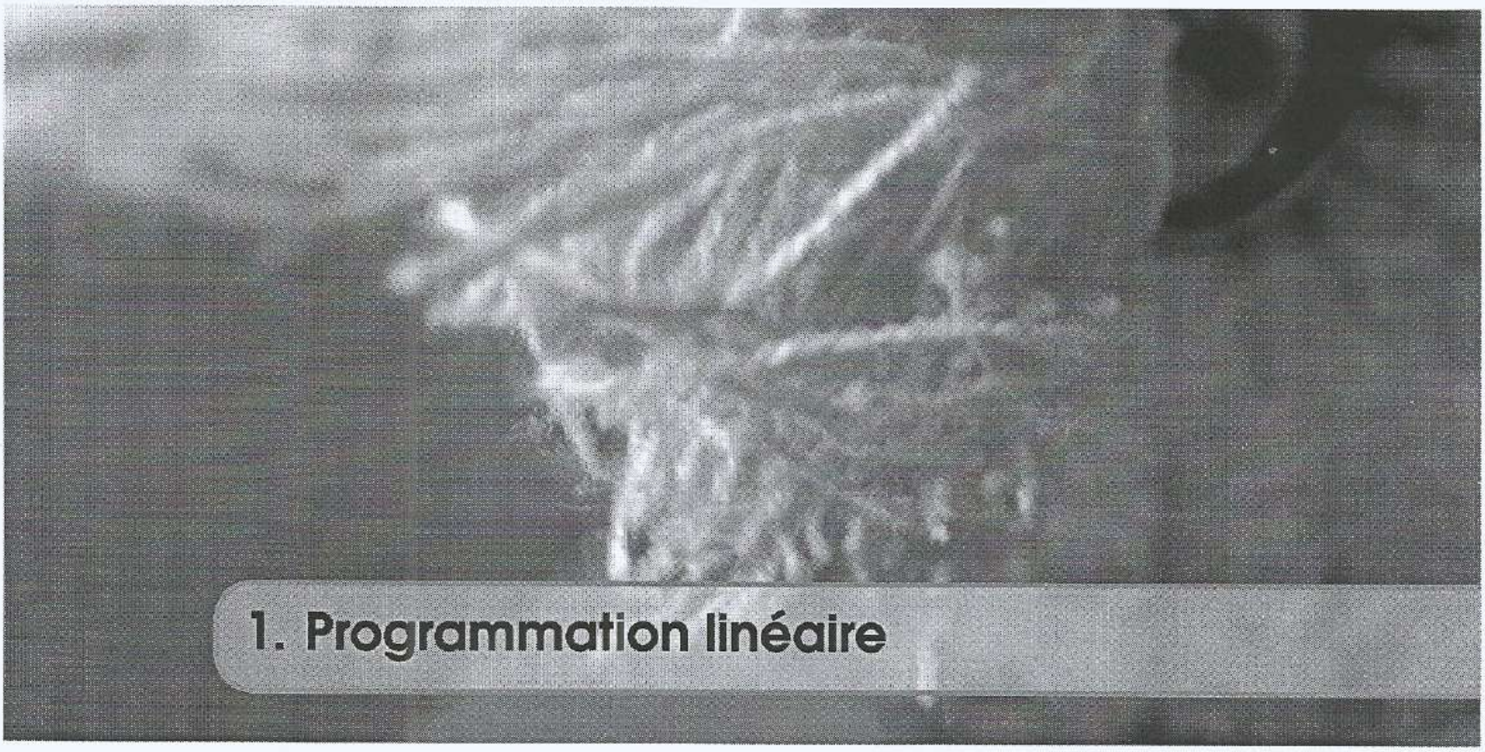


1. Programmation linéaire

1.1 Introduction

Les problèmes de la programmation linéaire se posent lorsqu'on cherche à minimiser (ou maximiser) une fonction linéaire de plusieurs variables, appelée fonction coût ou objectif, telle que ces variables sont soumises à des inéquations linéaires, appelées contraintes. Le principal outil de la programmation linéaire est la méthode de simplexe développée par G. B. Dantzig à partir de 1947.

