CHAPITRE 2

ANALYSE COMBINATOIRE OU DÉNOMBREMENTS

Introduction : L'analyse combinatoire comprend un ensemble de méthodes qui permettent de déterminer le nombre de tous les résultats possibles d'une experience particulière. Nous allons en développer dans ce chapitre des techniques de dénombrements qui permettent de calculer ce nombre.

2.1 Cardinal : définitions et propriétés

2.1.1 Définitions

On dit qu'en ensemble non vide E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ noté par la suite $[\![1, n]\!]$.
Le nombre n s'appelle alors le cardinal de l'ensemble E et sera noté par la suite $\mathrm{card}(E)$.
$\mathrm{card}(E)$ désigne donc le nombre d'éléments de E.
Par convention : $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$ et si E est infini on pose $\mathrm{card}(E) = +\infty$.
Dans tout ce qui suit, les ensembles considérés sont finis.

2.1.2 Propriétés sur les cardinaux et principe d'addition

Soient A et B deux ensembles finis inclus dans un même ensemble Ω, on a alors les propriétés suivantes :

1. $\boxed{\text{Si } A \subset B \text{ alors } \mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)}$;

2. $\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont disjoints } (A \cap B = \emptyset) \text{ alors } \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)}$;

3. Le principe **d'addition** donné dans l'égalité ci-dessus **2.** se généralise à plusieurs ensembles deux à deux disjoints par $\boxed{\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{card}(A_1) + \mathrm{card}(A_2) + \cdots + \mathrm{card}(A_n)}$;

4. Si A et B sont quelconques alors $\boxed{\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)}$;

5. Si A et B sont quelconques alors $\boxed{\mathrm{card}(B \backslash A) = \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(B \cap A)}$;

6. $\boxed{\text{Si } A \subset B \text{ alors } \mathrm{card}(B \backslash A) = \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A)}$;

7. $\boxed{\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \text{ si et seulement si il existe une bijection de } A \text{ sur } B.}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{injective} \Rightarrow \mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B) \\ \text{surjective} \Rightarrow \mathrm{card}(A) \geq \mathrm{card}(B) \\ \text{bijective} \Rightarrow \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \end{cases}$

Proposition 2.1 (Principe d'addition) *Si E est un ensemble fini tel que $E = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$ alors*

$$\boxed{\mathrm{card}E = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B \ .}$$

2.2 Techniques de dénombrement

2.2.1 Principe de multiplication

Proposition 2.2 *Supposons qu'une expérience se décompose en p étapes successives de la façon suivante :*

— *Pour la première étape, il y a n_1 résultats possibles ;*
— *Pour la deuxième étape, il y a n_2 résultats possibles ;*
— *Et ainsi de suite jusqu' à la p ième étape qui a n_p résultats possibles.*

Alors le nombre de résultats possibles pour l'expérience est
$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$$

Exemple 2.1 *Un système d'immatriculation comprend 4 chiffres dont le premier est distinct de zéro en plus de 2 lettres distinctes des lettres I et O et différentes. Quel est le nombre N de plaques possibles ?*

Solution :
$N = 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 24 \times 23 = 4\,968\,000$.

Exemple 2.2 *Dans un restaurant, le menu offre un choix de 4 entrées, 3 plats principaux et 5 desserts. Combien peut-on former de déjeuners possibles constitué chacun d'une entrée, d'un plat principal et d'un dessert ?*

Solution :
Le nombre cherché est $N = 4 \times 3 \times 5 = 60$ (i.e. il y a 60 déjeuners possibles constitué chacun d'une entrée, d'un plat principal et d'un dessert).

