Exemple. — 2D. Reprenons le PL de l'exemple précédent dont la forme standard est

$$(P_s)\ :\ \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 + z_1 = 2, \\ x_2 + z_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + z_3 = 3, \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Rappelons que la solution de base associée $B_2 = [A_1, A_2, A_5]$ est donnée par

$$x_2^* = [2,2,0,0,-1]^T.$$

Les variables de base étant x_1, x_2 et z_3, alors les coûts associés sont donnés par le vecteur des coefficients associés dans la fonction objective, c'est-à-dire

$$c_{B_2}^T = [-2,-1,0].$$

Cela permet de calculer les coûts réduits associés à la solution de base associée à B_2, soit

$$\forall j \in \{1,\cdots,5\};\quad \overline{c}_j = c_j - c_{B_2}^T B_2^{-1} A_j.$$

Le vecteur des coûts réduits est donc $\overline{c}^T = [0,0,2,1,0]$ (les coûts réduits $\overline{c}_{B_2}^T$ sont bien nuls).

Définition 1.12 — Multiplicateurs du simplexe. On appelle le vecteur des multiplicateurs du simplexe associé à la base B, le vecteur $\pi \in \mathbb{R}^m$ donné par

$$\pi^{\mathrm{T}} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}.$$

Définition 1.13 — Base optimale. Une base réalisable B est dite optimale si la solution de base réalisable $x = [x_B\,;\,0]^{\mathrm{T}}$ associée, est optimale (c-à-dire, pour laquelle la fonction coût est optimale).

Théorème 1.5 Soit $\pi \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des multiplicateurs du simplexe associé à la base B. Une condition nécessaire et suffisante pour que B soit une base réalisable optimale est que

$$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R = c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R \geq 0.$$

Preuve. *Il faut montrer que si B est une base réalisable et $\overline{c}_R \geq 0$, alors $x = [x_B\,;\,0]^{\mathrm{T}}$ est optimal. Notons $A = [B\,;\,R]$ et $c = [c_B\,;\,c_R]^{\mathrm{T}}$, alors pour $y = [y_B\,;\,y_R]^{\mathrm{T}}$ quelconque de $\mathcal{P}$, on a*

$$Ay = b \iff By_B + Ry_R = b \quad et \quad Z(y) = c^{\mathrm{T}} y \iff Z(y) = c_B^{\mathrm{T}} y_B + c_R^{\mathrm{T}} y_R. \tag{1.3}$$

La première équivalence de (1.3) *implique que $y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ry_R$, et donc*

$$\begin{aligned} Z(y) = c^{\mathrm{T}} y &= c_B^{\mathrm{T}}(B^{-1}b - B^{-1}Ry_R) + c_R^{\mathrm{T}} y_R \\ &= c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R)\, y_R \\ &= c_B^{\mathrm{T}} x_B + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R)\, y_R \quad (car\ x_B = B^{-1}b) \\ &= c^{\mathrm{T}} x + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R)\, y_R \quad (car\ x_R = 0) \\ &= Z(x) + (c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R) y_R. \end{aligned}$$

Par suite, comme $\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} R$, on obtient

$$Z(y) = Z(x) + \overline{c}_R^{\mathrm{T}} y_R. \tag{1.4}$$

Sachant que $y \geq 0$ puisque $y \in \mathcal{P}$, la condition $\overline{c}_R \geq 0$ implique que $Z(y) \geq Z(x)$ pour tout $y \in \mathcal{P}$, et donc l'optimum Z^* de la fonction coût Z est atteint au point $x = [x_B\,; 0]^{\mathrm{T}} = [B^{-1}b\,; 0]^{\mathrm{T}}$.

■

Exemple. — 2D. Reprenons le même exemple, la solution de base $x_2 = [2,2,0,0,-1]^T$ (associée à la base $B_2 = [A_1, A_2, A_5]$) n'est pas réalisable puisque on a

$$x_{B_2} = B_2^{-2} b = [2,2,-1]^T \ngeq 0.$$

Par suite, cette solution ne peut pas être optimale. Par contre, si on l'on choisit la base

$$B_3 = [A_1, A_2, A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sa matrice inverse est donnée par

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les variables de base étant les variables x_1, x_2 et z_2, alors le vecteur des coûts associés est

$$c_{B_3}^T = [-2, -1, 0].$$

Par suite, on en déduit que

$$x_{B_3} = B_3^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

et

$$\overline{c}_R^T = c_R^T - c_{B_3}^T B_3^{-1} R = [0,0] - [-2,-1,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1,1] \geq 0.$$

