Correction de la feuille d'exercices n° 2 : PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS

Solution de l'exercice 2.1

Notons E_i les événements correspondants aux différentes questions pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1) "Au moins un des événements A, B, C est réalisé" signifie qu'on a une union d'événements. Il s'agit ici de définir E_1 par :

$$E_1 = A \cup B \cup C.$$

2) " Un et un seul des événements A, B, C est réalisé" signifie que l'un des trois des événements sera réalisé et pas les deux autres. Il s'agit ici de définir E_2 par :

$$E_2 = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C).$$

3) "Au plus un des événements A, B, C est réalisé" signifie que soit " Un et un seul des événements A, B, C est réalisé" soit aucun n'est réalisé. Il s'agit ici de définir E_3 par :

$$E_3 = E_2 \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

4) "Au moins deux événements parmi A, B, C sont réalisés" signifie que soit " Deux exactement sont réalisés " soit tous les trois sont réalisés. Il s'agit ici de définir E_4 par :

$$E_4 = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

5) Il s'agit ici de démontrer, pour le cas particulier de $n = 3$, la formule du crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cup C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)\end{aligned}$$

Comme $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap B) \cap (B \cap C))$$

D'autre part, $(A \cap B) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. On obtient donc finalement
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Solution de l'exercice 2.2

Notons $\Delta = P(A \cap B)P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(A \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap B)$ et simplifions Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= P(A \cap B)P(\overline{A \cup B}) - P(A \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A \cap B)\,(1 - P(A \cup B)) - (P(A) - P(A \cap B)))(P(B) - P(B \cap A)) \\ &= P(A \cap B)\,(1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)) \\ &- (P(A) - P(A \cap B)))(P(B) - P(B \cap A)) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(A \cap B) - P(B)P(A \cap B) + (P(A \cap B))^2 \\ &- P(A)P(B) + P(A)P(A \cap B) + P(B)P(A \cap B) - (P(A \cap B))^2 \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B)\end{aligned}$$

En conclusion : $\Delta = 0 \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longleftrightarrow A \coprod B \Longleftrightarrow A$ et B sont indépendants

Solution de l'exercice 2.3

$\Omega = \{mains\ de\ 8\ cartes\ parmi\ 32\}$
$Card(\Omega) = C_{32}^{8}$

On décompose l'événement :

— $A = \{choisir\ le\ roi\ de\ coeur\}$

$$Card(A) = \underbrace{C_1^1}_{a} \times \underbrace{C_{21}^7}_{b}$$

a. choisir le roi de coeur ;

b. choisir 7 cartes qui sont ni roi, ni coeur.

$$P(A) = \frac{C_1^1 \times C_{21}^7}{C_{32}^8}$$

— $B = \{choisir\ un\ roi\ et\ un\ coeur\ autre\ que\ le\ roi\ de\ coeur\}$

$$Card(B) = \underbrace{C_3^1}_{a} \times \underbrace{C_7^1}_{b} \times \underbrace{C_{21}^6}_{c}$$

a. choisir un roi qui n'est pas le roi coeur ;

b. choisir un coeur qui n'est pas le roi de coeur ;

c. choisir 6 cartes qui sont ni roi, ni coeur.

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_7^1 \times C_{21}^6}{C_{32}^8}$$

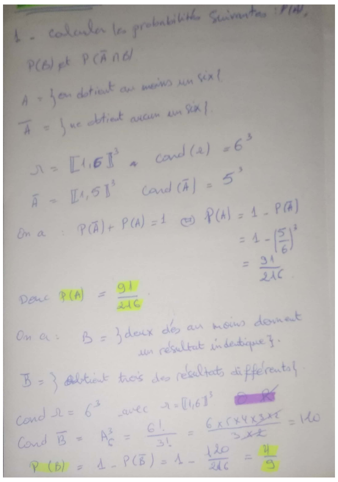
— $E = \{obtenir\ exactement\ 1\ roi\ et\ un\ coeur\}$

$E = A \cup B$: incompatibles donc :

$P(E) = P(A) + P(B)$

$$P(E) = \frac{C_1^1 \times C_{21}^7 + C_3^1 \times C_7^1 \times C_{21}^6}{C_{32}^8}$$

Solution de l'exercice 2.4



1 - Calculer les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$A = \{$on obtient au moins un six$\}$

$\bar{A} = \{$ne obtient aucun un six$\}$

$\Omega = [\![1,6]\!]^3$; $Card(\Omega) = 6^3$

$\bar{A} = [\![1,5]\!]^3$ $Card(\bar{A}) = 5^3$

On a : $P(\bar{A}) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$= \frac{91}{216}$

Donc $P(A) = \frac{91}{216}$.

