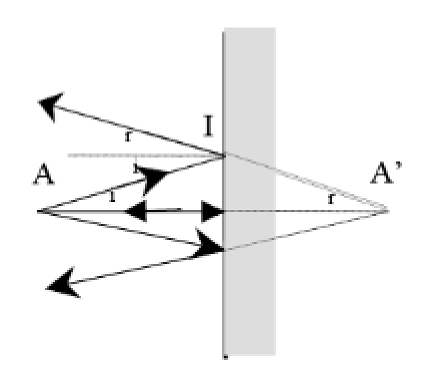
Chapitre3 - Objets et formation des images. Application au miroir plan et au dioptre plan

Introduction.

Un système optique est un ensemble de dioptres et miroirs qui permet d'obtenir des représentations appelées images d'un ensemble de points constituant un objet. Nous allons dans ce chapitre préciser ces notions et nous montrer qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir une image nette et non déformée d'un objet. Nous appréhenderons ses notions au travers d'un exemple simple le miroir plan. Nous généraliserons les définitions des divers types d'objets et images à tout système optique et définirons les conditions d'utilisation des instruments d'optique permettant l'obtention d'images de bonne qualité. Nous appliquerons ces notions au cas du dioptre plan.
Un système optique centré est un système qui possède un axe de symétrie de révolution. Les systèmes optiques centrés comportant à la fois des dioptres et des miroirs (exemple : le télescope) sont dits catadioptriques. Le système est dit dioptrique s'il ne comporte que des dioptres. Exemple : une lentille.

I. Images données par un miroir plan

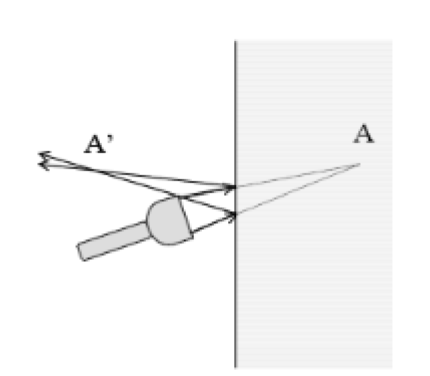
1. Image d'un objet réel ponctuel.



Le principe de construction est simple, on choisit deux rayons lumineux issus de l'objet A. Après réflexion sur le miroir, les deux rayons semblent provenir de A', image de A donnée par le miroir.
$i = r \rightarrow$ A' symétrique de A par rapport au miroir.

- Notion d'objet réel et image virtuelle.
A est un objet réel. Tous les rayons issus de A se dirigent vers le miroir. Cet objet est **réel**. On peut le voir à l'oeil nu malgré la présence du miroir.
Les rayons issus de A après réflexion semblent provenir de A' : l'image A' est **virtuelle**. On ne peut pas former cette image directement sur un écran.
- Première notion de stigmatisme
Quel que soit le rayon considéré, après réflexion sur le miroir, le rayon issu de A semble provenir du même point A'. Un point A a pour image un point A' unique. On dira que le système optique est **stigmatique.**

2. Image d'un objet virtuel.



Si on considère un faisceau de lumière convergente émis par une torche. Les rayons de la torche convergent vers un point A que l'on peut matérialiser sur un écran. Si on place un miroir entre la torche et le point A, on ne verra plus le point A et il n'est plus possible de l'observer sur un écran. Par rapport au miroir, A constitue un **objet virtuel** : **les rayons arrivant sur le système optique ne sont pas**

issus de A mais se dirigent vers A. L'oeil ne peut voir directement A.
L'image de A, A' est le symétrique de A par rapport au miroir. **Les rayons** réfléchis sur la surface du miroir **se dirigent vers A', A' est une image** ponctuelle **réelle**. Il est possible de matérialiser A' sur un écran.

Remarque :
Un objet réel n'est pas nécessairement associé à une image virtuelle et un objet virtuel à une image réelle. Tout dépend du système optique considéré.

