Université Sultane Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
SMA , Analyse 5

LIMITES & CONTINUITÉ DANS LES EVN

Ex.1 Montrer en appliquant la définition, que la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x - y + 2\,z, x - 2\,z),$$

admet $(6,-3)$ comme limite quand (x,y,z) tend vers $(1,-1,2)$.

Ex.2 Étudier l'existence d'une éventuelle limite en $(0,0)$ pour les fonctions :

$a)\ f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$; $b)\ f(x,y) = \dfrac{x^3\,y^2}{x^6+y^4}$

$c)\ f(x,y) = \dfrac{x^4\,y^3}{x^6+y^8}$; $d)\ f(x,y) = \dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$

$e)\ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$; $f)\ f(x,y) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{|xy|}\,)}{|y|}$.

Ex.3 La fonction à deux variables suivante

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|y|}{x^2}\ \exp\left(\dfrac{-|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ f(0,y) = 0. \end{cases}$$

admet-elle une limite en $(0,0)$?

Ex.4 On note $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2-u^2 \neq 0\}$. L'application réelle f définie sur U par

$$f(x,y,u) = \frac{x^4+y^4-u^4}{x^2+y^2-u^2},$$

admet-elle une limite en $(0,0,0)$?

Facultatif : même question pour la fonction $f(x,y,u,v) = \dfrac{x^3+y^3-u^3-v^3}{x^2+y^2-u^2-v^2}$.

Ex.5 Soit $f : E \to F$ une fonction continue, montrer que

1. l'image réciproque d'un ouvert de F par f, est un ouvert de E.
2. l'image réciproque d'un fermé de F par f, est un fermé de E.

Ex.6 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $f : E \to E$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|^2}$ est une fonction continue et que $f(E) = \overline{B}(0,1/2)$.

Ex.7 Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $A \neq \emptyset \in \mathscr{P}(E)$, $B \neq \emptyset \in \mathscr{P}(F)$. Étant donné $f : A \to G$ et $g : B \to G$ deux applications, montrer que l'application

$$\varphi : A \times B \to G\,, \quad (x,y) \mapsto f(x) + g(y),$$

est continue si et seulement si f et g sont continues.

Ex.8 Soient E, F deux **evn**, $f : E \to F$ une application et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E, c-à-dire une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E satisfaisant $\bigcup_{i\in I} U_i = E$. Montrer que si, pour tout $i \in I$, la restriction $f_{|U_i}$ de f à U_i est continue, alors l'application f est aussi continue.

Ex.9 Étudier la continuité des applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} x\sin(1/y) + y\sin(1/x) & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad xy \neq 0. \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad |x| \leqslant |y| \\ y^2 & \text{si} \quad |x| > |y|. \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^4 - y^2)^2}{x^6} & \text{si} \quad |y| < x^2 \\ 0 & \text{si} \quad |y| \geqslant x^2. \end{cases}$$

Ex.10 Soient $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (a\,y, b\,x)$. Montrer que f est uniformément continue.

Ex.11 Montrer que les parties suivantes de $\mathbb{C}$ sont homéomorphes à $\mathbb{C}^*$:

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\}\,,\quad E_2 = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}\,,\quad E_3 = \{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 2\}.$$

Ex.12 Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall f \in E,\quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Soit $\psi : E \to \mathbb{R}$, $\psi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. Montrer que $\psi \in \mathcal{LC}(E,\mathbb{R})$ et calculer sa norme $\|\psi\|_{\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})}$.

Ex.13 Soient E, F deux **evn** et $f : A \subset E \to F$ une application telle que $\overline{f(A)}$ est compact. Montrer que si le graphe $G_f = \{(x, f(x)),\ x \in A\}$ de f est un fermé de $A \times F$, alors f est continue.

Ex.14 Soient E, F deux **evn** tels que E soit de dimension finie, et $f : E \to F$ une application continue telle que, pour tout borné B de F, $f^{-1}(B)$ est un borné de E.

IX

1. Montrer que pour tout fermé G de E, $f(G)$ est un fermé de F.
2. Application : montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout fermé G de $\mathbb{K}$, $P(G)$ est fermée.

Ex.15 Soient A et B deux parties **cpa** d'un **evn** E. Montrer que $A + B$ est une partie **cpa**.

Ex.16 Soient A et B deux parties des **evn** E et F, respectivement. Montrer que

1. si A et B sont **cpa**, alors $A \times B$ est une partie **cpa** de $E \times F$.
2. si $A \times B$ est **cpa** et A, B sont non vides, alors A et B sont **cpa**.

Ex.17 Soit A une partie **cpa** d'un **evn** de dimension finie E et $f : A \to \{0, 1\}$ une application continue. Montrer que f est constante. ($\{0, 1\}$ est muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$).

