Feuille d'Exercices n° 5 : LOIS CONTINUES (V.A.R)

Exercice 5.1 : *Pour démarrer !*

Soit X une v. a. r. qui admet la densité de probabilité $f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$.
où a est une constante.
1) Calculer a.
2) Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X. Tracer la courbe représentative de F.
Calculer $P[0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}]$ et $P[-\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{6}]$.

Exercice 5.2 : *Nouvelle ddp*

On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ kx\exp -\frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
1) Déterminer le réel k pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2) Soit F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations a) $F_X(t) = \frac{1}{4}$ b) $F_X(t) = \frac{3}{2}$.

Exercice 5.3 : *Image de var connue*

Soit X une v.a. r. ayant pour densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
1) Quelle est la loi de probabilité de la variable $Y = aX + b$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$?
2) Quelle est la loi de probabilité de la variable $Z = 1/X$?

Exercice 5.4 : *Confectionnement*

Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g. Elle a confectionné 1000 paquets mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids X autour de la valeur moyenne de 500g avait un écart-type de 25g. On suppose donc que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 500, \sigma = 25$.
1) Combien de paquets pèsent entre 480g et 520g ?
2) Combien de paquets pèsent entre 480g et 490g ?
3) Combien pèsent plus de 450g ?
4) Entre quelles limites symétriques par rapport à la moyenne sont comprises les 9/10 de cette production ?

Exercice 5.5 : *Avec la loi normale*

Soit X une v.a. r. distribuée suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
1) On suppose que $m = -1$, $\sigma = 2$. Calculer les probabilités :

$$P[-1 < X < 1],\ P[2 < X < 3],\ P[X < -2],\ P[X < 0],\ P[X > 4].$$

2) On suppose que $P[X < 0] = 0.6$, $P[X > 2]0.25$. Calculer m et σ.

Exercice 5.6 : *Somme de deux lois de ddp de nature différentes*

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X est distribuée suivant la loi de Poisson de moyenne $E(X) = 2$ et que Y est distribuée suivant la loi uniforme sut $[0, 1]$. On pose $Z = X + Y$.
1) Pour tout entier $n \geq 0$, et pour $n < x < n+1$, calculer la probabilité $P[n \leq Z < x]$.
2) Calculer la fonction de répartition de Z. Montrer que la loi de probabilité de Z admet une densité de probabilité que l'on déterminera. Indiquer la courbe représentative de cette densité en repère orthonormé.

Exercice 5.7 : *$Y = P_2(X)$ où P_2 est un trinôme*

Calculer la loi de probablité la v. a. r. Y définie par $Y = X^2 + 2X + 2$ où X est une v. a. r. distribuée :
a) suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. b) suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.

Exercices supplémentaires 5.8 : *v.a.r. avec et sans espérance*

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

b) X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

c) Calculer la fonction de répartition de la v.a.r. X.

d) Tracer sur deux repères différents les courbes de f.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercices supplémentaires 5.9 : *Comparaison du temps de fonctionnement de deux systèmes*

1) Deux éléments d'un système sont montés en parallèle. Le système fonctionne tant qu'au moins l'un des deux éléments fonctionne. On suppose que les temps de fonctionnement des éléments, X_1 et X_2, suivent une loi exponentielle et sont indépendants. X_1 et X_2 ont respectivement pour espérance 1000h et 1500h. Calculer et comparer :

a) La probabilité que le premier élément fonctionne un temps inférieur à 900h.

b) La probabilité que le deuxième élément fonctionne un temps inférieur à 900h.

c) La probabilité que le système fonctionne un temps inférieur à 900h.

2) Les deux éléments sont maintenant montés en série. Le système fonctionne seulement lorsque les deux éléments fonctionnent. Calculer la probabilité que le système fonctionne un temps inférieur à 900h. Comparer avec les probabilités calculées au problème précédent.

Exercices supplémentaires 5.10 : *Confiture "pur sucre" et loi normale*

Une confiture est qualifiée de "pur sucre" si elle contient entre 420 et 520g de sucre par kg. Un fabriquant vérifie 200 pots de 1 kg. Il trouve que le poids moyen de sucre est 465g avec un écart-type de 30g.

1) En considérant l'échantillon comme représentatif, calculer le pourcentage de la production du fabricant qui ne doit pas porter la mention "pur sucre" en considérant que le poids du sucre suit une loi normale.

2) Afin d'améliorer la qualité "pur sucre" le fabriquant souhaite éliminer 15% de sa production. Déterminer un intervalle $[a,b]$, centré sur la moyenne, tel que $p(a \leq X \leq b) = 0.85$.

3) Un magasin diététique lui propose d'acheter les pots à condition qu'ils aient moins de 495g de sucre, mais au minimum x_0 g. Déterminer x_0 sachant que le fabriquant refusera la vente au dessous de 20% de chute.

Exercices supplémentaires 5.11 : *Une nouvelle d.d.p*

Soit f définie par $f(x) = (a^2 - x^2)\, \mathbb{1}_{]-a,a[}(x)$.

1) Déterminer a tel que f soit une densité de probabilité,

2) Soit X de densité f :

a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$,

b) Déterminer F_X.

3) Tracer les courbes de f et F_X sur deux repères orthogonaux.