

# Chapitre 2

## Les suites numériques

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Généralités sur les suites . . . . .</b>	<b>23</b>
1.1	Définitions . . . . .	23
1.2	Suites monotones . . . . .	23
1.3	Suites bornées . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Nature d'une suite . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1	Suites convergentes et suites divergentes . . . . .	24
2.2	Propriétés de convergence des suites . . . . .	26
2.3	Opérations algébriques sur les suites convergentes . . . . .	27
2.4	Opérations algébriques sur les suites divergentes . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Critères de convergence d'une suite . . . . .</b>	<b>30</b>
3.1	Théorèmes de comparaison et d'encadrement . . . . .	30
3.2	Critère de la convergence monotone . . . . .	31
3.3	Critère de d'Alembert . . . . .	32
3.4	Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure par les suites . . . . .	32
3.5	Caractérisation séquentielle de la densité . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Suites particulières . . . . .</b>	<b>34</b>
4.1	Suites arithmétiques et suites géométriques . . . . .	34
4.2	Suites arithmético-géométriques . . . . .	36
4.3	Suites récurrentes . . . . .	36
4.4	Suites adjacentes . . . . .	38
4.5	Suites de Cauchy . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Suites extraites et le théorème de BOLZANO-WIERSTRASS . . . . .</b>	<b>39</b>
5.1	Suites extraites . . . . .	39
5.2	Segments emboîtés et théorème de BOLZANO-WIERSTRASS . . . . .	39
5.3	Application : Complétude de $\mathbb{R}$ . . . . .	41

---

# 1 Généralités sur les suites

## 1.1 Définitions

**Définition 1.1.** Une suite dans  $\mathbb{R}$  est une application

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui associe à tout entier  $n \geq n_0$  un réel  $u(n)$  que l'on notera  $u_n$  plutôt que  $u(n)$ . Une telle suite sera notée  $(u_n)_{n \geq n_0}$ ,  $u_n$  est appelé le terme général de la suite et  $u_{n_0}$  le premier terme.

**Exemple - Une suite peut être définie :**

1. Sous forme explicite. Par exemple, la suite de terme général

$$u_n = \frac{9n - 20}{n^2}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

c'est une suite dont les premiers termes sont

$$u_1 = -11; u_2 = -\frac{1}{2}; u_3 = \frac{7}{9}; u_4 = 1; u_5 = 1; \dots$$

2. Sous forme récurrentes. Par exemple, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi,  $u_2 = \frac{4}{3}$  et  $u_3 = \frac{8}{7}$ .

## 1.2 Suites monotones

**Définition 1.2.** 1. Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est dite croissante (resp. décroissante) si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  (resp.  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ ).

2. Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est dite strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n < u_{n+1}$  (resp.  $n \geq n_0$ ,  $u_n > u_{n+1}$ ).

3. Une suite est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante,

4. S'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq p, u_n = u_p$ ,  $(u_n)$  est dite stationnaire à partir du rang  $p$ .

**Remarque 1.1.** Le sens de variation d'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  peut être étudié de deux façon :

1. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante (respectivement. décroissante) si et seulement si  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  (respectivement  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ )
2. Si la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement positive c'est-à-dire  $\forall n, u_n > 0$  alors
  - La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante si et seulement si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ .
  - La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante si et seulement si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ .

**Exemple -**

1. La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \frac{1}{n}$  est une suite strictement décroissante. En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$

2. La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  n'est ni croissante ni décroissante. En effet,  $u_1 < u_2$  et  $u_2 > u_3$ .

### 1.3 Suites bornées

**Définition 1.3.** 1. Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est dite majorée (resp. minorée) s'il existe un réel  $M \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq M$  (resp.  $u_n \geq m$ ).

2. Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit s'il existe  $m, M \in \mathbb{R}^+$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $m \leq u_n \leq M$ .

En pratique il est plus facile d'utiliser la caractérisation ci-dessous pour montrer qu'une suite est bornée.

**Remarque 1.2.** Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bornée si et seulement s'il existe un réel positif  $A$  tel que l'on ait

$$\forall n; \quad |u_n| \leq A$$

**Exemple -**

1. La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \frac{n}{n+1}$  est bornée. En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|u_n| \leq 1$ .
2. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  avec  $u_n = 2^n$  est croissante mais n'est pas majorée.
3. La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  est bornée mais n'est pas monotone.

