Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°3: corrigé
Limite et Continuité

Exercice 1.
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}, \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right), \quad (e)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x},$$

***Corrigé 1*.**

(a) On écrit:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

(b) On a au voisinage de $+\infty$

$$0 \le \left|\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\right| \le \frac{|x|}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, donc par le principe d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$$

(c) Il suffit d'écrire

$$\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{x\ln(\ln x)}} = e^{\left((\ln x)^2 - x\ln(\ln x)\right)} = e^{x\left(\frac{(\ln x)^2}{x} - \ln(\ln x)\right)}$$

Or

$$\frac{(\ln x)^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ et \ \ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = 0$$

(d) On sait que

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$$

Comme $\frac{1}{x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$ alors par le principe d'encadrement,

$$\lim_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

(e) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) \leq 1 \Longrightarrow x - \sin(x) \geq x - 1 \Longrightarrow e^{x-\sin x} \geq e^{x-1}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$ donc par le principe d'encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$$

Exercice 2.
Etudier la continuité des fonctions suivantes:

$$f : x \mapsto (x - E(x))^2, \qquad g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

***Corrigé* 2.**

- Soit n un nombre entier et $x \in [n, n+1[, \ \forall n$

$$f(x) = (x-n)^2$$

  f continue sur tout intervalle de cette forme, en particulier, elle est continue à droite en n et $f(n) = 0$.
  Etudions la continuité à gauche au point n

$$\forall x \in [n-1, n[; \quad f(x) = (x-n+1)^2$$

$$\lim_{x\to n-} f(x) = 1 \neq f(n)$$

  la fonction n'est pas continue à gauche au point n donc n'est pas continue en ce point. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
- Par absurde, On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ telle que f est continue en x. On sait
  - $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(b_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x$

  Comme f est continue en x, alors

$$\left.\begin{array}{l} 1 = f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \\ \\ 0 = f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \end{array}\right. \Longrightarrow 1 = f(x) = 0$$

  Ce qui est absurde.

Exercice 3.
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1-x}$$

Déterminer où elle est définie, où elle est continue, et la prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.

***Corrigé* 3.**

- On a
$$\begin{array}{ll} x \longmapsto \sqrt{x} & \text{définie et continue sur } \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \cos(x) & \text{définie et continue sur } \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} & \text{définie et continue sur } \mathbb{R}^* \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} & \text{définie et continue sur } \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{array}$$
Par opérations, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ i.e
$$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$$
- Au voisinage de 0: On a
$$\underbrace{-\sqrt{x}}_{x\to 0} \leq \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{\sqrt{x}}_{x\to 0} \Longrightarrow \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. On déduit que f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement est la fonction
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad \mathbb{R}^{+*}\setminus\{1\}, \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
- Au voisinage de 1: On a
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \pm\infty$$
donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$. On déduit que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Corrigé 4. On veut montrer que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$
On a
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_1 > 0 \textit{ tel que } x > \delta_1 \Rightarrow f(x) > A$$
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta_2 < 0 \textit{ tel que } x < \delta_2 \Rightarrow f(x) > A$$
Or f est continue sur $[\delta_2, \delta_1]$ donc d'après le théorème de maximum, elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier,
$$\exists x_0 \in [\delta_2, \delta_1],\ \forall x \in [\delta_2, \delta_1],\ f(x) \geq f(x_0)$$
Comme $0 \in [\delta_2, \delta_1]$, il suffit de choisir $A = f(0) \geq f(x_0)$. Alors si $x > \delta_1$ où $x < \delta_2$, on aura
$$f(x) > A = f(0) \geq f(x_0)$$
On conclut que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(x_0)$$

Exercice 5.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que
$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Corrigé 5. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

On a g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de plus

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right), \quad et \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -g(0)$$

donc $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, d'aprés **T.V.I** il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c-à-d

$$f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

Exercice 6.
Soit f définie sur $\mathrm{I} = [a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$ contractante de rapport k. On choisit un point quelconque $a_0 \in \mathrm{I}$ et on définit la suite (a_n) par

$$a_1 = f(a_0); \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

(1) Montrer que $(a_n)_n$ est de Cauchy et en déduire qu'elle est convergente.
(2) Montrer que la limite ℓ de $(a_n)_n$ est l'unique point fixe de f c-à-d $\ell = f(\ell)$

Corrigé 6.