La base B_3 est donc réalisable optimale, et la solution de base réalisable associée est optimale, soit

$$x^* = [x_{B_3}; 0]^T = [2,1,1,0,0] \quad (Z^* = Z(X^*) = (-2) \times 2 - 1 = -5).$$

Théorème 1.6 — Fondamentale. Soit B une base réalisable quelconque, et $x^0 = [x_B^0\,; 0]^{\mathrm{T}}$ la solution de base associée, qu'on suppose non-dégénérée. S'il existe un indice s d'une variable hors-base x_s tel que $\overline{c}_s = c_s^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} A_s < 0$. Alors

1. ou bien on peut augmenter indéfiniment la valeur de x_s sans sortir de l'ensemble des solutions réalisables et dans ce cas l'optimum de Z est non borné ($-\infty$).
2. Sinon, on peut construire une base réalisable $\tilde{B}$ et une solution de base réalisable $\tilde{x}$ tel que

$$Z(\tilde{x}) \leq Z(x).$$

Preuve. *Soient e_s est le $s^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n-m}$ et $A_s = R\,e_s$ le vecteur colonne de la matrice A correspondant à la variable hors-base x_s. Considérons*

$$\overline{b} = B^{-1}b \quad et \quad \overline{A}_s = B^{-1}A_s = B^{-1}Re_s.$$

Soit $\theta > 0$, on considère $x = \left[x_B = \overline{b} - \theta\,\overline{A}_s\,;\, x_R = \theta e_s\right]$. On distingue les deux cas suivants :

1. *Si $\overline{A}_s = B^{-1}A_s \leq 0$, alors pour tout $\theta > 0$, on a*

$$x_B = \overline{b} - \theta\,\overline{A}_s = x_B^0 - \theta\,\overline{A}_s \geq 0.$$

Il résulte de l'équation (1.4) que $Z(x) = Z(x^0) + \overline{c}_R^{\mathrm{T}} x_R$, et puisque

$$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} x_R = \theta\,\overline{c}_R^{\mathrm{T}} e_s = \theta\,(c_R^{\mathrm{T}} - \pi^T R)\,e_s = \theta\,(c_R^{\mathrm{T}} e_s - \pi^T R e_s) = \theta\,(c_s^{\mathrm{T}} - \pi^T A_s) = \theta\,\overline{c}_s,$$

on obtient $Z(x) = Z(x^0) + \theta\,\overline{c}_s$, et comme $\overline{c}_s < 0$, alors pour $\theta \to +\infty$, on obtient

$$Z(x) \to -\infty.$$

2. *Soit $\overline{A}_s = (\overline{a}_{1s}, \ldots, \overline{a}_{ms})^{\mathrm{T}}$, s'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\overline{a}_{is} > 0$, alors la plus grande valeur $\tilde{\theta}$ que peut prendre le réel $\theta > 0$ pour avoir $x_B = \overline{b} - \theta\,\overline{A}_s = (\overline{b}_i - \theta\,\overline{a}_{is})_{1 \leq i \leq m} \geq 0$ est tel que*

$$\tilde{\theta} = \min_{i \in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \quad où \quad I_s^+ = \{i \in \{1, \ldots, m\}\,;\, \overline{a}_{is} > 0\}.$$

On conclut que $\tilde{x} = \left[\tilde{x}_B = \overline{b} - \tilde{\theta}\,\overline{A}_s\,;\, \tilde{x}_R = \tilde{\theta}\,e_s\right]^{\mathrm{T}}$ est une solution de base réalisable puisque

$$\tilde{x} \geq 0 \quad et \quad [B;R]\begin{bmatrix}\tilde{x}_B \\ \tilde{x}_R\end{bmatrix} = B\overline{b} - \tilde{\theta}\,B\overline{A}_s + \tilde{\theta}\,Re_s = BB^{-1}b - \tilde{\theta}\,BB^{-1}A_s + \tilde{\theta}\,A_s = b.$$

Soit $\tilde{B}$ la matrice obtenue de B en remplaçant la colonne B_r par la colonne B_s. Par conséquent, la sous-matrice $\tilde{B}$ (extraite de A) est une base réalisable vérifiant

$$Z(\tilde{x}) = Z(x^0) + \tilde{\theta}\,\overline{c}_s < Z(x^0) \quad (car\ \overline{c}_s < 0).$$

■

Remarque. 1. $x_s = 0$ dans la solution x^0, alors que $\tilde{x}_s > 0$ dans la solution $\tilde{x}$ (variable d'entrée).

