CHAPITRE 3

PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS

3.1 Langage probabiliste

1. On appelle épreuve $\mathcal{E}$ toute expérience aléatoire, c'est à dire dont le résultat dépend du hasard ou n'est pas prévisible. Exemples (abrégé dans la suite par Ex.) : Jeter un dé, lancer une pièce de monnaie ou tirer une carte dans un jeu de cartes.

2. On appelle événement lié à l'épreuve $\mathcal{E}$ toute proposition qui pourra être déclarée vraie ou fausse lorsque l'expérience sera réalisée. Ex. : "Obtenir un chiffre pair en jetant un dé", "Obtenir pile en lançant une pièce de monnaie" ou "Obtenir un as en tirant une carte dans un jeu de cartes".

   On appellera événement certain un événement qui est toujours réalisé. On appellera événement impossible un événement qui n'est jamais réalisé. Ex. : Notons S la somme des points obtenus en jetant deux dés. Alors $[S \leqslant 12]$ est un événement certain ; et $[S \leqslant 1]$ est un événement impossible.

3. **Opérations sur les événements : union, intersection et complémentaire**

   Soient A et B deux événements attachés à une même épreuve $\mathcal{E}$.

   "$A \cup B$" désigne l'événement qui est réalisé si et seulement si (abrégé dans la suite par ssi) l'un au moins des événements A et B est réalisé. "$A \cup B$" est la réunion des événements A et B.

   "$A \cap B$" désigne l'événement qui est réalisé ssi les deux événements A et B sont réalisés. "$A \cap B$" est l'intersection des événements A et B.

   "complémentaire A " , noté A^c ou $\overline{A}$, désigne l'événement qui est réalisé ssi A n'est pas réalisé.

4. **Événements incompatibles ou disjoints**

   Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints ou mutuellement exclusifs s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est à dire si l'événement $A \cap B$ est un événement impossible. Ex. : on tire une carte dans un jeu de cartes alors les événements
   "Obtenir une dame rouge" et "Obtenir une carte noire" sont deux événements incompatibles.

5. **Relation d'inclusion, Égalité**

   Soient A et B deux événements attachés à une même épreuve.

   On dira que A est inclus dans B et on écrit $A \subset B$ si B est réalisé chaque fois que A est réalisé. Ex. : étant l'épreuve qui consiste à tirer une carte dans un jeu de cartes, considérons les événements suivants : A : " Obtenir un valet " , B : " Obtenir une figure " ; alors $A \subset B$. On dira que "A et B sont égaux ou identiques " ssi $A \subset B$ et $B \subset A$. Cela signifie que A et B sont réalisés simultanément ou non réalisés simultanément. Ex. : $\mathcal{E}$ étant l'épreuve qui consiste à jeter deux dés ; les trois événements suivants sont égaux :
   A : " On a un double 6 " , B : " La somme des points est 12 ", C : " Le produit des points est 36 ".

6. **Événements élémentaires**

   On dira qu'un événement A est un événement élémentaire si A n'est pas un événement impossible, et si aucun événement B non identique à A, n'est inclus dans ce dernier. Ex. : "Obtenir 6 " en jetant un dé. Deux événements élémentaires quelconques (attachés à une même épreuve) sont égaux ou incompatibles.

2

7. Ensemble fondamental

On appelle ensemble fondamental ou espace des résultats ou univers de l'épreuve $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les événements élémentaires de cette épreuve $\mathcal{E}$. On le notera souvent Ω. Soit $\mathcal{E}$ l'épreuve qui consiste à lancer deux fois de suite un dé. L'ensemble fondamental associé à cette épreuve est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

3.2 Introduction aux probabilités

3.2.1 Définition

Définition 3.1 *On appelle **probabilité** toute application $\mathbb{P}$ qui à tout événement A associe un nombre dans $[0, 1]$ noté $\mathbb{P}(A)$, vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \tag{3.1}$$

*Si (A_n) est une suite (finie ou infinie) d'événements, **deux à deux disjoints,** alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) \tag{3.2}$$

Remarque 3.1 *La relation (3.2) sera utilisée le plus souvent dans ce cours sous la forme suivante : Si*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$$

où les A_i sont incompatibles ou disjoints deux à deux $(i \in [\![1, p]\!], p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2)$. On a alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_p) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)$$

3.2.2 Propriétés fondamentales des probabilités

Théorème 3.2 *Soient A et B deux événements quelconques, alors :*
(i) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. *En particulier* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(ii) $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
(iii) Si en particulier $B \subset A$ *alors* $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ *et* $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$.
(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
(v) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est une famille croissante (i.e. que* $\forall i \in \mathbb{N} \quad A_i \subset A_{i+1}$*); alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Démonstration :

