FACULTE POLYDISCIPLINAIRE DE KHOURIBGA

Module : Physique 3 **Electricité II**
Série N° 2 : suite
Semestre 3 - Année Universitaire 2017 / 18

EXERCICE 1 : Cadre en chute libre

Un cadre métallique carré MNPQ, de côté ℓ et de résistance R, est abandonné sans vitesse initiale, par rapport à un référentiel absolu $\Re(O; X, Y, Z)$, dans une région de l'espace (z <0) où règne un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_a = B_a.\vec{e}_y$. Au cours de la chute, son plan coïncide avec le plan vertical (ZOX); à l'instant pris comme origine, le côté inférieur MN du cadre est à la cote Z = 0.

Déterminer l'expression de la force électromotrice d'induction (f.é.m) dans le cadre à partir de la loi de FARADAY. Retrouver cette expression à l'aide de l'expression générale de la f.é.m.
Calculer le courant électrique induit dans le cadre.
Calculer la variation de la vitesse du cadre en fonction du temps.

EXERCICE 2 : Courant de Foucault

Une spire circulaire de rayon a, de résistance R et d'inductance propre négligeable, est fixe en O sur son axe OZ.

I - Sur l'axe OZ, on approche de la spire le pôle Nord d'un aimant P, d'abscisse z < 0, à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{ez}$, (vitesse constante positive). On suppose que le champ $\vec{B}(M)$ crée par l'aimant est le même que celui d'un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ porté par OZ, et dans le potentiel vecteur est $\vec{A}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{r}}{r^3}$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

1- Calculer le flux $\Phi(t)$ de $\vec{B}$ à travers la spire en utilisant le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$. Exprimer $\Phi(t)$ en fonction de z(t).

2- En déduire la f.é.m. **e(t)** induite dans la spire en fonction de $v = \dfrac{dz}{dt}$

3- Retrouver ce résultat en utilisant le champ électromoteur de Neumann.

4- Calculer alors le courant induit ***i(t)***. La loi de Lenz est-elle vérifiée ? Justifier votre réponse.

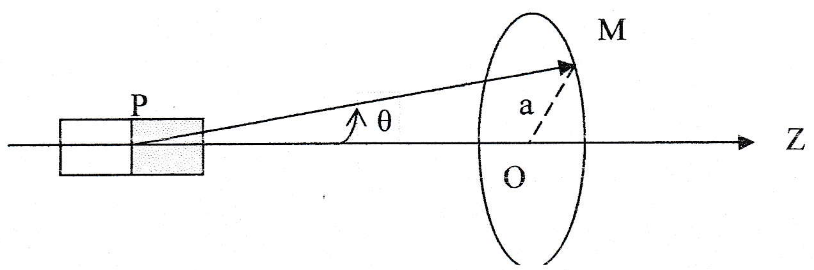
II- l'aimant P est maintenant fixe. On approche la spire de l'aimant avec une vitesse constante $\vec{v} = -v\,\vec{ez}$ $(v > 0)$.

1- Ecrire les composantes de $\vec{B}(M)$ en coordonnées sphériques.

2- Déterminer, en fonction de θ puis de z(t), le champ électromoteur de Lorentz E_m en chaque point de la spire.

3- Calculer la f.é.m. **e'(t)** induite dans la spire et en déduire le courant induit ***i'(t)***

4- Comparer ce résultat à celui du la question **(I-4)**, conclure.



EXERCICE 3 : **Facultatif,** glissement d'une barre sur deux rails

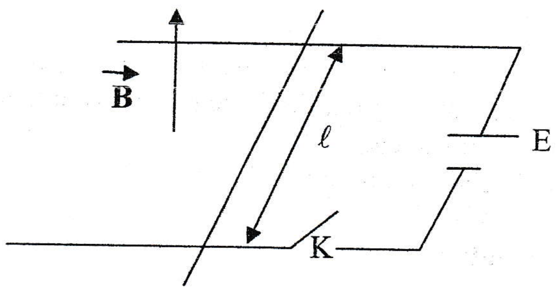
Une barre de longueur ℓ et de masse m glisses sur deux rails dans un champ magnétique perpendiculaire au plan formé par la barre et les rails (voir figure). La résistance totale du circuit est une constante égale à R.

