1. Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ qu'on abrège en $\mathbb{K}$-**ev**.

1.1 Norme et distance

1.1.1 Norme et distance associé

Définition 1.1 On appelle norme sur E, toute application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$ (positive-homogénéité),
2. $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \implies x = 0_E,$ (non-dégénérescence),
3. $\forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y),$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E,N) est dit un espace vectoriel normé (ou en abrégé $\mathbb{K}$-**evn**).

Remarque. *On appelle espace vectoriel normé, tout espace vectoriel muni d'une norme.*

Notation. *Une norme sur E est souvent notée $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, ou encore $\|\cdot\|_E$.*

Exercice 1.1 *Soit E un* $\mathbb{K}$-**evn** *muni de la norme $\|\cdot\|$. Vérifier que*

$$\|0_E\| = 0 \quad \textit{et que} \quad \forall x \in E, \ \|x\| \geqslant 0.$$

Exemples 1- L'espace vectoriel $\mathbb{K}$ muni de la valeur absolue ou du module $|\cdot|$, est un $\mathbb{K}$-evn.

2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définis par :

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ , \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \ \text{ et } \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$$

sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ (dites normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$).

Remarque. *Les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des cas particuliers de la norme $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ où $p \in [1,+\infty[$, dite la norme de Hölder et définie par :*

$$\forall x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Exercice 1.2 *Soit X un ensemble non vide et $B(X,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées sur X. On considère l'application $\|\cdot\|_\infty$ définie sur $B(X,\mathbb{K})$ par :*

$$\forall f \in B(X,\mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Montrer que $(B(X,\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1.1 — Inégalité triangulaire renversée. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un ev normé, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x-y\|.$$

Preuve *Soient x et y deux éléments quelconque de E, alors on a :*

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\| \quad et \quad \|y\| = \|(y-x)+x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\|,$$

d'où $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$ et $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|$, et donc

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| = \max\Big(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\Big) \leqslant \|x-y\|.$$

■

Remarque. *On a également l'inégalité de sous-linéarité suivante, qu'on utilise pour majorer des combinaisons linéaires. Pour $(\alpha_k)_k$ scalaires de $\mathbb{K}$ et $(x_k)_k$ éléments d'un $\mathbb{K}$-evn, on a*

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k\Big\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|\,\|x_k\|.$$

Définition 1.2 — Distance associée à une norme. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un ev normé, on appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$, l'application $d : E\times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E\times E, \quad d(x,y) = \|x-y\|.$$

La relation $\|x\| = d(0,x)$ exprime la norme à l'aide de sa distance associée d.

Proposition 1.2 Soient $(E,\|\cdot\|)$ un evn et d la distance associée à $\|\cdot\|$, alors on a :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = d(y,x),$ (symétrie),
2. $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = 0 \implies x = y,$ (séparation),
3. $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$ (inégalité triangulaire),
4. $\forall (x,y) \in E^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(y,x).$ (positive homogénéité),

5. $\forall (x,y,z) \in E^3\,,\quad d(x+z,y+z) = d(x,y),\qquad$ (invariance par translation).

Preuve *À faire en exercice.* ■

Remarque. *Soit E un ensemble, on appelle distance sur E, toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions* 1), 2) *et* 3) *de la proposition précédente. On appelle espace métrique, tout ensemble E muni d'une distance d sur E.*

Exercice 1.3 *Soient E est $\mathbb{K}$-**ev** et $d : E^2 \to \mathbb{R}$ une application satisfaisant les cinq conditions de la proposition précédente. Montrer qu'il existe une norme unique $\|\cdot\|$ sur E telle que :*

$$\forall (x,y) \in E \times E\,,\quad d(x,y) = \|x-y\|.$$

Exercice 1.4 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-**evn** et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Montrer que :*

$$\forall (x,y,z) \in E^3\,,\quad |d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y).$$

1.1.2 Construction de normes

Proposition 1.3 — Norme induite. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, alors pour tout sous-ev F de E, l'application $F \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur F, dite norme induite sur F par la norme $\|\cdot\|$, notée $\|\cdot\|_F$ ou tout simplement $\|\cdot\|$.

Proposition 1.4 — Norme sur un produit. Soient $(E_k, N_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de $\mathbb{K}$-**evn**. Les application v_1, v_2 et v_∞, définies sur l'espace produit $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ par

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in E,$$

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^{n} N_k(x_k)\,,\quad v_2(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} N_k(x_k)^2}\,,\quad v_\infty(x) = \max_{1\leq k\leq n} N_k(x_k),$$

sont des normes sur E, dites normes produit usuelles sur l'espace produit E.

Preuve *Faisons la preuve pour la norme v_∞. L'axiome de la positive-homogénéité est immédiat, puisque, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x = (x_k)_k \in E = \prod_{k=1}^{n} E_k$, on a*

$$v_\infty(\lambda x) = \max_{1\leq k\leq n} N_k(\lambda x_k) = \max_{1\leq k\leq n} \lambda N_k(x_k) = \lambda \max_{1\leq k\leq n} N_k(x_k) = \lambda\, v_\infty(x).$$

Pour l'inégalité triangulaire, on remarque que pour tout $k = 1, \cdots, n$, on a

$$\forall x = (x_k)_k,\, y = (y_k)_k \in E = \prod_{k=1}^{n} E_k,\quad N_k(x_k + y_k) \leqslant N_k(x_k) + N_k(y_k) \leqslant v_\infty(x) + v_\infty(y),$$

et ces inégalités impliquent que

$$v_\infty(x+y) = \max_{1\leq k\leq n} N_k(x_k+y_k) \leqslant v_\infty(x) + v_\infty(y).$$

Pour l'axiome de non-dégénérescence, si $\nu_\infty(x) = 0$, *la relation* $N_k(x_k) \leqslant \nu_\infty(x)$ *implique* $N_k(x_k) = 0$ *et donc* $x_k = 0$. *Ceci étant vraie pour tout* $k \in \{1, \cdots, n\}$, *on en déduit que* $x = 0$. ∎

Exercice 1.5 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$-**ev**, $N_1, \cdots, N_p$ *des normes sur* E *et* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$. *Montrer que l'application* $N : E \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall x \in E, \quad N(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k N_k(x)$$

est une encore norme sur E.