## 2 Nature d'une suite

### 2.1 Suites convergentes et suites divergentes

**Définition 2.1. (Suite convergente)** On dit que la suite de nombres réelles  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  si pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$ ,  $u_n$  appartient à  $V$  à partir d'un certain rang. Cela est équivalent à dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \leq n_0 \quad \text{tel que : } \forall n > N_\varepsilon \quad |u_n - \ell| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

L'équivalence suivante est évidente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0. \quad (2.2)$$

**Exemple -** La suite définie par  $u_n = \frac{9n-20}{n^2}$  converge vers 0. En effet soit  $\varepsilon > 0$ . Alors

$$|u_n - 0| = \left| \frac{9n-20}{n^2} \right| < \frac{9}{n} < \varepsilon$$

dés que  $n > \frac{9}{\varepsilon}$ . Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \frac{9}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

on a  $N > \frac{9}{\varepsilon}$  et ainsi  $\frac{9}{N} < \varepsilon$ . Donc, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{9}{n} < \frac{9}{N} < \varepsilon$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-20}{n^2} = 0.$$

**Proposition 2.1.** On peut utiliser une inégalité large dans la définition de convergence. Une suite  $(u_n)_n$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \geq n_0 \text{ tel que : } \forall n \geq N_\varepsilon \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

**Démonstration.**  $\Rightarrow$  est évidente puisqu'une inégalité stricte est à fortiori large.

$\Leftarrow$  soit  $\varepsilon > 0$ . Posons  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ . Il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$  et à partir de ce rang, on a  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon' < \varepsilon$ .  $\square$

Si le réel  $\ell$  n'existe pas, la suite est dite divergente. Avec les quantificateurs on écrit,

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N, \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon$$

Une suite peut diverger tout en tendant vers  $\pm\infty$ .

**Définition 2.2. (Suite divergente)**

1. On dira que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  diverge vers  $+\infty$  et on notera  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. On dira que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$  et on notera  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n < B.$$

**Remarque 2.1.** 1. On obtient une définition équivalente en remplaçant " $\forall A \in \mathbb{R}$ " par " $\forall A \in \mathbb{R}^+$ ".

2. On obtient une définition équivalente en remplaçant " $\forall B \in \mathbb{R}$ " par " $\forall B \in \mathbb{R}^-$ ".

**Exemple -**

1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = n$  diverge vers  $+\infty$ . En effet, pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , prenons  $N = [A] + 1$ . On a,  $N > A$  et donc pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n > A$ .

**2. La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  est divergente. En effet, supposons qu'elle est convergente, alors :**

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } \forall n > N_\varepsilon \quad |(-1)^n - \ell| < \varepsilon.$$

Avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , cela donne :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } \forall n > N_\varepsilon \quad \ell - \frac{1}{2} < (-1)^n < \ell + \frac{1}{2}.$$

Pour un entier pair tel que  $n > N$ , on a  $\ell - \frac{1}{2} < 1 < \ell + \frac{1}{2}$ .

$$\text{Donc } \ell \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$$

Pour un entier impair tel que  $n > N$ , on a  $\ell - \frac{1}{2} < -1 < \ell + \frac{1}{2}$ .

$$\text{Donc } \ell \in \left] -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right[.$$

Ce qui est absurde.

## 2.2 Propriétés de convergence des suites

**Théorème 2.1.** (*Unicité de la limite*)

Si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge vers une limite alors cette limite est unique.

**Démonstration.** Raisonnons par absurde et supposons que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge vers deux limite  $\ell_1$  et  $\ell_2$  avec  $\ell_1 \neq \ell_2$ .

Prenons  $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$ . Puisque la suite converge vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , il existe  $N_1 \geq n_0$  et  $N_2 \geq n_0$  tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, |u_n - \ell_2| < \varepsilon. \quad (*)$$

Choisissons un entier  $n$  tel que  $n > N = \max(N_1, N_2)$ . Il vient, d'après l'inégalité triangulaire et (\*),

$$0 < |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| < 2\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}.$$

On abouti donc à une contradiction ce qui achève la preuve de la proposition. ■

**Proposition 2.2.** *Toute suite convergente est bornée.*

**Démonstration.** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite convergente vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Prenons  $\varepsilon = 1$ . Il existe donc un entier  $N \geq n_0$  tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| < 1. \quad (*)$$

Notons  $M_1 = \max\{|u_{n_0}|, \dots, |u_{N-1}|\}$ ,  $M_2 = |\ell| + 1$  et  $M = \max(M_1, M_2)$ . Pour tout  $n \geq n_0$ , on a deux cas :

- Si  $n_0 \leq n \leq N - 1$ , on a

$$|u_n| \leq M_1 \leq M,$$

- si  $n \geq N$ , on a d'après (\*) et l'inégalité triangulaire,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| \leq M.$$

Nous avons donc montré que

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$$

ce qui montre que la suite est bornée. ■

**Exemple -** La suite  $u_n = \frac{1}{n+1}$  est convergente vers 0 donc elle est bornée et l'on a bien  $0 < u_n \leq 1$ . Mais, la réciproque est fautive. Pour le voir, considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_n = (-1)^n$  est bornée ( $|u_n| \leq 1$ ) mais n'est pas convergente.

