Feuille de T.D. n° 1

Exercice 1.1

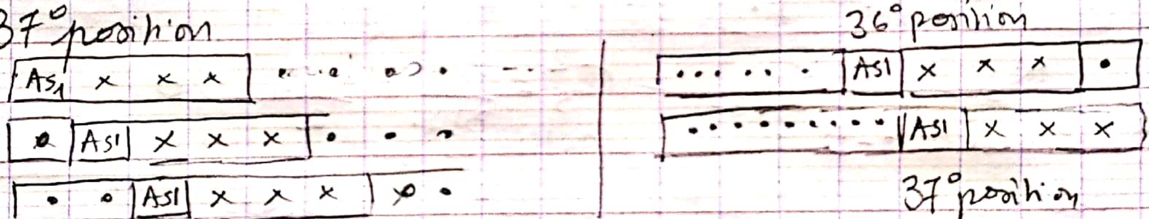
1) Le jeu est constitué de 40 cartes distinctes, le nombre de jeux possibles est le nombre de permutations des 40 cartes.
Il s'agit donc de $P_{40} = A_{40}^{40} = 40!$

2) Dans cette question, il faut tenir compte de trois arguments : les quatre As, les 36 cartes restantes (différentes des As) et la position des 4 as (qui sera déterminée si on connaît la position du premier As).

*1 : Pour les 4 As, on a $N_1 = P_4 = A_4^4 = 4!$

*2 : Pour les 36 autres, on a $N_2 = P_{36} = A_{36}^{36} = 36!$

*3 : La position du premier As (parmi les quatre) est soit la $1^{ère}$ position, ou 2° position, ... ou finalement 37° position



Donc $N_3 = 37$ (le premier As a $37 = (40-4)+1$ positions possibles)

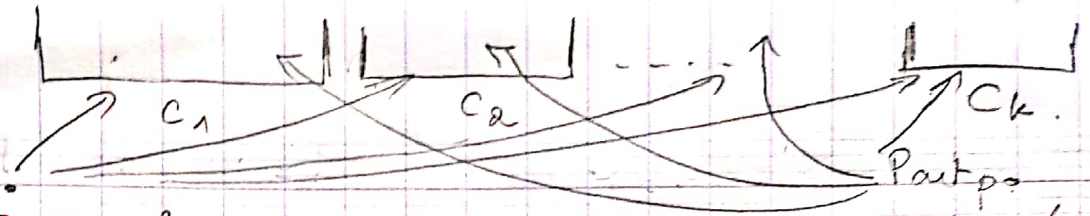
Finalement, d'après le principe de multiplication, on a $N = N_1 \times N_2 \times N_3 = 4! \times 36! \times \underline{\underline{37}}$

Exercice 1.2

1. **Le modèle M-B :** Les particules sont distinguables, on peut donc les ordonner et on peut mettre dans une cellule un nombre illimité de particules. Il y a p particules et k cellules.
La première particule a k choix pour être placée.
La 2° (jusqu'à la p ième) auront aussi k choix pour être placées.
Finalement, par le principe de multiplication, on aura

$$N_{M-B} = \underbrace{k \times k \times \dots \times k}_{p \text{ fois}} = k^p$$

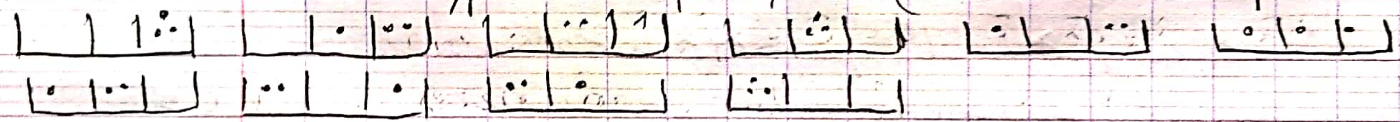
M.B



2. **Modèle B-E** : Les particules ne sont plus distinguables (donc sont identiques et on ne peut plus les ordonner). Elles sont non distinguables et on peut mettre dans une cellule un nombre illimité de particules. On va donc s'intéresser aux nombres de particules par cellule. Chaque cellule C_i aura un nombre de particules n_i avec $1 \leq i \leq k$. Les n_i sont des entiers positifs ou nuls (quelques cellules peuvent être éventuellement vides) et la somme des n_i est le nombre total de particules p. Le nombre cherché est donc card Σ_S^j où $S = p$ et $j = k$ (voir le corollaire 1.21 du cours, page 5), d'où

$$N_{B-E} = \text{card}\, \Sigma_p^k = C_{p+k-1}^{k-1}$$

Pour illustrer ce cas, prenons $p=3, k=3$ (3 cellules et 3 particules)



$$N_{B-E} = C_{3+3-1}^{3-1} = C_5^2 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

3. **Modèle F-D** : Les particules sont non distinguables avec des cellules qui sont soit vides soit contiennent une seule particule.

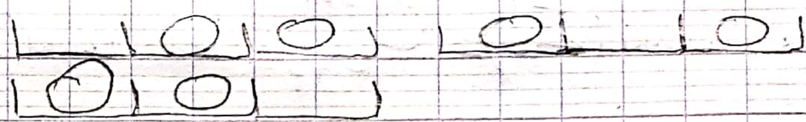
- Si $p > k$ il serait impossible de placer p particules dans k cellules car il y a plus de particules que de cellules.
- Si $p = k$, il y a une seule façon de placer p particules dans les k cellules car il y a autant de particules que de cellules. (aucune cellule vide et toutes les cellules contiennent une particule)
- Si $p < k$, il y aura p cellules contenant une particule chacune et les $p-k$ vides, il suffit donc de choisir p cellules distinctes non ordonnées parmi k (qui seront pleines) automatiques les autres seront vides. En conclusion

$$N_{F-D} = C_k^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > k \\ 1 & \text{si } p = k \\ \dfrac{k!}{p!\,(k-p)!} & \text{si } p < k \end{cases}$$

Illustrations.

