CHAPITRE 4

DÉTERMINANTS

4.1 Déterminant d'une matrice 2x2

Dfinition 4.1
Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *est le réel* $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

On le note $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *ou bien* $\det A$.

C'est donc la différence entre le produit des éléments de la diagonale principale et du produit des éléments de la diagonale secondaire de la matrice A.

Exemple 4.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + a \qquad \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 7 \qquad \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Proprits 4.1

1. *Si on multiplie les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par un réel, le déterminant est multiplié par ce réel.*
$$\begin{vmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k.a_{11}.a_{22} - k.a_{12}.a_{21} = k.\left(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}\right) = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
2. *Si les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) sont proportionnels aux éléments de l'autre ligne (ou de l'autre colonne) alors le déterminant est nul.*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k.a_{11} & k.a_{12} \end{vmatrix} = k.a_{11}.a_{12} - k.a_{11}.a_{12} = 0$$
3. *Le déterminant change de signe lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes)*
$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}.a_{21} - a_{11}.a_{22} = -\left(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}\right) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$ *La preuve est laissée au lecteur.*
5. $\det A^t = \det A$

4.2 Déterminant d'une matrice 3×3

4.2.1 Mineurs d'une matrice d'ordre 3

Dfinition 4.2
On appelle **mineur** A^{ij} *de l'élément* a_{ij} *d'une matrice* A *d'ordre 3, le déterminant de la sous-matrice d'ordre 2 obtenue en supprimant la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* A.

Exemple 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ *une matrice d'ordre 3. La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ *est une sous-matrice d'ordre 2 de la matrice* A*. Le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ *de cette sous-matrice est le mineur d'ordre 2 de l'élément* a_{32} *de la matrice* A *que l'on notera* A^{32}*. Le mineur* A^{32} *de l'élément* a_{32} *vaut donc* -4.

4.2.2 Cofacteurs d'une matrice d'ordre 3

Dfinition 4.3
On appelle **cofacteur** *de l'élément* a_{ij} *d'une matrice* A *d'ordre 3 le produit du mineur* A^{ij} *par* $(-1)^{i+j}$*. Ce cofacteur sera noté* C_{ij}.

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} A^{ij}}$$

On multiplie le mineur de l'élément a_{ij} par $+1$ ou -1 selon que la somme des indices est paire ou impaire. Le tableau suivant résume la situation pour chaque élément considéré :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Utilisation : Calculer la *matrice des cofacteurs* de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque 4.1 *La matrice des cofacteurs est la matrice obtenue en remplaçant chaque élément de A par son cofacteur.* ***Réponse :*** $cof(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.3 Matrice adjointe

Dfinition 4.4
La matrice adjointe de A (notée adj A) est définie comme la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

4.2.4 Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Dfinition 4.5
Le déterminant d'une matrice 3×3 est la somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par leurs cofacteurs respectifs.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Par définition :

$$|A| \;=\; a_{11}.A^{11} + a_{12}.\left(-A^{12}\right) + a_{13}.A^{13} = a_{21}.\left(-A^{21}\right) + a_{22}.A^{22} + a_{23}.\left(-A^{23}\right)$$

On dit que *le déterminant est développé suivant les éléments de telle ligne ou de telle colonne*.
La valeur du résultat est indépendante du choix de la ligne ou de la colonne.

Exemple 4.3
Quel est le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution :
Suivons le processus décrit ci-dessous :

1. Choisir une ligne ou une colonne de A. Pour l'instant, choisissons la première ligne.

2. Multiplier chacun des éléments de cette ligne par leurs cofacteurs correspondants. Les éléments de la première ligne sont $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, et $a_{13} = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire C_{11}, C_{12} et C_{13} qui sont

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}A^{11} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\,[0\cdot(-2) - 2\cdot 0] = 0 \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}A^{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\,[1\cdot(-2) - 2\cdot 2] = 6 \\ C_{13} &= (-1)^{1+3}A^{13} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\,[1\cdot 0 - 0\cdot 2] = 0 \end{aligned}$$

