# Feuille d'Exercices n° 2

## PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS

**Exercice 2.1 :** *Foire aux événements*

Soit $A, B, C$ trois événements, associés à une expérience aléatoire quelconque. Exprimer les événements suivant à l'aide des opérations habituelles sur les ensembles :

**1)** Au moins un des événements $A, B, C$ est réalisé.
**2)** Un et un seul des événements $A, B, C$ est réalisé.
**3)** Au plus un des événements $A, B, C$ est réalisé.
**4)** Au moins deux événements parmi $A, B, C$ sont réalisés.
**5)** Vérifier que si $A, B, C$ sont trois événements quelconques , on a :
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

**Exercice 2.2 :** *Autre condition d'indépendance*

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements $A$ et $B$ soient indépendants est que : $P(A \cap B)P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap B)$. On rappelle que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

**Exercice 2.3 :** *Jeu de cartes*

On tire 8 cartes parmi 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 cœur et 1 roi ?

| | | as | 7 | 8 | 9 | 10 | valet | dame | roi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| coeur | ♥ | | | | | | | | |
| carreau | ♦ | | | | | | | | |
| trèfle | ♣ | | | | | | | | |
| pique | ♠ | | | | | | | | |

**Exercice 2.4 :** *Trois dés*

On lance 3 dés équilibrés discernables, et on considère les événements :
$A =$ [ on obtient au moins un six ] , $B =$ [ deux dés au moins donnent un résultat identique ].

**1)** Calculer les probabilités suivantes : $\mathrm{P}(A)$ , $\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
**2)** En déduire les probabilités suivantes : $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$ , $\mathrm{P}(A \cap B)$ et $\mathrm{P}(A \cup B)$.

**Exercice 2.5 :** *Trois modèles pour les tirages*

Une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9.

**1)** On tire, dans un premier cas, deux boules simultanément.
  **a)** Préciser l'univers $\Omega$ associé à l'expérience, et son cardinal.
  **b)** Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?
**2)** On tire, cette fois-ci, une boule, puis une seconde boule (sans remise de la première).
  **a)** Préciser l'univers $\Omega$ associé à l'expérience, et son cardinal.
  **b)** Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?
**3)** Dans ce troisième cas, on tire une boule, on la remet, puis on retire une boule.
  **a)** Indiquer l'univers $\Omega$ associé à cette expérience aléatoire.

**b)** Quelle est la probabilité qu'elles aient la même parité ?

### Exercice 2.6 : *"Paire de 6"*

Combien de fois doit-on lancer deux dés pour que la probabilité d'obtenir au moins une paire de six soit supérieure à $k \in ]0,1[$ ?

### Exercice 2.7 : *Vaccin et malades*

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades, un vacciné pour 3 non vaccinés(le quart des malades sont vaccinés). On sait de plus qu'il y avait un malade sur 10 parmi les vaccinés.
On notera $V$ l'événement « être vacciné » et $M$ l'événement « être malade ».
**1)** Donner en justifiant : $P(V)$, $P(\overline{V})$, $P(V|M)$, $P(\overline{V}|M)$ et $P(M|V)$.
**2)** Montrer que $P(M) = \dfrac{2}{15}$ et en déduire $P(M|\overline{V})$.
**3)** Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ? Le vaccin est-il efficace ? (comparer $P(M|V)$ et $P(M|\overline{V})$ pour conclure)

### Exercice 2.8 : *Dépistage*

Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le consultant est en bonne santé, et ceci se produit dans 2% des cas. Sachant qu'en moyenne un consultant sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité pour qu'un client soit atteint sachant que son test a été positif.

### Exercice 2.9 : *Complémentaires équiprobables*

On lance un dé équilibré $n$ fois ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$). Montrer que les événements [la somme des $n$ points marqués est paire] et [la somme des $n$ points marqués est impaire] sont équiprobables.

## Exercices supplémentaires 2.1

**1)** Donner deux exemples pour montrer que les notions d'indépendance et d'incompatibilité sont différentes.
**2)** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité.
Établir la formule du crible de Poincaré : pour tout entier $n \geq 2$ et tous $A_1, A_2, ....A_n \in \mathcal{T}$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < .... < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} .... \cap A_{i_k})$$

**3)** Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire $n$ boules (tirage sans remise) de cette urne et on note $X$ le plus petit des numéros tirés.
**a)** On suppose que $n = 3$. Calculer et indiquer sous forme de fractions irréductibles, les probabilités :
**i)** $P[X = 8]$ ,
**ii)** $P[X \geq 8]$.
**b)** On revient au cas général où $n \leq 20$. Pour tout entier $k \geq 1$, calculer (les calculs de i) et ii) devront être directs et indépendants) les probabilités :
**i)** $P[X = k]$,
**ii)** $P[X \geq k]$.
**iii)** Retrouver $P[X = k]$ en utilisant les $P[X \geq p]$ grâce à une formule d'analyse combinatoire.