# Feuille d'Exercices n° 3 : Lois discrètes

**Exercice 3.1 :** *Examen 2007-2008/(4Pts)*

2 % des articles produits par une usine sont défectueux.

On note $X$ la v.a. discrète désignant le nombre de produits défectueux sur un lot de 200 articles.

**1) a)** Donner, en la justifiant, la loi de la v.a. $X$.

**b)** Calculer directement $P(X = 4)$( à $10^{-4}$ près).

**2) a)** Par quelle loi peut-on approcher la loi de $X$ ?

**b)** Donner, en utilisant l'approximation ci-dessus, une valeur approchée de $P(X = 4)$( à $10^{-4}$ près).

**c)** Comparer les résultats trouvés puis conclure.

**Exercice 3.2 :** *Variable aléatoire de Poisson.*

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire $X$ est donnée par $P(X = i) = c\lambda^i/i!$, $i = 0, 1, 2, \dots$, où $\lambda$ est un réel positif. Trouver $c$ et

1. $P(X = 0)$.
2. $P(X > 2)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 3.3 :** *Somme de deux v.a.d indépendantes*

Deux v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes ssi $P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P[X \in A] \times P[Y \in B]$, $\forall A, B$.

**1)** Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a. indépendantes telles que : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$ pour $i = 1, 2$ où les $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$. Montrer $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

**2)** Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a. indépendantes telles que : $X_i \hookrightarrow P(\lambda_i)$ pour $i = 1, 2$ où les $\lambda_i > 0$ . Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

**Exercice 3.4 :** *Transmission*

On veut transmettre un message électronique composé des digits 0 et 1. Les conditions imparfaites de transmission font en sorte qu'il y a une probabilité égale à 0.1 qu'un 0 soit changé en un 1 et un 1 en un 0 lors de la réception, et ce de façon indépendante pour chaque digit. Pour améliorer la qualité de la transmission, on propose d'émettre le bloc 00000 au lieu de 0 et le bloc 11111 au lieu de 1 et de traduire une majorité de 0 dans un bloc lors de la réception par 0 et une majorité de 1 par 1.

a) Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 00000 est émis ?

b) Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 11111 est émis ?

**Exercice 3.5 :** *Loi exacte et approximation*

On tire sans remise 5 boules dans une urne contenant 600 boules blanches et 400 noires. Donner la valeur exacte de la probabilité que 3 des 5 boules tirées soient noires. Donner une valeur approchée en utilisant l'approximation binomiale.

**Exercice 3.6 :** *Quelle est la loi ?*

Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise une croix dont les quatre extrémités sont des clés de taille différentes indiscernables au toucher.

**1)** Il procède au hasard, sans méthode. Calculer la probabilité de faire trois essais pour trouver la bonne clé. Généraliser à $n$ essais. On appelle $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Quelle sont son espérance et sa variance ?

**2)** Il procède au hasard, en éliminant les extrémités déjà testées. Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre d'essais. Quelle est sa loi de probabilité ? Calculer son espérance.

**Exercice 3.7 :** *Loi conditionnelle*

Le nombre d'appels téléphoniques au standard d'un établissement universitaire entre 10h et 11h suis une loi de poisson de paramètre $\lambda$. Supposons que pour chaque appel il y est une probabilité $p$ que le correspondant demande le service de scolarité.

1. Calculez la probabilité qu'il y ait $k$ appels pour le service de scolarité sachant qu'il y a $n$ appel au standard,
2. Calculez la probabilité qu'il y ai $n$ appels au standard et $k$ appels vers le service de scolarité,
3. Déterminez la loi de probabilité du nombre d'appels vers le service de scolarité entre 10h et 11h.

**Exercices supplémentaires 3.1 :** *Mixage d'une loi binomiale et une loi de Poisson*

On suppose que le nombre d'œufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$), que les œufs se développent ***indépendamment*** les uns des autres et on note $p$ , où $0 < p < 1$, la probabilité qu'un œuf donne un insecte.

Soit $X$ le nombre d'œufs pondus par l'insecte et $Y$ le nombre d'insectes issus de ces œufs. On désigne par $A_n$ l'événement $[X = n]$ , où $n \in \mathbb{N}$, et $B_k$ l'événement $[Y = k]$ pour $0 \leq k \leq n$ .

**1)** Calculer la probabilité conditionnelle pour $0 \leq k \leq n$ .

**2)** Calculer alors la probabilité $P(B_k \cap A_n)$ pour $0 \leq k \leq n$ .

**3)** Justifier que $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty}(B_k \cap A_n)$, puis calculer la probabilité $P(B_k)$.

**4)** De quelle type est la loi de $Y$ ?

**Exercices supplémentaires 3.2 :** *Distributions****

On distribue aléatoirement $n$ boules indiscernables dans $p$ urnes discernables ($n \geq p \geq 2$).

Soit $X$ la variable aléatoire discrète désignant le nombre exact d'urnes vides parmi les $p$ urnes (les valeurs prises par $X$ sont les entiers $0, 1, 2 \ldots, p-1$ ).

**1)** Déterminer, en les justifiant, les probabilités $P[X = k]$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.

**2)** Justifier que $\sum_{k=0}^{p-1} P[X = k] = 1$.

**Exercices supplémentaires 3.3 :** *Lois géométriques et minimum/différence****

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p$ quelconque dans $]0,1[$ , c'est-à-dire que chacune des deux variables est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P[X = k] = P[Y = k] = q^{k-1}p$ où $q = 1 - p$.

On définit deux variables aléatoires $U$ et $V$ par : $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

**1)** Montrer que $P[U = k] = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}$ pour tout $k$ entier strictement positif.

Indication : Vérifier d'abord que $P[U = k] = (P[U \geq k] - P[U \geq k+1]$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

**2)** Montrer que : $P[V = j] = \dfrac{p^2 q^{|j|}}{1 - q^2}$ pour tout $j$ entier relatif ($j \in \mathbb{Z}$). Indication : Établir la formule précédente pour $j = 0, j > 0$ et $j < 0$ .

**3)** Calculer $P[U = k, V = j]$pour tout $k$ entier strictement positif et pour tout $j$ entier relatif.

**4)** En déduire que les v.a. $U$ et $V$ sont indépendantes.