Devoir libre n° 1

Exercice 6.1

Deux joueurs Y et Y s'entraînent au tir à la cible. X atteint 9 fois sur 10 la cible. Y atteint 6 fois sur 10 la cible. X n'effectue qu'un tir sur 3.

1. Quelle est la probabilité d'atteindre la cible ?
2. Un des joueurs tir et la cible est atteinte. Quel est la probabilité que cela soit Y ?

Solution

Soit :

$A = \{X\, a\ tiré\}$
$B = \{Y\, a\ tiré\}$
$C = \{La\ cible\ est\ atteinte\}$
A et B forme un système complet d'événement.

On a :
$P(A) = \frac{1}{3}$
$P(B) = \frac{2}{3}$
$P(C|A) = 0,9$
$P(C|B) = 0,6$

1. On cherche $P(C)$:

$$P(C) = P(C|A) \times P(A) + P(C|B) \times P(B)$$

2. On cherche $P(B|C)$:

$$P(B|C) = \frac{P(C|B) \times P(B)}{P(C)}$$

Exercice 6.2

Soit une population où 60 % des individus sont vaccinés contre l'hépatite B. La proportion de personnes atteinte par l'hépatite B est $\alpha \in [0,1]$ parmi les vaccinés et $\beta \in [0,1]$. On examine un individu au hasard, et on observe qu'il a l'hépatite B.
Quelle est la probabilité qu'il ait été vacciné ?

Solution

Soit :

$A = \{Les\ personnes\ sont\ vaccinés\ contre\ l'hépatite\ B\}$
$\bar{A} = \{Les\ personnes\ ne\ sont\ pas\ vaccinés\ contre\ l'hépatite\ B\}$
$C = \{Les\ personnes\ qui\ ont\ l'hépatite\ B\}$

On a :
$P(A) = 0,6$
$P(\bar{A}) = 0,4$
$P(C|A) = \alpha$
$P(C|\bar{A}) = \beta$

On cherche $P(A|C)$:

$$
\begin{aligned}
P(A|C) &= \frac{P(C|A)\times P(A)}{P(C)} \\
&= \frac{P(C|A)\times P(A)}{P(C|A)\times P(A)+P(C|\bar{A})\times P(\bar{A})} \\
&= \frac{\alpha\times 0,6}{\alpha\times 0,6+\beta\times 0,4}
\end{aligned}
$$

Exercice 6.3

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par $P(X=i)=c\lambda^i/i!,\ i=0,1,2,\ldots$, où λ est un réel positif. Soit Y_n une variable de *loi binomiale de paramètres* (n,p_n). Supposons que pour λ fixé on a $np_n=\lambda$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty}P(Y_n=k)=P(X=k)$ et trouver la valeur de c.

Solution

On a

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}P(Y_n=k) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}
\end{aligned}
$$

Où on a employé le fait que pour tout $x\in\mathbf{R}^d$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$. Mais,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}=1
$$

Donc :

$$
\lim_{n\to\infty}P(Y_n=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}
$$

Exercice 6.4

On admet que 5% des hommes et 0,25% des femmes sont daltoniens. On sélectionne une personne daltonienne au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un homme ? On admettra que les hommes sont aussi nombreux que les femmes. Si au contraire il y en avait deux fois plus que de femmes, que deviendrait le résultat ?

Solution

Soit D l'événement "la personne sélectionnée est daltonienne", H l'événement "c'est un homme" et F l'événement "c'est une femme". Tout d'abord, par la formule de Bayes on a

$$
P(H|D)=\frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H)+P(D|M)P(M)}
$$

Si on admet que les hommes sont aussi nombreux que les femmes, alors $P(H)=P(F)=1/2$ et

$$
P(H|D)=\frac{\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{0,25}{100}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5}{5.25}=\frac{20}{21}
$$

Si au contraire il y avait deux fois plus d'hommes que de femmes, on aurait :

$$
P(H|D)=\frac{\frac{5}{100}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{100}\cdot\frac{2}{3}+\frac{0,25}{100}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{10}{10.25}=\frac{40}{41}
$$

Exercice 6.5

Les pièces fabriquées par une usine sont soumises à un contrôle, mais le mécanisme de contrôle n'est pas entièrement fiable. En effet : si une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0.9, par contre si elle est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 0.8.

