del paralelepípedo. Las componentes ortogonales del vector \vec{F} son

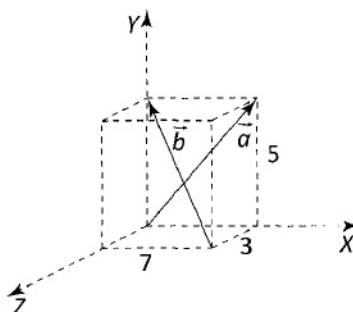


- A) $10\hat{i} + 5\hat{j} + 10\hat{k}$
 B) $200\hat{i} + 100\hat{j} + 50\hat{k}$
 C) $50\hat{i} + 200\hat{j} + 100\hat{k}$
 D) $200\hat{i} + 100\hat{j} + 200\hat{k}$
 E) $50\hat{i} + 100\hat{j} + 50\hat{k}$
48. Para los vectores mostrados en la figura, encuentre al vector que representa a la suma $\vec{a} - \vec{b}/2$.



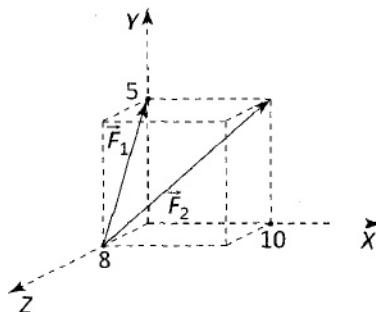
- A) $6\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k}$
 B) $3\hat{i} + 12\hat{j} + 6\hat{k}$
 C) $6\hat{i} - 9\hat{j} + 4\hat{k}$
 D) $4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}$
 E) $8\hat{i} + 5\hat{j} + 10\hat{k}$

49. Determine el vector que al sumarse a los vectores \vec{a} y \vec{b} da una resultante nula.



- A) $\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k}$
 B) $2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$
 C) $5\hat{j} + 6\hat{k}$
 D) $10\hat{j} - 3\hat{k}$
 E) $-10\hat{j} + 3\hat{k}$

50. Determine el vector de la suma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Se sabe que $\vec{F}_2 = 2\vec{F}_1 = 100$ unidades.



- A) $73\hat{i} + 62.9\hat{j} + 100.6\hat{k}$
 B) $123\hat{i} + 62.9\hat{j} - 15.6\hat{k}$
 C) $10\hat{i} + 10\hat{j} - 16\hat{k}$
 D) $73\hat{i} + 62.9\hat{j} - 100.6\hat{k}$
 E) $83\hat{i} + 62.9\hat{j} + 100.6\hat{k}$

Dados los vectores $\vec{L}=2\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ y $\vec{M}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, el vector de módulo 3 u que se encuentra en la dirección del vector $\vec{L}+\vec{M}$ es

- A) $(3/\sqrt{11})(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$
- B) $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$
- C) $(3/\sqrt{11})(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$
- D) $3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$
- E) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

55. Sean los vectores $\vec{P}=(2;3;4)$ y $\vec{Q}=4\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$. Determine el área del paralelogramo que tiene a estos vectores por lados.

- A) $17,62 \text{ m}^2$
- B) $21,57 \text{ m}^2$
- C) $9,72 \text{ m}^2$
- D) $31,72 \text{ m}^2$
- E) $25,39 \text{ m}^2$

NIVEL AVANZADO

Halle un vector \vec{A} que es paralelo a $\vec{B}=(1;1;-1)$ y $\vec{A}\times\vec{C}=(0;2;2)$, donde $\vec{C}=(2;1;-1)$.

- A) $(-1; 2; 2)$
- B) $(2; -1; 2)$
- C) $\sqrt{3}(2;-2;1)$
- D) $(-2; 2; 2)$
- E) $2(-1;-1;1)$

Halle un vector \vec{A} que es paralelo al vector $\vec{B}=(-2; 1; 3)$; $\vec{A}\cdot\vec{B}=28$ u.

- A) $(-4; 2; 6)$
- B) $(-2; 2; -1)$
- C) $(3; 1; 6)$
- D) $(-9; 1; -2)$
- E) $(-4; 6; 3)$

Sea $\vec{A}=(3; 1; 2)$. Determine un vector en el plano xy de módulo 2 u y que sea perpendicular al vector \vec{A} .

