Correction de la feuille d'exercices n° 3 : LOIS DISCRÈTES

Exercice 3.1 : *Examen 2007-2008/(4Pts)*

1) a) On a un lot de $n = 200$ produits choisis au hasard(donc implicitement on a effectué des choix indépendants). Chaque produit choisi a deux possibilités : il est soit défectueux(ici ceci représente un succès), soit non défectueux(échéc). Le texte suggère que la probabilité de trouver un article choisi défectueux est commune à tous les articles et vaut $p = 0.02$.

Le nombre d'articles défectueux représente le nombre de succès sur les 200 articles produits, ainsi X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0.02$ qu'on note par $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 200, p = 0.02)$, d'où

$$X(\Omega) = [\![0, 200]\!], \text{ et } P(X = k) = C_{200}^{k} \quad 0.02^{k} 0.98^{200-k}, \ \forall k \in [\![0, 200]\!].$$

b) Pour calculer $P(X = 4)($ à 10^{-4} près), il suffit d'utiliser la dernière formule avec $k = 4$, ainsi on a :

$$P(X = 4) = C_{200}^{4} \quad 0.02^{4} 0.98^{196} = 0.1973 = v_{exacte}$$

2) a) La loi binomiale $\mathcal{B}(n = 200, p = 0.02)$ (car $n = 200 > 20, p = 0.02 \leq 0.1$ et $n \times p = 4 \leq 5$)peut être approchée par la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda = n \times p = 4)$. Ainsi

$$P(X = k) \cong e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k}}{k!}, \ k \in [\![0, 200]\!].$$

b) Une valeur approximative de $P(X = 4)($ à 10^{-4} près) utilisant la loi de poisson de paramètre 4 est donc obtenue par la dernière formule et vaut

$$P(X = 4) \cong e^{-4} \frac{4^{4}}{4!} = 0.1954 = v_{approximative}.$$

c) Pour comparer deux résultats il est recommandé de calculer l'erreur relative qu'on calcule par la formule suivante :

$$\text{Erreur relative} = \frac{|\text{valeur approchée -valeur exacte}|}{|\text{valeur exacte}|} = \frac{|0.1954 - 0.1973|}{|0.1973|} = 0.0101.$$

En multipliant par 100 le dernier résultat on trouve un pourcentage d'erreur relative 1.01% qui est "acceptable". Cette erreur relative est faible car n est très grand et p très petit et np relativement petit : $n = 200 > 20, p = 0.02 \leq 0.1$ et $n \times p = 4 \leq 5$. Pour d'autres applications, en ayant par exemple $np = 10$, on aurait une erreur relative très grande donc l'approximation serait mauvaise !

Exercice 3.2 : *Variable aléatoire de Poisson*

Puisque $\sum_{i=0}^{\infty} P\{X = i\} = 1 = c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} = c \cdot e^{\lambda}$, nécessairement $c = e^{-\lambda}$.

1) $P\{X = 0\} = c \frac{\lambda^{o}}{0!} = e^{-\lambda}$.

2) $P\{X > 2\} = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) = e^{-\lambda}\sum_{i=3}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}$.
3) $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda$ puis

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\right) \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}((i-1)+1)\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \lambda e^{-\lambda}(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}) + \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-2)!} \\ &= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda + \lambda^2, \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$.

Exercice 3.3 : *Somme de deux v.a.d indépendantes*

Posons $Z = X_1 + X_2$.
1) $X_i(\Omega) = [\![0, n_i]\!]$ pour $i = 1, 2$ donc $Z(\Omega) \subset [\![0, n_1 + n_2]\!]$.

$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= \sum_{l=0}^{k} P\{X_1 = l \ \text{ et } \ X_2 = (k-l)\} \\ &= \sum_{l=0}^{k} P\{X_1 = l\}P\{X_2 = (k-l)\} \\ &= \sum_{l=0}^{n_1} C_{n_1}^{l} p^l q^{n_1 - l} \times C_{n_2}^{k-l} p^{k-l} q^{n_2 - k + l} \\ &= p^k q^{n_1+n_2-k}\sum_{l=0}^{n_1} C_{n_1}^{l} \times C_{n_2}^{k-l} (\text{ et via la formule de Vandermonde, on aura }) \\ &= C_{n_1+n_2}^{k} p^k q^{n_1+n_2-k} \neq 0 \end{aligned}$$

D'où $Z(\Omega) = [\![0, n_1 + n_2]\!]$ et Z est encore binomiale, de paramètres $(n_1 + n_2, p)$
2) $X_i(\Omega) = \mathbb{N}$ pour $i = 1, 2$ donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour k entier ≥ 0, en utilisant l'indépendance et la définition, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=k) &= P([X_1=0]\cap[X_2=k])\cup([X_1=1]\cap[X_2=k-1])\cup\cdots\cup([X_1=k]\cap[X_2=0])) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P([X_1=i]\cap[X_2=k-i]) = \sum_{i=0}^{k} P[X_1=i]\times P[X_2=k-i] \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\times\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}{i!\times(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\times\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}{i!\times(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\times\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\times(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\times\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\times(\lambda_1+\lambda_2)^k \neq 0
\end{aligned}$$

D'où $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ et Z est encore poissonienne, de paramètre $(\lambda_1+\lambda_2)$.