Exercice 1.6 *Soient* $E = C([0,1];\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$. *Donner une CNS sur* $(f_1, \cdots, f_p) \in E^p$ *pour que l'application* $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad N(x_1, \cdots, x_p) = \int_0^1 \Big| \sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t) \Big| \, dt$$

soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Exercice 1.7 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$-**ev**, $\|\cdot\|_F$ *une norme sur* F *et* $f \in \mathscr{L}(E, F)$. *Trouver une CNS sur* f *pour que l'application* $N : E \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \|f(x)\|_F$ *soit une norme sur* E.

1.1.3 Comparaison de normes

Définition 1.3 On dit que deux norme N_1 et N_2 sur un $\mathbb{K}$-**ev** E, sont équivalentes, et on note $N_1 \sim N_2$, si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

Proposition 1.5 "$\sim$" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des normes sur E.

Preuve *À faire en exercice.* ∎

Exemple 1- Les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes, puisque :

$$\begin{cases} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant n \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|, \\[2ex] \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leqslant \sqrt{n} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|. \end{cases}$$

2- Les normes ν_1, ν_2 et ν_∞ de $E = \prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ sont équivalentes, puisque

$$\forall x \in E, \quad \nu_\infty(x) \leqslant \nu_2(x) \leqslant \nu_1(x) \leqslant n\, \nu_\infty(x).$$

R Si $E \neq \{0_E\}$, alors deux normes ν_1 et ν_2 sur E sont équivalente si et seulement si les deux termes $\dfrac{\nu_1(x)}{\nu_2(x)}$ et $\dfrac{\nu_2(x)}{\nu_1(x)}$ sont bornés lorsque x décrit $E \setminus \{0_E\}$. Par contraposition, s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E\setminus\{0_E\}$ telle que

$$\lim_{n+\infty}\frac{v_1(x_n)}{v_2(x_n)}=0 \text{ ou } \lim_{n+\infty}\frac{v_1(x_n)}{v_2(x_n)}=+\infty,$$

alors v_1 et v_2 ne sont pas équivalentes.

Exemple Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ deux normes sur $E=C([0,1],\mathbb{R})$ définies par

$$\forall f\in E,\quad \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,dt \quad\text{et}\quad \|f\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|f(t)|.$$

Pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $E\setminus\{0_E\}$ donnée par

$$f_n:\ x\mapsto\begin{cases} n(1-nx) & \text{si}\quad x\in\big[0,1/n\big],\\ 0 & \text{si}\quad x\in\big]1/n,1\big].\end{cases}$$

On a $\displaystyle\lim_{n+\infty}\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}=\lim_{n+\infty}2n=+\infty$ et donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.8 *On considère sur $E=C([a,b],\mathbb{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par*

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|\,dt\ ,\ \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2\,dt}\ \ \textit{et}\ \ \|f\|_\infty=\sup_{t\in[a;b]}|f(t)|.$$

1. *Montrer que pour tout $f\in E$, on a $\|f\|_1\leqslant(b-a)^{1/2}\|f\|_2\leqslant(b-a)\|f\|_\infty$.*
2. *Démontrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.*

Exercice 1.9 *Soit φ un élément de $E=C^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1\varphi(t)\,dt\neq0$. On considère les deux applications N, $N_\varphi:E\to\mathbb{R}$ définies par*

$$N(f)=|f(0)|+\int_0^1|f'(t)|\,dt\quad\textit{et}\quad N_\varphi(f)=\left|\int_0^1(f\varphi)(t)\,dt\right|+\int_0^1|f'(t)|\,dt.$$

Démontrer que N et N_φ sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

1.1.4 Boules, sphères, parties bornées d'un evn

Soient $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-**evn** et d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.4 Soient $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$, les parties de E suivantes :

$$B(a,r)=\{x\in E\ ,\ \ d(a,x)<r\},$$
$$B_f(a,r)=\{x\in E\ ,\ \ d(a,x)\leqslant r\},$$
$$S(a,r)=\{x\in E\ ,\ \ d(a,x)=r\}.$$

sont dites respectivement boule ouverte, boule fermé et sphère, de centre a et de rayon r.

Si en plus $E \neq \{0_E\}$, alors une boule ouverte (resp. boule fermé et sphère) de E n'a qu'un seul centre et un seul rayon, c'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{aligned} \forall a,\, b \in E,\, \forall r,\, s \in \mathbb{R}_+^*, \quad & B(a,r) = B(b,s) \implies a = b \text{ et } r = s,\\ & B_f(a,r) = B_f(b,s) \implies a = b \text{ et } r = s,\\ & S(a,r) = S(b,s) \implies a = b \text{ et } r = s. \end{aligned}$$

Remarque. *Dans le cas où (E,d) est un espace métrique, on définit de la même*

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in E,\ d(a,x) < r\},\\ B_f(a,r) &= \{x \in E,\ d(a,x) \leqslant r\},\\ S(a,r) &= \{x \in E,\ d(a,x) = r\}. \end{aligned}$$

Mais, on peut avoir $B(a,r) = B(b,s)$ avec $a \neq b$ ou $r \neq s$, comme le montre par l'exemple

$$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \ d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y,\\ 0 & si \quad x = y. \end{cases}$$

C'est une distance sur $\mathbb{N}$ pour laquelle on a

$$\forall a,\, b \in \mathbb{N},\ \forall r,\, s \in]1;+\infty[, \quad B(a,r) = B(b,s) = \mathbb{N}.$$

Exercice 1.10 *Représenter graphiquement les boules fermés de centre O et de rayon $r = 1$ pour les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$.*

Proposition 1.6 Soient $a,\, b \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $r,\, s \in \mathbb{R}_+^*$, alors on a :

1. $B_f(a,r) + B_f(b,s) = B_f(a+b, r+s)$ et $\lambda B_f(a,r) = B_f(\lambda a, |\lambda| r)$,
2. $B_f(a,r) \cap B_f(b,s) \neq \emptyset \iff \|a-b\| \leqslant r+s$,
3. Si en plus $E \neq \{0_E\}$, alors : $B_f(a,r) \subset B_f(b,s) \iff \|a-b\| \leqslant s-r$.

