FACULTE POLYDISCIPLINAIRE DE KHOURIBGA

Module : Physique 5 **Série N° 3 : Courant alternatif**

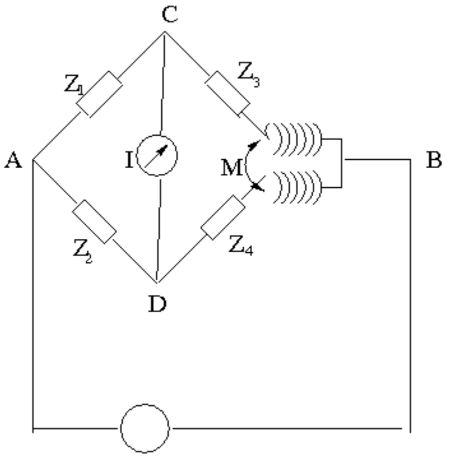
Semestre 3 - Année Universitaire 2020 / 21

Exercice 1

Le pont de Wheatstone de la figure est alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω.

1- Etablir la condition d'équilibre du pont (I=0) en tenant compte du couplage magnétique (M est l'inductance mutuelle entre les deux bobines)

2- On suppose que les impédances Z_1 et Z_2 sont constituées respectivement par une résistance R_1 et une capacité C_2.La branche est constituée par une bobine (L_3) et une résistance R_3 en série

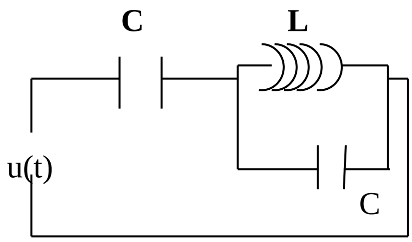


Entre D et B on a une bobine (L_4) de résistance R_4 qui sont en série avec une capacité C_4 choisie telle que $L_4C_4\omega^2=1$. Le couplage magnétique est toujours assuré, calculer L_3 et M à l'équilibre du pont.

Utiliser la notation complexe pour les deux questions.

Exercice 2

On applique une tension alternative $U(t) = U_M \cos(\omega t)$ aux bornes du circuit de la figure ci-contre.



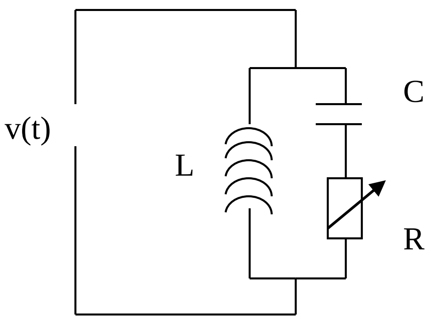
1- Déterminer l'impédance complexe $\overline{Z}$ du circuit en fonction de L, C et ω. En déduire les pulsations de résonances et d'antirésonance notées respectivement ω_r et ω_a.

2- Exprimer le module de cette impédance en fonction de ω_r, ω_a, ω et C. Donner brièvement l'allure générale de la courbe Z= f(ω).

Quel est le sens physique de la valeur de Z= |Z| lorsque $\omega \to 0$.

Exercice 3

Le montage de la figure ci-contre est alimenté par générateur qui délivre un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I\cos(\omega t)$. R est une résistance variable.



1) a- Calculer l'impédance complexe $\overline{Z}$ du circuit.

b- Dans tous ce qui suit, les valeurs de L et C sont choisies de telle manière que pour une pulsation donnée ω : $LC\omega^2=2$

Donner dans ces conditions l'expression de $\overline{Z}$ en fonction de R, C et ω.

2) a- Calculer l'amplitude V et l'amplitude complexe $\overline{V}$ de la tension v(t).

b- En déduire le déphasage φ de la tension v(t) par rapport au courant i(t).

3) a- Indiquer les valeurs entre lesquelles peut varier φ lorsque R augmente de 0 à l'infini.

b-Préciser les valeurs de R en fonction de Cω pour lesquelles $\varphi = 0$ et $\pm\pi/4$

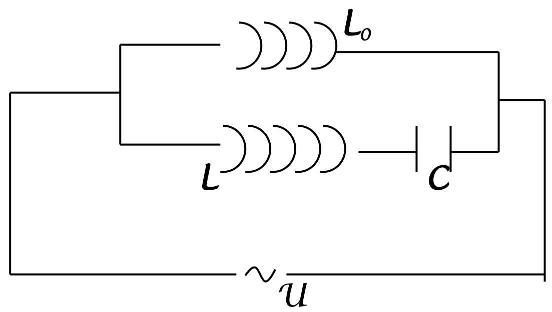
Exercice 4

Le circuit de la figure est alimenté par un générateur de tension alternative de pulsation ω variable, de tension efficace $\mathcal{U}$ constante.

