UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE
FACULTE POLYDISCIPLINAIRE
KHOURIBGA

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°1: Corrigé
Les nombres réels

Exercice 1.

(1) Démontrer que: $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (inégalité de Bernoulli).}$$

(2) Montrer que:
  (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \ \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Étudier dans quel cas on a égalité
  (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$.

(3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1; a_2...; a_n$ $b_1; b_2...; b_n$ $2n$ nombres réels. Etablir les inégalités suivantes:
  (a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad \text{(considérer : } f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2)$$

  (b) L'inégalité de Minkowski:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

***Corrigé* 1.**

(1) Par récurrence.

(2) Il suffit de montrer que
  (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \ x + y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$.
  (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ -\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leq \sqrt{|x-y|}$.

(3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1; a_2...; a_n$ $b_1; b_2...; b_n$ $2n$ nombres réels. Etablir les inégalités suivantes:
  (a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz: on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}_{a} x^2 + 2\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)}_{b} x + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}_{c} = ax^2 + 2bx + c$$

or

$$f(x) > 0 \Longrightarrow \Delta' < 0 \Longrightarrow b^2 - ac < 0$$

c-à-d

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) < 0$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

(b) L'inégalité de Minkowski: d'après (1) on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Exercice 2.

(1) Montrer qu'un entier q tel q^2 soit un multiple de 3 est un multiple de 3 . En déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(2) Montrer que $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

Corrigé **2.**

(1) Pour montrer: q^2 est un multiple de 3 implique que q est un multiple de 3, il suffit à montrer par exemple la contraposée.
Supposons maintenant, par l'absurde $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ c-à-d il existe $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, $p \wedge q$ alors, on obtient

$$p^2 = 3q^2$$

L'entier p^2 est donc un multiple de 3 ce qui signifie que p l'est aussi. Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 3p'$ et alors on a

$$3q^2 = p^2 = 9p'^2 \Longrightarrow q^2 = 3p'^2$$

q est également multiple de 3. D'où 3 divise à la fois p et q, ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

(2) Par absurde, supposons $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \in \mathbb{Q}$.
$\Rightarrow \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow q\ln(3) = p\ln(2) \Rightarrow \ln(3^q) = \ln(2^p) \Rightarrow 3^q = 2^p$
or 3^q est impair et 2^p est pair ce qui est absurde. D'où $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel transcendant.

Exercice 3.

(1) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.
(2) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.
(3) En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

***Corrigé* 3.**

(1) Supposons $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \in \mathbb{Q}$ or

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})\right] \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde.

(2) On pose $r = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Supposons $r + x = \dfrac{p'}{q'}$, $p' \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{N}^*$ donc

$$x = \frac{p'}{q'} - r = \frac{p'q - pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde. On montre de la même manière $rx \notin \mathbb{Q}$.

(3) Soit $r, r' \in \mathbb{Q}$, $r < r'$. On pose $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$ (d'après (2)). De plus

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Longrightarrow 0 < \frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r) < r' - r$$
$$\Rightarrow r < x < r'$$

d'où le résultat.

Exercice 4.

(1) Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que
   (a) $A \subset B \Longrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$
   (b) $A \cup B$ admet une borne inférieure et que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
(2) Étant donné A et B deux ensembles de réels strictement positifs,
   (a) Montrer que $\sup(A.B) = \sup A \times \sup B$.
   (b) Montrer que si $\inf A > 0$, alors $\sup\left(\dfrac{1}{A}\right) = \dfrac{1}{\inf A}$
   (c) Montrer que si $\inf A = 0$, alors $\sup\left(\dfrac{1}{A}\right) = +\infty$.
(3) Si A et B deux ensembles de réels, que peut-on dire de $\sup(A.B)$?

Corrigé 4.

(1) Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $x \in A \Rightarrow x \in B$ $(A \subset B) \Rightarrow x \geq \inf B \Rightarrow \inf B \leq \inf(A)$
   (b) (*i*) Soit $x \in A \cup B$: Il y a 2 cas
      $*$ Si $x \in A \Rightarrow x \geq \inf A \geq \min(\inf A, \inf B)$
      $*$ Si $x \in B \Rightarrow x \geq \inf B \geq \min(\inf A, \inf B)$
      dans les 2 cas $\min(\inf A, \inf B) \in \mathfrak{M}(A \cup B)$
   (*ii*) Soit $y > \min(\inf A, \inf B)$; on a toujours 2 cas
      $*$ $y > \inf A \Rightarrow \exists x_1 \in A \subset A \cup B;\ x_1 < y$
      $*$ $y > \inf B \Rightarrow \exists x_2 \in B \subset A \cup B;\ x_2 < y$
      dans les 2 cas $\exists x (= x_1 \ ou\ x_2) \in A \cup B;\ x < y$
   $A \cup B$ admet une borne inférieure et que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