2.3 Application du principe de multiplication

2.3.1 Produit cartésien d'ensembles

Définition 2.3 *Si A et B sont ensembles quelconques alors le produit cartésien de A par B noté par $A \times B$ est défini par* $\boxed{A \times B = \{(a,b)/a \in A, b \in B\}}$

Exemple 2.3 *Si $A = \{1,2\}$ et $B = \{a,b,c\}$, alors $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$*

Définition 2.4 *Si $A_1, \cdots, A_n$ sont n ensembles quelconques alors le produit cartésien des A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ dans l'ordre des indices noté par $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est défini par*
$$\boxed{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)/a_i \in A_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}}$$

Notation 2.5 *l'ensemble $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sera noté $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$*

Notation 2.6 *l'ensemble $A \times A \times \cdots \times A$ (où le produit est entre p ensembles égaux à A) sera noté A^p*

Exemple 2.4 *Si E est l'ensemble à 2 éléments $E = \{a,b\}$, alors E^2 est l'ensemble*
$E^2 = \{(a,a); (a,b); (b,a); (b,b)\}$.
et E^3 est l'ensemble $E^3 = \{\cdots \qquad \cdots\}$.

Exemple 2.5 *On jette un dé équilibré à 6 faces deux fois consécutives. L'ensemble E des résultats est donc*
$E = \{(r_1, r_2)/r_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}, r_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = [\![1,6]\!]^2$.

Exemple 2.6 *De même, si on lance un dé équilibré à 6 faces trois fois consécutives. L'ensemble des résultats dans ce cas est $E = [\![1,6]\!]^3$.*

En utilisant le principe de multiplication, on déduit alors les corollaires suivants :

Corollaire 2.7 $\boxed{\text{card}(A_1 \times A_2) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2)}$

Corollaire 2.8 $\boxed{\text{card}(A_1 \times A_2 \cdots \times A_n) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2) \times \cdots \times \text{card}(A_n)}$

Exemple 2.7 *Pour l'exemple 2.2 du "restaurant", l'ensemble des résultats("déjeuners") peut s'écrire* $A \times B \times C$ *où* $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ *et* $C = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ *où les* e_i, p_j *et* d_k *sont les différents entrées, plats principaux et desserts. Le nombre de cas possibles était de* $4 \times 3 \times 5 = 60 = \text{card}(A) \times \text{card}(B) \times \text{card}(C) = \text{card}(A \times B \times C)$.

Corollaire 2.9 $\boxed{\text{card}(A^p) = (\text{card}(A))^p}$

2.3.2 Arrangements avec répétitions

Il s'agit ici de choisir des dispositions de p éléments ordonnés qui ne sont pas obligatoirement distincts (avec répétition) dans un ensemble de cardinal n. De telles dispositions sont appellées Arrangements avec répitions de p éléments pris parmi n. Combien y en a-t-il ? (p peut être supérieur à n dans ce cas). En 1ère position, il y a n choix possibles. En 2ème position, il y a encore n choix possibles... En $p$ème position, il y a toujours n choix possibles. En conclusion, on a la proposition suivante :

Proposition 2.10

Il y a donc n^p Arrangements avec répétitions de p éléments pris parmi n

Exemple 2.8 *Lancement d'un dé équilibré à 6 faces p fois*

- *Pour l'exemple 2.5 du lancement d'un dé deux fois de suite, le nombre de cas possibles est* $6^2 = 36$.
- *Pour l'exemple 2.6 du lancement d'un dé trois fois de suite, le nombre de cas possibles est* $\cdots = \cdots$.

Exemple 2.9 *Combien existe-t-il de façons différentes de répondre au hasard à un examen de 10 questions du type VRAI ou FAUX ? Réponse :*

$1024 = 2^{10}$

2.3.3 Arrangements et permutations sans répétition

Envisageons un ensemble de n objets différents. Choisissons maintenant p de ces n objets et ordonnons les.

Définition 2.11 *Une disposition ordonnée de p objets distincts pris parmi n est appelée* arrangement sans répétition *(ou simplement* arrangement*)de p objets pris parmi n ou p-arrangement (on a obligatoirement $p \leqslant n$). On désigne par A_n^p le nombre total de tels arrangements.*

Proposition 2.12

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Rappel 2.1
$n!$ (lire "factorielle n") est le produit de tous les entiers jusqu'à n, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$. Par convention, $0! = 1$.

Exemple 2.10 *Les arrangements de deux lettres prises parmi 4 lettres $\{a, b, c, d\}$ sont au nombre de $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$. Ce sont :* $(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c)$.

