Universite Sultan Moulay Slimane
Faculte Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°4:Corrigé
Dérivation/Fonctions usuelles

Exercice 1.

(1) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(2) Déterminer les valeurs des nombres réels α et β pour que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{\beta x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

***Corrigé* 1.**

(1) (a) f n'est pas continue (voir TD N°3) donc f n'est pas dérivable.

(b) Par opération f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de plus

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc f est dérivable au point 0 aussi et $f'(0) = 0$, on conclut que f dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) - Les restrictions de f sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ sont continues comme composée et somme de fonctions usuelles continues. Il suffit d'étudier la continuité et la dérivabilité au point 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha, \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\beta x} - x = 1$$

or $f(0) = 1$ donc f est continue en 0 ssi $\alpha = 1$. Pour que f soit dérivable il faut qu'elle soit continue donc $\alpha = 1$. D'autre part

- Si $x < 0$

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

on applique la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x\cos(x) - \sin(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow f'_g(0) = 0$$

- Si $x > 0$

$$f'(x) = \beta e^{\beta x} - 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \beta - 1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable en 0 ssi

$$f'_d(0) = f'_g(0) \Longrightarrow \beta = 1$$

finalement f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0. Considérons la fonction g définie par:

$$g(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

(1) Montrer que si f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche de x_0 alors g admet une limite lorsque h tend vers 0 puis exprimer cette limite en fonction de $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$. Cette limite est appelée dérivée symétrique de f en x_0.

(2) Etudier la réciproque de (1) en considérant la fonction

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

***Corrigé* 2.**

(1) Si f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche de x_0 alors par définition

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & = f'_d(x_0) \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & = f'_g(x_0) \end{array}\right\} (*)$$

En remplaçant h par $-h$ dans $(*)$ on obtient

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} & = -f'_d(x_0) \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} & = -f'_g(x_0) \end{array}\right\} (**)$$

Or on peut écrire

$$g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} - \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2h}$$

donc, en utilidant $(*)$ et $(**)$ on trouve

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{h\to 0^+} g(h) & = \frac{1}{2}\left(f'_d(x_0) + f'_g(x_0)\right) \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-} g(h) & = \frac{1}{2}\left(f'_d(x_0) + f'_g(x_0)\right) \end{array}\right.$$

d'où g admet une limite lorsque h tend vers 0, de plus

$$\lim_{h\to 0} g(h) = \frac{1}{2}\left(f'_d(x_0) + f'_g(x_0)\right)$$

Cette limite est appelée dérivée symétrique de f en x_0.

(2) La réciproque de (1) est fausse. En effet, on considère la fonction

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

On a

$$g(h) = \frac{1}{2h}\left(h \sin \frac{1}{h} - h \sin \frac{1}{h}\right) = 0$$

donc

$$\lim_{h\to 0} g(h) = 0$$

mais f n'est pas dérivable au point 0 car

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$

Exercice 3. Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes:

$$(a)\ x \mapsto x\ln(|x+1|), \quad (b)\ x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad (c)\ x \mapsto (\cosh x)^x,\ (d)\ x \mapsto \sqrt{1+\tanh x}$$

***Corrigé* 3.**

(a) On pose $f(x) = x\ln(|x+1|)$ alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$f'(x) = \ln(|x+1|) + \frac{x}{x+1}$$

car

$$(\ln(|u(x)|))' = \begin{cases} \frac{u'(x)}{u(x)} & si\ u(x) > 0 \\ \frac{-u'(x)}{-u(x)} & si\ u(x) < 0 \end{cases} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

(b) On pose $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' \arctan'\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2 + x^2}$$

(c) On pose $f(x) = (\cosh x)^x = e^{x\ln(\cosh x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\cosh(x) > 0$ et

$$f'(x) = (x\ln(\cosh x))' e^{x\ln(\cosh x)} = (\ln(\cosh x) + x\tanh x)(\cosh x)^x$$

(d) On pose $f(x) = \sqrt{1+\tanh x}$, comme $\tanh x \in]-1,1[;\ \forall x$ alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{1-\tanh^2 x}{2\sqrt{1+\tanh x}}$$

