Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
SMA , ANALYSE 5

ESPACE VECTORIEL NORMÉ

Ex.1 Soit E un $\mathbb{K}$-**evn** muni de la norme $\|\cdot\|$. Vérifier que

$$\|0_E\| = 0 \quad \text{et que} \quad \forall x \in E, \ \ \|x\| \geqslant 0.$$

Ex.2 Soit X un ensemble non vide et $B(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées sur X. On considère l'application $\|\cdot\|_\infty$ définie sur $B(X, \mathbb{K})$ par :

$$\forall f \in B(X, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Montrer que $(B(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Ex.3 Soient E est $\mathbb{K}$-**ev** et $d : E^2 \to \mathbb{R}$ une application satisfaisant les cinq conditions de la proposition 1.2. Montrer qu'il existe une norme unique $\|\cdot\|$ sur E telle que :

$$\forall (x, y) \in E \times E\,, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Ex.4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-**evn** et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Montrer que :

$$\forall (x, y, z) \in E^3\,, \quad d(x, y) \geq \big|d(x, z) - d(y, z)\big|.$$

Ex.5 Soient E un $\mathbb{K}$-**ev**, $N_1, \cdots, N_p$ des normes sur E et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$. Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad N(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, N_k(x)$$

est encore une norme sur E.

Ex.6 Soient $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Donner une CNS sur $(f_1, \cdots, f_p) \in E^p$ pour que l'application $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad N(x_1, \cdots, x_p) = \int_0^1 \Big| \sum_{k=1}^{p} x_k \, f_k(t) \Big| \, dt$$

soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Ex.7 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**ev**, $\|\cdot\|_F$ une norme sur F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Trouver une CNS sur f pour que l'application $N : E \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \|f(x)\|_F$ soit une norme sur E.

Ex.8 Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{K}$-ev E et $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ telles que $\overline{B}_{N_1}(a,r) = \overline{B}_{N_2}(a,r)$.
Montrer que $N_1 = N_2$.

Ex.9 On considère sur $E = C([a,b],\mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt\ ,\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_1 \leqslant (b-a)^{1/2}\,\|f\|_2 \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty$.
2. Démontrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

Ex.10 Soit φ un élément de $E = C^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 \varphi(t)\,dt \neq 0$. On considère les deux applications N, $N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ définies par

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \quad \text{et} \quad N_\varphi(f) = \Big|\int_0^1 (f\varphi)(t)\,dt\Big| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

Montrer que N et N_φ sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Ex.11 Soient E un ev normé et A, $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $A \bigcup \complement_E \overline{A}$ est une partie dense dans E.
2. si A, B sont denses dans E et $A \bigcap B = \emptyset$, alors $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$.
3. si A, B sont denses dans E et A ouvert, alors $A \bigcap B$ est dense dans E.
4. si $\overline{A} \bigcap \overline{B} = \emptyset$, alors $Fr(A \bigcup B) = Fr(A) \bigcup Fr(B)$.

Ex.12 Soit $A = \{\dfrac{1}{n+x} + \dfrac{1}{2^n}\,;\ (x,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*\}$ une partie de $\mathbb{R}$, calculer $\mathring{A}$ et $\overline{A}$.

Ex.13 Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \ln(2 + u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers un réel l.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - l| \leqslant 1/2^{n-1}$.

Ex.14 Soient K une partie compacte de d'un ev normé E et $(u_n)_n$ une suite dans K. Montrer que, si $(u_n)_n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors $(u_n)_n$ est convergente.

Ex.15 Soient E un espace vectoriel normé, F un fermé de E et K un compact de E. Montrer que $F + K$ est une partie fermée dans E.

Ex.16 Soient E un evn de dimension finie et K un compact de E. Montrer qu'il existe un ouvert U de E tel que $K \subset U$ et $\overline{U}$ est compact de E.

Ex.17 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie et $(u_n)_n$ une suite bornée de E. Montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ dans E, est compacte non vide de E.

