CHAPITRE 1

Espaces vectoriels : Rappels et Compléments

1.1 Espaces vectoriels - Généralités

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Espace vectoriel)
*Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$ - espace vectoriel) consiste en un ensemble V, dont les éléments sont notés $\boldsymbol{v} \in V$ et appelés **vecteurs**, muni de 2 **opérations** :*
– Addition : $V \times V \longrightarrow V$: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ (loi interne), et
– Multiplication : $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$: $(\alpha, \boldsymbol{v}) \longmapsto \alpha \cdot \boldsymbol{v}$ (loi externe),
*vérifiant les **axiomes** suivants :*
*(A1) **Commutativité** de l'addition : $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,*
*(A2) **Associativité** de l'addition : $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,*
*(A3) Existence d'un **élément neutre** pour l'addition :*
$\exists\, \mathbf{0} \in V$ tel que $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$,
*(A4) Existence **d'inverses additifs ou opposés** :*
$\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists \boldsymbol{w} \in V$ tel que $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$,
*(A5) **Distributivité** $\cdot/+$: $\alpha \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \alpha \cdot \boldsymbol{w}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$,*
*(A6) **Distributivité** $+/\cdot$: $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$,*
*(A7) **Associativité** : $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{v}) = (\alpha \times \beta) \cdot \boldsymbol{v}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$,*
*(A8) **Normalisation** : $1_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$.*

Remarques et commentaires 1.1

1. *(A3) $\Rightarrow$ Tout espace vectoriel contient au moins un vecteur, le vecteur nul $\mathbf{0}$.*
2. *$\{\mathbf{0}\}$ est l'espace vectoriel **trivial**.*
3. *Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.*
4. *Par commodité, on pourra écrire $\alpha\boldsymbol{v}$ au lieu de $\alpha \cdot \boldsymbol{v}$(c-à-d supprimer le $\cdot$ de la loi externe).*

Proposition 1.1 (Propriétés élémentaires)

1. *Unicité de l'élément neutre :*
   Soit $\boldsymbol{z} \in V$. Si $\exists \boldsymbol{v} \in V$ tel que $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$, alors $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$.
2. *Unicité de l'inverse additif :*
   Soient $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w'} \in V$. Si $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w'}$, alors $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w'}$.
3. *$0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$ et $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.*
4. *$\alpha \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.*
5. *$(-1)\boldsymbol{v}$ est l'unique inverse additif de $\boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$. Il sera noté $-\boldsymbol{v}$.*
6. *$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $(-\alpha)\boldsymbol{v} = \alpha(-\boldsymbol{v}) = -(\alpha\boldsymbol{v})$.*

Exemples 1.1

1. *$(\mathbb{K}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur lui même.*
2. *$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
3. *$(\mathbb{R}, +, \times)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*
4. *Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*
   On définit une structure d'espace vectoriel sur $V_1 \times V_2$ par :
   $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.
   D'une manière analogue, $V_1 \times V_2 \cdots \times V_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si $V_1, V_2 \cdots, V_n$ le sont.
5. *Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (et $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ par généralisation) sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.*
   Pour $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, on définit la loi $+$ interne et la loi $\cdot$ externe par :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ et } \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

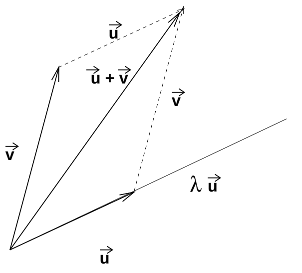

FIG. 1.1 – Opérations sur les vecteurs, ici $\lambda > 1$

6. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, A un ensemble quelconque non vide, et* $\mathcal{A} = \{$ applications $f : A \longrightarrow V\}$.
On peut définir sur $\mathcal{A}$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ par les lois $+$ interne et $\cdot$ externe définies par :
Si $f, g \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

$$\forall a \in A, \quad (f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\alpha \cdot f)(a) = \alpha \cdot f(a).$$

1.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2 (Sous-espace vectoriel)
Soit $U \subset V$, un sous-ensemble.
*Si U hérite d'une structure d'espace vectoriel de V, alors U est un **sous-espace vectoriel** de V.*

Proposition 1.2 (Caractérisation de sous-espaces vectoriels)
U est un sous-espace de V

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U \neq \varnothing \text{ et } \mathbf{0} \in U \\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \\ \alpha \boldsymbol{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{u} \in U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0} \in U \\ \lambda \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U. \end{cases}$$

Exercice d'application 1 : *Droites dans $\mathbb{R}^2$*
Vérifier que l'ensemble $\mathcal{D}_{(a,b)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ où $\mathcal{D}_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad ax + by = 0\}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \neq (0,0)$.

