

Cours de probabilité

SEG S2

Mohamed BELAM

Février 2020

Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Université Sultan Moulay Slimane



Plan

1. Prérequis - Dénombrement - Théorie des ensembles
2. Introduction au calcul des probabilités
3. Probabilités conditionnelles
4. Variables aléatoires et lois de probabilités
5. Lois usuelles

Prérequis - Dénombrement - Théorie des ensembles

1) Dénombrement. Analyse combinatoire

1.1. Principe multiplicatif

Proposition

Soit \mathcal{E} une expérience qui comporte 2 étapes : la 1^{ère} a p résultats possibles et la 2^{ème} a q résultats. Alors l'expérience a $p \times q$ résultats possibles.

Exemples

- 1. On jette un dé 3 fois successives. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?*
- 2. Une urne contient (1R, 1B, 1N, 1V) . On effectue 2 tirages successifs avec remise. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?*

Proposition

Si une expérience \mathcal{E} consiste à répéter n fois de façon indépendante une même expérience \mathcal{E}_0 qui a p résultats possibles, alors le nombre de résultats de \mathcal{E} est :

$$p^n = \underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n \text{ fois}}$$

1.2. Permutations sans répétitions

Définition

Si P_n est le nombre de permutations de n éléments alors :

$$P_n = n!$$

Exemples

1. *On a 3 lettres a, b, c ; les permutations sont les sous-ensembles ordonnés de $\{a, b, c\}$.*
2. *De combien de manière peut-on classer 4 individus ?*
3. *Une maîtresse de maison doit placer 6 personnes autour d'une table ronde.
Combien a-t-elle de possibilités ?*

1.3. Les arrangements sans répétition

Définition

Un arrangement de p éléments parmi n est une disposition ordonnée sans répétition de p éléments.

(une façon de ranger p éléments pris parmi n en tenant compte de l'ordre)

Proposition

Le nombre d'arrangement de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemples

1. *Pour accéder à une banque de données, il faut 4 lettres différentes. Combien de mots de passe peut-on avoir ?*
2. *12 candidats se présentent aux élections d'un conseil d'administration comportant 8 places différentes. Combien y-a-t-il de listes possibles ?*

Exemples

1. *Pour accéder à une banque de données, il faut 4 lettres différentes. Combien de mots de passe peut-on avoir ?*
2. *12 candidats se présentent aux élections d'un conseil d'administration comportant 8 places différentes. Combien y-a-t-il de listes possibles ?*

Remarque

Qu'est-ce qu'un arrangement avec répétition de p éléments parmi n ?

Exemples

1. *Pour accéder à une banque de données, il faut 4 lettres différentes. Combien de mots de passe peut-on avoir ?*
2. *12 candidats se présentent aux élections d'un conseil d'administration comportant 8 places différentes. Combien y-a-t-il de listes possibles ?*

Remarque

Qu'est-ce qu'un arrangement avec répétition de p éléments parmi n ?

C'est une disposition ordonnée de p éléments parmi n avec autant de répétition que l'on souhaite.

Le nombre d'arrangements avec répétition est de n^p .

Exemple

Un code PIN est composé de 4 chiffres. Combien de codes peut-on former?

1.4. Combinaisons sans répétitions

Définition

Une combinaison de p éléments parmi n est une disposition non ordonnée de p éléments parmi n . (sous ensembles de p éléments parmi n)

Remarque

- *Arrangement : on tient compte de l'ordre*
- *Combinaison : on ne tient pas compte de l'ordre.*

Proposition

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Exemple

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire 2 boules simultanément. Combien peut-on avoir de possibilités?

Remarque

On tire p boules parmi n :

- *Simultanément $\implies C_n^p$.*
- *Successivement sans remise $\implies A_n^p$.*
- *Successivement avec remise $\implies n^p$.*

Exemples

1. *Pour accéder à une banque de données, il faut 4 lettres.
Combien de mots de passe peut-on avoir ?*
2. *12 candidats se présentent aux élections d'un conseil
d'administration comportant 8 places différentes.
Combien y-a-t-il de listes possibles ?*

Propriétés

$$* C_n^0 = C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \leq n$$

$$* C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \text{ tq } 1 \leq k \leq n$$

$$* (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{formule du binôme})$$

2) Généralités sur les ensembles

2.1. Définitions et propriétés

Définition

- Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément : \emptyset .