3. Image d'un objet étendu, grandissement.

Pour obtenir l'image d'un objet de dimensions finies, il suffit de déterminer l'image de chaque point de l'objet. Comme chaque point a pour image son symétrique par rapport au miroir, l'image de l'objet sera son symétrique par rapport au miroir. Les tailles de l'objet et de l'image seront donc identiques. L’image d’un objet plan sera plane, on dit qu’il y a **aplanétisme**. On définit le grandissement du système γ

$$\gamma = \frac{Taille\,de\,l'image}{Taille\,de\,l'objet} \qquad (\gamma=1, \text{ dans le cas du miroir})$$

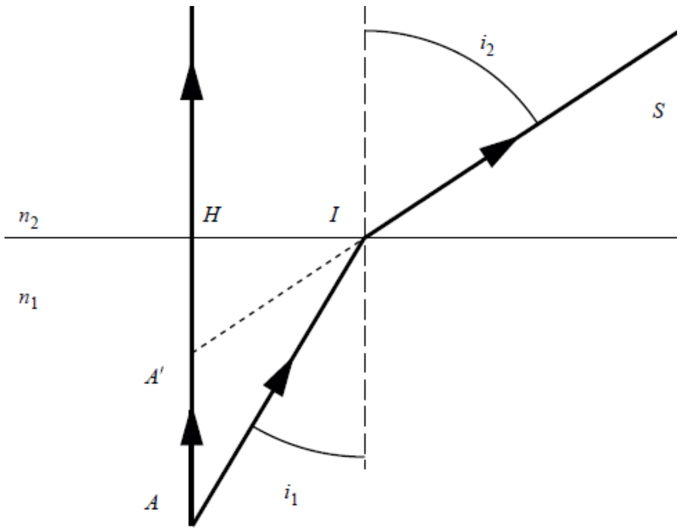
Conclusions.
Dans un miroir plan :
- Si l’objet est réel, l’image est virtuelle.
- Si l’objet est virtuel, l’image est réelle.

II. Les dioptres plans.

Un dioptre plan est constitué de deux milieux transparents, homogènes, d’indices différents, séparés par une surface plane.

1. Image d'un objet ponctuel

Le principe est toujours le même, on choisit deux rayons issus de l'objet A. L'intersection A' des deux rayons réfractés constitue l'image de A donnée par le dioptre.
Soit n_1 et n_2 les indices des deux milieux, avec $n_1 > n_2$ par exemple. Soit d’autre part un point lumineux objet A dans le milieu 1. Montrons que ce point A **n’a pas d’image**.



L’image de A, si elle existait, serait sur la normale AH d’après les lois de Snell-Descartes. Un second rayon AI issu de A, se réfracte suivant IS. L’image de A, si elle existait, devrait se trouver au point A’, intersection de AH et du prolongement de SI. Montrons que la position de A’ dépend du rayon A’I émis.
Soit i_1 et i_2 les angles d’incidence et de réfraction du rayon AI émis. On a :

$$HI = HA \cdot tg(i_1) \text{ et } HI = HA' \cdot tg(i_2)$$

Ce qui donne $HA \cdot tg(i_1) = HA' \cdot tg(i_2) \Rightarrow HA' = HA \cdot \frac{tg(i_1)}{tg(i_2)} = HA \cdot \frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} \cdot \frac{\cos(i_2)}{\cos(i_1)}$

et en utilisant la relation de Snell-Descartes $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ et la relation :

$$\frac{\cos(i_2)}{\cos(i_1)} = \sqrt{\frac{1-\sin^2(i_2)}{1-\sin^2(i_1)}} = \sqrt{\frac{1-(\frac{n_1}{n_2})^2 \sin^2(i_1)}{1-\sin^2(i_1)}}$$

On obtient : $$HA' = HA \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\frac{1-(\frac{n_1}{n_2})^2 \sin^2(i_1)}{1-\sin^2(i_1)}}$$

On voit sur cette expression que :

- *HA' dépend* de l'angle d'incidence i_1. Ceci implique que l'image d'un point n'est pas unique, ce n'est pas un point ! On voit donc que contrairement au miroir, le dioptre plan *n'est pas un système optique stigmatique* pour un point quelconque de l'espace.
- *HA'* est indépendant de i_1 si *HA'* = 0, alors *HA* = 0 ou bien $HA' \rightarrow \infty$ *et* $HA \rightarrow \infty$:

Le dioptre plan est stigmatique pour les points de sa surface ou bien pour les points très éloignés.

