S3

Chapitre

3 Différentiabilité en EVN

Exercice. 3.1. *Étudier la continuité et le caractère C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & si\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Solution. *On a $(x,y)\mapsto \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ est une fonction usuelle, donc de classe C^1 sur son domaine de définition $D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, et comme pour tout $(x,y)\in D_f$, on a*

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}\right|\leq\frac{|xy|}{|x|+|y|}\leq|x|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0,$$

alors $f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}f(0,0)$, et donc f est continue en $(0,0)$. Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, considérons la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=f(x,x)$. On a

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x^2)}{2x|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{2x^2}=1/2,$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x^2)}{2x|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{-2x^2}=-1/2.$$

Par suite, la fonction g n'est pas dérivable en 0, et donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (car sinon $g=f\circ h$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ est la fonctions de classe C^1 donnée par $h(x)=(x,x)$, d'où g serait par composition de classe C^1, absurde).

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.2. *Étudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières.*

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0\quad si & (x,y)=(0,0).\end{cases}\quad;\quad c)\ f(x,y)=\max(|x|,|y|).$$

$$b)\ f(x,y)=\begin{cases}x\sin(\frac{y}{x}) & si\quad x\neq0\\[2mm] 0\quad si & x=0.\end{cases}\quad;\quad d)\ f(x,y)=\max(x^2,y^2).$$

Solution. *a)* + *D'abord,* $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2}$ *est une fonction usuelle, donc de classe* C^1 *sur son domaine de définition* $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Puis, pour tout* $(x,y) \in D_f$, *on a*

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{\sin(x^3)-\sin(y^3)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq |x|+|x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

alors f *est continue en* $(0,0)$, *et par conséquent, elle est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

+ *D'une part, on a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^3} = -1 \quad et \quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{-\sin(y^3)}{y^3} = -1,$$

d'où les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *existent, et puisque* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *alors les applications dérivées partielles premières* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont bien définies sur* $\mathbb{R}^2$ *(c-à-dire que les dérivées partielles premières* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *existent pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*).*

+ *D'autre part, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *on a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2\cos(x^3)(x^2+y^2) - 2x(\sin(x^3)-\sin(y^3))}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{3}{2}\cos(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 3/2 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1,$$

et donc la dérivée partielle première $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue au point* $(0,0)$. *Par le même raisonnement, on montre que la dérivée partielle première* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *n'est pas continue au point* $(0,0)$.

En résumé, on conclut que

i. f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$,

ii. f *admet des dérivées partielles premières (d.p.p.) partout sur* $\mathbb{R}^2$,

iii. les deux d.p.p. de f *sont continues sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *et non-continues au point* $(0,0)$.

b) + *D'abord,* $(x,y) \mapsto x\sin(y/x)$ *est une fonction usuelle, donc de classe* C^1 *sur son domaine de définition* $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *De plus, soit* $y_0 \in \mathbb{R}$, *pour tout* $(x,y) \in D$, *on a*

$$|f(x,y)-f(0,y_0)| = |f(x,y| \leq |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, la fonction f *est continue en tout point* $(0,y_0)$, *et ainsi elle est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

+ *D'une part, puisque* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *alors*

$$D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2.$$

D'autre part, considérons l'application partielle $f(\cdot,y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$x \mapsto f(x,y_0) = \begin{cases} x\sin(y_0/x) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Si $y_0 \neq 0$, *la fonction* $f(\cdot, y_0)$ *n'est pas dérivable en* 0, *puisque* $\frac{(h, y_0) - (0, y_0)}{h} = \sin(\frac{y_0}{h})$ *n'admet de limite quand* $h \to 0$, *et donc la d.p.p.* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *n'existe pas sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *Si* $y_0 = 0$, *alors* $f(\cdot, y_0) = 0$, *et donc* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *existe. Et comme* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *on conclut que*

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\right) \cup \left\{(0,0)\right\}.$$

