Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique

Année 2019-2020
SMA-SMI (S4)
Analyse numérique

TD n° 2

Exercice 1.

1. Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1,3]$ et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.
   - $a)$ Situer les 4 racines de f (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).
   - $b)$ Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.

   Soit la méthode de point fixe $\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k), \\ x_0 \in]0,1[. \end{cases}$ (1)

   avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{exp(x^2)}}{2}$.
   - $c)$ Examiner la convergence de cette méthode en précisant l'ordre de convergence.
   - $d)$ Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.
   - $e)$ Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

Exercice 2. On considère l'équation

$$f(x) = 1 - 2x + ln(x+1) = 0 \qquad (1)$$

1. Déterminer le nombre et la position approximative des racines réelles de l'équation (1).
2. Déterminer combien vous devrez faire d'itérations pour calculer, à l'aides de la méthode de la bissection et avec une précision de $\varepsilon = 10^{-1}$, une valeur approchée de la racine α située dans l'intervalle $[0,1]$.
3. Utiliser l'algorithme de bissection pour calculer une valeur approchée x_k à $\varepsilon = 0.25$ près de la racine α de (1) située dans l'intervalle $[0,1]$.
4. Ecrire la méthode de Newton pour résoudre (1). Quel est son ordre de convergence.
5. Utiliser l'algorithme de Newton pour calculer une valeur approchée x_k à $\varepsilon = 0.25$ près de la racine α de (1) à partir du point $x_0 = 0.5$.

Exercice 3. On veut résoudre l'équation $\sin(x) - 4x = 0,\ x \in]-1,\ 1[,$ par la méthode de point fixe
$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k), \\ x_0 \in]-1,\ 1[. \end{cases}$

avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \dfrac{x + \sin(x)}{5},\ x \in]-1,\ 1[.$

1. Monter que $\forall\, x \in]-1,\ 1[,\ \phi(x) \in]-1,\ 1[.$
2. Faire une étude de la fonction ϕ' (utiliser le tableau de variation de ϕ').

3. Monter que $\exists\ k$ tel que $0 < k < 1,\ \ \forall (x,y) \in]-1,\ 1[^2,\ \ |\phi(y) - \phi(x)| \leqslant\ k\ |y-x|$.
4. En déduire que ϕ possède une racine unique α sur $]-1,\ 1[$.
5. Utiliser la méthode de point fixe pour calculer α ($x_0 = 10^{-5}$).

Exercice 4. Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $f(a) < 0 < f(b)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,\ b]$. On considère la suite récurrente

$$\begin{cases} x_0 \in [a,\ b], \\ x_{n+1} = F(x_n), \quad n \neq 0, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

1. Montrer que f a un unique zéro $\alpha \in [a,\ b]$.
2. Calculer $F'(\alpha)$.
3. Montrer que pour tout $x \in [a,\ b]$, il existe $z \in [x,\ \alpha]$ tel que : $\qquad F(x) - \alpha = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-\alpha)^2$.
4. En déduire qui'il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - \alpha| \leqslant C|x-\alpha|^2$ pour tout $x \in [a,\ b]$.
5. On suppose de plus que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [a,\ b]$ et $x_0 \in]\alpha,\ b]$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et et minorée par α.
6. On admet que α est l'unique point fixe de F. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (quadratiquement) vers α.
7. Posons $f(x) = x^2 - \alpha$ avec $\alpha > 0$.
   (a) Monter que $x_{n+1}^2 - \alpha = \dfrac{1}{4}\dfrac{(x_n^2-\alpha)^2}{x_n^2}$
   (b) Monter que si $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \sqrt{\alpha}$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\alpha}$.

TD n° 2

Correction 1 1. On cherche les zéros de la fonction $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2 \\ \forall\, x \in [1, 3],\ x_0 = 2, \end{cases}$ par :

— la méthode de dichotomie

$*$ $f(a_k) \times f(b_k) < 0$,

$*$ on pose $a_0 = a,\ \ b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$,

$*$ pour $k \geqslant 0$,

Si $f(a_k) \times f(x_k) < 0$ on pose $\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = x_k, \end{cases}$

Sinon on pose $\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = x_k, \end{cases}$ et $x_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$
0	1	3	2	-1	7	2
1	1	2	1.5	-1	2	0.25
2	1	1.5	1.25	-1	0.25	-0.4375
3	1.25	1.5	1.3750	-0.4375	0.25	-0.1094

— la méthode de Newton

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \dfrac{1}{2}x_k + \dfrac{1}{x_k}, \end{cases}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}
0	2	2	4	1.5
1	1.5	0.25	3	1.4167
2	1.4167	0.0069	2.833	1.4142
3	1.4142	6.0073×10^{-6}	2.8284	1.4142

On constate que la méthode de Newton converge plus rapidement que la méthode de Dichotomie vers la solution exacte $\sqrt{2}$.