Exemple. *Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2 à partir de 3 matières M_1, M_2 et M_3. Les stocks sont 300 tonnes de M_1, 400 tonnes de M_2 et 250 tonnes de M_3. Pour fabriquer une tonne de P_1, il faut 1 tonne de M_1 et 2 tonnes de M_2. Pour fabriquer une tonne de P_2, il faut 1 tonne de M_1, 1 tonne de M_2 et 1 tonne de M_3. La vente d'une tonne de du produit P_1 rapporte un profit de 50 Dhs, alors que celle du produit P_2, un profit de 100 Dhs. Quelles quantités des produits P_1 et P_2, l'entreprise doit-elle fabriquer pour maximiser son profit ?*

Solution : Les données peuvent être présentées par le tableau suivant

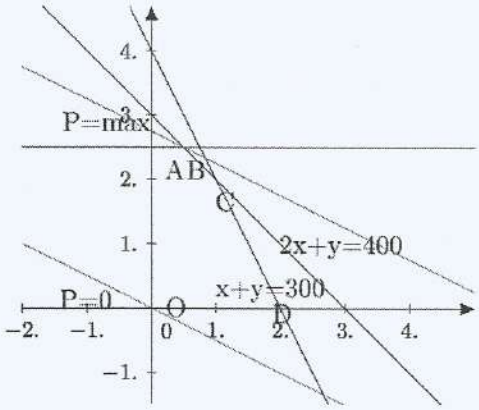
Produits / matières	M_1	M_2	M_3	Profits
P_1	1	2	0	50
P_2	1	1	1	100
stocks	300	400	250	

Soient x et y les quantités à fabriquer de P_1 et P_2 respectivement. Le problème se formule alors

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max f(x,y) = 50x + 100y \\ x + y \leq 300 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 250 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Chaque programme de fabrication peut être représenté dans un plan par un point (x,y). Soit D

l'ensemble des points (x,y) qui vérifient toutes les contraintes, alors le problème consiste à trouver un point de D qui maximise la fonction profit f. Graphiquement, on a

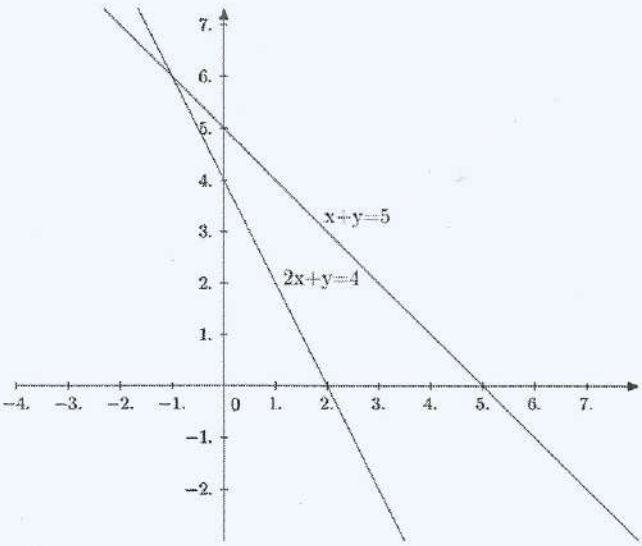


Les droites $50x+100y=P$ sont des droites parallèles à la droite $50x+100y=0$. Plus ces droites s'éloignent de l'origine plus le profit P devient élevé. Il s'agit donc de trouver un point de D où il serait possible de faire passer une droite parallèle à la droite $50x+100y=0$ qui soit la plus éloignée de cette droite. Ce point est donc $(50,250)$ qui correspond à un profit $P=f(50,250)=27500$.

Exemple. Soit le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min 3x+4y \\ x+y\geq 5 \\ 2x+y\leq 4 \\ x\geq 0, y\geq 0. \end{cases}$$

Graphiquement, on trouve

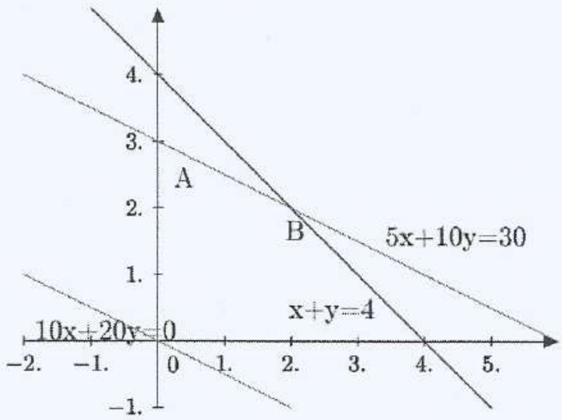


Il n'y a aucune solution qui vérifie toutes les contraintes : le domaine D est vide.

