Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
de Khouribga

Filière SMI S3
Année 2020-2021
Pr. A. Lahrech

Chapitre 2 : Algèbre de Boole et portes logiques

I. Introduction

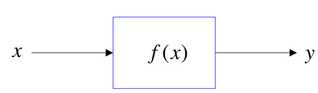
Le fonctionnement des systèmes numériques repose sur la manipulation de variables et fonctions dont les valeurs sont représentées par des grandeurs binaires car ne pouvant prendre que deux valeurs (généralement notées 0 et 1). La structure mathématique permettant de formaliser les opérations de manipulation de ces grandeurs binaires est dite algèbre de commutation ou plus communément algèbre de Boole. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés fondamentales de l'algèbre de Boole et aux portes logique indispensables à la compréhension du fonctionnement des systèmes numériques.

II. Propriétés de l'algèbre de Boole

II.1. Définition

Dans l'algèbre de Boole, une variable ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeur possible. Une telle variable est dite variable logique, variable binaire, ou variable booléenne. De même, une fonction de n variables logiques ne peut prendre comme valeur que 0 ou 1. Elle est dite fonction logique, fonction binaire, ou fonction booléenne.

II.2. Fonctions booléenne



- y prend deux type de valeur : 0 ou 1
- y traduit les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 1$.

II.3. Table de vérité d'une fonction logique

C'est une table donnant l'état logique de la fonction pour chacune des combinaisons des états de ses variables. Une fonction de n variables est représentée par une table de vérité à $n + 1$ colonnes et au plus 2^n lignes. Le tableau 1 donne la forme générale d'une fonction de deux variables logiques.

A	B	$f(A,B)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

TABLE 1 – Forme générale de la table de vérité d'une fonction à 2 variables logiques

II.4. Fonctions logiques élémentaires

Trois fonctions suffisent pour définir une algèbre de Boole : la complémentation (ou inversion logique), le produit logique et l'addition logique

II.4.1 La fonction de complémentation ou fonction NON

Le complément de la variable A se note $\overline{A}$ (se lit A "barre" ou non A). $\overline{A}$ vaut 1 (respectivement 0) si et seulement si A vaut 0 (respectivement 1). Le tableau 2 donne la table de vérité de la fonction complémentation.

A	$S = \overline{A}$
0	0
1	0

TABLE 2 – Table de vérité de la fonction NON logique

- **Symbole logique de l'inverseur**

Les symboles usuellement utilisés pour représenter graphiquement l'opérateur inverseur, sont ceux de la figure 1 et 2

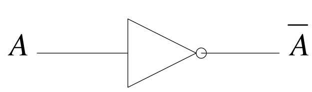


FIGURE 1 – Symbole américain

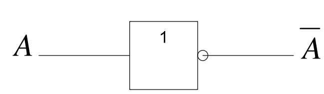


FIGURE 2 – Symbole international

II.4.2 La fonction produit logique ou fonction ET

Le produit logique de 2 variables se note $A.B$ (se lit A et B). $A.B$ vaut 1 si et seulement si A et B valent 1. Le tableau 3 donne la table de vérité de la fonction ET.

A	B	$S = A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table 3 – Table de vérité de la fonction ET logique

$S = 1 \iff$ toutes les entrées sont à 1.

- **Symbole logique de l'opérateur ET**

Voici les symboles logiques de l'opérateur ET (figure 3 et 4).

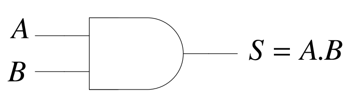


Figure 3 – Symbole américain

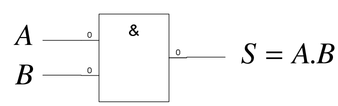


Figure 4 – Symbole international

- **Propriétés de la fonction logique ET**

Soit x, y deux variables booléenne.