Note **1** :

Exemples 1.2

1. $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x\} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.(première bissectrice)*

2. $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = -x\} = \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.(deuxième bissectrice)*

3. $U_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.(axe (Ox))*

4. $U_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 1\} = \{(1,y), y \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.(droite verticale passant par $(1,0)$)*

5. $U_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\} = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.(axe (Oy))*

Proposition 1.3 (Intersection de sous-espaces vectoriels)
Si U_1, U_2 sont des sous-espace vectoriels d'un même e.v. V alors leur intersection $U_1 \cap U_2$ est aussi un s.e.v de V.

Proposition 1.4 (Union de sous-espaces vectoriels)
Si U_1, U_2 sont des sous-espace vectoriels d'un même e.v. V alors leur réunion $U_1 \cup U_2$ n'est pas en général un s.e.v de V.

Exemples 1.3 (Contres exemples)
En utilisant les notations des exemples 1.2, on peut montrer que : $U_3 \cup U_5$ (resp. $U_1 \cup U_2$) n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Note **2** :

Définition 1.3 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)
Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel V.
*Leur **somme** est un sous-ensemble de V défini par :*

$$\boxed{U_1 + U_2 = \{\boldsymbol{u} \in V | \exists \boldsymbol{u_1} \in U_1, \exists \boldsymbol{u_2} \in U_2, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}\}.}$$

Proposition 1.5
Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel V.
$U_1 + U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice d'application 2 : *Somme des deux axes du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$*
En utilisant les notations des exemples 1.2, montrer que $U_3 + U_5 = \mathbb{R}^2$□.

Note **3** :

Définition 1.4 (Somme directe par unicité)
Soient U_1, U_2 des sous-espaces de V.
*Leur somme est **directe** si $\forall \boldsymbol{v} \in U_1 + U_2$,*

$$\exists!\ \boldsymbol{u_1} \in U_1, \boldsymbol{u_2} \in U_2 \text{ tel que } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}.$$

Autrement dit, si $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{u_1}' + \boldsymbol{u_2}'$, où $\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{u_i}' \in U_i\ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant 2$,
alors $\boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{u_i}'$, $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant 2$.
Notation : $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$.

Proposition 1.6 (Somme directe caractérisée par l'intersection)

$$\boxed{U_1 + U_2 \text{ est directe} \Leftrightarrow U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}.}$$

Définition 1.5 (E.V. défini comme somme directe de deux s.e.v.)
Soient V_1, V_2 des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V.

$$\boxed{V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V = V_1 + V_2 \text{ et } V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}}$$

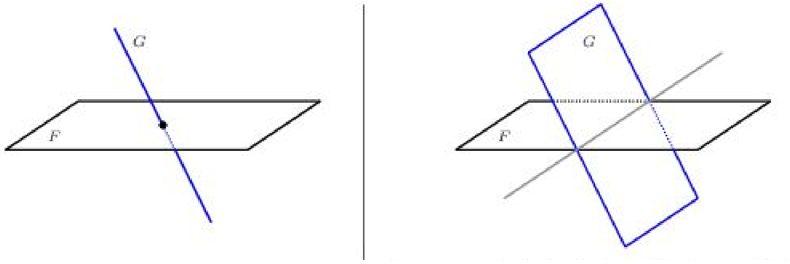

FIG. 1.2 – À Gauche : La somme $F + G$ est directe car $F \cap G$ est l'espace nul. , À Droite : La somme $F + G$ n'est pas directe car $F \cap G$ n'est pas l'espace nul mais une droite.