1- Calculer l'impédance Z du circuit

2- Etudier la variation de Z avec ω et tracer la courbe $Z(\omega)$.

3- En déduire la courbe $I(\omega)$, I étant la valeur efficace de l'intensité.



Série 3

Exercice 1

1/. à l'équilibre du pont $\underline{I = 0}$

$\Rightarrow V_C = V_D \Rightarrow \bar{i}_1 = \bar{i}_3$

$\bar{i}_2 = \bar{i}_4$.

$\cancel{\bar{V}_{AC} = \bar{V}_{AD}}$

$\bar{Z}_1$ est l'impédance totale entre A et C

$\bar{Z}_2$ - - - - - - - - - - - - - A et D

$\bar{Z}_3$ - - - - - - - - - - - - - C et B

$\bar{Z}_4$ - - - - - - - - - - - - - D et B.

$$\bar{V}_{AC} = \bar{V}_{AD} \Rightarrow \bar{Z}_1 \bar{i}_1 = \bar{Z}_2 \bar{i}_2$$

$$\bar{V}_{CB} = \bar{V}_{DB} \Rightarrow \bar{Z}_3 \bar{i}_3 + M \frac{d\bar{i}_4}{dt} = \bar{Z}_4 \bar{i}_4 + M \frac{d\bar{i}_3}{dt}$$

$$\bar{Z}_3 \bar{i}_3 + jM\omega \bar{i}_4 = \bar{Z}_4 \bar{i}_4 + jM\omega \bar{i}_3$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{Z}_3 - jM\omega) \bar{i}_3}{\bar{Z}_1 \bar{i}_1} = \frac{(\bar{Z}_4 - jM\omega) \bar{i}_4}{\bar{Z}_2 \bar{i}_2} \quad \text{or } \bar{i}_1 = \bar{i}_3, \ \bar{i}_2 = \bar{i}_4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\bar{Z}_3 - jM\omega}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{Z}_4 - jM\omega}{\bar{Z}_2}}$$

les $jL\omega$ sont inclues dans les impédances $\bar{Z}_i$

2/ $\bar{Z}_1 = R_1$; $\bar{Z}_2 = \dfrac{1}{jC_2\omega}$; $\bar{Z}_3 = R_3 + jL_3\omega$

$\bar{Z}_4 = R_4 + jL_4\omega + \dfrac{1}{jC_4\omega} = R_4 + j\left(\dfrac{L_4C_4\omega^2 - 1}{C_4\omega}\right) = R_4$ car $L_4C_4\omega^2 = 1$

la cond d'eq devient :

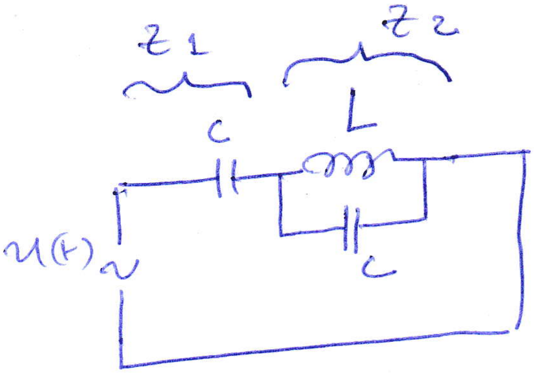
$$\frac{R_3 + jL_3\omega - jM\omega}{R_1} = \frac{\cancel{R_4 + jL_4\omega}\; R_4 - jM\omega}{\frac{1}{jC_2\omega}}$$

$\Rightarrow R_3 + jL_3\omega - jM\omega = R_1 C_2 M\omega^2 + j R_1 R_4 C_2 \omega$