Preuve *À faire en exercice.* ∎

Exercice 1.11 *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{K}$-**ev** E et $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que*

$$B_{f_{N_1}}(a,r) = B_{f_{N_2}}(a,r).$$

Montrer que $N_1 = N_2$.

Définition 1.5 — Partie bornée. Une partie A de E est dite bornée si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x,y) \in A^2,\ \ d(x,y) \leqslant M.$$

Proposition 1.7 Une partie A de E est bornée si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A,\ \ \|x\| \leqslant C.$$

Preuve *Supposons que A est une partie bornée, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in A^2,\ d(x,y) \leqslant M.$$

Si $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ et pour tout $x \in A$, on a :

$$\|x\| = \|(x-a)+a\| \leqslant \|x-a\| + \|a\| \leqslant C = M + \|a\|.$$

Inversement, si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, on a $\|x\| \leqslant C$, alors

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \ d(x,y) = \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant M = 2C.$$

■

Remarque. *Une partie est donc bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule fermé de centre 0, et par inégalité triangulaire, si et seulement si elle continue dans une boule fermé $B_f(a,r)$.*

Exercice 1.12 *Soient A et C deux parties de E. Montrer que :*

1. *A est bornée si et seulement s'il existe une boule B telle que $A \subset B$.*
2. *Si $A \subset C$ et C est bornée, alors A est bornée.*
3. *Une réunion finie de parties bornées est bornée.*
4. *Toute partie finie de E est une partie bornée.*

1.2 Topologie d'un espaces vectoriel normé

1.2.1 Voisinages, ouverts, fermés

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un ev normé sur $\mathbb{K}$ et d la distance associée à $\|\cdot\|$.

Définition 1.6 — Voisinage. On dit qu'une partie V de E, est un voisinage de $a \in E$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$. On note $\mathscr{V}_E(a)$ (ou simplement $\mathscr{V}(a)$) l'ensemble des voisinages de a dans E.

Proposition 1.8 Soit $a \in E$, alors on a :

1. $\forall V \in \mathscr{V}(a),\quad a \in V.$
2. $\forall V \in \mathscr{V}(a), \forall W \in \mathscr{P}(E),\quad V \subset W \implies W \in \mathscr{V}(a).$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall V_1, \cdots, V_n \in \mathscr{V}(a),\quad \bigcap_{k=1}^{n} V_k \in \mathscr{V}(a).$

Preuve *Les deux premieres assertions sont immédiat. Pour la dernière, soit $V_1, \cdots, V_n$ des voisinages de $a \in E$, alors il existe $r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a $B(a, r_k) \subset V_k$. En posant $r = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} r_k$, on obtient*

$$B(a,r) = \bigcap_{k=1}^{n} B(a, r_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k.$$

■

Remarque. *Pour toute famille quelconque $(V_i)_{i\in I}$ de voisinage de a, on a*

$$\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathscr{V}(a).$$

Par contre, l'intersection d'une famille infinie de voisinage de a, peut ne pas être un voisinage de a, comme le montre la famille suivante $\left(\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9 Soient $(a,b)\in E^2$ tel que $a\neq b$, alors il existe $V\in\mathscr{V}(a)$ et $W\in\mathscr{V}(b)$ tels que

$$V\cap W=\emptyset.$$

On dit que tout espace vectoriel normé est séparé.

Preuve *Il suffit de prendre $V=B(a,r)$ et $W=B(b,r)$ où le rayon r vérifie $r\leqslant d(a,b)/2$.* ■

Définition 1.7 — Voisinage relatif. Soient A une partie de E et $a\in A$. On dit qu'une partie V de A est un voisinage de a dans A s'il existe $V_1\in\mathscr{V}_E(a)$ tel que $V=V_1\cap A$. L'ensemble des voisinage de a dans A se note $\mathscr{V}_A(a)$.

Remarque.

$$V\in\mathscr{V}_A(a)\iff \exists r>0,\ \ B(a,r)\cap A\subset V.$$

Définition 1.8 — Ouvert. On dit qu'une partie Ω de E est ouverte (dans E) si c'est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire

$$\forall x\in\Omega,\ \ \Omega\in\mathscr{V}_E(x).$$

On appelle ouvert de E, toute partie ouverte dans E.

Remarque. *1. Toute boule ouverte de E est un ouvert de E. En effet, on a :*

$$\forall(a,r)\in E\times\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in B(a,r),\quad B(x,r-d(a,x))\subset B(a,r).$$

2. Pour tout evn $E\neq\{0_E\}$, tout singleton de E n'est pas un ouvert de E.

Exemple Tout intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x\in]a,b[$, il existe $r=\min(x-a,b-x)$ tel que

$$B(x,r)=]x-r,x+r[\subset]a,b[.$$

Proposition 1.10 La familles des ouverts de E vérifie les assertions suivantes :

1. Les parties $\emptyset$ et E sont des ouvertes de E.
2. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts de E, est un ouvert de E.
3. L'intersection d'une famille finie d'ouverts de E, est un ouvert de E.

Preuve *1. Les parties $\emptyset$ et E sont clairement des ouverts de E.*

2. Soit $x\in\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ où $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts de E, alors il existe $i_0\in I$ tel que $x\in\Omega_{i_0}$. Puisque Ω_{i_0} est un ouvert de E, alors $\Omega_{i_0}\in\mathscr{V}_E(x)$ et comme $\Omega_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$, on obtient

$\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{V}_E(x)$. *Ce qui montre que* $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ *est un ouvert de* E.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$, *alors pour tout* $i \in \{1,\cdots,n\}$, $\Omega_i \in \mathscr{V}_E(x)$ *et donc* $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i \in \mathscr{V}_E(x)$. *Ce qui prouve que* $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$ *est un ouvert de* E. ■

R Soient X est un ensemble et $\mathscr{O}$ un ensemble de parties de X tels que :

1. $\emptyset \in \mathscr{O}$ et $E \in \mathscr{O}$,
2. Pour toute famille quelconque $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{O}$: $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{O}$,
3. Pour toute famille finie $(\Omega_i)_{i\in F}$ d'éléments de $\mathscr{O}$: $\bigcap_{i\in F} \Omega_i \in \mathscr{O}$.