- A) $\sqrt{5}(2\hat{i}-3\hat{j})$
- B) $\sqrt{2}(\hat{i}-2\hat{j})$
- C) $\sqrt{10}(\hat{i}-3\hat{j})$
- D) $\frac{\sqrt{5}}{2}(\hat{i}+3\hat{j})$
- E) $\frac{\sqrt{10}}{5}(\hat{i}-3\hat{j})$

56. Sean los vectores $\vec{A}=(1;-1;1)$ y $\vec{B}=(2;1;-1)$. Halle el vector \vec{P} tal que $\vec{A}\times\vec{P}=\vec{B}$ y $\vec{A}\cdot\vec{P}=1$.

- A) $\frac{1}{3}(1;-4;-2)$
- B) $\frac{1}{2}(2;3;4)$
- C) $\frac{1}{3}(2;-1;4)$
- D) $\frac{1}{2}(1;-2;4)$
- E) $\frac{1}{3}(1;4;2)$

57. Halle el ángulo que forman las diagonales de un cubo.

- A) $\sin^{-1}(1/3)$
- B) $\cos^{-1}(1/5)$
- C) $\sin^{-1}(1/5)$
- D) $\cos^{-1}(1/3)$
- E) $\cos^{-1}(1/2)$

58. Dados los vectores $\vec{V}=2\hat{i}+3,5\hat{j}-4,2\hat{k}$ y $\vec{A}=4,5\hat{i}-2,2\hat{j}-1,5\hat{k}$. Determine el ángulo que forman estos vectores.

- A) $\cos^{-1}(1/5)$
- B) $\sin^{-1}(1/4)$
- C) $\cos^{-1}(1/3)$
- D) $\sin^{-1}(1/3)$
- E) $\cos^{-1}(1/4)$

- 59.** Halle un vector paralelo al vector unitario de la suma de los vectores $\vec{A}=(1;2;-5)$, $\vec{B}=(2;1;-1)$.
- A) $(2;2;-4)/\sqrt{6}$
 B) $(1;-1;-2)/\sqrt{3}$
 C) $(-2;-1;4)/\sqrt{5}$
 D) $(1;-2;3)/\sqrt{3}$
 E) $(-2;2;4)/\sqrt{3}$
- 60.** Dado los vectores $\vec{P}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ y $\vec{Q}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$, encontrar \vec{PQ} .
- A) $\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}$
 B) $3\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}$
 C) $2\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}$
 D) $3\hat{i}-6\hat{j}-5\hat{k}$
 E) $2\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$
- 61.** Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores no paralelos. Se tienen los vectores $\vec{c}=(m+n-1)\vec{a}+(m+n)\vec{b}$ y $\vec{d}=(m-n)\vec{a}+(2m-n+1)\vec{b}$. Encuentre m y n tal que $\vec{c}=3\vec{d}$.
- A) $-1/2; 1/2$
 B) $2/3; -1/12$
 C) $-1/4; 1/4$
 D) $-1/3; -1/12$
 E) $1/2; -1/12$
- 62.** Halle $m(\in \mathbb{R})$ tal que $\vec{a}=(m;-2;1)$ y $\vec{b}=(2m;m;-4)$ son ortogonales.
- A) $3 \circ -1$
 C) $-3 \circ -2$
 D) $2 \circ -1$
 E) $-3 \circ 1$
- 63.** Dados $\vec{a}=(1;1;1)$, $\vec{b}=(2;1;-1)$ y $\vec{c}=(2;0,1)$, calcule
 $\alpha = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
- A) -13
 C) -43
 D) -49
 E) -29
- 64.** Sea los vectores $\vec{U}=(5;1;2)$ y $\vec{V}=(-7;2;x)$, determine el valor de x para que \vec{U} y \vec{V} sean ortogonales.
- A) $12,7$
 C) $7,2$
 D) $16,5$
 E) $14,4$
- 65.** Siendo $\vec{A}=(0;2;4)$, $\vec{B}=(3;-1;2)$, $\vec{C}=(2;0,1)$ y $\vec{D}=(4;2;0)$, determine un vector ortogonal tanto a \vec{AB} como a \vec{CD} .
- A) $9\hat{i}+\hat{j}-12\hat{k}$
 C) $13\hat{i}-5\hat{j}+12\hat{k}$
 D) $7\hat{i}+24\hat{j}+25\hat{k}$
 E) $7\hat{i}-\hat{j}+12\hat{k}$
- 66.** Sean los vectores $\vec{x}=(1;-5;2)$; $\vec{y}=(3;4;-1)$, $\vec{z}=(6;3;-5)$; $\vec{w}=(24;-26;-6)$. Halle a ; b y c para que se cumpla $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=\vec{w}$
- A) $a=3$
 B) $a=3$
 C) $a=6$
 b=3
 b=2
 b=-1
 c=4
 c=-2
 c=2
 E) $a=2$
 b=4
 c=-4

Dados $\vec{P} = (1; 2; -1)$ y $\vec{q} = (2; 1; 3)$, se define el vector $\vec{U} = \alpha\vec{P} + (1-\alpha)\vec{q}$, donde α es un real.