+ *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *on a* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{y}{x}\right)$, *et en particulier, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \sin\left(1 - \frac{1}{x}\right)\cos(1),$$

qui n'a pas de limite quand $x \to 0$, *et donc* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$ *(car* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$*).*

D'autre part, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $f(x,y) = x\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ *si* $x \neq 0$, *et* $f(0,y) = 0$ *sinon, alors*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial\left(x\sin(y/x)\right)}{\partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D'où $\frac{\partial f}{\partial y}$ *n'admet de limite en tout point* $(0, y_0)$ *avec* $y_0 \neq 0$. *En particulier, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t) = \cos(1/t)$$

n'admet de limite quand $t \to 0$, *et donc* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *n'admet de limite en* $(0,0)$.

En résumé, on conclut que

i. f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$,

ii. f *admet des les d.p.p.* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *respectivement, sur*

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \left(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\right) \cup \left\{(0,0)\right\} \quad \text{et} \quad D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2,$$

iii. les deux d.p.p. de f *sont continues sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *et non-continues sur* $\{0\} \times \mathbb{R}$.

c) + *On a* $f(x,y) = \max\left(|x|, |y|\right) = \frac{1}{2}\left(|x| + |y| + \left||x| - |y|\right|\right)$, *donc elle est de classe* C^1 *sur l'ouvert*

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \neq |y|\right\}.$$

+ *On a* $f(x,y) = \max\left(|x|, |y|\right) = \frac{1}{2}\left(|x| + |y| + \left||x| - |y|\right|\right)$, *donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

+ Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, considérons la fonction partielle $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x, y_0) = \max\left(|x|, |y_0|\right) = \frac{1}{2}\left(|x| + |y_0| + \big||x| - |y_0|\big|\right) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq -|y_0|, \\ |y_0| & si \quad |x| \leq |y_0|, \\ x & si \quad x \geq |y_0| \end{cases}$$

n'est pas dérivable au point $\pm|y_0|$, et donc la d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm|y_0|, y_0)$ n'existe pas. Par symétrie, et avec le même raisonnement, on montre que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \pm|x_0|)$ n'existe pas.

En conclusion, on a

i. f est continue sur $\mathbb{R}^2$,

ii. f admet des d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur l'ouvert

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \neq |y|\right\} = U,$$

iii. les deux d.p.p. de f sont continues sur U.

d) + On a $f(x, y) = \max(x^2, y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - |x^2 - y^2|)$, alors elle est de classe C^1 sur l'ouvert

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \neq y^2\right\}.$$

+ On a $f(x, y) = \max(x^2, y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - |x^2 - y^2|)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

+ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0^2 = y_0^2$. Si $y_0 \neq 0$, l'application partielle $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x, y_0) = \max(x^2, y_0^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y_0^2 - |x^2 - y_0^2|) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq -|y_0|, \\ y_0^2 & si \quad |x| \leq |y_0|, \\ x^2 & si \quad x \geq |y_0| \end{cases}$$

n'est pas dérivable $\pm|y_0|$, puisque, par exemple, pour $y_0 > 0$, on a

$$f(\cdot, y_0)'_g(y_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(y_0 + h, y_0) - f(y_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{y_0^2 - y_0^2}{h} = 0,$$

$$f(\cdot, y_0)'_d(y_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(y_0 + h, y_0) - f(y_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(y_0 + h)^2 - y_0^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} 2y_0 + h = 2y_0 \neq 0.$$

Si $y_0 = 0$, l'application partielle $f(\cdot, 0) : x \mapsto f(x, 0) = \max(x^2, 0) = x^2$ est dérivable en 0 telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \left(f(\cdot, 0)\right)'(0) = 0.$$

Par suite, f admet la d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur l'ensemble $U \cup \{(0, 0)\}$. Et par symétrie, et avec le même raisonnement, on montre que la d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur l'ensemble $U \cup \{(0, 0)\}$. En conclusion, on a

i. f est continue sur $\mathbb{R}^2$,

ii. f admet les d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur l'ensemble