Exemple 2.11 *Lors de la finale de 100 mètres, il y a huit finalistes. Combien y a-t-il de possibilités de répartir les médailles d'or,d'argent et de bronze ?*

Solution :
Il y a à choisir un 3-arrangement(l'ordre est très important!!!) dans un ensemble de cardinal 8. Le nombre de choix possibles est $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Cas particulier : $p = n$ Il s'agit d'ordonner n objets entre eux, c'est-à-dire d'effectuer une permutation de ces n objets.

Définition 2.13 *Une permutation de n éléments est une disposition ordonnée de ces n éléments.*

Proposition 2.14

Les permutations de n éléments sont au nombre de $P_n = A_n^n = n!$.

2.3.4 Combinaisons sans répétition

Définition 2.15 *Un choix de p objets <u>distincts</u> pris parmi n sans tenir compte de leur ordre (ou <u>non ordonnés</u>) est appelé* combinaison sans répétition *(ou simplement* combinaison*) de p objets pris parmi n. On désigne par C_n^p le nombre total de telles combinaisons.*

Dans l'exemple précédent correspondant à l'ensemble des quatre lettres $\{a, b, c, d\}$, la combinaison $\{a, b\}$ est la même que la combinaison $\{b, a\}$ alors que l'arrangement (a, b) est différent de l'arrangement (b, a).

Proposition 2.16

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Exemple 2.12 *Le nombre de combinaisons de deux lettres prises parmi quatre $\{a, b, c, d\}$ est* $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$. *Ce sont :* $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

Exemple 2.13 *Quinze personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre total de poignées de mains échangées.*

Solution :
Une poignée de mains échangées est la donnée d'un couple de deux personnes(l'ordre est sans importance ici) choisies parmi les quinze. Le nombre cherché est donc $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{2!13!} = \dfrac{15 \times 14}{2} = 15 \times 7 = 105$.

2.3.5 Combinaisons avec répétition

Définition 2.17 *Un choix de p objets <u>non nécessairement distincts</u> pris parmi n sans tenir compte de leur ordre (ou <u>non ordonnés</u>) est appelé* combinaison avec répétition *de p objets pris parmi n.*

Proposition 2.18

Le nombre de combinaisons avec répétition de p objets pris parmi n est égal à
$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$$

Exemple 2.14 *Le nombre de combinaisons avec répétition de deux lettres prises parmi quatre $\{a, b, c, d\}$ est* $C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$. *Ce sont :*
$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, c\}, \{c, d\}, \{d, d\}$.

Exemple 2.15 *On lance simultanément deux dés indiscernables (identiques), déterminons le nombre de cas possibles.*
On cherche ici Le nombre de combinaisons avec répétition de deux résultats pris parmi les 6 valeurs possibles $\{1,2,3,4,5,6\} = [\![1,6]\!]$. Ce nombre est $C^{\cdots}_{\cdots\cdots} = C^{\cdots}_{\cdots} = \dfrac{\ldots!}{\ldots!\ldots!} = 21$.
Les résultats des deux lancers sont

2.3.5.1 Rappel sur les propriétés des C_n^p

2.3.5.1.1 Propriétés : $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$, $\boxed{C_n^0 = C_n^n = 1}$ et $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}$

2.3.5.1.2 Binôme de Newton : Le binôme de Newton est le produit de n facteurs égaux à $(a+b)$ d'où

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}}$$

Les C_n^p sont déterminés à l'aide du triangle de Pascal.

2.3.5.1.3 Formule du triangle de Pascal La formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ permet à l'aide du tableau ci-dessous dit triangle de Pascal d'obtenir les différentes valeurs des combinaisons.

	$p=0$	1	2	3	4	5
$n=0$	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$\begin{array}{lcl}
(a+b)^0 & = & \mathbf{1} \\
(a+b)^1 & = & \mathbf{1}a + \mathbf{1}\,b \\
(a+b)^2 & = & \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}\,ab + \mathbf{1}\,b^2 \\
(a+b)^3 & = & \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}\,a^2b + \mathbf{3}\,ab^2 + \mathbf{1}\,b^3 \\
(a+b)^4 & = & \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}\,a^3b + \mathbf{6}\,a^2b^2 + \mathbf{4}\,ab^3 + \mathbf{1}\,b^4 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

Appliquée à $n=4$, la formule du binôme donne : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