### 2.3 Opérations algébriques sur les suites convergentes

**Proposition 2.3.** Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  deux suites réelles telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. La suite somme  $(u_n + v_n)_n$  est convergente, de plus on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$ .
2. La suite produit  $(u_n v_n)_n$  est convergente, de plus on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \ell_1 \ell_2$ . En particulier pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a u_n) = a \ell_1$ .
3. Si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $v_n \neq 0$  et  $\ell_2 \neq 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell_2}$ .
4. Si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$  (respectivement  $u_n < v_n$ ), alors  $\ell_1 \leq \ell_2$ .

**Démonstration.**

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe donc  $N_1 \geq n_0$  et  $N_2 \geq n_0$  tels que

$$\forall n > N_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n > N_2, |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (P1)$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Il vient, d'après l'inégalité triangulaire et (P1),

$$\forall n > N, |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Commençons par remarquer que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = (u_n - \ell_1) v_n + (v_n - \ell_2) \ell_1, \quad (P2)$$

et que la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$ , étant convergente, elle est bornée en vertu de la Proposition 2.2. Il existe donc un réel  $M > 0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, |v_n| \leq M. \quad (P3)$$

Maintenant, il existe deux entiers  $N_1 \geq n_0$  et  $N_2 \geq n_0$  tels que

$$\forall n > N_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \forall n > N_2, |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}. \quad (P4)$$

Prenons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Il vient d'après l'inégalité triangulaire, (P2), (P3) et (P4),

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| |v_n| + |v_n - \ell_2| |\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)} |\ell_1| < \varepsilon.$$

3. Puisque  $\ell_2 \neq 0$ , il existe un entier  $N_1 \geq n_0$  tel que pour tout  $n > N_1$ , on a  $|v_n - \ell_2| < \frac{|\ell_2|}{2}$ . Ceci entraîne que

$$\forall n > N_1, |v_n| \geq \frac{|\ell_2|}{2}. \quad (P5)$$

D'un autre côté, on a, pour tout  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|v_n - \ell_2|}{|v_n \ell_2|}. \quad (P6)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_2 \geq n_0$  tel que

$$\forall n > N_2, |v_n - \ell_2| < (\ell_2)^2 \frac{\varepsilon}{2}. \quad (P7)$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Il vient, d'après (P5), (P6) et (P7),

$$\forall n > N, \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \varepsilon.$$

4. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n \geq n_0$  tel que

$$\ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} < v_n < \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ces deux doubles inégalités entraînent que

$$\ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} < u_n \leq v_n < \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc  $\ell_1 < \ell_2 + \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et ainsi  $\ell_1 \leq \ell_2$ . ■

## 2.4 Opérations algébriques sur les suites divergentes

**Proposition 2.4.** 1. Si  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) et si  $(v_n)_n$  est une suite minorée (respectivement majorée), alors  $(u_n + v_n)$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ).

2. Si  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) et si  $(v_n)_n$  est une suite qui converge vers  $v$ , alors  $(u_n v_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) si  $v > 0$  et vers  $-\infty$  (respectivement vers  $+\infty$ ) si  $v < 0$ .

3. Si  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) alors  $\frac{1}{u_n}$  converge vers 0
4. Si  $(u_n)_n$  tend vers 0 et  $u_n > 0$  (respectivement  $u_n < 0$ ) alors  $\frac{1}{u_n}$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ )

**Démonstration.**

1. Soient  $(u_n)_n$  une suite qui tend vers  $+\infty$  et  $(v_n)_n$  une suite minorée. Il existe  $M_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $v_n \geq M_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, pour tout  $M \in \mathbb{R}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > N \implies u_n > M - M_0$$

Par conséquent

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N \implies u_n + v_n > M)$$

2. Soient  $(u_n)_n$  une suite qui tend vers  $+\infty$  et  $(v_n)_n$  qui converge vers  $v$ . Il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > N_1 \implies 0 < \frac{v}{2} < v_n < \frac{3v}{2}$$

Soit  $A \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > N_2 \implies u_n > \frac{2A}{v}$$

Pour  $n > \max(N_1, N_2)$ , nous avons bien

$$u_n v_n > A.$$

3. Etant donnée  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n > N \implies u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Par conséquent

$$n > N \implies \frac{1}{u_n} < \varepsilon$$

La propriété 4 est immédiate. ■

**Corollaire 3.** 1. Si deux suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  tendent vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) leurs somme  $(u_n + v_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

2. Si  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) et si  $(v_n)_n$  est une suite convergente alors leurs somme  $(u_n + v_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).



