TD 3

EX2

Soit E = "obtenir exactement un roi et coeur"

A = { choisir un roi de coeur }

B = { choisir un coeur qui n'est pas roi et un roi qui n'est pas coeur .et completer la main dans le reste de 21 cartes }

Card $(\Omega) = C_{32}^{8}$

$E = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$

Card $(A) = \underbrace{C_1^1}_{\text{choisir le roi de coeur}} \underbrace{C_{21}^{7}}_{\text{completer la main dans le reste}}$

choisir 7 parmi 21

Card $(B) = C_3^1 C_7^1 C_{21}^{6}$

$P(E) = P(A) + P(B)$

$= \dfrac{C_1^1 C_{21}^7 + C_3^1 C_7^1 C_{21}^6}{C_{32}^8}$

$= 0,119$

$\boxed{\text{EX3}}$

① $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$ card $(\Omega) = 6^3$

A = {on obtenir au moins un sixe}

B = {deux dés au moins donnent un résultat identique}

- $\bar{A}$ = {ne jamais obtenir de sixe}

$= [\![1, 5]\!]^3$

card $(\bar{A}) = 5^3$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = 1 - \frac{125}{216} = \boxed{\frac{91}{216}}$

- $\bar{B}$ = {on obtent 3 resultat differents}

card $(\bar{B}) = A_6^3$. (on choisit 3 elements ordonnés et differents parmi 6)

$C_6^1 \times C_5^1 \times C_4^1$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_6^3}{6^3} = 1 - \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = 1 - \frac{5}{9}$

$\boxed{= \frac{4}{9}}$

- $\bar{A} \cap \bar{B}$ = {on obtient 3 résultats differents dans $[\![1, 6]\!]$}

card $(\bar{A} \cap \bar{B}) = A_5^3$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{A_5^3}{6^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{18}$

---

② $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{125}{216} - \frac{5}{18} = \frac{125 - 60}{216} = \frac{65}{216}$

- $P(A \cap B) = P(B) - P(B \cap \bar{A})$

$$= \frac{4}{9} - \frac{65}{216}$$

$$= \frac{96 - 65}{216}$$

$$= \frac{31}{216}$$

- $P(A \cup B) = P(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= 1 - \frac{5}{18}$$

$$= \frac{18 - 5}{18}$$

$$= \frac{13}{18}$$

<u>2ème method :</u> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{91 + 96 - 31}{216}$$

$$= \frac{156}{216}$$

$$= \frac{13}{18}$$

$\boxed{EX\ 4}$ On suppose que les dés sont discernables :

$$\Omega_n = \left([\![1, 6]\!]^2 \right)^n$$

A_n = "Obtenir au moins une paire de six sur n double lancer"

$\overline{A_n}$ = "n'obtient aucun paire de six"

$card(\overline{A_n}) = 35^n$

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \frac{35^n}{36^n} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

On recherche n tels que. $P(A_n) \geq K \iff 1-\left(\frac{35}{36}\right)^n \geq K$

$$\iff \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq 1-K$$

$$\iff n \ln\left(\frac{35}{36}\right) \leq \ln(1-K)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(1-K)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)}$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(1-K)}{\ln(35)-\ln(36)}$$

il suffit de choisir $n \geq n_0 = E\left(\frac{\ln(1-K)}{\ln(35)-\ln(36)}\right)+1$

$\boxed{\text{EX5}}$

① On tire deux boule simultanément (L'ordre n'est pas important et sans répétition)

ⓐ $\Omega = \left\{ \{B_i, B_j\} \,;\, i \neq j \,;\, i,j \in [\![1,9]\!] \right\}$

$\text{card}(\Omega) = C_9^2 = \frac{9!}{2!\,7!} = 9 \times 4 = 36$

ⓑ M = " obtenir deux boule de même parité "

c-à-d : deux boules sont pairs ou impair.