- *HA'* est pratiquement indépendant de i_1 si les quantités $\sin^2(i_1)$ et $((\frac{n_1}{n_2})\sin^2(i_1)$ sont négligeables, donc, lorsque $i_1 \approx 0$; c'est-à -dire pour des observateurs ne recevant que des *rayons voisins de la normale au plan du dioptre :* **incidence faible (rayons paraxiaux).**. Ces conditions constituent un des termes de **l'approximation de Gauss.** En conclusion, le dioptre plan est approximativement stigmatique, seulement dans des conditions particulières.

2. Formules du dioptre plan dans l'approximation stigmatique

On a dans les conditions de Gauss, donc, la relation de conjugaison suivante entre les positions de l'objet A et de l'image A' pour deux milieux d'indice n_1 et n_2.

$\frac{n_1}{\overline{HA}} = \frac{n_2}{\overline{HA'}}$ (on utilise souvent la notation *n* pour le milieu incident et *n'* pour le réfracté :

$\frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{\overline{HA'}}$)

Remarque : si l'objet est à l'infini $\overline{HA} = \infty$, l'image est également à l'infini $\overline{HA'} = \infty$.

En conclusion : Le système n'est pas stigmatique. Pour que le système soit stigmatique il faut se placer dans l'approximation de petits angles d'incidence, rayons proches de la normale au dioptre: **approximation de Gauss.**

3. Objet étendu.

Pour simplifier considérons un objet AB parallèle à la surface de l'eau. Les rayons issus de A et B provenant à l'oeil n'auront pas la même inclinaison donc A'B' ne sera pas parallèle à la surface. L'image sera déformée. Le système n'est pas **aplanétique**. Par contre si on se place dans les conditions de Gauss, les images A' et B' sont telles que $\overline{HA'} = \overline{HA}\frac{1}{n}$ et $\overline{HB'} = \overline{HB}\frac{1}{n}$ et A'B' reste parallèle à la surface et A'B' = AB. Il n'y aura pas déformation de l'image. Le système optique est alors aplanétique.

III. Lames à faces parallèles.

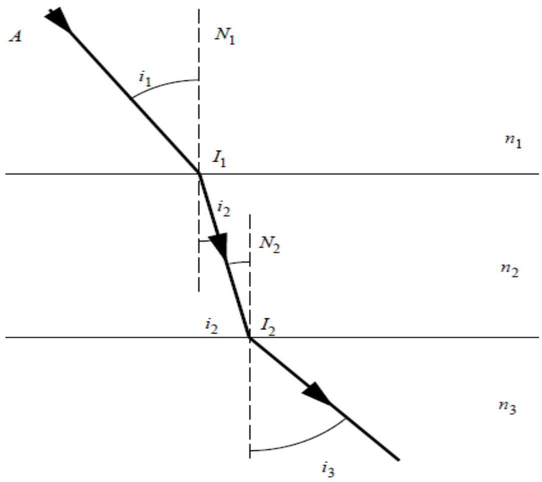
Une lame à faces parallèles est constituée de deux dioptres plans parallèles entre eux. Nous nous limiterons au cas $n_2 > n_1 \; et \; n_2 > n_3$.

Rappelons les relations de Snell-Descartes pour les deux dioptres considérés :
$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ et $n_2 \sin(i_2) = n_3 \sin(i_3)$

D'où : $n_1 \sin(i_1) = n_3 \sin(i_3)$

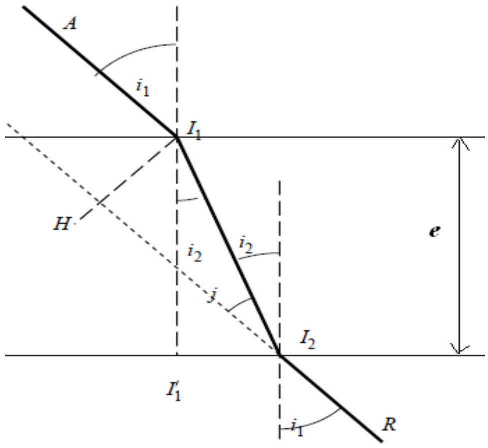
Conséquences.

- L'angle i_3 est *indépendant* de n_2 : pour un angle d'incidence donné, l'angle de réfraction du rayon émergent est indépendant de l'indice n_2 de la lame intermédiaire.
- Lorsque $n_1 = n_3$ alors $i_1 = i_3$, le rayon émergent est *parallèle* au rayon incident. En pratique, cela veut dire que les rayons d'un faisceau incident de rayons parallèles restent parallèles et ressortent parallèlement à la direction des rayons incidents.



