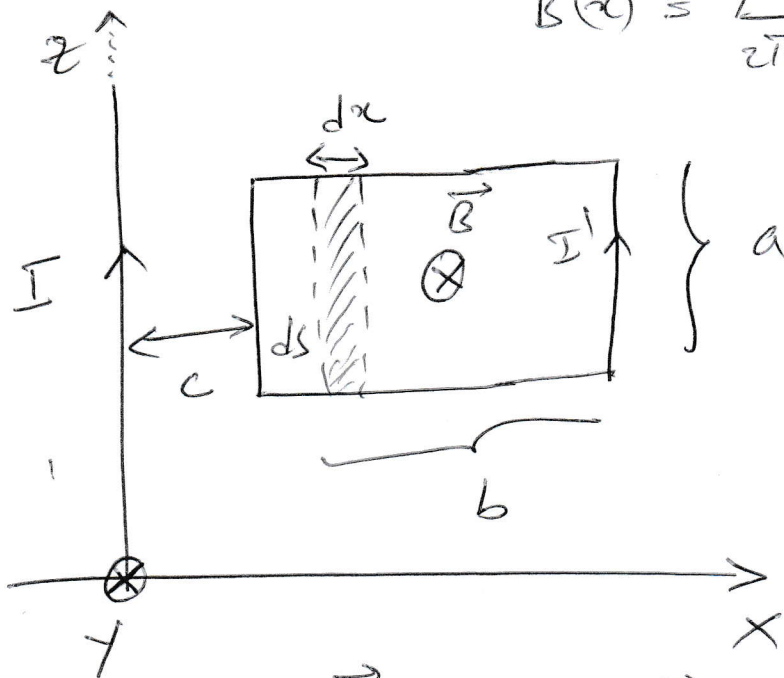


Serie 2 suite

Exercice 5

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y \quad \text{créée par } I \text{ sur } \vec{Ox}$$



$$d\phi_{12} = \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{cadre}} ; d\vec{S} \equiv \text{elt de surface du cadre}$$

$$d\vec{S} = -a dx \vec{e}_y \quad \text{selon de } I'$$

(Remarque : si on inverse $I' \Rightarrow d\vec{S} = a dx \vec{e}_y$)

circuit ① = fil placé sur $Ox \rightarrow I$

circuit ② = cadre ABCD. $\rightarrow I'$

$$d\phi_{12} = \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{cadre}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y \cdot (-a dx \vec{e}_y)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{dx}{x}$$

$$\phi_{12} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_c^{c+b} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{c+b}{c}\right)$$

= flux engendré par le fil à travers le cadre

$$\phi_{12} = M_{12} I \Rightarrow M_{12} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{c+b}{c}\right)$$

M_{12} ne dépend que des paramètres géométriques des deux circuits.

FACULTE POLYDISCIPLINAIRE DE KHOURIBGA

Module : Physique 3

Electricité II

Série N° 2 : suite

Semestre 3 - Année Universitaire 2017 / 18

EXERCICE 1 : Cadre en chute libre

Un cadre métallique carré MNPQ, de côté ℓ et de résistance R , est abandonné sans vitesse initiale, par rapport à un référentiel absolu $\mathcal{R}(O; X, Y, Z)$, dans une région de l'espace ($z < 0$) où règne un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_a = B_a \cdot \vec{e}_y$. Au cours de la chute, son plan coïncide avec le plan vertical (ZOX); à l'instant pris comme origine, le côté inférieur MN du cadre est à la cote $Z = 0$.

Déterminer l'expression de la force électromotrice d'induction (f.é.m) dans le cadre à partir de la loi de FARADAY. Retrouver cette expression à l'aide de l'expression générale de la f.é.m. Calculer le courant électrique induit dans le cadre. Calculer la variation de la vitesse du cadre en fonction du temps.

EXERCICE 2 : Courant de Foucault

Une spire circulaire de rayon a , de résistance R et d'inductance propre négligeable, est fixe en O sur son axe OZ.

I - Sur l'axe OZ, on approche de la spire le pôle Nord d'un aimant P, d'abscisse $z < 0$, à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_z$, (vitesse constante positive). On suppose que le champ $\vec{B}(M)$ créé par l'aimant est le même que celui d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} porté par OZ, et dans le potentiel vecteur est $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

1- Calculer le flux $\Phi(t)$ de \vec{B} à travers la spire en utilisant le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$. Exprimer $\Phi(t)$ en fonction de $z(t)$.