Exemple. Soit le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max\ 10x+20y \\ x+y\leq 4 \\ 5x+10y\leq 30 \\ x\geq 0, y\geq 0. \end{cases}$$

Graphiquement, on trouve

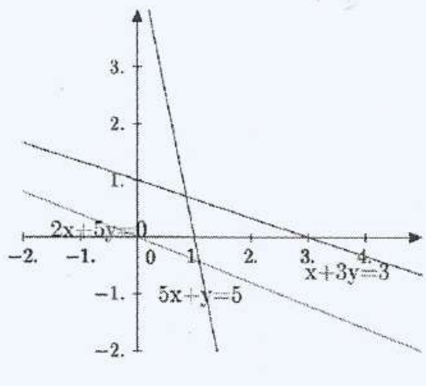


Les points du segment $[AB]$ maximise la fonction $10x+20y$, il y'a une infinité de solutions.

Exemple. Soit le programme linéaire suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max\ 2x+5y \\ x+3y\geq 3 \\ 5x+y\geq 5 \\ x\geq 0, y\geq 0. \end{cases}$$

Graphiquement, on trouve



Le maximum ne sera jamais atteint, la solution est infinie.

Synthèse À partir des exemples précédents, on constate alors que :

1. Un problème de programmation linéaire peut avoir :
   (a) une solution unique,
   (b) Aucune solution,
   (c) Une infinité de solutions,
   (d) Une solution infinie.

2. On constate que lorsqu'une solution finie existe, elle se présente en un sommet du domaine des solutions admissibles. Cette propriété a été démontrée dans le cas général et elle forme la base de la méthode de simplexe.

3. La résolution graphique a été possible grâce au nombre réduit de variables et contraintes. Dans les cas pratiques, cette méthode serait impossible à utiliser, d'où la nécessité de trouver une méthode de résolution qui peut être utilisée dans le cas général.

Remarque. Les méthodes permettant de trouver les valeurs minimales de f, sont également celles permettant de trouver les valeurs maximales de f. Pour s'en convaincre, il suffit de remarque que

$$\max_{x\in U} f(x) = -\min_{x\in U}(-f(x)).$$

1.2 Fondements de la programmation linéaire

1.2.1 Définitions et résultats fondamentaux

On appelle problème de programmation linéaire, un problème d'optimisation de la forme

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min f(x), \\ g_i(x) = 0,\ \forall i \in I, \\ g_j(x) \leq 0,\ \forall j \in J, \\ g_k(x) \geq 0,\ \forall k \in K, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

où la fonction coût f et les fonctions contraintes g_ℓ sont des fonctions linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Le domaine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$, définit par le système des contraintes suivant

$$\begin{cases} g_i(x) = 0,\ \forall i \in I, \\ g_j(x) \leq 0,\ \forall j \in J, \\ g_k(x) \geq 0,\ \forall k \in K, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

est appelé domaine des solutions réalisables (admissibles), et tout élément $x \in \mathcal{P}$ est appelé solution réalisable (admissible) du problème linéaire (P).

Remarque. Une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite linéaire si pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$h(x) = (d,x) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i = d^T x \quad \text{où} \quad d = (d_1, \cdots, d_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.1 On appelle solution optimale du programme linéaire (P), toute solution réalisable (admissible) $x^* \in \mathcal{P}$ pour laquelle la fonction coût f est optimale, c-à-dire

$$\forall x \in \mathcal{P}, \ f(x^*) \leq f(x).$$

La valeur $f(x^*)$ est appelée le coût optimal ou optimum du programme linéaire (P).

La formulation générale d'un programmation linéaire (P) peut prendre différentes formes particulières permettant de vérifier les hypothèses et prérequis des méthodes de résolution choisies et de simplifier la présentation des algorithmes d'optimisations correspondants.