Exercice d'application 3 : *Matrices carrées réelles d'ordre 2*
Une matrice réelle A d'ordre 2 est un tableau carré de réels a_{ij} avec $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 2$, on note $A = (a_{ij})$, les indices i et j désignent respectivement le numéro de ligne et de colonne. Une matrice réelle A d'ordre 2 s'écrit donc sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice ayant 2 lignes et 2 colonnes. Pour $1 \leq i, j \leq 2$, l'élément a_{ij} se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, on écrit alors $(A)_{ij} = a_{ij}$.
L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 sera noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Égalité de deux matrices : Deux matrices carrées A et B sont égales si leurs éléments correspondants sont égaux : $(A)_{ij} = (B)_{ij}, \forall 1 \leq i, j \leq 2$.
Somme de deux matrices : Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices carrées. La somme de A et B est la matrice carrée, notée $A + B$, définie par :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Produit d'une matrice par un réel : Le produit d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ par un réel α est une matrice carrée d'ordre 2 notée $\alpha \cdot A$ définie par :

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

On pourra vérifier (c'est long mais pas difficile !) que $\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle matrice triangulaire supérieure(resp. inférieure) toute matrice A vérifiant $a_{21} = 0$(resp. $a_{12} = 0$). Les ensembles de ces matrices seront notées respectivement $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\big(\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ et $\big(\mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute matrice de $\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ peut être écrite sous la forme de somme de deux matrices l'une une matrice triangulaire supérieure et l'autre matrice triangulaire inférieure. A-t-on l'unicité d'une telle somme ?
3. En déduire la nature de la somme $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}) + \mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathcal{M}_2^{ts}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2^{ti}(\mathbb{R})$□.

✂ .... ✂

Note **4** :

✂ .... ✂

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 1.6 (S.E.V engendré par une famille de vecteurs)
Soit $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs dans V.
*Le **sous-espace de** V **engendré** par la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est le sous-espace vectoriel :*

$$\boxed{Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \boldsymbol{v_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\ , \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\}\ .}$$

*où la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \boldsymbol{v_i}$ est appelée une **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$. Les scalaires α_i qui appartiennent à $\mathbb{K}$ sont appelés les **coefficients** de cette combinaison linéaire(abrégé par C.L.).*
*Soit U un sous-espace vectoriel de V. Si $U = Vect(\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\})$, alors $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est dite une **famille génératrice** pour U ou bien U est **engendré** par la famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$.*

Définition 1.7
Soit $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs dans V.
la famille $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ est une famille génératrice d'un s.e.v U de V si

$$\boxed{\forall u\in U,\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n|u=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,\boldsymbol{v_i}}$$

Notation 1.1 *Par commodité, on notera $Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\})$ ou simplement $Vect(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n})$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$.*

Remarques et commentaires 1.2
1. $\forall\boldsymbol{u}\in V, Vect(\boldsymbol{u})=\{\alpha\boldsymbol{u}\mid\alpha\in\mathbb{K}\}$.
2. $\forall$ famille $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$, $Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\})=Vect(\boldsymbol{v_1})+\ldots+Vect(\boldsymbol{v_n})$.

Note 5 :

Définition 1.8 (Indépendance linéaire)
*Une famille de vecteurs $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ est **libre ou linéairement indépendante** si :*

$$\boxed{(\sum_{i=1}^n\alpha_i\,\boldsymbol{v_i}=\boldsymbol{0})\Rightarrow\alpha_i=0,\ \forall\,1\leqslant i\leqslant n.}$$

*Si la famille ne vérifie pas cette condition, on dit qu'elle est **linéairement dépendante** ou **liée**.*

Proposition 1.7 (Unicité des coefficients des C.L. pour les familles libres)
Soit $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ une famille libre.

$$\boxed{\text{Si }\sum_{i=1}^n\alpha_i\,\boldsymbol{v_i}=\sum_{i=1}^n\beta_i\,\boldsymbol{v_i},\text{ alors }\alpha_i=\beta_i\ \forall\,1\leqslant i\leqslant n.}$$

Définition 1.9
Soit une famille $\mathcal{F}=\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$, on dira que $\mathcal{F}'$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$(resp. sur-famille) si $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$(resp. $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}'$).

