Feuille d'Exercices nº 2 : DÉNOMBREMENTS

Exercice 2.1 : *Chemins*

Calculer le nombre de chemins non-décroissants sur un réseau entier bidimensionnel

$$\mathbb{Z}_+^2 = \{(i,j) : i,j = 0,1,2,\dots\},$$

qui commencent au point $(0,0)$ et mènent au point (m,n) où m et n sont deux entiers naturels strictement positifs. (Un chemin est considéré comme non-décroissant si une seule coordonnée change à chaque étape, en augmentant de un)

Exercice 2.2 : *4 lancers discernables*

On jette ensemble quatre dés discernables.

1) Donner l'univers Ω et son cardinal.

2) Quel est le cardinal d'obtenir un carré (a,a,a,a), un brelan (a,a,a,b), deux paires (a,a,b,b), une paire (a,a,b,c), une disposition quelconque (a,b,c,d) ?

3) Que vaut la somme de tous les cardinaux de la question précédente ? Commenter.

Exercice 2.3 : *Rangements sur bibliothèque étagère*

De combien de manières peut-on disposer 15 volumes sur une bibliothèque étagère pour les tomes I et II ne soient pas côte à côte ?

Exercice 2.4 : Σ_S^p *et* $\overset{*p}{\Sigma}_S$

Pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel S où $S \geq p$, on note $\overset{*p}{\Sigma}_S$ l'ensemble défini par :

$$\overset{*p}{\Sigma}_S = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p, \sum_{i=1}^{p} n_i = S\}.$$

1) Montrer que $\mathrm{card}(\overset{*p}{\Sigma}_S) = C_{S-1}^{p-1}$.

Indication : On pourra utiliser soit des tableaux; soit le résultat du cours concernant card Σ_S^p, en se ramenant à ce dernier.

2) Si 15 tableaux noirs doivent être affectés à 3 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?

3) Une personne dispose de 20000 dirhams à investir sur quatre placements potentiels. Chaque mise est un nombre entier de milliers de dirhams. Quel est le nombre de stratégies à disposition si cette personne décide d'investir la totalité des 20000 dirhams ? Qu'en est-il si on admet qu'elle peut aussi investir une partie seulement de la somme ?

4) Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, lorsque ceux-ci sont écrits dans l'ordre croissant au sens large (avec répétions) ?

Indication : utiliser card Σ_S^p, donné en cours, où S et p sont des entiers à préciser.

5) On considère une fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ de n variables. Combien de dérivées partielles d'ordre r y a-t-il si on sait qu'on peut échanger l'ordre des dérivées ?

Exercice 2.5 : *Modèles en mécanique statistique*

En mécanique statistique, on étudie la distribution de particules dans l'espace. Il est pratique de considérer que l'espace est subdivisé en petites cellules. Trois modèles uniformes différents ont été proposés.

1) Le modèle de Maxwell-Boltzmann (M-B), supposant que l'on peut distinguer les particules et ne limitant pas le nombre de particules par cellule.

2) Le modèle de Bose-Einstein (B-E), supposant que l'on ne peut distinguer les particules et ne limitant pas le nombre de particules par cellule.

3) Le modèle de Fermi-Dirac (F-D), supposant que l'on ne peut distinguer les particules, avec au plus une particule par cellule.

Donner, en fonction des différents modèles, le nombre de façons de répartir p particules dans k cellules en discutant selon les paramètres p et k.

✗ **Exercice 2.6 :** *Formule de Vandermonde*

1) Montrer la formule de Vandermonde suivante : $\sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j = C_{n+m}^k$,
où i, j, k, n, m sont des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n+m$.

2) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

✗ **Exercice 2.7 :** *n lancers consécutifs d'un dé*

On jette un dé n fois de suite ($n \in \mathbb{N}^*$).

1) Définir l'univers Ω_n et donner son cardinal.

2) Soit A_n l'ensemble"la somme de n résultats est paire". Montrer que A_n et son complémentaire ont le même cardinal.

Exercice 2.8 : *Tiroirs discernables et boules*

On suppose qu'on dispose de 3 boules et qu'on cherche à les répartir dans 5 tiroirs discernables.

Déterminer le nombre de cas possibles dans les trois cas suivants :

1) Les 3 boules sont discernables et les 5 tiroirs pouvant contenir plus de 3 boules chacun.

2) les 3 boules sont indiscernables et les 5 tiroirs pouvant contenir plus de 3 boules chacun.

3) les 3 boules sont indiscernables et les 5 tiroirs pouvant contenir au maximum une boule chacun.

N.B. : des objets sont dits <u>discernables</u> si on peut les distinguer entre eux par un critère quelconque (couleurs, poids, formes ou numéros différents,...). En revanche, des objets sont dits <u>indiscernables</u> lorsqu'il n y a aucun moyen de les distinguer ou de les différencier entre eux.

Exercice 2.9 :

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Indication : Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de $E \setminus A$?