Feuille d'Exercices n° 4 : LOIS DISCRÈTES

Exercice 4.1 : *Questionnaire*

On fait remplir un questionnaire à 20 questions binaires. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard obtienne au moins 16 bonnes réponses ? commenter le résultat.
Indication : utiliser la v.a.d. X donnant le nombre de bonnes réponses obtenus lors des 20 réponses.

Exercice 4.2 : *Loi binomiale et Bayes*

Un joueur a dans sa poche 3 pièces , dont deux, notées N_1 et N_2 sont équilibrées, et l'autre T est lestée de sorte que "Pile" ait une probabilité d'apparition égale à 4 fois celle de "Face". Le joueur choisit une des trois pièces au hasard, et la lance 6 fois. Il obtient 5 résultats "Pile". Quelle est alors la probabilité qu'il ait choisit la pièce T ?

Exercice 4.3 : *Loi de Poisson*

Le directeur des ventes d'une entreprise a constaté que le nombre N de voitures vendues toutes les heures par l'entreprise suit une loi de poisson de paramètre 4. Calculer la probabilité que dans une heure donnée :

1) On ne vende aucune voiture
2) On vende 4 voitures
3) On vende au moins une voiture
4) Le nombre de voitures vendues soit compris (au sens large) entre 2 et 6.
5) Quelle est l'espérance de N ? Sa variance ?

Exercice 4.4 : *Loi exacte et approximation*

On tire sans remise 5 boules dans une urne contenant 600 boules blanches et 400 noires. Donner la valeur exacte de la probabilité que 3 des 5 boules tirées soient noires. Donner une valeur approchée en utilisant l'approximation binomiale.

(X) **Exercice 4.5 :**

Dix couples mariés (il s'agit de dix couples constitués chacun d'un homme et de son épouse, donc on a au total vingt personnes) se trouvent réunis dans une pièce.
On choisit huit(8) personnes au hasard parmi les vingt personnes réunies et on note X la variable aléatoire désignant le nombre de couples (mari-femme) parmi ces huit personnes choisies.

1) Définir l'univers Ω puis calculer son cardinal.

2) Calculer, en les justifiant, les probabilités $P[X = k]$ pour $k \in [\![0,4]\!]$ puis vérifier que $\sum_{k=0}^{4} P[X = k] = 1$

(X) **Exercice 4.6 :** *Transmission*

On veut transmettre un message électronique composé des digits 0 et 1. Les conditions imparfaites de transmission font en sorte qu'il y a une probabilité égale à 0.1 qu'un 0 soit changé en un 1 et un 1 en un 0 lors de la réception, et ce de façon indépendante pour chaque digit. Pour améliorer la qualité de la transmission, on propose d'émettre le bloc 00000 au lieu de 0 et le bloc 11111 au lieu de 1 et de traduire une majorité de 0 dans un bloc lors de la réception par 0 et une majorité de 1 par 1.

1) Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 00000 est émis ?
2) Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 11111 est émis ?

$\otimes$ **Exercice 4.7 :** *Quelle est la loi ?*

Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les quatre extrémités sont des clés de taille différentes indiscernables au toucher.

1) Il procède au hasard, sans méthode. Calculer la probabilité de faire trois essais pour trouver la bonne clé. Généraliser à n essais. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Quelle sont son espérance et sa variance ?

2) Il procède au hasard, en éliminant les extrémités déjà testées. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Quelle est sa loi de probabilité ? Calculer son espérance.

Exercice 4.8 : *Loi conditionnelle*

Le nombre d'appels téléphoniques au standard d'un établissement universitaire entre 10h et 11h suis une loi de poisson de paramètre λ. Supposons que pour chaque appel il y est une probabilité p que le correspondant demande le service de scolarité.

1) Calculez la probabilité qu'il y ait k appels pour le service de scolarité sachant qu'il y a n appel au standard,

2) Calculez la probabilité qu'il y ai n appels au standard et k appels vers le service de scolarité,

3) Déterminez la loi de probabilité du nombre d'appels vers le service de scolarité entre 10h et 11h.

Exercice 4.9 : *Distributions****

On distribue aléatoirement n boules indiscernables dans p urnes discernables ($n \geq p \geq 2$).
Soit X la variable aléatoire discrète désignant le nombre exact d'urnes vides parmi les p urnes (les valeurs prises par X sont les entiers $0, 1, 2 \ldots, p-1$).

1) Déterminer, en les justifiant, les probabilités $P[X = k]$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.

2) Justifier que $\sum_{k=0}^{p-1} P[X = k] = 1$.

Exercice 4.10 : *Marche aléatoire****

Soit $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que :

$$P[X_j = 1] = p, \quad P[X_j = -1] = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

Quelle est la loi de probabilité de $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et calculer $E(S)$ et $V(S)$.
On admettra que pour des variables indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances.

Exercice 4.11 : *Lois géométriques et minimum/différence****

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p quelconque dans $]0, 1[$, c'est-à-dire que chacune des deux variables est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P[X = k] = P[Y = k] = q^{k-1} p$ où $q = 1 - p$.
On définit deux variables aléatoires U et V par : $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

1) Montrer que $P[U = k] = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}$ pour tout k entier strictement positif.
Indication : Vérifier d'abord que $P[U = k] = (P[U \geq k] - P[U \geq k + 1]$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que : $P[V = j] = \dfrac{p^2 q^{|j|}}{1 - q^2}$ pour tout j entier relatif ($j \in \mathbb{Z}$). Indication : Établir la formule précédente pour $j = 0, j > 0$ et $j < 0$.

3) Calculer $P[U = k, V = j]$pour tout k entier strictement positif et pour tout j entier relatif.

4) En déduire que les v.a. U et V sont indépendantes.