Déplacement latéral dans le cas $n_1 = n_3$

Soit une lame à faces parallèles d'indice *n*, d'épaisseur *e*, placée dans le vide. Un rayon incident AI_1 ressort parallèlement à lui-même. Calculons le déplacement latéral I_1H qu'il subit lors de la traversée de la lame :



Le triangle I_1HI_2 est rectangle on a :
$j = i_1 - i_2$ et $I_1H = I_1I_2 \sin(i_1 - i_2)$

Le triangle $I_1I'_1I_2$ est rectangle et $I_1I' = I_1I_2 \cos(i_2) = e$

D'où $I_1I_2 = \dfrac{e}{\cos(i_2)}$

finalement, le déplacement latéral du rayon émergent

$\Delta = I_1H$ vaut : $\Delta = e \dfrac{\sin(i_1 - i_2)}{\cos(i_2)}$

IV. Prisme :

Le prisme est un milieu réfringent homogène, d'indice *n*, faisant un dièdre de rectiligne *A* (angle du prisme), toujours placé dans l'air. Il provoque la déviation d'un faisceau monochromatique & (de plus) la dispersion d'une lumière blanche.

1. Formules du prisme :

En optique, un **prisme** est constitué par un milieu transparent limité par deux surfaces planes *non-parallèles.*

Les *faces* du prisme sont les deux surfaces planes précédentes.

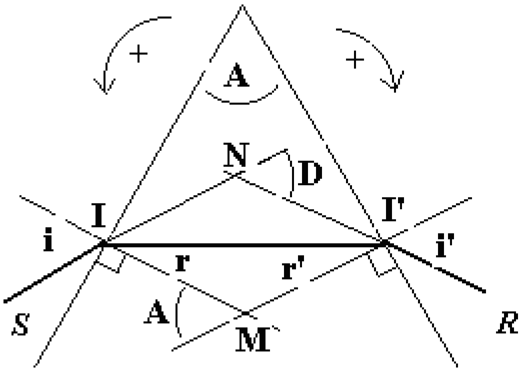
L'*arête* du prisme est l'intersection des deux faces du prisme.

Une *section principale* est l'intersection du prisme par un plan perpendiculaire à l'arête du prisme.

L'*angle* du prisme est l'angle au sommet de la section principale.
Nous supposerons ici que l'indice de la matière constituant le prisme est supérieur à celui du milieu dans lequel baigne le prisme.
Propriétés physiques. Le prisme *décompose* la lumière blanche. Il y a *dispersion* de la lumière par le prisme et la dispersion est d'autant plus importante que la longueur d'onde de la lumière incidente est courte.
Conditions d'utilisation du prisme dans ce cours :
- La lumière est monochromatique (constituée d'une seule longueur d'onde).
- Chaque rayon incident est dans un plan de section principale (et y reste après réfraction).

2. Marche d'un rayon lumineux.

Nous considérons un prisme d'indice *n* plongé dans l'air d'indice pris égal à 1. Nous supposerons en outre qu'il existe un rayon émergent *I'R* donc que $r' < i_L$, où i_L est l'angle limite correspondant à la séparation milieu/air considéré.



Ecrivons les relations de Snell-Descartes : $\sin(i) = n\sin(r)$ et $n\sin(r') = \sin(i')$
L'angle entre les deux normales aux faces du prisme passant par *I* et *I'* est égal à l'angle *A* du prisme. D'autre part on a dans le triangle *II'K :* $A = r + r'$
Désignons par *D* la déviation du rayon émergent *I'R* par rapport au rayon incident *SI*. On a dans le triangle *HII'* :

$$\widehat{HII'} = i - r \quad \text{et} \quad \widehat{HI'I} = i' - r'$$

$$D = \widehat{HII'} + \widehat{HI'I} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} D = (i - r) + (i' - r') = (i + i') - (r + r') \\ D = (i + i') - A \end{array}$$