Serie TD 2

EX1 : Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes. On utilise par exemple la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace de départ $\mathbb{R}^2$ et la norme $\|\cdot\|_1$ dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$. On cherche à montrer

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \eta = ??)$ tel que :

$$\|(x,y,z)-(1,-1,2)\|_\infty \leqslant \eta \Longrightarrow \| f(x,y,z)-(6,-3)\|_1 \leqslant \varepsilon$$

On a :

$$\| f(x,y,z)-(6,-3)\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} x-y+2z \\ x-2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_1$$

$$= \left\| \begin{matrix} (x-1)-(y+1)+2(z-2) \\ (x-1)-2(z-2) \end{matrix} \right\|_1$$

$$= |(x-1)-(y+1)+2(z-2)| + |(x-1)-2(z-2)|$$

$$\underset{\substack{\text{Inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leqslant} |x-1|+|y+1|+2|z-2| + |x-1| + 2|z-2|$$

$$\leqslant 7\max(|x-1|, |y+1|, |z-2|) = 7\,\|(x,y,z)-(1,-1,2)\|_\infty$$

Alors il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{7}$ pour obtenir

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \eta = \tfrac{\varepsilon}{7}) ; \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leqslant \eta \Longrightarrow \left\| f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_1 \leqslant 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{(x,y,z)\to\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} f(x,y,z) = (6,-3).$$

55

Ex2 (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$?, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0^-} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$$

Alors, f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^6+y^4}$ en $(0,0)$?, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0\\ y=\sqrt{x^3}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 x^3}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}.$$

Alors, f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

[illegible]

(c) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^3}{x^6+y^8}$ en $(0,0)$?, on a

$$|f(x,y)|=\frac{|x|^4|y|^3}{x^6+y^8}=\frac{|x|^4\cdot|y|^3}{|x|^6+|y|^8}=\frac{(|x|^3)^{4/3}\cdot(|y|^4)^{3/4}}{(|x|^3)^2+(|y|^4)^2}$$

Posons $X=|x|^3$ et $Y=|y|^4=y^4$, alors

$$|f(x,y)|=\frac{X^{4/3}\cdot Y^{3/4}}{X^2+Y^2}\quad ;\ \left((\forall A\in\mathbb{R}_+);\ A\leq\sqrt{A^2+B^2}\right)$$

$$\leq\frac{\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)^{4/3}\cdot\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)^{3/4}}{\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)^2}$$

$$\leq\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)^{4/3+\frac{3}{4}-2}=\left(X^2+Y^2\right)^{1/24}$$

$$\leq\left(|x|^6+|y|^8\right)^{1/24}.$$

Puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(|x|^6+|y|^8\right)^{\frac{1}{24}}=0$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

(d) $f(x,y)=\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$?, on a.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}-\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to0}-x^2=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x+x^2}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2-(-x+x^2)\right)\left((-x+x^2)^2-x\right)}{x+(-x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cancel{(2x-x^2)}\,(x^4-2x^3+x^2-x)}{x^2}$$

$$\cancel{=\lim_{x\to0}}\ \cancel{(2-x)}\cancel{(x^3-2x^2+x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} x^3 - 2x^2 + x - 1 = -1$$

En conclusion, f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

<u>(e)</u> $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$??

Notons $\quad \omega = \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

On a :

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$; $\quad \sqrt{x^2+y^2} \geqslant |x| = x \quad$ et $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant |y| = y$

donc $\quad \boxed{\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \max(|x|, |y|) = \omega .}$

et

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$; $\quad \boxed{|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|} \leqslant \omega . \omega^{1/2} + \omega . \omega^{1/2} = 2\omega^{3/2}}$

Par conséquent ;

$(\forall x, y \in \mathbb{R}^*)$; $\quad f(x,y) \geqslant \dfrac{\omega}{2\omega^{3/2}} = \dfrac{1}{2\omega^{3/2 - 1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\omega}}$

Comme $\quad (x,y) \to (0,0) \iff \omega \to 0^+$ et ~~alors~~ $\lim_{\omega \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{\omega}} = +\infty$

$\cancel{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\omega \to 0^+}}$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty .$$

(f) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(\sqrt{|xy|})}{|y|}$ en $(0,0)$?

Puisque $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, alors il existe $\alpha>0$ tel que

$\forall t\in]-\alpha,\alpha[$; $\quad 0\leq 1-\cos(t)\leq t^2$

Alors $\forall (x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tel que $|x|<\alpha$ et $|y|<\alpha$, on a

$$|f(x,y)| = \left|\frac{1-\cos(\sqrt{|xy|})}{|y|}\right| \leq \frac{|xy|}{|y|} = |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

<u>Ex 3</u> On a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{|x^2|}{x^2}\exp\left(-\frac{|x^2|}{x^2}\right)=e^{-1}\neq 0$$

Alors f n'admet de limite en $(0,0)$.

<u>Ex 4</u> : on a $f(x,y,u)=\dfrac{x^4+y^4-u^4}{x^2+y^2-u^2}$, alors

$$f(x,0,0)=\frac{x^4}{x^2}=x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc $$\lim_{\substack{(x,y,u)\to(0,0,0)\\ y=u=0}} f(x,y,u)=\lim_{x\to 0} f(x,0,0)=0.$$

D'autre part, on a

$$f(x,x,\sqrt{2}x+x^4) = \frac{2x^4-(\sqrt{2}x+x^4)^4}{2x^2-(\sqrt{2}x+x^4)^2}$$

$$= \frac{2x^4-(4x^4+o(x^4))}{2x^2-(2x^2+2\sqrt{2}x^5+o(x^5))}$$

$$= \frac{-2x^4+o(x^4)}{-2\sqrt{2}x^5+o(x^5)} \underset{0}{\sim} \frac{-2x^4}{-2\sqrt{2}x^5} = \frac{1}{\sqrt{2}x}$$

Par suite

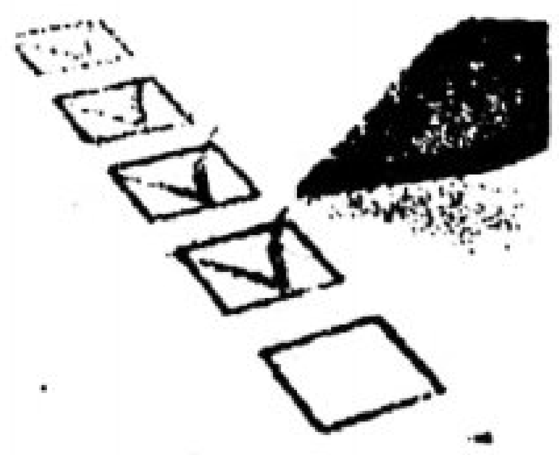
$$\lim_{\substack{(x,y,u)\to(0,0,0)\\ y=x \\ u=\sqrt{2}x+x^4}} f(x,y,u) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}x} = +\infty$$

Finalement, la fonction f n'admet pas de limite en $(0,0,0)$.