Commutativité	$x.y = y.x$
Associativité	$(x.y).z = x.(y.z)$
Elément neutre : "1"	$x.1 = x$
Elément absorbant : "0"	$x.0 = 0$
Idempotence	$x.x = x$
Complémentation	$\overline{x}.x = 0$
Double complémentation	$\overline{\overline{x}}.x = x.x = x$

II.4.3 La fonction addition logique ou fonction OU

L'addition logique de 2 variables se note $A+B$ (se lit "A ou B"). $A+B$ vaut 0 si et seulement si A et B valent 0. Le tableau 4 donne la table de vérité de la fonction OU, et les figure 5 et 6 présentent les symboles logiques de l'opérateur associé.

A	B	$S = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TABLE 4 – Table de vérité de la fonction OU logique

$S = 1$ si un des variables d'entrées est à 1.

- **Symbole logique de l'opérateur OU**

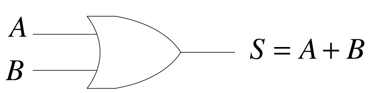


FIGURE 5 – Symbole américain

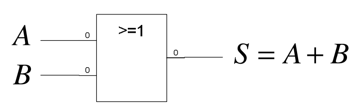


FIGURE 6 – Symbole international

- **Propriétés de la fonction logique OU**

Soit x, y deux variables booléenne.

Commutativité	$x + y = y + x$
Associativité	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Elément neutre : "0"	$x + 0 = x$
Elément absorbant : "1"	$x + 1 = 1$
Idempotence	$x + x = x$
Complémentation	$\overline{x} + x = 1$

II.5. Propriétés du calcul booléen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x.(y+z) & = & (x.y) + (x.z) \\ x + (y.z) & = & (x+y).(x+z) \end{array} \right.$$

II.6. Diverses relations de base

$$\begin{cases} x + (x.y) & = & x\ ; & \rightarrow\ x(1+y) = x \\ x + (\overline{x}.y) & = & x + y\ ; & \rightarrow\ x + (x.y) + (\overline{x}.y) = x + y \end{cases}$$

II.7. Théorème de De Morgan :

- Le complément d'un produit est égal à la somme des compléments des termes du produit :

$$\overline{s} = \overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$$

- Le complément d'une somme est égal au produit des compléments des termes de la somme :

$$\overline{s} = \overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$$

Le théorème de De Morgan et ses conséquences est très utile pour simplifier des expressions booléennes.

II.8. Portes de base utilisées :

Dans les circuits logiques, on utilise également des opérateurs qui sont des combinaisons des fonctions ET, OU, et NON

II.8.1. Porte NAND (NON ET)

La table de vérité de la fonction NAND se déduit immédiatement de celle de la fonction ET par inversion du résultat.

A	B	$S = \overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TABLE 5 – Table de vérité de la fonction NAND

- **Symbole logique de l'opérateur NAND (NON ET)**

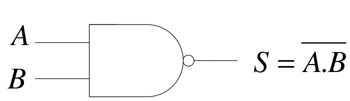


FIGURE 7 – Symbole américain

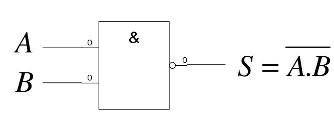


FIGURE 8 – Symbole international

II.8.2. Porte NOR (NON OU)

La table de vérité de la fonction NOR se déduit immédiatement de celle de la fonction OU par inversion du résultat.

A	B	$S = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Table 6 – Table de vérité de la fonction NOR

- **Symbole logique de l'opérateur NOR (NON OU)**

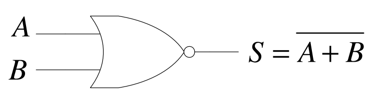


Figure 9 – Symbole américain

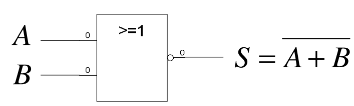
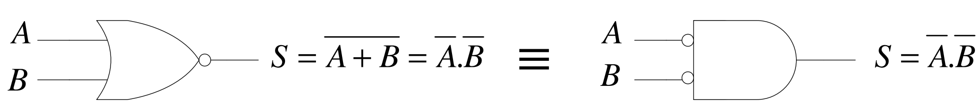
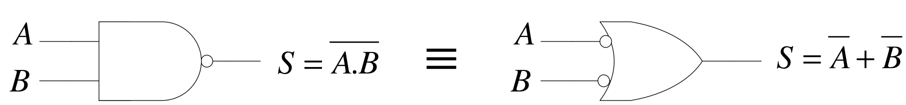