Exercice 4. Résoudre les équations:

$$(1)\ \arcsin 2x = \arcsin x\sqrt{3} + \arcsin x, \qquad (2)\ \arg\tanh x = \arg\cosh\frac{1}{x}$$

***Corrigé* 4.**

(1) D'abord cet équation est pour tout x vérifiant

$$-1 \le 2x \le 1, \quad -1 \le x\sqrt{3} \le 1, \quad -1 \le x \le 1 \Longrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

comme $\forall t \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$ alors en appliquant *sin* de deux côtés de l'équation, on trouve

$$2x = x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-3x^2}$$

donc $x = 0$ où si $x \neq 0$, on aura, en passant au carré

$$\Longleftrightarrow 2 - \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-3x^2} \Longleftrightarrow 4 + 3(1-x^2) - 4\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 1 - 3x^2$$

$$\Longleftrightarrow 6 - 4\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

On conclut que l'ensemble de solutions est $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

(2) L'équation est bien définie pour tout x vérifiant,

$$x \in]-1,1[, \ \frac{1}{x} \in [1, +\infty[\ et \ x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in]0,1[$$

En appliquant la fonction cosh des deux côtés de l'équation on trouve

$$\cosh\left(\arg\cosh\frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\arg\tanh x\right)$$

or on a $\cosh^2(t) = \dfrac{1}{1-\tanh^2(t)}$ donc

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\left(\arg\tanh x\right)}} \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui donne $\quad x^2 = 1 - x^2 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'ensemble de solutions est donc

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Exercice 5. Montrer l' égalités suivante:

(1) $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [0,1]$

(2) (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

(b) En déduire une expression de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{et calculer} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

(3) Simplifier les expressions suivantes:

$$\arccos(1-2x^2), \quad \sin\left(2\arctan(x)\right), \quad \sinh(2\arg\sinh x)$$

***Corrigé* 5**.

(1) On pose $f(x) = \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2}$, alors f est définie et dérivable sur $[0,1[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = 0$$

donc pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = C$, en particulier pour $x = 0$ on trouve $C = \frac{\pi}{2}$. Par continuité on aura

$$\forall[0,1], \quad f(x) = \frac{\pi}{2}$$

(2) (a) On pose pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

f est continue dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(x+1)^2+x^2} + \frac{1}{(x-1)^2+x^2} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(2x^2+1)+2x} + \frac{1}{(2x^2+1)-2x} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0 \end{aligned}$$

donc pour tout $x > 0$, $f(x) = C$, en particulier pour $x = 1$ on aura

$$f(1) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(0) = 0 = C.$$

d'où on a le résultat.

(b) En utilisant ce qui précède:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]$$

donc

$$\begin{aligned} S_n = &\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(0) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\ldots + \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

d'où, en simplifiant, on obtient

$$S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$$

(3) - On pose $F(x) = \arccos(1-2x^2)$. F est définie pour tout x vérifiant

$$-1 \leq 1-2x^2 \leq 1 \Longleftrightarrow x \in [-1,1]$$

Si on pose $x = \sin\alpha$ alors $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$1-2x^2 = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$$

donc $F(x) = \arccos(\cos(2\alpha))$ ce qui donne

$$\begin{cases} Si\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \Rightarrow \alpha \in [0,\pi] & \Rightarrow F(x) = 2\alpha \\ Si\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] & \Rightarrow \alpha \in [-\pi, 0] & \Rightarrow F(x) = -2\alpha \end{cases}$$

comme $\alpha = \arcsin x$ alors

$$F(x) = \begin{cases} 2\arcsin x & si\ x \in [0,1] \\ -2\arcsin x & si\ x \in [-1,0] \end{cases} = 2\left|\arcsin x\right| \ si\ x \in [-1,1]$$

- Comme

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

alors

$$\begin{aligned}
\sin(2\arctan(x)) &= 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) \\
&= 2\sqrt{1-\cos^2(\arctan(x))}\cos(\arctan(x)) \\
&= 2\sqrt{1-\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} \\
&= 2\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= 2\frac{|x|}{1+x^2}
\end{aligned}$$

- On a

$$\sinh(2\operatorname{arg\,sinh} x) = 2\sinh(\operatorname{arg\,sinh} x)\cosh(\operatorname{arg\,sinh} x)$$

Or $\sinh(\operatorname{arg\,sinh} x) = x$ et $\cosh(\operatorname{arg\,sinh} x) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arg\,sinh} x)} = \sqrt{1+x^2}$ donc

$$\sinh(2\operatorname{arg\,sinh} x) = 2x\sqrt{1+x^2}$$

Exercice 6. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La réciproque est-elle vraie?