Facultatif:

$$f(t,0,0,0) = t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$f(t+t^2, -t+t^2, t, -t) = 3+t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 3$$



55

EX5 La question 2. découle de 1. puisque, on a :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F) ; \quad f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E f^{-1}(B)$$

Montrons alors 1. ; soit Ω un ouvert de F, on a :

$$x \in f^{-1}(\Omega) \Longrightarrow f(x) \in \Omega$$

$$\Longrightarrow \Omega \in \mathcal{V}_F(f(x)) \quad \text{(puisque } \Omega \text{ ouvert)}$$

Or f est continue en x, et donc

$$\exists W \in \mathcal{V}_E(x) \text{ tel que } f(W) \subset \Omega$$

$$\text{d'où } \quad W \subset f^{-1}(f(W)) \subset f^{-1}(\Omega)$$

$$\text{donc } \quad f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}_E(x).$$

et ceci quelque soit $x \in f^{-1}(\Omega)$. Par suite $f^{-1}(\Omega)$ est voisinage de chacun de ces points et alors $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E.

__Rappel__

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) ; \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B ; \quad \forall B \in \mathcal{P}(F).$$

EX6 : Soit $f : E \longrightarrow E$; $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|_E^2}$. ~~La~~ la fonction est continue par opérations sur les fonctions continues.

~~$\|\cdot\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|_E$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{1+}$~~

De plus, on a :

$\forall x \in E ; \quad \|f(x)\| = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Car $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2t-1-t^2}{2(1+t^2)} = \dfrac{-(1-2t+t^2)}{2(1+t^2)}$

$$= \frac{-(1-t)^2}{2(1+t^2)} \leq 0$$

d'où $\quad (\forall x \in E) ; \quad f(x) \in \overline{B}(0, \tfrac{1}{2})$

c-à-dire $\quad \boxed{f(E) \subset \overline{B}(0,\tfrac{1}{2}) \quad : (1)}$

D'autre part, soit $y \in \overline{B}(0, \frac{1}{2})$, a-t-on un $x \in E$ tel que

$$\cancel{f(x)=} \; y = f(x)$$

supposons que $x = \lambda y$ ~~...~~ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer, alors

$\cancel{\&} \quad y = f(x) \iff y = f(\lambda y)$

$$\iff y = \frac{\lambda y}{1+\|\lambda y\|^2} = \frac{\lambda y}{1+|\lambda|^2 \cdot \|y\|^2} = \frac{\lambda y}{1+\lambda^2 \|y\|^2}$$

~~Si $y \neq 0$, alors $x \neq 0$ et donc $x \neq 0$~~

$$\Leftarrow \quad \|y\|^2 \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Remarquons que si $y = 0_E$, alors $x = 0_E$ convient

puisque $f(0_E) = \dfrac{0_E}{1+\|0_E\|^2} = 0_E$

Alors supposons que $y \neq 0_E$ et donc

$$y = f(x) \iff \underbrace{\|y\|^2 \lambda^2 - \lambda + 1 = 0}_{(Equ)}$$

55

L'équation du second dégré

$(Equ) : \quad \|y\|^2 \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

d'inconnu $\lambda \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution, puisque

$$\Delta = 1 - 4\|y\|^2 \geq 0 \quad \text{puisque } y \in \overline{B}(0, \tfrac{1}{2})$$

Finalement; on obtient que

$$\forall y \in \bar{B}(0,\tfrac{1}{2});\ \exists x \in E \text{ tels que } \quad y = f(x).$$

d'où $\boxed{\bar{B}(0,\tfrac{1}{2}) \subset f(E) \qquad (2)}$

Conclusion : En combinant (1) et (2), on en déduit

$$\boxed{f(E) = \bar{B}(0,\tfrac{1}{2})}$$

EX7 Supposons φ est continue sur $A \times B$. Puisque $B \neq \emptyset$, il existe $b \in B$ et alors on a :

$$(\forall x \in A); \quad f(x) = \varphi(x,b) - g(b).$$

d'où f est une fonction continue puisque $\varphi(\cdot, b) = \varphi \circ h$

où $x \xmapsto[\text{continue}]{h} (x,b)$ et $(x,y) \xrightarrow[\text{continue}]{\varphi} f(x) + f(y)$ sont continues.

De même, g est continue sur B.

Inversement, supposons f et g sont resp. continues sur A et B resp., alors on a :

$$\varphi = f \circ pr_1 + g \circ pr_2$$

Comme les deux projections $pr_1 : E \times E \longrightarrow E$, $pr_1(x,y) = x$ et $pr_2 : E \times E \longrightarrow E$, $pr_2(x,y) = y$ sont continues, alors par composition, φ est continue sur $A \times B$.

Ex 9 (a) D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues.