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |x| \neq |y|\} \cup \{(0,0)\}.$$

iii. les deux d.p.p. de f sont continues sur leurs ensembles de définitions.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice. 3.3. *Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi''(0)\neq 0$. On considère*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\varphi(y)-y\varphi(x)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. *On a φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors $(x,y)\mapsto \dfrac{x\varphi(y)-y\varphi(x)}{x^2+y^2}$ est de classe C^2 sur son domaine de définition $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (par opérations sur fonctions C^2). Comme φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\exists M\geq 0, \forall t\in[-1,1];\quad \left|\varphi(t)-\left(\varphi(0)-t\varphi'(0)\right)\right|\leq Mt^2.$$

D'où, pour tout $(x,y)\in[-1,1]^2\setminus\left(\{(0,0)\}\right.$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-f(0,0)| &= |f(x,y)| \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}\left|x\left(\varphi(y)-y\varphi'(0)\right)-y\left(\varphi(x)-x\varphi'(0)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{x^2+y^2}\left(|x|My^2+|y|Mx^2\right) \\
&\leq M\frac{|xy|}{x^2+y^2}\left(|x|+|y|\right) \\
&\leq \frac{M}{2}\left(|x|+|y|\right) \quad (car\ x^2+y^2\geq xy).
\end{aligned}$$

Comme $|x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, alors il en résulte que $f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, et donc la fonction f est continue au point $(0,0)$. Finalement, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'une autre part, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\left(\{(0,0)\}\right.$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(\varphi(y)-y\varphi'(0)\right)(x^2+y^2)-2x\left(x\varphi(x)-y\varphi(x)\right)\right].$$

En particulier, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\frac{\varphi(y)-y\varphi'(0)}{y^2}=\frac{1}{2}\varphi''(0)-\underset{0}{o}(1)\underset{y\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\varphi''(0)\neq 0.$$

Ce qui montre que la d.p.p. $\frac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue au point* $(0,0)$*, et donc la fonction* f *n'est pas de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *(elle ne l'est pas au voisinage de* $(0,0)$*).*

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.4. *On se place dans* $\mathbb{R}^2$*. Étudier la différentiabilité des fonctions normes* $\|\cdot\|_2$*,* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_\infty$*.*

Solution. + On a $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *(comme opérations sur fonctions de classe* C^1*), alors* $\|\cdot\|_2 : (x,y) \mapsto \|(x,y)\|_2$ *est différentiabie sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*. Au point* $(0,0)$*, on a*

$$\frac{\|(h,0)\|_2 - \|(0,0)\|_2}{h} = \frac{|h|}{h}$$

n'a pas de limite quand $h \to 0$*, d'où* $\|\cdot\|_2$ *n'a pas de d.p.p.* $\frac{\partial \|\cdot\|_2}{\partial x}$ *au point* $(0,0)$*, et ainsi elle n'est pas différentiable en* $(0,0)$*. En résumé, l'application norme* $\|\cdot\|_2$ *est différentiabie sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*, et on a*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad d_{(x,y)}\|\cdot\|_2 &= \frac{\partial \|(x,y)\|_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \|(x,y)\|_2}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} dy \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.\end{aligned}$$