Determine el valor de α para que \vec{U} sea ortogonal al vector $\vec{V} = (1; 2; -2)$.

- A) $5/2$ B) $3/2$ C) $2/9$
 D) $2/7$ E) $11/2$

Si \vec{a} y \vec{b} son dos vectores no paralelos y se definen $\vec{c} = (2\alpha - 3\beta + 1)\vec{a} + (\alpha + \beta - 1)\vec{b}$; $\vec{d} = (\alpha + \beta + 2)(\vec{a} \times \vec{b}) + 3(\vec{c} \times \vec{a})$, determine la condición que deben cumplir α y β ($\in \mathbb{R}$) para que se tenga $\vec{d} = 2\vec{c} \times \vec{b}$.

- A) $6\alpha = -4\beta + 3$
 B) $6\beta = 4\alpha + 3$
 C) $3\beta = 2\alpha + 3$
 D) $6\alpha = 4\beta + 3$
 E) $3\alpha = 2\beta + 1$

Dados los vectores $\vec{P} = (1; -1; 2)$; $\vec{Q} = (3; 4; 5)$ y $\vec{R} = (-2; 3; -3)$, calcule la proyección de $\vec{P} \times \vec{R}$ sobre $\vec{P} \times \vec{Q}$.

- A) $\frac{10}{\sqrt{89}}$
 B) $\frac{15}{\sqrt{115}}$
 C) $\frac{35}{\sqrt{119}}$
 D) $\frac{45}{\sqrt{219}}$
 E) $\frac{25}{\sqrt{211}}$

70. Se tiene un vector conocido no nulo, \vec{A} , y uno que se desea determinar, \vec{x} . Se dan como datos su producto escalar y su producto vectorial por \vec{A} .

$\vec{A} \cdot \vec{x} = k$ y $\vec{A} \times \vec{x} = \vec{c}$. Determine el valor de \vec{x} .

- A) $\frac{\sqrt{k^2 + 1 + c}}{|\vec{A}|}$
 B) $\frac{\sqrt{k^2 + 1 + k}}{|\vec{A}|}$
 C) $\frac{\sqrt{k + c}}{|\vec{A}|}$
 D) $\frac{\sqrt{k^2 + c^2}}{|\vec{A}|}$
 E) $\frac{\sqrt{k^2 + c^2}}{2|\vec{A}|}$

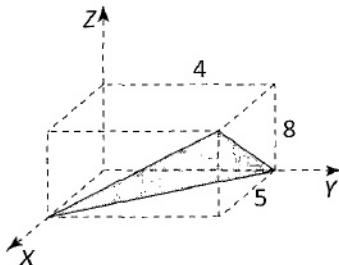
71. Halle un vector \vec{A} que sea perpendicular al vector que pasa por los puntos $P = (-1; 1; -1)$, $R = (2; 2; 3)$ y cuyo módulo sea 3 u; además sus componentes x e y son iguales.

- A) $-\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
 B) $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
 C) $-\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
 D) $\left(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
 E) $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \pm\sqrt{6}\right)$

72. Si \vec{U} y \vec{V} son dos vectores unitarios y ortogonales entre sí y se tiene que $\vec{a} = 3\vec{U} - \sqrt{2}\vec{V}$ y $\vec{b} = k\vec{U} + 2\sqrt{2}\vec{V}$, calcule el valor de k para que el ángulo α entre los vectores \vec{a} y \vec{b} esté dado por $\alpha = \cos^{-1}(1/\sqrt{11})$.

