Université Sultan Moulay Slimane
Faculté polydisciplinaire de Khouribga

Filière : SMI-S4
2021-2022

Contrôle d'Analyse numérique

(Durée 1h30)

Les documents et téléphones portables ne sont pas autorisés. On attachera une grande importance à la rédaction

Exercice 1 : On considère le système linéaire (S) : $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On cherche à résoudre le système (S) par les méthodes directes.

1. Calculer les valeurs propres de A et en déduire qu'elle est définie positive.
2. Choisir la bonne méthode (Gauss ou factorisation LU ou factorisation de Cholesky) pour résoudre le système linéaire (S).

   On cherche à résoudre le système (S) par les méthodes indirectes de type : $x_{k+1} = Mx_k + N$.
3. Expliquer le principe des méthodes indirectes pour résoudre un système linéaire $Ax = b$.
4. Ecrire la matrice d'itération B_J de la méthode de Jacobi associée à la matrice A.
5. Ecrire la matrice d'itération B_{GS} de la méthode de Gauss-Seidel associée à la matrice A.
6. Que peut on dire sur la convergence des méthode itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution de $Ax = b$.

Exercice 2 : On se propose de résoudre numériquement l'équation (E) : $f(x) = x^5 + x^4 - 3 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution unique $\alpha \in [1, 2]$.
2. En utilisant la méthode de Dichotomie sur l'intervalle $[1, 2]$, estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer le zéro α de la fonction f avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-100}$.
3. Déterminer la suite des premiers 3 itérés de la méthode de Dichotomie dans l'intervalle $[1, 2]$ pour l'approximation du zéro de la fonction f.
4. Ecrire la méthode de Newton pour résoudre (E). Montrer que la méthode de Newton converge quadratiquement vers α pour $x_0 = 1$ près de α.
5. En partant de $x_0 = 1$, calculer les deux premières itérations de la méthode de Newton pour l'approximation du zéro de la fonction f.

6. Calculer les deux premières itérations par la méthode de la Sécante avec $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

7. Pour chaque fonction g ci-dessous, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$ sont des points fixes.

   a) $g(x) = x + sin(x)$, b) $g(x) = x + 3sin(x)$, c) $g(x) = x + \frac{1}{2}sin(x)$.

   Etudier dans chacun des trois cas, la convergence de la méthode du point fixe $\left(x_{k+1} = g(x_k)\right)$, pour la recherche de $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$ et déterminer leur ordre de convergence le cas échéant.

Exercice 3 : Soit $f(x) = \sqrt{x}$, pour $i = 0, 1$ et 2, on a $x_0 = 1, x_1 = 2,25, x_2 = 4$ et $f(x_i) = y_i$.

1. Quelle est l'avantage de la méthode d'interpolation par les différences divisées de Newton par rapport à celle de Lagrange ?

2. Déterminer par la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation P_2 de degré 2 tel que $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$.

3. Déterminer par la méthode de Newton côtes, le polynôme d'interpolation P_2 de degré 2 tel que $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$.

4. Déterminer une borne de l'erreur d'interpolation polynomiale.

5. Évaluer $P_2(2)$ puis calculer l'erreur réelle et comparer avec l'estimation trouvée dans la question précédente.