

Examen de rattrapage de Probabilités-Statistiques

Date : 19 février 2020

Durée : 1h30

Exercice 1 : 6.5 points

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$.

- 1) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité (d.d.p.). On considère X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X , notée F .
- 3) Représenter sommairement sur deux graphiques différents les courbes de f et F .
- 4) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire réelle X .
- 5) Calculer les probabilités suivantes : $P[X \leq -0.5]$, $P[X > 2]$ et $P[-2 \leq X \leq 0.5]$.

Exercice 2 : 3.5 points

Soit X une v.a. r. distribuée suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

On suppose que $P[X \leq 7] = 0,35$, $P[X \geq 12] = 0,25$. Calculer m et σ .

N.B. : On utilisera la table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ donnée en deuxième page pour répondre aux différentes questions de cet exercice.

Exercice 3 : / 5 points

Un livre de 350 pages contient 450 erreurs d'impression réparties au hasard.

Soit X le nombre d'erreurs d'impression dans une page déterminée.

On donnera des valeurs approchées pour tous les calculs à 10^{-4} près (avec quatre chiffres après la virgule).

- 1) Justifier que X est distribué selon la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 450, p = 1/350)$.
- 2) Quelle est la probabilité exacte pour qu'il y ait au moins trois erreurs dans une page déterminée ? (calculer $P(X \geq 3)$).
- 3) Justifier qu'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ à préciser.
- 4) Donner, en utilisant l'approximation ci-dessus, une valeur approchée de $P(X \geq 3)$. Conclure.

Exercice 4 : 5 points

Les pièces fabriquées par une usine sont soumises à un contrôle, mais le mécanisme de contrôle n'est pas entièrement fiable. En effet : si une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0.9, par contre si elle est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 0.8.

- 1) Si un lot comprend une pièce défectueuse et trois bonnes, quelle est la probabilité pour que ces quatre pièces soient acceptées lors du contrôle ?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une erreur lors du contrôle d'une pièce si l'on sait qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'une pièce acceptée par le contrôle soit défectueuse (si l'on admet de nouveau qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production) ?

FIN DE L'ÉPREUVE. BON TRAVAIL

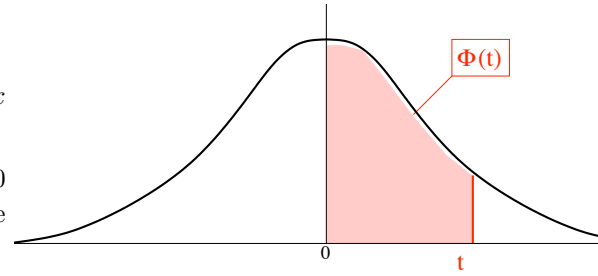
Table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

Soit T une v.a.c. suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ de d.d.p. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour tout réel positif ou nul t on a : $\Phi(t) := P(0 \leq T \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

et par parité de la d.d.p on a $P(-t \leq T \leq 0) = \Phi(t)$.

La lecture de la table ci-dessous nous permet de trouver $\Phi(t)$ pour $t > 0$ s'écrivant sous la forme $a, bc = a, b + c10^{-2}$ à l'intersection de la ligne associée à a, b et la colonne associée à c .



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000