1. Si un lot comprend une pièce défectueuse et trois bonnes, quelle est la probabilité pour que ces quatre pièces soient acceptées lors du contrôle ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une erreur lors du contrôle d'une pièce si l'on sait qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production ?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce acceptée par le contrôle soit défectueuse (si l'on admet de nouveau qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production) ?

Solution

Soit A l'événement : "la pièce est acceptée", B l'événement : "la pièce est bonne". Remarquons que :

$$P(A|B) = 0.9 \qquad \text{et} \qquad P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.8.$$

1. Les 4 pièces sont acceptées, donc le contrôle des 3 bonnes pièces est sans erreur et il y a erreur dans le contrôle de la pièce défectueuse . La probabilité d'un tel événement est :

$$P(A|B)^3 \cdot P(A|\overline{B}) = (0.9)^3 \cdot 0.2 \simeq 0.146.$$

2. Soit l'événement E ="il y a erreur dans le contrôle d'une pièce".

$$P(E) = P(\overline{A}|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}).$$

D'où, puisque $P(\overline{B}) = 0.2$,

$$P(E) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.12.$$

3. $$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})} \simeq 0.053.$$

Exercice 6.6

On jette 2 dés équilibrés. On appelle A_1 l'événement : "le résultat du premier dé est impair", A_2 l'événement : "le résultat du second dé est impair" et A_3 l'événement : "la somme des 2 résultats est impaire".

1. A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants deux à deux ?
2. A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Solution

1. On a pour les deux premiers événements $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. On suppose que les jets des deux dés indépendants, ce qui implique directement que A_1 et A_2 sont indépendants. Notons d'ailleurs que A_1 et A_2^c le sont aussi, de même que A_1^c et A_2, d'où :

$$P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_2 \cap A_1^c) = 1/4.$$

On peut décrire A_3 de la manière suivante

$$A_3 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)$$

et cette union est disjointe, donc

$$P(A_3) = P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_2 \cap A_1^c) = 1/2.$$

Cette expression donne aussi :

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_2^c &\implies P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = P(A_1)P(A_3) \\ A_2 \cap A_3 = A_2 \cap A_1^c &\implies P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = P(A_2)P(A_3) \end{aligned}$$

A_1 et A_3 sont donc indépendants, ainsi que A_2 et A_3 : A_1, A_2 et A_3 sont indépendants deux à deux.

2. Si les résultats des deux dés sont impairs, leur somme est paire, ce qui s'écrit :

$$A_2 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing \implies P(A_2 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

donc A_1, A_2 et A_3 ne sont pas indépendants.

Exercice 6.7

En 1654 le chevalier de Méré propose à Pascal le problème suivant : "Est-il plus probable d'obtenir au moins un 6 avec 4 dés que d'obtenir au moins un double 6 lors de 24 jets de deux dés ?" Donner la réponse à cette question.

Solution

On utilise le fait que l'événement "avoir au moins un succès" est le complémentaire de l'événement "n'avoir aucun succès". La probabilité d'obtenir au moins un 6 avec 4 dés est donc de

$$1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \simeq 0,518,$$

et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 lors de 24 jets de deux dés est de

$$1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} \simeq 0,491.$$

Exercice 6.8

Une personne dispose de 15 000 francs à investir sur quatre placements potentiels. Chaque mise est un nombre entier de milliers de francs. Quel est le nombre de stratégies à disposition si cette personne décide d'investir la totalité des 15 000 francs ? Qu'en est-il si on admet qu'elle peut aussi investir une partie seulement de la somme ?

Solution

Le nombre de stratégies d'investissement si la personne décide de risquer la totalité des 15 000 CHF, et si chaque mise est un nombre entier de milliers de francs, est égal à $\frac{(15+3)!}{15!3!} = 816$. Si on admet qu'elle peut aussi investir une partie seulement de la somme, alors il y a $\frac{(15+4)!}{15!4!} = 3\,876$ manières d'investir l'argent (ce nombre correspond au nombre de façons de distribuer 15 objets dans 5 boites, où la cinquième boite correspond à l'argent qui n'est pas investi).

Exercice 6.9

L'entreprise Luminex fabrique une lampe miniature qui est utilisée comme lampe-témoin sur des panneaux de contrôle électronique. Le responsable du contrôle de la fabrication a établi que 80% des lampes durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$. On s'intéresse au nombre de lampes dont la durée de vie est inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15.

1) Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ?

2) Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?