(i) On utilise ici : $A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Grâce à (3.2) on déduit que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ ce qui donne le résultat. Puis on utilise $\emptyset = \overline{\Omega}$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ pour conclure que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(ii) On utilise ici : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. On déduit le résultat grâce à (3.2).
(iii) Evident, car si $B \subset A$ alors $A \cap B = B$.
(iv) On a d'après *(ii)* $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$. De plus, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) + \mathbb{P}(A \cap B)$, car $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$ et $A \cap B$ sont incompatibles deux à deux et leur réunion est $A \cup B$. En additionnant, il vient $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
(v) Nous allons utiliser la propriété d'additivité dénombrable.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup ... \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup ... = A_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})\right).$$

Puisque $(A_1\ (A_n \setminus A_{n-1})_{n=2,\infty}$ sont disjoints deux à deux, on a :
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1})$.
Soit $S_n = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2) + ... + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}) =$
$\mathbb{P}(A_n)$. , $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
■

3.2.3 Probabilité uniforme sur un ensemble fini

Supposons que Ω soit fini : $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, et que tous les événements élémentaires x_i aient la même probabilité (on dira qu'ils sont équiprobables), nécessairement égale à $\frac{1}{n}$. Alors pour tout $A \subset \Omega$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(\{x\}) = \sum_{x\in A} \frac{1}{n} = \frac{\text{card}A}{n} = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}.$$

On écrira souvent : $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$

3.2.4 Exemples

3.2.4.1 Exemple n° 1

On lance simultanément deux dés discernables :
Soit $A = \{\textit{Obtenir un total de chiffres} \geqslant 10\}$
$\Omega = [\![1,6]\!]^2$, $\text{card}(\Omega) = 36$.
$A = \{(4,6), (5,6), (6,6), (6,5), (6,4), (5,5)\}$, $\text{card}(A) = 6$
$\mathbb{P}(A) = 6/36 = 1/6$.
Déterminons les probabilités des événements suivants :
$B = \{\textit{Obtenir deux chiffres paires}\}$;
$C = \{\textit{Obtenir une somme de chiffres paire}\}$;
$D = \{\textit{Obtenir au moins un six}\}$.

3.2.4.2 Exemple n° 2

Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, trois paires de chaussures vertes, et deux paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard.

1. quel est le nombre de tirages possibles ?
2. quelle est la probabilité d'obtenir deux chaussures de même couleur ?
3. quel est le nombre de tirages amenant un pied gauche et un pied droit ?

Solution
Il y a 20 chaussures en tout.

1. L'univers Ω est $\{\textit{Choisir deux chaussures parmi } 20\}$, le nombre de tirages possibles est $\text{card}(\Omega) = C_{20}^2$.
2. $A = \{\textit{Choisir deux chaussures de même couleur}\}$
   On décompose :
   — $A_n = \{\textit{Choisir deux chaussures noires}\}$, $\text{card}(A_n) = C_{10}^2$, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{C_{10}^2}{C_{20}^2}$.

— $A_v = \{\textit{Choisir deux chaussures vertes}\}$, $\text{card}(A_v) = C_6^2$, $\mathbb{P}(A_v) = \dfrac{C_6^2}{C_{20}^2}$.

— $A_r = \{\textit{Choisir deux chaussures rouges}\}$, $\text{card}(A_r) = C_4^2$, $\mathbb{P}(A_r) = \dfrac{C_4^2}{C_{20}^2}$.

$A = A_n \cup A_v \cup A_r$, or les événements sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_v) + \mathbb{P}(A_r) \\ \mathbb{P}(A) &= \frac{C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2}{C_{20}^2} \end{aligned}$$

3. $B = \{\textit{Tirer une chaussure droite et une gauche}\}$, $\text{card}(B) = C_{10}^1 \times C_{10}^1$.

3.2.4.3 Exemple n° 3

On tire une main de 13 cartes parmi un jeu de 52 cartes.

1. Combien y-a-t'il de mains possibles ?

2. Quelle est la probabilité qu'une main contienne les 4 as ?

3. Quelle est la probabilité qu'une main contienne quatre trèfles dont la dame de trèfle ?

4. Quelle est la probabilité qu'une main contienne 3 carreaux au plus ?

Solution

1. En fait c'est le cardinal de Ω où $\Omega = \{\textit{Choisir 13 cartes parmi 52 cartes}\}$.$\text{card}(\Omega) = C_{52}^{13}$.