1- À l'instant t = 0, la barre mobile étant immobile, on ferme l'interrupteur K. En admettant que la barre glisse sans frottement sur les rails, déterminer la variation de la vitesse de celle-ci avec le temps.

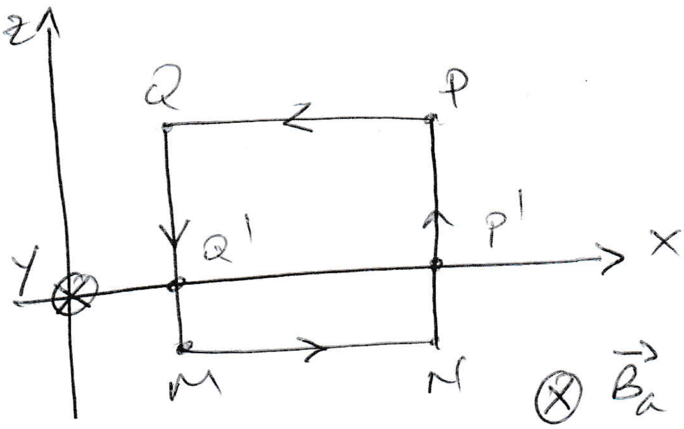
Montrer que cette vitesse atteint une valeur limite.

2- On suppose que la valeur limite ci-dessus est atteinte au bout du temps t_1. À ce moment, la barre est soumise à une force de frottement **f** constante.

Déterminer les variations de la vitesse en fonction du temps en prenant t_1 pour une nouvelle origine des temps.



Exercice 1



a/ $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ loi de Faraday

$\phi = \iint_{\text{surface du cadre}} \vec{B_a}\,\vec{dS} \neq 0$ pour $z<0$

$= \iint_S B_a \vec{e_y}\, dS(-\vec{e_y})$; $\vec{dS} = dS(-\vec{e_y})$ pour l'orientation MNPQ

$\|\vec{dS}\| = dS = l\,dz$

$= \int_z^0 B_a\, l\, dz = B_a l z$

$\Rightarrow \boxed{e = -B_a l \dfrac{dz}{dt}}$

b/ calcul direct : $e = \oint_{\text{cadre}} (\vec{v}\wedge\vec{B_a})\vec{dl}$; $\vec{v} = v\vec{e_z} = \dfrac{dz}{dt}\vec{e_z}$ <0

$e = \int_{\text{cadre}} v B_a (\vec{e_z}\wedge\vec{e_y})\vec{dl} = -\int_{\text{cadre}} v B_a \vec{e_x}\vec{dl}$

$= -\left[\int_{MN}(\ ) + \int_{NP'} + \int_{P'Q'} + \int_{Q'M}\right]$

$\int_{NP'} v B_a \vec{e_x}\vec{dl} = \int_{Q'M} v B_a \vec{e_x}\vec{dl} = 0$ car $\vec{e_x} \perp \vec{dl}$

$\int_{P'Q'} v B_a \vec{e_x}\vec{dl} = 0$ car $B_a = 0$

$B_a \neq 0$ pour $z<0$

donc $e = -\int_M^N v B_a \, dl = -v B_a l = -B_a l \frac{dz}{dt}$

$\left(v = \frac{dz}{dt} \right)$

a/ et b/ donc le même résultat.

2/ calcul du courant. $i = \frac{e}{R} = -\frac{B_a l}{R} \frac{dz}{dt} > 0$

car $\frac{dz}{dt} < 0 \Rightarrow$ sens du courant est (MNPQ)

3/ Principe fondamental de la dynamique.

$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_l$

$\vec{F}_l \equiv$ force de laplace appliquée au cadre par $\vec{B}_a$.

seul le coté MN intervient.

$\vec{F}_l = \oint_{cadre} i \, \vec{dl} \wedge \vec{B_a}$

$= i B_a l \, \vec{e_z}$ est dirigée vers le haut $\Rightarrow$ freinage du cadre par $\vec{B_a}$.

Projection sur l'axe $\vec{Oz}$.