3) Quelle est la probabilité que 13 lampes et plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

<u>**Solution**</u>

1) Une lampe tirée au hasard a une probabilité de 0.2 d'avoir une durée de vie inférieure à 3000 heures. Le nombre X de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 tiré au hasard est la somme de 15 variables de Bernoulli de paramètre $p = 0.2$. Par conséquent, il suit une loi binomiale $B(15, 0.2)$. Son espérance vaut $E(X) = 15 \times 0.2 = 3$.
2) C'est $P(X = 0) = C_{15}^0 (0.2)^0 (0.8)^{15} \sim 0.0352$.
3) C'est $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$\begin{aligned} &= C_{15}^0 (0.2)^0 (0.8)^{15} + C_{15}^1 (0.2)^1 (0.8)^{14} + C_{15}^2 (0.2)^2 (0.8)^{13} \\ &= 0.0352 + 0.1319 + 0.2309 = 0.398.... \end{aligned}$$

Exercice 6.10

On lance trois dés non pipés. On note le nombre de points (1,2,3,4,5 ou 6) qui apparaît sur la face supérieure de chaque dé. Calculer la probabilité d'avoir :
1) trois 5.
2) deux 5 et un 4.
3) un 5, un 4, un 3.
4) la somme des points égale à 9.
5) la somme des points égale à 10.

<u>**Solution**</u>

1) Dés non pipés signifie que la probabilité de tirer 5 (ou tout autre chiffre) sur un dé est $1/6$. Il y a 216 tirages possibles supposés équiprobables, donc $P(5, 5, 5) = 1/216$.
2) Il y a trois manières d'obtenir deux 5 et un 4, et 216 tirages possibles, donc la probabilité cherchée est $3/216 = 1/72$.
3) Il y a six manières d'obtenir un 5, un 4 et un 3, et 216 tirages possibles, donc la probabilité cherchée est $6/216 = 1/62$.
4) Un total de 9 s'obtient par l'une des additions suivantes,

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3,$$

où on a rangé les résultats d'un tirage par ordre décroissant. On rencontre l'addition 6+2+1 dans 3! = 6 tirages différents. De même pour 5+3+1 et 4+3+2. En revanche, 5+2+2 et 4+4+1 ne correspondent qu'à 3 tirages et 3+3+3 à un seul. Il y a donc 6+6+6+3+3+1=25 tirages qui donnent une somme de 9. La probabilité que la somme soit 9 vaut donc $25/216$.
5) Un total de 10 s'obtient par l'une des additions suivantes,

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3.$$

On rencontre les additions 6+3+1, 5+4+1, 5+3+2 dans 3! = 6 tirages différents. En revanche, 6+2+2, 4+4+2 et 4+3+3 ne correspondent qu'à 3 tirages. Il y a donc 6+6+6+3+3+3=27 tirages qui donnent une somme de 9. La probabilité que la somme soit 9 vaut donc $27/216$.

Exercice 6.11

(a) Démontrer que $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0$ lorsque $k \leq n$, $k \leq m$.
(b) Utiliser (a) pour démontrer que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2$.

Solution

En employant le théorème du binôme, l'identité $(x+y)^{n+m} = (x+y)^n (x+y)^m$ devient,

$$\sum_{k=0}^{m+n} x^{m+n-k} y^k C_{m+n}^k = \left(\sum_{i=0}^{n} x^{n-i} y^i C_n^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^j C_m^j\right) \tag{1}$$

Mais,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} x^{n-i} y^i C_n^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^j C_m^j\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^{m+n-i-j} y^{j+i} C_m^j C_n^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{m+i} x^{m+n-k} y^k C_m^{k-i} C_n^i \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} x^{m+n-k} y^k \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} C_m^{k-i} C_n^i \qquad (2)\end{aligned}$$

où dans l'avant-dernière égalité on a changé la variable j par $k = i + j$, et dans la dernière égalité on a inversé l'ordre des sommations. La comparaison des coefficients de $x^p y^q$ dans (1) et dans (2) donne l'égalité recherchée, pour $k \leq m$ et $k \leq n$.

Exercice 6.12

Soit n un entier ≥ 1. On considére l'expérience aléatoire qui consiste é lancer successivement n fois un dé (équilibré) et é noter les n résultats obtenus (dans l'ordre).