Chap1 (Exs)

Ex 1.1 :

- $\|0_E\| = \|0.x\| = |0|.\|x\| = 0.\|x\| = 0$; $(\forall x \in E)$
- $0 = \|0_E\| = \|x+(-x)\| \leq \|x\| + \|-x\|$

$$\leq \|x\| + |-1|.\|x\| = 2\|x\|$$

Ex 1.2 :

- $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| = |\lambda| . \|f\|_\infty$.
- $\|f\|_\infty = 0 \iff (\forall x \in X) ; |f(x)| = 0 \iff f = 0$
- $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| + |g(x)|$

$$\leq \underbrace{\sup_{x\in X} |f(x)|}_{=} + \underbrace{\sup_{x\in X} |g(x)|}_{=}$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\Rightarrow$ $\|.\|_\infty$ est une norme sur $B(X, K)$ dite norme de la convergence uniforme.

Ex 1.3 <u>Unicité</u> : si $\|.\|$ convient, alors $(\forall x \in E)$; $\|x\| = d(x, 0_E)$

<u>Existence</u> : Il suffit de montrer que $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto d(x, 0_E)$ est une norme

- $\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x ; \lambda 0_E) = |\lambda| \ d(x, 0)$ (condition (4))

$$= |\lambda| . \|x\|$$

- $\|x\| = 0 \Rightarrow d(x, 0) = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{(condition (2))}$$

- $\|x+y\| = d(x+y, 0) = d(x+y ; x+(-x))$ (condition (5))

$$= d(y ; -x)$$

$$\leq \underbrace{d(y, 0)}_{=\|y\|} + \underbrace{d(-x, 0)}_{d(x,0)} \quad \text{(condition (3))}$$

$$\leq d(y, 0) + d(x, 0) \quad \text{condition (4)}$$

$$\leq \|y\| + \|x\|.$$

$\Rightarrow$ Alors $\|.\|$ est une norme sur E qui vérifie

$(\forall x,y\in E)$; $\|x-y\| = d(x-y;0)$

$= d(x-y, y+(-y))$ condition (5)

$= d(x,y)$

6

<u>Rque</u> la condition (1) est superflue car

$d(y,x) = \|y-x\| = d(y-x,0)$

$= |-1| \cdot d(x-y,0)$

$= \|x-y\|$

$= d(x,y)$

<u>Ex 1.4</u>

$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)-(y-z)\|$

$\geq \big| \|x-z\| - \|y-z\| \big| = |d(x,z) - d(y,z)|$

inegalité triangulaire inversée

<u>Ex 1.5</u> • $N(\lambda x) = \sum_k \alpha_k N_k(\lambda x) = \sum_k \alpha_k |\lambda| N_k(x) = |\lambda| \cdot N(x)$

• $N(x)=0 \iff (\forall k)\ \alpha_k N_k(x) = 0$

$\Rightarrow \exists k_0 \quad N_{k_0}(x) = 0 \qquad (\alpha_1 \dots \alpha_p) \neq (0,\dots,0)$

$\Rightarrow x = 0.$

• $N(x+y) = \sum_k \alpha_k N_k(x+y) \leq \sum_k \alpha_k (N_k(x) + N_k(y))$

$\leq N(x) + N(y).$

<u>Ex 1.6</u> • $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

• $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ sont triviales

• $N(x_1,\dots,x_p) = 0 \iff \int_0^1 \left| \sum_k x_k f_k(t) \right| dt = 0$

$\iff \sum_k x_k f_k = 0$

puisque $t \longrightarrow \left| \sum_k x_k f_k(t) \right|$ est continue positive.

alors pour avoir $N(x_1,\dots x_p) = 0 \Longrightarrow (x_1,\dots,x_p) = 0$
il faut et il suffit que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ soit libre dans E.