Figure 10 – Symbole international

Une porte logique NOR peut être représentée par une porte ET avec ses entrées inversées :



Une porte logique NAND peut être représentée par une porte OU avec ses entrées inversées :



II.8.3. Porte OU exclusif (XOR)

A	B	$S = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TABLE 7 – Table de vérité de la fonction XOR

- **Symbole logique de l'opérateur XOR**

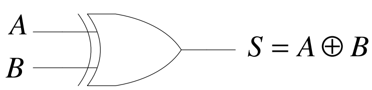


FIGURE 11 – Symbole américain

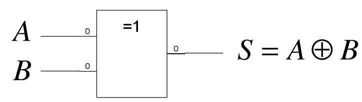


FIGURE 12 – Symbole international

II.8.4. Porte OU exclusif complémenté (XNOR)

A	B	$S = \overline{A \oplus B} = AB + \overline{AB}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABLE 8 – Table de vérité de la fonction XNOR

- **Symbole logique de l'opérateur XNOR**

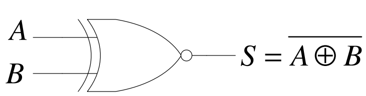


FIGURE 13 – Symbole américain

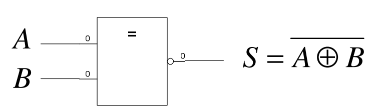


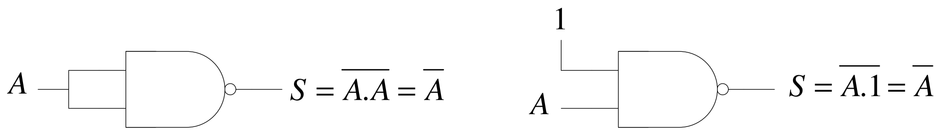
FIGURE 14 – Symbole international

II.9. Universalité des portes NAND et NOR

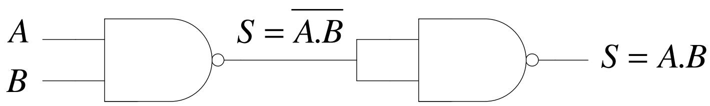
Toutes les portes logiques élémentaires (ET, OU, NON, XOR) peuvent être réalisées avec des portes NAND ou NOR.

II.9.1 Universalité des portes NAND

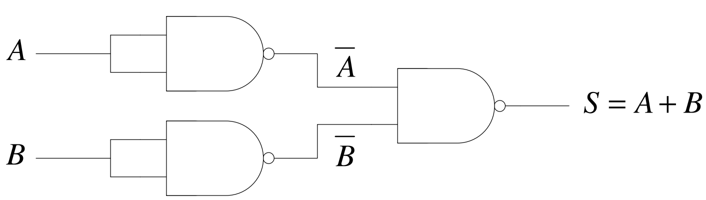
- **Exemple 1 :** Réalisation de la porte inverseur à l'aide des portes NAND



- **Exemple 2 :** Réalisation de la porte ET à l'aide des portes NAND

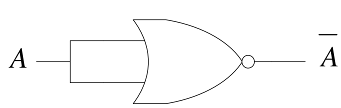


- **Exemple 3 :** Réalisation de la porte OU à l'aide des portes NAND

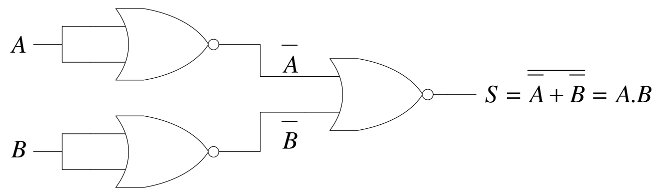


II.9.2 Universalité des portes NOR

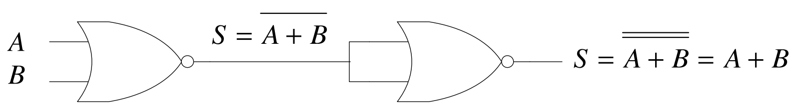
- **Exemple 1 :** Réalisation de la porte inverseur à l'aide des portes NOR



