Chapitre 5

Intégration numérique

5.1 Introduction

On rencontre souvent des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer. Voici quelques exemples :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+cos^2(x)}dx, \qquad \int_0^1 cos^2 x dx.$$

Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée. Soit w un poids positif sur $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$ telle que $\mathcal{I} = \int_a^b f(x)w(x)dx$ existe.
Notre but est de chercher une approximation de $\mathcal{I}$ par une formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i), \tag{5.1}$$

où $x_i \in [a,b]$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Pour atteindre ce but, on considère principalement deux classes

1. Méthodes composées ($[a,b]$ borné et $w \equiv 1$)
   On subdivise $[a,b]$ en n sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ et on construit sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ une approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$.
   Cette méthode appelée méthode d'intégration élémentaire ; s'obtient en remplacent f par son polynôme d'interpolation sur $[x_i, x_{i+1}]$.
2. Méthodes de Gauss ($[a,b]$ et w sont particuliers)
   On approche f par son polynôme d'interpolation en des points choisis dans $[a,b]$ de façon à obtenir une formule d'intégration de type (5.1) exact pour les polynômes de degré le plus élevé possible.
   Les x_i sont les zéros des polynômes orthogonaux associes au point w.
   Ne seront pas détaillées dans ce cours

5.2 Méthodes composées

5.2.1 Construction

Soit $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$.
On se propose d'évaluer l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ en subdivisant l'intervalle d'integration

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

et en approchant f sur chaque intervalle par une somme finie de la forme

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Les méthodes composées consiste à remplacer f par son polynôme d'interpolation sur $[x_i, x_{i+1}]$.

On choisi $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et on remplace f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme p_0 de degré 0 tel que $p_0(x) = f(\xi_i)$. Ainsi,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_0(x)dx = (x_{i+1} - x_i)f(\xi_i)$$

et par suite

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\xi_i) = R_n(f).$$

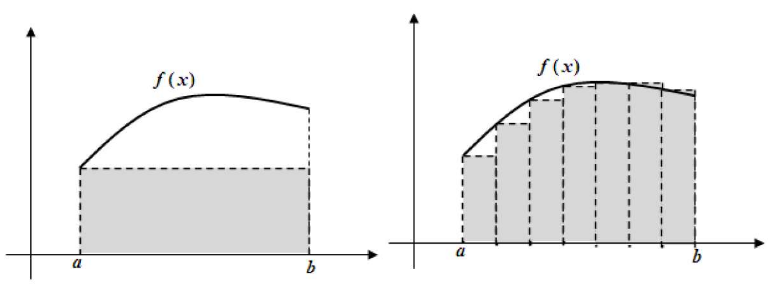
La formule obtenue est une somme de **Reimann**.

5.2.2 Formule des rectangles à gauche

On remplace f par la fonction en escalier qui prend sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la même valeur à l'extrémité gauche, c-à-d $f(x_i)$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i).$$

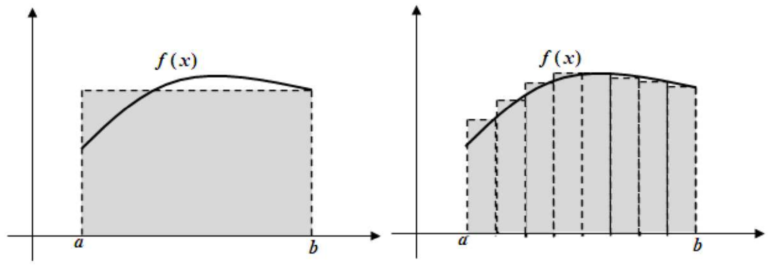
Géométriquement, cela signifie qu'on approche l'intégrale de f par l'aire des rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$:



5.2.3 Formule des rectangles à droite

On remplace f par la fonction en escalier qui prend sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la même valeur à l'extrémité droite, c-à-d $f(x_{i+1})$. Ainsi,