### 3 Critères de convergence d'une suite

#### 3.1 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

**Théorème 3.1. (Théorème des gendarmes)** Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$ ,  $(v_n)_{n \geq n_0}$  et  $(w_n)_{n \geq n_0}$  trois suites réelles. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq w_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell.$$

**Démonstration.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N_1 \geq n_0$  et  $N_2 \geq n_0$  tels que

$$\forall n \geq N_1, \ell - \varepsilon < u_n < \varepsilon + \ell \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, \ell - \varepsilon < v_n < \varepsilon + \ell.$$

Posons  $N = \max(N_1, N_2)$ . Il vient

$$\forall n \geq N, \ell - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \varepsilon + \ell.$$

Ceci montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ . ■

**Exemple -**

1. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = \frac{\cos n}{n}$ . Puisque  $-1 \leq \cos n \leq 1$ , on déduit que

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Maintenant, comme on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ , en appliquant le principe des gendarmes, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

Le théorème des gendarmes s'étend de la manière suivante :

**Corollaire 4.** Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  telles que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$ . Alors :

1. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Démonstration.**

1. Soit  $A > 0$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , il existe  $N \geq n_0$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n > A$ . Or  $v_n \geq u_n$ , on déduit alors que pour tout  $n \geq N$ ,  $v_n > A$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
2. Raisonnement similaire à celui de 1. ■

**Théorème 3.2. (Obtention de convergence)**

Si à partir d'un certain rang  $|u_n - \ell| \leq v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

**Démonstration.** On suppose qu'il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq v_n$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n| < \varepsilon$$

et donc  $v_n < \varepsilon$ . Pour  $N = \max(N_1, N_2)$ , on a

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

■

**Remarque 3.1.** Cette démarche est souvent plus efficace que le théorème des gendarmes car on n'y utilise qu'une inégalité au lieu de deux, ce qui est pratique pour la multiplication d'inégalités. Cependant elle nécessite de l'intuition car pour l'initier il faut avoir deviner quelle est la limite de  $(u_n)$ .

### 3.2 Critère de la convergence monotone

En s'appuyant sur la propriété de la borne supérieure, on va démontrer le théorème des suites monotones bornées, qui permet de savoir si une suite est convergente sans connaître sa limite.

#### Théorème 3.3. (Théorème des suites monotones)

1. Toute suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente et, en plus, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} \sup_{n \geq n_0} u_n & \text{si } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est croissante,} \\ \inf_{n \geq n_0} u_n & \text{si } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

2. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ).

1. **Démonstration.** Supposons que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante majorée et notons  $\ell = \sup_{n \geq n_0} u_n$  qui existe d'après le théorème de la borne supérieure.

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier  $N \geq n_0$  tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell.$$

Maintenant, puisque la suite est croissante, il vient

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

Ceci montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

Pour une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  décroissante minorée, la suite  $(-u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante majorée et  $\sup_{n \geq n_0} (-u_n) = - \inf_{n \geq n_0} u_n$  et ce qui précède permet de conclure.

2. Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée. Soit  $A > 0$ , il existe  $N \geq n_0$  tel que  $u_N > A$ . Comme la suite est croissante, pour tout  $n > N$ , nous avons  $u_n > A$ . ■

**Remarque 3.2.** Ce théorème dit que si une suite est croissante alors soit elle converge, soit elle diverge vers  $+\infty$ .

### 3.3 Critère de d'Alembert

On peut maintenant introduire un critère dit de d'Alembert :

**Proposition 3.1.** (Critère de d'Alembert)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

alors on a

- (i) Si  $\ell < 1$ , la suite  $(u_n)$  converge vers 0.
- (ii) Si  $\ell > 1$ , la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- (iii) Si  $\ell = 1$  on ne peut rien dire.

**Démonstration.** Montrons (i). Pour  $\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2} > 0$ , il existe  $N \geq n_0$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon < \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \ell + \varepsilon \implies 0 \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \frac{\ell + 1}{2}$$

On pose  $\rho = \frac{\ell + 1}{2}$ , alors on aura

$$|u_{n+1}| \leq \rho |u_n|$$

Par récurrence on obtient

$$|u_n| \leq \rho |u_{n-1}| \leq \rho(\rho |u_{n-2}|) < \dots < \rho^{n-N} |u_N|$$

Puisque  $0 < \ell < 1$  alors  $0 < \rho < 1$  et donc  $\rho^{n-N}$  tend vers 0, on en déduit le résultat. La seconde partie se démontre de la même façon. ■

### 3.4 Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure par les suites

**Proposition 3.2.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Alors :

1.  $\alpha = \sup A$  si et seulement si  $\alpha$  est un majorant de  $A$  et il existe une suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  telle que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$ .
2.  $\beta = \inf A$  si et seulement si  $\beta$  est un minorant de  $A$  et il existe une suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  telle que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \beta$ .

3.  $A$  n'est pas majoré si et seulement si il existe une suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  telle que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .
4.  $A$  n'est pas minoré si et seulement si il existe une suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  telle que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ .

