TD : 4

EX 1

$$\Omega = \{0,1\}^{20} \quad , \quad card(\Omega) = 2^{20}$$

Chaque réponse a deux possibilités :

- Succés : Tomber sur la bonne réponse.
- Échec : Tomber sur la mauvaise réponse.

puisque le candidat joue sur le hasard $p(\text{succés}) = \frac{1}{2}$ commun à toutes les réponse.

Les reponses du candidat sont independantes (il y'en a $n = 20$)

si X désigne le nombre de succés, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n=20, p=\frac{1}{2})$ et $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$, avec $P(X=k) = C_{20}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} = \frac{C_{20}^{k}}{2^{20}}$

- On recherche $P(X \geq 16)$:

$$P(X \geq 16) = \sum_{k=16}^{20} P[X = k] = \frac{\sum_{k=16}^{20} C_{20}^{k}}{2^{20}} = \frac{4845 + 1140 + 190 + 20 + 1}{2^{20}}$$

$$= \frac{6196}{2^{20}} = 0{,}0059$$

Le pourcentage de candidat pouvant (en jouant sur le hasard) réussir à avoir 16 bonne réponses ou plus est 0,59 %, ce qui représente un trés faible pourcentage.

$\Rightarrow$ Moralité / Commentaire : Il vaut mieux travailler sérieusement que de jouer sur le hasard.

EX2

Notons :

N_1 : le joueur à choisir au hasard la pièce N_1 ;

N_2 : " " " " " " " " N_2 ;

T : " " " " " " " " T truquée ;

soit X le nombre de succès sur $n = 6$ lancers

$X | N_i \hookrightarrow \mathcal{B}(6, \frac{1}{2})$ avec $i \in \{1, 2\}$

$X | T \hookrightarrow \mathcal{B}(6, \frac{4}{5})$ avec $P_{Pile} = 4 P_{Face}$ et $P_{Pile} + P_{Face} = 1$

On sait que $[X = 5]$ et on cherche $P(T | [X=5])$

D'après les formule de Bayes (N_1, N_2, T constitue un système complet d'évènements)

$$P(T | [X=5]) = \frac{P([X=5] | T) \times P(T)}{P([X=5]|T)P(T) + P([X=5]|N_1)P(N_1) + P([X=5]|N_2)P(N_2)}$$

$P(T) = P(N_1) = P(N_2) = \frac{1}{3}$ (tous les pièces ont la même chance d'être choisie)

$$P(T | [X=5]) = \frac{\cancel{C_6^5} \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^1}{\cancel{C_6^5} \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \cancel{C_6^5} \left(\frac{1}{2}\right)^6}$$

$$= \frac{\frac{4^5}{5^6}}{\frac{4^5}{5^6} + 2 \cdot \frac{1}{2^6}}$$

$$\simeq 0,6771$$

EX3

$X \hookrightarrow P(\lambda = 4)$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \qquad K \in \mathbb{N}$$

① On ne vende aucune voiture alors $K = 0$:

$$P(X=0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = 0,0183$$

② on vende 4 voitures :

$$P(X=4) = \frac{4^4}{4!} e^{-4} = 0,19$$

③ On vende au moins une voiture :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - 0,0183$$
$$= 0,9817$$

④ le nombre de voiture vendues soit compris entre 2 et 6

$$P(2 \leq X \leq 6) = \sum_{i=2}^{6} P(X=i)$$
$$= e^{-4}\left(\sum_{i=2}^{6} \frac{4^i}{i!}\right)$$
$$= e^{-4}\left(8 + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24} + \frac{4^5}{120} + \frac{4^6}{720}\right)$$
$$= e^{-4} \cdot 43$$
$$= 0,7977$$

⑤ • $E(N) = \sum_{K=0}^{+\infty} K \; P[X=K]$

$$= \sum_{K=1}^{+\infty} K \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

$$\boxed{E(N) = \lambda}$$

• $V(N) = E(N^2) - (E(N))^2$

On a : $N^2 = N(N-1) + N \Rightarrow E(N^2) = E(N(N-1)) + E(N)$

et on a : $E(N(N-1)) = \sum_{K=0}^{+\infty} K(K-1) \cdot P[X=K]$

$$= \sum_{K=2}^{+\infty} K(K-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^K}{K!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{K=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{K-2}}{(K-2)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda}$$