Le couple $(X,\mathscr{O})$ est dit un espace topologique.

Proposition 1.11 Soient $(E_k,N_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de $\mathbb{K}$-**ev** normés et $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ l'espace produit muni de la norme v_∞. Si pour tout $k \in \{1,\cdots,n\}$, Ω_k est un ouvert de E_k, alors

$$\prod_{k=1}^{n} \Omega_k \text{ est ouvert de } E.$$

Preuve *Soit* $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{k=1}^{n} \Omega_k$, *alors pour tout* $1 \leqslant k \leqslant n$, *on a* $x_k \in \Omega_k$ *et* Ω_k *un ouvert de* E_k, *donc il existe des réels* $r_k > 0$ *tel que* $B_{E_k}(x_k,r_k) \subset \Omega_k$. *En posant* $r = \min_{1\leqslant k\leqslant n} r_k$, *on obtient*

$$B_E(x,r) = \prod_{k=1}^{n} B_{E_k}(x_k,r) \subset \prod_{k=1}^{n} B_{E_k}(x_k,r_k) \subset \prod_{k=1}^{n} \Omega_k.$$

Ainsi $\prod_{k=1}^{n} \Omega_k$ *est voisinage de chacun de ses points, et donc c'est un ouvert de* E.

■

Remarque. *Un ouvert de* $\prod_{k=1}^{n} E_k$ *n'est pas nécessairement le produit cartésien d'ouverts de* E_k. *Par exemple,* $\Omega =]-1,0[^2 \bigcup]0,1[^2$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et il n'y a pas des ouverts* Ω_1, Ω_2 *de* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Définition 1.9 — Fermé. Une partie F de E est dite fermée (dans E) si et seulement si son complémentaire $\complement_E F$ est une partie ouverte de E. On dit aussi que F est un fermé (de E).

Remarque. *Il ne faut pas croire qu'une partie qui n'est pas ouverte est fermé. En effet, il existe dans tout evn non réduit à* $\{0_E\}$, *des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées, c'est le cas par exemple de* $[0,1[$ *dans* $\mathbb{R}$.

Exemple Toute boule fermée de E est un fermé de E. En effet, on a :

$$\forall (a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \complement_E B_f(a,r),\quad B(x,d(a,x)-r) \subset \complement_E B_f(a,r).$$

Proposition 1.12 La familles des fermés de E vérifie les assertions suivantes :

1. Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
2. L'intersection d'une famille quelconque de fermés de E, est un fermé de E.
3. La réunion d'une famille finie de fermés de E, est un fermé de E.

Preuve *Il suffit de passer aux complémentaires dans la proposition 1.10. Par exemple, on a*

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad F_i \text{ est un fermé} \Longleftrightarrow \complement_E F_i \text{ est un ouvert.}$$

D'après la proposition 1.10, $\bigcap_{i=1}^{n} \complement_E F_i$ *est ouvert et donc* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \complement_E\big(\bigcap_{i=1}^{n} \complement_E F_i\big)$ *est un fermé.*

■

Exemples 1. Toute sphère est un fermé, puisque $S(a,r) = B_f(a,r) \cap \complement_E B(a,r)$.

2. Toute singleton est un fermé, puisque $\{x\} = \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+^*} B_f(a,r)$.

3. Toute partie finie est un fermé, car réunion d'un nombre finie de singletons.

Remarques. *1. La réunion d'une famille infinie de fermés de E peut ne pas être un fermé de E. Par exemple, pour tout* $x \in]0,1[$*, le singleton* $\{x\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$*, mais*

$$]0,1[= \bigcup_{x\in]0,1[} \{x\} \text{ n'est pas un fermé de } \mathbb{R}.$$

2. Une partie de E peut être à la fois ouverte et fermée dans E, par exemple $\emptyset$ *et E.*

Proposition 1.13 Soient $(E_k,N_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de $\mathbb{K}$-**ev** normés et $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ l'espace produit muni de la norme ν_∞. Si pour tout $k \in \{1,\cdots,n\}$, F_k est un fermé de E_k, alors

$$\prod_{k=1}^{n} F_k \text{ est un fermé de } E.$$

Preuve *D'abord, on a* $\complement_E\big(\prod_{k=1}^{n} F_k\big) = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ *où* $\Omega_k = E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times \complement_E F_k \times E_{k+1} \times \cdots \times E_n$.
Puisque chaque Ω_k *est un ouvert de E, la proposition 1.11 implique que* $\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ *est un ouvert de E.*
Finalement, $\prod_{k=1}^{n} F_k$ *est un fermé de E.*

■

Remarque. *Il peut exister des fermés de E qui ne soient pas de la forme* $\prod_{k=1}^{n} F_k$*. Par exemple,* $F = \big\{(-1;-1),(1;1)\big\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$*, mais il n'existe pas de fermés* F_1 *et* F_2 *de* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$F = F_1 \times F_2.$$

Définition 1.10 — Ouvert relatif. Soit A une partie de E, on dit qu'une partie U de A, est un ouvert de A (ou ouvert relatif de A) s'il existe un ouvert Ω de E tel que

$$U = \Omega \cap A.$$

Définition 1.11 — Fermé relatif. Soit A une partie de E, on dit qu'une partie G de A, est un fermé de A (ou fermé relatif de A) s'il existe un fermé F de E tel que

$$G = F \cap A.$$

Remarque. *Un ouvert (resp. fermé) de A n'est pas nécessairement un ouvert (resp. fermé) de E. Par exemple,* $[0,1[=]-1,1[\cap[0,1]$ *est un ouvert de* $[0,1]$*, mais* $[0,1[$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$.

1.2.2 Intérieur, adhérence, frontière

Dans la suite, on désigne par $\mathscr{P}(E)$, l'ensembe des parties de E.