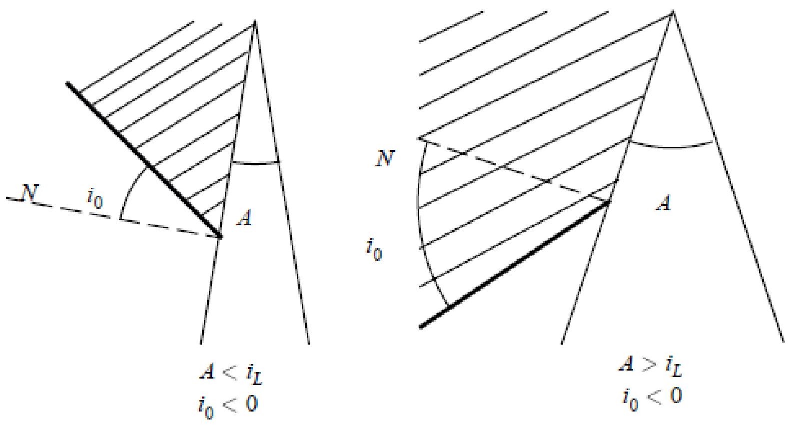
En résumé, les quatre formules fondamentales du prisme sont les suivantes :

$$\begin{cases} \sin i = n.\sin r \\ \sin i' = n.\sin r' \end{cases} \qquad \begin{cases} A = r + r' \\ D = i + i' - A \end{cases}$$

Remarque : pour les petits angles (conditions de Gauss), la loi de Descartes $\sin i = n.\sin r$ tend vers la loi de Képler : $i = n.r$.

3. Conditions d'émergence :

Si $i = \frac{\pi}{2}$, alors $r = i_L$ (angle limite) avec $\sin i_L = \frac{1}{n}$. Inversement, si on a $r' > l$, il y a réflexion totale car i' ne peut



Condition nécessaire d'émergence.

excéder 90°. On aura donc les conditions ($r = A - i_L$ si $r' = i_L$) :

$$A \leq 2i_L \;\; et \;\; i \leq i_o \;\; \text{avec} \;\; \sin i_o = n.\sin(A - i_L)$$

Pour $A > 2i_L$, aucun rayon ne sort.

Pour $A \leq 2i_L$, on a deux cas

4. Minimum de déviation :

On différencie les formules du prisme à n et A constants. On obtient :

$$r = r' = \frac{A}{2}, \quad i = i' = \frac{A + D_m}{2}, \quad n = \frac{\sin(A + D_m)/2}{\sin A/2}$$

Il en résulte qu'au minimum de déviation, le trajet de la lumière est **symétrique** par rapport au plan bissecteur de A.

5. Dispersion :

On différencie les formules du prisme à A et i constants (n variant par l'intermédiaire de la longueur d'onde λ). On obtient :

$$\boxed{dD = \frac{2}{n}\tan i_m \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right).d\lambda}$$

où $i_m = \dfrac{D_m + A}{2}$, valeur de i au minimum de déviation. Selon la loi de Cauchy : $n = C_1 + \dfrac{C_2}{\lambda^2}$, où C_1 et C_2 sont des constantes positives, et donc $\dfrac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$, et donc : **le violet est le plus dévié.**

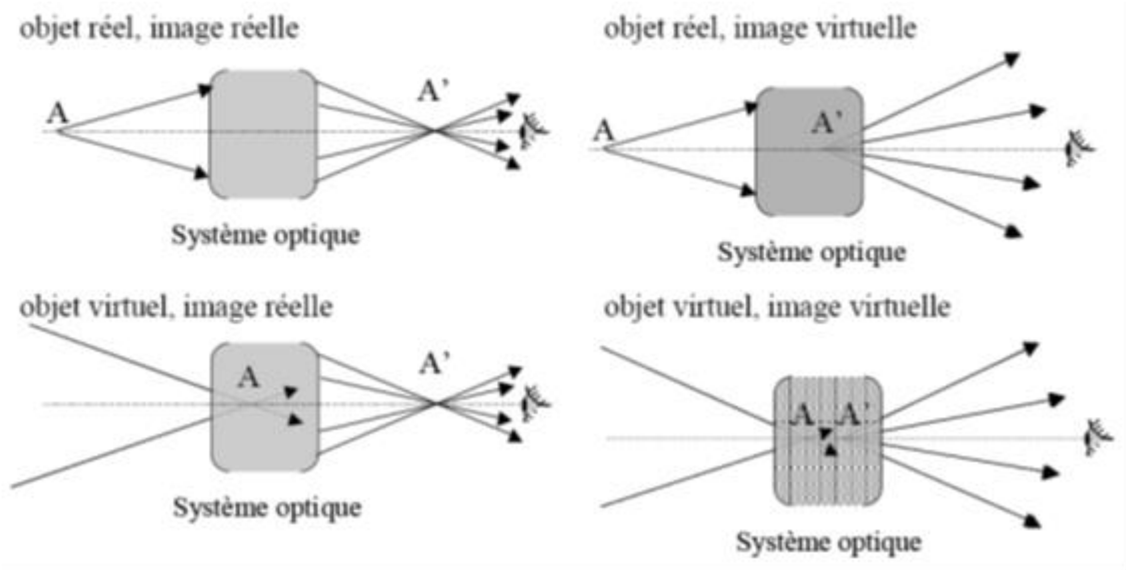
V. Cas général.