$$\boxed{E(N(N-1)) = \lambda^2}$$

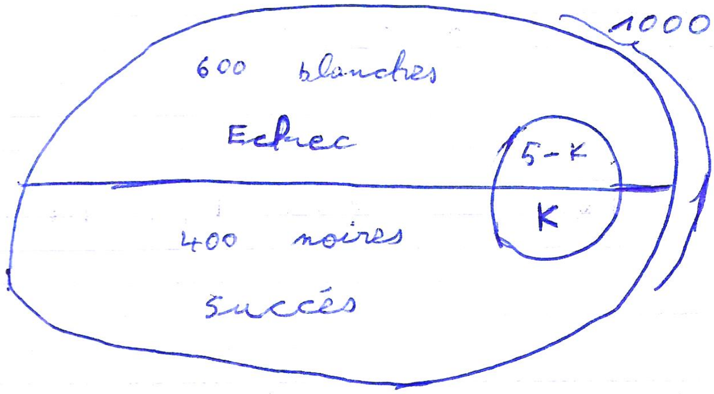
Donc $E(N^2) = \lambda^2 + \lambda$ et :

$$V(N) = E(N^2) - (E(N))^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\boxed{V(N) = \lambda}$$

EX 4



On a tirages sans remise alors il s'agit de la loi hypergéométrique de paramétres $N = 1000$, $R = 400$, $n = 5$

X = le nombre de boules noires tirées lors des 5 tirages suit la loi hypergeometrique $H(1000, 400, 5)$

$X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$

$$P(X = k) = \frac{C_{400}^{k} \times C_{600}^{5-k}}{C_{1000}^{5}}$$

alors la proba d'obtenir 3 boules noires est :

$$P(X = 3) = \frac{C_{400}^{3} \times C_{600}^{2}}{C_{1000}^{5}} = \frac{10586800 \times 179700}{C_{1000}^{5}} = 0,23059$$

X suit approximativement la loi binomiale au parametre $n = 5$;

$$p = \frac{R}{N} = \frac{400}{1000} = 0,4$$

On cherche $P(X = 3) : C_5^3 \times 0,4^3 \times 0,6^2 = 0,2304$ = valeur approximative

Calculons l'erreur relative

$$= \frac{|\text{Valeur exacte} - \text{Valeur approximative}|}{|\text{Valeur exacte}|}$$

$$= \frac{|0{,}23059 - 0{,}2304|}{0{,}23059} = 0{,}000828$$

Alors on a une bonne approximation car on a un pourcentage égal à 0,0828 %.

EX 9

1

- Urnes discernables
- Boules indescernables, on peut mettre plusieurs ou toutes ~~...~~ dans une même urnes.
- On s'interesse au nombre de boules dans chacune des urnes.

⇒ Soit X le nombre d'urnes vides lors de la distribution des boules dans les urnes.

$$X(\Omega) = [\![0, p-1]\!]$$

0 : aucune urne vide donc chacune contient au moins une boule, $n \geq p$

p − 1 : Une seule urne contient toutes les boules et donc il y'a $p-1$ urnes vide.

~~$[X=K]$ = (Avoir K urnes vides et (p-K) urnes non vides)~~

~~Nombre de choisir K urnes parmi p~~

~~C_p^K~~

$[X=K]$ = "Avoir K urnes vides et $(p-K)$ urnes non vides"

nombre du choisir K urnes parmi p distinctes et non ordonnées.

$\downarrow$

C_p^K

on a n boules à répartir dans $(p-K)$ urnes non vides

$\downarrow$

nombre de choix possibles

$Card\left(\sum_{s=n}^{p-K}\right) = C_{n-1}^{p-K-1}$

• $card([X=K]) = C_p^K \cdot C_{n-1}^{p-K-1}$ avec $0 \leq K \leq p-1$.