2. $A = \{\text{Obtenir une main contenant les 4 as}\}$: $\text{card}(A) = \underbrace{C_4^4}_{a} \times \underbrace{C_{48}^9}_{b}$.

a. choisir 4 as parmi 4 ;

b. choisir les 9 cartes restantes parmi les 48 qui ne sont pas des as.

Donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{C_4^4 \times C_{48}^9}{C_{52}^{13}}$

3. $B = \{$ Obtenir une main qui contient 4 trèfles dont la dame de trèfle $\}$:

$$card(B) = \underbrace{C_1^1}_{a} \times \underbrace{C_{12}^3}_{b} \times \underbrace{C_{39}^9}_{c}$$

a. choisir la dame de trèfle par la dame de trèfle ;

b. choisir les 3 cartes de trèfles restants parmi les 12 (qui ne sont pas la dame de trèfle) ;

c. choisir les 9 cartes restantes parmi les 39 qui ne sont pas les trèfles.

Donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{C_1^1 \times C_{12}^3 \times C_{39}^9}{C_{52}^{13}}$

4. $C = \{\text{Obtenir une main contenant 3 carreaux au plus}\}$:
$C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ où $C_i = \{\text{Obtenir une main contenant exactement } i \text{ carreaux}\}$ et $0 \leqslant i \leqslant 3$.
Ces événements sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned} \text{card}(C) &= \text{card}(C_0) + \text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) + \text{card}(C_3) \\ \text{card}(C) &= C_{13}^0 \times C_{39}^{13} + C_{13}^1 \times C_{39}^{12} + C_{13}^2 \times C_{39}^{11} + C_{13}^3 \times C_{39}^{10} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{C_{13}^0 \times C_{39}^{13} + C_{13}^1 \times C_{39}^{12} + C_{13}^2 \times C_{39}^{11} + C_{13}^3 \times C_{39}^{10}}{C_{52}^{13}}$

(5)

3.3 Probabilités conditionnelles

Définition 3.3 (Probabilité conditionnelle) *Soient A et B deux événements relatifs à une même expérience $\mathcal{E}$, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.*
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, c'est à dire quand A est réalisé, le quotient :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition 3.4 *: La formule $Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$ définit une probabilité sur l'espace des résultats associés à l'épreuve $\mathcal{E}$.*

Démonstration :

(i) $B \cap A \subset A \Longrightarrow 0 \leqslant \mathbb{P}(B \cap A) \leqslant \mathbb{P}(A)$. Donc $0 \leqslant Q(B) \leqslant 1$.
(ii) Si les (B_n) sont deux à deux disjoints, alors :

$$Q(\bigcup_n B_n) = \frac{P\left(A \cap \bigcup\limits_n B_n\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{P\left(\bigcup\limits_n (A \cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum\limits_n P(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_n Q(B_n).$$

(iii) $Q(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega|A) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

3.4 Indépendance

Intuitivement, deux événements A et B sont indépendants, si la réalisation de l'un d'eux ne modifie pas les chances de réalisation de l'autre.
Autrement dit si la probabilité de B sachant que A est réalisé est égale à la probabilité de réalisation de B, et inversement en échangeant les rôles de A et B.

Proposition 3.5 *:*
Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors les trois égalités suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
(ii) $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
(iii)$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

La démonstration de cette proposition est facile, donc laissée en exercice.

Remarque 3.2 *Si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$, alors l'égalité (iii) est évidente et conserve un sens. D'où la définition :*

Définition 3.6 *: Deux événements A et B attachés à une même épreuve $\mathcal{E}$ sont dits indépendants si*
$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$

On notera $A \amalg B$ pour dire que A et B sont indépendants.

3.4.1 Exemple n° 4

On jette deux fois le même dé. Les événements $A = \{$obtention d'un chiffre pair au premier lancer$\}$, $B = \{$obtention du 3 au deuxième lancer$\}$, sont indépendants.
En effet, en prenant $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, on vérifie que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{3 \times 6}{36} = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{6 \times 1}{36} = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{3 \times 1}{36} = \dfrac{1}{12}$, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$.

Remarque 3.3 *Les tirages avec remise constituent une bonne illustration d'événements indépendants.*

3.4.2 Exemple n° 5

On tire au hasard 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. Soient les événements

$$A = [\text{On a l'as de pique}], \quad B = [\text{On a un seul as}].$$

Solution
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{C_1^1 C_{51}^{12}}{C_{52}^{13}}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{C_4^1 C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{C_1^1 C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}$, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \dfrac{4C_{51}^{12} C_{48}^{12}}{C_{52}^{13} C_{52}^{13}}$
$= .... = \mathbb{P}(A \cap B)$. Donc ces deux événements sont indépendants.

