EX 1

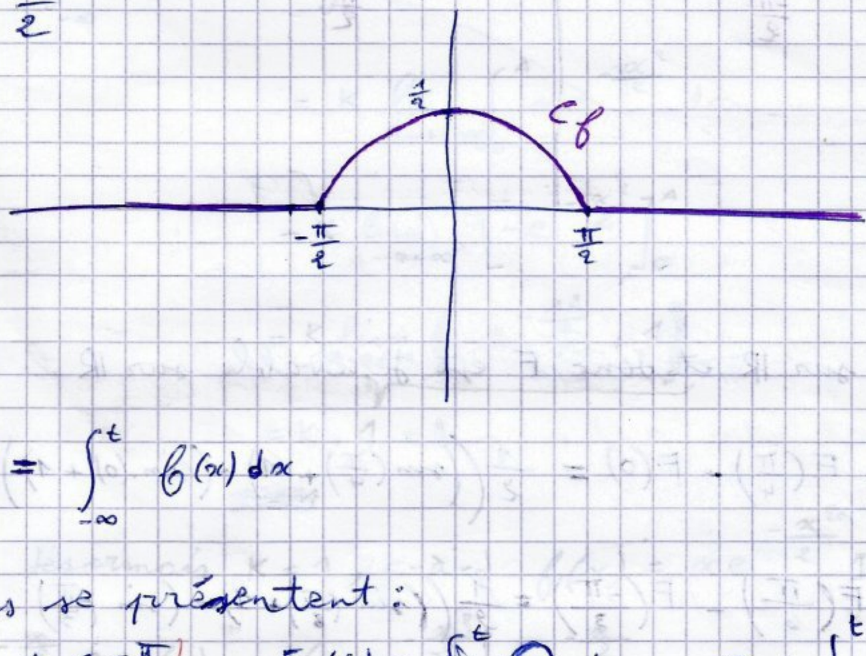
(1) $f(x) = a\cos(x)\,\mathbb{1}(x)_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$

sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto \cos(x)$ est positive, continue donc f serait positive intégrable si $a \geq 0$

Pour que f soit une densité de probabilité, il faut et il suffit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ c-à-d $\int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(t)\,\mathbb{1}(x)_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}\,dt = 1$

$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \left[a\sin(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a(1-(-1)) = 1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$



(2) $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

trois cas se présentent :

- (Si $t < -\frac{\pi}{2}$), $F(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$

- (si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{1}{2}\cos(x)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{t} = \frac{1}{2}(\sin(t) - (-1))$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(t) + 1)$$

Si $t > \frac{\pi}{2}$ $F(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 . dx}_{0} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(x)\, dx}_{1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} 0 . dx}_{0} = 1$

Finalement :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{-\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin(t) + 1) & \text{si } \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Remarque :

f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est derivable sur $\mathbb{R}$.

$P\left[0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right] = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right) - \left(\sin(0) + 1\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0{,}35$

$P\left[\frac{-\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{6}\right] = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) - \left(\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) + 1\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$

$P[X \leq a] = F(a)$

$P[X \geq b] = 1 - P[X < b] = 1 - F(b)$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t . \frac{1}{2}\cos(t)\, dt$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 \frac{1}{2} \cos(t)\,dt$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$\boxed{EX\ 2}$

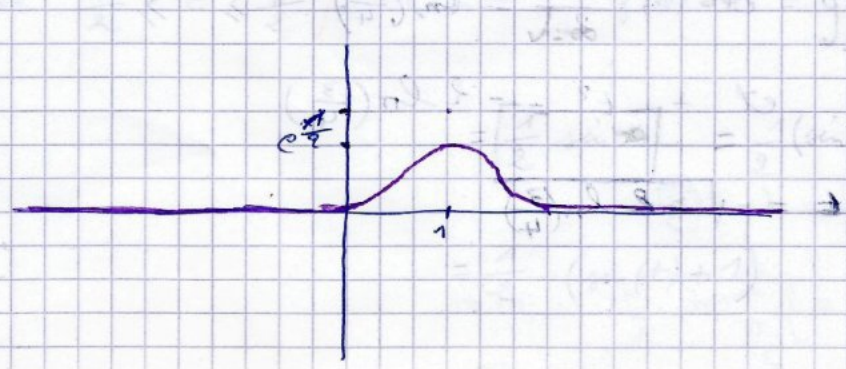
$$f(x) = K x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