2. $x_r > 0$ dans la solution x^0, alors que $\tilde{x}_r = \overline{b}_r - \tilde{\theta}\,\overline{a}_{rs} = 0$ dans la solution $\tilde{x}$ (variable de sortie).

1.3 Résolution des programmes linéaires

1.3.1 Résolution géométrique

Si le domaine $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, il est possible d'utiliser une méthode graphique afin de résoudre un problème de programmation linéaire en deux variables. Pour illustrer ceci, considérons l'exemple suivant

$$(PL)\ :\ \begin{cases} \max\limits_{x,y \in \mathbb{R}^2} 2x + y \ \ (= -\min\limits_{x,y \in \mathbb{R}^2} -2x - y) \\ x \leq 2, \\ y \leq 2, \\ x + y \leq 3, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

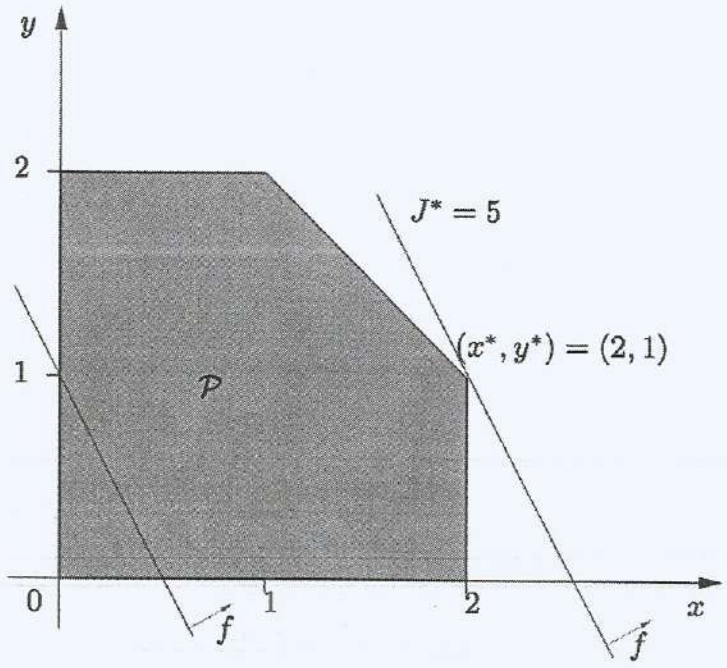

Figure 1.1: Domaine réalisable et solution optimale pour le programme (PL)

- Chaque contrainte d'inégalité est matérialisée par une droite délimitant deux demi-plans. Le domaine $\mathcal{P}$ des solutions réalisables est un polyèdre (ici un polytope puisque borné) formé de l'intersection de tous les demi-plans réalisables issus des contraintes du problème (PL). Il est pour ce cas représenté en couleur sur la figure ci-dessus.
- Les courbes des iso-coûts ou lignes de niveau $c^T x = k$ pour $k \in \mathbb{R}$ sont les droites en bleu dont le gradient est représenté par le vecteur $f = c$. L'ensemble des solutions réalisables pour lesquelles la fonction coût vaut k est l'intersection du polytope $\mathcal{P}$ avec la droite $c^T x = k$.
- La solution optimale $(x^*, y^*) = (2, 1)$ est obtenue en choisissant la ligne de niveau dont le coût est maximal et qui a une intersection non vide avec $\mathcal{P}$. On obtient le coût optimal $J^* = 5$ pour l'intersection de la ligne de niveau avec un des sommets du polytope.

1.3.2 Algorithme du simplexe

Le but de l'algorithme du simplexe est de calculer la solution optimale d'un programme linéaire et dont donner sa valeur optimale correspondante, et ceci à partir d'une base réalisable donnée de ce programme.

On peut prendre n'importe quelle base réalisable comme base de départ . Mais en pratique, il n'est pas toujours facile de mettre en évidence une telle base (par exemple, lorsqu'il y a des contraintes d'égalité), et on s'arrange toujours pour avoir une matrice unité dans le problème initial par l'introduction de variables supplémentaire : variables d'écart ou variables artificielles. Le schema général de l'algorithme du simplexe est donné comme suit :

1. Trouver une base réalisable de départ B $(\overline{b} = B^{-1} b = x_B \geq 0)$,
2. Calculer B^{-1}, $\pi^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$, $\overline{b} = B^{-1} b$, et les coûts réduits associés aux variables hors base

$$\overline{c}_R^{\mathrm{T}} = c_R^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R.$$