Ex 1.7 Conditions

- $N(\lambda x) = \| f(\lambda x)\|_F$

$$= \| \lambda f(x)\|_F = |\lambda| . \| f(x)\|_F = |\lambda| . N(x).$$

- $N(x+y) = \| f(x+y)\|_F$

$$= \| f(x) + f(y)\|_F$$

$$\leq \| f(x)\|_F + \| f(y)\|_F$$

$$\leq N(x) + N(y).$$

- $N(x) = 0 \iff \| f(x)\|_F = 0 \iff f(x) = 0$

Alors pour avoir $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, c-à-dire que f soit injective

Ex 1.8 Pour tout $x \in E \setminus \{a\}$, on a

- $a + \dfrac{r}{N_1(x-a)}(x-a) \in \overline{B}_{N_1}(a,r) = \overline{B}_{N_2}(a,r)$

d'où $N_2\left(\dfrac{r}{N_1(x-a)}(x-a)\right) \leq r$

donc $N_2(x-a) \leq N_1(x-a)$ (1)

- $a + \dfrac{r}{N_2(x-a)}(x-a) \in \overline{B}_{N_2}(a,r) = \overline{B}_{N_1}(a,r)$

d'où $N_1\left(\dfrac{r}{N_2(x-a)}(x-a)\right) \leq r$

donc $N_1(x-a) \leq N_2(x-a)$ (2)

Par conséquent, d'après (1) et (2), on a :

$(\forall x \in E)$; $N_1(x-a) = N_2(x-a)$

Comme $x \longmapsto x-a$ est une bijection de E dans E,

on conclut que

$$N_1 = N_2 .$$

Ex 9

~~Ex ... (page ...)~~

1) Appliquons Cauchy-Schwarz à $|f|$ et 1, on obtient :

$$\|f\|_1^2 = \left(\int_a^b |f(t)|\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2\,dt\right)\left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)$$

$$\leq (b-a) \cdot \|f\|_2^2$$

d'où $\qquad \|f\|_1 \leq (b-a)^{1/2} \cdot \|f\|_2 \qquad (1)$

De plus :
$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(t)|^2\,dt \leq \|f\|_\infty^2 \cdot \int_a^b 1\,dt \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty^2$$

d'où $\qquad \|f\|_2 \leq (b-a)^{1/2}\,\|f\|_\infty \qquad (2)$

D'après (1) et (2), on obtient :

$$\|f\|_1 \leq (b-a)^{1/2} \cdot \|f\|_2 \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty$$

2) Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(x) = t^n \in \quad E = C([0,1];\mathbb{R})$

~~On a~~ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 t^{2n}\,dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$$

d'où $$\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow +\infty$$

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1 \longrightarrow +\infty$$

1) $$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n+1} \longrightarrow +\infty$$

En conclusion, les trois normes sont non-équivalentes deux à deux.

Ex 1.10 page 13

- N et N_φ vérifient les conditions

$$N(\lambda f) = |\lambda|\, N(f) \quad \text{et} \quad N_\varphi(\lambda f) = |\lambda|\, N_\varphi(f)$$

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g) \qquad N_\varphi(f+g) \leq N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

- De plus :

$$N(f) = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(t)|\, dt = 0$$

$$\implies f(0) = 0 \text{ et } f' = 0 \qquad (f \in C^1([0,1];\mathbb{R}))$$

$$\implies f = cte = f(0) = 0$$

$$N_\varphi(f) = 0 \implies \int_0^1 f\varphi(t)\, dt = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(t)|\, dt = 0$$

$$\implies \int_0^1 f\varphi(t)\, dt = 0 \text{ et } f' = 0$$

$$\implies \int_0^1 f\varphi(t)\, dt = 0 \text{ et } f = cte$$

$$\implies f \cdot \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$$

$$\implies f = 0 \text{ puisque } \int_0^1 \varphi(t)\, dt \neq 0.$$

En conclusion, N et N_φ sont deux normes sur E.

