Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
de Khouribga

Filière SMI S3
Année 2020-2021
Pr. A. Lahrech

Chapitre 3 : Simplification des fonctions logiques

I. Introduction

La conception des circuits logiques exige des simplifications successives. L'objectif principal de cette simplification est de réduire le nombre de portes logiques exigées pour réaliser une fonction particulière. Ceci permet de réduire les circuits et les coûts.
Il existe deux manières de procéder : manipulation algébrique et tables de Karnaugh.

II. Simplification algébrique

Elle consiste à utiliser les propriétés et les règles de l'algèbre de Boole pour réduire le nombre d'opérateur dans une fonction logique. Restreindre le nombre d'opérateur accroit en général les performances du circuit et réduit son coût.

- Exemple :

$$\begin{aligned}
y &= \overline{x_0}.\,\overline{x_1}.\,\overline{x_2} + \overline{x_0}.\,\overline{x_1}.\,x_2 + x_0.\,\overline{x_1}.\,x_2 + x_0.\,\overline{x_1}.\,\overline{x_2} + x_0.\,x_1.\,x_2 \\
&= \overline{x_1}.\,\overline{x_2}(\overline{x_0} + x_0) + \overline{x_1}.\,x_2(\overline{x_0} + x_0) + x_0.x_1.x_2 \\
&= \overline{x_1}.\,\overline{x_2} + \overline{x_1}.\,x_2 + x_0.x_1.x_2 \\
&= \overline{x_1}.\,(\overline{x_2} + x_2) + x_0.x_1.x_2 = \overline{x_1} + x_0.x_1.x_2 \\
&= \overline{x_1} + x_0.x_2; \quad (\text{car : } \ x + \overline{x}.y = x + y)
\end{aligned}$$

- Remarque :

La méthode de simplification algébrique devient parfois difficile quand la fonction est plus longue ou plus complexe .

III. Simplification à l'aide du tableau de Karnaugh

L'utilisation du tableau de Karnaugh permet la minimisation de l'expression sans passer par l'écriture algébrique de la fonction booléenne.

III.1. Forme de la table de Karnaugh

C'est un tableau à double entrée : Les combinaisons des variables d'entrée doivent être organisées suivent une progression en code binaire réfléchi ou code Gray.
Dans le code Gray, il n'y a qu'une seule variable qui change d'état à chaque ligne.

Les figures ci-dessous représentent les diagrammes de Karnaugh pour deux, trois et quatre variables

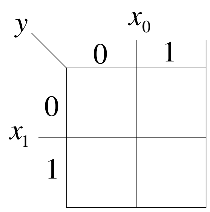

Fig. 1 – Table de Karnaugh d'une fonction à deux variables d'entrée

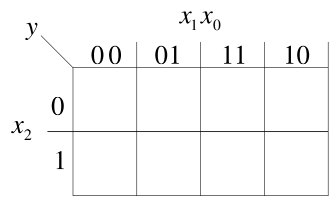

Fig. 2 – Table de Karnaugh d'une fonction à trois variables d'entrée

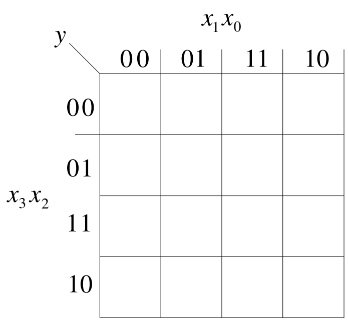

Fig. 3 – Table de Karnaugh d'une fonction à quatre variables d'entrée

III.2. Construction de la table de Karnaugh à partir d'une équation logique

1) <u>L'équation logique s'exprime sous la forme d'une somme de produits (forme disjonctive)</u>

Soit S une variable résultante d'une fonction logique de trois variable x_0, x_1 etx_2. On suppose que S est une somme de produit :

$$S \quad = \quad f(x_0, x_1, x_2) = \overline{x_0}.\,\overline{x_1}.\,\overline{x_2} + \overline{x_0}.\,\overline{x_1}.\,x_2 + x_0.\,\overline{x_1}.\,x_2 + x_0.\,\overline{x_1}.\,\overline{x_2} + x_0.\,x_1.\,x_2$$

$S = 1$ si un des produits qui compose l'équation est égal à 1. Il suffit donc de passer en revue tous les cas où $S = 1$ et de compléter le tableau.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x_0}.\,\overline{x_1}.\,\overline{x_2} & = & 1 \text{ si } x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \\ \overline{x_0}.\,\overline{x_1}.\,x_2 & = & 1 \text{ si } x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 1 \\ x_0.\,\overline{x_1}.\,x_2 & = & 1 \text{ si } x_0 = 1 \text{ et } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 1 \\ x_0.\,\overline{x_1}.\,\overline{x_2} & = & 1 \text{ si } x_0 = 1 \text{ et } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \\ x_0.\,x_1.\,x_2 & = & 1 \text{ si } x_0 = 1 \text{ et } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \end{array}\right.$$

On écrit donc la table logique correspondante :

S \ x_2 / x_1x_0	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	1	0

2) <u>L'équation logique s'exprime sous la forme d'un produit de sommes (forme conjonctive)</u>

Soit y une variable résultante d'une fonction logique de trois variable x_0, x_1 etx_2. On suppose que y s'exprime sous la forme d'un produit de sommes :

$$y \quad = \quad f(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + x_1)\,(\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2})\,(x_0 + x_2)$$