$p=k=3$

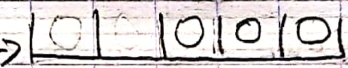
$p=2,\ k=3$



$p=3,\ k=2$

impossible.

$p=3,\ k=5$



1,2 vides — 2,3 vides — 3,4 vides — 4,5 vides.
1,3 vides — 2,4 vides — 3,5 vides
1,4 vides — 2,5 vides
1,5 vides

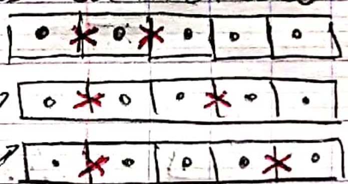
Exercice 1.3

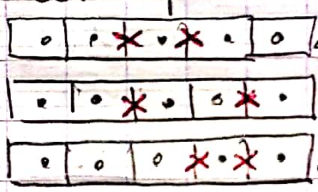
Pour comprendre la nature de $\overset{*}{\Sigma}{}_S^p$, commençons par l'illustrer lorsque $S=5$, $p=3$.

$\overset{*}{\Sigma}{}_S^p = \{(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,1)\}$.

Utilisons la méthode de correspondance d'un triplet par un tableau

(1,1,3)
(1,2,2)
(1,3,1)

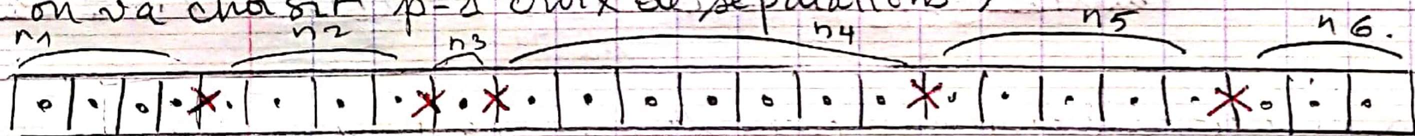




(2,1,2)
(2,2,1)
(3,1,1).

Dans ce cas particulier, il suffit de considérer un tableau à cinq (5) cases et de choisir $2=3-1$ croix de séparations parmi les $4=5-1$ séparations internes (on élimine la 1ère séparation et la dernière pour ne pas avoir de composante nulle)

1) Si on revient au cas général, il suffit (idée similaire à celle qui précède) de considérer un tableau de S cases qui contient $S-1$ séparations internes parmi lesquelles on va choisir $p-1$ croix de séparations,



$(4,4,1,7,5,3) \in \overset{*}{\Sigma}{}_{S=24}^{p=6}$

En conclusion, en général, on a

$\text{card}\ \overset{*}{\Sigma}{}_S^p = C_{S-1}^{p-1}$ "On choisit $p-1$ croix de séparations parmi les $S-1$ séparations internes possibles"

2) Rappels $card(\Sigma_s^p) = C_{s+p-1}^{p-1}$ et $card(\overset{*}{\Sigma}{}_s^p) = C_{s-1}^{p-1}$ lorsque $p \leq s$

. Si $10 = s$ tableaux noirs doivent être affectés à $4 = p$ écoles avec implicitement l'hypothèse que quelques écoles ne vont pas recevoir de tableaux dont elles n'ont pas besoin. Chaque écoles parmi les quatre aura n_i tableaux avec $1 \leq i \leq 4$. les n_i sont des entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à 10. Le nombre de répartitions possibles est

$$card\ \Sigma_{s=10}^{p=4} = C_{10+3}^{3} = C_{13}^{3} = \frac{13!}{10!\,3!} = \frac{11 \times \cancel{12}^{2} \times 13}{\cancel{2} \times \cancel{3}} = 286$$

. Si chaque école doit recevoir au moins un tableau, alors le nombre cherché sera, cette fois-ci, $card\ \overset{*}{\Sigma}{}_{s=10}^{p=4}$

(car les $n_i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq 4$ et $\sum_{i=1}^{4} n_i = 10$)

Le nombre cherché est $C_9^3 = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{7 \times \cancel{8}^{4} \times \cancel{9}^{3}}{\cancel{2} \times \cancel{3}} = 84$

Exercice 1.4 A faire par identification (le chercher tout(e) seul(e) ou sur le net !)

Exercice 1.5

Si on note n_i le nombre de milliers de Dirhams à investir sur l'investissement n° i, $1 \leq i \leq 3$.

On cherche donc des triplets (n_1, n_2, n_3) tels que $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 3$ et $\sum_{i=1}^{3} n_i = 12$. Le nombre de stratégies est donc :

$$card(\Sigma_{s=12}^{p=3}) = C_{14}^{2} = \frac{14!}{12!\,2!} = \frac{14 \times 13}{2} = 7 \times 13 = 91$$

Si on investit seulement une partie, on aura n_4 la partie non investie donc on cherche des quadruplets (n_1, n_2, n_3, n_4) tels que $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 4$ et $\sum_{i=1}^{4} n_i = 12$, le nombre de stratégies est :

$$card(\Sigma_{s=12}^{p=4}) = C_{15}^{3} = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{13 \times \cancel{14}^{7} \times \cancel{15}^{5}}{\cancel{2} \times \cancel{3}} = 455.$$