Définition

Soit Ω un ensemble. Un ensemble A est un sous ensemble de Ω ou une partie de si : $\forall x \in A, x \in \Omega$.

L'ensemble des parties de est notée $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple

$\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(\Omega) = ?$

Soient Ω un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

- Appartenance : $x \in \Omega$: x un élément de Ω . Le cas contraire : $x \notin \Omega$.
- Inclusion : $A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$. Le cas contraire : $A \not\subset B$.
- Complémentaire (A^c ou \bar{A}) : $x \in \bar{A} \iff x \notin A$.
- Union $A \cup B$: $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$.
- Intersection : $A \cap B$: $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$.
- Différence : $A \setminus B = A \cap \bar{B}$: $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$.

Remarque

- | | |
|---|---|
| * $A \cup A = A$ | * $A \cap A = A$ |
| * $A \cup \emptyset = A$ | * $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| * si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$ | * si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ |

Définition

On dit que A et B sont disjoints si et ssi $A \cap B = \emptyset$.

Définition

Soient $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$.

On dit que la famille $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ forment une partition de Ω si et ssi :

$$1) \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad ; \quad 2) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Propriétés

$$* A \cup B = B \cup A$$

$$* A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$* A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$* A \cap B = B \cap A$$

$$* \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$* \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2.2. Notion de cardinal

Soit Ω un ensemble fini.

Définition

Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A a également un nombre fini d'éléments.

Le cardinal de A est le nombre d'éléments de A . On le note : $\text{card}(A)$.

Propriétés

- $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$
- $\text{card}(\emptyset) = 0$

Introduction au calcul des probabilités

1) Expérience aléatoire

Définition

Une expérience aléatoire est une action qui débouche sur plusieurs résultats possibles qu'on ne peut pas prévoir par avance. Ces résultats sont appelés éventualités ou événements élémentaires.

Définition

L'ensemble de toutes les éventualités est appelé univers, noté : Ω .

Un évènement A est un ensemble d'éventualités, c'est donc aussi une partie de l'univers Ω . ($A \in \mathcal{P}(\Omega)$).

2) Du langage ensembliste à celui des évènements

Vocab. ensembliste	Vocabulaire probabiliste
élément ω	éventualité ω
sous-ensemble A	évènement A
\emptyset	l'évènement impossible
$A \cup B$	A ou B est réalisé
$A \cap B$	A et B sont réalisés
A^c	\bar{A} l'évènement contraire
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$	A et \bar{B} réalisés : A réalisé et B non réalisé
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A implique B

Exemple

On jette un dé. exp aléatoire? univers Ω ? éventualités ?

On considère :

- * A l'évènement : tomber sur un nombre impair : $A = ?$*
- * B l'évènement : tomber sur un un nombre ≤ 4 : $B = ?$*
- * C l'évènement : tomber sur le nombre 6 : $C = ?$*
- * $D = \bar{A} \cap B$: $D = ?$*
- * E l'évènement : tomber sur le nombre 7 : $E = ?$*

De plus on on a :

- * \bar{A} est l'évènement réalisé quand A ne l'est pas : $\bar{A} = ?$*
- * $A \cup B = ?$; $A \setminus B = ?$; $B \setminus A = ?$; $C \subset \bar{A}$; $A \cap C = ?$*
- * A, C et D forment une partition de Ω .*

3) Probabilités sur un ensemble fini

Définition

soit Ω fini, dont les évènements élémentaires sont équiprobables.

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}$$

Exemples

1. *Une urne contient (1B, 1N) . On fait 2 tirages avec remise. Quelle est la probabilité d'avoir 2 Noires ?*
2. *Soit une urne contenant (2V, 3B) .*
 - a) *On effectue 2 tirages sans remise, calculer la probabilité d'avoir 2V exactement, 2B exactement, 1V et 1B.*
 - b) *même question avec tirage avec remise.*

Propriétés

1. $P(A) + P(\bar{A}) = 1, \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega).$
3. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B).$
4. $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$

4) Définition axiomatique

Si Ω est infini, la définition précédente n'est plus valable. Les fondements de la probabilité mathématique sont dus à Kolmogorov (1903-1987) en 1933.