- **Exemple 2 :** Réalisation de la porte ET à l'aide des portes NOR

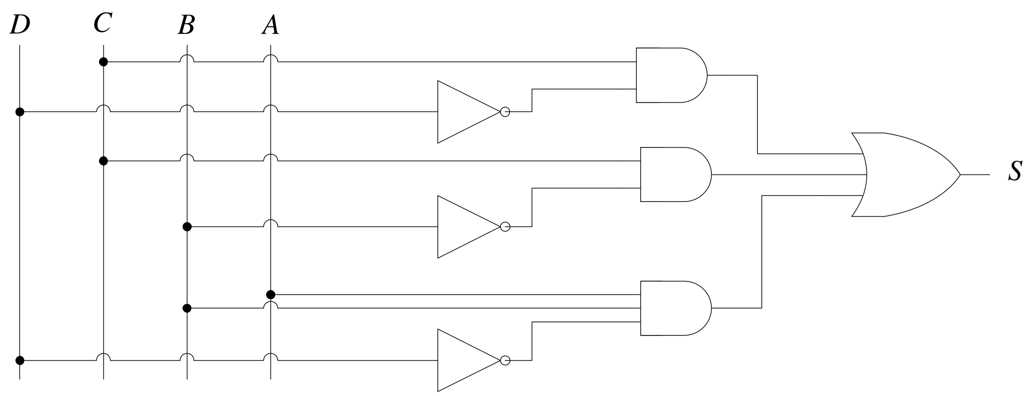


- **Exemple 3 :** Réalisation de la porte OU à l'aide des portes NOR



II.10. Matérialisation d'une fonction booléenne

Soit la fonction : $S = \overline{D}.C + C.\overline{B} + \overline{D}.B.A$ à réaliser à l'aides des portes logiques inverseur, ET et OU.



II.11. Matérialisation en NAND, NOR

- En NAND : On double complémente l'équation logique, puis on applique le théorème de De Morgan.

  Exemple : $S = \overline{D}.C + C.\overline{B} + \overline{D}.B.A$

$$\begin{aligned} S &= \overline{\overline{\overline{D}.C + C.\overline{B} + \overline{D}.B.A}} \\ S &= \overline{(\overline{\overline{D}.C}).(\overline{C.\overline{B}}).(\overline{\overline{D}.B.A})} \end{aligned}$$

- En NOR : On double complémente les monômes de l'équation logique, puis on applique le théorème de De Morgan.

Exemple : $S = \overline{D}.C + C.\overline{B} + \overline{D}.B.A$

$$
\begin{aligned}
S &= \overline{\overline{\overline{D}.C}} + \overline{\overline{C.\overline{B}}} + \overline{\overline{\overline{D}.B.A}} \\
S &= \overline{(\overline{\overline{D}} + \overline{C})} + \overline{(\overline{C} + \overline{\overline{B}})} + \overline{(\overline{\overline{D}} + \overline{B} + \overline{A})} \\
S &= \overline{(D + \overline{C})} + \overline{(\overline{C} + B)} + \overline{(D + \overline{B} + \overline{A})}
\end{aligned}
$$

