Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
de Khouribga

Filière SMI S3
Année 2020-2021
Pr. A. Lahrech

Electronique Numérique

Correction de la série n°1

1. Le nombre maximal que l'on peut atteindre avec 10 bits est : $2^{10} - 1 = 1023$.

   La suite des nombres allant de 0 jusqu'à 1023.

2. Pour compter jusqu'à 511, il faut 9 bits, en effet : $2^9 = 512$.

   La suite des nombres allant de 0 jusqu'à 511.

   Avec n bits on compte de 0 à $2^n - 1$, si on veut compter de 0 à M, il faut

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &\geq M \\ \Longrightarrow n &\geq \frac{\ln(M+1)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

3. Conversion binaire/décimal :

   (a) $(10010111)_2 = (?)_{10}$

$$\begin{aligned} (10010111)_2 &= 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + \\ &\quad +1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 128 + 16 + 4 + 2 + 1 \\ &= (151)_{10} \end{aligned}$$

   (b) $(10111,0110)_2 = (?)_{10}$

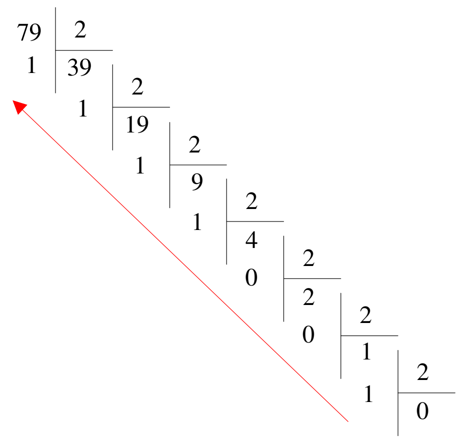
$$\begin{aligned} (10111,0110)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + \\ &\quad +1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} \\ &= 16 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= (23,375)_{10} \end{aligned}$$

   (c) $(10011011001,10110)_2 = (?)_{10}$

$$(10011011001,10110)_2 = (1241,6875)_{10}$$

   (d) $(79,515)_{10} = (?)_2$

   Conversion de la partie entière $79 = (?)_2$:



$$(79)_{10} = (1001111)_2$$

Conversion de la partie fractionnaire : $(0,515)_{10} = (?)_2$

Multiplication	Partie entière
$0,515 \times 2 = 1,030$	1 MSB
$0,03 \times 2 = 0,060$	0
$0,06 \times 2 = 0,12$	0
$0,12 \times 2 = 0,24$	0
$0,24 \times 2 = 0,48$	0
$0,48 \times 2 = 0,96$	0
$0,96 \times 2 = 1,96$	1 LSB

$$\boxed{(0,515)_{10} = (0,1000001)_2}$$

Donc :

$$\boxed{(79,515)_{10} = (1001111)_2 + (0,1000001)_2 = (1001111,1000001)_2}$$

(e) $(109,125)_{10} = (?)_2$

Conversion de la partie entière $109 = (?)_2$:

Division	Quotient	Reste
$109 \div 2$	54	1 LSB
$54 \div 2$	27	0
$27 \div 2$	13	1
$13 \div 2$	6	1
$6 \div 2 =$	3	0
$3 \div 2$	1	1
$1 \div 2$	0	1 MSB

$$\boxed{(109)_{10} \quad = \quad (1101101)_2}$$

Conversion de la partie fractionnaire : $(0,125)_{10} = (?)_2$

Multiplication	Partie entière
$0,125 \times 2 = 0,250$	0 MSB
$0,250 \times 2 = 0,50$	0
$0,50 \times 2 = 1,0$	1 LSB

$$\boxed{(0,125)_{10} \quad = \quad (0,001)_2}$$

Donc :

$$\boxed{(109,125)_{10} \quad = \quad (1101101)_2 + (0,001)_2 = (1101101,001)_2}$$

4. Conversion binaire/octal :

   Le passage du code binaire au code octal se fait par groupement de 3 bits.