Définition

Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable. On appelle loi de probabilité sur Ω une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0; 1]$ qui vérifie :

- 1) $P(\Omega) = 1$.*

- 2) Pour toute suite d'événements incompatibles (disjoints deux à deux) A_1, \dots, A_n , ($A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) on a :*

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Remarque

Si Ω est infini non dénombrable on introduit la notion de σ -algèbre.

Propriétés

1. $P(A) + P(\bar{A}) = 1, \forall A \in \mathcal{P}(\Omega); P(\emptyset) = 0$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega).$
3. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B).$
4. $P\left(\bigcup_i^n A_i\right) \leq \sum_i^n P(A_i)$

4.1. Probabilité sur un ensemble fini

Probabilité uniforme (équiprobabilité) :

$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ un ensemble fini à n éléments, résultats d'une expérience aléatoire et A un évènement de Ω .

Supposons que chaque résultat particulier ait les mêmes chances de se produire. On a :

$$\begin{aligned} P(w_i) &= ? \quad \forall i = 1, \dots, n \\ P(A) &= \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{Nb de cas favorables}}{\text{Nb de cas possibles}} \end{aligned}$$

Probabilité quelconque :

Exemple

On jette un dé un grand nombre de fois et on remarque que les fréquences d'apparition des faces se comportent comme suit :

$$P(1) = P(3) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6} ; P(2) = \frac{1}{9} ; P(5) = \frac{2}{9}$$

4.2. Probabilité sur un ensemble infini

Ω est dénombrable :

Exemple

On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que face apparaisse et on compte le nombre de fois où on a jeté la pièce.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, \infty\}$$

La fonction suivante est une fonction de probabilité sur Ω :

$$P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{4}, \dots, P(n) = \frac{1}{2^n}, \dots$$

Ω est continue :

$\Omega = \mathbb{R}$, Les événements sont les intervalles et tous les sous-ensembles de \mathbb{R} obtenus en combinant les intervalles par intersection et réunion.

Définition

On appelle densité de probabilité une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ , continue par morceaux et d'intégrale 1 :

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

Etant donnée une densité f de probabilité, on définit une loi de probabilité sur \mathbb{R} en associant à tout événement A l'intégrale de la densité sur cet événement :

$$p(A) = \int_A f(x) dx$$

Exemple

Pour l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard un réel dans $[0, 1]$, on considère la loi de probabilité continue, de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Loi uniformément} \\ \text{répartie sur } [0; 1] \end{array}$$

Probabilités conditionnelles

1) Définition

La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier la probabilité d'un événement.

1) Définition

La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier la probabilité d'un événement.

Définition

Soit A et B deux évènements d'un univers Ω qui est muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$. ($A \subset \Omega$, et $B \subset \Omega$ tq $P(A) > 0$).

La probabilité conditionnelle de B sous l'hypothèse A est définie par :

$$p(B/A) = p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

Remarque





































- *Le fait de savoir que A est réalisé réduit l'ensemble des résultats possibles.*
- *On vérifie qu'elle possède les propriétés d'une probabilité :*
 - $p_A(\Omega) = \dots$
 - *si les B_i sont disjoints (incompatibles) deux à deux*

$$P_A \left(\bigcup_i B_i \right) = \dots\dots\dots = \sum_i P_A(B_i)$$

Exemple

On jette une paire de dés. Calculer la probabilité pour :

- 1) avoir un 2 sachant que la somme est égale à 6.
- 2) que la somme soit égale à 6, sachant qu'on ait un 2.

Soit $A = \text{"la somme est égale à 6"}$ $B = \text{"au moins l'un des dés donne 2"}$

On a : $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), \dots, (1; 6), (2; 1), \dots, (6; 6)\}$,

$A = \{(1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1)\}$,

$B = \{(1; 2); (2; 2); \dots; (6; 2); (2; 1); (2; 3); \dots; (2; 6)\}$

et $B \cap A = \{(2; 4); (4; 2)\}$

$$1) p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = ? \qquad 2) p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = ?$$

Soit $A =$ "la somme est égale à 6" $B =$ "au moins l'un des dés donne 2"

On a : $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), \dots, (1; 6), (2; 1), \dots, (6; 6)\},$

$A = \{(1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1)\},$

$B = \{(1; 2); (2; 2); \dots; (6; 2); (2; 1); (2; 3); \dots; (2; 6)\}$

et $B \cap A = \{(2; 4); (4; 2)\}$

$$1) p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = ? \qquad 2) p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = ?$$

Exemple

Soit un jeu de 52. On fait 2 tirages avec remise. Quelle est la probabilité que la 1^{ère} carte soit un roi rouge et la 2^{ème} un roi noir ?