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.

$a)$ On remarque que $Df = \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire. on fait donc une brève étude de f sur $[0, +\infty[$,

$$\forall\, x \in [0, +\infty[,\ f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x = 2x(e^{x^2} - 4, \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 = \ln(4) \Rightarrow x_2 = \sqrt{\ln(4)}, \end{cases}$$

x	0		$\sqrt{\ln(4)}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$4(1-\sqrt{\ln(4)})$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f admet donc
une racine dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\ln(4)}[$,
une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{\ln(4)}, 0[$,
une racine dans l'intervalle $]0, \sqrt{\ln(4)}[$
et une racine dans l'intervalle $]\sqrt{\ln(4)}, +\infty[$.

$b)$ La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ et comme $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 4 < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$b)$ Etude de la convergence de la méthode (1) :

— **Condition nécessaire** (l'équation $f(x) = 0$ est un problème de point fixe pour la fonction ϕ)

$$\forall\, \alpha \in]0,1[, \qquad f(\alpha) = 0 \iff e^{\alpha^2} = 4\alpha^2 \iff \sqrt{e^{\alpha^2}} = 2\alpha \iff \phi(\alpha) = \alpha.$$

— **Conditions suffisantes** (ϕ stable + contractante)

$*$ $\forall\, x \in]0,1[, \qquad 0 < x^2 < 1 \iff 0 < 1 < e^{x^2} < e \iff 0 < \sqrt{\frac{e^{x^2}}{4}} < \sqrt{\frac{e}{4}} < 1$

$$\iff 0 < \phi(x) < 1 \iff \phi\big(]0,1[\big) \subset]0,1[.$$

$*$ La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1\big(]0,1[\big)$, on a donc pour tout x dans $]0,1[$

$$\big|\phi'(x)\big| = \Big|\frac{x\sqrt{e^{x^2}}}{2}\Big| = \big|x\phi(x)\big| < |x| < 1, \quad \big(\text{car} \quad |\phi(x)| < 1\big),$$

donc ϕ est contractante, et par la suite la méthode (1) converge vers α point fixe de ϕ et racine de f. De plus, étant donné que

$$\phi'(\alpha) = \alpha\phi(\alpha) = \alpha^2 \neq 0,$$

la méthode du point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1.

$c)$ La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Elle s'écrit donc ici :

$$x_{k+1} = \phi(x) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k e^{x_k^2} - 8x_k}.$$

Vérifiant la condition $|\phi'(\alpha)| < 1$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{\big(f'(x)\big)^2 - f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad |\phi'(\alpha)| = \Bigg|\frac{\overbrace{f(\alpha)}^{=0}\, f''(\alpha)}{\big(f'(\alpha)\big)^2}\Bigg| = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\phi'(\alpha)| < 1$$

Alors la méthode de Newton converge vers α. De plus étant donné que

$$\phi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{2\alpha e^{\alpha^2} - 8\alpha}{2e^{\alpha^2} + 4\alpha e^{\alpha^2} - 8} \neq 0,$$

et donc la méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode du point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.

On a vu dans le cours le résultat suivant

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, et on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$. Si x_0 est pris assez proche de la racine α, alors la méthode de Newton est d'ordre 2.

Remarque 1. *La convergence vers α de la méthode de Newton est linéaire si α est une racine multiple de f. Dans certains cas particuliers, la convergence peut être d'ordre supérieur à 2. Alors, ici comme α est une racine simple de f, la méthode de Newton converge à l'ordre 2.*

Correction 2 1. On a $Df =]-1, = \infty[$, donc

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[,\ f'(x) = -2 + \frac{1}{1+x} = \frac{-2x-1}{1+x}, \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0.405	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit que f admet :

une racine α_1 dans l'intervalle $]-1, -\frac{1}{2}[$,

une racine α_2 dans l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. Le nombre minimal d'itérations k doit vérifier

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1 \quad \Longrightarrow \quad k \geqslant \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

$$\Longrightarrow \quad k \geqslant \frac{\ln(1-0) + \ln(10)}{\ln(2)} \quad \Longrightarrow \quad k = \left[\frac{\ln(10)}{\ln(2)}\right] = 4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = 4}.$$

3. Utilisant l'algorithme de bissection pour calculer une valeur approchée x_k à $\varepsilon = 0.25$ près de la racine α de (1) située dans l'intervalle $[0, 1]$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_k)$	$\frac{\lvert b-a \rvert}{2}$
0	0	1	1	-0.3	0.5	0.4	0.5
1	1	0.5	1	0.4	-0.3	0.05	0.25
2	0.75	-1	-0.05	-0.3	0.875	-0.12	0.125

On prend donc $\alpha = \frac{7}{8} = 0.875$, milieu de l'intervalle $[\frac{3}{4}, 1]$.