3.4.3 Propriétés de l'indépendance.

On a le théorème suivant :

Théorème 3.7

(i) $A \amalg A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ *ou* $\mathbb{P}(A) = 1$
(ii) $A \amalg B \Longrightarrow A \amalg \overline{B}, \overline{A} \amalg B, \overline{A} \amalg \overline{B}$
(iii) A est indépendant de tout autre événement B si et seulement si : $\mathbb{P}(A) = 0$ *ou* $\mathbb{P}(A) = 1$.

Démonstration :

(i) est évident.
(ii) $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.
(iii) $\Longrightarrow$ On a : $A \amalg A$ et donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$
$\Longleftarrow$ Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Et si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ ce qui implique, d'après ce qui précède, que $\overline{A} \amalg B$ ou encore $A \amalg B$ d'après *(ii)*.

Remarque 3.4 *Les tirages sans remise constituent une bonne illustration d'événements dépendants.*

Proposition 3.8 Probabilité composées *On a pour toute famille finie* $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *d'événements telles que* $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots A_{n-1}).$$

Preuve : Toutes les probabilités conditionnelles existent. Puis on a :

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) =$$
$$= P(A_1)\frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}\frac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_2 \cap A_1)}...\frac{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i)}\frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)} = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Exemple 3.1 *un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?*
$p = \dfrac{8}{12}\dfrac{7}{11}\dfrac{6}{10}$.

Exemple 3.2 *une urne contient 6 boules blanches, 4 noires et 2 vertes. On tire 3 boules successivement et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la deuxième verte et la troisième noire ? On note les événements* B_1 *la première boule est blanche,* V_2 *le deuxième est verte et* N_3 *la dernière est noire. On calcule* $\mathbb{P}(B_1 \cap V_2 \cap N_3)$ *soit avec la formule* $6/12 \times 2/11 \times 4/10$.

3.4.4 Exemple n° 6

Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. Quelle est la probabilité d'extraire 2 boules blanches en 2 tirages sans remise ?

Solution :

Appelons B_1, l'événement : obtenir une boule blanche au premier tirage.
Appelons B_2, l'événement : obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
La probabilité cherchée $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$ est égale à $\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2|B_1)$. Or $\mathbb{P}(B_1)$ vaut 3/8 et $\mathbb{P}(B_2|B_1)$ est égale à 2/7 puisque lorsqu'une boule blanche est sortie au premier tirage, il ne reste plus que 7 boules au total, dont 2 seulement sont blanches. On conclut que $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{28}$.

Définition 3.9 *:*
Une famille d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est dite famille indépendante, si pour toute sous-famille $\left(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_p}\right)$ où $i_j \in [\![1,n]\!]$, $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$ de la famille donnée, on a :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{p} P\left(A_{i_j}\right).$$

Proposition 3.10 *: L'indépendance d'une famille d'événements est préservée si l'on remplace un nombre quelconque d'entre eux par leur complémentaire.*

Remarque 3.5 *L'indépendance d'une famille d'événements entraîne l'indépendance deux à deux de ses éléments. La réciproque de cette propriété est fausse. Voir un contre exemple en cours.*

3.5 Formule de Bayes

Définition 3.11 (Système complet d'événements)
On dit que $(A_1, \cdots, A_n)$ forme un système complet d'événements si :

$$\begin{cases} \cup_{i=1}^{n} A_i & = & \Omega \\ i \neq j & \Rightarrow & A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases}$$

Théorème 3.12 (Formule de Bayes) *Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements, tels que pour tout i, $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Et soit B un autre événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i), \quad \mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}}$$

Démonstration :

1. $\mathbb{P}(A_k|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, donc $\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)$.
   D'où $\mathbb{P}(A_k|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B)}$.
2. $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$.
   Or les événements sont incompatibles donc :
   $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i)$. D'où le résultat.

3.6 Exercices résolus et non résolus

3.6.1 Exercices résolus

Exercice 1 : *Formule de Bayes*

Dans un magasin, un stock d'appareils est constitué d'appareils venant de deux usines U_1 et U_2. 60% du stock en provenance de U_1 et le reste en provenance de U_2. 10% (respectivement 20%) des appareils provenant de U_1 (respectivement U_2) présente un défaut.

1. On choisit au hasard un appareil. Déterminer la probabilité qu'il présente un défaut.
2. Sachant qu'un appareil particulier présente un défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de U_2.