$m \frac{dv}{dt} = -mg + i B_a l$

$i = -\frac{B_a l}{R} \cdot v$

$m \frac{dv}{dt} - i B_a l = -mg$

$\cancel{m} \frac{dv}{dt} + \frac{(B_a l)^2}{mR} v = -\cancel{m} g$; on pose $\tau = \frac{mR}{(B_a l)^2}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = -g \Rightarrow v = v_1 + v_2$

$v_1 = -g\tau$; $\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{\tau} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \alpha e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow v = \alpha e^{-t/\tau} - g\tau$.

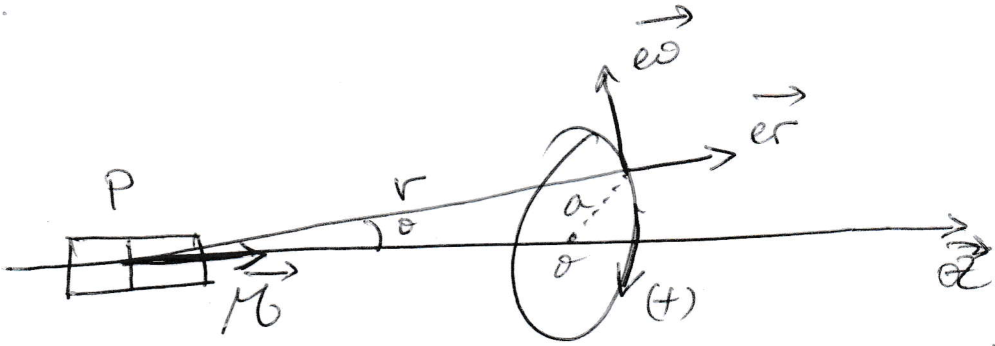
condition initiale : à $t=0$ $v=0$

$\Rightarrow v = \alpha - g\tau = 0 \Rightarrow \alpha = g\tau$.

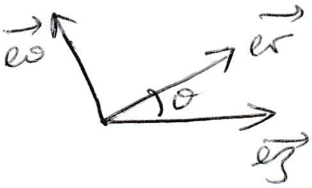
$\Rightarrow v(t) = g\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$

la vitesse limite que peut atteindre le cadre est $v(\infty) = g\tau$.

Exercice 2 :



1/ $\phi(t) = ?$



$$\phi(t) = \iint \vec{B}\,\vec{dS}$$

$$= \iint \left(\vec{rot}\,\vec{A}\right)\vec{dS}$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\,\vec{dl} \; ; \; \vec{dS} : \text{elt de surface de la spire}$$

$\vec{dl}$: elt du contour de la spire.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{r}}{r^3} \; ; \; \vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e_z} \; ; \; \vec{e_z} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{r} = \mathcal{M} r \sin\theta\,\vec{e_\varphi} = \mathcal{M} a\,\vec{e_\varphi} \quad \text{car } \sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$\text{donc } \phi(t) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M} a}{r^3}\,\vec{e_\varphi}\,dl.\vec{e_\varphi} \; ; \; \vec{dl} = dl\,\vec{e_\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M} a}{\sqrt{a^2+z^2}^{\,3}}\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} dl}_{2\pi a}$$

$$\boxed{\phi(t) = \frac{\mu_0\,\mathcal{M}\,a^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}}$$

4

2/ $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = -v\frac{d\phi}{dz}$

$$= \frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2(a^2+z^2)^{5/2}}$$

3/ $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ champ de Newmann.

$$= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = -v\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} ; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M a\, \vec{e_\varphi}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3\mu_0 M a v z}{4\pi (a^2+z^2)^{5/2}}\vec{e_\varphi}$$

$$e(t) = \int_{\mathcal{C}} \vec{E}_m \, \vec{dl} = E_m \, 2\pi a = \frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2(a^2+z^2)^{5/2}}.$$

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{3\mu_0 M a^2 z v}{2R(a^2+z^2)^{5/2}} < 0 \quad \text{car } z<0.$$

$\Rightarrow$ $i(t)$ circule dans le sens opposé du sens (+) choisi.

si l'aimant s'approche de la spire $\Rightarrow \vec{B}\nearrow \Rightarrow \phi(t)\nearrow$

$\Rightarrow$ la spire réagit par la création d'un courant induit qui crée un champ d'ind $\vec{B}$ dont le flux s'oppose au flux de l'aimant $\Rightarrow$ la loi de LENZ est verifiée.

