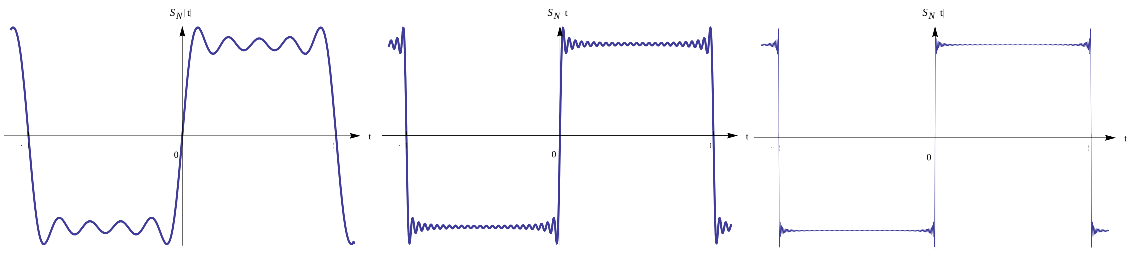
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Département des Mathématiques et Informatique
Sciences des Mathématiques et Applications (S3)

Analyse 4

$$\ddot{y} = -2m\dot{y} - w_0^2 y + A\cos(\omega x)$$



Pr. Khalid ISKAFI

2021-2022

Regarder ce cours

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Séries numériques

La série constitue une généralisation de la notion de somme pour une succession infinie de termes. L'étude des séries consiste à évaluer la somme d'un nombre fini n de termes successifs, puis, par un calcul de limite, à identifier le comportement lorsque n devient indéfiniment grand. Un certain nombre de méthodes permettent de déterminer la nature (convergence ou non) des séries sans réaliser explicitement les calculs.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Séries à termes réels ou complexes

1.1.1 Définitions de base

Définition 1.1.1. *On appelle série numérique de terme général $(u_n)_n$, une sommation infinie de nombres réels ou complexes u_n :*

$$\sum_{n \geq n_0} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots$$

Définition 1.1.2. *(Sommes Partielles d'une série)*
Soient $(u_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$ et $N \in \mathbb{N}$. On appelle somme partielle d'indice N de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la suite de terme général S_N défini par

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

Exemple. Pour la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ on a $u_n = (-1)^n$ et $S_n = 1 - 1 + \cdots + (-1)^n$.

Définition 1.1.3. *(Convergence ou Divergence d'une série)*
Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$. La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente ssi la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielle est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est divergente.

Définition 1.1.4. *(Somme d'une série convergente)*
Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente. La quantité $\lim_{n \to \infty} S_n$ est notée $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et est appelée somme de la série.

Remarque. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature. En effet

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice. Etudier la nature des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Définition 1.1.5. *(Reste d'ordre N d'une série convergente)*
Soit $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$, convergente de somme S. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On appelle reste d'ordre n de cette série la quantité notée $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

1.1.2 Propriétés des séries convergentes

Par définition, une série à termes complexes est convergente si et seulement si la série des parties réelles et la série des parties imaginaires sont toutes deux convergentes.

Proposition 1.1.1. *(Convergence des séries à termes complexes)*
La série complexe $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ est convergente ssi les séries réelles $\sum\limits_{n\geq 0} Re(z_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} Im(z_n)$ le sont.
On a alors : $\sum\limits_{n\geq 0} z_n = \sum\limits_{n\geq 0} Re(z_n) + i \sum\limits_{n\geq 0} Im(z_n)$.

Démonstration. (Exercice) □

Proposition 1.1.2. *(Condition nécessaire de convergence)*
Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. (Attention la réciproque est fausse !)
Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ou bien n'existe pas, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est dite trivialement ou grossièrement divergente.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \cos n$.

Proposition 1.1.3. *(Combinaisons linéaires de séries convergentes)*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$ et λ et μ dans $\mathbb{K}$.
Si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente et on a l'égalité : $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n + \sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Démonstration. Soient $(\bar{S}_n)_n, (\hat{S}_n)_n, (\tilde{S}_n)_n$ les suites des sommes partielles des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ respectivement. On a

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_n &= \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{(linéarité de la sommation finie)} \\
&= \bar{S}_n + \hat{S}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{S} + \hat{S}
\end{aligned}$$

donc $\tilde{S} = \bar{S} + \hat{S}$, par suite $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n + \sum\limits_{n\geq 0} v_n$. □

Remarques

- Si $\lambda \neq 0$, les séries $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda u_n)$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sont de même nature.
- Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de natures différentes, alors $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ est divergente.
- Il est possible que $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ soit convergente alors que ni $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ni $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ ne le sont. On ne développera donc pas $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ sans vérifier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Proposition 1.1.4. *(Etude d'une suite ramenée à l'étude d'une série)*
Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ a même nature (CV ou DV) que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$.

Démonstration. (Exercice) □

Remarques

- Cette propriété ramène l'étude de la suite $(u_n)_n$ à celle de la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$.
- Elle permet aussi d'étudier des séries $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, et souvent d'en calculer la somme, si le terme général v_n peut s'écrire sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Proposition 1.1.5. *(Critère de Cauchy pour la convergence d'une série)*
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si :

$$\forall \varepsilon,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ tq : \forall n \geq N_\varepsilon,\ \forall m \geq N_\varepsilon,\ \left| \sum_{k=m}^{n} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Ce critère peut encore s'écrire :

$$\forall \varepsilon,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ tq : \forall n \geq N_\varepsilon,\ \forall p \geq 0,\ \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. La preuve est simplement de dire que la suite (S_n) des sommes partielles converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. Ensuite il suffit de remarquer que

$$|S_n - S_{m-1}| = |u_m + \cdots + u_n|.$$

□

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

1.1.3 Séries géométriques

Définition 1.1.6. *Supposons que les u_k forment une suite géométrique : si a est le premier terme et z la raison, on a donc $u_k = az^k$ quel que soit l'entier $k \geq 0$. On dit que la série $\sum\limits_{k\geq 0} az^k$ est une série géométrique. Les sommes partielles sont*

$$S_n = az^0 + az^1 + az^2 + \cdots + az^n = a\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right) = a\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Proposition 1.1.6. *Supposons $a \neq 0$. La série géométrique $\sum\limits_{k\geq 0} az^k$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas, sa somme est $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} az^k = \frac{a}{1-z}$.*

Démonstration. (Exercice) $\square$

1.1.4 Séries alternées

Définition 1.1.7. *Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$.*
On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ est alternée si le signe de u_n est constant.

Proposition 1.1.7. *(Critère spécial des séries alternées)*
Si $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ est une série alternée avec $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente.
De plus on a l'inégalité :

$$|R_N| \leq |u_{N+1}|.$$

Démonstration. (Exercice) $\square$

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$.

1.1.5 Convergence absolue

Définition 1.1.8. *Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$.*
La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Proposition 1.1.8. *Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente. On a alors l'inégalité : $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$.*

Démonstration. (Exercice) $\square$

Remarques

- La réciproque de la propriété précédente est fausse.
- Toute série convergente sans être absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Proposition 1.1.9. *(Produit de deux séries absolument convergentes)*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. On définit la suite (w_n) de $\mathbb{K}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}$.
On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.
Si les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente et on a : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_n$.

Démonstration. (Exercice) □

1.2 Séries à termes positifs

Les hypothèses $u_n \geq 0$ ou $u_n \leq v_n$ ci-dessous, vraies à priori pour tout n de $\mathbb{N}$, peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang n_0 : les résultats sur la nature des séries (pas sur leur valeur) restent valables.

Compte tenu du fait que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (-u_n)$ sont de même nature, les énoncés suivants s'appliquent aussi, avec des modifications évidentes, au cas des séries réelles dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.

Les propriétés des séries à termes positifs sont très utiles pour étudier la convergence absolue des séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.2.1. *(Sommation des relations de comparaison)*
Soient (u_n) et (a_n) deux suites de $\mathbb{R}^+$. Notons S_p et S'_p les sommes partielles des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ respectivement. De même notons R_p et R'_p les restes d'ordre p.

- *En cas de convergence des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, on a :*
  - *si $u_n = O(a_n)$ alors $R_p = O(R'_p)$,*
  - *si $u_n = o(a_n)$ alors $R_p = o(R'_p)$,*
  - *si $u_n \sim a_n$ alors $R_p \sim R'_p$.*
- *En cas de divergence des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, on a :*
  - *si $u_n = O(a_n)$ alors $S_p = O(S'_p)$,*
  - *si $u_n = o(a_n)$ alors $S_p = o(S'_p)$,*
  - *si $u_n \sim a_n$ alors $S_p \sim S'_p$.*

Démonstration. • Cas de convergence.

- Si $u_n = O(a_n)$, alors u_n est absolument convergente ($|u_n| = O(a_n)$). De plus il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_*^+$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq Ma_n$.
  Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 < p < q$; par l'inégalité triangulaire et d'après le choix de n_0 :
$$\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right| \leq M \sum_{n=p+1}^{q} a_n.$$

A la limite, lorsque q tend vers l'infini, on obtient :

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n\right| \leq M \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$$

et cela est établi pour tout $p \geq n_0$;

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = O\left(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right).$$

– Si $u_n = o(a_n)$, ce qui précède peut-être repris, en remplaçant M par un $\varepsilon > 0$ arbitraire, pour montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = o\left(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right).$$

– Si $u_n \sim a_n$, on a $u_n - a_n = o(a_n)$ et le résultat précédent montre que $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$.

- Cas de divergence.