+ *On a* $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \neq 0\}$*, alors l'application norme* $\|\cdot\|_1$ *est différentiabie sur* U*. Au points* $(x_0, 0)$*, on a*

$$\frac{\|(x_0,k)\|_1 - \|(x_0,0)\|_1}{k} = \frac{|x_0| + |k| - |x_0|}{k} = \frac{|k|}{k}$$

n'a pas de limite quand $k \to 0$*, d'où* $\|\cdot\|_1$ *n'a pas de d.p.p.* $\frac{\partial \|\cdot\|_1}{\partial y}$ *au points* $(x_0, 0)$*, et ainsi la norme* $\|\cdot\|_1$ *n'est pas différentiable au points* $(x_0,0)$*. Par le même raisonnement, on obtient que* $\|\cdot\|_1$ *n'est pas différentiable au points* $(0, y_0)$*. En résumé, l'application norme* $\|\cdot\|_1$ *est différentiabie sur* U*, et on a*

$$\forall (x,y) \in U; \quad d_{(x,y)}\|\cdot\|_1 = \frac{|x|+|y|}{\partial x} dx + \frac{\partial |x| + |y|}{\partial y} dy = \frac{|x|}{x} dx + \frac{|y|}{y} dy.$$

+ *On a* $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) = \frac{1}{2}(|x| + |y| + ||x| - |y||)$ *est de classe* C^1 *sur l'ouvert*

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \neq |y|\},$$

alors l'application norme $\|\cdot\|_\infty$ *est différentiabie sur* U*. Au points* (x_0, x_0)*, on a*

$$\frac{\|(x_0, x_0+k)\|_\infty - \|(x_0,x_0)\|_\infty}{k} = \frac{\max(|x_0|, |x_0+k|) - |x_0|}{k}.$$

Supposons par exemple que $x_0 > 0$*, alors on a*

$$\lim_{k \to 0^-} \frac{\max(|x_0|, |x_0+k|) - |x_0|}{k} = \lim_{k \to 0^-} \frac{x_0 - x_0}{k} = 0,$$

$$\lim_{k \to 0^+} \frac{\max(|x_0|, |x_0+k|) - |x_0|}{k} = \lim_{k \to 0^-} \frac{(x_0+k) - x_0}{k} = 1.$$

D'où, l'application norme $\|\cdot\|_\infty$ n'admet pas de d.p.p. $\dfrac{\partial\|\cdot\|_\infty}{\partial y}$ au points (x_0,x_0), et par conséquent, la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable au points (x_0,x_0). Par le même raisonnement, on obtient que l'application norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable au points (x_0,y_0) avec $|x_0|=|y_0|$.

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.5. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Montrer que toute application bilinéaire continue $B: E\times F \to G$ est différentiable sur $E\times F$, et déterminer sa différentielle.*

Solution. *Soit $X=(x,y)\in E\times F$ donné, alors pour tout $H=(h,k)\in E\times F$, on a*

$$B(X+H)=B(x+h,y+k)=B(x,y)+B(x,k)+B(h,y)+B(h,k).$$

D'une part, on a $L_X: E\times F\to G$, $H=(h,k)\mapsto B(x,k)+B(h,y)$ est linéaire, et d'autre part, il résulte de la continuité de B qu'il existe $c>0$ tel que pour tout $(h,k)\in E\times F$, on a

$$\|B(h.k)\|_G \le c\|h\|_E\,\|k\|_F \le c\,\|(h,k)\|^2_{E\times F} \quad (\text{où } \|(h,k)\|_{E\times F}=\max(|h|,|k|)).$$

D'où, il vient que $B(h,k)=o(\|(h,k)\|_{E\times F})=o(\|H\|_{E\times F})$, et par conséquent, on a

$$B(X+H)=B(X)+L_X(H)+B(h,y)+o(\|H\|_{E\times F}).$$

Finalement, on en déduit que B est différentiable de différentielle L_X, soit

$$d_XB: E\times F\to G,\ (h,k)\mapsto B(x,k)+B(h,y).$$

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.6. *Soient $n,\ k\in\mathbb{N}^*$ et $f_k:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X\mapsto X^k$. Montrer que f_k est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme*

$$\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad d_Xf_k(H)=\sum_{i=0}^{k-1}X^{k-1-i}HX^i \quad \text{avec} \quad X^0=I_n.$$