$\Rightarrow R_3 = R_1 C_2 M\omega^2$ et $L_3 - M = R_1 R_4 C_2$

$\Rightarrow M = \dfrac{R_3}{R_1 C_2 \omega^2}$ et $L_3 = M + R_1 R_4 C_2$

Exercice 2



① $\bar{Z}_1 = \dfrac{1}{jC\omega}$; $\bar{Z}_2 = \bar{Z}_{L\parallel C}$

$$\bar{Z}_2 = \left[\frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_C}\right]^{-1}$$

$$= \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_C}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_C} = \frac{jL\omega \cdot \frac{1}{jC\omega}}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

soit $\bar{Z}$ l'impédance du circuit. $\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

$$\bar{Z} = -j\left(\frac{1}{C\omega} - \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = -j\,\frac{1 - LC\omega^2 - LC\omega^2}{C\omega(1 - LC\omega^2)}$$

$$\boxed{\bar{Z} = -j\,\frac{1 - 2LC\omega^2}{C\omega(1 - LC\omega^2)}}$$

à la résonance : $\bar{Z} = \bar{Z}_{min}$, le circuit facilite le passage du courant $\Rightarrow 1 - 2LC\omega^2 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}}}$ = pulsation de résonance

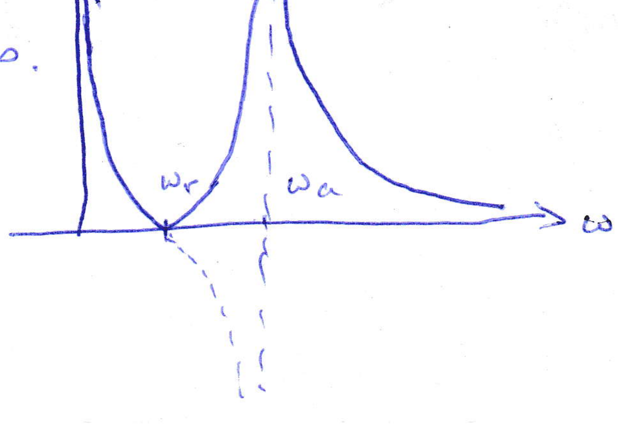
à l'antirésonance $\bar{Z} = \bar{Z}_{max}$ le circuit s'oppose au passage du courant $\Rightarrow 1 - LC\omega^2 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\omega_a = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ = pulsation de l'antirésonance

2/ $$Z = |\bar{Z}| = \left|\frac{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)}\right| \cdot \frac{1}{C\omega}$$ en valeur absolue.

$$= \left|\frac{\omega_r^2 - \omega^2}{\omega_a^2 - \omega^2}\right| \cdot \left(\frac{\omega_a}{\omega_r}\right)^2 \left(\frac{1}{C\omega}\right) = Z(\omega) \; . > 0$$

$\left\{\begin{array}{l}\omega \to 0 \Rightarrow Z \to +\infty \\ \omega \to \omega_a \Rightarrow Z \to +\infty\end{array}\right\}$ 2 asymptotes.

$\left\{\begin{array}{l}\omega \to \omega_r \Rightarrow Z \to 0 \\ \omega \to \infty \Rightarrow Z \to 0\end{array}\right.$



~~Exercice~~ :

$\omega \to 0$: c'est le régime de basses fréquences

$\omega \to 0 \Rightarrow$ cas du courant continu.

$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$; $\bar{Z}_2 = \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0$; $\bar{Z}_1 = \dfrac{1}{jC\omega} \xrightarrow[\omega \to 0]{} \infty$

$\bar{Z} = \bar{Z}_1$ le circuit est équivalent à un condensateur de capacité C

$|i| = \dfrac{|\bar{u}|}{|\bar{Z}|} \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0$; le condensateur bloque le passage du courant à basses ~~fréquences~~ fréquences.

on dit qu'on a un coupe circuit.

Exercice 3

1/ a/ $\bar{Z} = \bar{Z}_L \,||\, (\bar{Z}_C + \bar{Z}_R) = \dfrac{\bar{Z}_L \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}{\bar{Z}_L + R + \frac{1}{jC\omega}}$

$\bar{Z} = \dfrac{jL\omega\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \dfrac{jL\omega\,(1 + jRC\omega)}{jRC\omega + (1 - LC\omega^2)}$

b/ $LC\omega^2 = 2 \Rightarrow L\omega = \dfrac{2}{C\omega}$

$\Rightarrow \bar{Z} = \dfrac{j\frac{2}{C\omega}\,(1 + jRC\omega)}{jRC\omega + (1-2)} = -\dfrac{2j}{C\omega}\left(\dfrac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}\right)$

$$\boxed{\bar{Z} = -\frac{2j}{C\omega}\;\frac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}}$$

2/ a) $\bar{V}(t) = \bar{Z}\,\bar{I}(t)$ $\quad i(t) = I_m \cos\omega t = I_m e^{j\omega t}$

on pose $\bar{V}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

$\arg \bar{V} = \arg \bar{Z} + \arg \bar{I}$

on cherche $|\bar{V}| = V_m$; $|\bar{V}| = |\bar{Z}| \cdot |\bar{I}|$ or $|\bar{I}| = I_m$

$|\bar{Z}| = \dfrac{2}{C\omega}$ car $\left|\dfrac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}\right| = 1$

donc $|\bar{V}(t)| = \boxed{V_m = \frac{2}{C\omega} \cdot I_m}$ c'est l'amplitude de la tension.