$M = A \overset{d}{\cup} B$ avec $\begin{cases} A = \text{" deux Boules paires "} \\ B = \text{" deux Boules impaires "} \end{cases}$

donc $P(M) = P(A \overset{d}{\cup} B)$

$= P(A) + P(B)$

$= \frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{C_5^2}{C_9^2}$

EX 5

$$= \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2}$$

$$= \frac{\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{5!}{2!\,3!}}{36}$$

$$= \frac{2\times 3 + 5\times 2}{36}$$

$$= \frac{16}{36}$$

$$= \frac{4}{9}$$

---

2) a) On tire, une boule puis une second boule (sans remise de la première) [tirage successifs sans remise A_n^p]

c-à-d : L'ordre est important sans répitition.

$$\Omega = \{ (B_i ; B_j) ; i \neq j ; i,j \in [\![1,9]\!] \}$$

$$\text{card}(\Omega) = A_9^2 = 9\times 8 = 72$$

b) $P(M) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B)$$

$$= \frac{A_4^2}{A_9^2} + \frac{A_5^2}{A_9^2}$$

$$= \frac{4\times 3 + 5\times 4}{72} = \frac{4}{9}$$

3) a – On tire une boule, et on remet puis on retire une boule [triage successifs avec remise (n^p)]

$\Omega = \{ (B_i , B_j) \; ; \; i, j \in [\![1, 9]\!] \}$

$card(\Omega) = 9^2$

b – on a $P(M) = P(A \overset{d}{\cup} B)$

$= P(A) + P(B)$

$= \frac{4^2}{9^2} + \frac{5^2}{9^2} = \frac{16 + 25}{9^2} = \frac{41}{81}$

Exercice 3

1) a) On Tire 2 boules simultanement [l'ordre n'est pas importan] + sans repetition

On a $\Omega = \{ \{B_i, B_j\} \; ; \; i \neq j \, , \; i, j \in [\![1, 9]\!] \}$

$card(\Omega) = C_9^2 = \frac{9!}{2!\,7!} = 9 \times 4 = 36$

b) M = " Obtenir 2 boules de même partie "

càd : deux boule sont pairs ou impair.

$M = A \overset{d}{\cup} B$ avec A " 2 boules pairs "

B " " impairs "

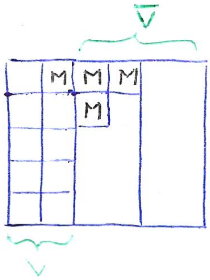
donc $P(M) = P(A \overset{d}{\cup} B)$

$= P(A) + P(B)$

$= C_4^2 / C_9^2 + C_5^2 / C_9^2 = \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2}$

$= \frac{2 \times 3 + 5 \times 2}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

EX6



① $P(V) = \frac{1}{3}$ (le tiers de la population est vacciné)

$P(\bar{V}) = \frac{2}{3}$ $\left(P(\bar{V}) = 1 - P(V) \right)$

$P(V/M) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(\bar{V}|M) = \frac{3}{4}$ (1 contre 3)

$P(M|V) = \frac{1}{10}$ (les malades representent 10%) $\qquad$ $P(\bar{M}|V) = \frac{9}{10}$

② $P(V|M) = \dfrac{P(V\cap M)}{P(M)} = \dfrac{1}{4}$

$P(M|V) = \dfrac{P(M\cap V)}{P(V)} = \dfrac{1}{10}$

$$\frac{P(V|M)}{P(M|V)} = \frac{\frac{P(V\cap M)}{P(M)}}{\frac{P(M\cap V)}{P(V)}} = \frac{P(V)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}} = \frac{5}{2}$$

$$P(M) = \frac{2P(V)}{5} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(M|\bar{V}) = \frac{P(M\cap\bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{P(\bar{V}|M)\,P(M)}{P(\bar{V})} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

③ $P(M|V) = \frac{1}{10} \equiv 10\%$ $\qquad$ $P(M|\bar{V}) = \frac{3}{20} \equiv 15\%$

Donc la vaccin est légèrement efficace car il fait baisser le proucentage des malades de 15% à 10%

EX 10

C : Comprimé conforme.

$\bar{C}$: Comprimé, n'est pas conforme.

