CHAPITRE 2

Phénomènes de Résonance
Puissance en Régime Sinusoïdal

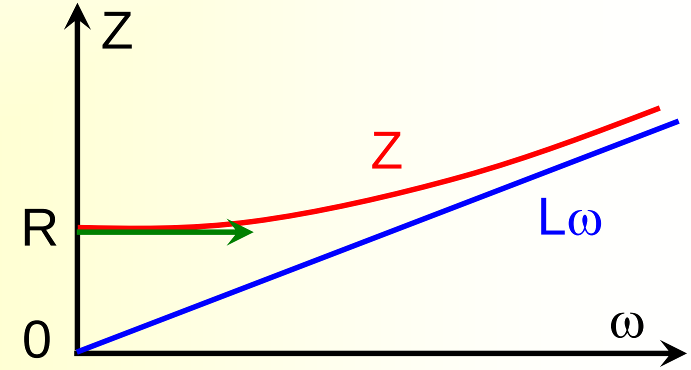
I- ETUDE DE Z(ω)

1) Résistance pure

$\bar{Z} = R$ impédance réelle $\Rightarrow$ ne dépend pas de ω

2) Circuit RL

$\bar{Z} = R + jL\omega \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$



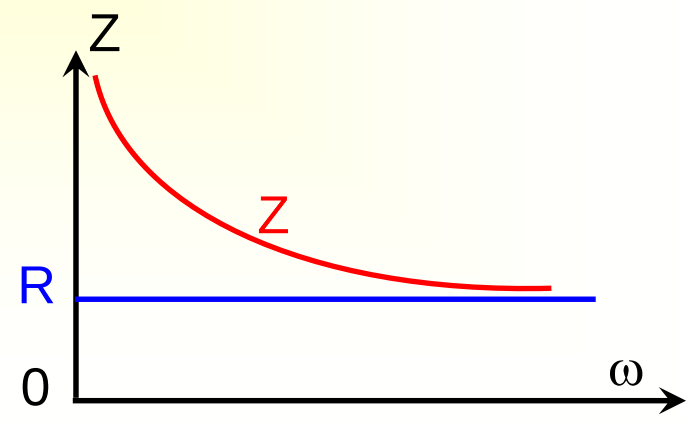
➘ Hautes fréquences (HF):

$L\omega \nearrow \Rightarrow I = \frac{V}{Z} \to 0$

$\Rightarrow$ le circuit agit comme un coupe-circuit en HF

3) Circuit RC

$\bar{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$



$\rightarrow \omega = 0 \Rightarrow$ Z infinie

$\Rightarrow$ le condensateur s'oppose au passage du courant continu

$\rightarrow \omega \nearrow \Rightarrow$ Z $\searrow$

$\Rightarrow$ les condensateurs sont plus facilement traversés par des courants HF que des courants BF

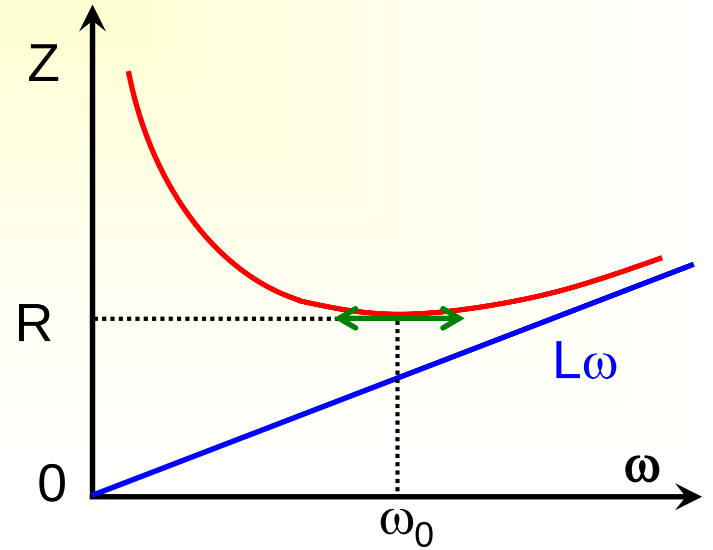
4) Circuit RLC série

$$\bar{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$\rightarrow$ minimum pour $Z = R$