Montrons qu'elles sont équivalentes :

- φ est continue sur $[0,1]$, alors elle admet une primitive $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\left(\psi(x) = \int_1^x \varphi(t)\, dt\right)$ qui s'annule en 1
- Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 f\varphi(t)\, dt = [f\psi]_0^1 - \int_0^1 f' \cdot \psi(t)\, dt$$

$$= -f(0)\psi(0) - \int_0^1 f'\psi(t)\, dt$$

Alors $\left|\int_0^1 f\varphi(t)\,dt\right| \leq |f(0)|\cdot|\varphi(0)| + \int_0^1 |f'\varphi(t)|\,dt$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \cdot \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)$$

d'où $N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f\varphi(t)\,dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$ (1)

$$\leq \underbrace{(\|\varphi\|_\infty + 1)}_{\alpha}\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right) = \alpha \cdot N(f)$$

et $|f(0)| = \left|-\frac{1}{|\varphi(0)|}\left(\int_0^1 f\varphi(t)\,dt + \int_0^1 f'\varphi(t)\,dt\right)\right|$

$$\leq \frac{1}{|\varphi(0)|}\cdot\left[\left|\int_0^1 f\varphi(t)\,dt\right| + \|\varphi\|_\infty \cdot \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right]$$

d'où $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$

$$\leq \frac{1}{|\varphi(0)|}\cdot\left[\left|\int_0^1 f\varphi(t)\,dt\right| + \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |f'(t)|\,dt + |\varphi(0)|\cdot\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{|\varphi(0)|}\cdot\left[\left|\int_0^1 f\varphi(t)\,dt\right| + 2\|\varphi\|_\infty \cdot \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right]$$

$$\leq \underbrace{\frac{1+2\|\varphi\|_\infty}{|\varphi(0)|}}_{\beta} \cdot N_\varphi(f) = \beta \cdot N_\varphi(f) \quad (2)$$

D'après (1) et (2), les deux normes N et N_φ sont équivalentes.

2)

~~Ex 1.13~~

1) ~~Puisque~~ $\cancel{\overline{A \cup \complement_E \bar{A}} = \bar{A} \cup \complement_E \bar{A}}$

$\cancel{\bar{A} \cup \complement_E \bar{A} \subset \overline{A \cup \complement_E \bar{A}}}$

$\cancel{\bar{A} \cup \complement_E \bar{A} = E}$

alors E

Ex 1.11 1) Puisque $\overline{A \cup \complement_E \bar{A}} = \bar{A} \cup \overline{\complement_E \bar{A}}$

$\bar{A} \cup \complement_E \bar{A} \subset \bar{A} \cup \overline{\complement_E \bar{A}}$

et $\bar{A} \cup \complement_E \bar{A} = E$

on a $E \subset \overline{A \cup \complement_E \bar{A}}$, d'où $\overline{A \cup \complement_E \bar{A}} = E$.

2) On a : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset \complement_E(B)$

$\Rightarrow \mathring{A} \subset \overset{\circ}{\overline{\complement_E B}} = \complement_E \bar{B} = \emptyset$

puisque B est dense dans E, donc $\bar{B} = E$.

De même : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subset \complement_E A$

$\Rightarrow \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{\complement_E A}} = \complement_E \bar{A} = \emptyset$

puisque $\bar{A} = E$. En conclusion :

$$\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset.$$

3) soient $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}_E(x)$, alors :

$(\exists\, \Omega$ ouvert de $E)$; $x \in \Omega \subset V$

Puisque A dense dans E $(\bar{A} = E)$, alors

$$\Omega \cap A \neq \emptyset$$

c-à-dire $(\exists\, y \in E)$; $y \in \Omega \cap A$.

Comme Ω et A sont ouverts de E, alors

$$\Omega \cap A \in \mathcal{V}_E(y) \quad (\Omega \cap A \text{ ouvert et } y \in \Omega \cap A)$$

puis comme B est dense dans E $(\overline{B} = E)$

$$(\Omega \cap A) \cap B \neq \emptyset$$

d'où

$$V \cap (A \cap B) \neq \emptyset \quad ((\Omega \cap A) \cap B \subset V \cap (A \cap B))$$

ainsi $(\forall x \in E)\ \underbrace{(\forall V \in \mathcal{V}_E(x))\ ;\ V \cap (A \cap B) \neq \emptyset}_{x \in \overline{A \cap B}}$

Finalement $\overline{A \cap B} = E$ ($A \cap B$ dense dans E).