**Démonstration.** Nous allons montrer la première assertion, les autres se démontrent d'une manière analogue. Nous allons démontrer une équivalence.

Supposons que  $\alpha = \sup A$ . D'abord  $\alpha$  est un majorant de  $A$  par définition. D'après la caractérisation de la borne supérieure, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un élément  $a_n \in A$  tel que

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha.$$

Le critère de comparaison montre d'une manière évidente que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de points de  $A$  qui converge vers  $\alpha$ .

Inversement, supposons que  $\alpha$  est un majorant de  $A$  et qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  telle que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$ . Pour montrer que  $\alpha = \sup A$ , il suffit de montrer le (ii)' de la proposition (1). En effet, soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$ , il existe  $N \geq n_0$  telle

$$\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha + \varepsilon.$$

Puisque  $a_N \in A$ , on peut conclure. ■

**Exemple -**

1. Soit  $A = ]-1, +\infty[$ . On a  $\inf A = -1$  car  $-1$  est un minorant de  $A$  et la suite  $(-1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  est une suite de points de  $A$  qui converge vers  $-1$ .  
La partie  $A$  n'est pas majorée car la suite  $(n)_{n \geq 0}$  est une suite de points de  $A$  qui diverge vers  $+\infty$ .
2. Soit  $A = ]-\infty, 3[$ . On a  $\sup A = 3$  car  $3$  est un majorant de  $A$  et la suite  $(3 - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  est une suite de points de  $A$  qui converge vers  $3$ .  
La partie  $A$  n'est pas minorée car la suite  $(-n)_{n \geq 0}$  est une suite de points de  $A$  qui diverge vers  $-\infty$ .
3. La partie  $A = \{\sqrt{n} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$  n'est pas majorée car la suite  $(\sqrt{n} + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de points de  $A$  qui diverge vers  $+\infty$ .

### 3.5 Caractérisation séquentielle de la densité

**Théorème 3.4.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite  $(a_n)_n$  d'éléments de  $A$  telle que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

**Démonstration.**

- Supposons  $A$  dense dans  $\mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n > 0$ , il existe  $a_n \in A$  tel

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$

Le critère d'encadrement, implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$ , donc on a construit une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

- Inversement, soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tel que  $x < y$ . Par hypothèse, il existe une suite  $(a_n)_n$  d'éléments de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{x+y}{2}$ . Alors, pour  $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| a_n - \frac{x+y}{2} \right| < \frac{y-x}{2} \iff x < a_n < y$$

■

## 4 Suites particulières

### 4.1 Suites arithmétiques et suites géométriques

**Définition 4.1.** (*Suites arithmétiques*)

Une suite  $(u_n)_n$  est appelée une suite arithmétique s'il existe un nombre  $r$  tel que,

$$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre  $r$  s'appelle la raison de la suite.

**Propriété 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ , alors

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_n = u_0 + nr$$

- D'une manière générale,

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

- Si  $r > 0$  la suite tend vers  $+\infty$ , et si  $r < 0$  la suite tend vers  $-\infty$ .
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $r = 0$  (c'est une suite stationnaire).

**Proposition 4.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ , alors la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  est donnée par

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

**Démonstration.** On a

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_p + u_{n-p}) + \dots + (u_n + u_0)$$

or pour tout  $p \leq n$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$$

ainsi

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

**Définition 4.2.** (*Suites géométrique*)

Une suite  $(u_n)_n$  est appelée une suite géométrique s'il existe un nombre  $q$  tel que,

$$\forall n, \quad u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre  $q$  s'appelle la raison de la suite. Il est immédiat qu'alors  $u_n = u_0 q^n$ .

**Proposition 4.2.** (*Nature d'une suite géométrique*)

Soit  $(u_n)_n$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- Si  $|q| < 1$ , la suite converge vers 0.
- Si  $q = 1$ , la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u_0$  (elle est stationnaire).
- Si  $q = -1$ , la suite diverge.
- Si  $q > 1$ , la suite  $(u_n)$  tend vers l'infini avec le signe de  $u_0$ .
- Si  $|q| > 1$ , la suite  $(|u_n|)$  tend vers  $+\infty$ .

**Démonstration.**

- Si  $q > 1$ , on écrit  $q = 1 + a$  avec  $a > 0$ , on en déduit par la formule de binôme que  $q^n = (1 + a)^n > 1 + na$ . Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par  $u_0$  pour conclure.

- Le même raisonnement est valable si  $|q| > 1$ .
- Si  $|q| < 1$ , alors  $\frac{1}{|q|} > 1$ , donc d'après ce qui précède,  $\frac{1}{|q^n|}$  tend vers  $+\infty$ , il s'ensuit que  $q^n$  tend vers 0. ■

**Proposition 4.3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et de premier terme  $u_0$ , alors la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  est donnée par

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si  $|q| < 1$  alors  $(S_n)$  est une suite qui admet  $\frac{u_0}{1 - q}$  comme limite.

