Feuille d'Exercices n° 3 : PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS

Exercice 3.5 : *Trois modèles pour les tirages*

Une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9.

1) On tire, dans un premier cas, deux boules simultanément.

a) Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.

b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?

2) On tire, cette fois-ci, une boule, puis une seconde boule (sans remise de la première).

a) Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.

b) Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?

3) Dans ce troisième cas, on tire une boule, on la remet, puis on retire une boule.

a) Indiquer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

b) Quelle est la probabilité qu'elles aient la même parité ?

Solution

1) $\boxed{\text{Tirages simultanés : ni ordre ni répétition} \Longrightarrow C_n^p}$

a) On remarque, dans ce premier modèle, que l'ordre ne joue aucun rôle et que les éléments choisis sont distincts. Donc on aura recours aux combinaisons.
$\Omega = \{\{b_i, b_j\}, i \neq j, i, j \in [\![1,9]\!]\}$ et $\text{card}(\Omega) = C_9^2 = 9 \times 8/2 = 36$.

b) Notons E l'événement " les deux boules ont la même parité " et remarquons que E est l'union disjointe des deux événements suivants :

$$E_p = \quad \text{[les deux boules ont des numéros pairs]''}$$
$$E_i = \quad \text{[les deux boules ont des numéros impairs]''}$$

On a donc $E = E_p \cup E_i$ avec $E_p \cap E_i = \emptyset$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(E_p) + \text{card}(E_i) = C_4^2 + C_5^2 = 6 + 10 = 16$. On en conclut que

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

2) $\boxed{\text{Tirages successifs sans remise : ordre important sans répétition} \Longrightarrow A_n^p}$

a) On remarque, dans ce deuxième modèle, que l'ordre joue un rôle important et que les éléments choisis sont distincts(sans remise). Donc on aura recours aux arrangements.
$\Omega = \{(b_i, b_j), i \neq j, i, j \in [\![1,9]\!]\}$ et $\text{card}(\Omega) = A_9^2 = 9 \times 8 = 72$. Pour marquer que l'ordre est important on a utilisé les parenthèses au lieu des accolades(parenthèses $\Longleftrightarrow$ ordre, $\{\} \Longleftrightarrow$ ordre sans importance)

b) Notons E l'événement " les deux boules ont la même parité " et remarquons que E est l'union disjointe des deux événements suivants :

$$E_p = \quad \text{[les deux boules ont des numéros pairs]''}$$
$$E_i = \quad \text{[les deux boules ont des numéros impairs]''}$$

On a donc $E = E_p \cup E_i$ avec $E_p \cap E_i = \emptyset$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(E_p) + \text{card}(E_i) = A_4^2 + A_5^2 = 12 + 20 = 32$.
On en conclut que

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

3) $\boxed{\text{Tirages successifs avec remise : ordre important avec répétition possible} \Longrightarrow n^p}$

a) On remarque, dans ce troisième modèle, que l'ordre joue un rôle important et que les éléments choisis sont non nécessairement distincts(avec remise). Donc on aura recours à la formule n^p.
$\Omega = \{(b_i, b_j), i, j \in [\![1,9]\!]\}$ et $\text{card}(\Omega) = 9^2 = 81$. Pour marquer que l'ordre est important on a utilisé les parenthèses au lieu des accolades(parenthèses $\Longleftrightarrow$ ordre, $\{\} \Longleftrightarrow$ ordre sans importance)

b) Notons E l'événement " les deux boules ont la même parité " et remarquons que E est l'union disjointe des deux événements suivants :

$$E_p = \quad [\text{ les deux boules ont des numéros pairs}]\text{''}$$
$$E_i = \quad [\text{ les deux boules ont des numéros impairs}]\text{''}$$

On a donc $E = E_p \cup E_i$ avec $E_p \cap E_i = \varnothing$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(E_p) + \text{card}(E_i) = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$.
On en conclut que

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{41}{81}.$$

Pour conclure, on remarque qu'avec le premier et le deuxième modèle on trouve des cardinaux différents mais par division les mêmes probabilités. Par contre, le troisième modèle nous donne des cardinaux différents et des probabilités différentes!

Exercice 3.8 :

Six couples se trouvent dans une pièce.

1)) On choisit deux personnes au hasard. Calculer la probabilité pour que :

a) Ces personnes soient mariées.

b) L'une d'elle soit un homme et l'autre une femme.

2) On choisit quatre personnes au hasard. Calculer la probabilité pour que :

a) L'on ait choisit 2 couples de personnes mariées.

b) L'on ait aucun couple parmi les 4 personnes choisies.

c) L'on ait exactement un couple parmi ces 4 personnes.

3) On repartit les 12 personnes en six groupes de 2 personnes. Calculer la probabilité pour que :

a) Chaque groupe constitue un couple marié.

b) Chaque groupe comprenne un homme et une femme.

Solution

1) $\text{card}(\Omega_1) = C_{12}^2 = 6 \times 11 = 66$.

a) $\text{card}(E_a^1) = C_6^1 = 6$, donc $P(E_a) = 6/66 = 1/11$.

b) $\text{card}(E_b^1) = C_6^1 \times C_6^1 = 36$, donc $P(E_)) = 36/66 = 6/11$.

2) $\text{card}(\Omega_2) = C_{12}^4 = 495$.

a) $\text{card}(E_a^2) = C_6^2 = 15$, donc $P(E_a) = 15/495 = 1/33$.

b) $\text{card}(E_b^2) = C_6^4 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$, donc $P(E_b) = 240/495 = 16/33$.

c) $P(E_c^2) = 1 - \left(P(E_a^2) + P(E_b^2)\right) = 16/33$.

3) $\text{card}(\Omega_3) = \dfrac{12!}{(2!)6} = 7484400$.

a) $\text{card}(E_a^3) = 6! = 720$, donc $P(E_a) = 720/7484400 = 1/10395$.

b) $\text{card}(E_b^3) = 6! \times 6! = 720^2 = 518400$, donc $P(E_)) = 518400/7484400 = 16/231$.