1. Points objets et points images à distance finie

On peut généraliser ce que l'on vient de montrer dans le cas du miroir plan à n'importe quel système optique et définir des objets réels et virtuels et des images réelles et virtuelles:

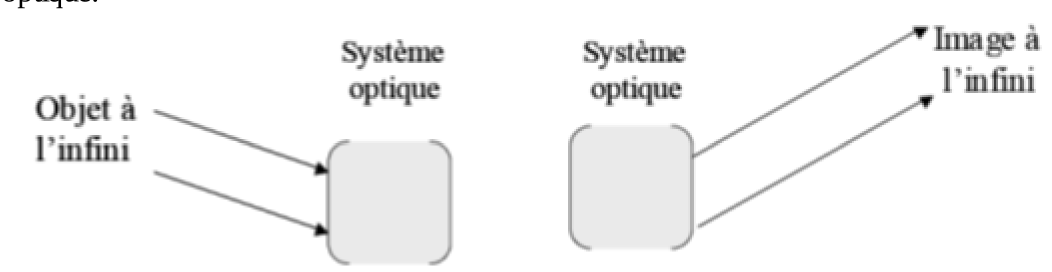
Objet réel A : Les rayons arrivant sur le système optique sont issus de A

Objet virtuel A : Les rayons arrivant sur le système optique se dirigent vers A
Image réelle A' : Les rayons se dirigent vers A' après traversée du système optique
Image virtuelle A' : les rayons semblent provenir de A' après traversée du système optique.
Dans la pratique, on considérera souvent des systèmes optiques ayant un axe de symétrie (**axe optique**). Ce sont des **systèmes centrés**. Les quatre associations possibles objet/image seront les suivantes.



2. Point objet et point image à l'infini.

On sait qu'une étoile peut être considérée comme un objet ponctuel à l'infini. Le système optique recevra dans ce cas un faisceau de lumière parallèle.
Lorsque l'image se forme à l'infini, les rayons lumineux sont parallèles à la sortie du système optique.



3. Stigmatisme et aplanétisme

a) Stigmatisme

rigoureux : tous les rayons issus de A passent après traversée du système optique en un même point A'. - *exemple* : miroir plan
approché : tous les rayons issus de A passent après traversée du système optique **au voisinage** d'un même point A'.
On verra que pour tous les systèmes optiques autres que le miroir plan, on aura stigmatisme approché lorsque l'on se place dans les **conditions de Gauss**.
b) Aplanétisme : A tout objet AB perpendiculaire à l'axe optique correspond une image A'B' perpendiculaire à l'axe optique.
Le miroir plan est aplanétique quel que soit l'objet AB considéré. Dans le cas des autres systèmes, on a aplanétique lorsque l'on se place dans les **conditions de Gauss,** il y a alors **aplanétisme approché**. On doit donc considérer uniquement des rayons peu éloignés de l'axe optique et peu inclinés. Il y aura donc aplanétisme uniquement pour des objets de petite taille.
c) Approximation de Gauss :

L'*approximation de Gauss* consiste en l'étude des systèmes centrés, limitée aux rayons paraxiaux. Il s'agit de l'approximation linéaire de l'optique géométrique : $\sin(i) \approx i$. Les système centrés tels que les dioptres sphériques, les miroirs sphériques et les lentilles minces, sont approximativement stigmatiques lorsqu'ils travaillent dans l'approximation de Gauss. C'est-à-dire que tout rayon issu d'un point A de l'axe optique émerge du système en passant *très* près d'un point A′, l'image de A. De même ces systèmes, les conditions de Gauss étant verifiées, sont approximativement *aplanétiques* :