$y = 0$ si une des sommes qui compose l'équation est égal à 0. Il suffit donc de passer en revue tous les cas où $y = 0$ et de compléter le tableau.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x_0 + x_1) & = & 0 \text{ si } x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 0 \text{ et } \forall\, x_2 \\ \overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_2} & = & 0 \text{ si } x_0 = 1 \text{ et } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \\ x_0 + x_2 & = & 0 \text{ si } x_0 = 0 \text{ et } \forall\, x_1 \text{ et } x_2 = 0 \end{array} \right.$$

On écrit donc la table logique correspondante :

y \ x_2 / x_1x_0	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1

III.3. Construction de la table de Karnaugh à partir d'une table de vérité

Dans ce cas il suffit de reporter dans le tableau de Karnaugh, pour chaque combinaison des variables d'entrée, la valeur de la variable de sortie de la table de la vérité.

a	b	c	$S = f(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

S \ c , $a\,b$	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	0

III.4. Minimisation par tableau de Karnaugh

- Principe : On utilise implicitement la relation suivante $x + \overline{x} = 1$

  Le passage d'une case à une case adjacente entraine le changement d'état d'une seule variable d'entrée. Donc si deux "1" se trouvent dans deux cases adjacentes horizontalement ou verticalement, on peut simplifier l'équation logique en éliminant la variable qui change d'état grâce à l'équation précédente.

  La première ligne du tableau de Karnaugh est adjacente à la dernière, de même pour la première et la dernière colonne.

- Exemples : Regroupement de cases pour simplifier une équation logique

y \ x_2 , $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

$$y = \overline{x_2}$$

y \ x_2 , $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0

$$y = \overline{x_2}.\overline{x_0}$$

y ; x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$y = \overline{x_2}.\overline{x_0}$$

y ; x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$y = \overline{x_0}$$

y ; dc \ ba	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	1	1	0	1

$$y = a.\overline{b}.\overline{d} + \overline{d}.c.b + \overline{a}.b.d + b.d.\overline{c}$$

y ; dc \ ba	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	0	0	0	1
10	1	1	0	1

$$y = \overline{d}.c.a + c.b.\overline{a} + \overline{c}.\overline{b}.a + d.\overline{c}.\overline{a}$$

On notera qu'il existe parfois plusieurs solutions équivalentes.

- Remarques

  Dans le cas où les 0 sont moins nombreux que les 1, il est préférable d'établir l'équation correspondant à $\overline{y}$ puis compléter l'expression obtenue.

  Lorsque à une combinaison d'entrée correspond un état de sortie de valeur indéterminée, cet état est généralement noté Φ dans le tableau. On peut prendre dans un regroupement ces cases en leur attribuant la valeur 0 ou 1 à sa convenance.

III.5. Règles de simplification

- Placer les 1, 0 et Φ dans le tableau de Karnaugh.
- Former des groupes de 1 adjacents les plus grands possibles (2^n cases)
- Former le plus petit nombre de groupes possible.
- Tous les "1" doivent être inclus dans au moins un groupe.

- Ecrire la fonction simplifiée sous forme d'une somme de produits en éliminant de chaque groupement les variables changeant d'état.

IV. Equations phi-booléennes

Dans la conception des circuits logiques combinatoires, il peut arriver que la sortie du circuit soit indépendante de certaines combinaisons des valeurs d'entrées. Dans ces conditions, on dit que la sortie est indifférente de ces combinaisons et on les note par Φ dans les tables de vérités. Une telle fonction est dite phi-booléenne.

La valeur indifférente Φ peut être interprétée comme une valeur 0 ou une valeur 1 dans le but de maximiser le nombre des groupements possibles.

- Exemple 1 :

x_2	x_1	x_0	$y = f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	Φ
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	Φ
1	1	0	0
1	1	1	1

1) Expression algébrique de la fonction y pour $\Phi = 0$

$$\begin{aligned} y &= \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + \overline{x_2}x_1x_0 + x_2x_1x_0 \\ &= \overline{x_2}x_1(\overline{x_0} + x_0) + x_2x_1x_0 \\ &= x_1(\overline{x_2} + x_2x_0) \\ &= x_1(\overline{x_2} + x_0) \end{aligned}$$

2) Expression algébrique de la fonction y pour $\Phi = 1$

$$\begin{aligned} y &= \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + \overline{x_2}x_1x_0 + x_2x_1x_0 + \overline{x_2}.\overline{x_1}x_0 + x_2\overline{x_1}x_0 \\ &= \overline{x_2}x_1(\overline{x_0} + x_0) + x_2x_0(\overline{x_1} + x_1) + \overline{x_2}.\overline{x_1}x_0 \\ &= \overline{x_2}x_1 + x_2x_0 + \overline{x_2}.\overline{x_1}x_0 \\ &= \overline{x_2}(x_1 + \overline{x_1}x_0) + x_2x_0 \\ &= \overline{x_2}(x_1 + x_0) + x_2x_0 \\ &= \overline{x_2}x_1 + \overline{x_2}x_0 + x_2x_0 = \overline{x_2}x_1 + x_0(x_2 + \overline{x_2}) \\ &= \overline{x_2}x_1 + x_0 \end{aligned}$$

3) <u>Expression de la fonction y à l'aide du tableau de Karnaugh</u>

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	0	Φ	1	1
1	0	Φ	1	0

$$y = x_0 + \overline{x_2}x_1$$

- <u>Exemple 2 :</u>

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	Φ	0	0	0
01	0	Φ	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	Φ	0

→ équivalent à 0

$$y = x_2x_0 + \overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_0}$$