– Si $u_n = O(a_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_*^+$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq Ma_n$.
Pour $p > n_0$, on peut écrire :

$$\left|\frac{\sum\limits_{n=0}^{p} u_n}{\sum\limits_{n=0}^{p} a_n}\right| \leq \frac{1}{S_p}\left|\sum_{n=0}^{n_0} u_n\right| + \frac{1}{S_p}\left|\sum_{n=n_0+1}^{p} u_n\right| \leq \frac{1}{S_p}\left|\sum_{n=0}^{n_0} u_n\right| + M$$

car, les a_n étant des réels positifs :

$$\sum_{n=n_0+1}^{p} u_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{p} |u_n| \leq M \sum_{n=n_0+1}^{p} a_n \leq MS_p.$$

Or, $\left|\sum\limits_{n=0}^{n_0} u_n\right|$ est une constante (vis à vis de p) et $S_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$; donc $\frac{1}{S_p}\left|\sum\limits_{n=0}^{n_0} u_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par définition de la limite on peut fixer $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq n_1,\ \frac{1}{S_p}\left|\sum_{n=0}^{n_0} u_n\right| \leq M$$

et on a alors : $\forall p \geq \max(n_0, n_1)$, $\left|\sum\limits_{n=0}^{p} u_n\right| \leq 2M \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$; par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{p} u_n = O\left(\sum_{n=0}^{p} a_n\right).$$

– Si $u_n = o(a_n)$, ce qui précède peut-être repris, en remplaçant M par un $\varepsilon > 0$ arbitraire, pour montrer que $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n = o\left(\sum\limits_{n=0}^{p} a_n\right)$.

– Si $u_n \sim a_n$, on a $u_n - a_n = o(a_n)$ et le résultat précédent montre que $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n \sim \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$.

$\square$

1.2.1 Séries de Riemann

Proposition 1.2.2. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$.

Démonstration. (Exercice) □

1.2.2 Critères de convergence

Proposition 1.2.3. *(Convergence par majoration des sommes partielles)*
Soit (u_n) *une suite de* $\mathbb{R}^+$. *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente ssi la suite* (S_N) *de ses sommes partielles, qui est croissante, est majorée.*
En cas de convergence, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{N\geq 0}(S_N)$.

Démonstration. (Exercice) □

Théorème 1.2.1. *(Critère de Comparaison)*
Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites de* $\mathbb{R}^+$. *On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

- *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*
- *Par conséquent, si la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

  Dans ce cas, on a : $\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=N}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} v_n$.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$.

Proposition 1.2.4. *(Règle de* $n^\alpha u_n$*)*
S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ *tel que* $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$, *alors* $\sum_n u_n$ *converge.*

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature des séries numériques $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+1}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Proposition 1.2.5. *(Règles de D'Alembert)*
Soit (u_n) *une suite de* $\mathbb{R}^+$. *On suppose que* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1. *Si* $0 \leq l < 1$, *la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est divergente.*
3. *Si* $l = 1$ *on ne peut rien conclure (c'est le cas incertain de la règle de d'Alembert).*

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}$.

Proposition 1.2.6. *(Convergence par équivalence)*
Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Supposons $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1$. Choisissons un nombre $l > 1$, alors pour tout k assez grand, on a $\frac{u_k}{v_k} \leq l$, donc $u_k \leq lv_k$ car v_k est positif pour k assez grand. Si la série $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge, il en va de même de la série $\sum_{k\geq 0} (lv_k)$, donc, par le critère de comparaison, la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge. □

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Proposition 1.2.7. *(Règle de Cauchy)*
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

- *Si $0 \leq l < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*
- *Si $l > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.*
- *Si $l = 1$ on ne peut rien conclure.*

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n^n}$.

1.3 Comparaison d'une série à une intégrale

Proposition 1.3.1. *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux et décroissante. Alors pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p \leq q$ on a*

$$\int_{p+1}^{q+1} f(x)dx \leq \sum_{k=p+1}^{q+1} f(k) \leq \int_p^q f(x)dx.$$

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature de la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Théorème 1.3.1. *(Critère d'intégrale)*
Soit f une fonction positive décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ converge ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la nature des séries numériques $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)^2}$, $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

Corollaire 1.3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : [n, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application positive, continue par morceaux et décroissante. Alors la série $\sum\limits_{k\geq n} f(k)$ converge ssi f est intégrable sur $[n, +\infty[$ et on a*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Démonstration. (Exercice) □

1.4 Calcul approché et estimation d'erreur

On ne peut pas toujours calculer la somme S d'une série, mais on peut l'approximer ou bien majorer le reste R_n.

Si $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$, on pose

$$\sigma_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx = S - R_n + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Alors σ_n est une valeur approchée de S qui vérifie d'après le corollaire 1.3.1 :

$$0 \leq S - \sigma_n \leq \int_{n}^{n+1} f(x)dx.$$

Exercices

- Sachant que la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est $\frac{\pi^2}{6}$, déterminer une valeur approchée σ_{10} puis estimer l'erreur de cette approximation.
- Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} \simeq 1,1975$:
  - Estimer l'erreur que compte cette approximation.
  - Déterminer l'ordre de la suite (S_n) pour que la somme soit précise à moins de 5.10^{-4}.
- Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.
  - Monter que la série converge.
  - Déterminer la valeur de la somme S de la série avec une précision de 10^{-2}.

1.5 Exercices

Exercice 1.1.

Etudier la nature des séries suivantes

$$a)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2} \qquad e)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)},\ \beta\leq 1 \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+5^n}{4^n} \qquad i)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$$

Exercice 1.2. *(Examen 2018-2019)*

Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-1)^n}$ converge ssi $\alpha>\frac{1}{2}$.

Exercice 1.3. *(Contrôle 2017-2018)*

Calculer la somme des séries numériques suivantes après en avoir justifié l'existence :

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\quad\left(\text{On donne }\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\right) \qquad b)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!}.$$

Exercice 1.4.

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge. Montrer que $nu_n\to 0$ (ou pourra minorer $R_{2n}-R_n$).

Exercice 1.5. *(Contrôle 2019-2020)*

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Exercice 1.6.

Combien de termes de la série faut-il additionner pour obtenir la somme avec la précision indiquée ?

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n!}\quad(\text{erreur }\leq 10^{-2}) \qquad b)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}\quad(\text{erreur }\leq 10^{-3})$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\quad(\text{erreur }\leq 10^{-3})$$

Exercice 1.7.

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$.

1. Etudier la convergence de cette série.
2. Donner une borne supérieure sur l'erreur commise en estimant la somme de cette série par la somme partielle de ses trois premiers termes.

<u>Exercice</u> 1.8. *(Contrôle 2017-2018)*

Soit $S = \sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq \int_1^n \ln x \, dx$. En déduire que S converge.
3. Préciser l'ordre n de la suite des sommes partielles S_n pour obtenir la somme S avec une précision de 10^{-1}.

Chapitre 2

Suites de fonctions

En analyse, une suite de fonctions est une suite dont les termes sont des fonctions toutes définies sur un ensemble $\mathbb{K}$ (le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et à valeurs réelles ou complexes, ou plus généralement vectorielles.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1.

1. *On dit qu'une fonction $f : I \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est bornée sur I si*

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I : \ |f(x)| \leq M.$$

2. *On note $B(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui sont bornées sur I.*

3. *Soit $f \in B(I, \mathbb{K})$. On note $||f||_\infty$, $||f||_{\infty,I}$ ou $\sup\limits_{x \in I}|f(x)|$ la borne supérieure de l'ensemble $\{|f(x)|, \ x \in I\}$.*

Proposition 2.1.1. *Soit $(f, g) \in B^2(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

1. $||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

2. $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty.$

3. $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$

4. $||f \cdot g||_\infty \leq ||f||_\infty \cdot ||g||_\infty.$

Démonstration. (Exercice) □

Définition 2.1.2. *Une suite de fonctions de $I \to \mathbb{K}$ est une famille dénombrable de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ indexée par des entiers (dans $\mathbb{N}$) $f_n : \ x \in I \to f_n(x)$.*
Pour $x_0 \in \mathbb{K}$ fixé, la suite de terme général $f_n(x_0)$ est une suite numérique.

Exemple. La suite de fonction $(f_n)_n$ de terme général $f_n : \ x \in \mathbb{R} \to \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

2.2 Convergence simple

Définition 2.2.1. *Soient* (f_n) *une suite de fonctions définies de* $I \to \mathbb{K}$ *et* $f: I \to \mathbb{K}$.

1. *On dit que la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement vers* f *sur* I, *si pour tout* $x \in I$ *la suite* $(f_n(x))$ *converge vers* $f(x)$ *dans* $\mathbb{K}$ *:*

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N_{x,\epsilon} \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N_{x,\epsilon} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

   et on note $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *ou bien* $f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$.

2. *On dit que la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement sur* I *s'il existe une fonction* $f: I \to \mathbb{K}$ *tel que la suite de fonctions* f_n *converge simplement vers* f.

Exercice. Etudier la convergence simple des suites de fonctions :

- $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
- $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice. Etudier la nature des suites de fonctions

- $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$.
- $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

2.3 Convergence uniforme

Définition 2.3.1. *Soient* (f_n) *une suite de fonctions définies de* $I \to \mathbb{K}$ *et convergeant simplement vers une fonction* $f: I \to \mathbb{K}$.

1. *On dit que la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* I *vers* f *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon\ \forall x \in \mathbb{I} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

   ce qui est équivalent à

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon \quad ||f_n - f||_\infty < \epsilon$$

   et on note $f_n \xrightarrow[I]{CVU} f$.

2. *On dit que la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* I *s'il existe une fonction* $f: I \to \mathbb{K}$ *telle que* f_n *converge uniformément vers* f.

Exercice. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$ puis $[1, +\infty[$.

Théorème 2.3.1. *(Majorant uniforme)*
Soit f_n *une suite de fonctions :* $I \to \mathbb{K}$ *et* $f: I \to \mathbb{K}$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que $f_n \xrightarrow[I]{CVU} f$ *et qu'il existe une suite numérique positive* $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *telle que* $||f_n - f||_\infty \leq v_n$.
On dit que (v_n) *majore uniformément la suite* (f_n).

