CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS : RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1.1 Espaces vectoriels - Généralités

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Espace vectoriel)
Un ***espace vectoriel*** *sur* $\mathbb{K}$ *(ou* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel) consiste en un ensemble* V*, dont les éléments sont notés* $\boldsymbol{v} \in V$ *et appelés* ***vecteurs****, muni de 2* ***opérations*** *:*

— *Addition* : $V \times V \longrightarrow V$: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ *(loi interne), et*
— *Multiplication* : $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$: $(\alpha, \boldsymbol{v}) \longmapsto \alpha \cdot \boldsymbol{v}$ *(loi externe),*

vérifiant les ***axiomes*** *suivants :*

(A1) ***Commutativité*** *de l'addition :* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,
(A2) ***Associativité*** *de l'addition :* $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,
(A3) Existence d'un ***élément neutre*** *pour l'addition :*
$\exists\, \mathbf{0} \in V$ *tel que* $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$,
(A4) Existence ***d'inverses additifs ou opposés*** *:*
$\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists \boldsymbol{w} \in V$ *tel que* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$,
(A5) ***Distributivité*** $\cdot/+$: $\alpha \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \alpha \cdot \boldsymbol{w}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,
(A6) ***Distributivité*** $+/\cdot$: $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$,
(A7) ***Associativité*** : $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{v}) = (\alpha \times \beta) \cdot \boldsymbol{v}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$,
(A8) ***Normalisation*** : $1_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$.

Remarques et commentaires 1.1

1. *(A3)* $\Rightarrow$ *Tout espace vectoriel contient au moins un vecteur, le vecteur nul* $\mathbf{0}$.

2. $\{\mathbf{0}\}$ *est l'espace vectoriel* ***trivial****.*

3. *Les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés des scalaires.*

4. *Par commodité, on pourra écrire* $\alpha \boldsymbol{v}$ *au lieu de* $\alpha \cdot \boldsymbol{v}$*(c-à-d supprimer le* $\cdot$ *de la loi externe).*

Proposition 1.1 (Propriétés élémentaires)

1. *Unicité de l'élément neutre :*
Soit $\boldsymbol{z} \in V$. *Si* $\exists \boldsymbol{v} \in V$ *tel que* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$, *alors* $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$.

2. *Unicité de l'inverse additif :*
Soient $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w'} \in V$. *Si* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w'}$, *alors* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w'}$.

3. $0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$ *et* $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

4. $\alpha \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

5. $(-1)\boldsymbol{v}$ *est l'unique inverse additif de* $\boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$. *Il sera noté* $-\boldsymbol{v}$.

6. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $(-\alpha)\boldsymbol{v} = \alpha(-\boldsymbol{v}) = -(\alpha \boldsymbol{v})$.

Exemples 1.1

1. $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un espace vectoriel sur lui même.*

2. $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

3. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *n'est pas un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

4. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$.
On définit une structure d'espace vectoriel sur $V_1 \times V_2$ *par :*
$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ *et* $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{K}$.
D'une manière analogue, $V_1 \times V_2 \cdots \times V_n$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *si* $V_1, V_2 \cdots, V_n$ *le sont.*

5. *Ainsi* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *(et* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *par généralisation) sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.
Pour $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, *on définit la loi* $+$ *interne et la loi* $\cdot$ *externe par :*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ et } \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

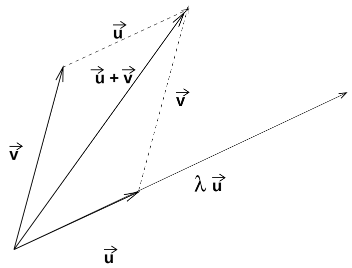

FIGURE 1.1 – Opérations sur les vecteurs, ici $\lambda > 1$

6. *Soit* V *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, A *un ensemble quelconque non vide, et*
$\mathcal{A} = \{$ *applications* $f : A \longrightarrow V\}$.
On peut définir sur $\mathcal{A}$ *une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *par les lois* $+$ *interne et* $\cdot$ *externe définies par :*
Si $f, g \in \mathcal{A}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$, *alors*

$$\forall a \in A, \quad (f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\alpha \cdot f)(a) = \alpha \cdot f(a).$$

1.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2 (Sous-espace vectoriel)
Soit $U \subset V$, *un sous-ensemble.*
Si U *hérite d'une structure d'espace vectoriel de* V, *alors* U *est un* ***sous-espace vectoriel*** *de* V.