Solution. *Montrons par récurrence sur k que f_k est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que*

$$d_Xf_k(H)=\sum_{i=0}^{k-1}X^{k-1-i}HX^i.$$

Pour $k=1$, on a $f_1=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}: X\mapsto X\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et donc f_1 est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$d_Xf_1=f_1=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

D'où pour tout $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $d_Xf_1(H)=H=X^{1-1-0}HX^0$, et donc l'hypothèse est vraie pour $k=1$. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $k\in\mathbb{N}^*$, alors f_k est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$d_Xf_k(H)=\sum_{i=0}^{k-1}X^{k-1-i}HX^i.$$

Il en résulte alors que pour tout $X,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$f_{k+1}(X+H)=(X+H)^{k+1}=(X+H)(X+H)^k=(X+H)f_k(X+H).$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$f_k(X+H)=f_k(X)+d_Xf_k(H)+o\big(\|H\|\big)=X^k+d_Xf_k(H)+o\big(\|H\|\big).$$

d'où

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(X+H) &= (X+H)f_k(X+H)\\
&= (X+H)\big(X^k + d_X f_k(H) + o(\|H\|)\big)\\
&= X^{k+1} + \big(X\,d_X f_k(H) + H X^k\big) + \underbrace{X\,o(\|H\|) + H\,d_X f_k(H) + H\,o(\|H\|)}_{o(\|H\|)}\\
&= f_{k+1}(X) + \underbrace{\big(X\,d_X f_k(H) + H X^k\big)}_{L_X(H)} + o(\|H\|) \quad (\text{avec } L_X \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))).
\end{aligned}
$$

Ainsi, f_{k+1} est différentiable, et tenons compte de l'hypothèse de récurrence, sa différentielle est

$$
\begin{aligned}
d_X f_{k+1}(H) = L_X(H) &= X\,d_X f_k(H) + H X^k\\
&= X\sum_{i=0}^{k-1} X^{k-1-i} H X^i + H X^K\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-i} H X^i + X^{k-k} H X^K\\
&= \sum_{i=0}^{k} X^{k-i} H X^i.
\end{aligned}
$$

On conclut que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $k+1$, et donc elle vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice. 3.7. *1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

2. Établir que $f : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ X \mapsto X^{-1}$ est de classe C^1, puis calculer sa différentielle.

Solution. *1. Comme $GL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ \det(X) \neq 0\}$, alors $GL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$, par l'application continue det (car elle est multilinéaire), et par conséquent, $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

2. On sait que pour tout $X \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)}\,{}^t\mathrm{com}(X)$, alors les coefficients de X^{-1} sont des fonctions rationnelles des coefficients de X. Or, les fonctions rationnelles sont de classe C^1, alors $f : X \to X^{-1}$ est de classe C^1 sur $GL_n(\mathbb{R})$. Calculons sa différentielle en tout point $X \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

- *puisque $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\quad \|H\| \le \varepsilon \Longrightarrow X+H \in GL_n(\mathbb{R}).$$

- *pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|H\| \le \varepsilon$, on a*

$$
\begin{aligned}
f(X+H) - f(X) &= (X+H)^{-1} - X^{-1}\\
&= (X+H)^{-1}\big(I_n - (X+H)X^{-1}\big)\\
&= (X+H)^{-1}\big(X - (X+H)\big)X^{-1}\\
&= -(X+H)^{-1} H X^{-1},
\end{aligned}
$$

d'où

$$f(X+H)-f(X)+X^{-1}HX^{-1} = -(X+H)^{-1}HX^{-1}+X^{-1}HX^{-1}$$
$$= X^{-1}HX^{-1}-(X+H)^{-1}HX^{-1}$$
$$= \left(X^{-1}-(X+H)^{-1}\right)HX^{-1}.$$