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.1. *Si la suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$, alors elle converge simplement vers f.*

Démonstration. (Exercice) □

Définition 2.3.2. *(Suite de fonctions uniformément de Cauchy)*
On dit que la suite de fonctions (f_n) est uniformément de Cauchy sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \ tq : n \geq N_\varepsilon,\ p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon.$$

Remarque. Dire que, pour tout $x \in I$, $(f_n(x))$ est de Cauchy, s'écrit :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \text{ tq} : n \geq N_{\varepsilon,x},\ p \geq N_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon.$$

Encore une fois, ce qui différencie "pour tout $x \in I$, $(f_n(x))$ de Cauchy" et "(f_n) uniformément de Cauchy sur I" est la place de "pour tout $x \in I$" qui intervient avant le choix de N dans le premier cas et après le choix de N dans le second cas.

Propriété 2.3.1. *(Critère de Cauchy uniforme)*
(f_n) converge uniformément sur I si et seulement si (f_n) est uniformément de Cauchy sur I.

Démonstration. (Exercice) □

Théorème 2.3.2. *(Interversion des limites)*
Soit (f_n) une suite de fonctions : $I \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément sur I vers f. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$ existe.
Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$ existe et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x)$ existe ; et ces deux limites sont égales, c.à.d :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right).$$

Démonstration. (Exercice) □

Remarque. x_0 peut être une extrémité d'un intervalle, ou $\pm\infty$.

Proposition 2.3.2.

1. *Soit f_n une suite de fonctions : $I \to \mathbb{R}$ telles que $f_n \overset{CVS}{\underset{I}{\longrightarrow}} f$.*
   Si pour tout n la fonction f_n est croissante (resp. décroissante) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.

2. *Soit f_n une suite de fonctions : $I \to \mathbb{K}$ telles que $f_n \overset{CVU}{\underset{I}{\longrightarrow}} f$, alors si pour tout n, la fonction f_n est continue sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la convergence uniforme de $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

Remarque. Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme sur l'intervalle I de la suite de fonctions (f_n), on regarde en général s'il y a convergence uniforme sur tout fermé borné inclus dans I car, si c'est le cas, cela nous permettra malgré tout d'en déduire certaines propriétés pour la fonction limite f telle que la continuité.

Théorème 2.3.3. *(Intégrabilité et convergence uniforme)*
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et qui converge uniformément vers une fonction f (continue). On note F_n la primitive de f_n sur $[a, b]$ nulle en a et F la primitive de f sur $[a, b]$ nulle en a. Alors (F_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers F et on a

$$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt.$$

Démonstration. (Exercice) □

Théorème 2.3.4. *(Dérivabilité et convergence uniforme)*
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $C^1([a, b])$. On suppose qu'il existe x_0 dans $[a, b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))$ converge ; on suppose également que la suite (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f \in C^1([a, b])$, $f' = g$ et on a

$$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = f'(x).$$

Démonstration. On montre d'abord que (f_n) est une suite de Cauchy uniforme sur $[a, b]$. On a

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f_q(x) - f_p(x_0) + f_q(x_0)| + |f_p(x_0) - f_q(x_0)|$$

puis d'après la convergence de $(f_n(x_0))$ on écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1,\ \forall p, q \geq n_1 \quad |f_p(x_0) - f_q(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f_p - f_q$ sur $[x_0, x]$ permet de dire qu'il existe $y \in]x_0, x[$ tel que :

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(x_0) - f_q(x_0))| &= |x - x_0||f_p'(y) - f_q'(y)| \\ &\leq |b - a| \sup_{y\in[a,b]} |f_p'(y) - f_q'(y)|. \end{aligned}$$

Puis la convergence uniforme de (f_n') sur $[a, b]$ donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2,\ \forall p, q \geq n_2 \quad \sup_{y\in[a,b]} |f_p'(y) - f_q'(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Posons maintenant $N = \max(n_1, n_2)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p, q \geq N,\ \forall x \in [a, b] \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + (b - a)\frac{\varepsilon}{2(b - a)} = \varepsilon.$$

Ainsi f_n vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[a, b]$, donc (f_n) a une limite uniforme f sur $[a, b]$.

Ensuite, on fixe x_1 dans $[a,b]$ et on pose :

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1} & x \in [a,b] \setminus \{x_1\} \\ f_n'(x_1) & x = x_1 \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} & x \in [a,b] \setminus \{x_1\} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x_1) & x = x_1 \end{cases}$$

Il est clair que les fonctions f_n ainsi définies sur $[a,b]$ sont continues en x_1 et convergent simplement vers ρ sur $[a,b]$.

Pour montrer que f est dérivable en x_1 et que $f'(x_1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x_1)$ il suffit de montrer que ρ est continue en x_1, car ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \quad \text{par définition} \\ &= \lim_{x\to x_1} \rho(x) \\ &= \rho(x_1) \quad \text{si } \rho \text{ est continue en } x_1 \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_1). \end{aligned}$$

Pour montrer que ρ est continue en x_1, il suffit de montrer que la suite de fonctions continues (ρ_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

Pour cela, comme (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$, (f_n') est uniformément de Cauchy, c'est à dire que, si l'on fixe $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $p \geq N$ et $t \in [a,b]$:

$$|f_n'(t) - f_p'(t)| < \varepsilon. \tag{2.3.1}$$

En appliquant à $f_n - f_p$ la formule des accroissements finis entre x_1 et x, il existe $t \in]x_1, x[$ tel que :

$$(f_n(x) - f_p(x)) - (f_n(x_1) - f_p(x_1)) = (x - x_1)(f_n'(t) - f_p'(t))$$

d'où, en appliquant (2.3.1) :

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} - \frac{f_p(x) - f_p(x_1)}{x - x_1} \right| < \varepsilon.$$

Alors

$$|\rho_n(x) - \rho_p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{x_1\}. \tag{2.3.2}$$

L'inégalité (large) reste vraie en x_1 par passage à la limite ($x \to x_1$) car les fonctions ρ_n et ρ_p sont continues en x_1.

Faisons tendre p vers $+\infty$ dans (2.3.2) ; on obtient pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|\rho_n(x) - \rho(x)| \leq \varepsilon$$

c.à.d (ρ_n) converge uniformément vers ρ sur $[a,b]$. □

2.4 Exercices

Exercice 2.1.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.
Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2.2.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites d'applications suivantes :

1. $f_n(x) = x^n \ln x$ avec $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.
2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ puis sur $I = [a, +\infty[$ où $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ puis sur $I = [a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
4. $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$ sur $I = [0,1]$.

Exercice 2.3.

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.
Montrer que (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2).

Exercice 2.4. *(Contrôle 2017-2018)*

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Justifier puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 2.5. *(Examen 2018-2019)*

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
2. Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$. En déduire si la suite (f_n) converge uniformément.
3. Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0, \pi/2]$.

Exercice 2.6.

Calculer la limite de l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

Exercice 2.7.

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

3. Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 2.8. *(Contrôle 2019-2020)*

Considérons la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la convergence simple puis uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Chapitre 3

Séries de fonctions

3.1 Introduction

En analyse, une série de fonctions est une série dont les termes sont des fonctions toutes définies sur un ensemble de $\mathbb{K}$, et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ou plus généralement vectorielles.

On a vu qu'une série numérique est définie par sommation à partir d'une suite numérique : on commence par former la suite des sommes partielles et, étudier la convergence de la série, c'est par définition étudier la convergence de la suite numérique des sommes partielles.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $I \subset \mathbb{K}$, on peut définir leur somme $f+g$ qui est encore une fonction définie sur I par : $\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.

Comme pour les séries numériques, on va de même procéder par sommes successives pour obtenir, à partir d'une suite (f_n) de fonctions, la série de fonctions $\sum f_n$.

Pour étudier la série $\sum f_n$, on définit la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n$, dont on sait , définir et étudier la convergence simple ou uniforme (chap. Suites de fonctions).

Définition 3.1.1. *Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. On notera $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général (f_n), et (S_n) la suite des fonctions somme partielle associée :*

$$\forall x \in I \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x)$$

$$\sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots$$

3.2 Convergence simple

Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions et $\sum f_n$ la série de fonctions associée.

Définition 3.2.1. *On dit que $\sum f_n$ converge simplement sur I si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ converge simplement sur I.*

Remarques

- La fonction limite sera alors notée S et appelée somme de la série $\sum f_n$. On notera $\sum f_n \xrightarrow[I]{CVS} S$. A la différence des suites de fonctions, la fonction limite de la série sera en général difficile à exprimer. S a en général une existence "théorique".
- Pour une série de fonctions $\sum f_n$ qui converge simplement vers S sur I, on définit la fonction R_n, suite des restes partiels au rang n et on peut écrire
$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k}_{R_n}.$$
de plus on a la propriété
$$\sum f_n \xrightarrow[I]{CVS} S \Longleftrightarrow R_n \xrightarrow[I]{CVS} 0.$$

Exercice. Etudier la convergence simple des séries de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \text{ sur } \mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 0} x^n$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n} \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

3.3 Convergence uniforme

Dans cette partie, on donne la définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions et certains outils permettant de démontrer si une série de fonctions converge uniformément sur I.

3.3.1 Propriétés

Définition 3.3.1. *On dit que la série* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur* I *ssi la suite de fonctions* (S_n) *converge uniformément sur* I.

Théorème 3.3.1. *Soit* $\sum f_n$ *une série qui converge simplement sur* I. *Alors elle converge uniformément sur* I *ssi la suite des restes partiels* (R_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* I.

Démonstration. Si $\sum\limits_{n\geq 0} f_n \xrightarrow[I]{CVS} S$ alors $R_n = S - S_n$ et donc
$$\sum_{n\geq 0} f_n \xrightarrow[I]{CVU} S \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\sup_I |S(x) - S_n(x)|}_{\|R_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
□

Dans le cadre des séries de fonctions, la convergence uniforme sera plus difficile à établir directement, car en général, nous ne disposerons pas d'une expression simple de R_n.