II/ 1/ $\vec{v}(t) = -v\,\vec{e_z}$ avec $v>0$.

$$\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right] \end{pmatrix} \begin{matrix}\vec{e_r}\\ \vec{e_\theta}\\ \vec{e_\varphi}\end{matrix}$$

or $A_r = A_\theta = 0$; $A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin\theta}{r^2}$ (5)

$\Rightarrow$ * $B_r = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{1}{r^3 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta) = \frac{2\mu_0 \mathcal{M} \cos\theta}{4\pi r^3}$

* $B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^3}$

* $B_\varphi = 0$. résultat déjà vu dans le cours.

2/ $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v\, \vec{e_z} \wedge \vec{B}$; $\vec{e_z} = \cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_\theta}$

$\vec{B} = B_r \vec{e_r} + B_\theta \vec{e_\theta}$; $B_\varphi = 0$.

$\Rightarrow \vec{E}_m = -v\,(\cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_\theta}) \wedge (B_r \vec{e_r} + B_\theta \vec{e_\theta})$

$= -v\,(B_r \sin\theta + B_\theta \cos\theta)\, \vec{e_\varphi}$. $\cos\theta = \frac{z}{r}$

$= -\frac{3 v \mu_0 \mathcal{M} \sin\theta \cos\theta}{4\pi r^3} \vec{e_\varphi}$ $\sin\theta = \frac{a}{r}$

$\Rightarrow \vec{E}_m = -\frac{3 v \mu_0 \mathcal{M}\,(a z)}{4\pi\,(a^2+z^2)^{5/2}} \vec{e_\varphi}$.

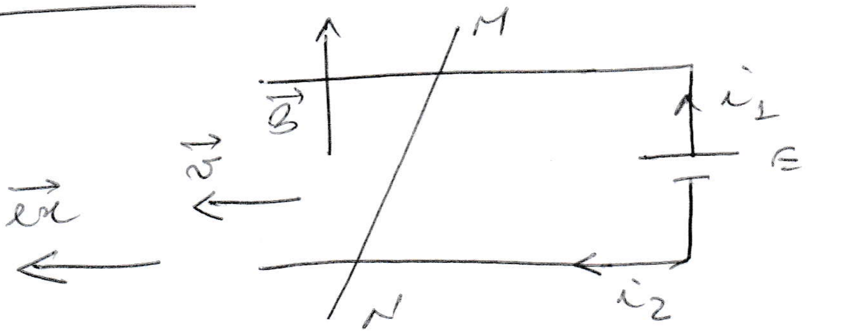
$e'(t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_m \, \vec{dl} = E_m\, 2\pi a$

$= -\frac{3 \mu_0 \mathcal{M} a^2 v z}{2\,(a^2+z^2)^{5/2}}$; $i'(t) = \frac{e'(t)}{R}$

$i'(t) = -\frac{3 \mu_0 \mathcal{M} a^2 z}{2R\,(a^2+z^2)^{5/2}} < 0$ car $z > 0$ et $v > 0$.

4/ $i'(t)$ garde le même sens que dans le 1er cas car lorsqu'on approche l'aimant de la spire $\phi(t)$ augmente comme pour le 1er cas ⇒ dans les deux cas on ne fait qu'augmenter le flux $\phi(t)$ ⇒ $i(t)$ et $i'(t)$ garde le même sens.

Exercice 3 :



Rappel

$\vec{F_l} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$= q\vec{E_m}$

$\boxed{\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}}$

1/ $e_{MN} = \int_M^N \vec{E}\,\vec{dl} = \int_M^N (\vec{v} \wedge \vec{B})\,\vec{dl} = (\vec{v} \wedge \vec{B})\,\vec{l}$; $\vec{l} = \vec{MN}$

$= -vBl$; $i_2 = \frac{e}{R} = -\frac{vBl}{R}$ ⇒ i_2 s'oppose au sens de $\vec{MN}$

$I = i_1 + i_2 = \frac{E}{R} - \frac{vBl}{R}$

Pour un circuit filiforme soumis à un ~~force~~ champ d'ind $\vec{B}$ et parcouru par un courant I, ce circuit reçoit la force de Laplace $\vec{dF_l} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$ et indépendant de $\vec{B}$ ⇒ on a : $\vec{l} \perp \vec{B}$ et $\vec{dl}$

