

Examen de rattrapage de Probabilités-Statistiques

Date : 21 février 2019

Durée : 1h30min

Exercice 1 :

Dans une étude sur l'anesthésie, on désire évaluer l'effet d'un somnifère S sur une population \mathcal{P} définie par certaines caractéristiques biologiques.

On admet que la durée de sommeil X d'un sujet de \mathcal{P} ayant reçu une dose donnée de S , a une loi qui peut être assimilée à une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ (d'espérance mathématique m et d'écart-type σ).

X , m et σ sont données en minutes (min). On suppose dans la suite que $m = 160$ min et $\sigma = 10$ min.

- 1) Déterminer la probabilité qu'un sujet ait une durée de sommeil dans l'intervalle $[150, 180]$.
- 2) Déterminer la probabilité qu'un sujet ait une durée de sommeil dans l'intervalle $[166, 174]$.
- 3) Déterminer l'intervalle $[a, b]$ centré en m tel que $P[a \leq X \leq b] = 0,82$.
- 4) Déterminer le réel α tel que $P[X \geq \alpha] = 0,25$. Que représente α pour cette étude biologique ?

N.B. : On utilisera la table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ donnée dans la page suivante pour répondre aux questions de cet exercice.

Exercice 2 :

Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un certain type de comprimés.

Un comprimé est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle $[1.2 ; 1.3]$.

La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0,98. On choisit un comprimé au hasard dans la production.

On note :

- C : l'événement « le comprimé est conforme » ;
- R : l'événement « le comprimé est refusé ».

On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- un comprimé qui est conforme est accepté avec une probabilité de 0,97.
- un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

On a donc

$$P(C) = 0,98 \qquad P(\overline{R}|C) = 0,97 \qquad P(R|\overline{C}) = 0,99$$

On admettra que $P(E|F) + P(\overline{E}|F) = 1$ pour E et F des événements quelconques tels que $P(F) \neq 0$.

- 1) Déterminer

$$P(R|C), \qquad P(R \cap C), \qquad P(R \cap \overline{C}),$$

- 2) Calculer

- a) la probabilité qu'un comprimé soit refusé (c'est-à-dire calculer $P(R)$),

- b) la probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il est refusé.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = a \sin(x) \times \mathbb{I}_{]0, \pi[}(x) = \begin{cases} a \sin(x) & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

- 1) Déterminer la constante a telle que f soit une densité de probabilité.

On utilisera la valeur trouvée de a dans la suite de l'exercice.

- 2) Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f :

- Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X .
- Tracer brièvement les courbes de f et F sur deux repères orthogonaux.

Exercice 4 :

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

- 1) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre commun λ . Déterminer la distribution de $Y = \min(X_1, X_2)$ en déterminant la fonction de répartition de Y .

- 2) D'un jeu de 32 cartes, on extrait 5 cartes simultanément(en même temps et sans remise) . Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 dames et 3 trèfles.

FIN DE L'ÉPREUVE. BON TRAVAIL