# Feuille d'Exercices n° 1
## Dénombrements

**Exercice 1.1 :** *Cartes et placements*

Dans un jeu de cartes, on mélange bien les 40 cartes.
**1)** Quel est le nombre de cas possibles concernant le jeu des 40 cartes ?
**2)** Quel est le nombre de cas possibles concernant le jeu des 40 cartes si les quatre as sont tous placés les uns après les autres ?

**Exercice 1.2 :** *Modèles en mécanique statistique*

En mécanique statistique, on étudie la distribution de particules dans l'espace. Il est pratique de considérer que l'espace est subdivisé en petites cellules. Trois modèles uniformes différents ont été proposés.

1. Le modèle de Maxwell-Boltzmann (M-B), supposant que l'on peut distinguer les particules et ne limitant pas le nombre de particules par cellule.
2. Le modèle de Bose-Einstein (B-E), supposant que l'on ne peut distinguer les particules et ne limitant pas le nombre de particules par cellule.
3. Le modèle de Fermi-Dirac (F-D), supposant que l'on ne peut distinguer les particules, avec au plus une particule par cellule.

Donner, en fonction des différents modèles, le nombre de façons de répartir $p$ particules dans $k$ cellules en discutant selon les paramètres $p$ et $k$.

**Exercice 1.3 :** $\overset{*}{\Sigma}{}_S^p$

Pour tout entier $p$ supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel $S$ où $S \geqslant p$, on note $\overset{*}{\Sigma}{}_S^p$ l'ensemble défini par :

$$\overset{*}{\Sigma}{}_S^p = \{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p, \sum_{i=1}^{p} n_i = S\}.$$

**1)** Montrer que $\text{card}(\overset{*}{\Sigma}{}_S^p) = C_{S-1}^{p-1}$.
Indication : On pourra utiliser soit des tableaux ; soit le résultat du cours concernant card $\Sigma_{S'}^{p'}$ en se ramenant à ce dernier.
**2)** Si 10 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?

**Exercice 1.4 :** *Formule de Vandermonde*

**1)** Montrer la formule de Vandermonde suivante : $\sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j \ = \ C_{n+m}^k$ ,
où $i, j, k, n, m$ sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n+m$.
**2)** Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2$.

**Exercice 1.5 :** *Investissements*

Une personne dispose de 12 000 dirhams à investir sur trois placements potentiels. Chaque mise est un nombre entier de milliers de dirhams. Quel est le nombre de stratégies à disposition si cette personne décide d'investir la totalité des 12 000 dirhams ? Qu'en est-il si on admet qu'elle peut aussi investir une partie seulement de la somme ?