Proposition 1.2 (Caractérisation de sous-espaces vectoriels)
U *est un sous-espace de* V

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U \neq \varnothing \text{ et } \mathbf{0} \in U \\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \\ \alpha \boldsymbol{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{u} \in U \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0} \in U \\ \lambda \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U. \end{cases}$$

Exercice d'application 1 : *Droites dans* $\mathbb{R}^2$
Vérifier que l'ensemble $\mathcal{D}_{(a,b)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ où
$\mathcal{D}_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad ax + by = 0\}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \neq (0, 0)$.

Note **1** :

Exemples 1.2

1. $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.*(première bissectrice)*

2. $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -x\} = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.*(deuxième bissectrice)*

3. $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.*(axe (Ox))*

4. $U_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 1\} = \{(1,y), y \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*.(droite verticale passant par* $(1,0)$*)*

5. $U_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\} = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*.(axe (Oy))*

Proposition 1.3 (Intersection de sous-espaces vectoriels)
Si U_1, U_2 *sont des sous-espace vectoriels d'un même e.v.* V *alors leur intersection* $U_1 \cap U_2$ *est aussi un s.e.v de* V*.*

Proposition 1.4 (Union de sous-espaces vectoriels)
Si U_1, U_2 *sont des sous-espace vectoriels d'un même e.v.* V *alors leur réunion* $U_1 \cup U_2$ *n'est pas en général un s.e.v de* V*.*

Exemples 1.3 (Contres exemples)
En utilisant les notations des exemples 1.2, on peut montrer que : $U_3 \cup U_5$ *(resp.* $U_1 \cup U_2$*) n'est pas un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Note **2** :

Définition 1.3 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)
Soient U_1, U_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel* V*.*
Leur ***somme*** *est un sous-ensemble de* V *défini par :*

$$\boxed{U_1 + U_2 = \{\boldsymbol{u} \in V | \exists \boldsymbol{u_1} \in U_1, \exists \boldsymbol{u_2} \in U_2, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}\}.}$$

Proposition 1.5
Soient U_1, U_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel* V*.*
$U_1 + U_2$ *est un sous-espace vectoriel de* V*.*

Exercice d'application 2 : *Somme des deux axes du plan vectoriel* $\mathbb{R}^2$
En utilisant les notations des exemples 1.2, montrer que $U_3 + U_5 = \mathbb{R}^2 \square$.

Note **3** :

Définition 1.4 (Somme directe par unicité)
Soient U_1, U_2 *des sous-espaces de V.*
Leur somme est ***directe*** *si* $\forall \boldsymbol{v} \in U_1 + U_2$,

$$\exists !\ \boldsymbol{u_1} \in U_1, \boldsymbol{u_2} \in U_2 \text{ tel que } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}.$$

Autrement dit, si $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{u_1}' + \boldsymbol{u_2}'$*, où* $\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{u_i}' \in U_i \ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant 2$*,*
alors $\boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{u_i}'$*,* $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant 2$*.*
Notation : $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$*.*

Proposition 1.6 (Somme directe caractérisée par l'intersection)

$$\boxed{U_1 + U_2 \text{ est directe} \Leftrightarrow U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{0}\}.}$$

Définition 1.5 (E.V. défini comme somme directe de deux s.e.v.)
Soient V_1, V_2 *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* V*.*

$$\boxed{V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V = V_1 + V_2 \text{ et } V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{0}\}}$$

Exercice d'application 3 : *Matrices carrées réelles d'ordre 2*
Une matrice réelle A d'ordre 2 est un tableau carré de réels a_{ij} avec $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 2$, on note $A = (a_{ij})$, les indices i et j désignent respectivement le numéro de ligne et de colonne. Une matrice réelle A d'ordre 2 s'écrit donc sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

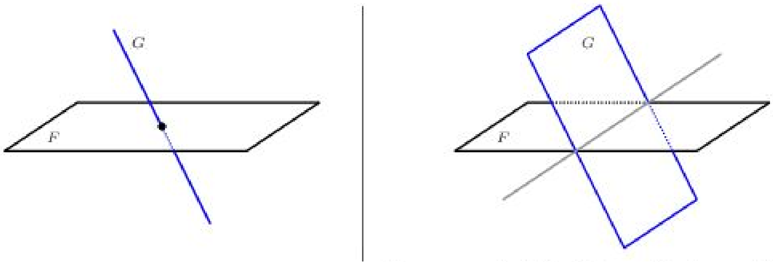

FIGURE 1.2 – À Gauche : La somme $F+G$ est directe car $F \cap G$ est l'espace nul. , À Droite : La somme $F+G$ n'est pas directe car $F \cap G$ n'est pas l'espace nul mais une droite.