   (a) $(10001101)_2 = (?)_8$

   $$\begin{aligned} (10001101)_2 &= 010\ 001\ 101 \\ (10001101)_2 &= \underbrace{010}\ \underbrace{001}\ \underbrace{101} = (215)_8 \end{aligned}$$

   (b) $(10110,010111101)_2 = (?)_8$

   Conversion de la partie entière $(10110)_2 = (?)_8$:

   $$\begin{aligned} (10110)_2 &= 010\ 110 \\ (10110)_2 &= \underbrace{010}\ \underbrace{110} = (26)_8 \end{aligned}$$

   Conversion de la partie fractionnaire : $(0,010111101)_2 = (?)_8$

   $$(0,010111101)_2 \quad = \quad 0,\underbrace{010}\ \underbrace{111}\ \underbrace{101} = (0,275)_8$$

(c) $(723,301)_8 = (?)_2$

Conversion de la partie entière $(723)_8 = (?)_2$:

$$(723)_8 = (\underbrace{111}\ \underbrace{010}\ \underbrace{011})_2$$

Conversion de la partie fractionnaire : $(0,301)_8 = (?)_2$

$$(0,301)_8 = (0,\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{000}_{0}\ \underbrace{001}_{1})_2$$

Donc :

$$(723,301)_8 = (111010011,011000001)_2$$

5. <u>Conversion décimal/octal :</u>

(a) $(762,231)_8 = (?)_{10}$

$$\begin{aligned}(762,231)_8 &= 7\times 8^2 + 6\times 8^1 + 2\times 8^0 + 2\times 8^{-1} + 3\times 8^{-2} + 1\times 8^{-3}\\ &= 448 + 48 + 2 + 0,25 + 0,04687 + 0.001953\\ &= (498,2988)_{10}\end{aligned}$$

(b) $(99)_{10} = (?)_8$

Division	Quotient	Reste
$99 \div 8$	12	3 LSD
$12 \div 8$	1	4
$1 \div 8$	0	1 MSD

Donc :

$$(99)_{10} = (143)_8$$

(c) $(66,38)_{10} = (?)_8$

Conversion de la partie entière $66_{10} = (?)_8$:

Division	Quotient	Reste
$66 \div 8$	8	2 LSD
$8 \div 8$	1	0
$1 \div 8$	0	1 MSD

$$(66)_{10} = (102)_8$$

Conversion de la partie fractionnaire : $(0,38)_{10} = (?)_8$

Multiplication	Partie entière
$0,38 \times 8 = 3,04$	3 MSD
$0,04 \times 8 = 0,32$	0
$0,32 \times 8 = 2,56$	2
$0,56 \times 8 = 4,48$	4
$0,48 \times 8 = 3,84$	3
$0,84 \times 8 = 6,72$	6 LSD

$$(0,38)_{10} = (0,302436)_8$$

Donc l'équivalent octal du nombre décimal $(66,38)_{10}$ est égal à : $(102,302436)_8$

$$\boxed{(66,38)_{10} = (102,302436)_8}$$

6. <u>Conversion décimal/Hexadécimal :</u>

   (a) $(356)_{16} = (?)_{10}$

$$\begin{aligned} (356)_{16} &= 3 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 6 \times 16^0 \\ &= 768 + 80 + 6 \\ &= (854)_{10} \end{aligned}$$

   (b) $(2AF,31)_{16} = (?)_{10}$

$$\begin{aligned} (2AF,31)_{16} &= 2 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0 + 3 \times 16^{-1} + 1 \times 16^{-2} \\ &= 2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 + 3 \times 16^{-1} + 1 \times 16^{-2} \\ &= 512 + 160 + 15 + 0,1875 + 0,0339 \\ &= (687,19)_{10} \end{aligned}$$

   (c) $(214)_{10} = (?)_{16}$

Division	Quotient	Reste (décimal)	Reste (Héxadécimal)
$214 \div 16$	13	6	6 (LSD)
$13 \div 16$	0	13	D (MSD)

$$\boxed{(214)_{10} = (D6)_{16}}$$

(d) $(0,356)_{10} = (?)_{16}$

Multiplication	Partie entière (décimal)	Partie entière (Héxadécimal)
$0,356 \times 16 = 5,696$	5	5 (MSD)
$0,696 \times 16 = 11,136$	11	B
$0,136 \times 16 = 2,176$	2	2
$0,176 \times 16 = 2,816$	2	2 (LSD)

$$\boxed{(0,356)_{10} \quad = \quad (0,5B22)_{16}}$$

(e) $\boxed{(214,356)_{10} = (D6,5B22)_{16}}$

7. <u>Conversion Hexadécimal/binaire :</u>

Le passage du code binaire au code hexadécimal se fait par groupement de 4 bits. Chaque quadruplet ainsi formé correspond à un chiffre hexadécimal