Donc :
$$P([X=K]) = \frac{C_n^K C_{n-1}^{p-K-1}}{C_{n+p-1}^{p-1}}$$

② $$\sum_{K=0}^{p-1} P([X=K]) = \frac{\sum_{K=0}^{p-1} C_p^K \cdot C_{n-1}^{p-K-1}}{C_{n+p-1}^{p-1}}$$

$$= \frac{C_{n+p-1}^{p-1}}{C_{n+p-1}^{p-1}}$$ } Via la formule de Vandermonde

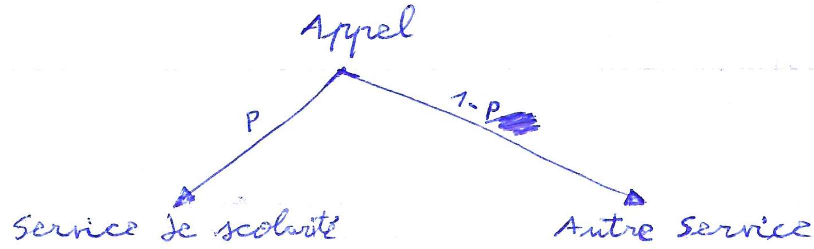
$$= 1$$

$\boxed{EX\ 8}$

$\overbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0}^{n \text{ oeufs}}$

$$P([Y=K] \mid [X=n]) = C_n^K\, p^K q^{n-K}$$

~~EX~~ ~~Ex~~



X = nombre d'appels téléphoniques.

$X \hookrightarrow P(\lambda)$

Y = nombre d'appel téléphonique demandont le service de scolarité.

① On cherche $P([Y=K] \mid [X=n])$ avec $0 \leq K \leq n$

$Y \mid [X=n] \hookrightarrow B(n, p)$

Alors : $P([Y=K] \mid [X=n]) = C_n^K p^K q^{n-K}$ avec $0 \leq K \leq n$

② On cherche $P([Y=K] \cap [X=n]) = P(B_K \cap A_n)$

$$P(B_K \cap A_n) = P(B_K \mid A_n) . P(A_n)$$
$$= C_n^K . p^K . q^{n-K} . P(A_n)$$

$X \hookrightarrow P(\lambda)$, $\quad P([X=1]) = P(A_n) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

$$P(B_K \cap A_n) = C_n^K p^K q^{n-K} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

③ On cherche $P[Y=K]$ ou $P(B_K)$

$$[Y=K] = [Y=K] \cap \Omega$$

$$= [Y=K] \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X=n] \right)$$

$$= \bigcup_{n=0}^{+\infty} [Y=K] \cap [X=n]$$

$$= \bigcup_{n=K}^{+\infty} \left([Y=K] \cap [X=n] \right)$$

$$P(Y=K) = \sum_{n=K}^{+\infty} \frac{n!}{K!\,(n-K)!} \cancel{p} \, p^K q^{n-K} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{K!} p^K \lambda^K \sum_{n=K}^{+\infty} \frac{q^{n-K} \lambda^{n-K}}{(n-K)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} . (\lambda p)^K}{K!} . \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^K}{K!} e^{\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^K}{K!} . e^{-\lambda p} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{N}$$

$$Y \hookrightarrow P(\lambda p)$$

EX 10

Soit :

$$X_j = \begin{cases} 1 \longrightarrow \text{proba} = p \\ -1 \longrightarrow \text{proba} = q = 1-p \end{cases}$$

Alors

$$Y_j = \frac{X_j + 1}{2} = \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \longrightarrow p \\ \frac{-1+1}{2} = 0 \longrightarrow q = 1-p \end{cases}$$

et on a X_j ⫫ $\Rightarrow Y_j$ ⫫ et $Y_j \hookrightarrow B(1, p)$

avec $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

Alors $Z = \sum_{j=1}^{n} Y_j \hookrightarrow B(n, p)$

Donc $\boxed{Z(\Omega) = [\![0, n]\!]}$

- On a $X_j = 2Y_j - 1$ Alors :

$$S = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} (2Y_j - 1) = 2\sum_{j=1}^{n} Y_j - n = \boxed{2Z - n}$$

$S(\Omega) = 2[\![0, n]\!] - n$

$= [\![-n, -n+2, -n+4, \ldots, n-2, n]\!]$

$P(S=K) = P(2Z - n = K) = P(2Z = n+K) = P\left(Z = \frac{n+K}{2}\right)$

avec $K \in 2[\![0, n]\!] - n = \mathbb{K}$

$= C_n^{\frac{n+K}{2}} \cdot p^{\frac{n+K}{2}} \cdot q^{\frac{n-K}{2}}$ avec $q \in \mathbb{K}$

$E(S) = E(2Z - n) = 2E(Z) - n$

$= 2np - n$

$= n(2p-1)$

$V(S) = V(2Z - n) = 4V(Z) = 4npq$