4) $Fr(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{C_E(A \cup B)}$

$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{C_E A \cap C_E B})$

$= \underbrace{\left(\overline{A} \cap \overline{C_E A \cap C_E B}\right)}_{F} \cup \underbrace{\left(\overline{B} \cap \overline{C_E A \cap C_E B}\right)}_{G}$

A-t-on $\overline{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} = F$ et $\overline{B} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} = G$?

- $F \subset \overline{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}$: trivial.
- Soient $x \in \overline{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}$ et $V \in \mathcal{V}_E(x)$, on a.

$$x \in \overline{A} \subset C_E \overline{B} = \overset{\circ}{\overline{C_E B}} \quad (\text{ puisque } \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset)$$

donc $V \cap C_E B \in \mathcal{V}_E(x)$. (car $x \in \underbrace{\overset{\circ}{C_E B}}_{\text{ouvert}} \subset C_E B \Rightarrow C_E B \in \mathcal{V}_E(x)$)

et comme $x \in \overline{C_E A}$, alors

$$V \cap C_E B \cap C_E A \neq \emptyset$$

c-à-dire $x \in \overline{C_E A \cap C_E B}$

Or $x \in \bar{A}$, donc $x \in \underbrace{\bar{A} \cap \overline{C_E A \cap C_E B}}_{F}$

Alors $\bar{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} \subset F$

c/c $\boxed{\bar{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} = F}$

De même $\boxed{\bar{B} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B} = G}$

Puis $Fr(A \cup B) = \left(\bar{A} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}\right) \cup \left(\bar{B} \cap \overline{C_E A} \cap \overline{C_E B}\right)$

$= \left(Fr(A) \cap \overline{C_E B}\right) \cup \left(Fr(B) \cap \overline{C_E A}\right)$

$= Fr(A) \cup Fr(B)$

puisque $Fr(A) \subset \bar{A} \subset C_E \bar{B}$ $(\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset)$

$C_E \bar{B} = \mathring{\overbrace{C_E B}} \subset \overline{C_E B}$

et $Fr(B) \subset \bar{B} \underset{\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset}{\subset} C_E \bar{A} = \mathring{\overbrace{C_E A}} \subset \overline{C_E A}$.

c/c : $\boxed{Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)}$

Ex 1.12 Notons $A_n = \left\{ \frac{1}{n+x} + \frac{1}{2^n} \ ; \ x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$f_n : x \longmapsto \frac{1}{n+x} + \frac{1}{2^n}$ continue, stric $\searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

alors $A_n = f_n(\mathbb{R}_+^*) = f_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{+\infty} f_n(x) ; \lim_{0^+} f_n(x) \right[$