**Démonstration.** On a  $S_n = u_0(1 + q + \dots + q^n)$

En multipliant par  $1 - q$ , on obtient immédiatement,  $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ . ■

## 4.2 Suites arithmético-géométriques

**Définition 4.3.** On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres  $q$  et  $r$ , toute suite  $(u_n)_n$  définie par récurrence par :

$$u_0 \text{ donné}, \quad u_{n+1} = qu_n + r.$$

A chaque étape on multiplie le terme précédent par  $q$  ( comme pour une suite géométrique ) puis on ajoute un nombre  $r$  ( comme pour une suite arithmétique ) d'où le nom. Attention ces suites ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

**Propriété 2. (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)**

Si  $(u_n)_n$  est suite arithmético-géométrique de paramètres  $q$  et  $r$ , alors

- Si  $q = 1$ ,  $u_n = u_0 + nr$ , c'est une suite arithmétique.
- Si  $r = 0$ ;  $u_n = u_0 q^n$ , c'est une suite géométrique
- Si  $q \neq 1$ ,

$$u_n = q^n(u_0 - a) + a \quad \text{avec} \quad a = \frac{r}{1 - q}$$

**Proposition 4.4. (Convergence d'une suite arithmético-géométrique)**

Si  $(u_n)_n$  est suite arithmético-géométrique de paramètres  $q$  et  $r$ , alors

1. Si  $|q| < 1$ , la suite converge vers  $a$ .
2. Si  $|q| > 1$ , la suite diverge sauf pour  $u_0 = a$  (suite stationnaire  $u_n = u_0, \forall n$ ).
3. Si  $q = -1$  la suite diverge sauf pour  $u_0 = a$ .

## 4.3 Suites récurrentes

**Définition 4.4.** On dit qu'une suite  $(u_n)_n$  est une suite récurrente si il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$u_{n+1} = f(u_n); \quad u_0 \text{ donné} \quad (*)$$

Pour trouver la limite d'une suite récurrente, on peut citer ici deux méthodes :

- **1ère méthode** : On essaie de se ramener à une suite non-récurrente en exprimant le terme général comme une fonction de  $n$ .
- **2ème méthode** : On démontre d'abord que la limite  $\ell$  existe puis on passe à la limite dans  $(*)$  ce qui nous ramène à résoudre l'équation

$$\ell = f(\ell)$$

Donnons un exemple qui illustre ces deux méthodes :

**Exemple 1.** Soit une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par récurrence :  $u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n}$ .

**1ère méthode** : On calcule

$$u_2 = \frac{4}{3}, \quad u_3 = \frac{8}{7}, \quad u_4 = \frac{16}{15}, \dots$$

On remarque que les premiers termes de la suite vérifient

$$u_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

On démontre, par récurrence, que cette formule est vraie pour tout  $n$ . Puis on calcule la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n} \frac{1}{1 - 2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 2^{-n}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

**2ème méthode :** On montre d'abord, par récurrence, que la suite est minorée par 1 et décroissante alors elle converge vers une limite  $\ell$  qui est solution de l'équation :

$$\ell = \frac{2\ell}{1 + \ell} \iff \ell(\ell - 1) = 0$$

Cette équation a 2 solutions 0 et 1. Puisque que  $u_n \geq 1$  pour tout  $n$  alors la limite est donc  $\ell = 1$ .

**Exemple 2.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_1 = 1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4).$$

Nous allons montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 < u_n < 2.$$

1. Cette relation est clairement vérifiée pour  $n = 1$  :  $0 < u_1 = 1 < 2$ .
2. Supposons qu'elle est vraie pour  $n$ . On a

$$0 < u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4) < \frac{1}{4}(2 + 4) < 2.$$

Montrons maintenant, par récurrence, que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

1. On a  $u_1 = 1 < u_2 = \frac{5}{4}$ .
2. Supposons  $u_n < u_{n+1}$ . Alors

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_{n+1} + 4) - \frac{1}{4}(u_n + 4) = \frac{1}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc croissante et bornée. Etant croissante et majorée, d'après le théorème 3.3,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers une limite  $\ell$ . De la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4),$$

on déduit en passant à la limite que  $\ell = \frac{1}{4}(\ell + 4)$  et on trouve que  $\ell = \frac{4}{3}$ .



## 4.4 Suites adjacentes

**Définition 4.5.** Deux suites réelles  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont dites adjacentes si :

1. la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante,
2. la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante,
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

**Remarque 4.1.** On alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$ .

**Théorème 4.1.** Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite  $\ell$  de plus on a  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n \leq \ell \leq v_n$ .