(1) On commence par écrire:

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq k|a_n - a_{n-1}| \leq k(k|a_{n-1} - a_{n-2}|) \leq \ldots \leq k^n|a_1 - a_0|$$

Soit $n, p \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} + \ldots + a_{n+1} - a_n| \\ &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq (k^{n+p-1} + \ldots + k^n)|a_1 - a_0| \\ &= k^n\left(\frac{1 - k^p}{1 - k}\right)|a_1 - a_0| \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n\left(\frac{1 - k^p}{1 - k}\right)|a_1 - a_0| = 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$$

d'où $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, on déduit qu'elle est convergente.

(2) On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$, comme f est contractante alors

$$|f(a_n) - f(\ell)| \leq k|a_n - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell)$$

d'autre part, en passant à la limité dans l'équation $a_{n+1} = f(a_n)$ on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$$

par unicité de la limite, on conclut que

$$\ell = f(\ell)$$

c-à-d ℓ est un point fixe de f. Pour montrer l'unicité, on suppose par absurde que f admet un autre point fixe $\ell' \neq \ell$, d'où

$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'| \quad car\ k < 1$$

ce qui donne $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$, ceci étant absurde, on conclut que $\ell = \ell'$ d'où l'inicité.

Exercice 7.(*Extrait d'examen SN* 2017/2018)
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + 1}$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites sur ses bornes.
(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donner son prolongement en 0.
(3) Montrer directement que f est strictement monotone sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$. (sans utiliser la dérivée).
(4) En déduire que f est bijective de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera puis déterminer f^{-1}.

Corrigé 7.

(1) Le domaine de définition de f est donné par

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 0, \ln(x) \neq -1\} = \left\{x \in \mathbb{R}/x > 0, x \neq \frac{1}{e}\right\} = \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

Pour calculer les limites sur les bornes de D_f, on remarque d'abord que

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}}$$

donc

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^+} \ln(x) = -1^+ \Longrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} \ln(x) = -1^- \Longrightarrow \lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = +\infty$

(2) Cpmme $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement en 0 est la fonction définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{\frac{1}{e}\} \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

(3) On a

- $x \longrightarrow \ln(x)$ est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ donc par composition $x \longrightarrow \frac{1}{\ln(x)}$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$
- de plus $x \longrightarrow 1 + x$ est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ alors $x \longrightarrow 1 + \frac{1}{\ln(x)}$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$
- finalement on obtient, toujours par con position, que

$$x \longrightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} \quad \text{est strictement croissante sur } \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

(4) Comme f est continue strictement monotone sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ alors, d'après le théorème de la bijection, f est bijective de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur $J = f\left(\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[\right) =]-\infty, 1[$. De plus,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} \Longleftrightarrow x = e^{\frac{y}{1-y}}$$

d'où $f^{-1}(y) = e^{\frac{y}{1-y}}$.

Exercice 8.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose

$$f(x) = d(x, A) = \inf\{|z - x|, z \in A\}$$

Montrer que f est Lipschitzienne.

Corrigé 8. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$. Par définition on a

$$f(x) \leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in A$, $\qquad |z - y| \geq f(x) - |y - x|$
c-à-d $f(x) - |y - x|$ est un minorant de $\{|z - y|,\ z \in A\}$, alors

$$f(x) - |y - x| \leq \inf\{|z - y|, z \in A\} = f(y)$$

ceci donne

$$f(x) - f(y) \leq |y - x|$$

En échangeant les rôles de x et y on trouve

$$f(y) - f(x) \leq |x - y| \Longrightarrow -|x - y| \leq f(x) - f(y)$$

on déduit alors que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; \qquad |f(x) - f(y)| \leq |y - x|$$

donc f est 1- lipschitzienne.

Exercice 9.
Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer

que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé 9. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, +\infty[, \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On sait que

$$\exists \delta > 0, \ \forall x \geq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Soient $x, y \in [\delta, +\infty[$, on a alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

d'autre part, f est continue sur $[0, \delta]$ donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0, \delta]$, c-à-d

$$\exists \eta > 0 : \ \forall x, y \in [0, \delta], \ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Soient $x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on 3 cas possible:

- Si $x, y \in [0, \delta]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $x, y \in [\delta, +\infty[$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- Si $0 \leq x \leq \delta \leq y$ alors on aura $|\delta - x| \leq |x - y| \leq \eta$ et donc

$$|f(x) - f(\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

de plus $\delta, y \in [\delta, +\infty[$ alors

$$|f(\delta) - f(y)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

d'où

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\delta)| + |f(\delta) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

On a montré que $\forall x, y \in [0, +\infty[$ tels que $|x - y| \leq \eta$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On conclut que f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