- la fonction $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
- tell que $\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

Donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} K x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$= K \lim_{A \to +\infty} \int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$= K \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A$$
$$= K \underbrace{\lim_{A \to +\infty} \left(-e^{-\frac{A^2}{2}} + 1\right)}$$
$$= K \cdot 1 = 1$$

On prend désormais $K = 1$, c-à-d $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

$$g(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \; ; \; g'(x) = x\left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$= (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$$



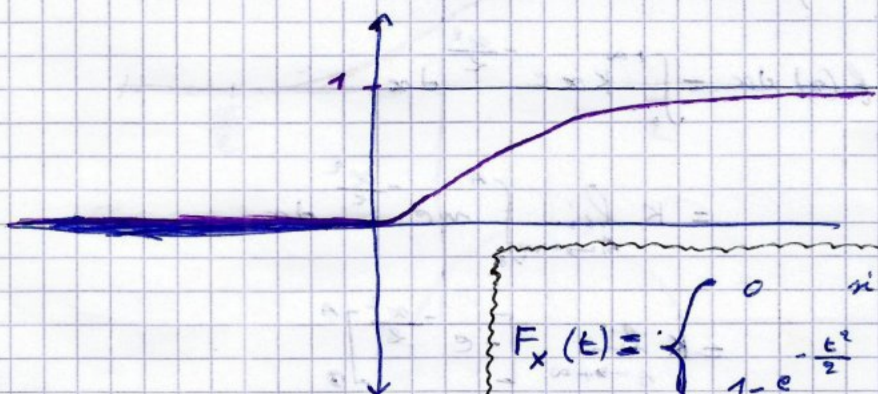
Calculons $F(x)$

Si $\boxed{x<0}$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \boxed{0}$

Si $\boxed{x \geqslant 0}$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$$= \left[-e^{\frac{-t^2}{2}}\right]_0^x$$

$$= \boxed{1 - e^{-\frac{x^2}{2}}}$$



$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

- $F_X(t)$ est une fonction de repartition (c'est une probabilité) donc elle est entre 0 et 1, mais $\frac{3}{2} > 1$ alors on ne peut pas resoudre $\boxed{F_X(t) = \frac{3}{2}}$
- $F_X(t) = \frac{1}{4} \iff t>0$ et $1-e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{4}$

$\iff t>0$ et $e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{3}{4}$

$\iff t>0$ et $\frac{-t^2}{2} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$\iff t>0$ et $t^2 = -2\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$\iff t = \sqrt{-2\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

EX 4

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

On pose $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$, $\quad T \hookrightarrow N(0,1) \quad$ avec $T = \dfrac{X - 500}{25}$

① On calcule $P(480 \leq X \leq 520)$

$$P\left[480 \leq X \leq 520\right] = P\left[\frac{480-500}{25} \leq \frac{X-500}{25} \leq \frac{520-500}{25}\right]$$

$$= P\left[-0,8 \leq T \leq 0,8\right)$$

$$= 2\ \phi(0,8)$$

$$= 2 \times 0,2881$$

$$= 0,5762$$

On aurait environ 576 paquets sur 1000 tel que $(480 \leq X \leq 520)$

---

② On cherche $1000 \times P\left[480 \leq X \leq 490\right]$

on a $P\left[480 \leq X \leq 490\right] = P\left[\dfrac{480-500}{25} \leq \dfrac{X-500}{25} \leq \dfrac{490-500}{25}\right]$

$$= P\left[-0,8 \leq T \leq -0,4\right]$$

$$= \phi(0,8) - \phi(0,4)$$

$$= 0,2881 - 0,1554$$

$$= 0,1327$$

On aurait environ 132 paquets sur 1000 tel que $(480 \leq X \leq 490)$

---

③ On cherche $1000 \times P\left[X \geq 450\right]$

$$P\left[X \geq 450\right] = P\left[\frac{X-500}{25} \geq \frac{450-500}{25}\right]$$

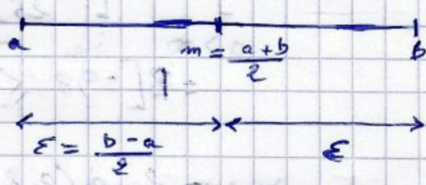
$$= P\left[T \geq -2\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \phi(2)$$
$$= 0,5 + 0,4772$$
$$= 0,9772$$

On aurait environ 977 paquets de poids de plus de 450 g.