Remarque : $|\bar{V}(t)|$ ne dépend pas de (R, L)

* calcul de l'amplitude complexe

$$\bar{V}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \left(V_m e^{j\varphi}\right) \cdot e^{j\omega t} = \bar{V} e^{j\omega t}$$

$\bar{V} = V_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe (indépendante du temps).

$$\bar{V}(t) = \bar{Z} \bar{I}(t)$$

$$\bar{V} \cdot e^{j\omega t} = \bar{Z} I_m e^{j\omega t} \Rightarrow \bar{V} = \bar{Z} I_m = \bar{Z} I$$

$$\bar{V} = \frac{2I}{C\omega} (-j) \left(\frac{1 + jRC\omega}{1 - jRC\omega}\right) = \frac{2I}{C\omega} \frac{(1 + jRC\omega)}{(j + RC\omega)}$$

$$= \frac{2I}{C\omega} \frac{(1 + jRC\omega)(-j + RC\omega)}{1 + (RC\omega)^2} \quad \text{(on multiplie par le conjugué)}$$

$$= \frac{2I}{C\omega} \left[\frac{2RC\omega + j\left((RC\omega)^2 - 1\right)}{1 + (RC\omega)^2}\right]$$

b/

$$\Rightarrow \boxed{tg\,\varphi = \frac{(RC\omega)^2 - 1}{2RC\omega}}$$

$V(t)$ est en avance de phase de φ par rapport à $i(t)$.

3/a) $R \to 0 \quad tg\varphi \to -\infty \Rightarrow \varphi = -\pi/2$

$R \to \infty \quad tg\varphi \to +\infty \Rightarrow \varphi = \pi/2$

b) $\varphi = 0 \Rightarrow tg\varphi = 0 \Rightarrow (RC\omega)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{C\omega}}$

$\varphi = \pm\pi/4 \Rightarrow tg\varphi = \pm 1 = \frac{(RC\omega)^2 - 1}{2RC\omega} = \pm 1 \Rightarrow$

$(RC\omega)^2 - 1 \mp 2RC\omega = 0$ on pose $RC\omega = X > 0 \Rightarrow$

$\boxed{X^2 \pm 2X - 1 = 0}$ $\quad \Delta' = b'^2 - ac = 2 \quad (ax^2 + 2b'x + c = 0)$

$= 1 - -1 = 2$

$$x = \frac{\pm b \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{\Delta'}}{1} = \pm 1 \pm \sqrt{2}$$

les valeurs ~~???~~ positives sont

$x_1 = -1 + \sqrt{2}$

$x_2 = 1 + \sqrt{2}$

en résumé :

$\varphi = \pi/4 \Rightarrow RC\omega = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{1}{C\omega}(1+\sqrt{2})$

$\varphi = -\pi/4 \;;\; \Rightarrow RC\omega = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{1}{C\omega}(-1+\sqrt{2})$

Exercice 4

1/ [($\bar{Z}_L$ et $\bar{Z}_C$) en serie] en parallèle avec $\bar{Z}_{L_0}$

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{jL_0\omega} + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jL_0\omega} + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1 - LC\omega^2 - L_0C\omega^2}{jL_0\omega(1 - LC\omega^2)} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{jL_0\omega(1 - LC\omega^2)}{1 - (L+L_0)C\omega^2}$$

$$\Rightarrow Z(\omega) = |\bar{Z}| = \frac{L_0\omega\,|1 - LC\omega^2|}{|1 - (L+L_0)C\omega^2|} \geqslant 0$$ norme toujours positive.

2/ * $\omega = 0 \Rightarrow Z(\omega) = 0$

* $\omega_1 = ?$ $1 - (L+L_0)C\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+L_0)C}}$

$Z(\omega) \xrightarrow[\omega \to \omega_1]{} +\infty$ le circuit s'oppose au passage de $i(t)$

* ω_2 ~~=~~ ? $1 - LC\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z(\omega_2) = 0$

$\Rightarrow$ au voisinage de ω_2 le circuit facilite le passage du courant.