Définition 1.2 — Forme canonique. Un programme linéaire sous forme canonique s'écrit

$$(P) \ : \begin{cases} \min f(x), \\ g_k(x) \geq 0, \ \forall k \in K, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

Autrement dit, toutes les contraintes d'inégalités sont dans le même sens, les variables de décision sont positives ou nulles et les contraintes d'égalité en sont absentes.

Définition 1.3 — Forme standard. Un programme linéaire sous forme standard s'écrit

$$(P) \ : \begin{cases} \min f(x), \\ g_i(x) = 0, \ \forall i \in I, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

Les variables de décision sont positives ou nulles et les contraintes d'inégalités sont absentes.

Remarque. — Régles de passage. Tout programme linéaire général peut être mis sous forme standard (resp. sous forme canonique). Les passages d'une forme à l'autre sont possibles à l'aide des propriétés élémentaires suivantes.

- Toute inégalité $\leq$ est équivalente à une inégalité $\geq$ en multipliant ses termes par -1,
- Toute égalité est équivalente à deux inégalités ; $g_i(x) = 0 \iff g_i(x) \leq 0$ et $g_i(x) \geq 0$,
- Toute inégalité $\leq$ (resp. $\geq$) peut être transformée en une égalité au moyen de "variables d'écart", ainsi $g_k(x) \leq b$ (resp. $g_j(x) \geq c$) devient
$$g_k(x) + z = b \ \text{(resp. } g_j(x) - z' = c) \quad \text{avec} \quad z, z' \in \mathbb{R}_+,$$
- Toute variable x_i libre en signe peut être remplacée par deux variables $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$ avec
$$x = x_i^+ - x_i^- \quad \text{où} \quad x_i^+ = \max(x_i, 0) \ \text{ et } \ x_i^- = \max(-x_i, 0).$$

Exemple. 1. Tout programme linéaire (P) peut se mettre sous forme canonique (P_c) suivante :

$$(P) \ : \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq -5, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \iff (P_c) \ : \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2 \geq 0, \\ -x_2 - 5 \geq 0, \\ -x_1 - x_2 + 3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Tout programme linéaire (P) peut se mettre sous forme standard (P_s) suivante :

$$(P) : \begin{cases} \min 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ -5x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \iff (P_s) : \begin{cases} \min 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - 1 = 0, \\ -5x_1 + 6x_2 = 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$(P) : \begin{cases} \max x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases} \iff (P_s) : \begin{cases} \min -y_3 + y_4 + x_2 + 2y_5 \\ 2y_3 - 2y_4 + x_2 + y_5 + y_1 - 1 = 0, \\ y_3 - y_4 - 2x_2 - y_5 - y_2 - 2 = 0, \\ -3y_3 + 3y_4 + x_2 + y_5 - 3 = 0, \\ y_1, y_2,, y_3, y_4, x_2, y_2, y_5 \geq 0. \end{cases}$$

Remarque. 1. Le problème sous forme canonique (P_c) s'écrit matricielement sous la forme

$$(P_c) : \begin{cases} \min c^T x, \\ Ax \geq b, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ est le vecteur des coûts avec n le nombre de variables, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ le vecteur des variables de décision, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ est le vecteur des contraintes avec m le nombre des contraintes et A la matrice des contraintes d'ordre $m \times n$.

2. Le problème sous forme standard (P_s) s'écrit matricielement sous la forme

$$(P_s) : \begin{cases} \min c^T x, \\ Ax - b = 0, \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

où $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ est le vecteur des coûts avec n le nombre de variables, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ le vecteur des variables de décision, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ est le vecteur des contraintes avec m le nombre des contraintes et A la matrice des contraintes d'ordre $m \times n$.

1.2.2 Étude des solutions d'un programme linéaire

Définition 1.4 — Polyèdre. On appelle polyèdre l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des points vérifiant un système d'inéquations linéaires toutes dans le même sens. Autrement dit, un polyèdre $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble décrit par

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax \geq b\} \text{ où } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^m.$$

Définition 1.5 — Polytope. Un polyèdre convexe et borné est appelé polytope convexe.

Théorème 1.1 Le domaine des solutions réalisables d'un programmation linéaire (P) est un polyèdre convexe qui peut être borné ou non borné.

Remarque. 1. L'ensemble des solutions réalisables du programme (1.1) est un polyèdre convexe.