---

④ On cherche un intervalle $[a, b]$ symétrique tel que $P[a \leq X \leq b] = \frac{9}{10} = 0,9$



$$P[m - \varepsilon \leq X \leq m + \varepsilon] = 0,9$$

$$\Leftrightarrow P[-\varepsilon \leq X - m \leq \varepsilon] = 0,9$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{-\varepsilon}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{\sigma}\right] = 0,9$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{-\varepsilon}{\sigma} \leq T \leq \frac{\varepsilon}{\sigma}\right] = 0,9$$

$$\Leftrightarrow 2\,\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,9$$

$$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

Par lecture inverse, on a $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 1,64$ d'où $\varepsilon = 1,64 \times \sigma = 1,65 \times 25$

$$\boxed{\varepsilon = 41}$$

Donc $[a, b] = [500 - 41 ; 500 + 41]$

$$= [459 ; 541]$$

$\boxed{EX3}$ $X \hookrightarrow$ Cauchy $\Leftrightarrow f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$

$$\Leftrightarrow F_X(t) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

① Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle/continue il suffit de calculer sa fonction de repartition.

soit $Y = aX + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[aX + b \leq t]$$

$$= P[aX \leq t - b]$$

$$= P\left[X \leq \frac{t-b}{a}\right] \quad (\text{car } a > 0)$$

$$= F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Puisque F_X est derivable sur $\mathbb{R}$, par derivation par rapport à t, on a :

$$f_Y(t) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\pi \left(\frac{t-b}{a}\right)^2}$$

Donc $$f_Y(t) = \frac{a}{\pi\left(a^2 + (t-b)^2\right)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

En général si $a \neq 0$; $$f_X(t) = \frac{|a|}{\pi\left(a^2 + (t-b)^2\right)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$Y = X^2$

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[X^2 \leq t]$$

$$= P[-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}]$$

$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left[f_X(\sqrt{t}) - f_X(-\sqrt{t})\right]$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $Y = X^2$ $\quad f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_X(\sqrt{t})$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}, \qquad F_X(t) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Rappel : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ pour $x \neq 0$

Soit $Y = \frac{1}{X}$:

Pour que Y soit défini comme v.a.r il suffit que X soit non nulle. Mais $P[X = 0] = 0$

Donc $[X \neq 0]$ est un évenement presque certain, de probabilité égale à 1.

Donc Y est défini presque de manière certaine.

Determinons la fonctions de repartition de $Y = \frac{1}{X}$

On a : $F_Y(t) = P\left[\frac{1}{X} \leq t\right]$

1^er^ cas :

$t = 0$, $P\left[\frac{1}{X} \leq 0\right] = P[X < 0] = P[X \leq 0] = F_X(0) = \frac{1}{2}$

2^ème^ cas :

$$t > 0,\ F_Y(t) = P\left[\frac{1}{X} \leq t\right] = P\left[X < 0 \overset{\text{dis}}{\cup} X \geq \frac{1}{t}\right]$$

$$= P[X < 0] + P\left[X \geq \frac{1}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 - P\left[X < \frac{1}{t}\right]\right)$$

$$= \frac{3}{2} - P\left[X \leq \frac{1}{t}\right]$$

$$= \frac{3}{2} - F_X\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(t)$$

$$= F_X(t)$$

<u>$3^{\text{ème}}$ cas :</u>

$t < 0$:

$$F_Y(t) = P\left[\frac{1}{X} < t\right]$$

$$= P\left[\frac{1}{t} \leq X \leq 0\right]$$

$$= F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{2} - \arctan(t)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= F_Y(t)$$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) = F_X(t)$

donc X et Y ont la même loi, celle de Cauchy :

$$X \hookrightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \frac{1}{X} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