2- En déduire la f.é.m. $e(t)$ induite dans la spire en fonction de $v = \frac{dz}{dt}$

3- Retrouver ce résultat en utilisant le champ électromoteur de Neumann.

4- Calculer alors le courant induit $i(t)$. La loi de Lenz est-elle vérifiée ? Justifier votre réponse.

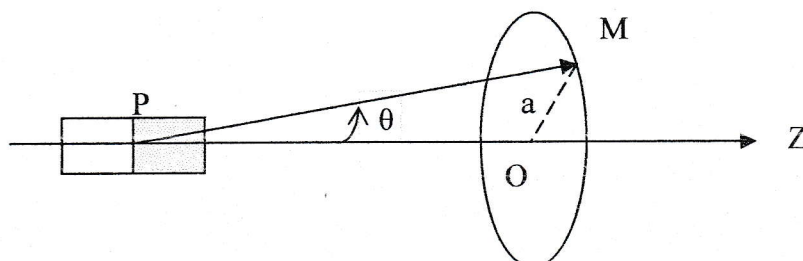
II- l'aimant P est maintenant fixe. On approche la spire de l'aimant avec une vitesse constante $\vec{v} = -v \vec{e}_z$ ($v > 0$).

1- Ecrire les composantes de $\vec{B}(M)$ en coordonnées sphériques.

2- Déterminer, en fonction de θ puis de $z(t)$, le champ électromoteur de Lorentz E_m en chaque point de la spire.

3- Calculer la f.é.m. $e'(t)$ induite dans la spire et en déduire le courant induit $i'(t)$

4- Comparer ce résultat à celui de la question (I-4), conclure.



EXERCICE 3 : Facultatif, glissement d'une barre sur deux rails

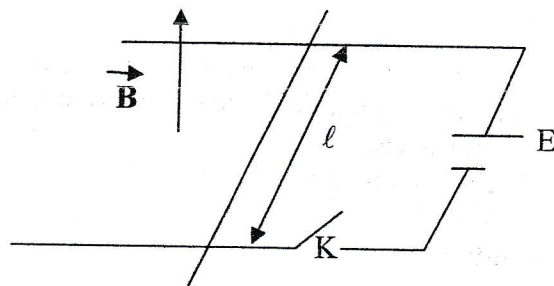
Une barre de longueur ℓ et de masse m glisse sur deux rails dans un champ magnétique perpendiculaire au plan formé par la barre et les rails (voir figure). La résistance totale du circuit est une constante égale à R .

1- À l'instant $t = 0$, la barre mobile étant immobile, on ferme l'interrupteur K . En admettant que la barre glisse sans frottement sur les rails, déterminer la variation de la vitesse de celle-ci avec le temps.

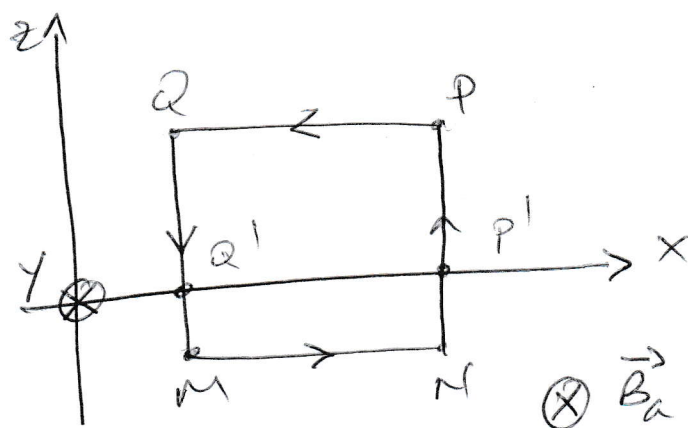
Montrer que cette vitesse atteint une valeur limite.

2- On suppose que la valeur limite ci-dessus est atteinte au bout du temps t_1 . À ce moment, la barre est soumise à une force de frottement f constante.

Déterminer les variations de la vitesse en fonction du temps en prenant t_1 pour une nouvelle origine des temps.