(2) Étant donné A et B deux ensembles de réels strictement positifs,

(a) Soit $x \in A.B$ alors $\exists a \in A, b \in B$ tel que $x = a.b.$ or

$$0 < a \leq \sup A \;et 0 < b \leq \sup B \Longrightarrow \forall x = a.b \leq \sup A \sup B \in \mathcal{M}(A.B)$$

d'où

$$\sup(A.B) \leq \sup A \sup B \qquad (*)$$

D'autre part, soit $a \in A$ et $b \in B$, on pose $x = a.b \in A.B$ alors

$$x \leq \sup(A.B) \Longrightarrow a.b \leq \sup(A.B)$$

$$\Longrightarrow a \leq \frac{\sup(A.B)}{b} \in \mathcal{M}(A) \quad (car\ b > 0)$$

$$\Longrightarrow \sup A \leq \frac{\sup(A.B)}{b} \Longrightarrow b \leq \frac{\sup(A.B)}{\sup A} \in \mathcal{M}(B)$$

d'où

$$\sup B \leq \frac{\sup(A.B)}{\sup A}$$

finalement

$$\sup B \sup A \leq \sup(A.B) \qquad (**)$$

d'après (*) et (**), on déduit

$$\sup(A.B) = \sup A \times \sup B.$$

(b) Si $\inf A > 0$, on pose $\alpha = \inf A$.

- (i) Soit $x \in A$ alors

$$x \geq \alpha > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha},\ \forall \frac{1}{x} \in \frac{1}{A} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} \in \mathcal{M}\left(\frac{1}{A}\right)$$

- (ii) Soit $y < \frac{1}{\alpha}$ alors $\frac{1}{y} > \alpha$ et $\alpha = \inf A$ donc

$$\exists a \in A/\ \frac{1}{y} > a \Longrightarrow \exists \frac{1}{a} \in \frac{1}{A}/\ y < \frac{1}{a}$$

On conclut d'après la caractérisation de la borne supérieure que

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}$$

(c) d'après la caractérisation de la borne supérieure on a

$$\inf A = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A/\ x \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A/\ \frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon}$$

On a montré que

$$\forall M = \frac{1}{\varepsilon} > 0,\ \exists \frac{1}{x} \in \frac{1}{A}/\ \frac{1}{x} > M$$

c-à-d $\frac{1}{A}$ n'est pas majorée, d'où $\sup\left(\frac{1}{A}\right) = +\infty$.

(3) Si A et B deux ensembles de réels, rien à dire dans ce cas, par exemple $A = B =]-\infty, 0]$ et $A.B = [0, +\infty[$ alors

$$\sup A \times \sup B = 0 \quad mais \quad \sup(A.B) = +\infty$$

Exercice 5.
Trouver $\inf A$, $\sup A$, $\max A$ et $\min A$ quand ils existent dans chacun des cas suivants:

(1) $A = \{0\} \cup]1;2[$, (4) $A = \left\{\dfrac{n}{mn+1}, (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

(2) $A = \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$, (5) $A = \left\{\dfrac{n}{mn+1}, (n,m) \in \mathbb{N}^{2}\right\}$

(3) $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Corrigé **5.**

(1) A est borné: évident
- On a $\forall x \in A, x \geq 0 \Longrightarrow 0 \in \mathfrak{M}(A) =]-\infty, 0]$ or $0 \in A$ donc
$$A \bigcap \mathfrak{M}(A) = \{0\} \Longrightarrow \inf A = \min A = 0$$
- $\forall x \in A, x < 2 \Longrightarrow 2 \in \mathcal{M}(A) = [2, +\infty[$ or
$$A \bigcap \mathcal{M}(A) = \emptyset \Longrightarrow \max A \text{ n'existe pas}$$
Mais
$$\min(\mathcal{M}(A)) = 2 \Longrightarrow \sup A = 2$$

(2) On remarque d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 2^{-n} \leq 1$. D'autre part on a
- $1 = 2^0 \in A$ *et* $1 \in \mathcal{M}(A) \Rightarrow 1 \in A \cap \mathcal{M}(A) \Rightarrow \max A = \sup A = 1$
- On $0 \in \mathfrak{M}(A)$. Montrons que $0 = \inf A$. Pour cela, on montre
$$(ii')\ \forall \varepsilon > 0; \quad \exists x \in A; \quad x < \varepsilon$$
cela revient à chercher n tel que $2^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \lg_2(\frac{1}{\varepsilon})$?
Soit $\varepsilon > 0$; par la propriété d'Archimède; pour $x = \lg_2(\frac{1}{\varepsilon}) \in \mathbb{R}$, et $y = 1 \in \mathbb{R}^{+*}$
$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad tel\ que\ x < ny$$
donc
$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \lg(\frac{1}{\varepsilon}) < n \lg 2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{-n} < \varepsilon$$
d'où $0 = \inf A$ or $0 \notin A$ donc A n'a pas de minimum.