Définition 1.12 — Intérieur. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, on appelle intérieur de A, et on note $\mathring{A}$, la réunion des parties ouvertes de E incluses dans A :

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{\Omega \text{ ouvert de } E \\ \Omega \subset A}} \Omega \quad (\text{les éléments de } \mathring{A} \text{ sont dits points intérieurs à } A).$$

Définition 1.13 — Adhérence. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, on appelle adhérance de A, et on note $\overline{A}$, l'intersection des parties fermés de E contenants A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ F \supset A}} F \quad (\text{les éléments de } \overline{A} \text{ sont dits points adhérents à } A).$$

Définition 1.14 — Frontière. On appelle frontière de $A \in \mathscr{P}(E)$, notée $Fr(A)$, la partie

$$Fr(A) = \complement_{\overline{A}}(\mathring{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement_E(A)} \;\text{ de }\; E.$$

Les éléments de $Fr(A)$ sont dits points-frontières de A.

Remarque. *Au sens de l'inclusion,* $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert de E inclus dans A et* $\overline{A}$ *est le petit fermé de E contenant A, et on a*

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Proposition 1.14 Pour tout partie A de E, on a :

1. $\complement_E(\mathring{A}) = \overline{\complement_E(A)}$ et $\complement_E(\overline{A}) = \widehat{\complement_E(A)}^{\circ}$.
2. A est ouverte si et seulement si $A = \mathring{A}$.
3. A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.
4. $Fr(A)$ est un fermée de E.

Preuve *1. On sait que* $\complement_E(\mathring{A}) = \complement_E\big(\bigcup\limits_{\substack{\Omega \text{ ouvert} \\ \Omega\subset A}} \Omega\big) = \bigcap\limits_{\substack{\Omega \text{ ouvert} \\ \Omega\subset A}} \complement_E \Omega = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ fermé} \\ F\supset \complement_E(A)}} F = \overline{\complement_E A}$. *Appliquons ce résultat à* $\complement_E A$ *au lieu de A, on obtient*

$$\complement_E \overline{A} = \complement_E\Big(\overline{\complement_E\big(\complement_E A\big)}\Big) = \complement_E\Big(\complement_E\big(\widehat{\complement_E A}^{\circ}\big)\Big) = \widehat{\complement_E A}^{\circ}.$$

2. Si A est un ouvert, alors $\bigcup\limits_{\substack{\Omega \text{ ouvert} \\ \Omega\subset A}} \Omega = A$ *et donc* $\mathring{A} = A$. *Inversement, si* $A = \mathring{A}$, *alors A est un ouvert puisque* $\mathring{A}$ *l'est.*

3. Il s'obtient en passant aux complémentaires dans le résultat précédent.

4. Il découle de $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \bigcap \complement_E \mathring{A} = \overline{A} \bigcap \overline{\complement_E A}$, *qui est un fermé de E.* ■

Proposition 1.15 Soient $x \in E$ et $A \in \mathscr{P}(E)$, on a :

1. $x \in \mathring{A}$ si et seulement si $A \in \mathscr{V}_E(x)$.
2. $x \in \overline{A}$ si et seulement si $\forall V \in \mathscr{V}_E(x),\ V \cap A \neq \emptyset$.

Preuve *1. Soit* $x \in \mathring{A}$, *alors il existe un ouvert* Ω *de E tel que* $x \in \Omega \subset A$ *et donc* $\Omega \in \mathscr{V}_E(x)$ *et* $\Omega \subset A$, *et donc* $A \in \mathscr{V}_E(x)$. *Inversement, si* $A \in \mathscr{V}_E(x)$, *alors il existe* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $B(x,r) \subset A$ *et donc* $B(x,r) \subset \bigcup\limits_{\substack{\Omega \text{ ouvert} \\ \Omega\subset A}} \Omega = \mathring{A}$, *d'où* $x \in \mathring{A}$.

2. Puisque, on a $x \in \overline{A} \iff x \in \complement_E\big(\widehat{\complement_E A}^{\circ}\big) \iff \neg\big(\exists V \in \mathscr{V}(x),\ V \subset \complement_E A\big)$, *alors*

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \not\subset \complement_E A \iff \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

■

Proposition 1.16 Soient A et B deux parties de E, on a :

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
2. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$, $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$, $\widehat{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\widehat{A \cup B}^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Preuve *1 - On sait que* $\overline{A}$ *est un fermé puisque il est intersection d'une famille de fermés.*

- Supposons $A \subset B$, *alors* $\overline{B}$ *est un fermé contenant A et puisque* $\overline{A}$ *est le plus petit fermé de E contenant A, on a alors* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

- Puisque $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$, *alors* $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ *et* $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ *et donc* $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. *De plus,* $\overline{A} \cup \overline{B}$ *est un fermé de E contenant* $A \cup B$, *et* $\overline{A \cup B}$ *est le plus petit fermé de E contenant* $A \cup B$, *donc*

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

- Comme $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$, *alors* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ *et* $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ *et donc* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Ces propriétés s'obtiennent par passage aux complémentaires dans 1, *par exemple :*

$$\complement_E \widehat{A \cap B}^{\circ} = \overline{\complement_E A \cap B} = \overline{\complement_E A \cup \complement_E B} = \overline{\complement_E A} \cup \overline{\complement_E B} = \complement_E \mathring{A} \cup \complement_E \mathring{B} = \complement_E\big(\mathring{A} \cap \mathring{B}\big).$$

Finalement $\widehat{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. ■

Remarque. *L'inclusion réciproque dans* $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ *peut être fausse, comme le montre l'exemple*

$$E=\mathbb{R}\ ,\ A=\mathbb{R}_-^*\ ,\ B=\mathbb{R}_+^*\ ,\ \overline{A\cap B}=\emptyset\ ,\ \overline{A}\cap\overline{B}=\mathbb{R}_-\cap\mathbb{R}_+=\{0\}.$$