Proposition 3.3.1. *(Condition nécessaire de convergence uniforme)*
Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformément sur* I, *alors* f_n *CV uniformément vers* 0 *sur* I.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la convergence uniforme des séries de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} x^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \text{ sur } \mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n} \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

3.3.2 Convergence uniforme de certaines séries alternées

Le résultat du dernier exemple se généralise :

Théorème 3.3.2. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I telle que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ soit alternée dont le terme général décroît en valeur absolue vers 0.*

Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur I, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Démonstration. (Exercice) □

3.3.3 Critère de Cauchy uniforme

On aborde maintenant le critère de Cauchy qui est un outil théorique pour démontrer la convergence uniforme d'une série.

Définition 3.3.2. *(Série uniformément de Cauchy)*
On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément de Cauchy sur I lorsque la suite (S_n) des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions, c.à.d :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ N_\varepsilon \leq p < q \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_{p+1}(x) + \ldots + f_q(x)| < \varepsilon.$$

On peut indifféremment exprimer $q > p$ sous la forme $q = p + k,\ k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 3.3.3. *(Critère de Cauchy uniforme)*
La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si $\sum f_n$ est uniformément de Cauchy sur I.

Démonstration. (Exercice) □

3.3.4 Règle d'Abel

On aborde maintenant la règle d'Abel qui permet de conclure à la convergence uniforme de certaines séries.

Théorème 3.3.4. *(Transformée d'Abel)*
Soient (a_n) et (v_n) deux suites de fonctions sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, notons $V_{n,p}(x) = v_n(x) + \ldots + v_{n+p}(x)$, alors

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k v_k = a_{n+p} V_{n,p} + \sum_{k=1}^{p} (a_{n+k-1} - a_{n+k}) V_{n,k-1}.$$

Démonstration. (Exercice) □

Théorème 3.3.5. *(Règle d'Abel uniforme)*
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
On suppose que pour tout $x \in I$: $f_n(x) = a_n(x)v_n(x)$ avec

1. *(a_n) est une suite décroissante de fonctions positives sur I (c.à.d : $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n(x) \leq a_{n+1}(x)$) et qui converge uniformément vers 0 ;*
2. *(v_n) est une suite de fonctions vérifiant :*

$$\exists A > 0,\ \forall n \geq 0,\ \forall x \in I \quad |v_0(x) + \ldots + v_n(x)| \leq A.$$

Alors, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la convergence absolue et uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur tout intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$ avec $0 < \delta < \pi$.

3.4 Convergence normale

Définition 3.4.1. *On dit que $\sum f_n$ converge normalement ssi la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sup\limits_I |f_n(x)|$ converge.*

Théorème 3.4.1. *(Critère de convergence normale)*
Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$. La série $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si il existe une série numérique à termes positifs convergente $\sum a_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq a_n$.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la convergence normale de la série $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

Théorème 3.4.2. $CVN \Longrightarrow \begin{cases} CVU \\ CVA \end{cases} \Longrightarrow CVS$

Démonstration. (Exercice) □

Remarque. Dans ce théorème, on a en fait démontré la propriété plus forte suivante : $\sum |f_n|$ converge uniformément.

En pratique, pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on essaiera d'obtenir sa convergence normale. Lorsque c'est possible, cela permet de contourner le problème de trouver une expression simple du reste.

Exercice. Etudier les convergences des séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} \text{ sur } \mathbb{R} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^2 e^{-x\sqrt{n}} \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

$$\sum \frac{z^n}{n!} \text{ sur } \mathbb{C}.$$

3.5 Propriétés de la somme

Dans cette partie, on va énoncer les propriétés éventuellement conservées par la somme d'une série de fonctions. On se servira souvent des résultats démontrés dans le chapitre des Suites de fonctions.

3.5.1 Convergence uniforme et limite

Théorème 3.5.1. *Soit $a \in \bar{I}$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie l_n quand $x \to a$ dans I. Si $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur I alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ admet une limite en a, de plus*

$$\lim_{x\to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n.$$

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Justifier que $\lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = 0$.

3.5.2 Convergence uniforme et continuité

Théorème 3.5.2. *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions. Si*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I,*

2. *$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I,*

alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la continuité de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 3.5.1. *(Version locale du théorème de continuité)*
Soit $\sum f_n$ une série d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$; si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de I, alors la somme de la série est continue sur I.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la continuité de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ sur $\mathbb{C}$.

3.5.3 Convergence uniforme et intégration

Théorème 3.5.3. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a < b$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ *une série de fonctions* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$. *Si*

1. f_n *est continue sur* $[a,b]$ *pour tout* n,
2. $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *et a pour somme* S,

alors

1. S *est continue sur* $[a,b]$,
2. $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$ *converge dans* $\mathbb{K}$ *et puis*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) dx = \sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt\right) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.5.4 Convergence uniforme et dérivation

Théorème 3.5.4. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ *une série de fonctions* $f_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$. *Si*

- *il existe* x_0 *dans* I *tel que la série numérique* $\sum f_n(x_0)$ *soit convergente ;*
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est dérivable sur* I *et la série* $\sum f_n'(x)$ *converge uniformément sur* I,

alors $\sum f_n(x)$ *converge uniformément sur* I *et sa somme est dérivable sur* I *et*

$$S'(x) = \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'(x).$$

Démonstration. (Exercice) □

Corollaire 3.5.2. *(Version locale du théorème de dérivation)*
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ *une série de fonctions* $f_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$. *Si*

1. *il existe* x_0 *dans* I *tel que la série numérique* $\sum f_n(x_0)$ *soit convergente ;*
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout fermé borné* $J \subset I$, f_n *est dérivable sur* J *et la série* $\sum f_n'(x)$ *converge uniformément sur* J,

alors

1. $\sum f_n(x)$ *converge uniformément sur* J *et sa somme est dérivable* $S : x \mapsto \sum\limits_{n\geq 0} f_n'(x)$ *est dérivable sur* I *et* $S'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n'(x)$.

Démonstration. (Exercice) □

Exercice. Etudier la continuité et la dérivabilité de la somme de la série $\sum \frac{1}{x^2-n^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3.6 Exercices

Exercice 3.1.

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale des séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes dont le terme général est :

1. $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}$ sur $]0,+\infty[$ puis sur $[a,+\infty[$ où $a>0$.
3. $f_n(x) = \frac{1}{n^2}(x^n + (1-x)^n)$ sur $[0,1]$ puis sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.
4. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $[a,+\infty[$ où $a>0$. (A faire chez vous)

Exercice 3.2. *(Contrôle 2017-2018)*

Soit la série de fonctions $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ avec $x\in\mathbb{R}$.

1. Etudier la convergence simple de f.
2. Etudier sa convergence uniforme et normale.

Exercice 3.3.

Soient α un nombre réel tel que $\alpha<2$ et x un nombre positif. On considère la série de terme général f_n défini par $f_0(x)=0$ et $f_n(x) = x^{2-\alpha}e^{-nx}$ si $n\geq 1$.

1. Montrer qu'elle est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer qu'elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$ si $\alpha<1$.
3. Que peut-on dire si $\alpha=1$.

Exercice 3.4.

Soit $\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$.
Justifier et calculer $\int_0^1 \psi(x)dx$.

Exercice 3.5.

On fixe $\alpha>0$ et on pose $f_n(x) = e^{-n^\alpha x}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f.
3. Etudier $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3.6. *(Examen 2018-2019)*

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ sur $I =]-1,+\infty[$.

1. Montrer que f est définie et continue sur I.
2. Etudier la monotonie de f.
3. Calculer $f(x+1)-f(x)$ puis déterminer un équivalent de $f(x)$ en -1^+.
4. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ puis déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

   (Indication : $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n,\ \ln E(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$)

<u>Exercice</u> 3.7. *(Contrôle 2019-2020)*

Soit $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$ pour $x>0$.

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$.
3. Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chapitre 4

Séries entières

En mathématiques et particulièrement en analyse, une série entière centrée en $a \in \mathbb{C}$ est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$$

où les coefficients a_n forment une suite réelle ou complexe. La série est dite *entière* du fait qu'elle fait intervenir des puissances entières.

Dans ce chapitre on aborde les problèmes suivants :

- Une série entière $\sum a_n (z-a)^n$ étant donnée, on cherche à déterminer les valeurs de z pour lesquelles la série $\sum a_n (z-a)^n$ est convergente, ce qui permet de définir une fonction.
  Les séries entières possèdent des propriétés de convergence remarquables, qui s'expriment pour la plupart à l'aide d'une grandeur associée à la série, son rayon de convergence R. Sur le disque de convergence (disque ouvert de centre a et de rayon R), la fonction somme de la série peut être dérivée indéfiniment terme à terme.

- Réciproquement, étant donné une fonction, peut-on la considérer comme la somme d'une série entière ? Cette série est-elle alors unique ?.
  Certaines fonctions indéfiniment dérivables peuvent être écrites au voisinage d'un de leurs points a comme somme d'une série entière de la variable $z - a$: celle-ci est alors leur série de Taylor. Lorsqu'une fonction est développable en série entière en chacun de ses points, elle est dite analytique.

4.1 Définition

Définition 4.1.1. *Une série entière centrée en $a \in \mathbb{C}$ est une série de la forme*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \cdots$$

où z est une variable complexe et les a_n sont des constantes par rapport à z appelées les coefficients de la série.

La valeur de la série $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$, appelée la somme, est une fonction $f(z)$ dont le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles la série entière converge.

Remarque. Pour tout z fixé, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ devient une série numérique simple dont on peut étudier la nature en utilisant les critères des chapitres précédents.

Exercice. Etudier la nature des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} n!z^n$.