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax - b \geq 0 \text{ et } x \geq 0\}.$$

2. Le domaine des solutions réalisables du programme linéaire (1.2) est un polytope convexe.

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax - b = 0 \text{ et } x \geq 0\}.$$

Définition 1.6 — Points extrémal-Sommet. Étant donné un convexe C, un vecteur $x \in C$ est dit point extrémal de C s'il n'existe pas deux vecteurs $y, z \neq x \in C$, et de réel $\lambda \in]0,1[$ tel que

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z.$$

Étant donné un polyèdre $\mathcal{P}$, un point extrémal du convexe $\mathcal{P}$ est dit sommet du polyèdre $\mathcal{P}$.

Remarque. Un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est sommet du polyèdre $\mathcal{P}$ si pour tout $y, z \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in]0,1[$, on a

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \implies y = z = x.$$

Une définition équivalente du point extrémal de $\mathcal{P}$ (ou sommet de $\mathcal{P}$) est la suivante.

Définition 1.7 — Points extrémal. Étant donné un polyèdre $\mathcal{P}$, un vecteur $x \in \mathcal{P}$ est dit sommet de $\mathcal{P}$ s'il existe un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $y \neq x$ de $\mathcal{P}$, on a

$$c^T x < c^T y.$$

Dans la suite, on considère les programmes linéaires donnés sous forme standard (1.2), alors

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax - b = 0 \text{ et } x \geq 0\}.$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

- le polyèdre des solutions réalisables $\mathcal{P}$ est non vide,
- la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \leq n$,
- la matrice A est de rang maximal, c'est-à-dire $rang(A) = m$.

Si l'hypothèse de rang sur A n'est pas satisfaite, cela signifie que le système linéaire $Ax = b$ contient des contraintes redondantes qui peuvent être éliminées pour obtenir un système d'équations linéaires vérifiant l'hypothèse de rang et définissant un polyèdre identique au polyèdre initial.

Définition 1.8 — Base du programme linéaire. On appelle base du programme linéaire, toute sous-matrice régulière $B = [A^{b(1)}, \cdots, A^{b(m)}]$ d'ordre m, extraite de la matrice des contrainte A.

Définition 1.9 — Solution de base. Soit $B = [A^{b(1)}, \cdots, A^{b(m)}]$ une base du programme linéaire. On appelle solution de base B, toute solution de $Ax = b$ de la forme

$$x^* = [\cdots, x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}, \cdots]^T \quad \text{où} \quad \forall i \notin \{b(1), \cdots, b(m)\},\ x_i = 0.$$

- Si $x_B = [x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}]^T \geq 0$, cette solution est dite solution de base réalisable (admissible),

- Si $x_B > 0$, la solution de base réalisable est dite non-dégénéré, et dégénéré sinon c-à-dire si au moins une variable de base est nulle.

Remarque. Sous les hypothèses précédentes, Il est toujours possible de construire une solution de base x^* de $\mathcal{P}$ d'un programme linéaire sous forme standard :

- Extraire de la matrice A une sous-matrice $B = [A^{b(1)}, \cdots, A^{b(m)}] \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversible,
- Choisir $x_i = 0$ pour tout $i \notin \{b(1), \cdots, b(m)\}$ (annuler les variables hors base),
- Résoudre en $x_B = [x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}]^T$, le système linéaire $Bx_B = b$, donc

$$x_B = B^{-1}b.$$

- La solution de base est alors donnée par

$$x^* = [\cdots, x_{b(1)}, \cdots, x_{b(m)}, \cdots]^T \quad \text{où} \quad \forall i \notin \{b(1), \cdots, b(m)\},\ x_i = 0.$$

Exemple. — 2D. Considérons le programme linéaire suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard du programme (P) est donnée par

$$(P_s) \ : \ \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 + z_1 = 2, \\ x_2 + z_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + z_3 = 3, \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Les données du programme (P_s) s'écrivent sous la forme matricielle suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En choisissant les colonnes $(3, 4, 5)$ de A, on obtient une base B_1 du programme linéaire

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [A_3, A_4, A_5].$$

On a $x_{B_1} = B_1^{-1}b = b = [2, 2, 3]^T$, donc la solution de base B_1 est donnée par

$$x_1^* = [x, y, z_1, z_2, z_3]^T = [0, 0, 2, 2, 3]^T$$

qui est une solution de base réalisable puisque tous ses composantes sont positives ou nulles et non-dégénérée puisque $x_{B_1} > 0$. Par contre la solution de base associée à la base

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [A_1, A_2, A_5].$$

n'est pas réalisable (non admissible), puisque on a

$$x_2^* = B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [2,2,0,0,-1]^T.$$

Définition 1.10 — Variables de base. Les variables dont les indices appartiennent à

$$\{b(1), \cdots, b(m)\}$$

sont appelées variables de base, et les autres variables sont appelées variables hors base.