Définition 1.15 Une partie A de E est dite dense dans E si et seulement si

$$\overline{A}=E.$$

Et en général, si $A\subset X\subset E$, on dit que A est dense dans X si et seulement si

$$\overline{A}\supset X.$$

Exemple Dans $\mathbb{R}$ usuel, les deux ensembles $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont des parties denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.13 *Soient E un ev normé et A, $B\in\mathscr{P}(E)$. montrer que :*

1. $A\bigcup\complement_E\overline{A}$ *est une partie dense dans* E.
2. *si A, B sont denses dans E et $A\bigcap B=\emptyset$, alors $\mathring{A}=\mathring{B}=\emptyset$.*
3. *si A, B sont denses dans E et A ouvert, alors $A\bigcap B$ est dense dans E.*
4. *si $\overline{A}\bigcap\overline{B}=\emptyset$, alors $Fr(A\bigcup B)=Fr(A)\bigcup Fr(B)$.*

Exercice 1.14 *Soit* $A=\left\{\dfrac{1}{n+x}+\dfrac{1}{2^n}\ ;\ (x,n)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{N}^*\right\}$ *une partie de $\mathbb{R}$, calculer $\mathring{A}$ et $\overline{A}$.*

1.3 Suites d'un espace vectoriel normé

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un evn et d la distance associée à $\|\cdot\|$. Une suite dans E est une application d'une partie $\{n\in\mathbb{N}\,,\ n\geqslant n_0\}$ de $\mathbb{N}$ dans E, notée souvent $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $n_0=0$.

Définition 1.16 On dit qu'une suite $(u_n)_n$ dans E converge vers $l\in E$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant N\implies d(u_n,l)\leqslant\varepsilon,$$

C'est-à-dire $(u_n)_n$ converge vers l lorsque la suite numérique $(d(u_n,l))_n$ converge vers 0.

Remarque. *On dit que $(u_n)_n$ de E diverge si et seulement si $(u_n)_n$ ne converge pas, c'est-à-dire :*

$$\forall l\in E,\ \exists\varepsilon>0,\ \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} n\geqslant N \\ d(u_n,l)>\varepsilon. \end{cases}$$

Proposition 1.17 Si une suite $(u_n)_n$ dans E converge vers l_1 et vers l_2, alors $l_1=l_2$.

Preuve *Supposons, par l'absurde, que $(u_n)_n$ converge vers l_1 et converge vers l_2 telle que $l_1\neq l_2$. Posons $\varepsilon=\dfrac{d(l_1,l_2)}{3}$, alors il existe N_1, $N_2\in\mathbb{N}$ tels que :*

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ \ n\geqslant N_1\implies d(u_n,l_1)\leqslant\varepsilon, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ n\geqslant N_2\implies d(u_n,l_2)\leqslant\varepsilon. \end{cases}$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$*, alors* $d(l_1, l_2) \leqslant d(u_N, l_1) + d(u_N, l_2) \leqslant 2\varepsilon < d(l_1, l_2)$*, contradiction.* ■

Remarque. *Si deux suites coincident à partir d'un certain rang, alors elles sont de même nature.*

R La convergence d'une suite dans un evn $(E, \|\cdot\|)$ dépend de la norme $\|\cdot\|$. Elle peut ne pas être satisfaite pour une autre norme de E.

Proposition 1.18 Soient $(E_k, \|\cdot\|_k)_{1 \leq k \leq N}$ une famille finie de $\mathbb{K}$-**ev normé** et $E = \prod_{k=1}^{N} E_k$. Une suite $(x_n)_n = (x_n^1, \ldots, x_n^N)_n$ dans E converge vers $l = (l_1, \cdots, l_N) \in E$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \cdots, N\}, \quad x_n^k \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l_k.$$

Preuve *Il suffit de remarquer que* $\|x_n - l\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \|x_n^k - l_k\|_k$.

■

Proposition 1.19 Soient N et N' deux normes sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E, \ N'(x) \leqslant \alpha N(x)$,
2. Toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers 0 dans (E, N), converge aussi vers 0 dans (E, N').

Preuve $1. \Rightarrow 2.$ *Supposons qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$\forall x \in E, \quad N'(x) \leqslant \alpha N(x).$$

Soit $(x_n)_n$ *une suite qui converge vers* 0 *dans* (E, N) *(c'est-à-dire* $N(x_n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$*), et puisque*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant N'(x_n) \leqslant \alpha N(x_n),$$

on en déduit $N'(x_n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et donc* $(x_n)_n$ *une suite qui converge vers* 0 *dans* (E, N').

$2. \Rightarrow 1.$ *Par contraposée, supposons qu'on a*

$$\neg 1. : \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists x \in E, \quad N'(x) > \alpha N(x).$$

Alors pour tout $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$*, il existe un élément* $u_n \in E$ *tel que* $N'(u_n) > nN(u_n)$ *(remarquons que* $u_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*). On considère la suite* $(x_n)_n$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ x_n = \frac{1}{\sqrt{n} N(u_n)} u_n.$$

On a $N(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et donc* $(x_n)_n$ *converge vers* 0 *dans* (E, N)*. Par contre, on a*

$$N'(x_n) = \frac{N'(u_n)}{\sqrt{n} N(u_n)} > \sqrt{n} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $(x_n)_n$ *ne converge pas vers* 0 *dans* (E, N')*, c'est-à-dire* $\neg 2.$*, d'où* $2. \Rightarrow 1.$.

■

Proposition 1.20 Toute suite convergente est bornée.