4.2 Rayon et disque de convergence

4.2.1 Théorème de convergence (lemme d'Abel)

Théorème 4.2.1. *Soit $\sum a_n(z-a)^n$ une série entière. S'il existe des réels r et M strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|r^n \leq M$, alors, pour tout réel ρ vérifiant $0 < \rho < r$, la série entière $\sum a_n(z-a)^n$ est normalement convergente dans le disque fermé $\bar{D}(a,\rho)$.*

Démonstration. (Exercice) □

On en déduit :

- pour tout z vérifiant $|z-a| < r$, la série $\sum a_n(z-a)^n$ converge absolument,
- dans tout disque fermé $\bar{D}(a,\rho)$, $(0 < \rho < r)$, la série entière $\sum a_n(z-a)^n$ converge uniformément.

4.2.2 Rayon et disque de convergence

Définition 4.2.1. *Soit $\sum a_n(z-a)^n$ une série entière.*

- *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(z-a)^n$ la borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ de l'ensemble*

$$A = \{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

- *On appelle disque de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$, noté D, l'ensemble centré en a des z pour lesquels $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ converge.*
  Lorsque la série entière est définie sur $\mathbb{R}$ on parle d'un intervalle de convergence centré en a noté L.

Théorème 4.2.2. *(Rayon de Convergence)*
Soit $R = \lim\limits_{n+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors

1. *Si $R = 0^+$, alors $D = \{a\}$, $(L = \{a\})$.*
2. *Si $R = +\infty$ alors $D = \mathbb{C}$, $(L = \mathbb{R})$.*
3. *Si $R \in \mathbb{R}^*_+$, alors la série converge absolument pour $|z-a| < R$ et diverge pour $|z-a| > R$ et il faut faire une étude spéciale pour $|z-a| = R$ (c.à.d lorsque z est sur le cercle $\mathcal{C}(a,R)$)*

Démonstration. (Exercice) □

Remarques

- Attention ! L'énoncé suppose que le rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est défini. C'est-à-dire que pour n assez grand a_n est non nul. Le résultat ne peut s'appliquer directement aux séries entières, dites lacunaires, c'est-à-dire celles dont un nombre infini de coefficients est nul, comme la série $\sum n! z^{n^2}$.

- On a un résultat analogue, lié au critère de Cauchy : si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

- On peut montrer que si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ a une limite, il en est de même pour la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ et que ces limites sont égales. La réciproque est fausse. Toutefois, l'utilisation du rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est plus fréquente, car plus facile à manipuler que celle de $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$.

- Si $\sum a_n(z-a)^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors la série entière $\sum a_n(z-a)^n$ est normalement donc uniformément convergente dans tout disque fermé $\bar{D}(a,\rho)$ avec $\rho < R$.

  En général, la série entière $\sum a_n(z-a)^n$ n'est pas uniformément convergente dans le disque de convergence, ni a fortiori dans le disque fermé $\bar{D}(a,R)$.

Exercices

1. Considérons les séries entières complexes $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$.
   (a) Déterminer leur rayon de convergence.
   (b) Étudier leur comportement sur le cercle unité.
   (c) Étudier leur convergence uniforme.

2. Déterminer le rayon de convergence et intervalle de convergence de la série entière réelle $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

4.2.3 Rayon de convergence de la somme et du produit

Théorème 4.2.3. *On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence respectifs R_1 et R_2. La somme et le produit de ces séries entières ont un rayon de convergence au moins égal à $\min(R_1, R_2)$ et pour z vérifiant $|z| < \min(R_1, R_2)$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n\right).$$

Démonstration. (Exercice) □

4.3 Propriétés de la somme d'une série entière

Les propriétés de la somme d'une série entière sont liées au fait qu'il s'agit d'une série de fonctions monômes (donc de classe C^∞), uniformément convergente dans tout disque fermé contenu dans le disque de convergence (qui est ouvert, rappelons-le). Les théorèmes vus dans le chapitre sur les séries de fonctions s'appliquent donc sans difficulté.

4.3.1 Continuité de la somme d'une série entière

Théorème 4.3.1. *Soit $\sum a_n(z-a)^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. La somme S de la série entière, définie dans le disque $D(a,R)$ de convergence par $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$, est continue dans tout le disque de convergence.*

Démonstration. (Exercice) □

4.3.2 Dérivation et intégration des séries entières

Théorème 4.3.2. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence R.*

Démonstration. (Exercice) □

Dans la suite de ce paragraphe, on se limitera à des fonctions de variable réelle.

Théorème 4.3.3. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. On note encore S la restriction à l'intervalle $]-R,R[$ de la somme de la série entière, c'est-à-dire la fonction définie sur $]-R,R[$ par $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

La fonction S est dérivable sur $]-R,R[$ et, pour tout x de $]-R,R[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Démonstration. (Exercice) □

On déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.1. *La somme S d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R,R[$ et, pour tout entier p, et tout x de $]-R,R[$, on a :*

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

Pour l'intégration terme à terme, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.3.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. La somme de la série entière, c'est-à-dire la fonction définie sur $]-R,R[$ par $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, admet pour primitives sur $]-R,R[$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto k + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, ($k \in \mathbb{R}$).*

Exercice.

1. Etudier la dérivabilité de la série géométrique $\sum x^n$.
2. Justifier puis intégrer $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.

4.4 Développement d'une fonction en série entière

4.4.1 Problème général

On aborde maintenant le second aspect du problème formulé ainsi. Étant donné une fonction f de variable complexe, chercher s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul tel qu'on ait :

$$\forall z \in D(0,R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On remarque que, d'après les paragraphes précédents, le problème est ici nécessairement centré en 0. On parle alors d'un développement en série entière autour de l'origine.

On peut envisager un développement en série entière autour d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, la série entière envisagée étant alors de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$.

4.4.2 Série de Taylor d'une fonction

Définition 4.4.1. *On dit qu'une fonction f est développable en série entière sur un disque ouvert D centré en 0, s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle qu'on ait : $\forall z \in D, f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.*

Remarque. Pourquoi on peut se limiter à des développements centrés en 0 ? Nous dirons qu'une fonction f est développable en série entière dans un disque ouvert centré en z_0, si la fonction $g : \ z \mapsto f(z+z_0)$ est développable en série entière autour de 0. Cette remarque ramène tout problème de développement en série entière à un problème de développement en série entière autour de l'origine. Nous nous limiterons donc à des développements centrés en 0.

L'intervalle I qui intervient est ouvert et centré en 0.

Théorème 4.4.1. *Si f est une fonction développable en série entière sur un intervalle I, alors les coefficients de cette série entière sont les nombres : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Le développement en série entière de f est donc unique et s'identifie avec la série de Taylor de f : $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Démonstration. (Exercice) □

Les nombres $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ sont entièrement déterminés par la donnée de f sur un intervalle quelconque centré en 0, non réduit à 0.

On déduit les corollaires suivants.

Corollaire 4.4.1. *Si deux fonctions f et g, développables en série entière sur un intervalle I, coïncident sur un intervalle non vide $]-r,r[\subset I$, alors elles coïncident sur tout l'intervalle I.*

Démonstration. (Exercice) □

Ce phénomène est très important, il ne se produit pas pour d'autres développements en série comme le développement en série de Fourier. Par ailleurs il est à l'origine du principe du prolongement analytique.

Corollaire 4.4.2. *Si une fonction paire (resp. impaire) est développable en série entière, on a alors :* $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$ *(resp.* $a_{2p} = 0$*).*

4.4.3 Conditions pour le développement en série entière

Pour qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit développable en série entière, il faut que les conditions suivantes soient remplies :

- il existe un intervalle ouvert I centré en 0 tel que f soit de classe C^∞ sur I,
- la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ a un rayon de convergence R non nul.

Recherche d'une condition nécessaire et suffisante

On considère une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I centré en 0 et dont le rayon de convergence de la série de Taylor est non nul. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

La fonction f est développable en série entière si, et seulement si, il existe un réel r tel que la suite de fonctions (R_n) converge simplement vers 0 sur l'intervalle $]-r, r[$.

Cette condition nécessaire et suffisante n'est pas toujours facile à exprimer. On établit d'abord le résultat suivant puis on utilise plus fréquemment la condition suffisante ci-après.

Théorème 4.4.2. *(Formule de Taylor-Lagrange)*
Si la fonction f est à valeurs réelles et est dérivable sur $I =]a-R, a+R[$ jusqu'à l'ordre $n+1$, alors il existe un nombre réel ξ entre a et x tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Le nombre ξ est parfois noté $a + (x-a)\theta$, et la condition qu'il soit compris entre a et x s'écrit alors $0 < \theta < 1$.

Démonstration. (Exercice) □

Théorème 4.4.3. *Pour que la fonction f soit développable en série entière sur un intervalle ouvert centré en 0, il suffit qu'il existe des réels r et M tels qu'on ait :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r, r[,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M.$$

La fonction f est alors développable en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$.

Démonstration. (Exercice) □

4.4.4 Comparaison avec les développements limités

Reprenons les définitions : on considère une fonction f définie sur un intervalle I centré en 0.

Définition 4.4.2. *On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, et une fonction ϵ définie au voisinage de 0, vérifiant $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, tels que $f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$.*

Définition 4.4.3. *On dit qu'une fonction f est développable en série entière sur l'intervalle I s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle qu'on ait : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

Les différences sont fondamentales : dans la définition du développement limité il y a **limité** et **voisinage**. Le développement limité est une propriété locale.

En revanche, dans la définition du développement en série entière, la propriété est réalisée sur **tout un intervalle**. Le développement en série entière est une propriété **globale**.

Une fonction qui est développable en série entière dans un intervalle I est de classe C^∞ sur I et admet donc, pour tout entier n, un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction f vue plus haut, définie par : $\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0$, qui admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre, mais n'est pas développable en série entière.