2) Indépendance

Définition

Soit A et B deux évènements d'un univers Ω qui est muni d'une probabilité P tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, on dit que A et B sont indépendants si et seulement si $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$.

C'est-à-dire le fait que A est réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité de B .

Proposition

Soient $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Attention : indépendants \neq incompatibles.

Exemple

Le tableau suivant donne la répartition de 150 étudiants en fonction de la langue choisie et de l'activité sportives choisie. On choisit un étudiant au hasard.

	<i>Foot</i>	<i>Basket</i>	<i>Tennis</i>
<i>Anglais</i>	45	18	27
<i>Espagnol</i>	33	9	18

- 1) *Les deux évènements "étudier en espagnol" et "pratiquer le foot" sont-ils indépendants?*
- 2) *Les deux évènements "étudier en anglais" et "pratiquer le tennis" sont-ils indépendants?*

Exercice

Un jeu radiophonique consiste à poser 10 questions à un candidat qui doit choisir parmi 2 réponses dont une seule est juste. Le candidat perd au bout de 2 réponses fausses.

- 1) Déterminer la probabilité qu'un candidat qui répond au hasard puisse gagner ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'un candidat ait perdu au bout de 5 questions sachant qu'il a perdu ?

3) Formule des probabilités totales

Proposition

Soit $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition de l'univers Ω , c-à-d :

$$1) \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \quad ; \quad 2) B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

telle que $P(B_i) > 0 \quad \forall i$ et soit A un évènement de Ω ,

alors on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i).$$

Exemple

Une entreprise utilise 3 machines différentes A, B, C pour fabriquer des pièces. 40 % sont fabriquées par A, 30 % par B et 30 % par C. La machine A produit 2 % de pièces défectueuses, B 4 % et C 5 %.

- 1) On prélève une pièce au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse.*

4) Formule de Bayes

Proposition

Soit $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition de l'univers Ω , telle que $P(B_i) > 0 \forall i$ et soit A un évènement de Ω alors on a :

$$P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k) \times P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i)}.$$

Exemple

Exemple précédent.

- 2) *On prélève une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?*
- 3) *On prélève une pièce saine. Proba. qu'elle vienne de C ?*

Variables aléatoires et lois de probabilités

1) Espace probabilisé et loi de probabilité

Définition

Soit Ω un univers (fini ou infini). On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ p étant une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

p est appelée loi de probabilité. On note (Ω, p) .

On rencontrera deux types de lois de probabilité :

Lois discrètes : $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ où Ω est fini ou infini dénombrable c-à-d Ω est une suite (finie ou ∞) d'évènements élémentaires que l'on peut noter : $\Omega = \{w_i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$.

Exemples

- 1) Dans une urne contenant $(3B; 4R; 6N)$, on tire une boule et on observe sa couleur :

$$\Omega = \{B, R, N\}, \quad p(B) = \frac{3}{13}, \quad p(R) = \frac{4}{13}, \quad p(N) = \frac{6}{13}$$

2) On lance une pièce de monnaie 3 fois. On a

$$\begin{aligned} \Omega &= \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}, \\ p(w) &= \frac{1}{2^3}, \quad \forall w \in \Omega \end{aligned}$$

Lois continues : $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ est continue si tous les évènements élémentaires ont une probabilité nulle.

Exemple

Loi uniforme :

$$\Omega = [a, b]; \quad \forall [c, d] \subset [a, b] : p([c, d]) = \frac{d - c}{b - a}$$

2) Variables aléatoires

Définition

On considère un espace probabilisé (Ω, p) .

- Une variable aléatoire est une fonction X de Ω dans \mathbb{R} .*
- On appelle loi de probabilité de X , la probabilité P_X définie sur l'ensemble des intervalles I de \mathbb{R} tq*

$$\forall I \subset \mathbb{R}, P_X(I) = P\{w \text{ tq } X(w) \in I\}$$

Exemple

Soient deux joueurs : Ahmed et Brahim. L'un des deux lance un dé, si 1 ou 6, $A \xrightarrow{10dh} B$; si 2,3 ou 5, $B \xrightarrow{20dh} A$; si 4, partie nulle. Soit X le gain de Ahmed.