4. Méthode de Newton

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{\big(1 - 2x_k + \ln(x_k+1)\big)(x_k+1)}{-2x_k - 1}, \end{cases}$$

5. Utilisant l'algorithme de Newton pour calculer une valeur approchée x_k à $\varepsilon = 0.25$ près de la racine α de (1) à partir du point $x_0 = 0.5$.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_{k+1}-x_k\|$
0	0.5	0.4	-1.333	0.8	0.3
1	0.8	-0.01	-1.444	0.79	0.01

$x_k = 0.79$ est une valeur approchée de α avec la précision $\varepsilon = 0.25$.

Correction 3 1. On a : $-1 < x < 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ alors :

$$-1 < -\frac{2}{5} \leqslant \frac{x+\sin(x)}{5} \leqslant \frac{2}{5} < 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 < \phi(x) < 1.$$

2. La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$ nous avons donc pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\phi'(x) = \frac{1+\cos(x)}{5} \quad \text{et} \quad \phi''(x) = -\frac{\sin(x)}{5}.$$

x	-1		0		1
ϕ''		$+$	0	$-$	
ϕ'	$\frac{1+\cos(1)}{5}$	$\nearrow$	$\frac{2}{5}$	$\searrow$	$\frac{1+\cos(1)}{5}$

3. D'après la Question 2, on a : $\forall\, x \in]-1,\ 1[,\ |\phi'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$. Donc

$$|\phi(y)-\phi(x)| \;=\; \left|\int_x^y \phi'(t)\,dt\right| \;\leqslant\; \int_x^y |\phi'(t)|\,dt \;\leqslant\; \left|\int_x^y \tfrac{2}{5}\,dt\right| = \tfrac{2}{5}\,|y-x|$$

D'où $0 < k = \frac{2}{5} < 1$ et on en déduit alors que ϕ est contractante.

4. On a :

$$\begin{cases} \phi(]-1,\ 1[) \subset]-1,\ 1[, \\ \phi \text{ est contractante} \end{cases}$$

Donc d'après le **Théorème du point fixe** ϕ possède une racine unique α sur $]-1,\ 1[$.

5. la méthode de point fixe

$$\begin{cases} x_0 = 10^{-5} \\ x_{k+1} = \phi(x_k) = \dfrac{x_k+\sin(x_k)}{5}, \end{cases}$$

k	x_k	$x_{k+1} = \phi(x_k)$	$\|x_{k+1}-x_k\|$
0	1.0000×10^{-5}	4.0000×10^{-6}	6.0000×10^{-6}
1	4.0000×10^{-6}	1.6000×10^{-6}	2.4000×10^{-6}
2	1.6000×10^{-6}	6.4000×10^{-7}	9.6000×10^{-7}
3	6.4000×10^{-7}	2.5600×10^{-7}	3.8400×10^{-7}
4	2.5600×10^{-7}	1.0240×10^{-7}	1.5360×10^{-7}
5	1.0240×10^{-7}	4.0960×10^{-8}	6.1440×10^{-8}

On constate que la méthode de fixe converge vers la solution exacte 0.

Correction 4 1. La fonction f est continue sur $[a,\ b]$ et $f(a) < 0 < f(b)$ donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), il existe au moins un $\alpha \in [a,\ b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Comme $f'(x) > 0$ ce qui implique que f est strictement croissante, d'où l'unicité de la racine α.

2. Calculer $F'(\alpha)$.

   On a $F'(x) = 1 - \dfrac{\big(f'(x)\big)^2 - f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$.

   On en déduit donc $F'(\alpha) = \dfrac{\overbrace{f(\alpha)}^{=0} f''(\alpha)}{\big(f'(\alpha)\big)^2} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F'(\alpha) = 0}$.