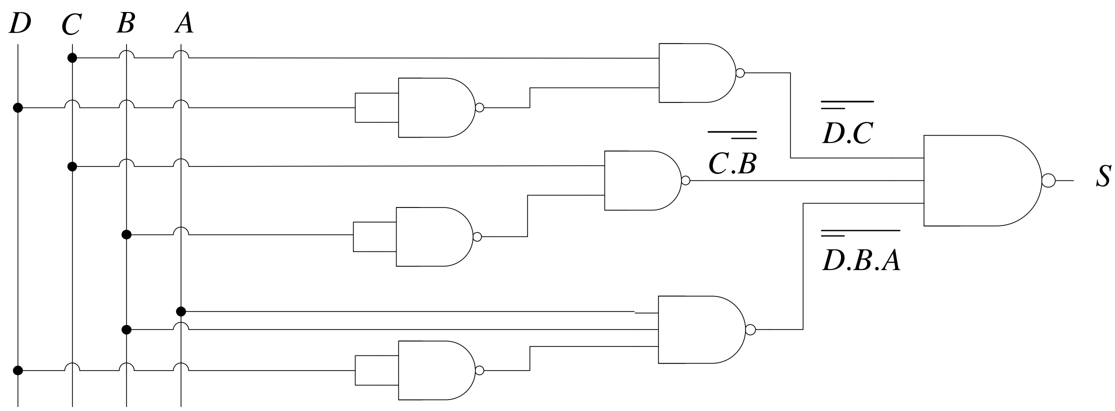


Figure 15 – Réalisation de la fonction S à l'aide des portes NAND

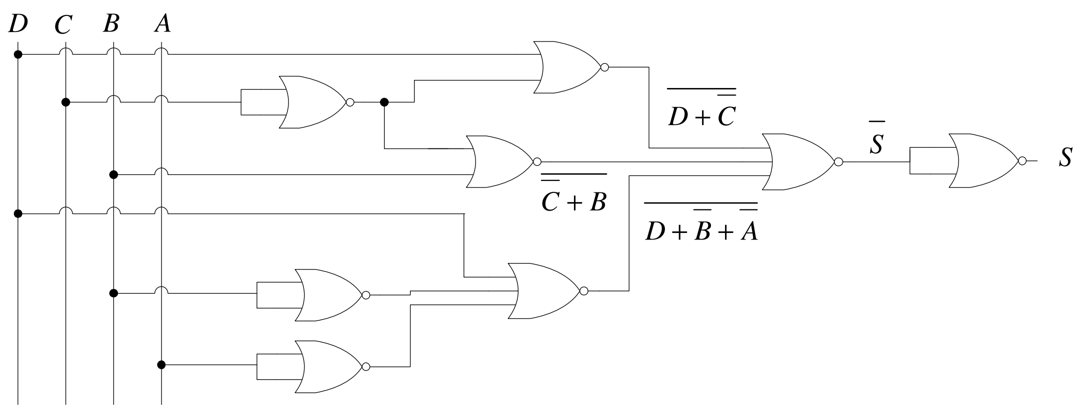


Figure 16 – Réalisation de la fonction S à l'aide des portes NOR

II.12. Visualisation par chronogrammes

Soit la table de vérité réalisant la fonction S :

A	B	C	$S = f(A, B, C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

La figure 17 représente les chronogrammes des variables logiques A, B, C et S

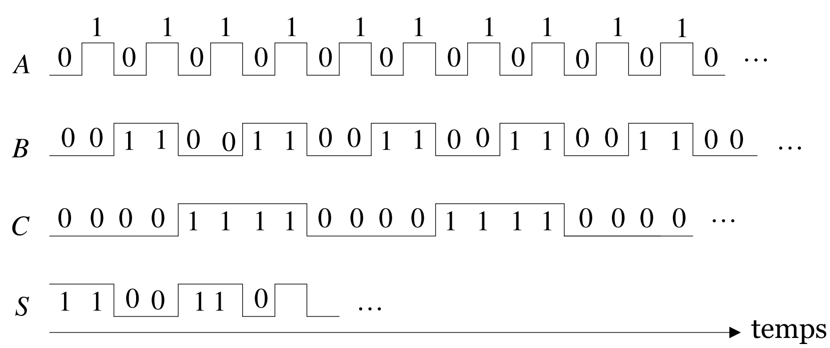


FIGURE 17 – Chronogrammes des variables logiques A, B, C et S

II.13. Représentation d'une fonction booléenne :

Une fonction booléenne peut être exprimée de l'une de deux façons : une somme de produits, ou un produit de sommes. Les termes multipliés sont des mintermes, et les termes de somme sont nommé maxtermes. Le tableau 9 montre les mintermes et maxtermes d'une fonction à 3 variables.