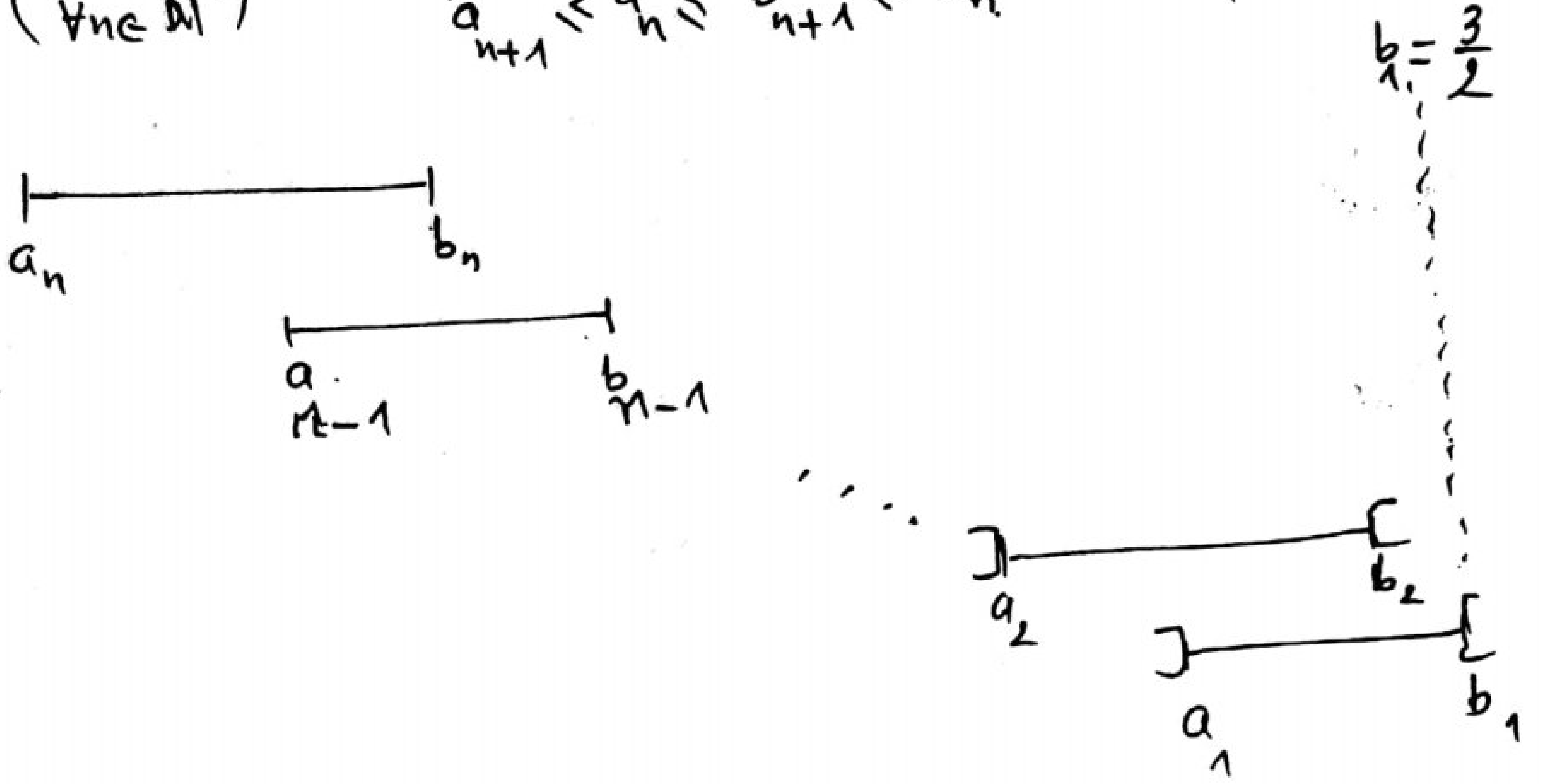
$= \left] \frac{1}{2^n} ; \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right[$

~~D'où~~ $\cancel{A_{n+1} = \left] \frac{1}{2^{n+1}} ; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right[}$ $=]a_n, b_n[$

On $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\quad \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n} \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}.$

$(* \Longleftrightarrow (\forall n \geq 2) ; 2^n \geq n)$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad a_{n+1} \leq a_n \leq b_{n+1} \leq b_n$



d'où $\qquad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

$$= \left] \lim_{n+\infty} a_n ; b_1 \right[= \left] \lim_{+\infty} \frac{1}{2^n} ; \frac{3}{2} \right[= \left] 0 ; \frac{3}{2} \right[$$

Finalement $\quad \mathring{A} = \left]0 ; \frac{3}{2}\right[$ et $\bar{A} = \left[0, \frac{3}{2}\right]$

Ex1.13 1) Soit (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \ln(2+U_n) \end{cases}$

2) • L'application $f : \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(2+x) \end{array}$ est croissante

3) • $[0,+\infty[$ est stable par f.