Exercice 3.4 : *Transmission*

1) Soit X la variable aléatoire "nombre d'erreurs commises lors de la transmission de 5 bits". Alors X suit une loi binomiale $B(5,0.1)$. Recevoir une majorité de 1 alors que 00000 a été émis correspond à l'évènement $[X\geq 3]$. Sa probabilité est

$$\begin{aligned}
P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) &= C_5^3(0.1)^3(0.9)^2+C_5^4(0.1)^4(0.9)^1+C_5^5(0.1)^5(0.9)^0 \\
&= 0.0081+0.00045+0.00001=0.00856.
\end{aligned}$$

2) Recevoir une majorité de 1 alors que 11111 a été émis correspond à l'évènement $[X\leq 2]$, i.e. au complémentaire du précédent. Sa probabilité est donc $1-0.00856=0.99144$. Par conséquent, au prix de multiplier par 5 le temps de transmission, on améliore considérablement la fiabilité.

Exercice 3.5 : *Loi exacte et approximation*

Soit X le nombre de boules noires tirées, X suit la loi hypergéométrique de paramètres $N=1000$, $R=400$ et $n=5$. On a $X(\Omega)=[\![0,5]\!]$ et

$$P(X=3)=\frac{C_{400}^3C_{600}^2}{C_{1000}^5}\simeq 0,23059.$$

Une valeur approchée de ce résultat peut se calculer en utilisant l'approximation par une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=400/1000$, dans ce cas on obtient

$$P(X=3)\simeq C_5^3(0,4)^3(0,6)^2=0,2304.$$

Pour comparer deux résultats il est recommandé de calculer l'erreur relative qu'on calcule par la formule suivante :

$$\text{Erreur relative}=\frac{|\text{valeur approchée -valeur exacte}|}{|\text{valeur exacte}|}=\frac{|0.2304-0.230591|}{|0.230591|}=0.000828.$$

En multipliant par 100 le dernier résultat on trouve un pourcentage d'erreur relative 0.08% qui est "acceptable" car il est très faible. Il s'agit donc d'une très bonne approximation.

Exercice 3.6 : *Quelle est la loi ?*

1) La probabilité pour que le k-ième essai soit le bon est $q^{k-1}p$ soit ici $(\frac{3}{4})^{k-1}\frac{1}{4}$ puisque $p = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{3}{4}$.
Il s'agit donc de la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$ ($X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$) pour laquelle l'espérance est $E(X) = \frac{1}{p} = 4$ et la variance $V(X) = \frac{q}{p^2} = 12$ (Voir l'exercice **3.8** en fin de série n^o 3 pour la preuve de ces deux formules liées aux paramètres (espérance et variance) d'une loi géométrique).

2) Dans ce cas la variable aléatoire Y peut prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4 , et on a $P(Y = 1) = 1/4$, $P(Y = 2) = 3/4 \times 1/3 = 1/4$, $P(Y = 3) = 3/4 \times 1/3 \times 1/2 = 1/4$, $P(Y = 4) = 3/4 \times 1/3 \times 1/2 \times 1 = 1/4$.
On aurait pu trouver le résultat en remarquant que la probabilité que le k-ième essai soit le bon revient à choisir une position parmi 4. Il s'agit donc de la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et dans ce cas, d'espérance est $E(Y) = (1 + 2 + 3 + 4)/4 = (4 \times 5)/(2 \times 4) = 5/2$. et de variance est $V(Y) = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4} - (5/2)^2 = 5/4$.

Exercice 3.7 : *Loi conditionnelle*

Notons X le nombre d'appels au standard, Y le nombre d'appels vers le service de scolarité.
1) On cherche $P(Y = k|X = n)$.
On a donc $Y|X = n \rightsquigarrow B(n, p)$.
Ainsi :

$$P(Y = k|X = n) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

2) On cherche $P(Y = k \cap X = n)$.
Ceci revient à $P(Y = k|X = n) \times P(X = n)$
Donc :

$$C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$$

3) On cherche $P(Y = k)$.

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k \cap X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k! \times (n - k)!} \times p^k \times (1 - p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times \frac{p^k}{k!} \times \lambda^k \times \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k} \times (1 - p)^{n-k}}{(n - k)!} \end{aligned}$$

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \times \frac{(p \times \lambda)^k}{k!} \times \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \times (1 - p))^j}{j!}}_{exp(\lambda(1-p))} = e^{-\lambda} \times \frac{(p \times \lambda)^k}{k!} \times e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \times \frac{(p \times \lambda)^k}{k!}$$

Donc $Y \rightsquigarrow P(\lambda p)$

Exercice 3.8 : *Paramètres d'une loi géométrique*

Montrons que si $X \rightsquigarrow G(p)$, alors on a
1) $E(X) = \frac{1}{p}$.
2) $V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

Indications :

$\forall p \in]0,1[\ \sum_{k=0}^{+\infty} p^k = \frac{1}{1-p}, \ \sum_{k=1}^{+\infty} k \times p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}, \ \sum_{k=2}^{+\infty} k \times (k-1) \times p^{k-1} = \frac{2}{(1-p)^3}.$

1) Pour l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times p \times (1-p)^{k-1} \\ &= p \times \sum_{k=1}^{+\infty} k \times (1-p)^{k-1} \\ &= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p \times \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

2) Pour la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ E(X(X-1)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times (k-1) \times P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times (k-1) \times p \times (1-p)^{k-1} \\ &= p \times (1-p) \times \sum_{k=2}^{+\infty} k \times (k-1) \times (1-p)^{k-2} = p \times (1-p) \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} \\ &= \frac{2 \times (1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{2 \times (1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2 \times (1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$