Corrigé 6. On a

$$\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0; / \; \forall x > \delta, \; f'(x) > A$$

Soit alors $x > \delta$, comme la fonction f est continue dérivable sur $[\delta, x]$ alors d'aprés le T.A.F

$$\exists c \in]\delta, x[/ \; f(x) - f(\delta) = (x-\delta)f'(c) \Longrightarrow\Longrightarrow f(x) = (x-\delta)f'(c) + f(\delta)$$

ce qui donne

$$f(x) > (x-\delta)A + f(\delta)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\delta)A + f(\delta) = +\infty$, il est facile de conclure que par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer la fonction $f(x) = x$ on voit bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ mais $f'(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\not\to} +\infty$

Exercice 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si \; x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \; x > 1 \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.
(2) Déterminer les valeurs possible de c.

Corrigé 7.

(1) Pour utiliser le théorème des accroissements finis, on va d'abord montrer que f est continue et dérivable sur $[0,2]$. Etudions la fonction en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x), \quad et \quad f(1)=1$$

ce qui montre que f continue au pt 1.
Si $x<1$

$$f'(x) = -x \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1$$

Si $x>1$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1$$

donc f est dérivable au point 1.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, on peut appliquer T.A.F sur [0,2] donc il existe $c\in]0,2[$ tel que $f(2)-f(0)=2f'(c)$.

(2) On a

$$f(2)=\frac{1}{2},\ f(0)=\frac{3}{2} \Longrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

- Si $c\in]0,1[$, on aura

$$f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

- Si $c\in]1,2[$, on aura

$$f'(c) = \frac{-1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow c^2 = 2 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

  or $-\sqrt{2}\notin]1,2[$ donc $c=\sqrt{2}\in]1,2[$.

il y a donc deux valeurs possibles $c=\sqrt{2}$ et $c=\frac{1}{2}$.

Exercice 8. Soit l'application $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers son image que l'on précisera.
(2) Sans calculer f^{-1}, déterminer son domaine de continuité et de dérivabilité.
(3) Déterminer f^{-1} et calculer sa dérivée.

Corrigé 8. Soit l'application $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

(1) On sait que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante alors que $x \longmapsto \sin(x)$ est strictement croissantes sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc f est strictement décroissante et est continue alors elle réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [1, +\infty[$

(2) D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est continue sur $[1,+\infty[$ et dérivable en tout point $y\in[1,+\infty[$ tel que $y=f(x)$ et $f'(x)\neq 0$. Puisque

$$f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc f^{-1} dérivable pour tout $y\in]1,+\infty[$

(3) Pour tout $y \in [1, +\infty[$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{1}{y} \in]0,1]$ et

$$y = f(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{y} = \sin(x) \Longleftrightarrow x = \arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$$

donc $f^{-1}(y) = \arcsin\left(\frac{1}{y}\right)$ et parsuite

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{-1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

Exercice 9. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

(1) Donner l'expression de f en fonction de la fonction ln.
(2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f
(3) Calculer la dérivée de f. En déduire l' expression de f obtenu en (1)

***Corrigé* 9.** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

(1) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

donc

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{1 + \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2|x|}\right)$$

(2) On $x \longrightarrow \arg\sinh(x)$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \longrightarrow \frac{x^2-1}{2x}$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est continue dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
(3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}} = \frac{x^2+1}{2x^2}\frac{2|x|}{x^2+1} = \frac{1}{|x|}$$

donc si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f(x) = \ln(x)$$

si $x < 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{x} \Longrightarrow f(x) = -\ln(-x)$$

Il est facile de vérifier que c'est la même expression trouvé en (1).