Preuve *Supposons $(u_n)_n$ converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$n \geqslant N \implies d(u_n, l) = \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon = 1.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$, on a :

$$\|u_n\| \leqslant \|u_n - l\| + \|l\| \leqslant 1 + \|l\|.$$

En notant $M = \max(\|u_0\|, \dots, \|u_N\|, 1 + \|l\|)$, on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant M.$$

■

Remarque. *La réciproque est fausse, il existe des suites bornées et divergentes, par exemple*

$$(u_n)_n = ((-1)^n)_n \ \text{ dans } \ \mathbb{R}.$$

Proposition 1.21 Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites dans E et $(\lambda_n)_n$ une suite dans $\mathbb{K}$, alors :

1. $u_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l \in E \implies \|u_n\| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \|u_n\|$ et $u_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0_E \iff \|u_n\| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0.$

2. $$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l \in E \\ v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l' \in E \end{array}\right\} \implies u_n + v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l + l' \in E.$$

3. $$\left.\begin{array}{l} \lambda_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (v_n)_n \ \text{ bornée} \end{array}\right\} \implies \lambda_n v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0_E.$$

4. $$\left.\begin{array}{l} (\lambda_n)_n \ \text{ bornée} \\ v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \implies \lambda_n v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0_E.$$

5. $$\left.\begin{array}{l} \lambda_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K} \\ v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l' \in E \end{array}\right\} \implies \lambda_n v_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, l' \in E.$$

Preuve *À vérifier en exercice.* ■

Exercice 1.15 *Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \ln(2 + u_n)$.*

1. *Montrer que $(u_n)_n$ converge vers un réel l.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - l| \leqslant 1/2^{n-1}$.*

Proposition 1.22 — Caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, pour que $x \in \overline{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Preuve *Si $x \in \overline{A}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B(x, 1/n) \bigcap A \neq \emptyset$. Donc, on peut construire une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $d(x, u_n) < 1/n$, et donc $(u_n)_n$ converge vers x. Inversement, supposons qu'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A convergente vers x. Soit $V \in \mathscr{V}(x)$, alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \subset V$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies d(u_n, x) \leqslant r/2 < r.$$

En particulier, on a $u_{N+1} \in B(x,r) \subset V$, d'où $V \cap A \neq \emptyset$, et par suite

$$\forall V \in \mathscr{V}(x), \quad V \cap A \neq \emptyset,$$

Finalement, on obtient $x \in \overline{A}$. ■

Corollaire 1.1 — Caractérisation séquentielle des fermés. Une partie A de E est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E, converge également dans A.

Définition 1.17 On appelle extractrice toute application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_n$ de E, toute suite $(u_{\sigma(n)})_n$ où σ est une extractrice.

Exemple Les applications $p \mapsto 2p$, $p \mapsto 2p+1$ et $p \mapsto p^2$ sont des exemples d'extractrices.

Remarque. *1. Pour toute extractrice σ, on a la relation : $\quad \sigma(n) \geqslant n$.*

2. Si σ et τ sont deux extractrices, alors $\tau \circ \sigma$ est une extractrice. Alors, toute suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_n$ est elle même une suite extraite de $(u_n)_n$.

Proposition 1.23 Toute suite extraite d'une suite convergente, est convergente de même limite.

Preuve *Supposons $u_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l$ et soit σ une extractrice. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies d(u_n, l) \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ n \geqslant N \implies \sigma(n) \geqslant \sigma(N) \geqslant N \implies d(u_{\sigma(n)}, l) \leqslant \varepsilon$, et donc $u_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l$. ■

Remarque. *La contraposée de la proposition précédente permet de montrer que certaines suites sont divergentes. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ usuel, $((-1)^n)_n$ diverge puisque les suites extraites formés des termes d'indices pairs et d'indices impairs convergent vers des limites différentes -1 et 1.*

Proposition 1.24 La suite $(u_n)_n$ d'éléments de E, converge vers $l \in E$, il faut et il suffit que les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l.

Preuve *À faire en exercice.* ■

Définition 1.18 On dit que $a \in E$ est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ de E s'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers a, c-à-dire, s'il existe une extractrice σ telle que

$$u_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} a.$$

Remarque. *1. Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence distincts est divergente.*

2. Si $(u_n)_n$ une suite telle que $\|u_n\| \underset{n+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $(u_n)_n$ n'a pas de valeur d'adhérence.

1.4 Compacité

Définition 1.19 On dit que $A \in \mathscr{P}(E)$ est une partie compacte (ou un compact) de E si et seulement si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A, (ou encore si et seulement si toute suite de A possède une suite extraite convergente dans A).

Exemple Le théorème de Bolzano-Weiestrass assure que de toute suite bornée de $\mathbb{R}$, admet une suite extraite convergente. Il en résulte alors que tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est un compact.

Exercice 1.16 *Justifier que toute partie finie d'un ev normé E est compacte.*

Proposition 1.25 Soit $(u_n)_n$ une suite convergente dans E et de limite l, alors

$$\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\} \text{ est une partie compacte de } E.$$

Preuve *À faire en exercice.* ■

Exemple L'ensemble suivant $\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.26 Toute partie compacte de E est une partie fermée bornée dans E.

Preuve *Soient X un compact de E et $(x_n)_n$ une suite dans X qui converge vers $y \in E$. Comme X est un compact, il existe une extractrice σ et $x \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} x$. D'autre part, $(x_{\sigma(n)})_n$ est extraite d'une suite qui converge vers y, et donc $x_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} y$. Par suite $y = x \in X$ et ainsi X est un fermé de E. Pour la bornitude, raisonnons par l'absurde en supposant que X est non borné ;*

$$\forall C \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in X, \quad \|x\| \geqslant C.$$

En posant $C = n$, pour n quelconque de $\mathbb{N}$, on peut construire une suite $(x_n)_n$ dans X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \geqslant n.$$

Alors $(x_n)_n$ n'a pas de valeurs d'adhérence dans X (et dans E). Absurde, donc X est bornée. ■

Proposition 1.27 Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ telles que $X \subset Y$, alors :

$$\begin{cases} Y \text{ compact de } E \\ X \text{ fermé dans } E \end{cases} \implies X \text{ compact de } E.$$

Preuve *Soit $(x_n)_n$ une suite dans X. Puisque $X \subset Y$ et Y est compact, il existe une extractrice σ et $y \in Y$ tels que $x_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} y$. Mais, $(x_{\sigma(n)})_n$ est à éléments dans X et X est un fermé, alors $y \in X$. Par suite, toute suite dans X admet au moins une valeur d'adhérence dans X et donc X est compact.* ■

Corollaire 1.2 Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ telles que Y est un compact de E et $X \subset Y$, alors :

$$X \text{ fermé dans } E \iff X \text{ compact de } E.$$

R Puisque Y est fermé dans E, alors les conditions "X fermé dans E" et "X fermé dans Y" sont équivalentes.