**Démonstration.** Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  deux suites adjacentes. On a

$$\forall n \geq n_0, u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}.$$

De cette inégalité, on déduit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est majorée par  $v_{n_0}$  et, puisque elle est croissante, elle converge vers un réel  $\ell_1$ . De même, la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est minorée par  $u_{n_0}$  et, puisque elle est décroissante, elle converge vers un réel  $\ell_2$ . De la relation  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$  on déduit que  $\ell_1 = \ell_2$ . ■

**Exemple - Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :**  $0 < u_0 < v_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ . **Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, on note par  $M(u_0, v_0)$  leurs limite commune appelée moyenne arithmico-géométrique de  $u_0$  et  $v_0$ . Pour établir la dernière assertion il suffit de montrer que**

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

## 4.5 Suites de Cauchy

**Définition 4.6.** Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  tel que pour chaque  $p, q \geq N_\varepsilon$  on a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; \forall p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon \text{ on a } |u_{p+n} - u_n| < \varepsilon$$

**Théorème 4.2.** On a les implications suivantes

$$(u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ de Cauchy} \implies (u_n) \text{ est bornée}$$

**Démonstration.** On va montrer la première implication, la deuxième est laissé en exercice.

Soit  $(u_n) \rightarrow \ell$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N = N_{\varepsilon/2}$  avec  $|u_p - \ell| < \varepsilon/2$  si  $p > N$ . Ceci implique

$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + (\ell - u_q)| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

dès que  $p, q \geq N$ . ■

## 5 Suites extraites et le théorème de BOLZANO-WIERSTRASS

### 5.1 Suites extraites

**Définition 5.1.** On dit qu'une suite  $(v_n)_n$  est une suite extraite ou une sous suite d'une suite  $(u_n)_n$  s'il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Si la suite  $(u_{\varphi(n)})$  converge vers  $\ell$ , on dit que  $\ell$  est la valeur d'adhérence.

**Lemme 5.1.** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$$

**Démonstration.** Par récurrence :

Si  $n = 0$  alors comme  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a bien  $\varphi(0) \geq 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\varphi(n) \geq n$ . Montrons que  $\varphi(n+1) \geq n+1$ . Comme  $\varphi$  est strictement croissante, on a nécessairement  $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ . Par conséquent  $\varphi(n+1) \geq n+1$ . (Si pour deux entiers  $x, y$ , on a  $x > y$  alors  $x \geq y+1$ ).

La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence. ■

**Proposition 5.1.** Toute suite extraite d'une suite  $(u_n)$  convergeant vers une limite  $\ell$  est une suite convergeant vers  $\ell$ .

**Démonstration.** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. On suppose que  $u_n \longrightarrow \ell$ . Montrons que  $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $u_n \longrightarrow \ell$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > N, |u_n - \ell| < \varepsilon$ . Soit  $n > N$ . D'après le lemme précédent,  $\varphi(n) \geq n \geq N$  et donc  $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ . ■

**Remarque 5.1.** – La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie.

– Cette proposition est souvent utilisé pour montrer qu'une suite n'est pas convergente : En pratique, on extrait une sous suite qui diverge, ou bien deux sous suites ayant deux limites distinctes.

**Exemple -** Soit  $u_n = (-1)^n$ , les deux sous-suites  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$  sont convergentes de limites respectives 1 et -1, la suite  $(u_n)$  n'est donc pas convergente.

### 5.2 Segments emboîtés et théorème de BOLZANO-WIERSTRASS

Etant donné deux nombres réels  $a$  et  $b$ , on désigne par  $[a, b]$  l'ensemble de  $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

l'ensemble  $[a, b]$  est dit segment d'extrémités  $a$  et  $b$ . Par définition la longueur de segment  $[a, b]$  est le réel  $b - a$ .

**Corollaire 5.** Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de segments,  $I_n = [a_n, b_n]$  tels que

- Ils sont emboîtés :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \subset I_n$
- Leur longueur tend vers 0 :  $(b_n - a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors il existe un réel  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ , on a  $a_n \leq a_{n+1}$  et  $b_{n+1} \leq b_n$  ce qui montre que la suite  $(a_n)$  est croissante et la suite  $(b_n)$  décroissante. La deuxième hypothèse montre que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Montrons par double inclusion que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$

⊃ Montrons que  $\ell$  appartient à l'intersection des intervalles  $I_n$ . Puisque les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et convergent vers  $\ell$ , on sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N} \ell \in I_n$  ce qui montre que  $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

⊂ Soit  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Montrons que  $x = \ell$ . Par définition on a,  $\forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n$  d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x \leq b_n$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que  $\ell \leq x \leq \ell$  d'où  $\ell = x$ . ■

**Théorème 5.1.** (Théorème de BOLZANO-WIERSTRASS)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

**Démonstration.** Considérons une suite  $(u_n)$  bornée. Il existe  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$ . Dans la suite, on dira qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite  $(u_n)$  s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall p \geq N; u_p \notin A$ . Dans le cas contraire, on dira que  $A$  contient un nombre infini de termes de la suite.