1. Décrire l'univers Ω associé é cette expérience aléatoire. Déterminer le cardinal de Ω.
2. Calculer la probabilité de l'événement A = « on obtient au moins un 6 ».
3. Démontrer que pour avoir une probabilité supérieure ou égale é $0,9$ d'obtenir au moins un 6, il faut et il suffit que :

$$n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(6) - \ln(5)}$$

Solution

1. L'univers Ω est l'ensemble des n-listes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telles que $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in [\![1,6]\!]$. On a donc $\text{card}(\Omega) = 6^n$.
2. On a $\overline{A}$ =« on n'obtient aucun 6 » donc $\text{card}(\overline{A}) = 5^n$. Par équiprobabilité :

$$P(\overline{A}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Puis :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

3. On résout l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}
P(A) \geq 0,9 &\iff 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 \\
&\iff -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0,1 \\
&\iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \leq \ln(0,1) \\
&\iff n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\
&\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \qquad \text{car } \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0 \\
&\iff n \geq \frac{-\ln(10)}{\ln(5) - \ln(6)} \\
&\iff n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(6) - \ln(5)}
\end{aligned}$$

Exercice 6.13

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire simultanément quatre boules de l'urne au hasard. Quelle est la probabilité qu'il y ait autant de blanches que de noires ?

Solution

Puisqu'il s'agit d'un tirage simultané, le nombre total de tirage de 4 boules parmi 6 est $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6\times5}{2} = 15$. Parmi ces 15 tirages possibles, le nombre de tirages « favorables », c'est-é-dire contenant autant de boules blanches que de boules noires, est $C_3^2 C_3^2 = 3 \times 3 = 9$ (on choisit 2 boules parmi les 3 blanches et 2 boules noires parmi les 3 noires). Finalement, la probabilité cherchée est $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ (par équiprobabilité des tirages).

Exercice 6.14

On considére deux urnes : l'une contient 6 boules rouges et 3 noires, l'autre 6 noires et 3 rouges. On choisit une urne au hasard puis on y tire deux boules (simultanément). On obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

Solution

Soient A l'événement « on choisit l'urne qui contient 6 boules rouges et 3 boules noires » (donc $\overline{A}$ est l'événement « on choisit l'urne qui contient 6 boules noires et 3 boules rouges ») et B l'événement « on obtient deux boules rouges ». On cherche à calculer $P_B(A)$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

On a $P(A) = \frac{1}{2}$ (« on choisit une urne au hasard », on suppose qu'il y a équiprobabilité). Donc $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, Les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2}P_A(B) + \frac{1}{2}P_{\overline{A}}(B)$$

On a $P_A(B) = \frac{C_2^6 C_0^3}{C_2^9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{C_2^3 C_0^6}{C_2^9} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (ces formules proviennent de la loi hypergéométrique, puisqu'il s'agit d'un tirage simultané).

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Finalement :

$$P_B(A) = \frac{\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{24} \times 4 = \frac{5}{6}$$

La probabilité d'avoir choisi la première urne sachant qu'on a tiré deux boules rouges est $\frac{5}{6}$.

Exercice 6.15

Un électricien achète des composants par paquets de 10. Sa technique de contrôle est de n'examiner que 3 des composants, tirés au hasard dans le paquet, et de n'accepter le lot de 10 que si les 3 composants examinés sont sans défaut. Si 30% des paquets contiennent 4 composants défectueux tandis que les 70% restants n'en contiennent qu'un, quelle est la probabilité qu'il rejette un paquet ?

Solution

Soit A l'événement *l'électricien accepte un paquet*. Un paquet contienne 4 ou 1 composants défectueux. Soient B_1 l'événement *le paquet conntienne 4 composants défectueux* et B_2 l'événement *le paquet conntienne 1 composant défectueux*. Par la formule de probabiltés totales on a

$$P(A) = P(A|B1)P(B1) + P(A|B2)P(B2).$$

et $P(B_1) = 0.3$, $P(B_2) = 0.7$. La probabilité cherchée est 1 - P(A).
Un paquet donné contienne 10 composants, dont 4 ou 1 composants défectueux. L'électricien tire sans remise un échantillon de 3 composants. C'est donc le modèle hypergéométrique. Pour la probabilité de A on trouve

$$P(A) = (C_4^0 \cdot C_6^3 / C_{10}^3) \cdot 0.3 + (C_1^0 \cdot C_9^3 / C_{10}^3) \cdot 0.7 = 0.54$$

La probabilité qu'il rejette un paquet est 0.46.