Exercices

Ex 1 : *On lance successivement 2 fois une pièce de monnaie. Soit la variable aléatoire X représentant le nombre de faces obtenues après ces 2 lancements.*

- 1) *Donner les valeurs de X .*
- 2) *Définir la loi de probabilité de X .*

Ex 2 : *Dans une urne, il y a des boules blanches et rouges. Les blanches sont en proportion p et les rouges en proportion $q = 1 - p$. Soit X : Nbre de boules rouges obtenues. Donner la loi de probabilité de X .*

Fonction de répartition

Définition

Soit X une v.a définie sur un espace probabilisé (Ω, P) , on appelle fonction de répartition de X la fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriétés

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$
- F est croissante.
- $F(x) \in [0; 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

3) Variables aléatoires discrètes

Définition

Une variable X est discrète si l'ensemble de ses valeurs est fini ou ∞ dénombrable.

Définition

La loi de probabilité de X est définie par :

- 1. les valeurs de X : x_i tq $i \in I$, et $I \subset \mathbb{N}$.*
- 2. les probabilités des valeurs de X : $p_i = P(X = x_i)$.*

x_i	x_1	x_2	\cdots	x_n	\cdots
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

Fonction de répartition

les valeurs de $X : X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$

La fonction de répartition F ($F(x) = P(X \leq x)$) vérifie :

$$x \in]-\infty; x_1[\quad F(x) = P(\emptyset) = 0.$$

$$x \in [x_1; x_2[\quad F(x) = P(X \leq x) = p_1$$

$$x \in [x_i; x_{i+1}[\quad F(x) = P(X \leq x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

$$x \in [x_n; +\infty[\quad F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

$$p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Ainsi si on connaît la loi de probabilité de X on déduit sa fonction de répartition et inversement.

Exercice

On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois.

Soit X le nombre de jets nécessaires pour obtenir pile pour la 1^{ère} fois.

- 1) Quelles valeurs prend X ?*
- 2) Quelle est la loi de probabilité de X ?*
- 3) Déterminer la fonction de répartition*

4) Variables aléatoires continues

4.1. Fonction densité

Définition

On appelle densité de probabilité une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ , continue par morceaux et d'intégrale 1 :

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle et f une densité de probabilité sur \mathbb{R} . On dit X est une variable aléatoire continue de densité f si pour tout intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

4.2. Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est dérivable et elle est donnée par :

$$F'(t) = f(t)$$

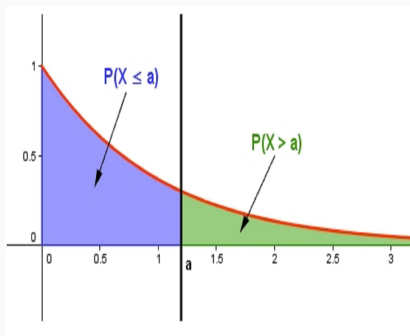
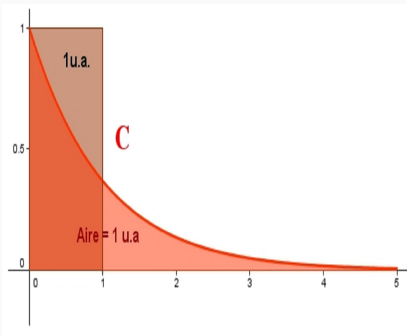
La probabilité pour que X soit comprise entre a et b est représentée par l'aire hachurée sur le graphique.

Propriétés

- *La fonction de répartition F est croissante et on a :*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- *si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.*
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

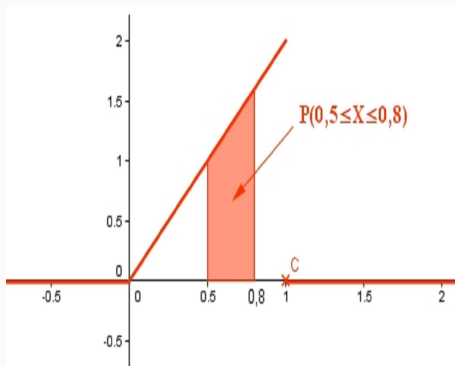


Exemple

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) *Montrer que f est une densité de probabilité et tracer le graphe de f .*
- 2) *Donner la fonction de répartition.*
- 3) *Calculer $P(0,5 \leq X \leq 0,8)$.*



Exercice

Soit X la V.A. donnée par sa fonction densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{Loi uniforme sur } [0; 1]$$

- 1) Tracer le graphe de f .
- 2) Donner la fonction de répartition et son graphe.
- 3) Calculer $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2})$ et $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 3)$.

