Université Sultan Moulay Slimane — Filière : SMI/SMA-S4

Faculté polydisciplinaire de Khouribga — 2019-2020

**Analyse numérique**

(Devoir # 1)

**Donnez des solutions complètes et justifiées. Le devoir est à remettre le 30 avril 2020.**

**Exercice 1 :** On suppose que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 4)$ et $(x_3, y_3) = (3, 9)$.

1. Quelle est l'avantage de la méthode d'interpolation par les différences divisées de Newton par rapport à celle de Lagrange ?

2. Déterminer par la méthode de Newton côtes, le polynôme d'interpolation $P_3$ de degré 3 tel que $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

3. Soit $f(x) = x^2$, pour $i = 0, 1, 2$ et 3, on a $f(x_i) = y_i$. Déterminer une borne de l'erreur d'interpolation polynomiale.

**Exercice 2 :** On considère le système linéaire $(S)$ : $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer le principe des méthodes indirectes pour résoudre un système linéaire $Ax = b$.

   On cherche à résoudre le système $(S)$ par les méthodes directes.

2. Donner les matrices de Gauss $A_1$ et $A_2$ qui permettent de transformer $(S)$ en un système $(S_2)$ de la forme $Ux = c$ où $U$ est triangulaire supérieure. Donner $U$ et $c$.

3. Donner la solution $x$ en solvant le système $(S_2)$.

4. Décomposer la matrice $A$ sous la forme $A = LU$ où $L$ est triangulaire inférieure.

5. Donner la solution $x$ en utilisant la décomposition $LU$.

   On cherche à résoudre le système $(S)$ par les méthodes indirectes de type : $x_{k+1} = Mx_k + N$.

6. Ecrire la matrice d'itération $B_J$ de la méthode de Jacobi associée à la matrice $A$. Calculer le rayon spectral $\rho(B_J)$ de la matrice $B_J$. La méthode de Jacobi converge-t-elle ?

7. Ecrire la matrice d'itération $B_{GS}$ de la méthode de Gauss-Seidel associée à la matrice $A$. Calculer le rayon spectral $\rho(B_{GS})$ de la matrice $B_{GS}$. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

8. En cas de convergence des 2 méthodes, quelle est celle qui converge plus rapidement ?

9. En partant du vecteur initial $x^{(0)} = {}^t(0, 0, 0)$, calculer les trois premières itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Que remarque-t-on ?

**Exercice 3 :** Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique de 8. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) \;= x^3 - 8. \tag{1}$$

1. Montrer que l'équation (1) admet une solution unique $\alpha \in [0,\ +\infty[$.

2. En utilisant la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[1,\ 5]$, estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer le zéro $\alpha$ de la fonction $f$ avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-5}$.

3. Posons $g_1(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4}{x^2} + x\right)$.
   Montrer que $|g_1'(x)| < 1,\ \forall\, x \in [2,\ 4]$ et que $g_1([2,\ 4]) \subset [2,\ 4]$.

4. En déduire que la méthode du point fixe définie par $g_1$ converge pour tout choix $x_0 \in [2,\ 4]$.

5. Calculer l'ordre de convergence de la méthode du point fixe définie par $g_1$.

6. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction $f$. Que remarque-t-on ?

7. Pour $-\dfrac{2}{3} < \lambda < 0$ posons $g_2(x) = \lambda\left(x - \dfrac{8}{x^2}\right) + x$.
   Soit $[a,\ b] \subset [0,\ +\infty[$ tel que $g_2 : [a,\ b] \longrightarrow [a,\ b]$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   Montrer que $\alpha = 2$ est un point fixe attractif pour $g_2$ dans $[a,\ b]$.

8. Que remarque-t-on pour $\lambda = -\dfrac{1}{3}$.

9. Que se passe t'il si $\lambda = -\dfrac{2}{3}$.

10. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$.
    Calculer explicitement le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_{g_2}$ associé à $g_2$ aux points $a_0$, $a_1$ et $a_2$.

11. Montrer que $|g_2(x) - P_{g_2}(x)| \leq \dfrac{|g_2^{(3)}(\xi)|}{9\sqrt{3}}$ avec $\xi \in [a_0,\ a_2]$.

12. Pour $\lambda = -14$, calculer l'ordre de convergence de la méthode du point fixe définie par $P_{g_2}$.

13. Pour $x_0 = 2.75$ calculer les trois premières itérations de la suite $(x_{n+1} = g_1(x_n))_{n\geq 0}$.

14. Pour $y_0 = 2.75$ et $\lambda = -14$, calculer les trois premières itérations de la suite $(y_{n+1} = P_{g_2}(y_n))_{n\geq 0}$.