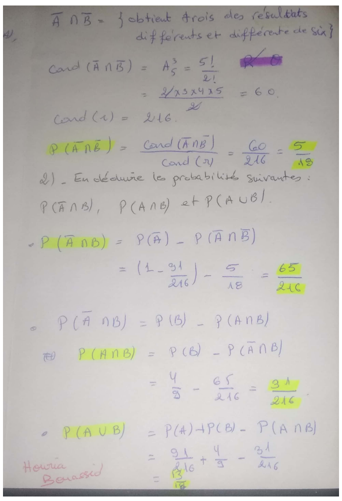
On a : $B = \{$deux dés au moins donnent un résultat indentique$\}$.

$\bar{B} = \{$obtient trois des résultats différents$\}$.

$Card\ \Omega = 6^3$ avec $\Omega = [\![1,6]\!]^3$ $\cancel{O\ R}$

$Card\ \bar{B} = A_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3 \times 2}}{\cancel{3 \times 2}} = 120$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{120}{216} = \frac{4}{9}$



$\bar{A} \cap \bar{B} = \{$obtient trois des résultats différents et différente de six$\}$

$Card(\bar{A} \cap \bar{B}) = A_5^3 = \frac{5!}{2!}$ $\cancel{R\ O}$

$= \frac{\cancel{2} \times 3 \times 4 \times 5}{\cancel{2}} = 60$.

$Card(\Omega) = 216$.

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{Card(\bar{A} \cap \bar{B})}{Card(\Omega)} = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}$

2) - En déduire les probabilités suivantes : $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

• $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$= \left(1 - \frac{91}{216}\right) - \frac{5}{18} = \frac{65}{216}$

• $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$

$= \frac{4}{9} - \frac{65}{216} = \frac{31}{216}$.

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{91}{216} + \frac{4}{9} - \frac{31}{216}$

$= \frac{13}{18}$

Houria Bouassid

Solution de l'exercice 2.5

1) $\boxed{\text{Tirages simultanés : ni ordre ni répétition} \Longrightarrow C_n^p}$

a) On remarque, dans ce premier modèle, que l'ordre ne joue aucun rôle et que les éléments choisis sont distincts. Donc on aura recours aux combinaisons.
$\Omega = \{\{b_i, b_j\}, i \neq j, i, j \in [\![1, 9]\!]\}$ et $\text{card}(\Omega) = C_9^2 = 9 \times 8/2 = 36$.

b) Notons E l'événement " les deux boules ont la même parité " et remarquons que E est l'union disjointe des deux événements suivants :

$$\begin{aligned} E_p &= \quad [\text{ les deux boules ont des numéros pairs}]" \\ E_i &= \quad [\text{ les deux boules ont des numéros impairs}]" \end{aligned}$$

On a donc $E = E_p \cup E_i$ avec $E_p \cap E_i = \varnothing$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(E_p) + \text{card}(E_i) = C_4^2 + C_5^2 = 6 + 10 = 16$. On en conclut que

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

2) $\boxed{\text{Tirages successifs sans remise : ordre important sans répétition} \Longrightarrow A_n^p}$

a) On remarque, dans ce deuxième modèle, que l'ordre joue un rôle important et que les éléments choisis sont distincts(sans remise). Donc on aura recours aux arrangements.
$\Omega = \{(b_i, b_j), i \neq j, i, j \in [\![1, 9]\!]\}$ et $\text{card}(\Omega) = A_9^2 = 9 \times 8 = 72$. Pour marquer que l'ordre est important on a utilisé les parenthèses au lieu des accolades(parenthèses $\Longleftrightarrow$ ordre, $\quad \{\} \Longleftrightarrow$ ordre sans importance)

b) Notons E l'événement " les deux boules ont la même parité " et remarquons que E est l'union disjointe des deux événements suivants :

$$\begin{aligned} E_p &= \quad [\text{ les deux boules ont des numéros pairs}]" \\ E_i &= \quad [\text{ les deux boules ont des numéros impairs}]" \end{aligned}$$

On a donc $E = E_p \cup E_i$ avec $E_p \cap E_i = \varnothing$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(E_p) + \text{card}(E_i) = A_4^2 + A_5^2 = 12 + 20 = 32$.
On en conclut que

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

3) $\boxed{\text{Tirages successifs avec remise : ordre important avec répétition possible} \Longrightarrow n^p}$

a) On remarque, dans ce troisième modèle, que l'ordre joue un rôle important et que les éléments choisis sont non nécessairement distincts(avec remise). Donc on aura recours à la formule n^p.