5) Caractéristiques d'une variable aléatoire

5.1. L'espérance

Cas d'une V.A. discrète

Définition

Soit X une V.A. discrète définie sur (Ω, P) tq

$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $p_i = P(X = x_i)$. L'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i.$$

Cas d'une V.A. continue

Définition

Soit X une V.A. continue $X : (\Omega, P) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par sa fonction densité f . L'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx.$$

Exemple

Soient deux joueurs Ahmed et Brahim. L'un des deux lance un dé; si 1 ou 6, $A \xrightarrow{10dh} B$; si 2,3 ou 5, $B \xrightarrow{20dh} A$; si 4, partie nulle.

Soit X le gain de Ahmed.

Calculer $E(X)$, et donner une conclusion.

Exemple

Soit X la v.a. donnée par sa fonction densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{Loi uniforme sur } [0; 1]$$

Calculer $E(X)$.

Propriétés de l'espérance

Propriétés

Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, P) , et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

- $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

5.2. La variance - L'écart type

Définition

Soit X une V.A.

$$\begin{aligned}\text{La variance : } V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

$$\text{L'écart type : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Cas d'une V.A. discrète

Définition

Soit X une V.A. discrète définie sur (Ω, P) tq

$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $p_i = P(X = x_i)$. La variance de X est donnée par :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i^2 - (E(X))^2 \\ &= \sum_{i \in I} p_i \cdot (x_i - E(X))^2. \end{aligned}$$

Cas d'une V.A. continue

Définition

Soit X une V.A. continue $X : (\Omega, P) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par sa fonction densité f . La variance de X est donnée par :

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx. \end{aligned}$$

Exercice

Soit X la variable aléatoire définie par sa fonction densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ x & \text{si } x \in]0; 1[\\ -x + 2 & \text{si } x \in]1; 2[\end{cases}$$

- 1) Vérifier que f est une densité de probabilité.
- 2) Donner F la fonction de répartition.
- 3) Calculer $P(X < 1)$ et $P(X < 5)$.
- 4) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Lois usuelles

1) Lois de probabilités discrètes

Dans ce chapitre on va étudier les lois des probabilités les plus courantes, nous allons fournir ainsi, un catalogue de lois de probabilité souvent utiles en pratique pour la description d'un phénomène aléatoire donné. (Ajustement des séries statistiques, étude des prévisions ...)

1.1. Loi de Bernoulli

Définition

On réalise une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : le succès V , de probabilité p , et l'échec F de probabilité $q = 1 - p$. La V.A. :

$$X : \begin{cases} 1 & \text{si succès} \\ 0 & \text{si échec} \end{cases}$$

est appelée V.A. de Bernoulli.

x_i	0	1	
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p	1

Propriétés

- *Espérance mathématique* : $E(X) = p$
- *Variance* : $V(X) = p(1 - p)$

1.2. Loi Binomiale

C'est une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Définition

On suppose qu'on répète n fois, dans des conditions identiques, une expérience aléatoire dont l'issue se traduit par l'apparition ou non d'un événement A de probabilité p ,

Soit X le nombre d'apparitions de l'événement A parmi ces n expériences. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et notée : $\mathcal{B}(n; p)$.

Loi de probabilité

X suit une loi binomiale de paramètres n et p , c-à-d :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

- $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$
- $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} ; \quad \forall k \in X(\Omega)$

n : nb d'épreuves, k : nb de V (succès), p : probabilité du succès.

Propriétés

- *Espérance mathématique* : $E(X) = np$
- *Variance* : $V(X) = np(1 - p)$

Proposition

Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ sont deux V.A. indépendants, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

Exemple

Loi de probabilité du nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

$$P(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^4 ; \forall k \in \{0, \dots, 4\}$$

$$P(X = 0) = \dots ; \quad P(X = 1) = \dots ; \quad P(X = 2) = \dots ;$$

$$P(X = 3) = \dots ; \quad P(X = 4) = \dots .$$

Exercice

Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne à chaque emploi est de 0,01. La machine doit être utilisée 100 fois.

