USMS	**FPK**	**Filières SMA & SMI**
2ème Année, S_3	**Module : M 18**	**2022 - 2023**

Examen de Probabilités et Statistiques

date : 6 février 2023, durée : 1h30

Exercice 1 : / *6.5 points*

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières d'une race donnée peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $m = 6\,000$ et de variance $\sigma^2 = 400^2$ (donc d'écart-type $\sigma = 400$ et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$).

1) Afin de gérer au mieux son quota laitier, en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5 800 litres de lait par an.

b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5 900 et 6 100 litres de lait par an.

c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6 250 litres de lait par an.

2) Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître les deux valeurs suivantes : aidez-le !

a) la production maximale prévisible des 30 % de vaches les moins productives du troupeau.

b) la production minimale prévisible des 20 % de vaches les plus productives du troupeau.

3) Quel est l'intervalle $[a, b]$ symétrique en m tel que $P[a \leqslant X \leqslant b] = 0.9$.

N.B. : On utilisera la table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ donnée en deuxième page pour répondre aux différentes questions de cet exercice.

Exercice 2 : / *5.5 points*

Dans une ville de 50 000 habitants, on a recensé 1 000 cas de grippe. On s'intéresse au nombre d'enfants malades dans une crèche de 30 enfants.

On note X le nombre d'enfants atteints par la grippe dans cette crèche.

1) a) Justifier que la loi de la v.a. X est une loi hypergéométrique et préciser ses paramètres, les valeurs prises par cette variable ainsi que les probabilités correspondantes.

b) Donner la formule littérale de $P(X = 2)$(on ne demande pas ici d'effectuer les calculs qui ne peuvent pas être effectués par calculatrice).

Grâce à un ordinateur on a pu calculer la valeur $P(X = 2)$ pour trouver $P(X = 2) = 0,09882641$.

2) On décide d'approcher la loi de X par la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,02$.

Calculer, en utilisant l'approximation ci-dessus, une valeur approchée de $P(X = 2)$(à 10^{-8} près, c'est-à-dire avec 8 chiffres après la virgule) et comparer cette valeur avec celle donnée par ordinateur.

3) Si on décide cette fois-ci d'approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,6$, calculer, en utilisant cette deuxième approximation, une valeur approchée de $P(X = 2)$(à 10^{-8} près) et comparer cette valeur avec celle donnée par ordinateur.

4) Comparer la qualité des deux approximations et commenter.

Exercice 3 : / *8 points*

Cet exercice est constitué de trois questions indépendantes. La *rigueur* dans la rédaction sera prise en compte dans la note attribuée.

1) Dix couples mariés (il s'agit de dix couples constitués chacun d'un homme et de son épouse, donc on a au total vingt personnes) se trouvent réunis dans une pièce.

On choisit six(6) personnes au hasard parmi les vingt personnes réunies et on note X la variable aléatoire désignant le nombre de couples (mari-femme) parmi ces dix personnes choisies.

a) Définir l'univers Ω puis calculer son cardinal.

b) Calculer, en les justifiant, les probabilités $P[X = k]$ pour $k \in [\![0, 3]\!]$ puis vérifier que

$$\sum_{k=0}^{3} P[X = k] = 1. \qquad \text{(3 points)}$$

2) Aucun test n'est fiable à 100%. Supposons qu'un test visant à déterminer si une certaine infection s'est produite donne des faux positifs dans 1% des cas et des faux négatifs dans 2% des cas. Si une personne sur 100 000 dans la population générale est infectée, déterminer la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit infectée sachant qu'elle a été testée positive(3 points).

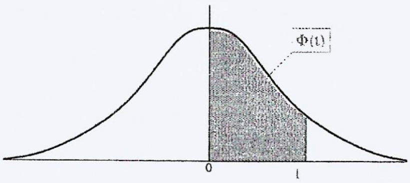
3) Quelle est la probabilité pour que l'écriture décimale d'un nombre entier tiré au hasard entre 0 et 9999 comporte au moins une fois le chiffre 5 ? (On utilisera la formule du crible de Poincaré)(2 points).

Fin de l'épreuve

Soit T une v.a.c. suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ de d.d.p. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour tout réel positif ou nul t on a : $\Phi(t) := P(0 \leqslant T \leqslant t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et par parité de la d.d.p on a $P(-t \leqslant T \leqslant 0) = \Phi(t)$.

La lecture de la table ci-dessous nous permet de trouver $\Phi(t)$ pour $t > 0$ s'écrivant sous la forme $a, bc = a, b + c10^{-2}$ à l'intersection de la ligne associée à a, b et la colonne associée à c .



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986