UH1	**FPK**	**Filières SMA-SMI**
2ème Année, S_3	**Probabilités-Statistiques**	**2017 - 2018**
Contrôle n° 1	**Date : 13 décembre 2017**	**Durée : 2h**

---

① Aucun document n'est autorisé.
② L'utilisation des téléphones portables est strictement interdite.
③ La qualité et la clarté de la rédaction et de l'argumentation seront prises en compte dans la notation.
④ Le contrôle est constitué de quatre exercices en deux pages.
⑤ La note attribuée pour chaque exercice est approximative(± 1).

Exercice 1 : *Questions de cours/6 points*

1) Pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel S, on note

$$\Sigma_S^p = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^{p} n_i = S\}, \quad S \in \mathbb{N};$$
$$\overset{*}{\Sigma}{}_S^p = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^{*p}, \sum_{i=1}^{p} n_i = S\}, \quad S \geqslant p.$$

a) Justifier brièvement que $\mathrm{card}(\Sigma_S^p) = C_{S+p-1}^{p-1}$.

b) Montrer que $\mathrm{card}(\overset{*}{\Sigma}{}_S^p) = C_{S-1}^{p-1}$ (on pourra utiliser que deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection entre eux).

2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. définies sur le même espace de probabilité , telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ où $0 < p_n < 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} np_n = \lambda \text{ avec } \lambda > 0 \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\longrightarrow+\infty} P[X_n = k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

3) Soit X une variables aléatoire discrète suivant la loi de géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$) c'est-à-dire que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \;\; P[X = k] = q^{k-1}p$ où $q = 1 - p$.

a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P[X = k] = 1$.

b) Montrer que l'espérance et la variance de X sont respectivement égales à $\dfrac{1}{p}, \quad \dfrac{q}{p^2}$, (On pourra utiliser les résultats sur les dérivations des séries).

Exercice 2 : */ 5 points*

1)

a) Une personne dispose de 12 000 dirhams à investir sur trois placements potentiels. Chaque mise est un nombre entier de milliers de dirhams. Quel est le nombre de stratégies à disposition si cette personne décide d'investir la totalité des 12 000 dirhams ?

b) Qu'en est-il si on admet qu'elle peut aussi investir une partie seulement de la somme ?

2) On jette n dés équilibrés discernables($n \geqslant 2$). Montrer que l'événement : "la somme des points marqués par les trois dés est paire" est de probabilité $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 : / *5 points*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p quelconque dans $]0, 1[$, c'est-à-dire que chacune des deux variables est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ P[X = k] = P[Y = k] = q^{k-1}p$ où $q = 1 - p$.

On définit deux variables aléatoires U et V par : $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1) Montrer que $P[U = k] = (q^2)^{k-1}(1 - q^2), \forall \ k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est alors la loi de la v.a.r. U ?

<u>Indication</u> : Vérifier d'abord que $P[U = k] = P[U \geqslant k] - P[U \geqslant k + 1]$, $\forall \ k \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que $P[V = k] = pq^{k-1}(2 - q^{k-1} - q^k), \ \forall \ k \ \in \mathbb{N}^*$.

<u>Indication</u> : s'inspirer de l'indication de la question précédente pour le maximum.

3) Calculer, en utilisant les propriétés suivantes $U + V = X + Y$ et $UV = XY$, l'espérance mathématique et la variance de la v.a. V (voir la **N.B.** ci-dessous).

N.B. : On rappelle que si Z est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre a, $a \in]0, 1[$, alors $E(Z) = \dfrac{1}{a}$, $E(Z^2) = \dfrac{2 - a}{a^2}$, $V(Z) = \dfrac{1 - a}{a^2}$.

Exercice 4 : / *4 points*

Soient X et Z deux variables à valeurs entières $\geqslant 0$. On suppose que :

1. Z est une variable de Poisson de paramètre λ.
2. $X \leqslant Z$ et
$$\forall n \geqslant 0, \ \forall k \leqslant n, \ P\{X = k | Z = n\} = C_n^k p^k (1 - p)^{(n-k)}$$
(autrement dit : la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$ est binomiale de paramètres n et p, pour un $0 < p < 1$ fixé).

Prouver que X et $Y = Z - X$ sont deux variables de Poisson indépendantes, et donner leurs paramètres respectifs.