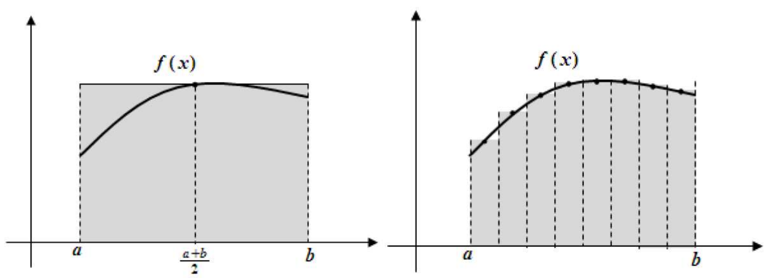
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1}).$$



5.2.4 Formule du point milieux

On remplace f par la fonction en escalier qui prend sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la même valeur milieux, c-à-d $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}).$$



5.2.5 Etude de l'erreur

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et on se donne $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdvision régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note h le pas de cette subdivision.

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression, $x_0 = a, x_1 = b$ on a

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b - a)f(a)$$

La méthode des rectangles est une méthode d'ordre 0. Lorsque la dérivée première de f est bornée par une constante M, l'erreur dans la méthode des rectangles est donnée par l'expression

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih)\Big| \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

En effet, posons

$$F(h) = \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx$$

On a $F^{'}(h) = f(\alpha + h)$ et $F^{"}(h) = f^{'}(\alpha + h)$. En appliquant la formule de Taylor au deuxième ordre.

$$\exists c \in]0, h[, F(h) = F(0) + hF^{'}(0) + \frac{h^2}{2}F^{"}(c)$$

Soit encore

$$\exists c \in]0,h[, \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)dx = hf(\alpha) + \frac{h^2}{2} f'(\alpha + c)$$

Posons

$$S = h \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$$

En appliquant la formule précédente, on obtient la majoration cherché

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f(x)dx - S \Big| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \Big| \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx - hf(x_i) \Big| \\ &\leq \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(a+ih+c)| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \end{aligned}$$

puisque $h = (b-a)/n$.

5.2.6 Formule des trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$. La fonction f est remplacée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation de degré 1 aux points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, soit

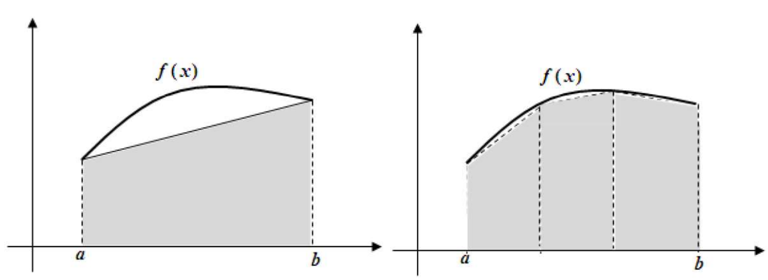
$$p_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

La méthode s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression, $x_0 = a, x_1 = b$ on a

$$\int_a bf(x)dx \simeq \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b))$$



La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des trapèzes est donnée par l'expression

$$\Big| \int_a^b f(x)dx - S \Big| \leq \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

La somme S s'exprime par

$$S = \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big)$$

5.3 Formule générale des méthodes composées

On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$, $s = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{h_i}$
$x \in [x_i, x_{i+1}] \Leftrightarrow s \in [-1, 1]$
Soit $\varphi_i(s) = f(x) = f(\frac{x_i + x_{i+1} + sh_i}{2})$. Donc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h_i}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)ds$$

Ceci nous ramène à approcher des intégrales sur l'intervalle fixe $[-1, 1]$.
Pour approcher $\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)ds$, on choisit $(k+1)$ points dans $[-1, 1]$ et on remplace φ_i par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré k aux $(k+1)$ points notés $z_j,\ i = 0, ..., k$.
Donc

$$\varphi_i(s) \simeq P_{i,k}(s) = \sum_{j=0}^{k} \varphi_i(z_j)L_{j,k}(s)$$

où $L_{j,k}$ sont les polynômes de Lagrange.
Par conséquent

$$\int_{-1}^{1} \varphi_i(s)ds \simeq 2\sum_{j=0}^{k} w_j\varphi_i(z_j) \tag{5.2}$$

où $\quad w_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_{j,k}(s)ds.$
Ainsi