(a) Si $\overline{c}_R^T \geq 0$, l'optimum est atteint. **Fin.**

(b) Sinon, il existe s indice d'une variable x_s hors-base tel que $\overline{c}_s < 0$. Calculer

$$\overline{A}_s = B^{-1}A_s \quad \text{où} \quad A_s \text{ est la } s^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

i. Si $\overline{A}_s = (\overline{a}_{is})_{1\leq i\leq m} \leq 0$, alors pas d'optimum fini $(\min\limits_{x\in\mathcal{P}} c^T x = -\infty)$. **Fin.**

ii. Sinon, il existe $i \in \{1,\cdots,m\}$ tel que $\overline{a}_{is} > 0$. Calculer

$$\min_{i\in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \quad \text{où} \quad I_s^+ = \{i \in \{1,\ldots,m\}\,;\, \overline{a}_{is} > 0\}.$$

iii. Former $\tilde{B}$ en faisant sortir la colonne B_r de la base B et entrer la colonne A_s.

iv. Prendre $B = \tilde{B}$ comme base réalisable de départ.

Retourner l'algorithme.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme du simplexe converge en un nombre fini de bases réalisables (nombre fini de points extrêmaux) et la décroissance de la fonction coût interdit de passer deux fois par la même base (même point extrêmal) et donc l'algorithme atteint le point optimum. Mais dans le cas de dégénérescence il est possible d'effectuer une suite d'itérations sans que la valeur de la fonction objectif change. Dans de tels cas le risque de tourner en rond existe : c'est la possibilité de cyclage.

Remarque. — Choix de s tel que $\overline{c}_s < 0$. Pour le test $\overline{c}_s < 0$, choisir l'indice s

- le plus petit tel que $\overline{c}_s < 0$,

  et/ou

- tel que $\overline{c}_s = \min\limits_{\overline{c}_j<0} \overline{c}_j$.

Remarque. — Règle de Bland. S'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent sortir de la base, alors on choisit celle qui a le plus petit indice r.

Remarque. — Matrice de changement de Base. Les deux bases B et $\tilde{B}$ sont adjacentes (c-à-dire ne diffèrent que par une colonne), alors il est facile de calculer $\tilde{B}^{-1}$ à partir de B^{-1} en multipliant celle-ci par la matrice de changement de base P suivante.

$$P = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{\overline{a}_{1s}}{\overline{a}_{rs}} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{\overline{a}_{rs}} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\frac{\overline{a}_{ms}}{\overline{a}_{rs}} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } r \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{colonne } r \end{array} & \end{array}$$

La matrice P est obtenue à partir de la matrice unité I_m, en substituant la colonne r par le colonne

$$V = (v_1, \dots, v_m)^{\mathrm{T}} \quad \text{définit par} \quad \begin{cases} v_i = -\dfrac{\overline{a}_{is}}{\overline{a}_{rs}} & \text{si} \quad i \neq r \\ v_r = \dfrac{1}{\overline{a}_{rs}} & \text{sinon .} \end{cases}$$

Lorsque $B_0 = I$, après un certain nombre de changement de base $B_0 \to B_1 \to \cdots \to B_q$ dont les matrices de changement de base correspondantes sont $P_1, P_2, \dots, P_q$ respectivement, alors on aura

$$B_1^{-1} = P_1 B_0^{-1}\ ,\ \ B_2^{-1} = P_2 B_1^{-1}, \dots, B_q^{-1} = P_q B_{q-1}^{-1}.$$

Par conséquent, on en obtient que

$$B_q^{-1} = P_q P_{q-1} \dots P_1 B_0 = P_q P_{q-1} \dots P_1.$$

Remarque. — Base de départ : variables artificielles. Soit (PL) le programme linéaire avec contraintes d'égalités et sous forme standard suivant.

$$(\mathrm{PL}) \ : \ \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Souvent, on commence l'algorithme de simplexe au sommet $(0,0,0)$ qui appartient à l'ensemble de solutions de base réalisable. Pour le problème (PL), l'origine $(0,0,0)$ ne peut pas appartenir à l'ensemble de solutions de base réalisable (car sinon, les deux contraintes donnent en ce point $0 = 3$ et $0 = -4$). Pour contourner ceci, on ajoute deux variables y_1 et y_2, dites artficielles avec un coût $M > 0$ assez grand (c-à-dire M est le coefficient des variables artificielles y_1 et y_2 dans la fonction coût). Après insertion de ces variables, (PL) devient

$$(\mathrm{PL}') \ : \ \begin{cases} \min z' = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + My_1 + My_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - y_2 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

- La base de départ B_0 de variables (y_1, y_2) est réalisable puisque

$$x_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Alors, la solution de base réalisable associé à B_0 est

$$[y_1, y_2, x_1, x_2, x_3]^T = [3, 4, 0, 0, 0]^T.$$

- La condition $M > 0$ assez grand, garantit que l'on aura $y_1 = y_2 = 0$ à l'optimum (si (PL) admet des solutions) et la solution optimale de (PL') est alors solution optimale de (PL).