Pour conclure, il s'agit de deux propriétés complètement différentes, le seul point commun est l'égalité des coefficients $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Cela conduit parfois à une confusion, **qu'il faut éviter !**

4.5 Méthodes et développements classiques en série entière

Les développements en série entière étudiés dans ce paragraphe, outre qu'ils concernent des fonctions usuelles, donnent des exemples des diverses méthodes utilisées.

4.5.1 Série de Taylor

Exercice. Justifier les développement en série de Taylor suivants :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

4.5.2 Illustration graphique

On peut représenter les graphes d'une fonction et des sommes partielles de son développement en série entière.

Exercice.

1. Considérons la série $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   (a) Calculer R.

   (b) Tracer puis comparer les sommes partielles S_7 et S_{13}.

2. Considérons la fonction g définie par $g(x) = \ln(1 + x + x^2)$ puis calculer R.

   (a) Montrer que g admet un développement en série entière.

   (b) Tracer les sommes partielles S_{60}. Que peut-on remarquer ?

4.5.3 Dérivation et intégration terme à terme

Dans certains cas, il peut être plus facile de déterminer, non pas le développement de la fonction, mais celui de sa dérivée ou d'une primitive. On déduit alors le développement de la fonction en intégrant ou en dérivant terme à terme le développement trouvé à l'intérieur de l'intervalle de convergence. C'est le cas pour des fonctions comme ou dont la dérivée est rationnelle.

Exercice. Justifier les égalités et déterminer les intervalles de convergence pour les cas suivants :

- $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

- $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

4.5.4 Utilisation d'une équation différentielle

Soit f une fonction de classe $C^{+\infty}$ sur un intervalle ouvert contenant 0.
Supposons que les conditions suivantes sont réalisées :

- il existe une équation différentielle (E) et un intervalle ouvert I contenant 0, tels que la restriction de f à I soit l'unique solution de (E) vérifiant certaines conditions initiales ;

- on a déterminé une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $r > 0$, dont la somme est solution de (E) sur l'intervalle $]-r, r[$ et vérifiant les mêmes conditions initiales.

On a alors : $\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La méthode consiste à déterminer les coefficients a_n en identifiant, grâce au théorème d'unicité, les développements des fonctions figurant dans les deux membres de l'équation différentielle.

Exercice. Considérons la fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction f_α est solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad \begin{cases} (1+x)y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Déterminer un développement de f_α en série entière solution de l'équation $(*)$.

4.6 Exercices

Exercice 4.1.

1. Démontrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x.
2. Que peut-on conclure de la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 4.2.

Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence des séries

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}(2x-1)^n \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^3+n+1)}{(2n+3)^3}(x-3)^{3n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{25^n (x-3)^{2n}}{n}$$

Exercice 4.3.

Développer la fonction en série entière et déterminer l'intervalle de convergence

1. $\ln(5-x)$ centrée $x_0 = 0$.
2. $\frac{7x}{2+x}$ centrée en $x_0 = 1$

Exercice 4.4.

Donner une estimation de la valeur $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ avec une erreur moindre que 10^{-7}.

Exercice 4.5.

Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$.

1. Donner $T(x)$, la série de Taylor de $f(x)$ centrée en $a = 1$.
2. On désire approximer $f(x)$ par son polynôme de Taylor $P_n(x)$ de degré n centré en $a = 1$. Donner une borne supérieure sur l'erreur $R_n(x)$ commise par cette approximation lorsque $x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.
3. Montrer que $f(x) = T(x)$ lorsque $x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.
4. Quel est le degré minimal du polynôme $P_n(x)$ pour que $|R_n(x)| < \frac{1}{10}$ lorsque $x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

Exercice 4.6. *(Examen 2017-2018)*

Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'expression de $f^{(n)}(x)$. En déduire la série de Taylor $T(x)$, de f, centrée en 1.

2. Déterminer l'intervalle de convergence L de cette série.

3. Vérifier que $T(x)$ converge aussi sur $I = \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right]$.

4. Montrer que l'erreur relative à l'approximation de f sur I par son polynôme de Taylor vérifie $|R_n(x)| \leq \varepsilon_n$, où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite numérique à déterminer.

5. Préciser la somme de $T(x)$ sur I.

6. Déterminer une estimation polynômiale de f en 1 pour que $|R_n(x)| < 10^{-2}$ sur I.

Exercice 4.7. *(Examen 2017-2018)*

Expliciter les 4 premiers termes non nuls de la série entière centrée en 0 solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.8.

Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 des équations différentielles suivantes :

1. $(1 + x)y' + y = 0$.

2. $y'' + 2xy' + 2y = 0$.

Exercice 4.9. *(Examen 2018-2019)*

1. Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle
$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

2. Exprimer parmi celles-ci celles qui sont des fonctions paires.

Exercice 4.10. *(Examen 2019-2020)*

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence L de f.

2. Déterminer l'expression de f à l'intérieur de L.

Exercice 4.11. *(Examen 2019-2020)*

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \complement_{n+p}^{p} \, x^n$.

1. Calculer le rayon de convergence de f.

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f. (calculer $(1 - x)f'(x)$)

3. En déduire f.

Chapitre 5

Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

- l'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier ;
- la synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

Au-delà du problème de la décomposition, la théorie des séries de Fourier établit une correspondance entre la fonction périodique (représentation temporelle) et les coefficients de Fourier (représentation fréquentielle ou spectre en fréquence). De ce fait, l'analyse de Fourier peut être considérée comme une nouvelle façon de décrire les fonctions périodiques. Des opérations telles que la dérivation s'écrivent simplement en termes de coefficients de Fourier. La construction d'une fonction périodique solution d'une équation fonctionnelle peut se ramener à la construction des coefficients de Fourier correspondants.

Le spectre fréquentiel d'un signal est la représentation de ce signal dans le domaine fréquentiel, il peut être généré aussi par la transformée de Fourier du signal, et les valeurs résultantes sont généralement présentées selon l'amplitude et la phase, toutes deux tracés en fonction de la fréquence.

5.1 Décomposition de Fourier

5.1.1 Définition

Définition 5.1.1. *On appelle série trigonométrique toute série de la forme* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ *où* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *sont deux suites de* $\mathbb{K}$.

En tout point t où la série converge on note $S(t)$ sa somme :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Le domaine de convergence de la fonction S est l'ensemble des valeurs t pour lesquelles la série trigonométrique converge.

Remarque. Si la fonction $t \mapsto S(t)$ existe alors elle est nécessairement 2π-périodique.

Exercice. Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) + \sin(nt)$.

5.1.2 Coefficients de Fourier

Le problème de la décomposition en séries de Fourier est l'inverse du précédent, c'est à dire, étant donné une fonction 2π-périodique, peut-on trouver une série trigonométrique dont la somme est la fonction f donnée ? Réponse générale est NON, et oui avec certaines conditions que l'on appelle les conditions de Dirichlet.

Proposition 5.1.1. *Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a les formules :*

1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$.*
2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$.*

Démonstration. (Exercice) □

Soit f un signal 2π-périodique, supposons qu'il existe une décomposition en série trigonométrique de f telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty$ (condition pour la convergence normale et donc uniforme sur $\mathbb{R}$) et :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Proposition 5.1.2. *Les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont :*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la série $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ est appelée série de Fourier de f.

Démonstration. (Exercice) □

Remarques

- On peut définir a_0 par $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)dt$ comme les a_n, mais cela exige d'exprimer la série de Fourier par $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.
- Si f est développable en série de Fourier alors la série est unique.
- Si f est paire, $b_n = 0$.
- Si f est impaire, $a_n = 0$.

5.1.3 Théorème de convergence

Ces théorèmes indiquent les conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier, et qui assurent la convergence ponctuelle de la série de Fourier vers la fonction f, sauf aux points de discontinuité :

Théorème 5.1.1. *(de Dirichlet)*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Démonstration. (Exercice) □

Il existe de nombreux raffinements du théorème de Dirichlet, en affaiblissant les hypothèses, mais aussi en affaiblissant le résultat. Une des variantes la plus célèbre est le théorème de Jordan-Dirichlet, où on ne suppose pas que f est continue :

Théorème 5.1.2. *(de Jordan-Dirichlet)*
Soit f une fonction 2π-périodique. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_n(t)$ converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ et la série de Fourier associée à f s'écrit

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \tilde{f}(t)$$

avec $f(t^{\pm}) = \lim\limits_{t \to t^{\pm}} f(t)$ et $\tilde{f}$ est appelée la régularisée de f.

Démonstration. (Exercice) □

Les hypothèses données ici pour le théorème de Jordan-Dirichlet sont loin d'être les meilleures possibles. Il suffit en réalité d'avoir des informations uniquement autour de t, par exemple que f admet des limites à droite et à gauche en t et qu'on peut trouver $\alpha > 0$ tel que les intégrales

$$\int_0^{\alpha} \frac{|f(t+x) - f(t^+)|}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\alpha} \frac{|f(t-x) - f(t^-)|}{x} dx$$

convergent. Toutefois, on ne peut pas supposer simplement que f est continue en t. Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas partout ; du Bois-Reymond a en effet donné l'exemple d'une fonction 2π-périodique, continue définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin\left(2^{n^2+1} x\right) \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin(kx)}{k} \right].$$

Remarques

- si f est continue en t alors $S(f)(t)$ converge vers $f(t)$.
- si f n'est pas continue en t alors $S(f)(t)$ converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.

Définition 5.1.2. *Si une fonction f est développable en série de Fourier, alors :*

$$\begin{cases} h_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt), \;\; n \geq 2, & \text{est la } n^{\text{ème}} \text{ harmonique du signal,} \\ h_1(t) = a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) & \text{est l'harmonique principale du signal.} \end{cases}$$

Remarque. Le son d'une corde émis par la vibration d'une corde (de guitare ou de piano...) (Fig. 5.1) est la somme de la fréquence principale qui donne la hauteur de la note jouée et des autres fréquences (harmoniques) qui sont toutes des multiples de la fréquence principale.