+ l'application $L_X : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ H \mapsto -X^{-1}HX^{-1}$ *est linéaire.*
+ l'application f *est continue sur* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *alors* $f(X+H) = (X+H)^{-1} \underset{H\to 0}{\longrightarrow} X^{-1}$, *donc*

$$\left(X^{-1}-(X+H)^{-1}\right)HX^{-1} = \underset{0}{o}(\|H\|).$$

Par suite, on en déduit que

$$f(X+H) = f(X)+L_X(H)+\underset{0}{o}(\|H\|).$$

En conclusion, on a $f : X \mapsto X^{-1}$ *est différentiable en tout point* $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *et on a*

$$\forall X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\quad d_x f(H) = L_X(H) = -X^{-1}HX^{-1}.$$

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.8. *Étudier la différentiabilité des fonctions* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définies par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Solution. *1. Comme* $(x,y) \mapsto \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ *est une fonction usuelle, donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *alors la fonction* f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Au point* $(0,0)$, *on a*

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^3}{h^2 h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 \quad et \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{-k^3}{k^3} \underset{k\to 0}{\longrightarrow} -1.$$

D'où, les deux d.p.p. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ *existent. Sont-elles continues en* $(0,0)$ *? On a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\};\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}}{\longrightarrow} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Alors, $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$, et ainsi, f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De ceci, on ne peut pas conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}$. Il faut étudier étudier directement sa différentiabilité au point $(0,0)$, ceci en cherchant à écrire

$$f(h,k) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) \quad avec \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

On a $\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|}$. *Puisque, on a*

$$\lim_{h\to0^+} \varepsilon(h,-h) = \lim_{h\to0^+} \frac{-h^2(-2h)}{2\sqrt{2}|h|h^2} = \frac{h^3}{\sqrt{2}|h|^3} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{h\to0^-} \varepsilon(h,-h) = \lim_{h\to0^-} \frac{h^3}{\sqrt{2}|h|^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par suite, $h \mapsto \varepsilon(h,-h)$ n'admet pas de limite quand $h \to 0$, et donc $(h,k) \mapsto \varepsilon(h,k)$ n'admet pas de limite quand $(h,k) \to (0,0)$. Finalement, on conclut que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

2. *Remarquons d'abord que $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ est une fonction usuelle, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Au point $(0,0)$, on a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

D'une part, comme $\left|2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \le |x| \xrightarrow[x\to0]{} 0$, alors on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0.$$

D'autre part, l'application $g : (x,y) \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ n'admet pas de limite en $(0,0)$, car

- *en utilisant $g(0,y) = 0$, on obtient*

$$\lim_{k\to0} g(0,k) = 0,$$

- *en utilisant la suite $\left(x_n = \frac{1}{2\pi n}, 0\right)$ convergeant vers $(0,0)$, on trouve*

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n,0) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 1 \ne \lim_{k\to0} g(0,k) = 0.$$

Finalement, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$, et donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. *Il résulte de la relation $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2\sin(1/|h|)}{h} = \|h\|\sin(1/|h|) \le \|h\| \xrightarrow[h\to0]{} 0$ que la d.p.p $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ existe. Par le même raisonnement, on obtient que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ existe.*

Pour la différentiabilité de f au point $(0,0)$, considérons

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad (\textit{soit } \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2})$$

$$= \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \leq \sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\| \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

d'où

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

Ainsi, f est différentiable au point $(0,0)$, et par conséquent, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (c'est un exemple de fonction différentiable qui n'est pas de classe C^1).