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq h_i\sum_{j=0}^{k} w_j f(x_{i,j}) \quad \text{où} \quad x_{i,j} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_j h_i}{2}$$

D'où

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}\Big(h_i\sum_{j=0}^{k} w_j f(x_{i,j})\Big) = T_{n,k}(f). \tag{5.3}$$

— (5.2) s'appelle formule de quadrature élémentaire
— (5.3) s'appelle formule de quadrature composée

Théorème 5.3.1

Si f est une fonction intégrable au sens de Reimann sur $[a, b]$, alors $\lim_{h\to 0} T_{n,k}(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $h = \max_{0\leq i\leq n-1}(h_i)$

Preuve
$T_{n,k}(f) = \sum_{j=0}^{k} w_j I_{n,j}(f)$, où $I_{n,j}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_j f(\alpha_{i,j})$
Comme $\alpha_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ alors $I_{n,j}(f)$ est une somme de Reimann.
D'où $\lim_{h\to 0} I_{n,j}(f) = \int_a^b f(x)dx$, or $\sum_{j=0}^{k} w_j = 1$ (car $\sum_{j=0}^{k} L_{j,k}(s) = 1$)

Par suite $\lim_{h\to 0} T_{n,k}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

On définit l'erreur comme étant $E(f) = \int_a^b f(x)dx - T_{n,k}(f)$

Définition 5.3.2

Une formule de quadrature est dite exacte sur un ensemble V si pour tout $f \in V$ on a $E(f) = 0$

Définition 5.3.3

Une formule de quadrature est dite de degré de précision n si elle est exacte pour $x^k,\ k = 0, \cdots, n$ et non exacte pour x^{n+1}.

Remarque 5.3.4

Une formule exacte sur l'ensemble des polynômes de degré au plus n est de degré de précision au moins n.

5.3.5 Formules de Newton-Cotes fermée

Pour obtenir les formules de Newton-Cotes fermé, on interpole φ_i aux points suivants $z_j = -1+j\frac{2}{k}$.
La formule (5.3) s'appelle formule de Newton-Cotes fermé.
Elles sont exactes par construction sur les polynômes de degré k.

5.3.5.1 Cas $k = 1$, formule des trapèzes

Les points d'interpolation sont $z_0 = -1$ et $z_1 = 1$.

$$L_{0,1}(s) = \frac{s-1}{-2}, \qquad L_{1,1}(s) = \frac{s+1}{2}$$

Donc

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s-1}{-2}ds = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s+1}{2}ds = \frac{1}{2}$$

D'autre part

$$x_{i,0} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_0 h_i}{2} = x_i \quad \text{et} \quad x_{i,1} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_1 h_i}{2} = x_{i+1}$$

Ainsi

$$T_{n,1}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

c'est la formule des trapèzes.

5.3.5.2 Cas $k = 2$, formule de simpson

Les points d'interpolation sont $z_0 = -1$, $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$.

$$L_{0,2}(s) = \frac{s(s-1)}{2}, \quad L_{1,2}(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{-1} \quad \text{et} \quad L_{2,2}(s) = \frac{s(s+1)}{2}$$

Donc

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s(s-1)}{2} ds = \frac{1}{6}, w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(s+1)(s-1)}{-1} ds = \frac{2}{3}$$

$$\text{et } w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{s+1}{2} ds = \frac{1}{6}$$

