| | | |
|---|---|---|
| **UH1** | **FPK** | **Filière SMI** |
| **2ème Année, $S_3$** | **Probabilités-Statistiques** | **2017 - 2018** |
| **Examen de rattrapage** | **Date : 15 février 2018** | **Durée : 2h** |

---

① Aucun document n'est autorisé excepté la table de la loi normale.
② La qualité et la clarté de la rédaction et de l'argumentation seront prises en compte dans la notation.
③ L'emprunt des calculatrices entre étudiants est strictement interdit.

## Exercice 1 : */3.5 points*

**1)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. définies sur le même espace de probabilité , telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ où $0 < p_n < 1$. Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} np_n = \lambda \text{ avec } \lambda > 0 \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\longrightarrow+\infty} P[X_n = k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

**2)** Soit $X$ une variables aléatoire discrète suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ($\lambda \in ]0, +\infty[$) c'est-à-dire que $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
Montrer que l'espérance et la variance de $X$ sont toutes les deux égales à $\lambda$.

## Exercice 2 : */ 4.5 points*

Dans une étude sur l'anesthésie, on désire évaluer l'effet d'un somnifère $S$ sur une population $\mathcal{P}$ définie par certaines caractéristiques biologiques.
On admet que la durée de sommeil $X$ d'un sujet de $\mathcal{P}$ ayant reçu une dose donnée de $S$, a une loi qui peut être assimilée à une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ (d'espérance mathématique $m$ et d'écart-type $\sigma$). $X$, $m$ et $\sigma$ sont données en minutes (mn).

**1)** Dans cette question on suppose que $m = 158$ mn et $\sigma = 6$ mn.

- **a)** Déterminer le pourcentage des sujets qui ont une durée de sommeil dans l'intervalle $[157, 165]$.
- **b)** Déterminer le réel $\alpha$ tel que $P[X \leqslant \alpha] = 0,1$.
- **c)** Déterminer l'intervalle $[a, b]$ centré en $m$ tel que $P[a \leqslant X \leqslant b] = 0,86$.

**2)** Dans cette question on suppose que les paramètres $m$ et $\sigma$ sont inconnus.
Déterminer les valeurs de $m$ et $\sigma$ sachant qu'il y a 20% des sujets qui ont une durée de sommeil supérieure à 163 mn et 30 % des sujets ont une durée de sommeil inférieure à 155 mn.

**N.B.** : On utilisera la table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ pour répondre aux différentes questions de cet exercice.

**Exercice 3 :** */3 points*

Un joueur a dans sa poche 3 pièces , dont deux, notées $N_1$ et $N_2$ sont équilibrées, et l'autre $T$ est lestée de sorte que "Pile" ait une probabilité d'apparition égale à 2 fois celle de "Face".
Le joueur choisit une des trois pièces au hasard, et la lance 4 fois. Il obtient 3 résultats "Pile". Quelle est alors la probabilité qu'il ait choisit la pièce $T$ ?

**Exercice 4 :** */ 5 points*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(x^2+1)} & \text{si} \qquad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1)** Monter que la fonction $f$ est une densité de probabilité (d.d.p.). On considère $X$ une v.a.r ayant $f$ pour d.d.p.

**2)** Tracer sommairement l'allure de la courbe de $f$.

**3)** Déterminer la fonction de répartition de $X$, notée $F$.

**4)** Représenter graphiquement la courbe de $F$.

**5)**

- **a)** Calculer $\displaystyle\int_0^A \frac{2x}{\pi(x^2+1)}\,dx$ pour $A > 0$.
- **b)** Que peut-on déduire concernant l'existence de l'espérance mathématique de la v.a.r. $X$.

**Exercice 5 :** */ 4 points*

Un cinéma comporte deux salles contenant chacune $n$ places. $N$ personnes se présentent à l'entrée de ce cinéma. On admet que les choix des spectateurs sont indépendants les uns des autres et qu'un spectateur quelconque a une chance sur deux d'aller dans la première salle.
On note $X$ la variable aléatoire désignant le nombre de personnes qui choisissent la première salle.

**1)** Justifier que la probabilité $p$ pour que tous les spectateurs ne puissent pas voir le film qu'ils ont choisi est donnée par :

$$p = 1 - P(N - n \leqslant X \leqslant n)$$

**2)** Comment le constructeur aurait-il dû choisir $n$ si on sait que $N = 1000$ et si on veut que $p$ soit inférieure à 0,01 ? (on pourra utiliser l'approximation de la loi binomiale par la loi normale)