Correction de la feuille d'Exercices n° 4 : Lois continues (V.A.R)

Exercice 4.1 : *v.a.r. avec espérance*

1) •

(i) Comme $x(1-x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;1]$, f est bien une fonction positive.

(ii) De plus on vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) Enfin on voit que $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ sont convergentes car f est nulle sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;+\infty[$ et $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ est convergente car f est continue sur $[0;1]$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 6x(1-x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \int_{0}^{1} (6x-6x^2)\,dx = [3x^2-2x^3]_0^1 = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

• La fonction $x \to |xf(x)|$ est nulle sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;+\infty[$ donc $\int_{-\infty}^{0} |xf(x)|\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ sont convergente. De plus $x \to |xf(x)|$ est continue sur $[0;1]$ donc $\int_{0}^{1} |xf(x)|\,dx$ est aussi convergente.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ est absolument convergente et X admet donc une espérance. De plus :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 6x^2(1-x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \int_{0}^{1} (6x^2-6x^3)\,dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) Il nous reste ici à vérifier que X admet un moment d'ordre 2 et à le calculer.

— Sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;+\infty[$, $|x^2f(x)| = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} |x^2f(x)|\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} |x^2f(x)|\,dx$ sont convergentes.

— Sur $[0;1]$ $x \to |x^2f(x)|$ est continue donc $\int_{0}^{1} |x^2f(x)|\,dx$ est convergente.

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx$ est absolument convergente ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

De plus :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (6x^3-6x^4)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$.

3) Pour **toutes** les VAR (continues ou non) on définit la fonction de répartition de X, que l'on note F_X, par $F_X(t) = P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ pour tout réel t.

1. Commençons par le premier cas : $t < 0$.
   Dans ce cas, on voit que f est nulle sur $]-\infty; t] \subset]-\infty; 0]$. Par conséquent, $F_X(t) = 0$.
2. Passons au deuxième cas $t \in [0; 1]$.
   On a $F_X(t) = P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{t} 6x(1-x)\,dx$. Donc
   $F_X(t) = 0 + [3x^2 - 2x^3]_0^t = 3t^2 - 2t^3$.
3. Terminons par le troisième (et dernier) cas : $t > 1$.

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 6x(1-x)\,dx + \int_{1}^{t} 0\,dx = \int_{0}^{1} (6x - 6x^2)\,dx = [3x^2 - 2x^3]_0^1 = 1$$

4)

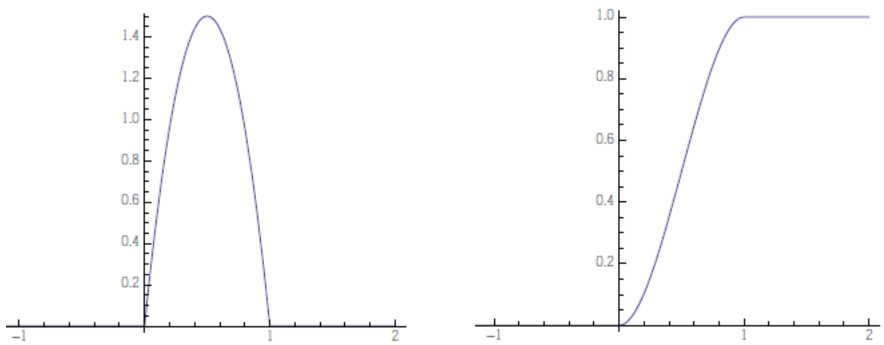

FIGURE 1 – Courbes de la d.d.p f (à gauche) et de la f.r. F (à droite)

Exercice 4.2 : *v.a r. sans espérance*

•

(i) *f est bien une fonction à valeurs positive*

(ii) *De plus f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.*

(iii) *On voit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx$ est convergente car f est nulle sur $]-\infty; 1[$.*

Sur $[1; +\infty[$, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$$

f est donc bien une densité de probabilité.

- *- Sur $]-\infty;1[$, $xf(x)=0$ donc $\int_{-\infty}^{1} xf(x)\,dx$ converge.*

- Sur $[1;+\infty[$, $xf(x)=\dfrac{1}{x}$ et donc $\int_{1}^{+\infty} xf(x)\,dx$ diverge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ n'est pas convergente et donc X n'admet donc pas d'espérance.