10

Ex 5 $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$

① $m = -1$, $\theta = 2$

On pose $T = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - (-1)}{2} = \frac{X+1}{2}$, $T \hookrightarrow N(0,1)$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(0 \leq X+1 \leq 2)$$

$$= P\left(0 \leq \frac{X+1}{2} \leq 1\right)$$

$$= P(0 \leq T \leq 1)$$

$$= \phi(1)$$

$$= 0,3413$$

$$P(2 < X < 3) = P(1,5 \leq T \leq 2)$$

$$= \phi(2) - \phi(1,5)$$

$$P(X < -2) = P(T < -0,5)$$

$$= 0,5 - \phi(0,5)$$

$$P(X < 0) = P(T < 0,5)$$

$$= 0,5 + \phi(0,5)$$

$$P(X > 4) = P(T > 2,5)$$

$$= 0,5 - \phi(2,5)$$

---

② Soit $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$:

$P(X < 0) = 0,6$

Alors $P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{0-m}{\sigma}\right) = 0,6$

$\Leftrightarrow P\left(T < \frac{-m}{\sigma}\right) = 0,6$

$\Leftrightarrow \frac{-m}{\sigma} > 0$ et $\frac{1}{2} + \phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) = 0,6$

$\Leftrightarrow \boxed{\phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) = 0,1}$

Par lecture inverse on trouve

$$\frac{-m}{\sigma} \simeq 0,25$$

$P(X > 2) = 0,25$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,25$

$\Leftrightarrow P\left(T > \frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,25$

$\Leftrightarrow \frac{2-m}{\sigma} > 0$ et $\frac{1}{2} - \phi\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,25$

$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,25$

Par lecture inverse on trouve

$$\frac{2-m}{\sigma} \simeq 0,67$$

$$\begin{cases} \frac{-m}{\sigma} = 0,25 & (*1) \\ \frac{2-m}{\sigma} = 0,67 & (*2) \end{cases}$$

$(*2) - (*1) = \frac{2}{6} = 0,67 - 0,25 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{2}{0,42} = 4,76}$

$-m = 0,25 \times 4,76 \Rightarrow m = -(0,25 \times 4,76)$

$$\boxed{m = -1,19}$$

$\boxed{\text{EX 7}}$

$$Y = X^2 + 2X + 2$$

a) $X \hookrightarrow N(0,1)$:

$$Y = X^2 + 2X + 1 + 1$$

$$= (X+1)^2 + 1$$

Alors $Y \geq 1$ car $(X+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (X+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow Y \geq 1$

on a : $F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[(X+1)^2 + 1 \leq t]$

1^er cas : $t < 1$, $F_Y(t) = P(\emptyset) = 0$

2^ème cas : $t \geq 1$, $F_Y(t) = P[(X+1)^2 + 1 \leq t]$

$$= P[(X+1)^2 \leq t-1]$$

$$= P[-\sqrt{t-1} \leq X+1 \leq \sqrt{t-1}]$$

$$= P[-1-\sqrt{t-1} \leq X \leq \sqrt{t-1} - 1]$$

$$= F_X(\sqrt{t-1} - 1) - F_X(-\sqrt{t-1} - 1)$$

Si F_X est derivable en $\pm\sqrt{t-1} - 1$, alors :

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\left[f_X(\sqrt{t-1} - 1) + f_X(-\sqrt{t-1} - 1)\right]$$

c)- Loi Géométrique

$X \hookrightarrow G(p)$

$P[X=k] = q^{k-1} \times p$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P[X=k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} p$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \cdot \quad |x| < 1$$

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$E(X) = p \, , \, S'(q) = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{\cancel{q}p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k \times (k-1) P[X=k]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times (k-1) q^{k-1} \times p$$

$$= p \times q \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2}$$

$$S''(x) = \sum k(k-1) x^{k-2} = \frac{+2}{(1-x)^3}$$

$$E(X(X-1)) = p \times q \times \frac{2}{(1-q)^3} = p \times q \times \frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \cancel{\frac{2q+1+p-1}{p^2}}$$

$$= \frac{2q + \cancel{1} - q - \cancel{1}}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$X \hookrightarrow G(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$