$\Omega = \{(b_i, b_j), i, j \in [\![1, 9]\!]\}$ et $\text{card}(\Omega) = 9^2 = 81$. Pour marquer que l'ordre est important on a utilisé les parenthèses au lieu des accolades(parenthèses $\Longleftrightarrow$ ordre, $\{\}$ $\Longleftrightarrow$ ordre sans importance)

b) Notons E l'événement " les deux boules ont la même parité " et remarquons que E est l'union disjointe des deux événements suivants :

$$\begin{aligned} E_p &= \text{[les deux boules ont des numéros pairs]''} \\ E_i &= \text{[les deux boules ont des numéros impairs]''} \end{aligned}$$

On a donc $E = E_p \cup E_i$ avec $E_p \cap E_i = \varnothing$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(E_p) + \text{card}(E_i) = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$.
On en conclut que

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{41}{81}.$$

Pour conclure, on remarque qu'avec le premier et le deuxième modèle on trouve des cardinaux différents mais par division les mêmes probabilités. Par contre, le troisième modèle nous donne des cardinaux différents et des probabilités différents !

Solution de l'exercice 2.6

1. On suppose ici implicitement que les dés sont discernables et que x_i respectivement y_i sont les résultats du premier et du second dé lors du i-ème double-lancer. L'univers Ω est l'ensemble des n-listes $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ telles que $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i, y_i \in [\![1, 6]\!]$. On a donc $\Omega = \left([\![1, 6]\!]^2\right)^n$ $\text{card}(\Omega) = 36^n$.
2. On a $\overline{A} =$« on n'obtient aucune paire de six 6 » donc $\text{card}(\overline{A}) = 35^n$. Par équiprobabilité :
$$P(\overline{A}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{35^n}{36^n} = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$
Puis :
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$
3. On résout l'inéquation suivante :

$$
\begin{aligned}
P(A) \geq k &\iff 1-\left(\frac{35}{36}\right)^n \geq k \\
&\iff -\left(\frac{35}{36}\right)^n \geq k-1 \\
&\iff \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq 1-k \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{35}{36}\right)^n\right) \leq \ln(1-k) \\
&\iff n\ln\left(\frac{35}{36}\right) \leq \ln(1-k) \\
&\iff n \geq \frac{\ln(1-k)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \qquad \text{car } \ln\left(\frac{35}{36}\right) < 0 \\
&\iff n \geq \frac{\ln(1-k)}{\ln(35)-\ln(36)}
\end{aligned}
$$

Pour $k = 0.9$, on trouve $\dfrac{\ln(1-k)}{\ln(35)-\ln(36)} = 81.7364$, donc on doit avoir $n \geqslant 82 = n_0$

Solution de l'exercice 2.7

1) $P(V) = 1/3$, $P(\overline{V}) = 2/3$, $P(V|M) = 1/4$, $P(\overline{V}|M) = 3/4$ et $P(M|V) = 1/10$.
2) On a $P(V|M) = \dfrac{P(V\cap M)}{P(M)} = 1/4$ et $P(M|V) = \dfrac{P(V\cap M)}{P(V)} = 1/10$, en divisant le premier quotient par le deuxième, il vient $\dfrac{P(V)}{P(M)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{10}} = \dfrac{5}{2}$ ce qui entraine que $P(M) = \dfrac{2}{5}P(V) = 2/5\times 1/3 = 2/15$. Ainsi $P(V\cap M) = 1/4\times P(M) = 1/4\times 2/15 = 1/30$. $P(M|\overline{V}) = \dfrac{M\cap\overline{V}}{P(\overline{V})} = \dfrac{P(\overline{V}|M)P(M)}{P(\overline{V})} = \dfrac{3/4\times 2/15}{2/3} = 3/20 = 15/100$
3) On a $P(M|V) = 1/10 = 10/100$ et $P(M|\overline{V}) = 15/100$, donc en étant vacciné, on a 10% de chance de tomber malade alors qu'en étant pas vacciné, on a 15% de chance de tomber malade(en augmentation). Donc on a intérêt à être vacciné pour affaiblir la possibilité de tomber malade.

Solution de l'exercice 2.8

Soit M l'événement "le patient est atteint", B l'événement "le patient est en bonne santé", et $+$ l'événement "le résultat du test est positif". Par la formule de Bayes on a

$$
\begin{aligned}
P(M|+) &= \frac{P(+|M)P(M)}{P(+|M)P(M)+P(+|B)P(B)} \\
&= \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}}{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}+\frac{2}{100}\frac{999}{1000}} = \frac{99}{2097} \approx 0.0472
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 2.9

La correction de cet exercice sera laissé comme devoir !!!