Chapitre 3 : Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

En régime variable au cours du temps, les phénomènes électriques et magnétiques sont couplés. Ils sont décrits en un point M de l'espace et à l'instant t par les deux vecteurs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ qui constituent le champ électromagnétique.

Des charges électriques de densité volumique $\rho(M,t)$ et des courants de densité $\vec{j}(M,t)$ circulent dans le milieu qui est le vide, en pratique c'est l'air, sont à l'origine du champ électromagnétique.

I - Equations de MAXWELL

1- Conservation de la charge

- En régime stationnaire les densités de charge ρ et de courant $\vec{j}$ sont constantes au cours du temps. Le vecteur densité de courant est à flux conservatif : $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.
- En régime variable (dépendant du temps) $\rho = \rho(M,t)$ et $\vec{j} = \vec{j}(M,t)$ en tout point du volume donné. Le vecteur $\vec{j}$ n'est pas à flux conservatif : $\operatorname{div}\vec{j} \neq 0$. On a, en chaque point du milieu :

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

(Loi de conservation de la charge en régime variable)

2- Courant de déplacement

En régime lentement variable le théorème d'Ampère s'exprime par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} \qquad (2)$$

Or $\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = 0$ donc $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

Il y a donc, en régime variable, incompatibilité entre l'équation de conservation de la charge et l'expression du théorème d'Ampère. Il faut donc abandonner l'un de ces résultats. Or la conservation de la charge est une des lois fondamentales de la physique toujours vérifiée.

MAXWELL a proposé de modifier le théorème d'Ampère. Ainsi en régime variable on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \qquad (3)$$

où $\vec{D}$ est le vecteur déplacement électrique lié à la densité de charge mobile par :

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad (4)$$

et au champ électrique dans le vide, par :

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} \qquad (5)$$

soit encore :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \qquad (6)$$

MAXWELL ajoute donc à la densité de courant de conduction $\vec{j}$, correspondant à un mouvement réel de charges, un courant fictif, appelé courant de déplacement, de densité $\vec{j}_D$ donnée par :

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (7)$$

Le vecteur densité de courant total est :

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \vec{j}_D \qquad (8)$$

On vérifie bien qu'il est à flux conservatif : div $\vec{j}_{tot} = 0$

Remarque :
Dans le cas des régimes variables il y a intervention du courant de conduction et du courant de déplacement.

- Le courant de conduction intervient dès qu'il y a déplacement physique de charges.
- Le courant de déplacement est un courant fictif qui intervient uniquement en régime variable.

3- Equations de MAXWELL

Les équations de MAXWELL ou équations fondamentales de l'électromagnétisme sont au nombre de quatre. Dans le vide caractérisé par $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$ ces équations s'écrivent :

1- $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Relation de MAXWELL - GAUSS

2- $\text{div}\,\vec{B} = 0$ Conservation du flux magnétique

3- $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Relation de MAXWELL – FARADAY

4- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ Relation de MAXWELL – AMPERE

ε_0 et μ_0 sont liées par la relation $\mu_0\,\varepsilon_0\,c^2 = 1$, où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide $c = 3.10^8$ m / s.

II – Equations de propagation

On se place dans une région où il n'y a ni charges électriques, ni courants électriques : $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$.
Les équations de MAXWELL deviennent :

1'- $\text{div}\,\vec{E} = 0$
2' - $\text{div}\,\vec{B} = 0$
3' - $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4' - $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

1- Equations de propagation des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$

a) Champ électrique

Rappel : Soit $\vec{P}$ un champ de vecteurs on a : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{P}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{P}) - \Delta\,\vec{P}$

Pour le champ $\vec{E}$ **:**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\,\vec{E}$$

Le premier membre donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\,(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Le second membre se réduit à : $-\Delta\,\vec{E}$

D'où l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ **:**

$$\left[\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0\right] \qquad (9)$$

b) Champ d'induction magnétique

De la même façon on considère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

Le premier membre donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

D'où l'équation de propagation du champ $\vec{B}$:

$$\left[\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0\right] \qquad (10)$$

2- Equations de propagation des potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire V

a) Définition des potentiels

On sait que le champ $\vec{B}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$: $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

en plus, en régime variable le champ électrique est : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Le choix de la jauge ($\vec{A}, V$) n'est pas unique pour une distribution donnée des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Nous avons vu au chapitre 1 que le potentiel vecteur $\vec{A}$ n'est pas défini de façon unique. En effet, on peut, sans changer $\vec{B}$, remplacer $\vec{A}$ par $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}\,f}$ où f est une fonction de scalaire quelconque.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \nabla \wedge \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$$

Pour que le champ $\vec{E}$ reste inchangé il faudra associer à $\vec{A}'$ un potentiel V' tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}\,V' = \overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}' - \vec{A}) = \overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f)$$

soit :

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (11)$$

b) **Transformation de Jauge – Invariance de Jauge**

La transformation des potentiels qui, au couple ($\vec{A}, V$) associe ($\vec{A}', V'$) tels que :

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \\ V' = V - \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \qquad (12)$$

est la transformation de jauge donnant la même distribution des champs.

Pour que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se conservent il faut se fixer une condition pour la jauge ($\vec{A}, V$). Un choix plus commode est celui où la jauge satisfait à :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0 \\ \vec{A}(\infty) = 0 \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

C'est la jauge de LORENTZ.

c) Equation de propagation du potentiel vecteur

On part de l'équation de Maxwell N° 4', on y remplace :

$\vec{B}$ par $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et $\vec{E}$ par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ il vient :

$$\left[\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0\right] \qquad (14)$$

(équation de propagation de $\vec{A}$)

d) Equation de propagation du potentiel scalaire V

On part de l'équation de Maxwell N° 1', on y remplace

$\vec{E}$ par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ soit :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A}) = 0$$

on remplace $\vec{\nabla}.\vec{A}$ à partir de la jauge de LORENTZ par $\vec{\nabla}.\vec{A} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}$, d'où :

$$\left[\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0\right] \qquad (15)$$

(équation de propagation du potentiel scalaire V)

En résumé : Les composantes $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, A_x, A_y, A_z$ et V satisfont à la même équation différentielle :

$$\left[\Delta \Psi(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(M,t)}{\partial t^2} = 0\right] \qquad (16)$$

l'opérateur $\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'appelle d'alembertien ou opérateur d'Alembert noté par :

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

L'équation de propagation (appelée aussi équation d'onde ou équation d'Alembert) s'écrit :

$$\Box\, \Psi(M,t) = 0 \qquad (17)$$

L'ensemble des composantes de $\vec{E}, \vec{B}$, $\vec{A}$ et du potentiel V constituent une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace et dans le temps.