Soit B une base du programme linéaire. Après éventuelle permutation des colonnes de A, on obtient

$$A = [B\,;R] \;\; ; \;\; x = (x_B\,; x_R)^{\mathrm{T}} \;\; ; \;\; c = (c_B\,; c_R)^{\mathrm{T}}$$

Alors, la solution de base B est toute solution de $Ax = b$ de la forme $[x_B\,; 0]^{\mathrm{T}}$, et en plus on a

- le système $Ax = b$ se récrit sous la forme

$$Bx_B + Rx_R = b.$$

- si x est une solution de base associée à B, alors $x_R = 0$ d'où $Bx_B = b$, et donc

$$x_B = B^{-1} b.$$

On appelle x_B (resp. c_B) une variable de base B (resp. coût des variables de base B), et on appelle x_R (resp. c_R) une variable hors-base B (resp. coût des variables hors-base B).

Exemple. — 2D. Reprenons le PL de l'exemple précédent dont la forme standard est

$$(P_s) \; : \; \begin{cases} \min -2x_1 - x_2 \\ x_1 + z_1 = 2, \\ x_2 + z_2 = 2, \\ x_1 + x_2 + z_3 = 3, \\ x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas $B_1 = [A_3, A_4, A_5]$, les variables de base sont les variables d'écart z_1, z_2 et z_3 et les variables hors base sont x_1 et x_2. Et dans le second $B_2 = [A_1, A_2, A_5]$, les variables de base sont les variables x_1, x_2 et z_3 et les variables hors base sont z_1 et z_2.

Proposition 1.1 Soit le programme linéaire sous forme standard (1.2), alors

1. s'il existe une solution réalisable, alors il doit exister une solution de base réalisable.
2. s'il existe une solution optimale, alors il doit exister une solution de base optimale.

Le théorème suivant stipule que x^* est un point extrémal du polyèdre $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = b, x \geq 0\}$ si et seulement si x^* est une solution de base réalisable du programme linéaire (1.2).

Théorème 1.2 — Caractérisation des sommets du polyèdre $\mathcal{P}$. L'ensemble des sommets du polyèdre $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\ ,\ x \geq 0\}$ est égale à l'ensemble des solutions de base réalisables.

Si l'origine $0 \in \mathcal{P}$ (de façon équivalente si $b = 0$), on notera qu'il est déjà un sommet de $\mathcal{P}$

$$\forall y \geq 0, z \geq 0, \forall \lambda \in]0,1[;\ \ 0 = \lambda y + (1-\lambda) z \implies y = z = 0.$$

Pour examiner les autres sommets, à chaque point $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$I^*(x) = \{j \in \{1, \cdots, n\}\ ;\ x_j > 0\}.$$

Quitte à réordonner les composantes de x, on peut supposer que

$$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \text{ avec } \ k = Card\,(I^*(x)).$$

Preuve. *Soit $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ un point extrémal (sommet) de $\mathcal{P}$. Il suffit de montrer que les colonnes A_i de A associés aux $x_i > 0$ (c-à-dire associés aux $j \in I^*(x)$) forment une famille libre. Par l'absurde, supposons $\{A_j;\ j \in I^*(x)\}$ liée, alors il existe $w_1, \ldots, w_k$ non tous nuls, tels que*

$$\sum_{j=1}^{k} w_j A_j = 0.$$

Posons $w = (w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \neq 0$, alors $Aw = \sum_{j=1}^{k} w_j A_j = 0$. Or $x_j > 0$ pour tout $j \in I^*(x)$, alors il existe $\theta \neq 0$ suffisamment petit tel que $x_j \pm \theta w_j \geq 0$. D'autre part, rappelons que