1) • Par recurrence ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \in [0,+\infty[$

4) • $U_1 = \ln(2) \geq U_0 = 0$

$\Longrightarrow (U_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

4)

- L'application $g : x \longmapsto f(x) - x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

$$\forall x \in [0,+\infty[\; ; \; g'(x) = \frac{1}{2+x} - 1$$
$$= \frac{-1-x}{2+x} < 0.$$

6

donc g est stric $\searrow$ sur $[0,+\infty[$.

- $g(0) = \ln(2) > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} \ln(2+x) - x$
$$= \lim_{+\infty} x.\left(\frac{\ln(2+x)}{x} - 1\right)$$
$$= -\infty$$

$\Rightarrow$ D'après TVI, il existe $a \in [0,+\infty[$ unique tel que
$$g(a) = 0 \quad (\text{c-à-dire } f(a) = a).$$

- $f \nearrow$ et $f(0) \geq 0$ et $f(a) = a$, alors $[0, a]$ est stable par f et donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \in [0, a]$$

$\Rightarrow$ $(u_n)_{n\geq 0}$ $\nearrow$, majorée par a et donc converge vers un réel $l \in [0, a]$ qu'est solution de $f(x) = x$. Alors $\boxed{l = a}$.

2) En utilisant I.A.F, on a :
$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq |u_n - l| \underbrace{\sup_{x\in[0,l]} |f'(x)|}_{=\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2+x}$$
$$\leq \frac{1}{2}|u_n - l|.$$

d'où par récurrence, on a :
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - l| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - l| \quad \text{avec } u_0 = 0$$

Or $g(2) = \ln(4) - 2 < 0 = g(l)$ et g strict $\searrow$ alors $\boxed{l \leq 2}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\boxed{|u_n - l| \leq \frac{1}{2^n}|l| \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$.

EX 1.14 :

Par l'absurde, supposons que $(U_n)_n$ n'admette pas qu'une seule valeur d'adhérence a et que $(U_n)_n$ diverge. Puisque $U_n \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} a$, alors

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall N\in\mathbb{N})(\exists n\in\mathbb{N}) ; \quad n\geq N \text{ et } d(U_n, a) > \varepsilon$$

Ceci permet de construire une extractrice σ telle que

$$(\forall n\in\mathbb{N}) ; \quad d(U_{\sigma(n)}, a) > \varepsilon$$

Puisque K est compact, la suite $(U_{\sigma(n)})_n$ d'éléments de K, admet au moins une valeur d'adhérence b dans K, c-à-dire :

il existe une extractrice τ telle que

$$U_{\sigma(\tau(n))} \xrightarrow[n\infty]{} b$$

Comme $d(U_{\sigma(\tau(n))}, a) > \varepsilon$, on obtient en passant à la limite que $d(a, b) \geq \varepsilon$ et nécessairement $a \neq b$. Ainsi (U_n) admet au moins deux valeurs d'adhérence distincts a et b,

Contradiction.

Rque : La suite extraite de $(U_{\sigma(n)})$ est $(U_{\sigma(\tau(n))})$ où τ est une extractrice.

(1)

Ex 1.15

Montrons que $F+K$ est fermé dans E. Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $F+K$ qui converge vers $z \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

$$x_n \in F \text{ et } y_n \in K \text{ tels que } z_n = x_n + y_n$$

Puisque la suite $(y_n)_n$ est à éléments dans le compact K, alors elle admet au moins une valeur d'adhérence $y \in K$, c'est à dire :
il existe une extractrice σ telle que $y_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} y$

Comme $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_{\sigma(n)} = z_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}$, on déduit

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\infty]{} z - y$$

et donc $$z - y \in \overline{F} = F.$$

On obtient alors

$$z = (z-y) + y \in F+K$$

En conclusion, $F+K$ est un fermé de E.

EX 1.16 Puisque K est un compact, alors K est borné, c-à-dire :

$$(\exists r>0) ; \quad K \subset \overline{B}(0,r)$$

On prend $U = B(0,2r)$, on a $\overline{U}$ est compact puisque il est fermé borné dans evn de dimension finie.

Finalement, on a $K \subset U$ et $\overline{U}$ compact de E

EX 1.17