Exercice 1



a) $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$ loi de Faraday

$$\Phi = \iint_{\text{surface du cadre}} \vec{B}_a \cdot d\vec{S} \neq 0 \text{ pour } z < 0$$

$$= \iint_S B_a \vec{e}_y \cdot d\vec{S} (-\vec{e}_y) ; d\vec{S} = dS (-\vec{e}_y) \text{ pour l'orientation } MNPQ$$

$$\|d\vec{S}\| = dS = l dz$$

$$= \int_z^0 B_a l dz = B_a l z$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = - B_a l \frac{dz}{dt}}$$

b) calcul direct: $\mathcal{E} = \oint_{\text{cadre}} (\vec{v} \wedge \vec{B}_a) \cdot d\vec{l} ; \vec{v} = v \vec{e}_y = \frac{dz}{dt} \vec{e}_y$

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{cadre}} v B_a (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_y) \cdot d\vec{l} = - \int_{\text{cadre}} v B_a \vec{e}_z \cdot d\vec{l}$$

$$= - \left[\int_{MN} () + \int_{NP'} + \int_{P'Q'} + \int_{Q'M} \right]$$

$$\int_{NP'} v B_a \vec{e}_z \cdot d\vec{l} = \int_{Q'M} v B_a \vec{e}_z \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car } \vec{e}_z \perp d\vec{l}$$

$$\int_{P'Q'} v B_a \vec{e}_z \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car } B_a = 0$$

$B_a \neq 0 \text{ pour } z < 0$

donc $\epsilon = - \int_M^N v B_a dl = - v B_a l = - B_a l \frac{d\beta}{dt}$ (2)

($v = \frac{d\beta}{dt}$)

a) et b) donc le même résultat.

2/ calcul du courant. $i = \frac{\epsilon}{R} = - \frac{B_a l}{R} \frac{d\beta}{dt} > 0$

car $\frac{d\beta}{dt} < 0 \Rightarrow$ sens du courant est (MNPQ)

3/ Principe fondamental de la dynamique.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} + \vec{F}_d$$

$\vec{F}_d \equiv$ force de Laplace appliquée au cadre par \vec{B}_a .

$$\vec{F}_d = \oint_{\text{cadre}} i d\vec{l} \wedge \vec{B}_a \quad \text{seul le côté MN intervient.}$$

$= i B_a l \vec{e}_y$ est dirigée vers le haut \Rightarrow freinage du cadre par \vec{B}_a .

Projection sur l'axe Oz.

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + i B_a l$$

$$m \frac{dv}{dt} - i B_a l = -mg$$

$$i = - \frac{B_a l}{R} v$$

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{(B_a l)^2}{m R} v = -mg \quad ; \quad \text{on pose } \tau = \frac{m R}{(B_a l)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = -g \Rightarrow v = v_1 + v_2$$

$$v_1 = -g\tau ; \quad \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{\tau} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \alpha e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow v = \alpha e^{-t/\tau} - g\tau$$

condition initiale : $\vec{v} \text{ à } t=0 \Rightarrow v=0$

(3)

$$\Rightarrow v = \alpha - g \tau \Rightarrow \alpha = g \tau$$

$$\Rightarrow v(t) = g \tau (e^{-t/\tau} - 1)$$

la vitesse limite que peut atteindre le cadre

$$\text{est } v(\infty) = g \tau$$

Exercice 2 :

1/ $\phi(t) = ?$

$$\phi(t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint (\text{rot } \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} ; \quad d\vec{S} : \text{elt de surface de la spire}$$

$d\vec{l} : \text{elt du contour de la spire.}$

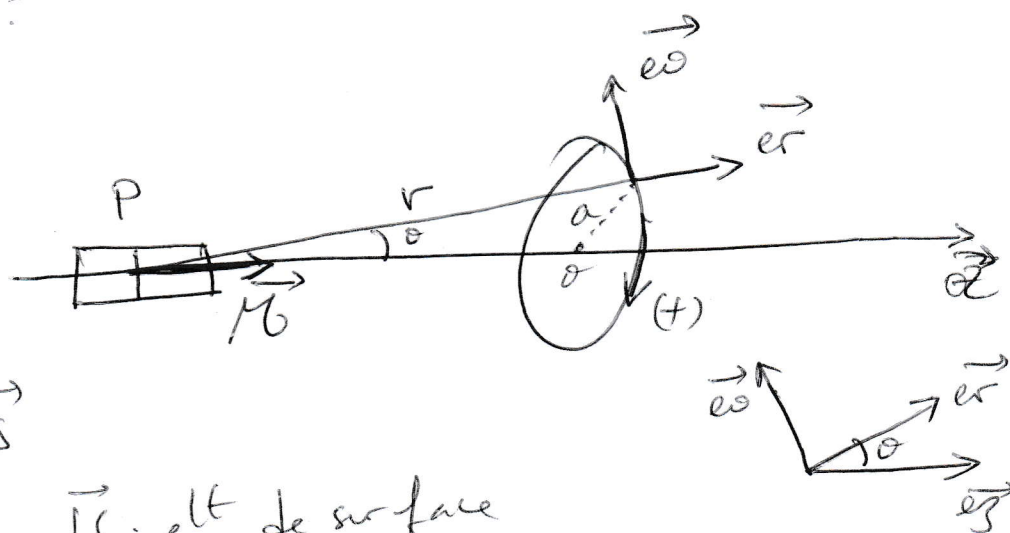
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{r^3} ; \quad \vec{B} = B \vec{e}_z ; \quad \vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} \wedge \vec{r} = B r \sin\theta \vec{e}_\varphi = B a \vec{e}_\varphi \text{ car } \sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$\text{donc } \phi(t) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{B a}{r^3} \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} \cdot \vec{e}_\varphi ; \quad d\vec{l} = dl \vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{B a}{\sqrt{a^2 + z^2}^3} \oint dl \int 2\pi a$$