$$x_j \pm \theta w_j = 0 \ \textit{pour tout} \ \ j \notin I^*(x),$$

et donc on obtient que $z_1 = x + \theta w \geq 0$ et que $z_2 = x - \theta w \geq 0$. Et puisque, $Aw = 0$, on a

$$Az_i = A\,(x \pm \theta w) = Ax \pm Aw = Ax = b.$$

On conclut que z_1 et z_2 appartiennent à $\mathcal{P}$, et que $z_1 \neq z_2$ puisque $\theta\, w \neq 0$. Mais, les relations

$$x = \frac{x + \theta w}{2} + \frac{x - \theta w}{2} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}$$

montrent alors que x n'est pas un point extrémal de l'ensemble $\mathcal{P}$, absurde.

Inversement, soit $x = [x_B; 0] = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ une solution de base B réalisable, et montrons que $x \in \mathcal{P}$ est extrémal. Soit $u = (u_1 \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n) \geq 0$ et $v = (v_1 \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n) \geq 0$ deux points de $\mathcal{P}$ et $\lambda \in]0,1[$, et supposons que l'on puisse écrire

$$x = \lambda\, u + (1-\lambda)\, v \quad (\textit{remarquer que } \ I^*(u) \cup I^*(v) \subset I^*(x)).$$

Il en résulte alors que pour tout $i \in \{m+1, \ldots, n\}$, on a $\lambda\, u_i + (1-\lambda)\, v_i = 0$ et donc

$$\forall i \in \{m+1, \ldots, n\}, \quad u_i = v_i = 0.$$

Par suite, on peut écrire $u = [u_B\,;\,0]^T$ et $v = [v_B\,;\,0]^T$, et comme u, $v \in \mathcal{P}$, on en déduit

$$\forall z \in \{u, v\}\,,\ Az = [B\,;R] \begin{bmatrix} z_B \\ 0 \end{bmatrix} = Bz_B = b.$$

Finalement, on obtient $u_B = v_B = B^{-1} b = x_B$, et donc x est un point extrémal de $\mathcal{P}$.

■

Avec cette caractérisation, on est en mesure de démontrer la propriété clef suivante.

Théorème 1.3 Si le problème linéaire sous forme standard (1.2) admet une solution, alors (au moins) un sommet de $\mathcal{P}$ est également solution.

Preuve. *Soit $x \in \mathcal{P}$ une solution du problème (1.2). Si l'ensemble $I^*(x) = \emptyset$, alors $x = 0$, et on a vue que l'origine est un sommet du polyèdre $\mathcal{P}$ si elle lui appartient. Si $I^*(x) \neq \emptyset$, alors*

- *ou bien les vecteurs colonnes A_j, $j \in I^*(x)$ de la matrice A sont linéairement indépendants, donc forment une base du problème (1.2) dont x est la solution de base associée, et ainsi x est un sommet de $\mathcal{P}$, d'après le Théorème 1.2,*
- *ou bien il existe $w = (w_j)_{1 \leq j \leq n}$ non nul tel que*

$$\max_j w_j > 0 \text{ (l'une des } w_j \text{ est} > 0), \quad \forall j \notin I^*(x),\, w_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j A_j = Aw = 0.$$

Considérons les points de $\mathbb{R}^n$ de la forme $x + \theta w$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Ils vérifient, d'une part

$$A(x + \theta w) = Ax + \theta Aw = Ax = b \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

Comme, on a

$$(x + \theta w)_j = x_j + \theta w_j = \begin{cases} x_j + \theta w_j & si \quad x_j > 0, \\ 0 & si \quad x_j = 0. \end{cases}$$

Alors, on en déduit qu'il existe deux réels θ_0 et θ_1 donnés par

$$-\infty < \theta_0 = \max\left\{-x_j/w_j \,;\; j \in I^*(x) \text{ et } w_j > 0\right\} < 0.$$
$$0 < \theta_1 \leq \min\left\{-x_j/w_j \,;\; j \in I^*(x) \text{ et } w_j < 0\right\} \leq +\infty.$$