Soit X = nbre de pannes obtenues après 100 utilisations.

- 1) Quelle est la loi de X ? Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geq 4)$.*
- 2) On estime le coût d'une réparation à 500 Dh. Soit la V.A. Y représentant la dépense pour les réparations après 100 utilisations. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.*

1.3. Loi de Poisson (loi des phénomènes rares)

Dans de nombreuses situations, on s'intéresse au comptage d'objets possédant un caractère rare dans un grand ensemble : bactéries, virus, individus porteurs de gènes particulier ... etc. On utilise souvent la loi de Poisson pour modéliser ces situations.

On la rencontre aussi dans des phénomènes de file d'attente à arrivées indépendantes, c'est la loi du nombre d'individus qui arrivent pendant un laps de temps donné. C'est aussi la loi du nombre d'appels téléphoniques pendant un intervalle de temps.

C-à-d suppose que $p \approx 0$ et que $n \longrightarrow +\infty$ tq $np \longrightarrow \lambda$. (Dans la pratique : $n > 50$ et $p < 0,1$).

Définition

X est V.A de Poisson de paramètre réel $\lambda > 0$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notation : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Propriétés

- *Espérance mathématique* : $E(X) = \lambda$
- *Variance* : $V(X) = \lambda$.

Proposition

Si X_1 et X_2 sont 2 variables de poisson $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ indépendantes alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exemple

Lors d'un sondage portant sur un grand nombre de personnes, on sait que 2% des personnes interrogées acceptent de ne pas rester anonymes. Sachant que l'un des sondeurs a interrogé 250 personnes (en les choisissant de manière indépendante), calculer la probabilité que :

- a) ces 250 personnes souhaitent rester anonymes.*
- b) 3 personnes acceptent de ne pas rester anonymes.*
- c) plus de 10 personnes acceptent de ne pas rester anonymes.*

2) Lois de probabilités continues

2.1. Loi uniforme

La loi uniforme sur un intervalle est la loi des "tirages au hasard" dans cet intervalle.

Définition

Sur l'intervalle $[a; b]$ la loi uniforme a pour densité :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Propriétés

- *Espérance mathématique* : $E(X) = \frac{a+b}{2}$.
- *Variance* : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2.2. Loi normale (loi de Gauss-Laplace)

Cette loi joue un rôle fondamental en probabilités et statistique. De nombreux phénomènes réels peuvent être décrits par cette loi.

Son rôle principal provient en réalité de ce qu'elle apparaît comme loi limite de certaines caractéristiques liées à un échantillon de grande taille.

Définition

La fonction densité d'une V.A normale de paramètres μ et σ , est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t-\mu}{2\sigma^2}}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Notation : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Propriétés

- *Espérance mathématique* : $E(X) = \mu$
- *Variance* : $V(X) = \sigma^2$.

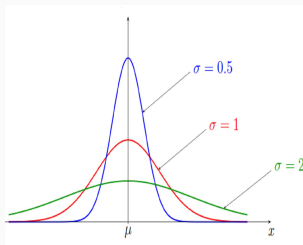
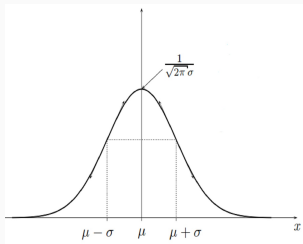
Proposition

Si X_1 et X_2 sont deux variables normales : $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ indépendantes alors

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2).$$

Propriétés

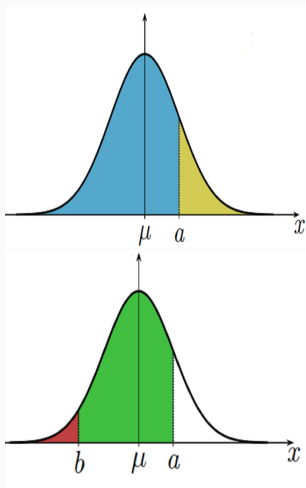
- $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}};$
- $f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R},$
- f est symétrique p/r à l'axe d'équ. $x = \mu$; c-à-d
 $f(\mu + a) = f(\mu - a)$
 $\forall a \in \mathbb{R}.$
- f possède un maximum unique en μ , égal à $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$
- f possède deux points d'inflexion, en $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma.$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$