D'autre part

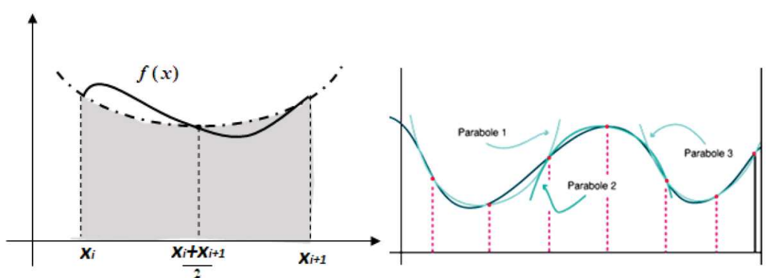
$$x_{i,0} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_0 h_i}{2} = x_i, \quad x_{i,1} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_1 h_i}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$$\text{et} \quad x_{i,2} = \frac{x_i + x_{i+1} + z_2 h_i}{2} = x_{i+1}$$

Ainsi

$$T_{n,2}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Big(\frac{1}{6} f(x_i) + \frac{2}{3} f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big) + \frac{1}{6} f(x_{i+1})\Big)$$

c'est la formule des simpson.



Exemple 5.3.6 (Formules de Newton-Cotes fermée)

n	formule	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1	trapèzes	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	simpson	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$				
3	simpson($\frac{3}{8}$)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	Boole	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
5	Boole	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
6	Weddle	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

5.4 Exercices

1. On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f'(\gamma) \tag{5.4}$$

où γ est un point de l'intervalle $]0,\ 1[$.

(a) On suppose que γ est donné. Déterminer α et β pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1.

(b) Comment choisir γ pour que la méthode soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 2 ?

(c) Que devient la formule (5.4) si l'intervalle $[0,\ 1]$ est remplacé par un intervalle $[a,\ b]$ quelconque ? (utiliser le changement de variable $t = (b-a)x + a$, $x \in [0,\ 1]$).

2. Pour calculer les intégrales $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k e^{x-1} dx$, $k = 1, 2, \ldots$ On peut utiliser la relation de récurrence : $I_k = 1 - kI_{k-1}$, avec $I_1 = \frac{1}{e}$. Calculer I_{10} avec la formule composite de Simpson en assurant une erreur de quadrature inférieure ou égale à 10^{-3}. Comparer l'approximation de Simpson et celle obtenue avec la formule de récurrence ci-dessus.

3. On cherche une méthode d'intégration numérique de la forme

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq \alpha f(0) + \beta f(\frac{1}{3}) + \gamma f(\frac{2}{3}) + \delta f(1) \tag{5.5}$$

(a) Trouver α, β, γ et δ, tels que cette formule (5.5) soit exacte sur l'espace des polynômes de degré le plus élevé possible.

(b) Par un changement de variables, donner la formule sur l'intervalle quelconque $[a,\ b]$.

(c) Calculer par la formule de quadrature trouvée en (5.5) les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^1 t^3 dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^3 t^2 dt$.

4. On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx. \tag{5.6}$$

(a) Calculer analytiquement I.

(b) Utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange pour $n = 3$, puis $n = 4$ pour obtenir une valeur approchée de I.

(c) Utiliser les méthodes numériques (trapèze et Simpson) pour calculer numériquement I.

(d) Comparer et interpréter les résultats obtenus.

(e) Utiliser la méthode des trapèzes pour obtenir une valeur approchée I_2 de I en subdivisant l'intervalle $[1,\ 2]$ en 2 sous-intervalles de même taille.

(f) Expliquer graphiquement pourquoi I_2 est supérieure à $\log(2)$.

5. Une formule de quadrature notée $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ à s étages est donnée par

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^s b_i f(c_i)$$

Les c_i sont les noeuds de la formule de quadrature et les b_i en sont les poids.

(a) Soit $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ une formule de quadrature. Monter que

$$b_i = \int_0^1 l_i(x)dx, \text{ où } l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{s} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}$$

(b) Calculer les formules de Newton-Cotes pour $c_i = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ et $c_i = (0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1)$

(c) Déterminer c_2, b_1 et b_2 dans la formule de quadrature :

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq b_1 f(0) + b_2 f(c_2)$$

afin que son ordre soit maximal.

6.

(a) Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ d'une fonction f construite sur les points : $-1,\ \frac{-1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1.$

(b) Par intégration du polynôme $P(x)$, calculer la formule d'intégration associée.