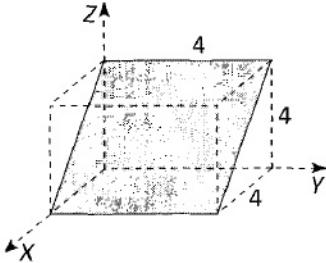
- A) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$
 D) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$

73. Para la figura que se muestra, determine el menor ángulo que forman el plano sombreado y el plano $x-y$.



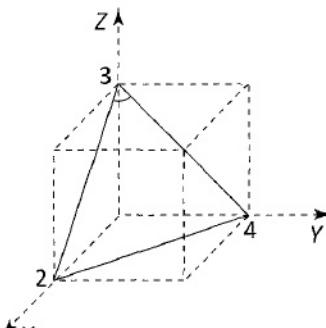
- A) $71,2^\circ$ B) $58,6^\circ$ C) $61,9^\circ$
 D) $34,7^\circ$ E) $68,7^\circ$

74. En la figura se muestra, un cubo de lado 4 u, determine un vector perpendicular al plano sombreado.



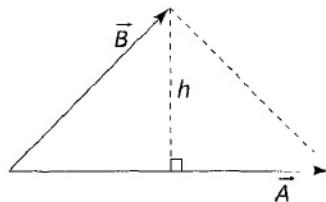
- A) $12\hat{i} + 11\hat{k}$
 B) $12\hat{i} + 12\hat{k}$
 C) $16\hat{i} - 8\hat{j}$
 D) $8\hat{i} - 8\hat{k}$
 E) $-(16\hat{i} + 16\hat{k})$

75. A partir de la figura determine el ángulo sombreado (en forma aproximada)



- A) 45° B) 53° C) 60°
 D) 74° E) 90°

76. Con los vectores $\vec{A} = (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k})\text{cm}$ y $\vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k})\text{cm}$ se forma el triángulo mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor de la altura h ?



- A) 5,4 cm B) 6,2 cm C) 7,8 cm
 D) 8,2 cm E) 9,7 cm

Claves

1 E	20 A	39 B	58 E
2 A	21 C	40 C	59 A
3 B	22 E	41 D	60 C
4 C	23 B	42 D	61 B
5 D	24 C	43 D	62 D
6 E	25 C	44 C	63 A
7 B	26 C	45 A	64 D
8 C	27 D	46 D	65 E
9 D	28 C	47 A	66 C
10 E	29 A	48 C	67 C
11 E	30 C	49 E	68 D
12 B	31 C	50 C	69 C
13 A	32 C	51 C	70 D
14 D	33 B	52 D	71 E
15 D	34 E	53 A	72 A
16 C	35 B	54 E	73 E
17 B	36 C	55 E	74 E
18 D	37 E	56 A	75 C
19 D	38 C	57 D	76 A

básico

20

termedio

51

avanzado

76

BIBLIOGRAFÍA

- CALDERÓN, Ángel. *Física para bachillerato*. Segunda edición ampliada. Costa Rica, 1989.
- GIANCOLI, Douglas. *Física. Principios con aplicaciones*. México D. F.: Prentice Hall Hispanoamericana S. A., 1997.
- LEA, Susan y John, BURKE. *Física. La naturaleza de las cosas*. Volúmenes I y II. México D. F.: International Thomson Editores, 1999.
- PERELMAN, Yakov. *Física recreativa*. Libro 1. Madrid: Editorial MIR Rubiños, 1994.
- RESNICK, Robert; HALLIDAY, David y Kenneth, KRANE. *Física*. Volumen I. Tercera edición. México D. F.: Compañía Editorial Continental S. A. de C. V., 1978.
- SEARS, Francis.; ZEMANSKY, Mark y Roger, FREEDMAN. *Física universitaria*. Novena edición. México D. F.: Pearson Educación, 1999.
- SPIEGEL, Murray. *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Serie Schaum. México D. F.: McGraw-Hill, 1991.
- TIPLER, Paul. *Física. Volumen I*. Bilbao: Editorial Reverté S. A., 1995.
- WILSON, Jerry. *Física*. Segunda edición. México D.F.: Prentice Hall Hispanoamericana S. A., 1996.
- YAVORSKI, Boris y Andrei, DETLAF. *Prontuario de Física*. Moscú: Editorial MIR., 1988.

PÁGINAS WEB CONSULTADAS

- <<http://personal1.iddeo.es/romeroa/vectores/default.htm>>
- <http://tochtli.fisica.uson.mx/electro/vectores/definici%C3%B3n_de_vectores.htm>
- <<http://www.ungs.edu.ar/ici/fisica/fisica1/vectores/>>
- <<http://www.phy6.org/stargaze/Mvector.htm>>

ANÁLISIS DIMENSIONAL y vectores

OTRAS PUBLICACIONES DE LA COLECCIÓN

FÍSICA

- Movimiento armónico simple
- Electromagnetismo



FREELIBROS.ORG

www.elumbreras.com.pe



[lum.editores](#)