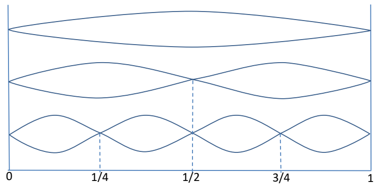


FIGURE 5.1 – Harmoniques

Exercice. Décomposer en série de Fourier les fonctions 2π-périodiques suivantes

- Signal carré [1] : $x(t) = \begin{cases} -1 & \text{sur }]-\pi, 0[\\ 1 & \text{sur } [0, \pi[\end{cases}$
- Signal triangulaire [2] : $x(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$.

Remarques

- Pour toute fonction f continue et 2π-périodique, les moyennes de Cesàro de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f. Autrement dit, si on note
$$C_n = \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1}$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} ||f - C_n||_\infty = 0. \qquad \text{(Th. de Féjer)}$$
- Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques : pour toute fonction f continue et 2π-périodique, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que
$$||f - P||_\infty \leq \epsilon. \qquad \text{(Th. de Weierstrass)}$$

5.1.4 Représentations fréquentielles

L'harmonique h_n de rang n (≥ 1) d'un signal f s'écrit encore
$$h_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = A_n \cos(nt - \varphi_n) = A_n \cos(2\pi n F_0 t - \varphi_n)$$
avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$ et la série de Fourier associée apparaît donc comme la somme d'un terme constant a_0 qui représente la valeur moyenne du signal f sur une période d'un signal de pulsation 1 et d'amplitude A_1 (l'harmonique principale ou fondamentale h_1) et d'une infinité de signaux sinusoïdaux de pulsations $2, \ldots, n, \ldots$ et d'amplitudes $A_2, \ldots,\ A_n, \ldots$ (les harmoniques de rang n h_n).

Il est souvent intéressant de caractériser un signal par son spectre de fréquence. En effet, celui-ci met en évidence l'importance du fondamental ainsi que la décroissance plus ou moins rapide des amplitudes des harmoniques de rang élevé. Il peut aussi servir à déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour transmettre la quasi totalité de l'énergie du signal (notion de bande passante...).

1. c'est une variante de la fonction **créneau** 2π-périodique, définie par $x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$.
2. c'est une variante de la fonction **dents de scie** 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $x(t) = \pi - |x|$

Les coefficients A_n représentent les composantes du spectre en fréquence (ou spectre d'amplitude en fréquence) de $S(t)$.
En introduisant l'impulsion de Dirac [3]

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

la représentation fréquentielle du signal est formée de pics de Dirac de poids $|A_n(F)|$ réparties sur tout l'axe des fréquences positives et négatives (Fig. 5.2). Par convention, on dessine chaque amplitude avec une hauteur proportionnelle à son poids $|A_n(F)|$. L'expression du spectre est la suivante :

$$S(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(F) \cdot \delta(F - nF_0), \ A_0 = a_0$$

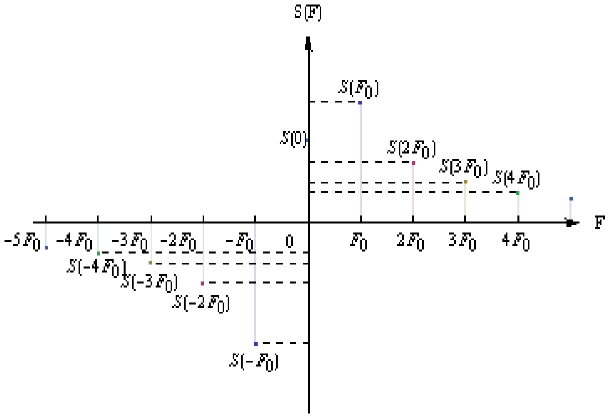


FIGURE 5.2 – Représentation fréquentielle bilatérale d'un signal impair T-périodique.

Exercice. Déterminer l'expression du spectre des fonctions 2π-périodiques suivantes

- Signal Carré $x(t) = \begin{cases} -1 & \text{sur }]-\pi, 0[\\ 1 & \text{sur } [0, \pi[, \end{cases}$
- Signal Triangulaire$x(t) = |t|, \ t \in [-\pi, \pi]$.

5.1.5 Forme complexe d'une série de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{lll} c_0 = a_0 & \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ c_{-n} = \overline{C}_n = \frac{a_n + ib_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

d'où

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

3. l'expression "Dirac" est souvent utilisée par les physiciens pour désigner une fonction ou une courbe "piquée" en une valeur donnée.

Remarques

1. On peut calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n ou calculer c_k sous forme complexe à partir des formules précédentes, le résultat est évidemment identique.

2. Nous verrons que, pour la théorie, la variante exponentielle est souvent plus commode.

3. Lorsqu'on veut préciser la fonction on note le coefficient $c_n(f)$, la suite des sommes partielles $S_n(f)$ et la somme de la série de Fourier $S(f)$.

5.2 Fonction T-périodique

Parmi les fonctions T-périodiques on dispose de trois types de fonctions remarquables : $\cos(n\omega t)$, $\sin(n\omega t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $e^{in\omega t}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la **pulsation** associée à T. Notre objectif est d'écrire les autres fonctions comme combinaisons linéaires de celles là.

5.2.1 Décomposition d'un signal T-périodique

Proposition 5.2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et continue par morceaux. Les coefficients de Fourier de f sont donnés par :*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt, \ n \in \mathbb{Z} \\ a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt, \ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt, \ n \geq 0 \end{aligned}$$

On a les relations : $a_0 = c_0$, et, pour $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

La série de Fourier de f s'écrit

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

Démonstration. (Exercice) □

Lemme 5.2.1. *(de Lebesgue)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. (Exercice) □

Théorème 5.2.1. *(de Jordan-Dirichlet)*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et T-périodique. Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f. Ainsi, sous ces hypothèses, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

ou encore :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(u) e^{-ik\omega u} e^{ik\omega t} du \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(u) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(t-u)} du \\
(v = t-u) &= -\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t-v) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v} dv \\
(s = -v) &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t+s) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega s} ds \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \frac{f(t-v) + f(t+v)}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v} dv
\end{aligned}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par $D_n(v) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}$, est appelée le noyau de Dirichlet. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
D_n(v) = -1 + \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ik\omega v} + e^{-ik\omega v} \right) &= -1 + \frac{e^{i(n+1)\omega v} - 1}{e^{i\omega v} - 1} + \frac{e^{-i(n+1)\omega v} - 1}{e^{-i\omega v} - 1} \\
&= -1 + e^{\frac{in\omega v}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} + e^{-\frac{in\omega v}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} \\
&= -1 + 2\frac{\cos\left(\frac{n\omega v}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)}{2}\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} \\
&= -1 + \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega v\right) + \sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega v\right)}{\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} D_n(v)dv = \frac{1}{T}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-T}^{T} e^{ik\omega v}dv = \sum_{k=-n}^{n}\langle e_0|e_k\rangle = 1$$

On obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(t) - \tilde{f}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{f(t-v)+f(t+v)}{2} - \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}\right)D_n(v)dv$$

Considérons $g_t : v \mapsto \frac{(f(t+v)-f(t^+))+(f(t-v)-f(t^-))}{2\sin\left(\frac{\omega v}{2}\right)}$.

- g_x est continue par morceaux sur $\left[-\frac{T}{2}, 0\right[$ et sur $\left]0, \frac{T}{2}\right]$, et il n'y a qu'un nombre fini de discontinuités.
- Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,

$$\frac{f(t+v)-f(t^+)}{v} \underset{v\to 0^+}{\to} f'(t^+) \quad \text{et} \quad \frac{f(t-v)-f(t^-)}{v} \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} -f'(t^-)$$

donc

$$g_t(v) \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f'(t^+)-f'(t^-)}{\omega}.$$

De même,

$$g_t(v) \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f'(t^+)-f'(t^-)}{\omega}$$

Ainsi, g_t est continue par morceaux sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Alors, d'après le lemme 5.2.1 de Lebesgue :

$$S_n(t) - f(t) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} g_t(v)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega v\right)dv \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et finalement, $S_n(t) \longrightarrow f(t)$.

□

Lemme 5.2.2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, T-périodique, et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[0, T]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n\left(f^{(p)}\right) = (in\omega)^p c_n(f)$.*

Démonstration. (Exercice) □

Remarque. Un aspect fondamental des séries de Fourier réside dans le fait que les propriétés de régularité d'une fonction périodique f se traduisent en terme du comportement à l'infini de la suite de ses coefficients de Fourier $c_k(f)$ (ou, de manière analogue, des suites $a_n(f)$ et $b_n(f)$). En particulier, on a $|n|^p c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} \longrightarrow 0$; car $c_n\left(f^{(p)}\right) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} \longrightarrow 0$.

5.2.2 Théorèmes de convergence en moyenne quadratique

Dans cette partie, on s'intéresse à établir la formule de Parseval (dans le cas particulier où f est de classe $\mathcal{C}^1$) qui exprime l'intégrale $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$ en terme de la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

Espace euclidien

En général, il y a un cadre où l'on sait calculer les coefficients de Fourier, c'est celui de l'espace euclidien, avec un produit scalaire, noté $\langle x, y\rangle$, et une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$. En effet, si l'on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_i \in \mathbb{R}$, un calcul immédiat montre que les x_i sont données par $x_i = \langle x, e_i\rangle$. C'est exactement la même chose dans le cas complexe, mais avec un produit scalaire hermitien. Or, ici, sur l'espace des fonctions continues par morceaux de période T à valeurs réelles (resp. complexes), on dispose d'un produit scalaire [4] euclidien (resp. hermitien) donné par la formule

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt \quad \text{encore noté } (f|g)$$

auquel on associe la norme $||\cdot||_2$ (norme de la convergence en moyenne quadratique) donnée par la formule

$$||f||_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Proposition 5.2.2.