Remarque. — Base de départ : variables d'écarts et variables artificielles. Soit (PL) le programme linéaire avec contraintes d'inégalités ≤ 0 suivant.

$$(\mathrm{PL}) : \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Pour écrire (PL) sous forme standard, on ajoute deux variables d'écarts $x_3 \geq 0$ et $x_4 \geq 0$, alors

$$(\mathrm{PL}) : \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Pour initier l'algorithme à l'origine $(0,0)$ (la seconde contrainte donne $x_4 = -4$), on introduit une variable artificielle x_5 dans la seconde contraintes avec un coût $M > 0$ assez grand. On obtient

$$(\mathrm{PL}') : \begin{cases} \min z = x_1 - 2x_2 + Mx_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

La base de départ B_0 de variables (x_3, x_5) est réalisable puisque

$$x_{B_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Alors, la solution de base réalisable associé à B_0 est

$$[x_3, x_5, x_1, x_2, x_4]^T = [3, 4, 0, 0, 0]^T.$$

Nécessairement, $x_5 = 0$ à l'optimum, et la solution optimale pour (PL′) est optimale pour (PL).

Remarque. — Forme canonique et tableau de l'algorithme (primal) du simplexe. Soit

$$(\mathrm{PL}) : \begin{cases} \min z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = c^{\mathrm{T}} x \\ a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Ce programme linéaire peut écrire sous la forme matricielle suivante

$$(\mathrm{PL}) : \begin{cases} \min z \\ Ax = b \\ c^{\mathrm{T}} x - z = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Pour faciliter la présentation, supposons que la base choisie B est composée des m premières colonnes de A. Par conséquent, on peut écrire

$$A=\left[B;R\right],\ x=\left[x_B;x_R\right]^{\mathrm{T}} \text{ avec } x_B=\left[x_1,\ldots,x_m\right]^{\mathrm{T}},\ c=\left[c_B;c_R\right]^{\mathrm{T}}.$$

Par suite, le programme linéaire (PL) s'écrit

$$(\mathrm{PL}):\begin{cases}\min z\\ Bx_B+Rx_R=b\\ c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_R^{\mathrm{T}}x_R-z=0\\ x_B,x_R\geq 0.\end{cases}\qquad \text{ou}\qquad (\mathrm{PL}):\begin{cases}\min z\\ [B;R]\begin{bmatrix}x_B\\x_R\end{bmatrix}=b\\ [c_B^{\mathrm{T}};c_R^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}x_B\\x_R\end{bmatrix}-z=0\\ x_B,x_R\geq 0.\end{cases}$$

Puisque la relation $c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_R^{\mathrm{T}}x_R-z=0$ est équivalente à

$$\begin{aligned}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b&=c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_R^{\mathrm{T}}x_R-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b-z\\&=c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_R^{\mathrm{T}}x_R-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}\left(Bx_B+Rx_R\right)-z\\&=c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_R^{\mathrm{T}}x_R-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}Bx_B-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}Rx_R-z\\&=c_B^{\mathrm{T}}x_B-c_B^{\mathrm{T}}x_B+c_R^{\mathrm{T}}x_R-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}Rx_R-z\\&=(c_B^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}})x_B+(c_R^{\mathrm{T}}-\pi^{\mathrm{T}}R)x_R-z=0x_B+\overline{c}_R^{\mathrm{T}}x_R-z.\end{aligned}$$

D'où

$$0x_B+\overline{c}_R^{\mathrm{T}}x_R-z=0x_B+(c_R^{\mathrm{T}}-\pi^{\mathrm{T}}R)x_R-z=-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b.$$

Par conséquent, le programme linéaire (PL) devient

$$(\mathrm{PL}):\begin{cases}\min z\\ Ix_B+B^{-1}Rx_R=B^{-1}b\\ 0\cdot x_B+\left[c_R^{\mathrm{T}}-\pi^{\mathrm{T}}R\right]x_R-z=-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b\\ x_B,x_R\geq 0.\end{cases}$$

Le problème linéaire (PL) peut être présenter sous forme du tableau suivant.

