Série 1

Ex. 1 — Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, et u un endomorphisme de E.

1) Montrer que u est nilpotent entraîne que 0 est la seule valeur propre de u dans K ;
2) Montrer que la réciproque est vraie si le polyôme caractéristique de u est scindé sur K.
3) Donner un exemple d'une matrice réelle qui possède 0 comme seule valeur propre réelle et ne soit pas nilpotente.

Ex. 2 — Soient E un espce vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur K et possédant une seule valeur propre. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u est une homothétie (il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$).
En déduire que pour $A \in K^{n\times n}$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur K et possède une seule valeur propre, A est diagonalisable si et seulement si c'est une matrice scalaire (c'est-à-dire, $A = \lambda I_n$ pour un certain $\lambda \in K$).

Ex. 3 — Soient a, b deux nombres complexes. Soient A la matrice unicolonne $(n, 1)$ dont tous ses coefficients sont égaux à a et B une matrice uniligne $(1, n)$ dont tous ses coefficients sont égaux à b. Trouver les valeurs propres de AB.

Ex. 4 — Soient k un entier naturel non nul et $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tels que $A^k = I_n$. Montrer que si ω est une racine k-ème de l'unité telle que ω^{-1} n'est pas une valeur propre de A, alors

$$I_n + \omega A + \omega^2 A^2 + \cdots + \omega^{k-1} A^{k-1} = 0.$$

Ex. 5 — Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel sur un corps commutatif K tel que $f^2 = f$ (f est un projecteur). Trouver les valeurs propres de f.
Déterminer toutes les matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ telles que $A^2 = A$.

Ex. 6 — Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u. Soient u_F et u_G les endomorphismes induits par u sur F et G respectivement.

1) On suppose maintenant que u est diagonalisable.
   a) Soit λ une valeur propre de u ; on pose $F_\lambda = \mathrm{V}_\lambda(u) \cap F$ et $G_\lambda = \mathrm{V}_\lambda(u) \cap G$. Montrer que $\mathrm{V}_\lambda(u) = F_\lambda \oplus G_\lambda$.

b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u. Montrer que $F = \oplus_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$ et $G = \oplus_{i=1}^{p} G_{\lambda_i}$. En déduire que u_F et u_G sont diagonalisables.

2) Montrer que si u_F et u_G alors u est diagonalisable.

3) Montrer que tout sous-espace de E engendré par des vecteurs propres de u est stable par u. En déduire que tout sous-espace de E stable par u possède un sous-espace supplémentaire stable par u.

Ex. 7 — Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E qui laisse invariants tous les vecteurs de H.

1) Montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $u(x) - \alpha x \in H$.
2) Montrer que lorsque $\alpha = 0$ alors u est un projecteur.
3) Discuter, suivant les valeurs de α, la possibilité de diagonaliser u.

Ex. 8 — Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et les cas où A est diagonalisable dans chacun des cas suivants :

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ *iii)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ *v)* $A = \begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & 2b & c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}.)$

Ex. 9 — Soit A une matrice carrée d'ordre n. Montrer que le monôme d'ordre $n-1$ du polynôme caractéristique de A est $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)X^{n-1}$ où $\operatorname{tr}(A)$ est la trace de A.

Exercices supplémentaires

Ex. 10 — Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer l'équivalence de :

(a) tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ où $x_i \in E_i$ pour tout i ;
(b) 0 s'écrit d'une façon unique sous la forme $0 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ où $x_i \in E_i$ pour tout i ;
(c) $(E_1 + \cdots + E_i) \cap E_{i+1} = \{0\}$ $(i = 1, \dots, n-1)$;
(d) si I, J sont des parties disjointes de $\{1, \dots, n\}$,

$$\Big(\sum_{i\in I} E_i\Big) \bigcap \Big(\sum_{i\in J} E_i\Big) = \{0\}.$$

Si l'une de ces conditions est valable, on dit que $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est une **somme directe**.

Ex. 11 — Soit E un ev sur un corps commutatif K. Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$, $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n à coefficients dans K et soit

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Soit f une application n-multilinéaire alternée sur E. Montrer que

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \det(A) f(u_1, \ldots, u_n).$$

Ex. 12 — Soient A, B deux matrices carrées d'ordres n et m respectivement, et C une matrice de type (m, n). À l'aide de Ex. 11, montrer que

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{vmatrix} = \det(A) \begin{vmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ C & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B) \quad \text{(Lagrange)}.$$

Ex. 13 — Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ et $T : E \to E$ définie par

$$T(f) = f(1 - X).$$

1) Vérifier que T est un endomorphisme de E. Est-ce qu'il est injetif ? surjectif ?.
2) Trouver les valeurs et les vecteurs propres de T et une base dans laquelle la matrice de T est diagonale.

Ex. 14 — Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n sur K, ayant chacun n valeurs propres deux à deux distintes. Montrer qu'on a l'équivalence de :

1) u et v ont les mêmes valeurs propres.
2) u et v commutent (i.e. $v \circ u = u \circ v$).