2.3.6 Permutations lorsque certains éléments sont semblables

Dans les paragraphes précédents, on a supposé que les n objets étaient tous différents. Il arrive parfois que les n objets en contiennent un certain nombre qui sont indiscernables.
Supposons qu'il n'y ait que k sortes d'objets distincts sur les n objets. Il y a : n_1 objets de la 1-ère sorte, n_2 objets de la 2-ème sorte.... n_k objets de la k-ème sorte.
On a bien sûr $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
La différenciation des n_1 premiers objets donnera $n_1!$ fois plus d'éléments que ce qu'on cherche, la différenciation des n_2 premiers objets donnera $n_2!$ fois plus d'éléments que ce qu'on cherche, et finalement on trouve que $n!$ est $n_1!n_2!\cdots n_k!$ fois plus grand que le nombre cherché $\mathcal{P}$. On conclut

Proposition 2.19 *Le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres, comportant seulement $k < n$ lettres distinctes, en nombres $n_1, \ldots, n_k$ est* $\boxed{N = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}}$

Exemple 2.16 *Déterminons le nombre d'anagrammes des mots "PROBABILITE" et "MISSISSIPPI".*

2.3.7 Placement d'objets indiscernables dans des endroits discernables

On commence par la proposition admise(dont une idée de la démonstration sera donnée en cours) suivante :

Proposition 2.20 *Pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel S, si on note Σ_S^p l'ensemble défini par :* $\Sigma_S^p = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^{p} n_i = S\}$ *alors* $\boxed{\mathrm{card}(\Sigma_S^p) = C_{S+p-1}^{p-1}}$.

Corollaire 2.21 *Le nombre N de façons de placer S objets (boules, billes, particules $\cdots$) indiscernables dans p urnes(ou cases ou tiroirs ou cellules $\cdots$) discernables, chaque urne pouvant contenir éventuellement plusieurs objets est* $\boxed{N = C_{S+p-1}^{p-1}}$

Exemple 2.17 *Lors d'un sondage dans une université on pose à 100 étudiants une question comportant 3 réponses possibles(pour, contre ou sans avis concernant un sujet précis). Quel nombre N de répartitions différentes peut-on obtenir ? (on demande comment peuvent se répartir les 100 réponses selon les trois cas possibles)*

Réponse : $p = 3$, $S = 100$, $N = C_{102}^2 = \dfrac{102.101}{1.2} = 5\,151$.

2.4 Résumé de quelques situations concrètes pour choisir p éléments parmi n éléments distincts

Dans un problème de dénombrement, le vocabulaire utilisé est très important : il permet de déterminer dans quel cas on se situe. Il faut donc retenir les correspondances suivantes (premier tableau) et utiliser alors suivant chacun des cas le deuxième tableau suivants :

$O + R = n^p$

$O + \overline{R} = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$\overline{O} + \overline{R} = C_n^p$

$\overline{O} + R = K_n^p = C_{n+p-1}^p$

En français	En maths
Successivement	AVEC ORDRE
Simultanément	SANS ORDRE
Avec remise	AVEC RÉPÉTITION
Sans remise	SANS RÉPÉTITION

sont les mêmes

	AVEC RÉPÉTITION	SANS RÉPÉTITION
AVEC ORDRE	n^p	A_n^p
SANS ORDRE	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$	C_n^p

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

Conditions	Conditions d'utilisation	Le nombre de tirages possibles est le nombre de :	Un exemple usuel
aucune	les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés	Arrangements avec répétitions, soit : n^p	lancers successifs d'un dé p fois avec $n = 6$
aucune	les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont non ordonnés	Combinaisons avec répétitions, soit : C_{n+p-1}^p	lancers simultanés de p dés identiques avec $n = 6$
$p \leqslant n$	les p éléments sont tous distincts et ordonnés	Arrangements sans répétitions, soit : A_n^p	tirages successifs sans remise de p objets parmi n.
$p = n$	les n éléments sont tous distincts et ordonnés	permutations des n éléments de E, soit : $n!$	anagrammes d'un mot formé de n lettres toutes distinctes
$p \leqslant n$	les p éléments sont tous distincts et non ordonnés	Combinaisons sans répétitions, soit C_n^p	tirages simultanés de p objets parmi n.