(a) $(1010110110111)_2 = (?)_{16}$

$$\begin{aligned}(1010110110111)_2 &= (\quad 1\,0101\,1011\,0111)_2\\ &= ({\color{red}000}1\,0101\,1011\,0111)_2\\ &= (\underbrace{0001}_{1}\,\underbrace{0101}_{5}\,\underbrace{1011}_{B}\,\underbrace{0111}_{7})_2\\ &= (15B7)_{16}\end{aligned}$$

(b) $(101011011001,1010100)_2 = (?)_{16}$

$$\begin{aligned}(101011011001,1010100)_2 &= (1010\,1101\,1001,\ 1010\,100)_2\\ &= (1010\,1101\,1001,\ 1010\,100{\color{red}0})_2\\ &= (\underbrace{1010}_{A}\,\underbrace{1101}_{D}\,\underbrace{1001}_{9},\underbrace{1010}_{A}\,\underbrace{1000}_{8})_2\\ &= (AD9,A8)_{16}\end{aligned}$$

(c) $(F23)_{16} = (?)_2$

$$(F23)_{16} \quad = \quad (1111\,0010\,0011)_2$$

(d) $(A23,4E)_{16} = (?)_2$

$$(A23,4E)_{16} \quad = \quad (1010\,0010\,0011,\ 0100\,1110)_2$$

8. <u>Conversion DCB/décimal :</u>

(a) $(0110100000111001)_{DCB} = (?)_{10}$

$$\begin{aligned}(0110100000111001)_{DCB} &= (0110\ 1000\ 0011\ 1001)\\ &= \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1001}_{9}\\ &= (6839)_{10}\end{aligned}$$

(b) $(011111000001)_{DCB} = (?)_{10}$

$$\begin{aligned}(011111000001)_{DCB} &= 0111\ 1100\ 0001\\ &= \underbrace{0111}_{7}\quad \underbrace{\underbrace{1100}_{12}}_{\text{erreur }(>9)}\quad \underbrace{0001}_{1}\end{aligned}$$

(c) $(47)_{10} = (?)_{DCB}$

$$(47)_{10} = (0100\ 0111)_{DCB}$$

9. Effectuons par le complément à 2 les opérations suivantes :

(a) $(46)_{10} + (-23)_{10}$

$$(46)_{10} + (-23)_{10} = (23)_{10}$$

i. Etape 1 : On doit spécifier le nombre de bits pour représenter les nombres décimaux :

$$\begin{aligned}2^{n-1} - 1 &> \max(46, 23, 23)\\ 2^{n-1} - 1 &> 46 \Rightarrow n = 7 \text{ bits}\end{aligned}$$

ii. Etape 2 : On calcule le complément à 2 du nombre 23 :
Convertissons tout d'abord les nombres décimaux $(23)_{10}$ et $(46)_{10}$ en base 2 :

$$\begin{aligned}(23)_{10} &= (0010111)_2\\ (46)_{10} &= (0101110)_2\end{aligned}$$

Le complément à 1 du nombre $(23)_{10}$ s'écrit : (1101000)
Le complément à 2 du nombre $(23)_{10}$ s'écrit : $(1101000)+1 = (1101001)$

iii. Etape 3 : On réalise l'addition binaire :

$$\begin{array}{lrl} & {\color{red}1}\quad\ {\color{red}1\ 1} & \\ & 0\,1\,0\,1\,1\,1\,0 & \text{code binaire du nombre } 46_{10}\\ + & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 & \text{complément à 2 du nombre } (23)_{10}\\ \hline & \underbrace{1}_{\text{bit à éliminer}}\quad 0\,0\,1\,0\,1\,1\,1 & \end{array}$$

Le bit de poids fort étant à 0, donc le résultat est positif :

$$(0010111)_2 = (23)_{10}$$

Le résultat de l'opération $(46)_{10} + (-23)_{10}$ est donc bien égal à $(23)_{10}$

