Feuille d'Exercices n° 4 : Lois continues (v.a.r)

Exercice 4.1 : *v.a.r. avec espérance*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2) X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.
3) Calculer la fonction de répartition de la v.a.r. X.
4) Tracer sur deux repères différents les courbes de f

Exercice 4.2 : *v.a r. sans espérance*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 4.3 : *Comparaison du temps de fonctionnement de deux systèmes*

1) Deux éléments d'un système sont montés en parallèle. Le système fonctionne tant qu'au moins l'un des deux éléments fonctionne. On suppose que les temps de fonctionnement des éléments, X_1 et X_2, suivent une loi exponentielle et sont indépendants. X_1 et X_2 ont respectivement pour espérance 1000h et 1500h. Calculer et comparer :
 a) La probabilité que le premier élément fonctionne un temps inférieur à 900h.
 b) La probabilité que le deuxième élément fonctionne un temps inférieur à 900h.
 c) La probabilité que le système fonctionne un temps inférieur à 900h.
2) Les deux éléments sont maintenant montés en série. Le système fonctionne seulement lorsque les deux éléments fonctionnent. Calculer la probabilité que le système fonctionne un temps inférieur à 900h. Comparer avec les probabilités calculées au problème précédent.

Exercice 4.4 : *Confiture "pur sucre" et loi normale*

Une confiture est qualifiée de "pur sucre" si elle contient entre 420 et 520g de sucre par kg. Un fabriquant vérifie 200 pots de 1 kg. Il trouve que le poids moyen de sucre est 465g avec un écart-type de 30g.
1) En considérant l'échantillon comme représentatif, calculer le pourcentage de la production du fabricant qui ne doit pas porter la mention "pur sucre" en considérant que le poids du sucre suit une loi normale.
2) Afin d'améliorer la qualité "pur sucre" le fabriquant souhaite éliminer 15% de sa production. Déterminer un intervalle $[a, b]$, centré sur la moyenne, tel que $p(a \leq X \leq b) = 0.85$.

3) Un magasin diététique lui propose d'acheter les pots à condition qu'ils aient moins de 495g de sucre, mais au minimum x_0 g. Déterminer x_0 sachant que le fabriquant refusera la vente au dessous de 20% de chute.

Exercice 4.5 : *Tailles et loi normale*

On suppose que la taille, en centimètres, d'un homme âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de paramètres $m = 175$ et $\sigma = 6$. Quelle est la pourcentage d'hommes de 25 ans ayant une taille supérieure à 185 cm ? Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage dépassent 192 cm ?

Exercice 4.6 : *Deux informations et deux inconnues*

Soit X une v.a. r. distribuée suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
On suppose que $P[X < 0] = 0.6$, $P[X > 2] = 0.25$. Calculer m et σ.

Exercice 4.7 : *Transformations affines de lois*

Soit X une v.a.r admettant une d.d.p. continue notée f_X.
1) Déterminer la fonction de répartition puis la d.d.p de la v.a.r. Y dans le cas où $Y = aX + b$, $a \neq 0$.
2) Application : Considérer les cas où :
- **a)** X suit une loi de Cauchy,
- **b)** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Exercice 4.8 : *Confectionnement*

Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g. Elle a confectionné 1000 paquets mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids autour de la valeur moyenne de 500g avait un écart-type de 25g.
a) Combien de paquets pèsent entre 480g et 520g ?
b) Combien de paquets pèsent entre 480g et 490g ?
c) Combien pèsent plus de 450g ?
d) Entre quelles limites symétriques par rapport à la moyenne sont comprises les 9/10 de cette production ?

Exercice 4.9 : *Une nouvelle d.d.p*

Soit f définie par $f(x) = (a^2 - x^2)\, \mathbb{1}_{]-a,a[}(x)$.
1) Déterminer a tel que f soit une densité de probabilité,
2) Soit X de densité f :
- **a)** Calculer $E(X)$ et $V(X)$,
- **b)** Déterminer F_X.

3) Tracer les courbes de f et F_X sur deux repères orthogonaux.

Exercice 4.10 : $Y = aX + b$

Soit X une variable aléatoire de densité f et soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
On considère la variable aléatoire $Y = aX + b$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

Théorème 1

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.
De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exercice 4.11 : *Fonction carrée $Y = X^2$ et exponentielle $Y = e^X$*

1) Soit X une variable aléatoire de densité f.
On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f.
On considère la variable aléatoire $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

Exercice 4.12 : *Encore un composant électronique !*

La durée de vie en heure d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

1) Vérifier que f est une densité,
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$,
3) Calculer la probabilité qu'un composant pris au hasard ait une durée de vie supérieure ou égale à $E(X)$.
4) Déterminer F_X.
5) Tracer les courbes de f et F_X sur deux repères orthogonaux.

Exercice 4.13 : *Particularité de la loi de Cauchy*

Montrer que si une v.a.r. X suit la loi de Cauchy, il en est de même pour la v.a.r. $\frac{1}{X}$.
Indication : Montrer que la fonction de répartition de la v.a.r. $\frac{1}{X}$ est égale à celle de X.

Exercices supplémentaires 4.1 : *six exercices indépendants pour s'exercer !!!*

1) Soit X une v. a. r. qui admet la densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où a est une constante.

a) Calculer a.

b) Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X. Tracer la courbe représentative de F.

c) Calculer $P[0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}]$ et $P[-\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{6}]$.

2) On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ kx\exp -\frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Déterminer le réel k pour que la fonction f soit une densité de probabilité.

b) Soit F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations a) $F_X(t) = \frac{1}{4}$ b) $F_X(t) = \frac{3}{2}$.

3) Soit X une v.a.r. ayant pour densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ Quelle est la loi de probabilité de la variable $Y = aX + b$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$?

4) Soit X une v.a. r. distribuée suivant une loi normale $N(m, \sigma^2)$.

a) On suppose que $m = -1$, $\sigma = 2$. Calculer les probabilités :

$$P[-1 < X < 1], \quad P[2 < X < 3], \quad P[X < -2], \quad P[X < 0], \quad P[X > 4].$$

b) On suppose que $P[X < 0] = 0.6$, $P[X > 2]0.25$. Calculer m et σ.

5) Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X est distribuée suivant la loi de Poisson de moyenne $E(X) = 2$ et que Y est distribuée suivant la loi uniforme sut $[0, 1]$. On pose $Z = X + Y$.

a) Pour tout entier $n \geq 0$, et pour $n < x < n + 1$, calculer la probabilité $P[n \leq Z < x]$.

b) Calculer la fonction de répartition de Z. Montrer que la loi de probabilité de Z admet une densité de probabilité que l'on déterminera. Indiquer la courbe représentative de cette densité en repère orthonormé.

6) Calculer la loi de probablité la v. a. r. Y définie par $Y = X^2 + 2X + 2$ où X est une v. a. r. distribuée :

a) suivant la loi $N(0, 1)$.

b) suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$.