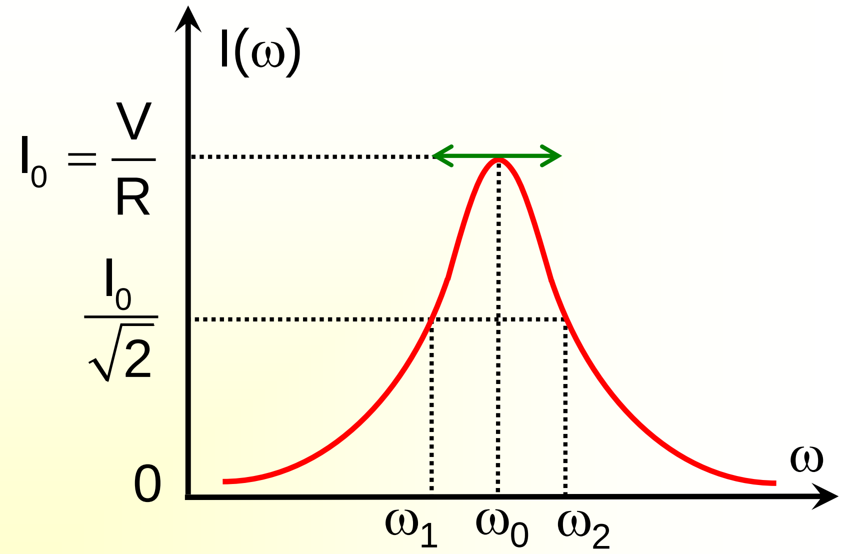
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

ω_0 = pulsation propre du circuit



→ Résonance d'intensité

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$



* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = R}$

- v(t) et i(t) sont en phase
- I est maximum $\Rightarrow$ il y a résonance $\left[I_{max} = I_0 = \frac{V}{R}\right]$
- largeur de la courbe de résonance:

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ = bande passante du circuit

avec $I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ (effet Joule divisé par 2)

→ Calcul de ω_1 et ω_2:

$$I(\omega) = \frac{V}{Z} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V/R}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad Z = R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

soit $\quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow$ 2 racines réelles positives:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{2\,L^2} + \omega_0^2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{2\,L^2} + \omega_0^2}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}}$$

bande passante du circuit

→ Facteur de qualité:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R}}$$

* Résonance "floue":

R_1 élevé $\Rightarrow$ $\Delta\omega$ grand

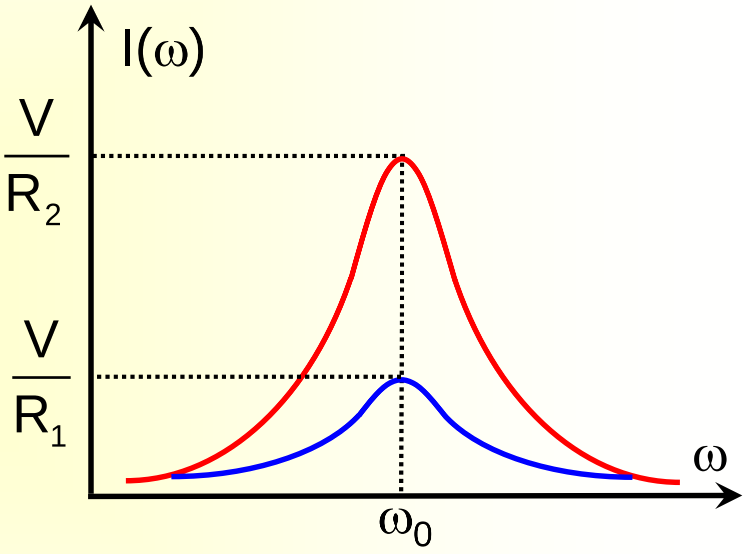
$\Rightarrow$ I_{max} faible

* Résonance "aigue":

R_2 faible $\Rightarrow$ $\Delta\omega$ petit

$\Rightarrow$ I_{max} élevé

$\Rightarrow$ Q grand



➘ Si Q est important, la bande passante est petite et l’intensité élevée

→ Surtension à la résonance:

Tensions aux bornes des éléments du circuit série RLC:

$$\bar{V}_R = R\,\bar{I} \quad ; \quad \bar{V}_L = jL\omega\,\bar{I} \quad ; \quad \bar{V}_C = \frac{1}{jC\omega}\bar{I} \qquad \text{avec} \quad \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{\bar{Z}}}$$

A la résonance, $\omega = \omega_0$ et $\bar{Z} = R$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{V}_L}{\bar{V}} = j\frac{L\omega_0}{R} = jQ = Q\,e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{\bar{V}_C}{\bar{V}} = \frac{1}{jRC\omega_0} = -jQ = Q\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

d'où $\boxed{V_L = V_C = QV}$

➘ A la résonance, les tensions aux bornes de la self et du condensateur sont en opposition de phase et de valeur maximum égale.