. Puis, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$, l'application $(x,y) \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ n'admet pas de limite en $(x_0, 0)$ et l'application $(x,y) \longmapsto y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0$

Finalement,

f n'a pas de limite en $(x_0, 0)$

et par symétrie, elle n'a pas de limite en $(0, y_0)$ avec $y_0 \in \mathbb{R}^*$.

Ensuite :

$$x \sin\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \quad \text{car} \quad \left|x \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

et

$$y \sin\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

donc

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

Conclusion : f est continue sur $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\}$.

(b) D'abord, f est continue sur l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \neq |y|\}$.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x_0| = |y_0|$, alors

$$f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ |x| \leqslant |y|}]{} x_0^2 = f(x_0, y_0)$$

et

$$f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ |x| > |y|}]{} y_0^2 = x_0^2 = f(x_0, y_0)$$

donc f est continue en (x_0, y_0)

55

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(c) D'abord, f est continue sur l'ouvert

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ |y| \neq x^2\}$$

par opérations sur les fonctions continues.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|y_0| = x_0^2$, alors

• si $x_0 \neq 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |y|<x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |y|<x^2}} \frac{(x^4-y^2)^2}{x^6} = \frac{(x_0^4-y_0^2)^2}{x_0^6} = 0 = f(x_0,y_0).$$

et

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |y|\geq x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |y|\geq x^2}} 0 = 0 = f(x_0,y_0)$$

donc

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} f(x_0,y_0) = 0.$$

• Supposons $x_0 = 0$ (et donc $y_0 = 0$). Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$x \neq 0$ et $|y| < x^2$, alors on a :

$$\cancel{|f(x,y) - f(x_0,y_0)|} \;\cancel{=\ |f(x,y)|}$$

$$|f(x,y)| = \frac{(x^4-y^2)^2}{x^6} = \frac{[(x^2-y)(x^2+y)]^2}{x^6} = \frac{(x^2-y)^2(x^2+y)^2}{x^6}$$

Comme :

$$0 \leq \frac{(x^2-y)(x^2+y)^2}{x^6} \leq \frac{(x^2+|y|)^3}{x^6} \leq \frac{(x^2+x^2)^3}{x^6} \leq \frac{8x^6}{x^6} = 8,$$

Il vient que

$\cancel{|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq 8(x^2 - y)} \quad \cancel{\xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |y| < x^2}]{} 0}$

$\cancel{f(0,0) = 0}$

$$|f(x,y)| \leq 8(x^2-y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |y|<x^2}]{} 0 = \cancel{f(0,0)}.$$

d'où $\quad f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |y|<x^2}]{} 0 = f(0,0)$

et donc $\quad f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$ (étant donné que $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |y|\geq x^2}]{} 0 = f(0,0)$).

Conclusion :

f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 16 : Soient $(x_1,x_2), (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a :

$$\| f(x_1,x_2) - f(y_1,y_2) \|_1 = \| (ax_2, bx_1) - (ay_2, by_1) \|_1$$

$$= \| ax_2 - ay_2 , bx_1 - by_1 \|_1$$

$$= \| a(x_2-y_2) ; b(x_1-y_1) \|_1$$

$$= |a(x_2-y_2)| + |b(x_1-y_1)|$$

$$= a\,|x_2-y_2| + b\,|x_1-y_1|$$

Notons $K = \text{Max}(a,b) \in \mathbb{R}_+$, alors, on a

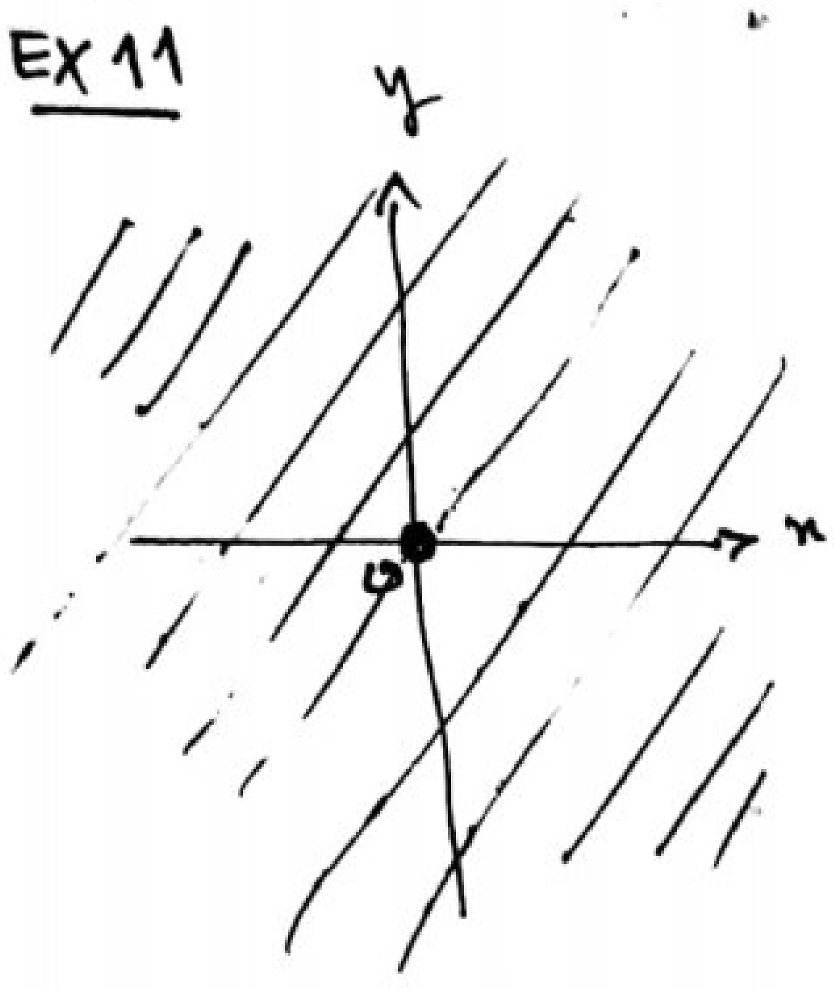
$$\| f(x_1,x_2) - f(y_1,y_2) \|_1 \leq K.\left(|x_2-y_2| + |x_1-y_1|\right)$$