R : Comprimé accepté

$\bar{R}$: comprimé refusé

$P(C) = 0,98$ $P(\bar{R}|C) = 0,97$ $P(R|\bar{C}) = 0,99$

1) $P(R|C) = 1 - P(R|\bar{C}) = 1 - 0,97 = 0,03$

$P(R\cap C) = P(R|C) \times P(C) = 0,03 \times 0,98 = 0,0294$

$P(R\cap \bar{C}) = P(R|\bar{C}) . p(\bar{C}) = 0,99 . 0,02 = 0,0198$

2) a) D'aprés la theoreme des probabilités totales.

$P(R) = P(R\cap C) + P(R\cap \bar{C})$

$= 0,0294 + 0,019$

$= 0,0492$

b) $P(C|R) = \dfrac{P(C\cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,0294}{0,0492} = 0,5975$

EX 8

1) a) on a $C_{12}^{2} = 66$ possibilités de choisir 2 personnes parmi 12.

et on a 6 cas pour avoir un couple marié, donc :

$p = \dfrac{6}{66} = \dfrac{1}{11}$

EX 2

(b) On a 6 hommes et 6 femmes, donc :

$$P = \frac{6 \times 6}{66} = \frac{6}{11}$$

(2) On choisit 4 personnes parmi 12 :

$$card(\Omega_2) = C_{12}^{4} = 495$$

(a) A = " on obtién deux couples "

$$P(A) = \frac{C_6^2}{C_{12}^4} = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$$

(b)

B = " on obtient aucun couple "

$$P(B) = \frac{C_6^4 \times 2^4}{C_{12}^4} = \frac{\frac{6 \times 5}{2} \times 16}{495} = \frac{16}{33}$$

C_6^4 : on choisit parmi les 6 couples 4 elements

2^4 : pour chaque élèment on a deux choix : mari ou femme

(c) Un couple parmi 6 :

$$P(C) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \left(\frac{1}{33} + \frac{16}{33}\right) = \frac{16}{33}$$

(3) $Card(\Omega_3) = ?$

Le nombre de repartition de 12 personnes en 6 groupes content. 2 personnes est :

$$Card(\Omega_3) = C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 7484400$$

EX 8

A_1 = " Chaque groupe constitue un couple marié "

Donc $P(A_1) = \dfrac{6!}{7484400}$

A_2 = " Chaque groupe comprenne un homme et une femme "

$\text{card}(A_2) = (6!)^2$

$$P(A_2) = \frac{(6!)^2}{7484400}$$

$\boxed{\text{EX}\cancel{7}}$

Soient les évènements suivants :

" + "

EX 7 Soient les evenement suivants :

"+" Le test est positif.

"$\bar{+}$" Le test est negatif.

M : Les personnes choisie au hasard est malade

$\bar{M}$: La personne choisie au hasard est non atteinte

$P(+/M) = 0,99$ et $P(-/M) = 0,01$

$P(+/\bar{M}) = 0,02$ et $P(-/\bar{M}) = 0,98$

$P(M) = \frac{1}{1000} = 0,001$

On cherche $P(M/+)$ qui pourra être calculé grâce à la formule de Bayes.

$$P(M/+) = \frac{P(+/M)\,P(M)}{P(+/M)\,P(M) + P(+/\bar{M})\,P(\bar{M})}$$

$$= \frac{0,99 \times 10^{-3}}{0,99 \times 10^{-3} + 0,02 \times 0,999}$$

$$= \frac{99}{2097} = 0,04$$

$\boxed{\text{EX}9}$ examiner 3 parmi 10 au hasard et sans remise

$$card(\Omega) = C_{10}^{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

$A = \{$le ~~paquet~~ paquet examiné est accepté$\}$

$B_1 = \{$le paquet contient 4 composants deffectueux$\}$

$B_2 = \{$le paquet contient 1 composants deffectueux$\}$

d'aprés la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2)$$

On a : $P(B_1) = 0,3$ $\qquad P(B_2) = 0,7$

$$P(A|B_1) = \frac{C_6^3\,C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B_2) = \frac{C_9^3\,C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times 0,3 + \frac{84}{120} \times 0,7$$

$$\boxed{P(A) = 0,54}$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 0,46$$