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.9. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue en $(0,0)$.*
2. *Montrer que f admet une dérivée première en $(0,0)$ suivant tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
3. *Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.*

Solution. *1.* $(x,y) \mapsto \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$ *est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad |f(x,y)| \leq |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

D'où $f(x,y) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$, alors f est continue au point $(0,0)$, et ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si $a \neq 0$, alors on a

$$\left|\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t}\right| = \left|\frac{f(t(a,b)) - f(0,0)}{t}\right| = \frac{b^3t^2}{\sqrt{a^2t^2+b^4t^4}} = \frac{b^3}{a}|t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Si $a = 0$, alors on a

$$\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = b \underset{t\to 0}{\longrightarrow} b.$$

Ainsi, f admet une dérivée première au point $(0,0)$, suivant tout vecteur $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} 0 & si \quad a \neq 0, \\ b & si \quad a = 0. \end{cases}$$

3. Considérons l'application $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^4}} - k\right).$$

A-t-on $\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ *? Comme, on a*

$$\varepsilon(k^2,k) = \frac{1}{|k|\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)k \underset{k\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \neq 0,$$

d'où

$$\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0.$$

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (c'est l'exemple d'une fonction admettant une dérivée première suivant tout vecteur non nul en un point donné, et ceci sans être différentiable en ce point).

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.10. *On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\varphi(x,y,z) = (x+y^2, y+z^2, z+x^2).$$

1. Montrer qu'il existe U voisinage de $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ et V voisinage de $(2,2,2)$ dans $\mathbb{R}^3$ tels que

$$V = \varphi(U) \ \text{ et } \ \varphi_1 = \varphi_{|U} \ \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } U \text{ sur } V.$$

2. Calculer la matrice jacobienne du difféomorphisme φ_1^{-1} au point $(2,2,2)$.

Solution. *1. Les fonctions composantes de φ sont polynomiaux, alors elles sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Par suite, la fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et sa matrice Jacobienne s'écrit*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad J_\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où, le Jacobien de l'application φ au point $(1,1,1)$ est

$$\det\left(J_\varphi(x,y,z)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Par conséquent, la différentielle $d_{(1,1,1)}\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, et donc il résulte du théorème d'inversion locale qu'il existe un voisinage ouvert U de $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$, et un voisinage ouvert V de $\varphi(1,1,1) = (2,2,2)$ dans $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\varphi(U) = V \ \text{ et } \ \varphi_1 = \varphi_{|U} : U \to V \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme.}$$

2. La matrice jacobienne du difféomorphisme φ_1^{-1} au point $(2,2,2)$ s'écrit

$$J_{\varphi^{-1}}(2,2,2) = J_{\varphi_1^{-1}}(2,2,2) = \left(J_{\varphi_1}(1,1,1)\right)^{-1} = \left(J_\varphi(1,1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

En utilisant la relation $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t com(A)$, *on obtient*

$$J_{\varphi^{-1}}(2,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.11. *Montrer que* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (e^x - e^y, x+y)$ *est un* C^1*-difféomorphisme.*

Solution. + *Montrons d'abord que* φ *est bijective. Soient* (x,y) *et* (a,b) *deux éléments de* $\mathbb{R}^2$, *alors*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) = (a,b) &\iff e^x - e^y = a \quad et \quad x+y = b \\ &\iff e^x - e^y = a \quad et \quad y = b-x \\ &\iff e^x - e^{-x+b} - a = 0 \quad et \quad y = b-x. \end{aligned}$$

Montrons que l'équation $(E) : e^x - e^{-x+b} - a = 0$ *admet une solution unique sur* $\mathbb{R}$. *L'application*

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - e^{-x+b} - a$$

est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \ \psi'(x) = e^x + x e^{-x+b} > 0.$$

Donc, ψ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *et comme on a*

$$\lim_{x\to-\infty} \psi(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - e^{-x+b} - a = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - e^{-x+b} - a = +\infty,$$

alors il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $\psi(c) = 0$, *c-à-dire l'équation* (E) *admet une unique solution* $c \in \mathbb{R}$. *Par suite, on obtient que* φ *est une bijection, puisque*

$$\varphi(x,y) = (a,b) \iff x = c \quad et \quad y = b-c.$$

+ *Les composantes de* φ *sont de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$, *alors* φ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$, *et son Jacobien s'écrit*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad \det\left(J_{(x,y)}\varphi\right) = \begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^x + e^y \neq 0.$$