Exercice 4.3 : *Comparaison du temps de fonctionnement de deux systèmes*

1)

a) Comme X_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = \dfrac{1}{E(X_1)} = 1/1000$,

$$p(X_1 \leq 900) = \int_0^{900} \frac{1}{1000} e^{-t/1000}\,dt = \int_0^{0.9} e^{-u}\,du = 1 - e^{-0.9} = 0.593.$$

b) Comme X_2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = \dfrac{1}{E(X_2)} = 1/1500$,

$$p(X_2 \leq 900) = \int_0^{900} \frac{1}{1500} e^{-t/1500}\,dt = \int_0^{0.6} e^{-u}\,du = 1 - e^{-0.6} = 0.451.$$

c) L'évènement A = "le système en parallèle fonctionne moins de 900h" s'écrit $A = \{X_1 \leq 900\} \cap \{X_2 \leq 900\}$. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, les probabilités se multiplient, et $p(A) = 0.593 \times 0.451 = 0.268$.

2) Dans le cas d'un branchement en série, l'évènement B = "le système en série fonctionne moins de 900h" s'écrit $B = \{X_1 \leq 900\} \cup \{X_2 \leq 900\}$, d'où

$$\begin{aligned} p(B) &= p(X_1 \leq 900) + p(X_2 \leq 900) - p(A) \\ &= 0.593 + 0.451 - 0.268 = 0.776. \end{aligned}$$

Cela fait une très grande différence !

Exercice 4.4 : *Confiture "pur sucre" et loi normale*

1) Calculons le pourcentage de la production du fabriquant qui ne doit pas porter la mention *pur sucre* :

Soit X le poids de sucre par 1 kg, on a $X \hookrightarrow \mathcal{N}(465, 30^2)$ donc $T = \frac{X-465}{30} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 420) + P(520 \leq X \leq 1000) &= P(-15.5 \leq T \leq -1.5) + P(1.8333 \leq T \leq 17.833) \\ &= \Phi(15.5) - \Phi(1.5) + \Phi(17.833) - \Phi(1.8333) \\ &= 0.5 - 0.4332 + 0.5 - 0.4664 \\ &= 0.1004 \end{aligned}$$

D'où 10.04% est le pourcentage cherché.$(= 100 \times (1 - P(420 \leq X \leq 520)) = 10.04\%)$

2) On pose $[a;b] = [465 - \alpha; 465 + \alpha]$, donc

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) = 0.85 &\iff P(465 - \alpha \leq X \leq 465 + \alpha) = 0.85 \\ &\iff P(-\frac{\alpha}{30} \leq T \leq \frac{\alpha}{30}) = 0.85 \\ &\iff 2\Phi(\frac{\alpha}{30}) = 0.85 \\ &\iff \Phi(\frac{\alpha}{30}) = 0.425 \\ &\iff \frac{\alpha}{30} = 1.44 \\ &\iff \alpha = 43.2 \end{aligned}$$

D'où $[a;b] = [421.8; 508.2]$.

3) On cherche x_0 tel que

$$\begin{aligned} P(x_0 \leq X \leq 495) = \underline{0.8} &\iff P(\frac{x_0 - 465}{30} \leq T \leq 1) = 0.8 \\ &\iff \Phi(1) + \Phi(-\frac{x_0 - 465}{30}) = 0.8 \\ &\iff \Phi(-\frac{x_0 - 465}{30}) = -\Phi(1) + 0.8 \\ &\iff \Phi(-\frac{x_0 - 465}{30}) = -0.3413 + 0.8 \\ &\iff \Phi(-\frac{x_0 - 465}{30}) = 0.4587 \\ &\iff -\frac{x_0 - 465}{30} = 1.74 \Longrightarrow x_0 = 412.8 \end{aligned}$$

On prendra alors $\underline{x_0 = 412.8\ g}$.