3. Rappelons le théorème suivant :

   Théorème (Théorème de Taylor Lagrange). *Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors $\exists\, z \in [a,\ b]$ tel que*

   $$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z).$$

   Soit $x \in [a,\ b]$, on suppose par exemple que $x < \alpha$. D'après le **Théorème de Taylor Lagrange** appliqué à f sur l'intervalle $[x,\ \alpha]$, on a :

   $$\begin{aligned}\overbrace{f(\alpha)}^{=0} &= f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2} f''(z)\\ 0 &= \frac{f(x)}{f'(x)} + (\alpha - x) + (\alpha - x)^2 \frac{f''(z)}{2f'(x)}\end{aligned}$$

   Ce qui donne

   $$x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha = (\alpha - x)^2 \frac{f''(z)}{2f'(x)},$$

   D'où

   $$F(x) - \alpha = (\alpha - x)^2 \frac{f''(z)}{2f'(x)}.$$

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2 \Rightarrow \begin{cases} f' \text{ est continue sur } [a,\ b] \text{ fermé, borné } \Rightarrow \text{ minorée par } m, \\ f'' \text{ est continue sur } [a,\ b] \text{ fermé, borné } \Rightarrow \text{ majorée par } M. \end{cases}$

   Ainsi, pour tout $x \in [a,\ b]$ on obtient

   $$\begin{aligned}\big|F(x) - \alpha\big| &= \left|(\alpha - x)^2 \frac{f''(z)}{2f'(x)}\right|\\ &\leqslant \frac{M}{2m}\big|(\alpha - x)^2\big| = C\big|(\alpha - x)^2\big|.\end{aligned}$$

   $$\Longrightarrow \quad \forall\, x \in\ [a,\ b],\ \exists\, C > 0 \quad \text{tel que} \quad |F(x) - \alpha| \leqslant C|x - \alpha|^2.$$

5. On a : $\left\{\begin{array}{l} f'(x) > 0,\ \ \forall x \in [a,\ b] \\ f(\alpha) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ est strictement croissante} \\ f(\alpha) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in\ ]\alpha,\ b]$

   D'autre part, $F'(x) = \dfrac{\overbrace{f(x)}^{>0}\overbrace{f''(x)}^{>0}}{f'^2(x)} > 0,\ \forall x \in]\alpha,\ b]$. Donc F est croissante sur $]\alpha,\ b]$.

   Par conséquent, $\alpha < x_0 \ \Rightarrow\ F(\alpha) = \alpha \leqslant F(x_0) = x_1$. Donc $x_1 \in]\alpha,\ b]$

   De plus, $F(x_0) = x_1 = x_0 - \dfrac{\overbrace{f(x_0)}^{>0}}{\overbrace{f'(x_0)}^{>0}} < x_0$.

   D'où,

   $$\alpha \leqslant x_1 < x_0$$

H. R. On suppose que $\alpha \leqslant x_n < x_{n-1}$ et on montre que $\alpha \leqslant x_{n+1} < x_n$.

$$\overbrace{\alpha < x_n}^{H.R.} \Rightarrow F(\alpha) = \alpha \overbrace{\leqslant}^{F:croissante} F(x_n) = x_{n+1} \qquad \text{et} \qquad F(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{\overbrace{f(x_n)}^{(H.R.)>0}}{\underbrace{f'(x_n)}_{>0}} < x_n$$

D'où le résultat.

6. On admet que α est l'unique point fixe de F. Montrerons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (quadratiquement) vers α.
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée, donc elle converge. Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$
   Alors $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F(x_{n-1}) \overbrace{=}^{F:continue} F(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}) = F(l) \Rightarrow l$ est un point fixe de F.
   D'où $l = \alpha$. (α est l'unique point fixe de F)
   D'après la Question 4 on a :
   $$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} \leqslant C$$
   Ainsi, la convergence est d'ordre 2.
7. Posons $f(x) = x^2 - \alpha$ avec $\alpha > 0$.
   (a) Monterons que $x_{n+1}^2 - \alpha = \frac{1}{4}\frac{(x_n^2-\alpha)^2}{x_n^2}$. $f(x) = x^2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad F(x) = x - \frac{x^2-\alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$. Donc
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - \alpha &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)\right)^2 - \alpha = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{x_n^2}\right) - \alpha = \frac{x_n^4 + 2\alpha x_n^2 + \alpha^2 - 4\alpha x_n^2}{4x_n^2} \\ &= \frac{(x_n^2)^2 - 2\alpha x_n^2 + \alpha^2}{4x_n^2} = \frac{(x_n^2 - \alpha)^2}{4x_n^2} \end{aligned} \tag{2}$$
   (b) Monterons que si $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \sqrt{\alpha}$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   On a d'après l'équation (2), $x_{n+1}^2 - \alpha = \frac{1}{4}\frac{(x_n^2-\alpha)^2}{x_n^2} \geqslant 0$.
   Donc $\forall\, n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \sqrt{\alpha}$
   $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \overbrace{1}^{x_n \geqslant \sqrt{\alpha}}\right) = 1$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée, donc elle converge. Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}$
   Alors $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \frac{\alpha}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right)$
   Donc $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right)$
   d'où $l = \sqrt{\alpha}$(on prend la racine positive).