(3) On remarque d'abord que $A = \left\{1 + \dfrac{1}{2p}, p \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \dfrac{1}{2p+1}, p \in \mathbb{N}\right\} = A_1 \cup A_2$
- Pour A_1; on a $\forall p \in \mathbb{N}^*; 1 \leq 1 + \dfrac{1}{2p} \leq \dfrac{3}{2}$ et
  - $\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} \in A_1$ *et* $\dfrac{3}{2} \in \mathcal{M}(A_1) \Rightarrow \max A_1 = \sup A_1 = \dfrac{3}{2}$
  - On a $1 \in \mathfrak{M}(A)$. Montrons que $1 = \inf A_1$. Pour cela, on montre
$$(ii')\forall \varepsilon > 0;\ \exists x \in A; x < \varepsilon + 1$$
cela revient à chercher p tel que $1 + \dfrac{1}{2p} < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow p > \dfrac{1}{2\varepsilon}$?
Soit $\varepsilon > 0$; par la propriété d'Archimède; pour $x = \frac{1}{2\varepsilon} \in \mathbb{R}$, $\exists p \in \mathbb{N}^* \quad x < p$ donc
$$\exists p \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{1}{2p} < \varepsilon + 1$$
d'où $1 = \inf A_1$ or $1 \notin A_1$ donc A_1 n'a pas de minimum.

– De même on montre que $\max A_2 = \sup A_2 = 0$ et $\inf A_2 = -1 \notin A_2$ donc A_2 n'a pas de minimum.
On conclut que

$$\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2} \in A_1 \subset A \Rightarrow \max A = \frac{3}{2}$$

donc

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}$$

et

$$\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(-1, 1) = -1 \notin A$$

donc A n'admet pas de minimum.

(4) On a $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \frac{n}{mn+1} \leq \frac{n}{mn} \leq \frac{1}{m} < 1$$

- On a $0 \in \mathfrak{M}(A)$. Montrons que $0 = \inf A$. Par absurde supposons que 0 n'est pas le plus grand minorant c-à-d $\exists a \in \mathfrak{M}(A)$ tel que

$$a > 0$$

alors

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad 0 < a < \frac{n}{mn+1} < 1$$

en particulier pour $n = 1$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < a < \frac{n}{m+1} \Longleftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < m < \frac{1}{a} - 1$$

ce qui est absurde car $\mathbb{N}^*$ n'est pas majorée. d'où

$$0 = \inf A$$

de plus $0 \notin A$ donc $\min A$ n'existe pas.

- On a $1 \in \mathcal{M}(A)$. Montrons que $1 = \sup A$. Par absurde supposons que 1 n'est pas le plus petit des majorants c-à-d $\exists s \in \mathcal{M}(A)$ tel que

$$s < 1$$

alors

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad \frac{n}{mn+1} \leq s < 1$$

en particulier pour $m = 1$ on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < n < \frac{s}{1-s}$$

ce qui est absurde car $\mathbb{N}^*$ n'est pas majorée. d'où

$$1 = \sup A$$

de plus $1 \notin A$ donc $\max A$ n'existe pas.

(5) De la même manière que précédement, on montre que

$$\inf A = 0 \in A \Longrightarrow \min A = 0$$

D'autre part on a $\mathbb{N} \subset A$, pour le voir, il suffit de prendre $m = 0$. Comme $\mathbb{N}$ n'est pas majorée alors A n'est pas majorée aussi.

Exercice 6.
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup\{|x-y|,(x,y)\in A^2\} = \sup A - \inf A$$

***Corrigé 6*.** On pose

$$E = \{|x-y|,(x,y)\in A^2\}$$

- On a d'abord

$$\begin{cases} \forall x\in A, \quad x\leq \sup A \\ \\ \forall y\in A, \quad y\geq \inf A \Longrightarrow -y\leq -\inf A \end{cases} \Longrightarrow \forall x,y\in A\ x-y\leq \sup A-\inf A$$