1. *Les fonctions $e_n(t) := e^{in\omega t}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ forment une famille orthonormale pour le produit scalaire ci-dessus.*

2. *Les fonctions $\gamma_n(t) := \cos(n\omega t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma_n(t) := \sin(n\omega t)$ forment une famille orthogonale pour le produit scalaire ci-dessus.*

Démonstration. (Exercice) □

Les conditions de décomposition de Dirichlet sont évidemment identiques sur $[a, a+T]$ avec T quelconque.

Commençons par la propriété suivante qui est une application directe des techniques euclidiennes :

Proposition 5.2.3. *Rappelons qu'on pose $S_N(f) = \sum_{-N}^{N} c_n e_n$ avec $e_n(t) = e^{in\omega t}$. On a les formules suivantes :*

1. $||S_N(f)||_2^2 = \sum_{-N}^{N} |c_n|^2$,

2. $\langle f - S_N(f), S_N(f)\rangle = 0$,

3. $||f||_2^2 = ||f - S_N(f)||_2^2 + ||S_N(f)||_2^2$.

Démonstration. (Exercice) □

Montrons par la suite l'inégalité de Bessel qui est une composante essentielle de la formule de Parseval.

Corollaire 5.2.1. *(Inégalité de Bessel)*
La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ converge et on a $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq ||f||_2^2$.

4. Ce n'est pas tout à fait un produit scalaire car $\langle f, f\rangle$ peut être nul même si f ne l'est pas, par exemple si f est nulle sauf en un nombre fini de points, mais c'est sans importance.

Démonstration. (Exercice) □

Une conséquence très importante de Bessel est la convergence de la suite $|c_n|$ vers 0 :

Corollaire 5.2.2. *(Riemann-Lebesgue)*
Les suites c_n, a_n et b_n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. (Exercice) □

Corollaire 5.2.3. *On suppose toujours que f est T-périodique.*

1. *Si f est **continue** et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de terme général $c_n(f)$ converge absolument et la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ il existe une constante M telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leq \frac{M}{n^p}$.*

Démonstration. (Exercice) □

Maintenant, pour établir le théorème de Parseval dans le cas particulier où f est de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit de traiter le cas des coefficients c_n, puisque a_n et b_n s'en déduisant directement.

Théorème 5.2.2. *(Formule de Parseval)*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, T-périodique développable en série de Fourier. Alors

$$||f||_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Démonstration. (Exercice) □

Il s'agit d'un résultat très utile, à la fois sur un plan théorique (pour montrer par exemple que l'application qui à une fonction continue associe ses coefficients de Fourier est injective) et sur un plan pratique (pour calculer la somme de certaines séries). Ce théorème de Parseval pour les séries de Fourier est en fait un cas particulier d'un théorème plus général dans les espaces préhilbertiens, muni d'un système orthonormal total, théorème qu'on appelle aussi parfois théorème de Parseval-Bessel.

Utilisation de la décomposition de Fourier

a) La formule de Parseval traduit le fait que l'énergie du signal est égale à la somme des énergies des harmoniques. Elle nous permet aussi de calculer certaines limites des séries numériques de type $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$.

Exercice. Calculer la somme de la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

b) Si $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 1$, $|f(t)|^2$ définit aussi une densité de probabilité sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, permettant de définir les valeurs moyennes de variables aléatoires définies sur $[-\pi, \pi]$. Par exemple, en mécanique quantique, $|f(t)^2|$ représente la densité de probabilité qu'une particule se situe à l'abscisse t. La probabilité que la particule se situe dans l'intervalle $[a, b]$ vaut $\int_a^b |f(t)^2| dt$. La position moyenne de cette particule est $\int_{-\pi}^{\pi} t|f(t)^2| dt$.

c) $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$ représente également le carré de la valeur efficace du signal $f(t)$.

Exercice. La puissance moyenne P dissipée dans une résistance R par le signal périodique $u(t)$ est égale à la somme de la puissance dissipée par sa composante continue et des puissances moyennes de chacun des harmoniques.
On peut dire que $P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt$ dans une résistance de 1Ω.

On s'intéresse à déterminer le pourcentage de la puissance du signal $u(t)$ (Fig. 5.3) transporté par les 4 premières harmoniques du signal.

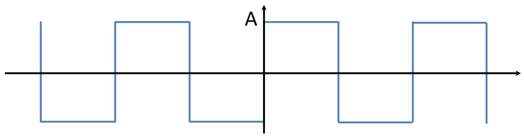


FIGURE 5.3 – Harmoniques en électronique

(a) Calculer la puissance P.

(b) Préciser les amplitudes des 4 premières harmoniques du signal.

(c) Déterminer la puissance moyenne dissipée par les 4 première harmoniques de ce signal dans une résistance de 1Ω.

(d) En déduire le pourcentage de puissance transporté par ces 4 premières harmoniques.

d) Décomposer un signal périodique en série de Fourier permet de le filtrer, c'est-à-dire d'en éliminer les harmoniques de fréquences trop hautes ou trop basses.

5.3 Résolution des équations différentielles

5.3.1 Equations différentielles ordinaires

De nombreuses **solutions périodiques** d'équations différentielles peuvent s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier. Si la fonction inconnue est notée y, on fait la substitution $y = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ dans l'équation différentielle et l'on identifie les coefficients de chaque $e^{in\omega t}$.

Exercice. Déterminer les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle

$$y'' + e^{it} y = 0.$$

5.3.2 Equations aux dérivées partielles

Equation de la chaleur à une dimension

L'équation mathématique qui décrit la distribution de la température $u(t,x)$, en fonction de la variable de temps t et de la variable d'espace x est donnée, pour un milieu à une dimension, par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{5.3.1}$$

où α est une constante physique dont la dimension est $m^2 s^{-1}$ dans le système international. Il convient d'ajouter à cette équation des **conditions aux limites** (en fonction du dispositif physique considéré) et une **donnée initiale**.

Remarque. On peut bien entendu considérer d'autres types de problèmes : équation de la chaleur (5.3.1) avec second membre (modélisation d'un système physique dans lequel il y a apport extérieur de chaleur), conditions aux limites plus complexes, etc.

Equation de la chaleur avec condition périodique

Soit f une fonction T-périodique continue (on peut imposer d'autres conditions à f : être continue par morceaux, être continûment dérivable, etc).

Une fonction u définie de $\mathbb{R}^+ \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$, est une solution de l'équation de la chaleur, avec condition périodique et valeur initiale f, si elle vérifie les propriétés suivantes :

a) u est continue par rapport aux variables $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,T]$,

b) u est dérivable par rapport à la variable t, pour $t > 0$,

c) u est T-périodique et deux fois dérivable par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}$,

d) u vérifie les équations :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} & = & \alpha \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \\ u(t, x+T) & = & u(t,x), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) & = & f(x). \end{array} \right.$$

Pour la résolution des EDP, la démarche des séries de Fourier est inductive : nous cherchons, dans un premier temps, à deviner l'expression de la solution. Dans un deuxième temps, nous démontrerons que la fonction trouvée est bien solution du problème considéré.

Exercice. Trouver la solution du problème $(*)$.

5.4 Exercices

Exercice 5.1.

Considérons un signal parabolique 2π-périodique défini par $x(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Déterminer la série de Fourier associée au signal $x(t)$.
2. Donner l'expression du spectre de ce signal puis tracer sa représentation fréquentielle bilatérale.

Exercice 5.2. *(Examen 2017-2018)*

Considérons un signal 2π-périodique défini par $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Tracer ce signal sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier associée à f.
3. Donner l'expression du spectre de ce signal puis tracer sa représentation fréquentielle bilatérale.
4. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 5.3.

Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un signal triangulaire 2π-périodique et pair tel que

$$x(t) = \begin{cases} t & t \in [0, \pi] \\ -t & t \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier de $x(t)$.
2. Donner l'expression du spectre de ce signal puis tracer sa représentation fréquentielle bilatérale.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
4. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 5.4. *(A faire chez vous)*

Soit f une fonction définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - t^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n du signal $x(t) = \cos(\alpha t)$ défini sur $[-\pi, \pi]$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
3. Sur quel domaine le signal x coïncide avec son développement en série de Fourier ?
4. En déduire une expression de $f(t)$.

5. Donner l'expression du spectre du signal x puis tracer sa représentation fréquentielle bilatérale pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.5. *(Examen 2018-2019)*

Considérons un signal $\frac{\pi}{2}$ périodique défini sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \cos(t)$.

1. Tracer ce signal sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ puis déterminer sa série de Fourier associée.
2. En déduire les valeurs des séries numériques $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{16n^2-1}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{(16n^2-1)^2}$.
3. Donner l'expression du spectre de ce signal puis tracer sa représentation fréquentielle **unilatérale**.

Exercice 5.6. *(Examen 2019-2020)*

Considérons un signal 2-périodique défini par $x(t) = t^2,\ t \in [0, 2[$.

1. Tracer ce signal sur $[-2, 4]$ puis déterminer sa série de Fourier.
2. En déduire les valeurs des séries numériques $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

   (Ind. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4},\ \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Exercice 5.7.

Déterminer les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle

$$y'' + e^{-it}y = 0.$$

Exercice 5.8. *(Examen de rattrapage 2019-2020)*

Considérons l'équation différentielle

$$(*) \qquad \begin{cases} f'' + 4f = g \\ f(0) = 0,\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

où le terme source g est une fonction 2π-périodique définie par

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & t = 0, \pi, 2\pi \\ -1 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier de g.
2. Chercher la solution générale f_h de l'équation homogène relative à $(*)$.
3. Chercher une solution particulière f_p de l'équation $(*)$ sous la forme

$$f_p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1} \sin((2n+1)t).$$

4. En déduire la solution de l'équation $(*)$.