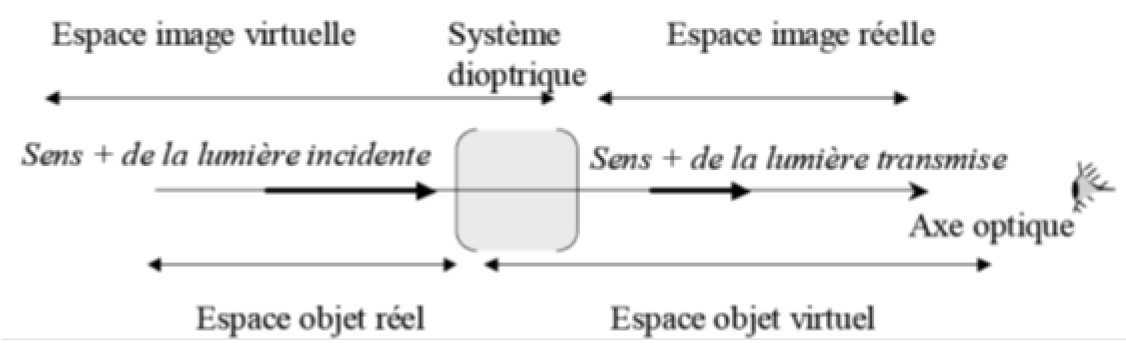
– il existe l'image de tout point hors de l'axe optique

– l'ensemble des points images des points d'un plan perpendiculaire à l'axe optique est lui-même un plan perpendiculaire à l'axe optique (l'image d'un plan perpendiculaire à l'axe optique est un plan perpendiculaire à l'axe optique).

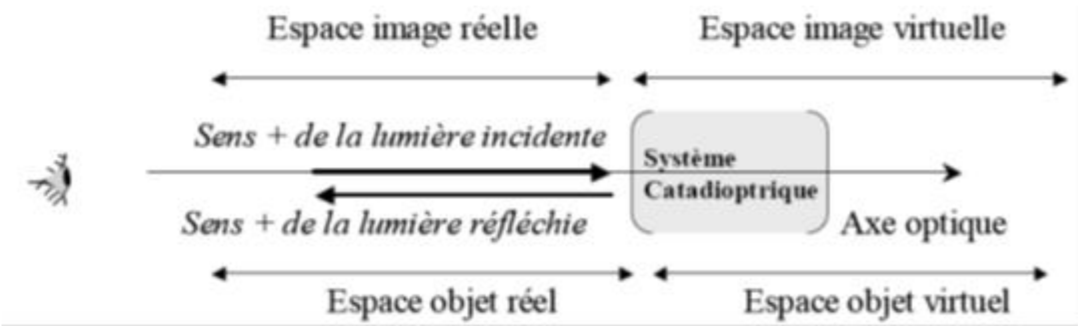
Dans la suite on va déduire la relation qui lie la position de l'image à la position de l'objet pour des systèmes optiques centrés dans l'approximation de Gauss. Cette relation est appelée *relation de conjugaison*.

VI- Conventions utilisées pour traiter tous les systèmes optiques

1. Systèmes en transmission : dioptres



2. Systèmes en réflexion : catadioptres.

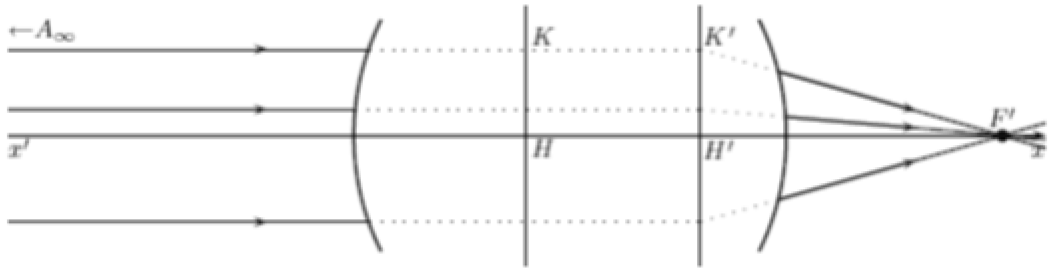


Remarque : Au niveau des tracés, tout rayon dans l'espace réel sera tracé en trait plein. Tout rayon de l'espace virtuel (qui n'existe pas en réalité) sera tracé en pointillé. Il en sera de même pour les objets et images réels (en traits pleins) et les objets et images virtuels (en pointillés).