A	B	C	mintermes	maxtermes
0	0	0	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C} = m_0$	$A + B + C = M_0$
0	0	1	$\overline{A}.\overline{B}C = m_1$	$A + B + \overline{C} = M_1$
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C} = m_2$	$A + \overline{B} + C = M_2$
0	1	1	$\overline{A}BC = m_3$	$A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$
1	0	0	$A\overline{B}.\overline{C} = m_4$	$\overline{A} + B + C = M_4$
1	0	1	$A\overline{B}C = m_5$	$\overline{A} + B + \overline{C} = M_5$
1	1	0	$AB\overline{C} = m_6$	$\overline{A} + \overline{B} + C = M_6$
1	1	1	$ABC = m_7$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = M_7$

Table 9 – Mintermes et maxtermes à 3 variables

Il est possible d'établir les équations logiques correspondant à une table de vérité en utilisant les mintermes ou les maxtermes.

Soit par exemple la table de vérité réalisant la fonction y :

A	B	C	$y = f(A, B, C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1) **Première forme canonique ou forme disjonctive (somme de produits) :**

   Pour établir l'expression algébrique de la fonction y sous sa forme disjonctive, on génére tous les mintermes de la fonction qui correspondent à une valeur de 1 de celle-ci. La fonction y est alors la somme de tous ces mintermes. Par la suite, on peut simplifier la fonction en utilisant les théorèmes et les règles de l'algèbre de Boole.

A	B	C	$y = f(C, B, A)$	mintermes
0	0	0	1	$\overline{A}.\,\overline{B}.\,\overline{C}$
0	0	1	1	$\overline{A}.\,\overline{B}.\,C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A.\,\overline{B}.\,\overline{C}$
1	0	1	1	$A.\,\overline{B}.\,C$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A.\,B.\,C$

Les termes ou la fonction y est 1 sont : $0, 1, 4, 5$ et 7.

$$\begin{aligned}
y &= \sum \text{mintermes}\,(m_0, m_1, m_4, m_5, m_7) \\
&= \overline{A}.\,\overline{B}.\,\overline{C} + \overline{A}.\,\overline{B}.\,C + A.\,\overline{B}.\,\overline{C} + A.\,\overline{B}.\,C + A.\,B.\,C \\
&= \overline{A}.\,\overline{B}(\overline{C} + C) + A\overline{B}.\,(\overline{C} + C) + A.B.C \\
&= \overline{A}.\,\overline{B} + A\overline{B}. \ + A.B.C \\
&= \overline{B}.\,(\overline{A} + A) + A.B.C = \overline{B} + A.B.C \\
&= \overline{B} + A.C; \quad (\text{car : } \ x + \overline{x}.y = x + y)
\end{aligned}$$

2) **Deuxième forme canonique ou forme conjonctive (produit de sommes) :**

Pour établir l'expression algébrique de la fonction y sous sa forme conjonctive, on génére tous les maxtermes de la fonction qui correspondent à une valeur de 0 de celle-ci. La fonction y est alors le produit de tous ces maxtermes.

A	B	C	$y = f(A, B, C)$	maxtermes
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	0	$A + \overline{B} + C$
0	1	1	0	$A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	1	

Les termes ou la fonction y est 0 sont : $2, 3$ et 6.

$$
\begin{aligned}
&= \prod \text{maxtermes}\left(M_2, M_3, M_6\right) \\
&= \left(A+\overline{B}+C\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)
\end{aligned}
$$

Les formes normales disjonctives ou conjonctives provenant d'une table de vérité sont équivalentes, puisqu'elles expriment la même fonction f.