$$\leq K \| (x_1;x_2) - (y_1;y_2) \|_1$$

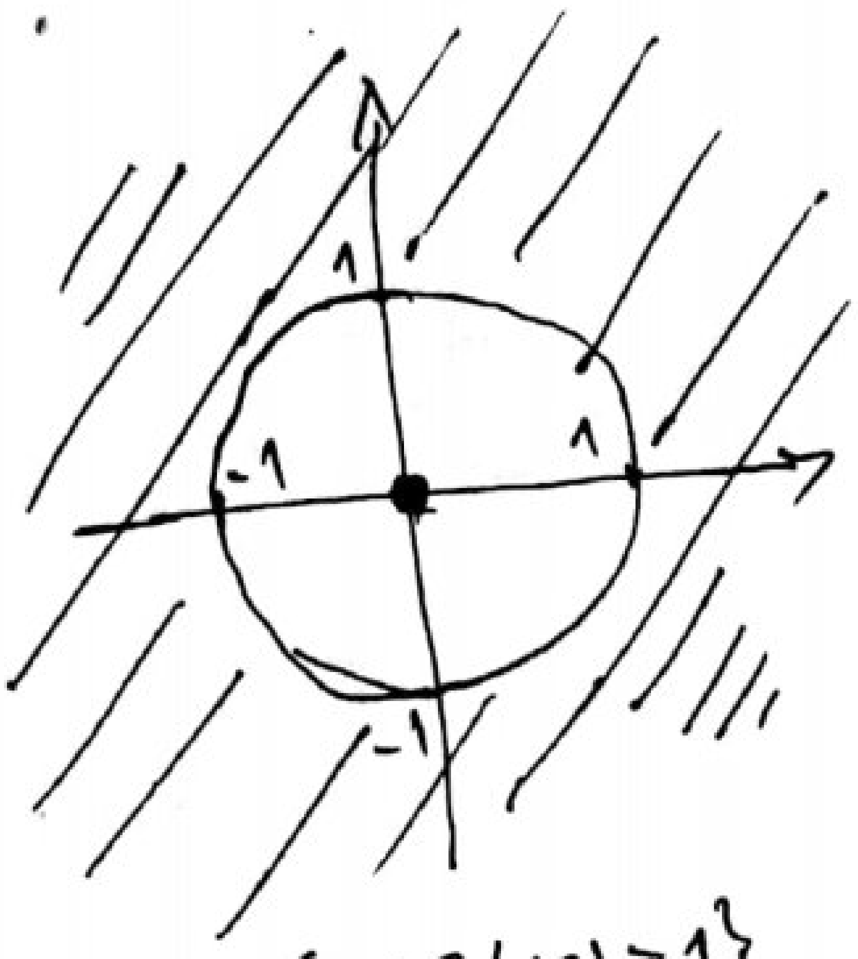
Donc f est lipschitzienne est par conséquent elle est continue uniformément.