D'où, pou tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $d_{(x,y)}\varphi$ *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *et alors d'après le théorème d'inversion globale, on déduit que* φ *est* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.12. *Montrer que* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ *est un* C^1*-difféomorphisme.*

Solution. *Utiliser la même technique que pour l'exercice précédent, en prenant*

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto x^3 + 3x e^{x^2+b} - a.$$

★ ★ ★ ★

Exercice. 3.13. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par :*

$$f(x,y) = \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}, \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, calculer le jacobien de f en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$. Est-ce que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$?

Solution. *1. Les composantes de f sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on a*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad \det(J_{(x,y)}f) = \begin{vmatrix} \sqrt{1+y^2} + \dfrac{yx}{\sqrt{1+x^2}} & \sqrt{1+x^2} + \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^2}} \\ \left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad (\textit{après calcul})$$

Ce résultat peut être autrement obtenue en remarquant que $f = g \circ \varphi$ où $g, \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont données

$$\varphi(x,y) = \left(\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \ln(y+\sqrt{1+y^2})\right) \quad et \quad g(u,v) = \left(\mathrm{sh}(u+v), e^{u+v}\right).$$

En effet, puisque $f = g \circ \varphi$, la matrice Jacobienne de f s'écrit

$$J_{(x,y)}f = J_{\varphi(x,y)}g \times J_{(x,y)}\varphi,$$

et son Jacobien s'écrit donc sous la forme

$$\det\left(J_{(x,y)}f\right) = \det\left(J_{\varphi(x,y)}g\right)\det\left(J_{(x,y)}\varphi\right).$$

Comme, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\det\left(J_{(u,v)}g\right) = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(u+v) & \mathrm{ch}(u+v) \\ e^{u+v} & e^{u+v} \end{vmatrix} = 0,$$

alors, il en résulte que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\det\left(J_{(x,y)}f\right) = 0.$$

2. L'application φ est-elle bijective ? on a

$$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2; \quad \varphi(x,y) = (a,b) \iff \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = a \quad et \quad \ln(y+\sqrt{1+y^2}) = b$$

$$\iff x+\sqrt{1+x^2} = e^a \quad et \quad y+\sqrt{1+y^2} = e^b$$

$$\iff \begin{cases} 1+x^2 = (e^a - x)^2 = e^{2a} - 2xe^a + x^2, \\ 1+y^2 = (e^b - y)^2 = e^{2b} - 2ye^b + y^2 \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{e^{2a}-1}{2e^a} \quad et \quad y = \frac{e^{2b}-1}{2e^b}.$$

Comme φ est bijective, alors $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, d'où $f(\mathbb{R}^2) = (g \circ \varphi)(\mathbb{R}^2) = g(\varphi(\mathbb{R}^2)) = g(\mathbb{R}^2)$ et donc

$$f(\mathbb{R}^2) = g(\mathbb{R}^2) = \left\{g(u,v);\ u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{(\mathrm{sh}(u+v), e^{u+v}) \in \mathbb{R}^2;\ u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{(\mathrm{sh}(t), e^t) \in \mathbb{R}^2;\ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Posons $\omega = e^t \in \mathbb{R}_+^*$, *alors*

$$\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{2e^t} = \frac{\omega^2 - 1}{2\omega}.$$

Par conséquent, on conclut que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *n'est pas surjective, puisque on a*

$$f(\mathbb{R}^2) = \left\{ \left(\frac{\omega^2 - 1}{2\omega}, \omega \right);\ \omega \in \mathbb{R}_+^* \right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Puisque $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, *alors* $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ *n'est pas un* C^1*-difféomorphisme.*

Ce résultat peut être obtenue autrement en remarquant que $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ *n'est pas injective, car*

$$f(0,1) = (1, 1 + \sqrt{2}) = f(1,0).$$

★ ★ ★ ★