3. Finalement : $\det A \;=\; a_{11}\cdot C_{11} + a_{12}\cdot C_{12} + a_{13}\cdot C_{13} = 2\cdot 0 + 6\cdot 1 + 3\cdot 0 = 6$

Vérifions que le développement du déterminant selon la deuxième colonne appuierait le résultat précédent. On remarque aisément que le choix de la deuxième colonne est nettement le plus efficace puisque le déterminant sera obtenu du calcul $\det A = a_{12}\cdot C_{12} + a_{22}\cdot C_{22} + a_{32}\cdot C_{32}$ et deux des trois éléments de la $2^{\text{ème}}$ colonne sont nuls. En effet, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$, et $a_{32} = 0$. Il est ainsi inutile de calculer les cofacteurs C_{22} et C_{32}. Pour sa part, le cofacteur correspondant à a_{12} est

$$C_{12} \;=\; (-1)^{1+2}A^{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\,[1\cdot(-2) - 2\cdot 2] = 6 \;.$$

Le déterminant de A est donc
$\det A = a_{12}\cdot C_{12} + a_{22}\cdot C_{22} + a_{32}\cdot C_{32} = 1\cdot 6 + 0\cdot C_{22} + 0\cdot C_{32} = 6$. ce qui correspond effectivement à la réponse obtenue par développement selon la première ligne.

4.2.5 Règle de SARRUS

<u>La règle de Sarrus n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3 !</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Les éléments reliés par la même ligne sont multipliés entre eux, les produits ainsi obtenus sont sommés avec le signe plus pour les lignes descendantes et le signe moins pour les lignes montantes.

Pratique de la méthode de SARRUS
La mise en pratique de la formule de Sarrus est de reporter la 1^{ere} et la 2^{nde} colonne de la matrice à droite de la matrice, puis de tracer les diagonales et les anti-diagonales. Les diagonales sont comptées positivement, les anti-diagonales négativement.

$$\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix} = (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3) - (x_3y_2z_1 + y_3z_2x_1 + z_3x_2y_1)$$

Exemple 4.4
Calculons par la méthode de SARRUS le déterminant de la matrice de l'exemple 4.3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} = (0+4+0) - (0+0-2) = 6$$

Exemple 4.5
Calculons par la méthode de SARRUS le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ a & b \\ b+c & a+c \end{matrix}$$
$$= \big(b(a+b) + c(b+c) + a(a+c)\big) - \big(b(b+c) + c(a+c) + a(a+b)\big) = 0.$$

Exercice d'application 1 :

Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix}$

4.3 Cas général : déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Dfinition 4.6 (Cofacteur)
Soient $n \in \mathbb{N}^*, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. On note $\Delta_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de M en lui enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de M. On appelle **cofacteur** *d'indice (i,j) de M le scalaire*

$$\boxed{C_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\Delta_{i,j})}$$

Remarque 4.2 *On trouve le signe devant $\det(\Delta_{i,j})$ dans le cofacteur d'indice (i,j) selon sa position dans ce tableau :*

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & & \\ - & + & - & + & \cdots & \\ + & - & + & - & & \\ - & + & - & + & & \\ & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Thorme 4.1 ***(Formule de développement / à une ligne ou une colonne)***

On appelle $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ les coefficients de M. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on note $C_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$. Soit $p \in [\![1;n]\!]$. On a :

$$\boxed{\det(M) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,p}C_{k,p}, \det(M) = \sum_{k=1}^{n} a_{p,k}C_{p,k}.}$$

Remarque 4.3 *Avec cette méthode de calcul, il est judicieux de choisir une ligne (ou colonne) avec plein de zéros.*
Remarquons que la méthode de Sarrus ne fonctionne que pour les déterminants 3×3.

Exemple 4.6 (Développement abstrait / à une colonne(resp. ligne))
Effectuons un développement par rapport à la 2eme colonne d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\cdot(+1)\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\cdot (-1)\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Maintenant, il ne reste que des déterminants de taille 2 à calculer.