55

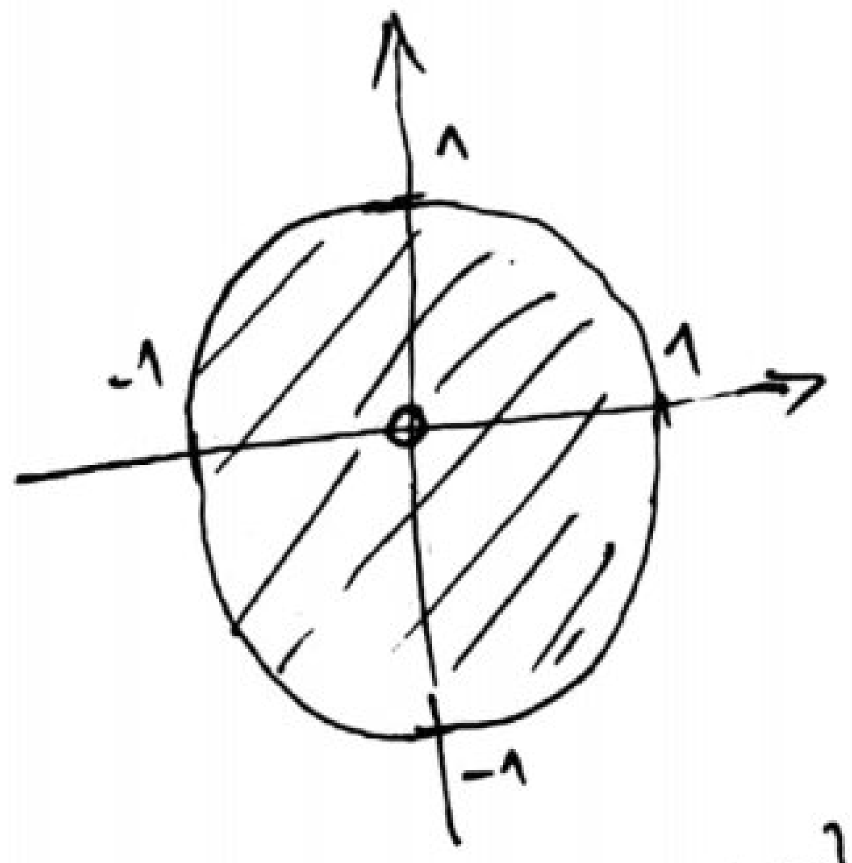
EX 11



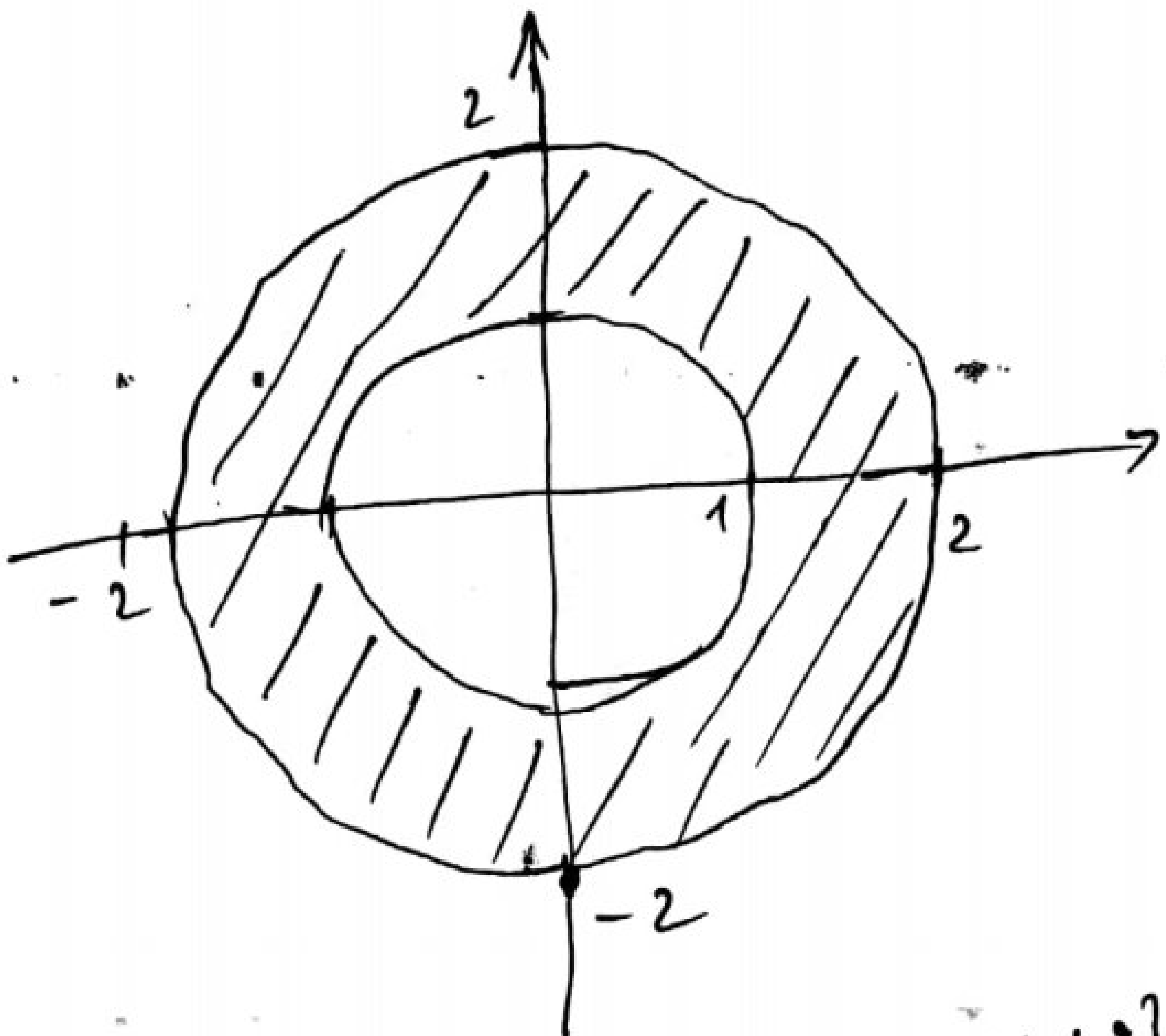
$\mathbb{C}^*$



$E_1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| > 1\}$



$E_2 = \{z \in \mathbb{C} \,,\, 0 < |z| < 1\}$



$E_3 = \{z \in \mathbb{C} \,;\, 1 < |z| < 2\}$.

Il suffit de vérifier que les applications suivantes

$$\begin{array}{lll} \mathbb{C}^* \longrightarrow E_1 & ; \quad E_1 \longrightarrow E_2 & ; \quad E_2 \longrightarrow E_3 \\ z \longmapsto \left(1+\frac{1}{|z|}\right).z & \quad z \longmapsto \frac{1}{z} & \quad z \longmapsto \left(1+\frac{1}{|z|}\right).z \end{array}$$

sont des bijections, de réciproques respectives :

$$\begin{array}{lll} E_1 \longrightarrow \mathbb{C}^* & ; \quad E_2 \longrightarrow E_1 & ; \quad E_3 \longrightarrow E_2 \\ u \longmapsto \left(1-\frac{1}{|u|}\right)u & \quad u \longmapsto \frac{1}{u} & \quad u \longmapsto \left(1-\frac{1}{|u|}\right)u. \end{array}$$

et que toutes ces applications sont continues.