Proposition 1.8 (Propriétés élémentaires)
1. $(\boldsymbol{v})$ *linéairement indépendante* $\Leftrightarrow\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$.
2. $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ *linéairement indépendante* $\Leftrightarrow\nexists\alpha\in\mathbb{K}$ *tel que* $\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{w}$ *et* $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{w}$.
3. *Si* $\boldsymbol{w}\in Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\})$, *alors la famille* $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n},\boldsymbol{w}\}$ *est linéairement dépendante.*
4. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
5. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*

Note 6 :

Lemme 1.1 (Lemme du vecteur superflu) *Soit $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ une famille linéairement dépendante de vecteurs de V, où $\boldsymbol{v_1}\neq\boldsymbol{0}$.*
Alors $\exists j\geqslant 2$ tel que :

$$\boldsymbol{v_j}\in Vect(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v}_{j-1},\boldsymbol{v}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{v_n})$$

et

$$Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\})=Vect(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v}_{j-1},\boldsymbol{v}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{v_n}).$$

Note 7 :

Définition 1.10 (Espace vectoriel de dimension finie)
*Si $\exists\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ telle que $V=Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\})$, alors V est **de dimension finie**.*
Sinon, V est de dimension infinie.

Proposition 1.9
Tout sous-espace U d'un espace vectoriel V de dimension finie est de dimension finie.

Définition 1.11 (Base=libre + génératrice)
*Une famille $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ est une **base** de V si et seulement si :*

$$\boxed{\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}\text{ est libre dans }V\text{ et génératrice de }V\ (Vect(\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\})=V).}$$

Note 8 :

Proposition 1.10 (Caractérisation d'une base)
$\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ est une base de V si et seulement si :

$$\boxed{\forall\boldsymbol{v}\in V,\exists!\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}\text{ tels que }\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v_1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{v_n}.}$$

Théorème 1.1 (*Théorème du ballon*)
- *"Gonfler" : Soit $\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs libre de V. Alors $\exists\ \boldsymbol{w_1},\ldots,\boldsymbol{w_r}\in V$ tels que $(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n},\boldsymbol{w_1},\ldots,\boldsymbol{w_r})$ soit une base de V.(propriété connue sous le nom "théorème de la base incomplète")*
- *"Dégonfler" : Soit $(\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_s})$ une famille génératrice pour V.*

Alors $\exists$ une sous-famille $(\boldsymbol{v_{i_1}}, \ldots, \boldsymbol{v_{i_n}})$, avec $n \leqslant s$, qui est une base de V.

Note **9** :

Théorème 1.2 (***Existence de bases***)

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
Alors $\exists \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ qui est une base de V.

Note **10** :

Théorème 1.3 (***Existence de compléments***)

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie. Soit $U \subset V$ un sous-espace.
Alors $\exists W$, sous-espace de V, tel que $U \oplus W = V$.

Théorème 1.4

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
Alors toute base de V est de même longueur.

Définition 1.12 (Dimension)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
La ***dimension*** *(sur $\mathbb{K}$) de V, notée $dimV$ (ou $dim_{\mathbb{K}}V$), est la longueur d'une base de V.*

Note **11** :

Proposition 1.11 (Égalité de deux s.e.v d'un même espace vectoriel)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie. Soit $U_1, U_2 \subset V$ deux sous-espace vectoriels. Alors

$$\big(U_1 \subset U_2 \quad \text{et} \quad dimU_1 = dimU_2\big) \Leftrightarrow U_1 = U_2.$$

Théorème 1.5 (***Théorème de la borne***)

Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie ($dimV = n$).
Si $(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_m})$ est une famille libre de V, alors $m \leqslant n$.
Si $(\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_m})$ est une famille génératrice de vecteurs de V, alors $m \geqslant n$.

Proposition 1.12 (Proposition "deux en un" !)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel tel que $dimV = n$. Soit $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ une famille de vecteurs dans V (donc de <u>cardinal égal à la dimension</u> de l'espace). Alors :

- *si $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est génératrice de V alors $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est une base de V.*
- *si $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est libre dans V alors $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ est une base de V.*

Remarque 1.1 *La proposition ci-dessus est intéressante car si une famille $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ de cardinal n la dimension de l'e.v. V, alors elle sera une base de V si et seulement si elle est génératrice de V* ***<u>ou</u>*** *libre dans V.*

Proposition 1.13 (Interaction entre dimension et sommes de sous-espaces)
Soit V un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
Soient $U, W \subset V$ des sous-espaces. Alors :

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

Corollaire 1.1 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a*

- *La somme $U + W$ est directe $\Leftrightarrow dim(U + W) = dimU + dimW$.*
- *$V = U \oplus W \Leftrightarrow V = U + W, U \cap W = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow U \cap W = \{\mathbf{0}\}, dimU + dimW = dimV$*
  $\Leftrightarrow V = U + W, dimU + dimW = dimV$.