Le principe de la démonstration est de construire par récurrence une suite de segments emboîtés

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \dots \subset [a_0, b_0]$$

tels que  $[a_n, b_n]$  contienne un nombre infini de termes de la suite  $(u_n)$ . On construira alors une sous-suite convergente en prenant un terme de  $(u_n)$  dans chacun des segments.

- $[a_0, b_0]$  contient tous les termes de  $(u_n)$ .
- Posons  $c_0 = \frac{(a_0 + b_0)}{2}$  le milieu de  $[a_0, b_0]$  et  $\varphi(0) = 0 = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k \in [a_0, b_0]\}$ . Pour l'un au moins des segments  $[a_0, c_0]$  ou  $[c_0, b_0]$ , il y a une infinité d'entiers  $n$  tels que  $u_n$  soit dans l'un des segments. Autrement dit, l'un de ces deux ensembles suivant est infini

$$G_0 = \{k > \varphi(0), u_k \in [a_0, c_0]\}, \quad D_0 = \{k > \varphi(0), u_k \in [c_0, b_0]\}$$

- Si  $G_0$  est infini, on pose  $a_1 = a_0, b_1 = c_0$  et  $\varphi(1) = \min G_0$ . Sinon, on pose  $a_1 = c_0, b_1 = b_0$  et  $\varphi(1) = \min D_0$ .
- On recommence en posant  $c_1 = \frac{(a_1 + b_1)}{2}$ . L'un des deux ensemble suivants est infini

$$G_1 = \{k > \varphi(1), u_k \in [a_1, c_1]\}, \quad D_1 = \{k > \varphi(1), u_k \in [c_1, b_1]\}.$$

- Si  $G_0$  est infini, on pose  $a_2 = a_1, b_2 = c_1$  et  $\varphi(2) = \min G_1$ . Sinon, on pose  $a_2 = c_1, b_2 = b_1$  et  $\varphi(2) = \min D_1$ . On a

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2), \quad a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{et} \quad b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{4}$$

- Supposons que l'on a construit une suite :  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$  et une application  $\varphi : n \in \mathbb{N} \longrightarrow \varphi(n) \in \mathbb{N}$  strictement croissante :  $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$  tel que

$$a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

On pose  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ , alors l'un des deux ensembles suivant est infini :

$$G_n = \{k > \varphi(n), u_k \in [a_n, c_n]\}, \quad D_n = \{k > \varphi(n), u_k \in [c_n, b_n]\}.$$

- Si c'est  $G_n$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = c_n$  et  $\varphi(n+1) = \min G_n$ . Sinon, on pose  $a_{n+1} = c_n$ ,  $b_{n+1} = b_n$  et  $\varphi(n+1) = \min D_n$ .

On a

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \dots \subset [a_0, b_0] \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Puisque  $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ , d'après le théorème des gendarmes, la suite extraite  $(u_{\varphi(n)})$  converge vers  $\ell$ . ■

### 5.3 Application : Complétude de $\mathbb{R}$

**Théorème 5.2.** Une suite de nombres réels converge vers une limite finie  $\ell$  si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que  $\mathbb{R}$  est complet.

*Démonstration.* L'implication est une suite convergente est déjà démontrée. Il nous reste à montrer qu'une suite de Cauchy converge. Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy.

La suite  $(u_n)$  est bornée et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous suite convergente  $(u_{\varphi(n)})$ . On va montrer que  $(u_n)$  converge vers la même limite que cette sous-suite. Comme  $(u_n)$  est de Cauchy, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*, ((p, q)^2 \in \mathbb{N}^2, p, q \geq N_1 \implies |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

De plus, on a :

- $\forall A > 0; \exists N_2(A)$  tel que  $\forall n \geq N_2(A) \Rightarrow \varphi(n) > A$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N_3(\varepsilon)$  tel que  $\forall m \geq N_3(\varepsilon) \Rightarrow |u_{\varphi(m)} - \ell| < \varepsilon$

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , posons  $N(\varepsilon) = N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ . Soit  $m$  un entier tel  $m \geq \max(N_3(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(N_1(\frac{\varepsilon}{2})))$ , alors on aura :

$$\forall n \geq N(\varepsilon), |u_n - \ell| < |u_n - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . ■

**Exemple -** La suite définie par  $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  est convergente. En effet, montrons qu'elle est de Cauchy. On a

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!}$$

or  $(n+p)! \geq 2^{n+p-1}$ , donc

$$0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n} (1 + \dots + \frac{1}{2^{p-1}})$$

d'où

$$0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$$

Puisque, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) = 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est de Cauchy.