C'est une matrice ayant 2 lignes et 2 colonnes. Pour $1 \leq i, j \leq 2$, l'élément a_{ij} se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, on écrit alors $(A)_{ij} = a_{ij}$.
L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 sera noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Égalité de deux matrices : Deux matrices carrées A et B sont égales si leurs éléments correspondants sont égaux : $(A)_{ij} = (B)_{ij}, \forall 1 \leq i, j \leq 2$.
Somme de deux matrices : Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices carrées. La somme de A et B est la matrice carrée, notée $A+B$, définie par :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Produit d'une matrice par un réel : Le produit d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ par un réel α est une matrice carrée d'ordre 2 notée $\alpha \cdot A$ définie par :

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

On pourra vérifier (c'est long mais pas difficile !) que $\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle matrice triangulaire supérieure(resp. inférieure) toute matrice A vérifiant $a_{21} = 0$(resp. $a_{12} = 0$). Les ensembles de ces matrices seront notées respectivement $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\big(\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ et $\big(\mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute matrice de $\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ peut être écrite sous la forme de somme de deux matrices l'une matrice triangulaire supérieure et l'autre matrice triangulaire inférieure. A-t-on l'unicité d'une telle somme ?
3. En déduire la nature de la somme $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}) + \mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})\square$.

✄ .... ✄

✎ Note **4** : ✍

✄ .... ✄

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 1.6 (S.E.V engendré par une famille de vecteurs)
Soit $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs dans V.
*Le **sous-espace de V engendré** par la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est le sous-espace vectoriel :*

$$\boxed{Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \boldsymbol{v_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \,, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n\}\,.}$$

*où la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \boldsymbol{v_i}$ est appelée une **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$. Les scalaires α_i qui appartiennent à $\mathbb{K}$ sont appelés les **coefficients** de cette combinaison linéaire(abrégé par C.L.).*
*Soit U un sous-espace vectoriel de V. Si $U = Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\})$, alors $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est dite une **famille génératrice** pour U ou bien U est **engendré** par la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$.*

Définition 1.7
Soit $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs dans V.
la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est une famille <u>génératrice</u> d'un s.e.v U de V si

$$\boxed{\forall u \in U, \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n | u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \boldsymbol{v_i}}$$

Notation 1.1 *Par commodité, on notera* $Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\})$ *ou simplement* $Vect(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$ *le sous-espace vectoriel engendré par la famille* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$.

Remarques et commentaires 1.2

1. $\forall \boldsymbol{u} \in V, Vect(\boldsymbol{u}) = \{\alpha \boldsymbol{u} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.

2. $\forall$ *famille* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$, $Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}) = Vect(\boldsymbol{v_1}) + \ldots + Vect(\boldsymbol{v_n})$.

✄ .... ✄

✎ Note **5** : ✍

✄ .... ✄

Définition 1.8 (Indépendance linéaire)
Une famille de vecteurs $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *est* ***libre* ou linéairement indépendante** *si :*

$$\boxed{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}) \Rightarrow \alpha_i = 0,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n.}$$

Si la famille ne vérifie pas cette condition, on dit qu'elle est ***linéairement dépendante*** *ou* ***liée***.

Proposition 1.7 (Unicité des coefficients des C.L. pour les familles libres)
Soit $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *une famille libre.*

$$\boxed{\text{Si } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \boldsymbol{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \boldsymbol{v_i}, \text{ alors } \alpha_i = \beta_i\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n.}$$

Définition 1.9
Soit une famille $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$, *on dira que* $\mathcal{F}'$ *est une sous-famille de* $\mathcal{F}$*(resp. sur-famille) si* $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$*(resp.* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$*).*

Proposition 1.8 (Propriétés élémentaires)

1. $(\boldsymbol{v})$ *linéairement indépendante* $\Leftrightarrow \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

2. $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ *linéairement indépendante* $\Leftrightarrow \nexists \alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{w}$ *et* $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{w}$.