Remarque 1.2 (Remarque générale) *La plupart des propriétés obtenues pour deux s.e.v peuvent être généralisées pour n ($n > 2$) s.e.v, mais par souci de simplicité on a considéré dans ce cours seulement le cas $n = 2$.*

Proposition 1.14 (Généralisation de la somme directe pour plusieurs s.e.v)
Soient $U_1, \ldots, U_n$ des sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie.

$$\text{Alors, si } \begin{cases} V = U_1 + \ldots + U_n \text{ et} \\ dimV = dimU_1 + \ldots. + dimU_n \end{cases}, \text{ alors } V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n.$$

1.3 Méthodologie

1.3.1 Comment faire ?

1.3.1.1 Comment montrer que F est $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

En montrant l'une des propositions suivantes :

- F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel connu E, soit
  - $\mathbf{0} \in F$;
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{y} \in F \implies \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in F$;

– F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ de vecteurs, i.e. F est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathbf{x}_k$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

1.3.1.2 Comment montrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels F et G ?

En utilisant l'une des propositions suivantes :

– la double inclusion : $F \subset G$ **et** $G \subset F$;
– **une** inclusion suffit si on possède un renseignement sur la dimension :

$$\dim(F) = \dim(G) \text{ et } F \subset G \implies F = G$$

1.3.1.3 Comment montrer que la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base de E ?

En utilisant l'une des propositions suivantes :

– la définition : la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une famille libre **et** génératrice de E ;
– **une** seule propriété suffit si on possède un renseignement sur la dimension :
$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = p\\ \text{la famille } (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p) \text{ est libre}\end{array}\right\}$
$\implies$ la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base ;
$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = p\\ \text{la famille } (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p) \text{ est génératrice}\end{array}\right\}$
$\implies$ la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base.

1.3.1.4 Comment démontrer que $E = F \oplus G$?

En utilisant l'une des propriétés suivantes :

– la définition :

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \exists! (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in F \times G,\ \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

– la caractérisation : $E = F + G$ **et** $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$;
– **une** seule propriété suffit si on possède un renseignement sur la dimension :

$$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\\ E = F + G\end{array}\right\} \implies E = F \oplus G;$$

$$\left.\begin{array}{l}\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\\ F \cap G = \{\mathbf{0}\}\end{array}\right\} \implies E = F \oplus G;$$

1.3.2 Exercices

Exercice 1 :

On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
1. Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.

Correction

1. On commence par constater que $(0, 0, 0) \in F$.
– Soient $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ deux éléments de F. On a donc $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$. Donc $(x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$ et $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') = u + u'$ appartient à F.
– Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors la relation $x + y + z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0$ donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda u$ appartient à F.
Des propriétés suivantes, on peut déduire que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer
3.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\ &= \{(-y - z, y, z),\ \text{avec } y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1),\ \text{avec } y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big) \end{aligned}$$

La famille $B = \big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$ est une famille naturellement génératrice de F et constitue une famille libre (coordonnées non proportionnelles) donc constitue une base. La dimension de F est donc égale à son cardinal 2.

Exercice 2 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que $E = P \bigoplus I$.

Correction La seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle : $P \cap I = \{0\}$. Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire (le vérifier !), la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire (le vérifier !). Donc $P + I = E$. On conclut donc que : $E = P \oplus I$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les sous espaces : $\begin{cases} P = \{\overrightarrow{X} = (x, y, z) \text{ tq } x + y + z = 0\} \\ D = \operatorname{vect}(\overrightarrow{U} = (1, 1, 2)). \end{cases}$
1. Déterminer $\dim P$ et en donner une base. Préciser la dimension de D.
2. Démontrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

Correction
1. P est un plan de dimension 2(voir exer. 1), D est une droite de dimension 1.
2. Il suffit de vérifier que $P \cap D = \{0\}$, pour cela il suffit de remarquer que $\overrightarrow{U} \notin P$