Variables de base	$x_B^{\mathrm{T}}=[x_1,\ldots,x_m]$	x_R^{T}	- z	Terme de droite
x_B	I	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b=\overline{b}$
$-z$	0	$\overline{c}_R^{\mathrm{T}}=c_R^{\mathrm{T}}-\pi^{\mathrm{T}}R$	1	$-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b=-c_B^{\mathrm{T}}\overline{b}$

Définition 1.14 Un programme linéaire est mis sous forme canonique par rapport aux variables de base $(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{im})$ si z est exprimé en fonction des variables hors base, et si les colonnes de A correspondantes aux $(x_{ij})_{1\leq j\leq m}$ forment une matrice unité (à une permutation près).

Remarque. En comparant les $\overline{c}_s$ (si $\overline{c}_s<0$), on passe à l'étape suivante en multipliant le nouveau tableau par la matrice de changement de base P.

Exemple. Résolvons le programme linéaire (de maximisation) (PL) suivant

$$\begin{cases} \max \omega = x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{équivant (en posant } \omega = -z\text{)} \quad \begin{cases} \min z = -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Puis, après l'ajout de variables d'écart, on obtient le problème équivalent suivant

$$\begin{cases} \min z \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 - z = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Tableau initial :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \;;\; c = \begin{bmatrix} c_{x_1} = -1 \\ c_{x_2} = -2 \\ c_{x_3} = 0 \\ c_{x_4} = 0 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \;;\; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \;;\; R_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \;;\; c_{B_1} = \begin{bmatrix} c_{x_3} = 0 \\ c_{x_4} = 0 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \;;\; c_{R_1} = \begin{bmatrix} c_{x_1} = -1 \\ c_{x_2} = -2 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de $B_1^{-1} = I$ est triviale et il en résulte que

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_1}^{\mathrm{T}} B_1^{-1} = (0,0,0) \;;\; \bar{c}_{R_1}^{\mathrm{T}} = c_{R_1}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_1 = c_{R_1}^{\mathrm{T}} = [c_{x_1} = -1 ; c_{x_2} = -2] \ngeq 0.$$

Par suite, la première base $B_1 = I$ n'est pas optimale. Le tableau initial (T_1) est comme suit :

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_3	1	0	0	-3	$\boxed{2}$	0	2
x_4	0	1	0	-1	2	0	4
x_5	0	0	1	1	1	0	5
$-z$	0	0	0	-1	$\boxed{-2}$	1	$-c_{B_1}^T \bar{b} = 0$

$$z_{B_1} = c_{B_1}^{\mathrm{T}} \bar{b} = [0,0,0] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0.$$

On a $\overline{c}_{R_1}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_1} = -1 ; \overline{c}_{x_2} = -2]$, on choisit l'indice s hors-base tel que $\overline{c}_s < 0$ avec $\overline{c}_s$ le plus petit des coordonnées de $\overline{c}_R$, d'où $s = 2$ et $\overline{c}_2 = \overline{c}_{x_2} = \boxed{-2} < 0$, et donc x_2 entre dans la base B_1 (la variable associée au second colonne de A). Alors, on a

$$A_{s=2} = A_{x_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{A}_{s=2} = \overline{A}_{x_2} = B_1^{-1} A_{s=2} = A_{s=2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \overline{b} = B_1^{-1} b = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

et comme $I_{s=2}^{+} = \{i \in \{1, \ldots, 3\} ; \overline{a}_{is} > 0\} = \{1,2,3\}$, alors

$$\min_{i \in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \min\{2/2 ; 4/2 ; 5/1\} = 1 = \frac{\overline{b}_1}{\overline{a}_{1s}}.$$

Alors, $r = 1$, $\overline{a}_{rs} = \overline{a}_{12} = \boxed{2}$ le pivot, et x_3 sort de la base B_1 (variable associé à 1[er] colonne de B).

Construction de la base $\mathbf{B_2}$:

On remplace la 1[re] colonne de B_1 (associée à la variable sortante x_3) par le colonne

$$A_s = A_2 = [2,2,1]^{\mathrm{T}} \text{ (correspondante à la variable entrante } x_2).$$

Par conséquent, on obtient

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; R_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; c_{B_2} = \begin{bmatrix} c_{x_2} = -2 \\ c_{x_4} = 0 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \; ; \; c_{R_2} = \begin{bmatrix} c_{x_1} = -1 \\ c_{x_3} = 0 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{a}_{12} = 2.$$

Soit P_1 la matrice de changement de base $B_1 \to B_2$ donnée par

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{a}_{12}} = \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{a}_{22}}{\overline{a}_{12}} = -1 & 1 & 0 \\ -\frac{\overline{a}_{32}}{\overline{a}_{12}} = -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme $B_2^{-1} = P_1 B_1^{-1}$, alors on en déduit

$$B_2^{-1} = P_1 B_1^{-1} = P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_2}^{\mathrm{T}} B_2^{-1} = [-2,0,0] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1,0,0]$$

$$\overline{c}_{R_2}^{\mathrm{T}} = c_{R_2}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_2 = [-1,0] - [-1,0,0] \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\overline{c}_{x_1} = -4, \overline{c}_{x_3} = 1].$$

Par conséquent, comme $\overline{c}_{R_2}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_1} = -4\,; \overline{c}_{x_3} = 1] \not\geq 0$, alors la base B_2 n'est pas optimale.