3. *Si* $\boldsymbol{w} \in Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\})$, *alors la famille* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{w}\}$ *est linéairement dépendante.*

4. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

5. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

✄ .... ✄

✎ Note **6** : ✍

✄ .... ✄

Lemme 1.1 (Lemme du vecteur superflu) *Soit* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *une famille linéairement dépendante de vecteurs de* V, *où* $\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{0}$.
Alors $\exists j \geqslant 2$ *tel que :*

$$\boldsymbol{v_j} \in Vect(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$$

et

$$Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}) = Vect(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}).$$

✄ .... ✄

✎ Note **7** : ✍

✄ .... ✄

Définition 1.10 (Espace vectoriel de dimension finie)
Si $\exists \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *telle que* $V = Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\})$, *alors* V *est* ***de dimension finie***.
Sinon, V *est de dimension infinie.*

Proposition 1.9
Tout sous-espace U *d'un espace vectoriel* V *de dimension finie est de dimension finie.*

Définition 1.11 (Base=libre + génératrice)
Une famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *est une* ***base*** *de* V *si et seulement si :*

$$\boxed{\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\} \text{ est libre dans } V \text{ et génératrice de } V \ (Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}) = V).}$$

✄ .... ✄

✎ Note **8** : ✍

✄ .... ✄

Proposition 1.10 (Caractérisation d'une base)
$\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ est une base de V si et seulement si :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists!\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } \boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v_n}.}$$

Théorème 1.1 (*Théorème du ballon*)

- *"Gonfler" : Soit $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs libre de V. Alors $\exists\ \boldsymbol{w_1},\ldots,\boldsymbol{w_r} \in V$ tels que $(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n},\boldsymbol{w_1},\ldots,\boldsymbol{w_r})$ soit une base de V.(propriété connue sous le nom "théorème de la base incomplète")*
- *"Dégonfler" : Soit $(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_s})$ une famille génératrice pour V.*
  Alors $\exists$ une sous-famille $(\boldsymbol{v_{i_1}},\ldots,\boldsymbol{v_{i_n}})$, avec $n \leqslant s$, qui est une base de V.

✄ .... ✄

✎ Note **9** : ✍

✄ .... ✄

Théorème 1.2 (*Existence de bases*)

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
Alors $\exists$ $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ qui est une base de V.

✄ .... ✄

✎ Note **10** : ✍

✄ .... ✄

Théorème 1.3 (*Existence de compléments*)

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie. Soit $U \subset V$ un sous-espace.
Alors $\exists W$, sous-espace de V, tel que $U \oplus W = V$.

Théorème 1.4

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
Alors toute base de V est de même longueur.

Définition 1.12 (Dimension)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
*La **dimension** (sur $\mathbb{K}$) de V, notée $dimV$ (ou $dim_{\mathbb{K}}V$), est la longueur d'une base de V.*

✄ .... ✄

✎ Note **11** : ✍

✄ .... ✄

Proposition 1.11 (Égalité de deux s.e.v d'un même espace vectoriel)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie. Soit $U_1, U_2 \subset V$ deux sous-espace vectoriels. Alors

$$\boxed{\big(U_1 \subset U_2 \quad et \quad dimU_1 = dimU_2\big) \Leftrightarrow U_1 = U_2.}$$

Théorème 1.5 (*Théorème de la borne*)

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie ($dimV = n$).
Si $(\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_m})$ est une famille libre de V, alors $m \leqslant n$.
Si $(\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_m})$ est une famille génératrice de vecteurs de V, alors $m \geqslant n$.

Proposition 1.12 (Proposition "deux en un" !)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel tel que $dimV = n$. Soit $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs dans V(donc de cardinal égal à la dimension de l'espace). Alors :

$\bullet$ *si* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *est génératrice de* V *alors* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *est une base de* V.
$\bullet$ *si* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *est libre dans* V *alors* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *est une base de* V.

Remarque 1.1 *La proposition ci-dessus est intéressante car si une famille* $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ *de cardinal* n *la dimension de l'e.v.* V*, alors elle sera une base de* V *si et seulement si elle est génératrice de* V ***ou*** *libre dans* V.

Proposition 1.13 (Interaction entre dimension et sommes de sous-espaces)
Soit V *un* $\mathbb{K}$ *- espace vectoriel de dimension finie.*
Soient $U, W \subset V$ *des sous-espaces. Alors :*

$$\boxed{dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).}$$

Corollaire 1.1 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a*

$\bullet$ *La somme* $U+W$ *est directe* $\Leftrightarrow dim(U+W) = dimU + dimW$.
$\bullet$ $V = U \oplus W \Leftrightarrow V = U+W, U \cap W = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow U \cap W = \{\mathbf{0}\}, dimU + dimW = dimV$
$\Leftrightarrow V = U+W, dimU + dimW = dimV$.