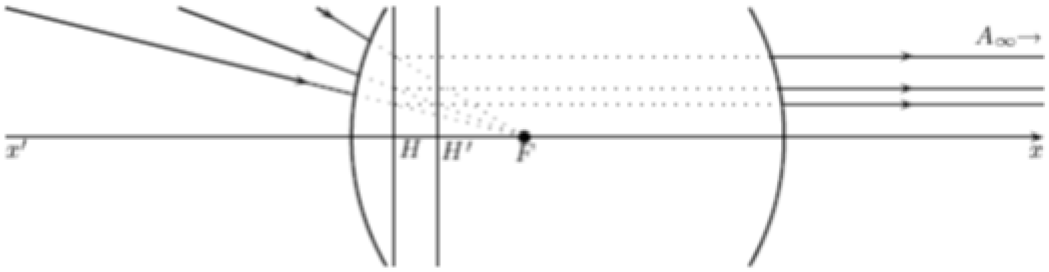
VII- Eléments cardinaux d'un système centré

a) Foyers, plans focaux

- Relation objet → image dans les systèmes à foyers :
Le point à l'infini sur l'axe optique A_∞ a pour image le **foyer principal image** F′, situé sur l'axe optique ($A_\infty \rightarrow F'$) ; autrement dit, un faisceau incident parallèle à l'axe optique émerge en un faisceau qui converge en F′ ou qui semble provenir de F′ (cas d'une image virtuelle) ;



Le foyer principal objet F, situé sur l'axe optique, a pour image A_∞, le point à l'infini sur l'axe optique (une droite qui n'est pas à l'infini contient un et un seul point à l'infini)



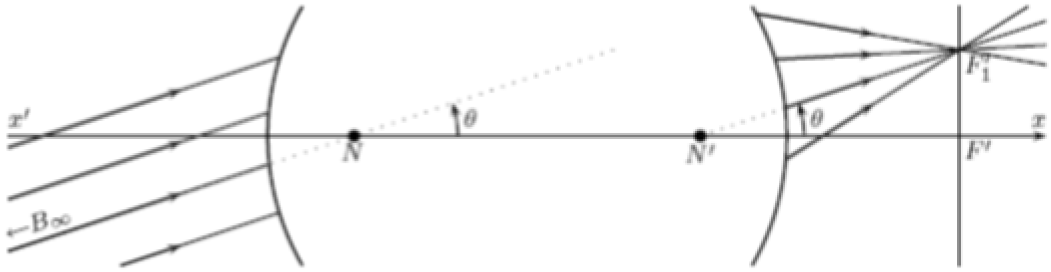
Le plan focal image est le plan de front de F′. Il contient le foyer secondaire image F_1', image du point à l'infini B_∞ en dehors de l'axe. Un faisceau incident parallèle émerge en convergeant dans le plan focal image. **Le plan focal objet** est le plan de front de F. Il contient les foyers secondaires objets dont les images sont `a l'infini en dehors de l'axe. Un système afocal n'a pas de foyer. Tout faisceau incident parallèle donne un faisceau émergent parallèle.

b) Plans principaux. Points principaux

Les plans principaux objet et image sont deux plans de fronts conjugués pour lesquels le grandissement est +1. Les intersections de ces plans avec l'axe optique sont respectivement H, le point principal objet, et H′, le point principal image. $H'K'$ est l'image de HK ($H'K' = HK$). La distance focale image est la longueur $f' = H'F'$ et la distance focale objet est la longueur $f = HF$. Pour un système dioptrique, lorsque les milieux d'entrée et de sortie ont même indice, $f = -f'$.

c) Points nodaux

On appelle point nodal objet N et point nodal image N′ deux points conjugués de l'axe optique tels que à tout rayon incident $B_\infty N$ passant par N correspond un rayon émergent $N'F_1'$ passant par N′ et parallèle au rayon incident. Lorsque les milieux d'entrée et de sortie ont même indice, les points nodaux sont confondus avec les points principaux correspondants (N = H et N′ = H′).



x'
←B∞
N
θ
N'
θ
F'_1
F'
x