Pour obtenir le tableau (T_2), on multiplie R_1 et $\overline{b} = b$ du tableau (T_1) par la matrice P_1, alors

$$P_1R_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B_2^{-1}b = P_1 b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_2	$1/2$	0	0	$-3/2$	1	0	1
x_4	-1	1	0	$\boxed{2}$	0	0	2
x_5	$-1/2$	0	1	$5/2$	0	0	4
$-z$	1	0	0	$\boxed{-4}$	0	1	$-c_{B_2}^T\overline{b} = 2$

$$z_{B_2} = c_{B_2}^{\mathrm{T}}\overline{b} = [-2,0,0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2.$$

On a $s = 1$ puisque $\overline{c}_s = \overline{c}_{x_1} = -4 < 0$, et donc x_1 entre en base (variable associée à A_1). D'où

$$A_{s=1} = A_{x_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{A}_{s=1} = \overline{A}_{x_1} = B_2^{-1}A_{s=1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, on a $I_{s=1}^{+} = \{i \in \{1,\ldots,3\}\,; \overline{a}_{is} > 0\} = \{2,3\}$, et alors

$$\min_{i \in I_s^+} \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} = \min\{\frac{2}{2}; \frac{4}{5/2}\} = 1 = \frac{\overline{b}_2}{\overline{a}_{2s}}.$$

Alors, $r = 2$, $\overline{a}_{rs} = \overline{a}_{21} = \boxed{2}$ le pivot et x_4 sort de la base B_2 (associée à la $2^{\text{ème}}$ colonne de B_2).

Construction de la base B_3 :

On remplace la $2^{\text{ème}}$ colonne de la base B_2 (associée à la variable sortante x_4) par la 1^{re} colonne de la matrice A, soit $A_1 = [-3,-1,1]^{\mathrm{T}}$ (correspondante à la variable entrante x_1). Par suite, on obtient

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_1 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; R_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \; c_{B_3} = \begin{bmatrix} c_{x_2} = 0 \\ c_{x_1} = -4 \\ c_{x_5} = 0 \end{bmatrix} \; ; \; c_{R_3} = \begin{bmatrix} c_{x_3} = 1 \\ c_{x_4} = 0 \end{bmatrix}$$

Soit P_2 la matrice de changement de base $B_2 \to B_3$, alors

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\overline{a}_{11}}{\overline{a}_{21}} = \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a}_{21}} = \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\overline{a}_{31}}{\overline{a}_{21}} = -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $B_3^{-1} = P_2 B_2^{-1} = P_2 P_1 B_1^{-1} = P_2 P_1$, alors il en résulte que

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_3}^{\mathrm{T}} B_3^{-1} = (0,-4,0) \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} = [2,-2,0].$$

$$\overline{c}_{R_3}^{\mathrm{T}} = c_{R_3}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_3 = [1,0] - [2,-2,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [1,0] - [2,-2] = [-1,2].$$

Comme $\overline{c}_{R_3}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_3} = -1; \overline{c}_{x_4} = 2)] \ngeq 0$, alors la base B_3 n'est pas optimale.

Pour obtenir le tableau (T_3), on multiplie R_2 et $\overline{b}$ de (T_2) par la matrice P_2, et on obtient

$$P_2 R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_2 \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_2	$-1/4$	$3/4$	0	0	1	0	$5/2$
x_1	$-1/2$	$1/2$	0	1	0	0	1
x_5	$\boxed{3/4}$	$-5/4$	1	0	0	0	$3/2$
$-z$	$\boxed{-1}$	2	0	0	0	1	6

$$z_{B_3} = c_{B_3}^{\mathrm{T}} \overline{b} = [-2,-1,0] \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = -6.$$

On a $s=3$ car $\overline{c}_{s=3} = c_{x_3} = -1 < 0$, et donc la variable x_3 entre en base (associée à la $3^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A). Par suite, il vient que

$$A_{s=3} = A_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{A}_{s=3} = B_3^{-1} A_{x_3} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, on a $I_{s=3}^{+} = \{i \in \{1,2,3\}; \overline{a}_{is} > 0\} = \{3\}$, et alors

$$\min_{i \in I_3^+} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i3}} \; ; \; \overline{a}_{i1} > 0 \right\} = \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_{33}} = \frac{3/2}{3/4} = 2.$$

d'où $r=3$, le pivot est $\overline{a}_{rs} = \overline{a}_{33} = 3/4$, et la variable x_5 sort de la base (c'est la variable correspondente à la $3^{\text{ème}}$ colonne de la base B_3).