Exercice 1.17 *Soient K une partie compacte de d'un ev normé E et $(u_n)_n$ une suite dans K. Montrer que, si $(u_n)_n$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors $(u_n)_n$ est convergente.*

Exercice 1.18 *Soient E un ev normé, F un fermé de E et K un compact de E. Montrer que $F+K$ est une partie fermée dans E.*

Proposition 1.28 Soient E et F deux evn, pour toutes parties compacte X de E et Y de F, on a

$$X \times Y \text{ est compact dans } E \times F.$$

Preuve *Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de $X \times Y$. Puisque X est compact, il existe une extractrice σ et un élément $x \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} x$. Ensuite, comme Y est compact, la suite $(y_{\sigma(n)})_n$ admet au moins une valeur d'adhérence dans Y, c'est-à-dire il existe une extractrice τ et un élément $y \in Y$ tels que*

$$y_{\sigma(\tau(n))} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} y.$$

Comme $x_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} x$, la suite extraite $(x_{\sigma(\tau(n))})_n$ converge également vers x, et donc

$$\left(x_{\sigma(\tau(n))}, y_{\sigma(\tau(n))}\right)_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} (x,y).$$

Ceci montre que toute suite dans $X \times Y$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $X \times Y$, et alors $X \times Y$ est compact dans $E \times F$. ■

Remarque. *Par récurrence, on obtient qu'un produit fini de parties compactes est compacte.*

Proposition 1.29 Soient $(E_k, \|\cdot\|_k)_{1\le k\le N}$ une famille finie de $\mathbb{K}$-**evn** et $E = \prod_{k=1}^{N} E_k$ l'espace produit muni de la norme v_∞. Pour tout $k \in \{1, \cdots, N\}$, soit X_k une partie non vide de E_k, alors

$$\prod_{k=1}^{N} X_k \text{ est compact de } E \iff \forall k \in \{1, \cdots, N\},\ X_k \text{ est compact de } E_k.$$

Preuve *À faire en exercice.* ■

On fini cette section par un ensemble de résultats relatifs au cas des evn de dimension finie.

Lemme 1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.

Preuve *On sait déjà que toute partie compacte est fermée bornée (proposition 1.26). Réciproquement, montrons tout d'abord que tout segment de $\mathbb{R}$ est un compact. En effet, soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n$ une suite dans I. D'après le théorème de Bolzano-Weiestrass dans $\mathbb{R}$, la suite réelle bornée $(x_n)_n$ admet au moins une suite extraite convergente. Il existe alors une extractrice σ et un élément $x\in\mathbb{R}$ tels que $x_{\sigma(n)} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} x$. Comme $(x_{\sigma(n)})_n$ est à éléments dans le fermé $I=[a,b]$, alors $x\in I=[a,b]$ et ceci montre que toute suite $(x_n)_n$ dans $[a,b]$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $[a,b]$, donc $[a,b]$ est compact. Maintenant, on considère X une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. Puisque X est bornée, ils existe des réels $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n$ tels que*

$$X\subset\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k].$$

Comme les $[a_k,b_k]$ sont des compacts de $\mathbb{R}$, alors $\prod\limits_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$ est un compact de $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$. Finalement, X étant fermé dans un compact, est lui-même compact.

■

En identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, on peut en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1.3 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, les parties compactes de $(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.

Théorème 1.1 Soit E un $\mathbb{K}$-**ev** de dimension finie, alors toutes normes sur E sont équivalentes.

Preuve *Le $\mathbb{K}$-**ev** E est de dimension finie, alors il admet au moins une base $B=(e_1\dots,e_n)$. Notons N_∞ la norme sur E définie par :*

$$\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_i\,e_i\in E,\quad N_\infty(x)=\max_{1\le i\le n}|x_i|.$$

Soit N une norme sur E, montrons que $N\sim N_\infty$. Considérons l'application :

$$v:(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|),\ \ (x_1,\dots,x_n)\mapsto N(\sum_{i=1}^{n}x_i\,e_i).$$

L'application v est continue puisque elle est lipschitzienne ;

$$|v(x)-v(y)|\leqslant N\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\,e_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|N(e_i)\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}N(e_i)\Big)\|x-y\|_\infty.$$

La sphère-unité $S=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\,,\ \|x\|_\infty=1\}$ est fermée bornée dans $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)$, alors c'est un compacte, et donc la restriction de v à S est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire,

$$\exists\,\alpha,\,\beta\in\mathbb{R},\quad \alpha=\inf_{x\in S}v(x)\ \ et\ \ \beta=\sup_{x\in S}v(x).$$

Et comme $0\notin S$, on a $0<\alpha\leqslant\beta$ et ainsi il existe $\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall x\in S,\ \ \alpha\leqslant v(x)\leqslant\beta.$$

Soit $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\,e_i\in E\setminus\{0_E\}$, posons $x'=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. Comme on a :

$$\frac{1}{\|x'\|_\infty}x'\in S\,,\ \ N_\infty(x)=\|x'\|_\infty\quad et\quad v(x')=N(x),$$

on en déduit alors que

$$\alpha \leqslant v\left(\frac{1}{\|x'\|_\infty} x'\right) \leqslant \beta \quad et \quad \alpha \|x'\|_\infty \leqslant v(x') \leqslant \beta \|x'\|_\infty.$$

D'où $\alpha N_\infty(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$, *et finalement* $N \sim N_\infty$.

■

Théorème 1.2 Les compacts d'un $\mathbb{K}$**-evn** de dimension finie, sont les parties fermées bornées.

Preuve *À faire en exercice.*

■

Exercice 1.19 *Soient* E *un evn de dimension finie et* K *un compact de* E. *Montrer qu'il existe un ouvert* U *de* E *tel que* $K \subset U$ *et* $\overline{U}$ *est compact de* E.

Exercice 1.20 *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un evn de dimension finie et* $(u_n)_n$ *une suite bornée de* E. *Montrer que l'ensemble* V *des valeurs d'adhérence de* $(u_n)_n$ *dans* E, *est compacte non vide de* E.