Remarque 1.2 (Remarque générale) *La plupart des propriétés obtenues pour deux s.e.v peuvent être généralisées pour* n $(n > 2)$ *s.e.v, mais par souci de simplicité on a considéré dans ce cours seulement le cas* $n = 2$.

Proposition 1.14 (Généralisation de la somme directe pour plusieurs s.e.v)
Soient $U_1, \ldots, U_n$ *des sous-espaces d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* V *de dimension finie.*

$$\textit{Alors, si } \left\{ \begin{array}{l} V = U_1 + \ldots + U_n \text{ et} \\ dimV = dimU_1 + \ldots . + dimU_n \end{array} \right. , \textit{ alors } V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n.$$

1.3 Méthodologie

1.3.1 Comment faire ?

1.3.1.1 Comment montrer que F est $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

En montrant l'une des propositions suivantes :

- F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel connu E, soit
  - $\mathbf{0} \in F$;
  - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{y} \in F \implies \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in F$;
- F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ de vecteurs, i.e. F est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathbf{x}_k$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

1.3.1.2 Comment montrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels F et G ?

En utilisant l'une des propositions suivantes :

- la double inclusion : $F \subset G$ **et** $G \subset F$;
- **une** inclusion suffit si on possède un renseignement sur la dimension :

$$\dim(F) = \dim(G) \text{ et } F \subset G \implies F = G$$

1.3.1.3 Comment montrer que la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base de E ?

En utilisant l'une des propositions suivantes :

- la définition : la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une famille libre **et** génératrice de E ;
- **une** seule propriété suffit si on possède un renseignement sur la dimension : $\left.\begin{array}{l}\dim(E) = p \\ \text{la famille } (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p) \text{ est libre}\end{array}\right\}$
  $\implies$ la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base ;
  $\left.\begin{array}{l}\dim(E) = p \\ \text{la famille } (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p) \text{ est génératrice}\end{array}\right\}$
  $\implies$ la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base.

1.3.1.4 Comment démontrer que $E = F \oplus G$?

En utilisant l'une des propriétés suivantes :

— la définition :

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \exists!(\mathbf{y},\mathbf{z}) \in F \times G,\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

— la caractérisation : $E = F + G$ **et** $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$;

— **une** seule propriété suffit si on possède un renseignement sur la dimension :

$$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\\ E = F + G\end{array}\right\} \Longrightarrow E = F \oplus G;$$

$$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\\ F \cap G = \{\mathbf{0}\}\end{array}\right\} \Longrightarrow E = F \oplus G;$$

1.3.2 Exercices

Exercice 1 :

On note $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.

Correction

1. — On commence par constater que $(0,0,0) \in F$.
— Soient $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$ deux éléments de F. On a donc $x+y+z = 0$ et $x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z') = u+u'$ appartient à F.
— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors la relation $x+y+z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = 0$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda u$ appartient à F.

Des propriétés suivantes, on peut déduire que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer
3.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}\\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y-z\}\\ & = & \{(-y-z,y,z),\ \text{avec } y,z \in \mathbb{R}\}\\ & = & \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1),\ \text{avec } y,z \in \mathbb{R}\}\\ & = & \operatorname{Vect}\big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)\end{array}$$

La famille $B = \big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)$ est une famille naturellement génératrice de F et constitue une famille libre (coordonnées non proportionnelles) donc constitue une base. La dimension de F est donc égale à son cardinal 2.

Exercice 2 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$.

Correction La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire (le vérifier !). Donc $P + I = E$. On conclut donc que : $E = P \oplus I$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les sous espaces : $\begin{cases} P = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z) \text{ tq } x+y+z = 0\} \\ D = \operatorname{vect}(\overrightarrow{U} = (1,1,2)). \end{cases}$
1. Déterminer $\dim P$ et en donner une base. Préciser la dimension de D.
2. Démontrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

Correction

1. P est un plan de dimension 2(voir exer. 1), D est une droite de dimension 1.
2. Il suffit de vérifier que $P \cap D = \{0\}$, pour cela il suffit de remarquer que $\overrightarrow{U} \notin P$