En échangeant les rôle de x et y on obtient

$$\forall x,y\in A\ y-x\leq \sup A-\inf A$$

d'où

$$-(\sup A-\inf A)\leq x-y\leq \sup A-\inf A$$

c-à-d

$$\forall x,y\in A, \quad |x-y|\leq \sup A-\inf A$$

et donc

$$(i)\ \sup A-\inf A\in \mathcal{M}(E)$$

- Soit $\varepsilon>0$, alors

$$\begin{cases} \exists x\in A, \quad \sup A-\dfrac{\varepsilon}{2}<x \\ \\ \exists y\in A, \quad y<\inf A+\dfrac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow -y>-\inf A-\dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Longrightarrow \exists x,y\in A, \quad x-y>\sup A-\inf A-\varepsilon$$

donc

$$(ii')\ \exists x,y\in A, \quad |x-y|\geq x-y>\sup A-\inf A-\varepsilon$$

on a alors montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists a(=|x-y|)\in E, \quad a>\sup A-\inf A-\varepsilon$$

d'après la caractérisation de la borne supérieur on conclut que

$$\sup E=\sup A-\inf A$$

Exercice 7.
Soient X une parties non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $M=\sup X\notin X$, il existe alors pour tout réel $\varepsilon>0$ une infinité d'éléments de X dans l'intervalle $]M-\varepsilon,M[$.

***Corrigé 7*.** X une parties non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Par la caractérisation de la borne supérieur on a

$$M=\sup X\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in X/\ M-\varepsilon<x_0<M$$

encore par la caractérisation de la borne supérieur

$$x_0<M\Longrightarrow \exists x_1\in X/\ M-\varepsilon<x_0<x_1<M$$

Par récurrence, on construit une suite strictement croissante $(x_n)_n$ telle que

$$\forall n;\ x_n\in]M-\varepsilon,M[$$

d'où le résultat souhaité.

Exercice 8.

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E(x+n) = E(x) + n$,

(2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

(3) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad E(x) + E(y) \leq E(x+y)$

***Corrigé* 8.**

(1) Par récurrence.

(2) On a par définition

$$E(x) \leq x; \; E(y) \leq y \Longrightarrow E(x) + E(y) \leq x + y$$

Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égale à $x+y$, on déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y)$$

(3) On a pout tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} E(x) \leq x < E(x) + 1 &\Longrightarrow nE(x) \leq nx < nE(x) + n \\ x \longmapsto E(x) \text{ est croissante} &\Longrightarrow nE(x) \leq E(nx) < nE(x) + n \\ &\Longrightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1 \end{aligned}$$

d'où par définition

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

Exercice 9.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in \mathrm{I}$$

Corrigé 9.

- $(\Longrightarrow)$ Supposons que I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ tel que $y > x$ et $t \in [0,1]$. Posons $z = (1-t)x + ty$ alors

  $$z - x = t(y-x) \geq 0 \Longrightarrow z \geq x$$

  et

  $$y - z = (1-t)(y-x) \geq 0 \Longrightarrow y \geq z$$

  d'où $x \leq z \leq y$ et comme I est un intervalle alors $z \in \mathrm{I}$

- $(\Longleftarrow)$ Supposons $\forall x, y \in \mathrm{I}, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in \mathrm{I}$

  Soit $x, y \in \mathrm{I}$, avec $(x < y)$ et soit $x < z < y$. On pose $t = \dfrac{z-x}{y-x}$, alors $t \in [0,1]$ de plus par hypothèse

  $$z = (1-t)x + ty \in \mathrm{I} \Longrightarrow z \in \mathrm{I}$$

  on conclut que I est un intervalle.

Exercice 10.
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que A est dense dans B et B est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

***Corrigé* 10.**
On a A est dense dans B donc

$$\forall b \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A/\ |b - a_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de plus B est dense dans $\mathbb{R}$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists b_x \in B/\ |x - b_x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\forall \varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ alors

$$|x - a_0| \leq |x - b_x| + |b_x - a_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A/ \quad |x - a_0| \leq \varepsilon$$

c-à-d A est dence dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.
Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants

(1) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
(2) $A = \mathbb{Q}$.

***Corrigé* 11.**

(1) $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$. En effet, Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Il suffit de trouver un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que

$$a < \frac{p}{q} < b.$$

Soit $y = b - a > 0$ et $x = 1$. D'apès la propriété d'Archimède, il existe un entier q tel que

$$q(b - a) > 1 \quad \Longrightarrow \quad qa + 1 < qb.$$

Soit $p = [qa] + 1$. On a alors

$$qa < p \leq qa + 1 < qb \Longrightarrow qa < p < qb$$

En divisant par q on a le résultat désiré.

(2) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$. En effet, montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ \exists d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \textit{tel que}\ |x - d| < \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors il suffit qu'on pose $x = d$.
- Si $x \in \mathbb{Q}$: Pour $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*/\sqrt{2} < n\varepsilon$
  On pose §$d = x + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc

$$|x - d| = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$$

d'où $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.