Par suite, les points $x + \theta w \in \mathbb{R}^n$ vérifient d'autre part

$$\forall \theta \in [\theta_0, \theta_1], \quad x + \theta w \in \mathcal{P}.$$

Comme la fonction objective f est linéaire, alors pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, on a

$$f(x + \theta w) = f(x) + \theta f(w).$$

Ce qui impose $f(w) = 0$, puisque $f(x) = \min_{z \in \mathcal{P}} f(z)$. Autrement dit, les points $x + \theta w$ avec $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ sont tous solution du problème (1.2). Puisque, par définition de θ_0, l'une des composantes $u_j + \theta_0 w_j$ où $j \in I^*(x)$ s'annule, on a construit une solution $x' = x + \theta_0 w$ pour laquelle on a

$$I^*(x') \subsetneq I^*(x), \quad \text{et donc} \quad Card(I^*(x')) < Card(I^*(x)).$$

Alors ou bien les vecteurs colonnes A_j, $j \in I^*(x')$ sont linéairement indépendants et donc la solution x' est un sommet de $\mathcal{P}$, ou bien ces colonnes sont linéairement dépendants, et dans ce cas, on recommence le raisonnement précédent. Puisque l'application de ce procédé a pour effet de diminuer d'au moins une unité le nombre des colonnes A_j considérés, on aboutit nécessairement à une solution qui est aussi un sommet après un nombre fini d'itérations de ce procédé.

■

Comme corollaire de ces deux théorèmes, on a les propriétés sur les sommets suivantes.

Corollaire 1.1 Si le polyèdre $\mathcal{P}$ n'est pas vide, il possède au moins un sommet. Par ailleurs, les sommets de $\mathcal{P}$ sont en nombre fini.

Preuve. *Considérons programme linéaire suivant : trouver* $(x^*,\tilde{x}^*)$ *tel que*

$$\begin{cases} (x^*,\tilde{x}^*) \in \tilde{\mathcal{P}} = \{(x,\tilde{x}) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \,;\, Ax+\tilde{x}=b\}, \\ \tilde{f}(x^*,\tilde{x}^*) = \min\limits_{(x^*,\tilde{x}^*)\in\tilde{\mathcal{P}}} \tilde{f}(x,\tilde{x}) \ \text{ avec } \ \tilde{f}(x,\tilde{x}) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{x}_i. \end{cases}$$

Si l'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide, ce problème admet déjà pour solutions tous les couples $(x,0)$, où $x \in \mathcal{P}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 1.3 à l'une quelconque de ces solutions, et d'utiliser ensuite la caractérisation des sommets donnée au théorème 1.2. Cette dernière montre également que les sommets sont en nombre fini, puisque le nombre de sommets de $\mathcal{P}$ est exactement le nombre de solutions de bases extraites de la matrice A (qui égale au nombre de façons de choisir des vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs A_j de la matrice A), et ce dernier est inférieure au nombre C_n^m de possibilités de choisir m colonnes de A parmi ces n colonnes.

■

Corollaire 1.2 Si le problème sous forme standard (1.2) admet une solution optimale, alors il doit exister un point extrémal de $\mathcal{P}$ qui est une solution optimale.

Théorème 1.4 — Optimalité en un sommet. Soit U un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ et Z une fonction linéaire sur U. Si l'optimum de Z sur U est atteint en plusieurs sommets de U, alors il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points sommets.

La démonstration repose sur le théorème de Krein-Milmann qui postule que tout point d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est combinaison convexe de ces sommets.

Preuve. *Soient $y_1,\ldots,y_k$ les sommets de U et x une combinaison convexe de ces sommets, alors*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i \quad \text{avec} \quad \forall i \in \{1,\cdots,k\},\ \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Soit $Z^* = \min\limits_{y\in U} Z(y)$, alors pour tout $i \in \{1,\cdots,k\}$, on a $Z^* = Z(y_i)$, et par linéarité de Z, il vient

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z(y_i) = \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\Big) Z^* = Z^* \quad \Big(\text{car } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\Big).$$

■

1.2.3 Caractérisation des bases et des solutions de bases optimales

Définition 1.11 — Coût réduit. Soit x une solution de base (associée à la base B) et c_B le vecteur de la fonction coût associé aux variables de base. Pour j donné, le coût réduit $\overline{c}_j$ de la variable x_j est défini par

$$\overline{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

Remarque. Les coûts réduits associés aux variables de base (resp. hors-base) sont donnés par

$$\overline{c}_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = 0 \quad (\text{resp. } \overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R).$$