$\vec{F_l} = BIl\,\vec{ex}$; or $\vec{v} = v\,\vec{ex}$

on applique le P.F.D $\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

(5)

or $A_r = A_\theta = 0$; $A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin\theta}{r^2}$

$\Rightarrow$ * $B_r = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{1}{r^3 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta) = \frac{2\mu_0 \mathcal{M} \cos\theta}{4\pi r^3}$

* $B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^3}$

* $B_\varphi = 0$. résultat déjà vu dans le cours.

2/ $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v\,\vec{e_z} \wedge \vec{B}$; $\vec{e_z} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{B} = B_r\,\vec{e_r} + B_\theta\,\vec{e_\theta}$; $B_\varphi = 0$.

$\Rightarrow \vec{E}_m = -v\left(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right) \wedge \left(B_r\,\vec{e_r} + B_\theta\,\vec{e_\theta}\right)$

$= -v\left(B_r \sin\theta + B_\theta \cos\theta\right)\vec{e_\varphi}$. $\cos\theta = \frac{z}{r}$

$= -\frac{3 v \mu_0 \mathcal{M} \sin\theta \cos\theta}{4\pi r^3}\,\vec{e_\varphi}$ $\sin\theta = \frac{a}{r}$

$\Rightarrow \vec{E}_m = -\frac{3 v \mu_0 \mathcal{M} (a z)}{4\pi (a^2+z^2)^{5/2}}\,\vec{e_\varphi}$.

$e'(t) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_m\,\vec{dl} = E_m\,2\pi a$

$= -\frac{3\mu_0 \mathcal{M} a^2 v z}{2(a^2+z^2)^{5/2}}$; $i'(t) = \frac{e'(t)}{R}$

$i'(t) = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M} a^2 z}{2R(a^2+z^2)^{5/2}} < 0$ car $z > 0$ et $v > 0$.

Projection sur l'axe $\vec{Ox}$ (il n'y a pas le poids) 7

$m\vec{g} + \vec{F_l} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$

$F_l = m\frac{dv}{dt}$ or $\vec{F_l} = BIl\,\vec{e_x}$

$IBl = m\frac{dv}{dt}$; $I = \frac{E}{R} - \frac{vBl}{R} \Rightarrow$

$\left(\frac{E}{R} - \frac{vBl}{R}\right)Bl = m\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2l^2}{mR}v = \frac{EBl}{mR} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta$.

avec $\alpha = \frac{B^2l^2}{mR}$ et $\beta = \frac{EBl}{mR}$

$v = v_1 + v_2$

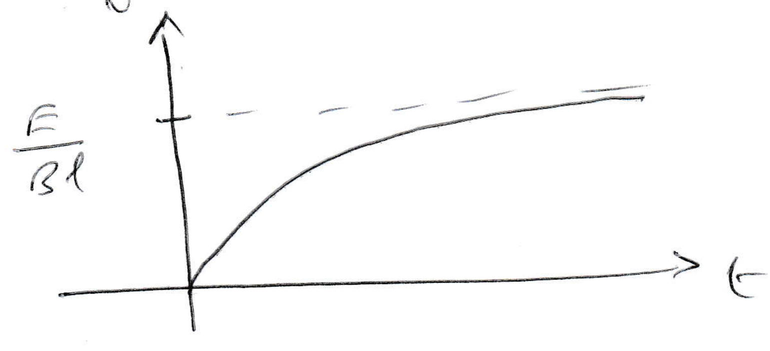
$v_1 \longrightarrow$ solution particulière

$v_2 \longrightarrow$ solution sans second membre

$v(t) = A\,e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t} + \frac{E}{Bl}$

condition initiale à $t=0$ $v(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{Bl}$

$\Rightarrow v(t) = \frac{E}{Bl}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$



la vitesse limite

$v(t) \longrightarrow \frac{E}{Bl}$

$t \longrightarrow \infty$

2/ Traitement identique pour cette question, on rajoute juste la force de frottement dans le P.F.D avec f (frottement qui s'oppose à $\vec{v}$).