Construction de la base B_4 :

On remplace la $3^{\text{ème}}$ $(r=3)$ colonne de la base B_3 par la $3^{\text{ème}}$ $(s=3)$ colonne de la matrice A, alors

$$B_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \quad R_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_5 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \; ; \quad c_{B_4} = \begin{bmatrix} c_{x_2}=0 \\ c_{x_1}=0 \\ c_{x_3}=-1 \end{bmatrix} \; ; \quad c_{R_4} = \begin{bmatrix} c_{x_5}=0 \\ c_{x_4}=2 \end{bmatrix}$$

Soit P_3 matrice de changement de base $B_3 \to B_4$, alors on a

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{33}} = \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{\overline{a}_{23}}{\overline{a}_{33}} = \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{a}_{33}} = \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Par suite, comme $B_4^{-1} = P_3 P_2 P_1 B_1^{-1} = P_3(P_2 P_1)$, alors on en déduit que

$$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -5/4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & -5/4 & 4/3 \end{bmatrix},$$

$$\pi^{\mathrm{T}} = c_{B_4}^{\mathrm{T}} B_4^{-1} = [0,0,-1] \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & -5/4 & 4/3 \end{bmatrix} = [-1, 5/3, -4/3]$$

$$\overline{c}_{R_4}^{\mathrm{T}} = c_{R_4}^{\mathrm{T}} - \pi^{\mathrm{T}} R_4 = [0,2] - [-1,5/3,-4/3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0,2] - [-4/3, 5/3]$$

On obtient alors l'arrêt de l'algorithme, puisque on a

$$\overline{c}_{R_4}^{\mathrm{T}} = [\overline{c}_{x_5} = 4/3, \overline{c}_{x_4} = 1/3] > 0.$$

Pour obtenir le tableau (T_4), on multiplie R_3 et $\overline{b}$ du tableau (T_3) par P_3, et donc

$$P_3 R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = P_3 b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finalement, le tableau (T_4) est comme suit

Variables de base	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	- z	Terme de droite
x_2	0	$1/3$	$1/3$	0	1	0	3
x_1	0	$-1/3$	$2/3$	1	0	0	2
x_3	1	$-5/3$	$4/3$	0	0	0	2
$-z$	0	$1/3$	$4/3$	0	0	1	$-c_{B_4}^{\mathrm{T}}\overline{b}=8$

$$z_{B_4}=c_{B_4}^{\mathrm{T}}\overline{b}=[-2,-1,0]\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}=-8$$

En conclusion, on obtient

$$x^{opt}=(x_1=2,x_2=3,x_3=2,x_4=0,x_5=0) \quad \text{et} \quad z^{opt}=-x_1-2x_2=-8.$$

Ce qui donne

$$\boxed{z^{opt}=-8 \quad \text{et} \quad w^{opt}=-z^{opt}=8.}$$

1.4 Dualité en programmation linéaire

1.4.1 Construction du dual d'un programme linéaire

Pour chaque programme linéaire (P) dit primal, il est possible de construire un autre programme linéaire (D), dit dual, et ceci à partir des mêmes données (fonction objective, coefficients des contraintes...). Si le problème primal, est un problème de minimisation alors le dual est un problème de maximisation, et à l'optimum, les valeurs respectives des deux fonctions objectives sont égales si elles sont finies.

Définition 1.15 Soit (P) le programme linéaire sous forme canonique, suivant

$$(P):\begin{cases}\min z=c^{\mathrm{T}}x\\ Ax\geq b\\ x\geq 0.\end{cases}$$

À toute contrainte $i\in\{1,\cdots,m\}$, on associe une variable $y_i\in\mathbb{R}$ (appelée variable duale). On appelle programme dual de (P), le problème de programmation linéaire suivant

$$(D):\begin{cases}\max w=b^{\mathrm{T}}y\\ A^{\mathrm{T}}y\leq c\\ y\geq 0\end{cases}$$

Définition 1.16 Soit (P) le programme linéaire sous forme standard, suivant

$$(P):\begin{cases}\min z=c^{\mathrm{T}}x\\ Ax=b\\ x\geq 0.\end{cases}$$