EX.12

~~EX.13~~ De la linéarité de l'intégrale, on déduit que ψ est linéaire. De plus, on a : $\psi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = \mathcal{L}(E)$

$$(\forall f \in E) ; \quad |\psi(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1$$

Donc $\psi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est continue et que

$$(1) \quad \|\psi\|_{\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})} \leqslant 1. \quad \left(\|\psi\|_{\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})} := \sup_{f \neq 0} \frac{|\psi(f)|}{\|f\|_1} \right)$$

En posons $f_0 : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f_0(t) = 1$, on obtient

$$\|f_0\|_1 = \int_0^1 |1|\,dt = 1 \quad \text{et} \quad \psi(f_0) = \int_0^1 1\,dt = 1.$$

$\mathcal{LC}(E) = \mathcal{LC}(E,\mathbb{R})$

d'où $\dfrac{|\psi(f_0)|}{\|f_0\|_1} = 1$

Alors $(2) \quad \|\psi\|_{\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})} \geqslant 1$. Et finalement, on déduit de (1) et (2) que : $\|\psi\|_{\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})} = 1$.

Ex.13

~~Ex 2.19~~ : Par l'absurde, supposons f n'est pas continue, alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans A telle que :

$$x_n \xrightarrow[n\infty]{} a \quad \text{et} \quad (f(x_n))_n \not\longrightarrow f(a).$$

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une extractrice σ tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \quad d\left(f(x_{\sigma(n)}) ; f(a)\right) \geq \varepsilon .$$

Puisque $\overline{f(A)}$ compact, la suite $\left(f(x_{\sigma(n)})\right)_n$ d'éléments de $\overline{f(A)}$ admet au moins une valeur d'adherence dans $\overline{f(A)}$.

Il existe donc une extractrice τ et $b \in \overline{f(A)}$ tels que :

$$f(x_{\sigma\circ\tau(n)}) \longrightarrow b.$$

d'où $\left(x_{\sigma\circ\tau(n)} ; f(x_{\sigma\circ\tau(n)})\right)_n \longrightarrow (a, b)$

et $(x_{\sigma\circ\tau(n)}, f(x_{\sigma\circ\tau(n)}))_n$ d'éléments de G_f

Comme G_f est fermé, on deduit $(a, b) \in G_f$

et donc $\quad b = f(a).$

Ainsi $\quad f(x_{\sigma\circ\tau(n)}) \longrightarrow f(a)$ <u>Contradiction</u>.

<u>EX.14</u> 1. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(G)$, convergente vers un $z \in F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in G$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle bornée et donc

$$\{y_n ; n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné dans } F$$

et donc d'après l'hypothèse

$$f^{-1}(\{y_n ; n\in\mathbb{N}\}) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \text{ est bornée dans } E$$

Comme E est un evn de dimension fini, alors il existe une extractrice σ et $x \in E$ tels que :

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} x$$

De plus ; $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de G et G est fermé

alors $x \in G$.

Puis, puisque f est continue en x, alors

$$y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n+\infty]{} f(x) \in f(G)$$

Par conséquent ; $z = f(x) \in f(G)$ car $y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)})$ est une sous-suite de $y_n = f(x_n)$ qui convergente vers $z \in F$.

Et ceci établi que

$f(G)$ est fermé.

2. Application : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,

Puisque $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$, alors pour toute partie bornée B de $\mathbb{C}$, $P^{-1}(B)$ est bornée. De plus, P est continue, alors d'après la question 1. on obtient

" Pour tout partie bornée B de $\mathbb{C}$, $P^{-1}(B)$ est borné dans $\mathbb{C}$.

Ex.15

Soient $X_1, X_2 \in A+B$, alors

$(\exists a_1, a_2 \in A)(\exists b_1, b_2 \in B)$:

$$X_1 = a_1 + b_1 \text{ et } X_2 = a_2 + b_2.$$

Puisque A et B sont cpa, il existe deux arcs continues $\gamma, \delta : [0,1] \longrightarrow E$ tels que

$$\forall t \in [0,1]\ ; \quad \gamma(t) \in A \text{ et } \delta(t) \in B$$

$$\gamma(0) = a_1 \text{ et } \gamma(1) = a_2$$

$$\delta(0) = b_1 \text{ et } \delta(1) = b_2$$

L'application $\Gamma = \gamma + \delta : [0,1] \longrightarrow E$ est continue et on a:

$$\forall t \in [0,1]; \quad \Gamma(t) = \gamma(t) + \delta(t) \in A+B.$$

$$\Gamma(0) = \gamma(0) + \delta(0) = a_1 + b_1 = X_1$$

$$\Gamma(1) = \gamma(1) + \delta(1) = a_2 + b_2 = X_2$$

On conclut que $A+B$ est cpa.

<u>Rque</u>: Si on montre que $A \times B$ est cpa, on a

$$A+B = f(A\times B) \quad \text{où} \quad f : E\times E \longrightarrow E \text{ continue}, \quad (x,y) \longmapsto x+y$$

f est continue, alors $A+B = f(A\times B)$ est cpa.