Remarque 4.4 *Dans le cas de déterminants plus grand, on réitère l'opération jusqu'à l'obtention d'un déterminant de taille 3×3.*

Exemple 4.7 (Développement / à la colonne 2, puis la ligne 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1\cdot(-4) + 4\cdot 4 - 7\cdot 4 = -4 + 16 - 28 = -16$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -2\cdot 6 + 4\cdot 4 - 2\cdot 10 = -12 + 16 - 20 = -16$$

Exercice d'application 2 :
Calculer par la méthode des développement selon les lignes ou colonnes les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

Thorme 4.2 ***(Propriétés des déterminants)***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— A ***inversible*** $\Leftrightarrow$ $\det(A) = |A| \neq 0$
— *Pour toute matrice A* ***inversible****, on a* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
— $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
— $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
— *attention* : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
— $\det(A) = \det(A^t)$ *où* A^t *est la transposée de* A.

4.4 Règles pratiques pour calculer un déterminant

On peut effectuer des opérations élémentaires, pour calculer le déterminant d'une matrice. Ceci implique les règles suivantes :

1. Si A' est obtenue en échangeant deux lignes (ou colonnes) de A, alors $det(A') = -det(A) \Rightarrow L_i \leftrightarrow L_j$: Changement de signe du déterminant.

2. Si A' est obtenue en multipliant une ligne (ou colonne) de A par la constante λ, alors $det(A') = \lambda \times det(A) \Rightarrow L_i \leftarrow \lambda L_i$: λ fois le déterminant.

3. Si A' est obtenue en additionnant à une ligne (ou colonne) de A une combinaison linéaire des autres ligne (ou colonnes) de A, alors $det(A') = det(A)$. $\Rightarrow L_i \leftarrow L_i + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \lambda_k L_k$: Aucun changement

Remarque 4.5 (but des règles ci-dessus) *On essaye de se ramener à un calcul simple de déterminant. Pour ceci on calcule une réduite de Gauss R (matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) de A.*

Thorme 4.3 (*Déterminants des matrices carrées particulières*)

1. *Le déterminant d'une matrice carrée triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des éléments de sa diagonale principale.*
2. *Le déterminant d'une matrice carrée est nul si l'un des vecteurs colonnes (ou lignes) est nul, ou si l'un des vecteurs colonnes (ou lignes) est combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes (resp. lignes).*

Thorme 4.4 (*Utilités d'un déterminant d'une matrice carrée A*)

1. A ***inversible*** $\Leftrightarrow$ $\det(A) = |A| \neq 0$
2. *Si A est inversible, alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(Com(A))^t = \frac{1}{\det(A)}(adj(A))}$$

où $Com(A)$ est la matrice des cofacteurs.

3. *Si $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ est une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n et si $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{V}$ est une base de E* $\iff$ $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \neq 0$.
4. *Si $\mathcal{F} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p)$ est une famille de p $(p \leq n)$ vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, si $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des composantes de $\mathcal{F}$ relatives à une base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{F}$ est une famille libre si, et seulement si, il existe une matrice carrée d'ordre p, extraite de M et de déterminant non nul.*

Exercice avec réponses

1. Vérifier que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$. En déduire $\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & -0 & -1 \end{vmatrix} = 9$ et $\beta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$.

2. Vérifier que $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 132$; $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 198$.

3. Vérifier qu'une équation du plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(-1, 3, 2)$ est donnée par :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 4y + 7z = 0.$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\det A = 2$, donc $A \in GL(3, \mathbb{K})$. Par la formule du théorème **4.4**, nous obtenons

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. On souhaite calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, le déterminant ne change pas, et de même pour les lignes. On soustrait successivement la k-ième colonne de la $(k-1)$-ième colonne, $k = 2, \ldots, 6$. On obtient d'abord la première égalité puis pour obtenir la deuxième égalité on additionne la première ligne à toutes les autres.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & * & * & * & * & * \\ & -2 & * & * & * & * \\ & & -2 & * & * & * \\ & & & -2 & * & * \\ & & & & -2 & * \\ & & & & & 5 \end{vmatrix} = (-1)(-2)^4 \times 5 = -80.$$