$$\boxed{\phi(t) = \frac{\mu_0 B a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}}$$



$$2/ \quad e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = -v \frac{d\phi}{dz} \quad (4)$$

$$= \frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$3/ \quad \vec{E}_{em} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{champ de Newmann.}$$

$$= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} ; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M a \vec{e}_\varphi}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3\mu_0 M a v z}{4\pi (a^2 + z^2)^{5/2}} \vec{e}_\varphi$$

$$e(t) = \int_C \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = E_{em} 2\pi a = \frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2R (a^2 + z^2)^{5/2}} < 0 \quad \text{car } z < 0.$$

$\Rightarrow i(t)$ circule dans le sens opposé du sens $(+)$ choisi.
 si l'aimant s'approche de la spire $\Rightarrow \vec{B} \uparrow \Rightarrow \phi(t) \uparrow$
 \Rightarrow la spire réagit par la création d'un courant
 induit qui crée un champ d'ind \vec{B} dont le flux
 s'oppose au flux de l'aimant \Rightarrow la loi de Lenz
 est vérifiée.

$$\text{II / 1/} \quad \vec{v}(t) = -v \vec{e}_z \quad \text{avec } v > 0.$$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] & \vec{e}_r \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}) \right] & \vec{e}_\theta \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] & \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{or } A_r = A_\theta = 0; \quad A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin\theta}{r^2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow * B_r = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{1}{r^3 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta) = \frac{2\mu_0 M \cos\theta}{4\pi r^3}$$

$$* B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 M \sin\theta}{4\pi r^3}$$

$$* B_\varphi = 0. \quad \text{résultat déjà vu dans le$$

$$2/ \quad \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B} \quad \text{cours.}; \quad \vec{e}_\varphi = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta; \quad B_\varphi = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{E}_m = -v (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \wedge (B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta)$$

$$= -v (B_r \sin\theta + B_\theta \cos\theta) \vec{e}_\varphi. \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$= -\frac{3v\mu_0 M \sin\theta \cos\theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\varphi \quad \sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_m = -\frac{3v\mu_0 M (az)}{4\pi (a^2+z^2)^{5/2}} \vec{e}_\varphi.$$

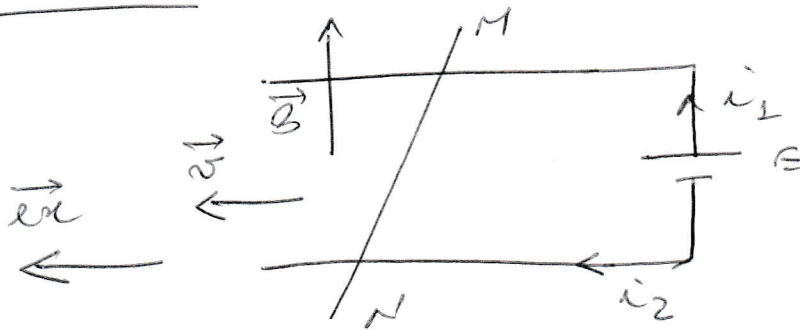
$$e'(t) = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = E_m 2\pi a$$

$$= -\frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2(a^2+z^2)^{5/2}}; \quad i'(t) = \frac{e'(t)}{R}$$

$$i'(t) = -\frac{3\mu_0 M a^2 z}{2R(a^2+z^2)^{5/2}} < 0 \quad \text{car } z > 0 \text{ et } v > 0.$$

4/ $i(t)$ garde le même sens que dans le 1^{er} cas (6)
 car lorsqu'on approche l'aimant de la spire
 $\phi(t)$ augmente comme pour le 1^{er} cas \Rightarrow dans
 les deux cas on ne fait qu'augmenter le flux
 $\phi(t) \Rightarrow i(t)$ et $i'(t)$ garde le même sens.