Solution
Soit :
$A = \{L'appareil\ provient\ de\ U_1\}$, $B = \{L'appareil\ provient\ de\ U_2\}$,
$D = \{L'appareil\ présente\ un\ défaut\}$.
On a : $\mathbb{P}(A) = 0,6$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, $\mathbb{P}(D|A) = 0,1$, $\mathbb{P}(D|B) = 0,2$.

1. On cherche $\mathbb{P}(D)$. Comme A et B forment un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B) \times \mathbb{P}(B)\\ &= 0,1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4 = 0,14\end{aligned}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(B|D)$: $\mathbb{P}(B|D) = \dfrac{\mathbb{P}(D|B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{0,2 \times 0,4}{0,14} = \dfrac{4}{7}$

Exercice 2 : *Chasse au lapin*

Deux chasseurs aperçoivent simultanément un lapin et tirent en même temps. La probabilité que le premier tue le lapin est 4/5, celle du second est 3/4. Quelle est la probabilité que le lapin soit tué ?
Solution
Soit A_i l'événement "le i-ème chasseur tue le lapin". L'énoncé donne $\mathbb{P}(A_1) = 4/5$, $\mathbb{P}(A_2) = 3/4$ et suggère que A_1 et A_2 sont indépendants. Il en est de même pour les événements contraires. La probabilité de survie du malheureux lapin est donc

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

et la probabilité que le lapin soit tué est $1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$. Dur dur d'être lapin !.

Exercice 3 : *Le "au moins" avec des cartes*

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Quelle est la probabilité que cette main contienne au moins as ?
Solution
On a $\Omega = \{Mains\ de\ 5\ cartes\ dans\ un\ jeu\ de\ 32\ cartes\}$ et $\text{card}(\Omega) = C_{32}^5$.
Il y a deux méthodes de résolutions :

1. $A = \{Main\ contenant\ au\ moins\ un\ as\}$
   $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ où $A_i = \{main\ contenant\ i\ as\ exactement\}$
   $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ or les événements sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i).$$

D'où $\mathbb{P}(A) = \dfrac{C_4^1 \times C_{28}^4 + C_4^2 \times C_{28}^3 + C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1}{C_{32}^5}$.

2. On pense à l'événement contraire de A

$\bar{A} = \{\textit{Main ne contenant aucun as}\}$

Donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$ où $\mathbb{P}(\bar{A}) = \dfrac{C_4^0 \times C_{28}^5}{C_{32}^5}$

Exercice 4 : *Indépendance*

Un appareil est composé de trois dispositifs. Soit A l'événement "le premier dispositif fonctionne", B l'événement "le deuxième dispositif fonctionne" et C l'événement "le troisième dispositif fonctionne". On suppose que chaque dispositif fonctionne indépendamment des autres et que $\mathbb{P}(A) = 0.2$, $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(C) = 0.6$. Quelle est la probabilité pour qu'exactement 2 dispositifs fonctionnent ?

Solution

Remarquons d'abord que si A, B et C sont indépendants, $\overline{A}, B$, et C, ou $\overline{A}, \overline{B}$ et C etc. sont indépendants.
Pour la probabilité cherchée on trouve donc
$\mathbb{P}$("exactement 2 dispositifs fonctionnent")=

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(C)) + \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(C) + (1-\mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{252}{1000}$$

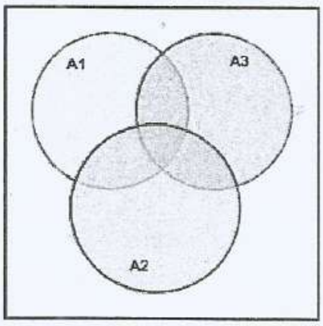
Exercice 5 : *Formule du crible de Poincaré : Inclusion-Exclusion*

Montrons que

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=k} (-1)^{k-1} P(\cap_{i \in I} A_i).$$

Remarque 3.6

- *Pour $n = 2$, on a $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$(formule déjà démontrée).*
- *Pour $n = 3$, on a :*



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \underbrace{(-1)^0 P(A_1) + (-1)^0 P(A_2) + (-1)^0 P(A_3)}_{k=1} +$$

$$+ \underbrace{(-1)^1 P(A_1 \cap A_2) + (-1)^1 P(A_1 \cap A_3) + (-1)^1 P(A_2 \cap A_3)}_{k=2} + \underbrace{(-1)^2 P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{k=3} =$$

$$= \underbrace{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)}_{k=1} + \underbrace{(-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3))}_{k=2} + \underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{k=3}$$

Continuer avec la récurrence ! ! !