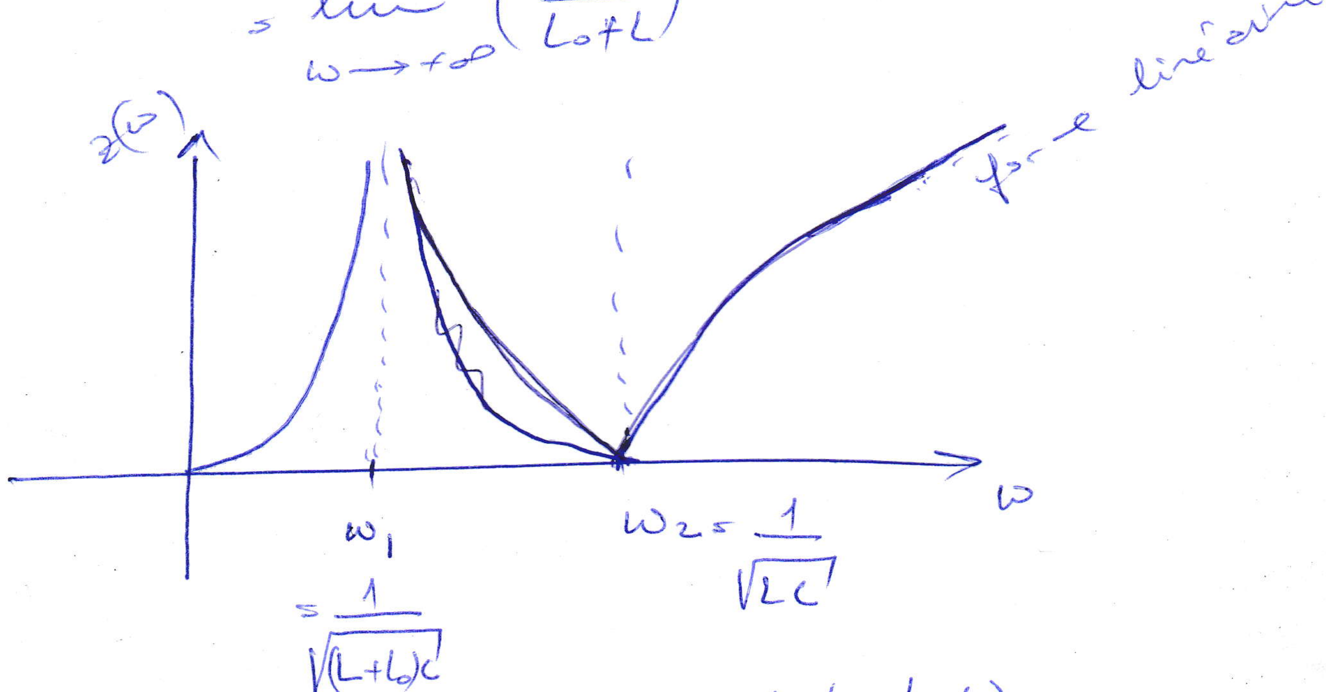
$+\ \omega \to +\infty \Rightarrow Z(\omega) \to +\infty$

$$\lim_{\omega \to +\infty} Z(\omega) = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{L_0\omega\,|1-LC\omega^2|}{|1-(L+L_0)C\omega^2|}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \frac{L_0\omega\, LC\omega^2}{(L+L_0)C\omega^2}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \frac{L_0 LC\omega^3}{(L+L_0)C\omega^2} =$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(\frac{L_0 L}{L_0+L}\right)\cdot\omega = +\infty$$



3/ $I(\omega)$: valeur efficace en fct de ω.

$I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$ I et U sont les valeurs efficaces.

$U = $ cst ; $I(\omega)$ a le comportement en $\frac{1}{Z(\omega)}$

$Z(\omega) \to 0 \Rightarrow I(\omega) \to +\infty$

$\left.\begin{array}{l} Z(\omega) \to \infty \\ \omega \to \omega_1 \end{array}\right\} \Rightarrow I(\omega_1) \to 0$

$\left.\begin{array}{l} Z(\omega) \to 0 \\ \omega \to \omega_2 \end{array}\right\} \Rightarrow I(\omega_2) \to +\infty$

$\left.\begin{array}{l} Z(\omega) \to \infty \\ \omega \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow I(\omega) \to 0$