Exercice 3 :



Rappel

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$= q \vec{E}_m$$

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

1/

$$e = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_M^N (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{l} ; \vec{l} = \vec{MN}$$

$$= -vBl ; i_2 = \frac{e}{R} = -\frac{vBl}{R} \Rightarrow i_2 \text{ s'oppose}$$

au sens de \vec{MN}

$$I = i_1 + i_2 = \frac{E}{R} - \frac{vBl}{R}$$

Pour un circuit filiforme soumis à une force
 champ d'ind \vec{B} et parcouru par un courant I ,
 ce circuit reçoit la force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$
 on a $\vec{l} \perp \vec{B}$ et $d\vec{l}$ est indépendant de $\vec{B} \Rightarrow$
 $\vec{F} = BI \int d\vec{l} \wedge \vec{e}_x$; or $\vec{v} = v \vec{e}_x$
 on applique le P.F.D $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma} = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x$

$$\text{or } A_r = A_\theta = 0; \quad A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin\theta}{r^2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow * B_r = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{1}{r^3 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta) = \frac{2\mu_0 M \cos\theta}{4\pi r^3}$$

$$* B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 M \sin\theta}{4\pi r^3}$$

$$* B_\varphi = 0 \quad \text{résultat déjà vu dans le cours.}$$

$$2/ \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B}; \quad \vec{e}_\varphi = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta; \quad B_\varphi = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{E}_m = -v (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \wedge (B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta)$$

$$= -v (B_r \sin\theta + B_\theta \cos\theta) \vec{e}_\varphi. \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$= -\frac{3v\mu_0 M \sin\theta \cos\theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\varphi \quad \sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_m = -\frac{3v\mu_0 M (az)}{4\pi (a^2+z^2)^{5/2}} \vec{e}_\varphi.$$

$$e'(t) = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = E_m 2\pi a$$

$$= -\frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2(a^2+z^2)^{5/2}}; \quad i'(t) = \frac{e'(t)}{R}$$

$$i'(t) = -\frac{3\mu_0 M a^2 v z}{2R(a^2+z^2)^{5/2}} < 0 \quad \text{car } z > 0 \text{ et } v > 0.$$

Projection sur l'axe \vec{OX} (il n'y a pas le point) (7)

$$m\vec{g} + \vec{F}_l = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$$

$$F_l = m \frac{dv}{dt} \quad \text{or} \quad \vec{F}_l = BIl \vec{e}_x$$

$$IBl = m \frac{dv}{dt} \quad ; \quad I = \frac{E}{R} - \frac{vBl}{R} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{vBl}{R} \right) Bl = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} v = \frac{EBl}{mR} \quad (\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR} \quad \text{et } \beta = \frac{EBl}{mR}$$

$$v = v_1 + v_2$$

$v_1 \rightarrow$ solution particulière
 $v_2 \rightarrow$ solution sans second membre

$$v(t) = A e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} + \frac{E}{Bl}$$

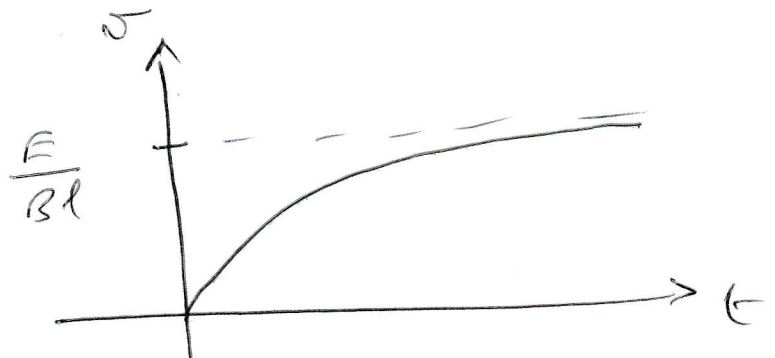
condition initiale à $t=0 \quad v(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{Bl}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{E}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right)$$

la vitesse limite

$$v(t) \rightarrow \frac{E}{Bl}$$

$$t \rightarrow \infty$$



2/ Traitement identique pour cette question, on rajoute juste la force de frottement dans le P.F.D. avec f (frottement qui s'oppose à \vec{v}).