$= C_n^{n-p}$

Remarque 2.1

Selon les auteurs ou les ouvrages, les combinaisons peuvent être notées par C_n^p ou $\dbinom{n}{p}$ pour $p \leqslant n$.

2.5 Exercices avec réponses

Exercice 1 : *32 Cartes = Belote*

Soit un jeu de 32 cartes. On appelle main un ensemble de 5 cartes.

1. Combien y a t-il de mains différentes ?

2. Combien y a t-il de mains à 3 cœurs et 2 trèfles ?

3. Combien y a t-il de mains à au moins 2 carreaux ?

4. Combien peut-on déterminer de mains de 5 cartes contenant exactement 1 roi et 2 dames ?

Réponses de l'exercice 1

1. C_{32}^5 *2.* $C_8^3.C_8^2$

3. on passe par le complémentaire (avoir exactement 0 carreau ou exactement 1 carreau) :

$C_{32}^5 - (C_8^0.C_{24}^5 + C_8^1.C_{24}^4)$

4. $C_4^1.C_4^2.C_{24}^2 = 6624$

(32-8=24 les autres cartes examinées ne sont ni des rois, ni des dames...)

Exercice 2 : *Groupes de T.P.*

Un groupe de T.D. dans une discipline universitaire est constitué de 12 étudiants (sexe masculin) et 12 étudiantes (sexe féminin). Le responsable de T.P. répartit au hasard l'ensemble des 24 étudiants en six groupes de quatre étudiants chacun. Les groupes sont numérotés (Gr1,...,Gr6) mais l'ordre des étudiants dans un groupe est sans importance.

1. Déterminer le nombre de répartitions possibles.

2. Déterminer le nombre de répartitions où chaque groupe comprend deux étudiants et deux étudiantes.

3. Déterminer le nombre de répartitions où chaque groupe est constitué d'étudiant(e)s de même sexe.

Réponses de l'exercice 2

1. $\frac{24!}{4!^6}$ *2.* $\left(\frac{12!}{2!^6}\right)^2$ *3.* $C_6^3\left(\frac{12!}{4!^3}\right)^2$

Exercice 3 : *Poker(***)*

Une main au poker est constituée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant des carrés (XXXXY) ? des fulls (XXXYY) ? des brelans (XXXYZ) ? des doubles paires (XXYYZ) ? des paires (XXYZA) ?

Deux lettres identiques (par exemple XX) correspondent à deux cartes de même hauteur (par exemple deux dames).

Réponses de l'exercice 3

624 carrés, 3744 fulls, 54912 brelans...

123 552 doubles paires, 1 098 240 paires.

Exercice 4 : *Relation de Pascal*

Démontrer la relation de Pascal suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Solution :

On démontre la relation de Pascal par deux méthodes.

— **Méthode combinatoire** $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments parmi un ensemble A qui en contient n.

On considère un élément x de A. Pour constituer une partie à k éléments il y a deux façons :

— soit cette partie contient x ; il y a alors $\binom{n-1}{k-1}$ façons de choisir les $k-1$ autres élements parmi les $n-1$ restants

— soit cette partie ne contient pas x ; il y a alors $\binom{n-1}{k}$ façons de choisir les k élements parmi les $n-1$ restants

Au total, on a bien la relation de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

— **Méthode calculatoire** En utilisant la formule algbrique $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, on a

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}
\end{aligned}$$

puis, en factorisant et mettant sur le même dénominateur

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n}{(n-k)k}\right) \\
&= \frac{(n-1)! \times n}{[(k-1)! \times k]\,[(n-k-1)! \times (n-k)]} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Exercice 5 : *Combinaisons*

Montrer que :

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$$

Solution :

on a $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p = C_{n-1}^{p+1} + C_{n-1}^p + C_n^p = C_{n-2}^{p+1} + C_{n-2}^p + C_{n-1}^p + C_n^p = ... = \sum_{k=p}^{n} C_k^p$ (le faire proprement par récurrence).

on peut aussi le démontrer par le dénombrement (plus intuitif, mais pas évident...)