Exercice 6.16

Soient X et Z deux variables à valeurs entières ≥ 0. On suppose que :

1. Z est une variable de Poisson de paramètre λ.
2. $X \leq Z$ et

$$\forall n \geq 0,\ \forall k \leq n,\ P\{X = k | Z = n\} = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$$

(autrement dit : la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$ est binomiale de paramètres n et p, pour un $0 < p < 1$ fixé).

Prouver que X et $Y = Z - X$ sont deux variables de Poisson indépendantes, et donner leurs paramètres respectifs.

Solution

Commençons par calculer la distribution de X. Pour k entier ≥ 0 fixé, on a :

$$
\begin{aligned}
P\{X=k\} &= \sum_{n\geq k} P\{X=k|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= \sum_{n\geq k} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n\geq k} C_n^k (1-p)^{n-k}\frac{\lambda^{n-k}}{n!}\frac{k!(n-k)!}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!} \quad ,
\end{aligned}
$$

X est donc poissonienne de paramètre $p\lambda$.

Ensuite, pour l entier ≥ 0 fixé :

$$
\begin{aligned}
P\{Y=l\} &= \sum_{n\geq l} P\{Y=l|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= \sum_{n\geq l} P\{X=n-l|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= \sum_{n\geq l} C_n^l p^{n-l}(1-p)^l e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^l}{l!},
\end{aligned}
$$

Y est aussi poissonienne de paramètre $(1-p)\lambda$.

Enfin :

$$
\begin{aligned}
\forall k,l, \quad P\{X=k \text{ et } Y=l\} &= \sum_{n\geq 0} P\{X=k \quad et \quad Y=l|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= P\{X=k \quad et \quad Y=l|Z=k+l\}P\{Z=k+l\} \\
&= C_{k+l}^k p^k (1-p)^l e^{-\lambda}\frac{\lambda^(k+l)}{l!} \\
&= e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^l}{l!},
\end{aligned}
$$

X et Y sont bien indépendantes.

Exercice 6.17

Un étudiant entreprend de répondre aux questions d'un questionnaire à choix multiple ; pour chacune des questions posées, il y a 5 réponses proposées, dont une seule réponse juste. Si l'étudiant connaît la réponse juste, il la choisit, par contre s'il ne connaît pas la réponse juste il choisit une réponse au hasard parmi les 5 réponses proposées. La probabilité pour que l'étudiant connaisse la réponse juste à une question choisie au hasard est de $0,7$.

a) Quelles chances a l'étudiant de répondre correctement à une question choisie au hasard ?

b) Si pour une telle question l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité pour qu'il connaisse vraiment la réponse juste à cette question ?

Solution

a) Soient R et J les événements :
   R : "l'étudiant répond correctement à la question tirée"
   J : "l'étudiant connaît la réponse juste à la question tirée".
   On a : $P\{R\} = P\{R|J\}.P\{J\} + P\{R|J^C\}.P\{J^C\} = 1.0,7 + 0,2.0,3 = 0,76$.

a) D'après la formule de Bayes :

$$P\{J|R\} = \frac{P\{R|J\}.P\{J\}}{P\{R|J\}.P\{J\} + P\{R|J^C\}.P\{J^C\}} = \frac{0,7}{0,76} \cong 0,92.$$

Exercice 6.18

a) Dans un lot de vingt pièces fabriquées, on en prélève simultanément quatre. Combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
b) On suppose alors que sur les vingt pièces, quatre sont mauvaises. Dans combien de prélèvements :
1. les quatre pièces sont bonnes ?
2. au moins une pièce est mauvaise ?
3. une et une seule est mauvaise ?
4. deux au moins sont mauvaises ?

Solution

— a) $C_{20}^4 = \frac{20.19.18.17}{4!} = 4845.$
— b)
  1. $C_{16}^4 = \frac{16.15.14.13}{4!} = 1820.$
  2. $4845 - 1820 = 3025$. *Expliquer pourquoi* $C_4^1 C_{19}^3$ *est faux, parce qu'on compte plusieurs fois la même chose.*
  3. $C_4^1 C_{16}^3 = 4\frac{16.15.14}{3!} = 2240.$
  4. Le nombre cherché est le nombre de prélèvements à au moins une mauvaise pièce, auquel on retranche le nombre de prélèvements avec exactement une mauvaise pièce, soit $3025 - 2240 = 785$.

Exercice 6.19

D'un jeu de 32 cartes, on extrait 6 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 2 dames et 3 trèfles ?

Solution

15435.