(b) $S = (30)_{10} + (-14)_{10}$

$$(30)_{10} + (-14)_{10} = (+16)_{10}$$

i. Etape 1 : On doit spécifier le nombre de bits pour représenter les nombres décimaux :

$$\begin{aligned} 2^{n-1} - 1 &> \max(30, 14, 16) \\ 2^{n-1} - 1 &> 30 \Rightarrow n = 6 \text{ bits} \end{aligned}$$

ii. Etape 2 : On calcule le complément à 2 du nombre 14 :
Convertissons tout d'abord les nombres décimaux $(30)_{10}$ et $(14)_{10}$ en base 2 :

$$\begin{aligned} (30)_{10} &= (011110)_2 \\ (14)_{10} &= (001110)_2 \end{aligned}$$

Le complément à 1 du nombre $(14)_{10}$ s'écrit : (110001)
Le complément à 2 du nombre $(14)_{10}$ s'écrit : $(110001) + 1 = (110010)$

iii. Etape 3 : On réalise l'addition binaire :

$$\begin{array}{lrl} & \color{red}{1\,1\,1\,1} & \\ & 0\,1\,1\,1\,1\,0 & (30_{10}) \\ + & 1\,1\,0\,0\,1\,0 & (-14_{10}) \\ \hline \underbrace{1}_{\text{bit à éliminer}} & 0\,1\,0\,0\,0\,0 & \end{array}$$

Le bit de poids fort étant à 0, donc le résultat est positif :

$$(010000)_2 = (16)_{10}$$

Le résultat de l'opération $(30)_{10} + (-14)_{10}$ est donc bien égal à $(+16)$

(c) $(23)_{10} + (-46)_{10}$

$$(23)_{10} + (-46)_{10} = (-23)_{10}$$

i. Etape 1 : On doit spécifier le nombre de bits pour représenter les nombres décimaux :

$$\begin{aligned} 2^{n-1} - 1 &> \max(23, 46, 23) \\ 2^{n-1} - 1 &> 46 \Rightarrow n = 7 \text{ bits} \end{aligned}$$

ii. Etape 2 : On calcule le complément à 2 du nombre 46 :
Le complément à 1 du nombre $(46)_{10}$ s'écrit : (1010001)
Le complément à 2 du nombre $(46)_{10}$ s'écrit : $(1010001) + 1 = (1010010)$

iii. Etape 3 : On réalise l'addition binaire :

$$\begin{array}{lrl} & \color{red}{1\,1\,1} & \\ & 0\,0\,1\,0\,1\,1\,1 & (23_{10}) \\ + & 1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 & (-46_{10}) \\ \hline & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 & \end{array}$$

Le bit de poids fort étant à 1, donc le résultat est négatif. La valeur absolue de ce nombre s'obtient en appliquant le complément à deux. Il s'agit donc de $(0010111)_2 = (23)$.
Le résultat de l'opération $(23)_{10} + (-46)_{10}$ est donc bien égal à (-23)

10. Réalisons en code DCB les additions suivantes :

    (a) Addition de $(7)_{10} + (9)_{10}$

$$\begin{array}{rrl} & \color{red}{1\,1\,1} & \\ & 0\,1\,1\,1 & \text{Code DCB du nombre 7} \\ + & 1\,0\,0\,1 & \text{Code DCB du nombre 9} \\ \hline & 1\,0\,0\,0\,0 & \end{array}$$

    Le résultat obtenu est incorrect car il n'est pas égal à 16_{10}, il faut donc le corriger en ajoutant 6 (0110), ce qui va nous donner :

$$\begin{array}{rrl} & 1\,0\,0\,0\,0 & \\ + & 0\,1\,1\,0 & \\ \hline & 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 & \text{Code DCB du nombre } 16_{10} \end{array}$$

    (b) Addition de $(19)_{10} + (22)_{10}$

$$\begin{array}{rrrl} & 0\,0\,0\,1 & 1\,0\,0\,1 & \text{Code DCB du nombre 19} \\ + & 0\,0\,1\,0 & 0\,0\,1\,0 & \text{Code DCB du nombre 22} \\ \hline & 0\,0\,1\,1 & 1\,0\,1\,1 & \leftarrow \text{ interdit } (> \text{ à } 9) \\ & & & \\ + & & 0\,1\,1\,0 & \\ \hline & 0\,1\,0\,0 & 0\,0\,0\,1 & \end{array}$$

    Le résultat obtenu est donc bien égal à $(41)_{10}$

11. Conversion du code GRAY à la base binaire ou inversement :

    (a) $(01011110)_2 = (01110001)_{\text{Gray}}$

    (b) $(10010)_{\text{Gray}} = (11100)_2$