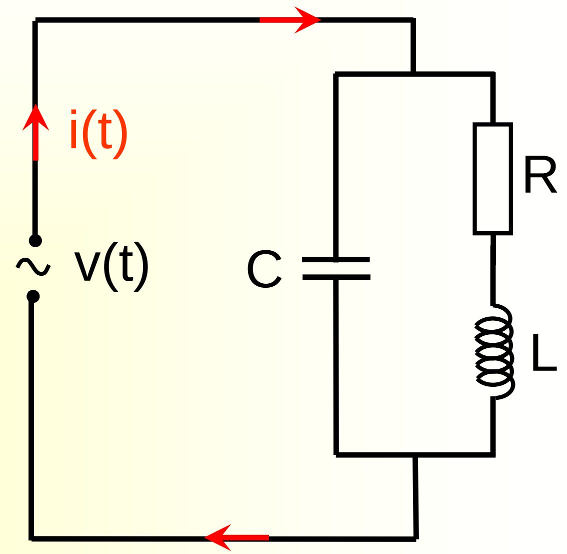
➘ Si R est faible, Q peut devenir très grand:

$\Rightarrow V_L \gg V$ et $V_C \gg V$ => surtension

$Q =$ coefficient de surtension

5) Circuit RLC parallèle ou circuit antirésonant (circuit bouchon)

$$\frac{1}{\bar{\bar{Z}}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}{R + jL\omega}$$



L'impédance réelle est alors:

$$\boxed{Z = \left|\bar{\bar{Z}}\right| = \sqrt{\frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}}$$

→ **Résonance parallèle:**

Z est maximum pour $LC\omega^2 = 1$ c'-à-d pour $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{Z}}(\omega_0) = \frac{R + jL\omega_0}{jRC\omega_0} = \frac{R(1 + jQ)}{jRC\omega_0} = \frac{1 + jQ}{j\dfrac{1}{L\omega_0}} = L\omega_0(Q - j)$$

$$\left[Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{facteur de qualité du circuit} \right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z(\omega_0) = L\omega_0\sqrt{Q^2 + 1}}$$

En général $Q \gg 1$

alors $Z(\omega_0) \approx L\omega_0 Q = Q^2 R \gg R$

- A la résonance, le circuit est équivalent à une résistance très grande par rapport à R.

L'intensité dans le circuit est alors:

$$\boxed{I(\omega_0) = \frac{V}{Z(\omega_0)} = \frac{V}{Q^2 R} \rightarrow 0}$$

- Pratiquement, ce circuit arrêtera le courant de pulsation ω_0 $\Rightarrow$ circuit « bouchon » ou antirésonant.

II- PUISSANCE en REGIME SINUSOIDAL

1) Définitions

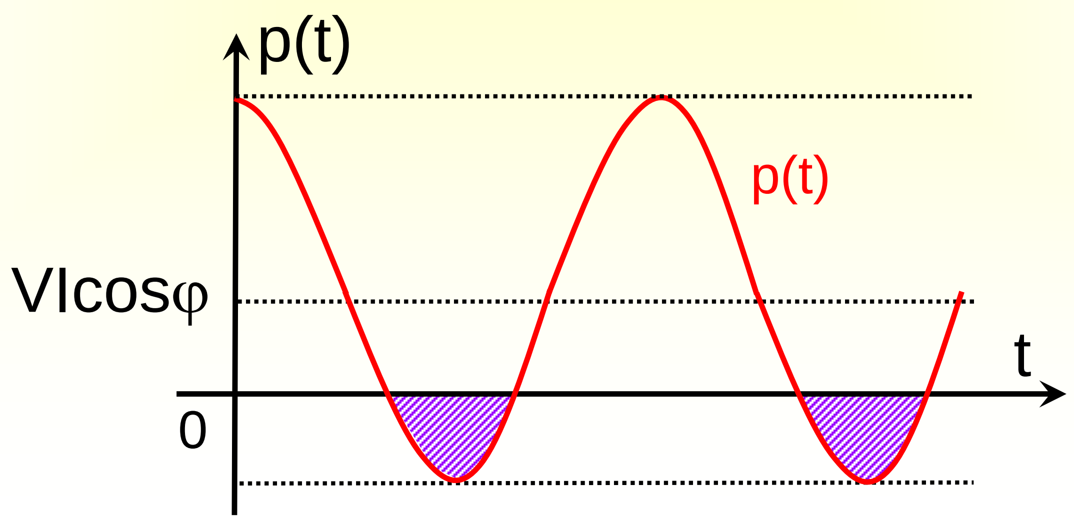
→ Puissance instantanée p(t):

$$v(t) = V_m \cos \omega t = V\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\underset{[\text{Watt}]}{p(t)} = v(t) \cdot i(t) = VI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right]}$$