$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$$

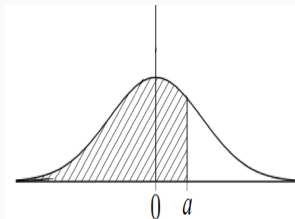
$$\begin{aligned} P(b \leq X \leq a) &= \int_b^a f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^a f(t) dt - \int_{-\infty}^b f(t) dt \\ &= P(X \leq a) - P(X \leq b) \end{aligned}$$



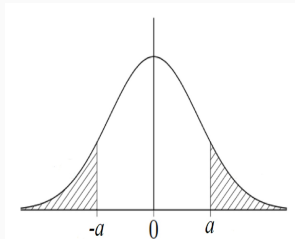
2.2.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$$



$$P(X \leq -a) = P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$



2.2.2 Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$

Proposition

Soit X une V.A. telque $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors la V.A.

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, c-à-d à partir de n'importe quelle loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on peut se ramener à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Remarque

réciroquement : si Z est une V.A. telque $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $X = \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ c-à-d à partir de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ on peut construire n'importe quelle loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exemples

Soit X une V.A. telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$; alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,684$$

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) = 0,95$$

$$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) = 0,99$$

3) Tableaux des lois de probabilité usuelles

Lois discrètes

Nom	Loi de probabilité	E(X)	V(X)
Bernoulli $\mathcal{B}(1; p)$	$P(X = 1) = p;$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n; p)$	$P(X = k) =$ $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k};$ $k \in \{0, \dots, n\}$	np	$np(1 - p)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ

Lois continues

Nom	Loi de probabilité	E(X)	V(X)
Uniforme sur $[a; b]$	$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t-\mu}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

4) Approximation des lois de probabilité usuelles

Loi de Proba.	Aproximation	Conditions
Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$	Loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$	$n > 50$ et $np < 5$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	Loi normale $\mathcal{N}(\lambda; \sqrt{\lambda})$	$\lambda > 20$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$	Loi normale $\mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$	$np(1-p) > 10$

Exemple

Le président d'un bureau de vote est né un 1er avril. Il décide de noter le nombre de personnes ayant leur anniversaire le même jour que lui parmi les 500 premiers votants.

La situation peut être assimilée à une suite de 500 épreuves indépendantes répétées avec une probabilité $p = \frac{1}{365}$ de succès.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. X suit une loi $\mathcal{B}(500; p)$, ainsi :

$$P(X = k) = C_{500}^k p^k (1 - p)^{500-k}$$

Comme $500 > 50$ et $np = \frac{500}{365} = 1,37 < 5$, ce qui permet l'approximation par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = \frac{500}{365}$.

Voici une comparaison numérique pour les petites valeurs de k

k	0	1	2	3	4	5
<i>Bin</i>	0,2537	0,3484	0,2388	0,1089	0,0372	0,0101
$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	0,2541	0,3481	0,2385	0,1089	0,0373	0,0102

Exemple

On lance 180 fois un dé à jouer et on note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparition du 6. En utilisant l'approximation normale calculer au millièm les probabilités suivantes : $P(X \leq 20)$; et $P(X > 40)$

Cette V.A. suit la loi binomiale

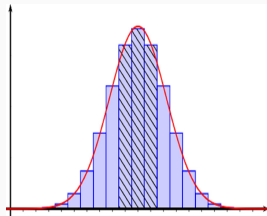
$\mathcal{B}(180; \frac{1}{6})$. On a :

$$np(1-p) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25 > 10;$$

alors cette loi peut être appoximée par la loi normale $\mathcal{N}(30; 5)$.

$$P(X \leq 20) = \dots = 0,029$$

$$P(X > 40) = \dots = 0,018$$

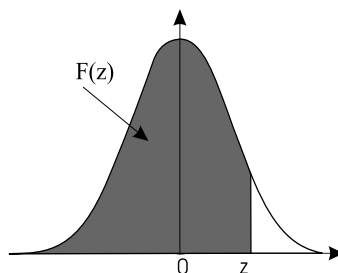


5) Tableau des valeurs de la loi normale

TABLE STATISTIQUE

Loi normale

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952
z	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991	0,999995	0,999997	0,999998	0,999999	0,999999	1,000000

Nota. La table donne F(z) pour z positif. Pour z négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. Exemple : $F(-1,37) = 1 - F(1,37) = 1 - 0,9147 = 0,0853$.