

Examen de Probabilités-Statistiques

Date : 30 janvier 2019

Durée : 2h30min

Exercice 1 : 3.5 points

En mécanique statistique, on étudie la distribution de particules dans l'espace. Il est pratique de considérer que l'espace est subdivisé en petites cellules discernables. Trois modèles uniformes différents ont été proposés.

Modèle M-B : Le modèle de Maxwell-Boltzmann, supposant que l'on peut distinguer les particules et ne limitant pas le nombre de particules par cellule.

Modèle B-E : Le modèle de Bose-Einstein, supposant que l'on ne peut distinguer les particules (particules identiques) et ne limitant pas le nombre de particules par cellule.

Modèle F-D : Le modèle de Fermi-Dirac, supposant que l'on ne peut distinguer les particules (particules identiques), avec au plus une particule par cellule.

Donner, en fonction des différents modèles, le nombre de façons de répartir 5 particules dans 7 cellules (Justifier rigoureusement vos réponses).

N.B. : On admettra dans cet exercice le résultat suivant : Pour tout entier $p \geq 2$ et pour tout entier naturel S , si on note Σ_S^p l'ensemble défini par : $\Sigma_S^p = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^p n_i = S\}$ alors $\text{card}(\Sigma_S^p) = C_{S+p-1}^{p-1}$.

Exercice 2 : 3.5 points

2 % des articles produits par une usine sont défectueux.

On note X la v.a. discrète désignant le nombre de produits défectueux sur un lot de 200 articles.

- 1)
 - a) Donner, en la justifiant, la loi de la v.a. X .
 - b) Calculer directement $P(X = 4)$ (à 10^{-4} près).
- 2)
 - a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? (préciser les conditions exigées pour ceci)
 - b) Donner, en utilisant l'approximation ci-dessus, une valeur approchée de $P(X = 4)$ (à 10^{-4} près).
 - c) Comparer les résultats trouvés en calculant l'erreur relative puis conclure.

Exercice 3 : 3.5 points

Le délai de livraison X d'une pièce suit une loi normale, de moyenne $m = 30$ jours et d'écart-type $\sigma = 5$ jours.

- 1) Quelle est la probabilité pour que le délai soit inférieur à 38 jours ?
- 2) Déterminer l'intervalle $[a, b]$ centré en m tel que $P[a \leq X \leq b] = 0,98$.
- 3) Déterminer le réel j tel que 15% des pièces soient livrées avant j .

N.B. : On utilisera la table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ donnée dans la page suivante pour répondre aux questions de cet exercice.

Exercice 4 : 3.5 points

On donne dans le tableau suivant la taille en cm des $n = 20$ nourrissons nés dans une maternité au cours d'une semaine :

Taille x_i	46	48	49	50	51
Effectif n_i	2	3	5	7	3

- 1) Compléter le tableau statistique précédent en rajoutant 3 lignes associées respectivement aux effectifs cumulés N_i , les valeurs $n_i x_i$ et $n_i x_i^2$ (en indiquant les sommes utiles).
- 2) Calculer le mode, la moyenne \bar{x} , la médiane cette série, la variance et l'écart-type σ de cette série.

Exercice 5 : 6 points

Les quatres questions suivantes sont indépendantes. Traiter au choix trois seulement parmi les quatre.

- 1) D'un jeu de 32 cartes, on extrait 6 cartes simultanément(en même temps et sans remise) .
Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 dames et 3 trèfles.
- 2) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre commun λ . Déterminer la distribution de $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ en déterminant la fonction de répartition de Y .
- 3) On jette n dés non truqués distinguables. Montrer que l'événement : "la somme des points marqués par les n dés est paire" est de probabilité $\frac{1}{2}$.
- 4) Deux joueurs lancent une même pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé). Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile.

FIN DE L'ÉPREUVE. BON TRAVAIL