

## Série d'exercices n°2

### Exercice 1

Soit  $A$  l'ensemble des fonctions  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme

$$f(z) = az + b \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

$(A, +, \cdot)$  est-il un anneau?

### Exercice 2

1. Trouver tous les sous-anneaux de  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .
2. Trouver tous les morphismes d'anneaux de  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

### Exercice 3

Soit  $D$  l'ensemble des nombres décimaux :

$$D = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Montrer que  $(D, +, \cdot)$  est un anneau. Déterminer le groupe des unités de  $D$ .

### Exercice 4

On considère l'ensemble

$$A = \{m + n\sqrt{6} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que  $(A, +, \cdot)$  est un anneau intègre.
2. Montrer que l'application

$$\varphi: A \rightarrow A, \quad m + n\sqrt{6} \mapsto m - n\sqrt{6}$$

est un automorphisme d'anneaux.

3. Soit  $r \in A$ . On pose  $N(r) = r \varphi(r)$ . Établir que

$$\forall r, y \in A, \quad N(r \times y) = N(r) \times N(y)$$

4. Montrer que  $r$  est inversible dans  $A$  si et seulement si  $N(r) = \pm 1$  (Remarquer que  $N(r) \in \mathbb{Z}$ ).
5. Vérifier que  $5 + 2\sqrt{6}$  est inversible dans  $A$  et calculer son inverse.

### Exercice 5

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau intègre fini. Montrer que  $A$  est un corps.

### Exercice 6

1. Soient  $(A, +, \cdot)$  un anneau commutatif, et  $T$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ .  
Montrer que :  $n \in T + J$  sont des idéaux de  $A$ .

2. On pose  $A = \mathbb{Z}$ ,  $I = a\mathbb{Z}$ , et  $J = b\mathbb{Z}$ , où  $a, b \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$I + J = d\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad d = a \wedge b$$

$$I \cap J = m\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad m = a \vee b$$

Exercice 1 (Caractéristique d'un corps)

Soit  $(K, +, \cdot)$  un corps commutatif. On considère le morphisme d'anneaux suivant

$$S: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \longrightarrow (K, +, \cdot)$$

Alors,  $\ker(f) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \cdot 1_K = 0_K\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ .

D'après l'exercice 3 de la séance 11, il existe un unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\ker(S) = n\mathbb{Z}$ .

L'entier  $n$  est appelé la caractéristique du corps  $K$ .

1. Quelle est la valeur de  $n$  lorsque  $K = \mathbb{R}$ ?

2. On suppose que le corps  $K$  est fini. Montrer que  $n$  est un nombre premier.

Exercice 8 (Anneau  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ )

On considère le groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  (voir l'exercice 7 de la séance 11), où  $n \in \mathbb{N}$ .

On munit l'ensemble quotient  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'une deuxième loi de composition interne :

$$a \times b = ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

1. Montrer que  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$  est un anneau.

2. Montrer que  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$  est un corps si et seulement si  $n$  est premier.