Ex.16

(1) Supposons A et B cpa et soient (a,b) et (a',b') éléments de $A\times B$. Ils existe deux arcs continues

$\gamma : [0,1] \longrightarrow E$; $\delta : [0,1] \longrightarrow E$

$\forall t \in [0,1]$; $\gamma(t) \in A$; $\forall t \in [0,1]$; $\delta(t) \in B$

et $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = a'$ et $\delta(0) = b$; $\delta(1) = b'$

L'application $\Gamma : [0,1] \longrightarrow E \times E$ est continue et on
$t \longmapsto (\gamma(t), \delta(t))$

$$\forall t \in [0,1] \; ; \quad \Gamma(t) = (\gamma(t), \delta(t)) \in A \times B$$

$$\Gamma(0) = (\gamma(0), \delta(0)) = (a, b)$$

$$\Gamma(1) = (\gamma(1), \delta(1)) = (a', b')$$

Alors (a,b) et (a',b') peuvent être joints par un arc continue dans $A \times B$. En conclusion, $A \times B$ cpa.

(2) Supposons $A \times B$ cpa et A et B non vides. Soit $(a,a') \in A^2$, il existe $b_0 \in B$ $(B \neq \emptyset)$. Puisque $A \times B$ est cpa, il existe un arc continue dans $A \times A$.

$$\Gamma : [0;1] \longrightarrow E \times E$$

$$\forall t \in [0,1] \; ; \quad \Gamma(t) \in \cancel{(a, b_0)} \; A \times B.$$

$$\Gamma(0) = (a, b_0) \quad \text{et} \quad \Gamma(1) = (a', b_0).$$

L'application $pr_1 \circ \Gamma : [0,1] \longrightarrow E$ est continue

avec $\forall t \in [0,1] \; ; \quad pr_1 \circ \Gamma(t) \in pr_1(A \times B) = A$.

et $pr_1 \circ \Gamma(0) = a \; ; \quad pr_1 \circ \Gamma(1) = a'$

Ceci montre que a et a' peuvent être joints par un arc continu dans A et donc A est cpa.

(Le raisonnement est le même pour B).

EX 17 : soient $a, b \in A$. Puisque A est cpa, il existe un arc $\gamma : [0,1] \longrightarrow A$ joignant a et b dans A.

c-à-dire
$$\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(1) = b \\ \forall t \in [0,1] \,; \ \gamma(t) \in A \end{cases}$$

L'application $f \circ \gamma$ est continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $(f\circ\gamma)([0,1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (d'après le théorème des valeurs intermédiaires).

De plus, puisque $(f\circ\gamma)([0,1]) \subset \{0;1\}$, il s'ensuit que $f\circ\gamma$ est constante et donc.

$$f(a) = (f\circ\gamma)(0) = (f\circ\gamma)(1) = f(b)$$

Finalement, étant donné que a et b sont quelconques, il vient que f est une fonction constante.

Ex 5 (a) # f est continue sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$, par opérations sur des fonctions continues.

Au point $(x_0, 0)$, où $x_0 \in \mathbb{R}^*$; l'application

$$(x,y) \longrightarrow x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

n'a pas de limite en $(x_0,0)$, et puisque

$$y \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0$$

donc f n'a pas de limite en $(x_0,0)$.

Au point $(0,y_0)$ où $y_0 \in \mathbb{R}^*$, on a :

$x \sin\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[(x,y)\to(0,y_0)]{} 0$ et $y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite qd $(x,y) \to (0,y_0)$

donc f n'a pas de limite en $(0,y_0)$

Au point $(0,0)$, on a :

$\left|x \sin\frac{1}{y}\right| \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et $\left|y \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

d'où $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$

En conclusion ; f est continue sur $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*) \cup \{(0,0)\}$ ~~et discontinue aux point~~ et non-continue ailleurs

(b) # f est continue sur l'ouvert

$$U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x| \neq |y|\}$$

(Comme opérations sur des fonctions continues)

Au point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ avec $|x_0| = |y_0|$, on a

$$f(x,y) = x^2 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |x|\leq|y|}]{} x_0^2 = f(x_0,y_0).$$

et

$$f(x,y) = y^2 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |x|>|y|}]{} y_0^2 = x_0^2 = f(x_0,y_0)$$

donc f est continue en (x_0,y_0).

En conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(c) # f continue sur l'ouvert $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ |y| \neq x^2\}$.

Au point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $|y_0| = x_0^2$, on a :

Si $x_0 \neq 0$, alors

$$f(x,y) = \frac{(x^4-y^2)^2}{x^6} \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |y|<x^2}]{} \frac{(x_0^4-y_0^2)^2}{x_0^6} = 0 \quad (y_0^2 = x_0^4)$$

$$= f(0,0)$$

$$f(x,y) = 0 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ |y|\geq x^2}]{} 0 = f(0,0)$$

donc

$$\boxed{f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} f(0,0) = 0}$$

Si $x_0 = 0$ (donc $|y_0| = x_0^2 = 0$, d'où $y_0 = 0$).

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$ et $|y| < x^2$, on a

$$|f(x,y)| = \frac{(x^4 - y^2)^2}{x^6}$$

$$= \frac{\left[(x^2-y)(x^2+y)\right]^2}{x^6}$$

$$= (x^2-y) \cdot \frac{(x^2-y)(x^2+y)^2}{x^6}$$

et

$$0 \leq \frac{(x^2-y)(x^2+y)^2}{x^6} \leq \frac{(x^2+|y|)(x^2+|y|)}{x^6}$$

$$\leq \frac{(x^2+|y|)^3}{x^6} \quad (|y| < x^2)$$

$$\leq \frac{(2x^2)^3}{x^6} = 8.$$

d'où

$$|f(x,y)| \leq 8(x^2-y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |y|<x^2}]{} 0 = f(0,0)$$

Remarquons que

$$f(x,y) = 0 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |y|\geq x^2}]{} 0 = f(0,0).$$

Finalement $$\boxed{f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)}$$

En conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(4) (bis)