* p(t) oscille autour de la valeur $VI\cos\varphi$
* $p(t) < 0 \Rightarrow$ le circuit rend de l'énergie à la source



→ Puissance active (ou réelle) P_a :

C'est la valeur moyenne de p(t)

$$P_a = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T VI\cos\varphi \, dt + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T VI\cos(2\omega t + \varphi)\, dt}_{=0}$$

$$\boxed{\underset{[\text{Watt}]}{P_a} = VI\cos\varphi}$$

* $\cos\varphi$ = facteur de puissance

* Bobine pure et condensateur: $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0$

$\Rightarrow$ ces éléments ne consomment pas de puissance active.
Seule une résistance en consomme: effet Joule

→ Puissance apparente S :

$$\boxed{\underset{[\text{V.A}]}{S} = V \cdot I}$$

→ Puissance complexe P_c:

$$\boxed{\bar{P}_C = \frac{1}{2}\bar{V}\cdot\bar{I}^*}$$

avec $\bar{V} = V_m$, $\bar{I}^* = I_m\ e^{-j\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \bar{P}_C = \frac{1}{2}V_m I_m\ e^{-j\varphi} = VI\ e^{-j\varphi} = \underbrace{VI\cdot\cos\varphi}_{\text{puissance active}} - j\ \underbrace{VI\cdot\sin\varphi}_{\text{puissance réactive}}$$

$$\boxed{\bar{P}_C = P_a + jP_r}$$

avec $\boxed{\underset{[VAR]}{P_r} = -VI\cdot\sin\varphi}$ puissance réactive

(VAR = Volt.Ampère.Réactifs)

➘ La puissance complexe $\bar{P}_C$ a pour partie réelle la puissance active et pour partie imaginaire la puissance réactive

* module $\left|\bar{P}_C\right| = \sqrt{P_a^2 + P_r^2} = V\cdot I = S$ puissance apparente
* une self consomme une puissance réactive : $P_r = L\omega I^2$
* un condensateur produit une puissance réactive : $P_r = -\dfrac{I^2}{C\omega}$

2) Théorème de Boucherot

Il s'applique aux associations série ou parallèle de dipôles élémentaires:

- Les puissances actives et réactives absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque élément

$$\overline{P}_C = P_a + jP_r = \sum \overline{P}_{C_i} = \sum P_{a_i} + j\sum P_{r_i}$$

3) Importance du facteur de puissance cosφ

Soit V la tension aux bornes d'une installation industrielle ou domestique. La puissance consommée est:

$$P = VI\cos\varphi \;\Rightarrow\; I = \frac{P}{V\cos\varphi}$$

$\Rightarrow$ l'énergie perdue par effet Joule dans la ligne de transport de résistance R est égale à:

$$P_{ligne} = R\,I^2 = \frac{R\,P^2}{V^2\cos\varphi^2} \Rightarrow$$ si $\cos\varphi$ faible, P_{ligne} grande

$\Rightarrow$ on impose $\cos\varphi \geq 0{,}9$ sous peine d'amende

➔ Comment améliorer le $\cos\varphi$?

Soit une installation d'impédance $\bar{Z} = R + jX$

Plaçons un condensateur en //. L'impédance équivalente est:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z} // \bar{Z}_C = \frac{R + jX}{\left(1 - XC\omega\right) + jRC\omega}$$

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{R + j\left(X - X^2C\omega - R^2C\omega\right)}{D}$$

donc: $\quad \mathrm{tg}\ \varphi = \dfrac{X - X^2C\omega - R^2C\omega}{R}$

on veut $\quad \cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$

$$\Rightarrow \quad X - X^2C\omega - R^2C\omega = 0$$

d'où $\quad \boxed{C = \dfrac{X}{Z^2\omega}}$

- Pour améliorer le $\cos\varphi$, il suffit de placer un condensateur en dérivation par rapport à l'installation