Exercice 4.5 : *Tailles et loi normale*

1) On a $X \hookrightarrow \mathcal{N}(175; 6^2)$, avec X la taille en centimètre, d'un homme agé de 25 ans. Alors $T = \frac{X-175}{6} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, donc

$$P(X \geq 185) = P(T \geq 1.66) = 0.5 - \Phi(1.66) = 0.5 - 0.4515 = 0.0485$$

d'où le pourcentage cherché est 4.85%

2) De la même manière on cherche $P(X \geq 180) = 0.2033$ alors le pourcentage de cette catégorie est 20.33% pour $P(X \geq 192) = 0.0023$ donc de pourcentage 0.23% et on a aussi $P(180 \leq X \leq 192) = 0.2010$ donc de pourcentage 20.10%. Mais puisque on s'interesse au pourcentages d'hommes parmi ceux mesurant plus de 180 cm et dont la taille dépasse 192 cm , on doit calculer

$$\frac{100 \times 0.23}{20.33} = 1.131\%.$$

<u>ou bien calculer</u> $P(X \geq 192 | X \geq 180) = P(X \geq 192)/P(X \geq 180) = 0.0023/0.2033 = 0.01131 \Rightarrow$ Pourcentage = 1.131%.

Exercice 4.6 : *Deux informations et deux inconnues*

On a $X \hookrightarrow N(m;\sigma^2) \Longrightarrow T = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\begin{aligned}
P(X<0)=0.6 &\Leftrightarrow P(T<\frac{-m}{\sigma})=0.6\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-m}{\sigma}>0,\\ P(0<T<\frac{-m}{\sigma})=0.1\end{cases}\\
&\Rightarrow \Phi(\frac{-m}{\sigma})=0.1\\
&\Rightarrow \frac{-m}{\sigma}=\underline{0.25} \text{ lecture inverse de la table de la loi normale.}
\end{aligned}$$

de la même manière, on aura

$$\frac{2-m}{\sigma}=\underline{0.67}$$

ainsi il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases}\frac{-m}{\sigma}=0.25\\ \frac{2-m}{\sigma}=0.67\end{cases} \Longrightarrow m \simeq -1.19, \sigma \simeq 4.76$$

Exercice 4.7 : *Transformations affines de lois*

1. On a $Y = aX+b, a \neq 0, donc$

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=P(aX+b\le t)=P(aX\le t-b)$$

ainsi,

cas où $a>0$

$$F_Y(t)=P(X\le\frac{t-b}{a})=F_X(\frac{t-b}{a})$$

et

$$f_Y(t)=F_Y^{'}(t)=\frac{1}{a}F_X^{'}(\frac{t-b}{a})=\frac{1}{a}f_X(\frac{t-b}{a}).$$

cas où $a<0$

$$F_Y(t)=P(X\ge\frac{t-b}{a})=1-P(X\le\frac{t-b}{a})=1-F_X(\frac{t-b}{a})$$

et

$$f_Y(t)=(1-F_Y)^{'}(t)=-\frac{1}{a}F_X^{'}(\frac{t-b}{a})=-\frac{1}{a}f_X(\frac{t-b}{a}).$$

Cas général :

$$f_Y(t)=\frac{1}{|a|}f_X(\frac{t-b}{a}).$$

2. — Si X suit une loi de Cauchy, on aura :

$$f_Y(t)=\frac{|a|}{\pi((t-b)^2+a^2)},$$

$F_Y(t)=\frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{t-b}{a})+\frac{\pi}{2})$ si $a>0$,
$F_Y(t)=1-\frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{t-b}{a})+\frac{\pi}{2})$ si $a<0$,

— Si $X \hookrightarrow N(m;\sigma)$: $F_Y(t)=F_X(\frac{t-b}{a})$ si $a>0$ et $F_Y(t)=1-F_X(\frac{t-b}{a})$ si $a<0$.

$$f_Y(t)=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-(am+b))^2}{2(|a|\sigma)^2}}.$$

Remarque : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b; |a|\sigma)$ pour $a \neq 0$.

Exercice 4.8 : *Confectionnement*

a) L'énoncé suggère que le poids en grammes P des paquets est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 500 et de variance 25^2(d'écart-type 25). Soit X la variable aléatoire centrée et réduite correspondante, $Y = (X-500)/25$. Alors

$$p(480 \le X \le 520) \;=\; p(|Y| \le 4/5) = 2p(0 \le Y \le 0.8) = 0.576.$$

On s'attend donc à ce que, sur 1000 paquets, il y en ait 576 dont le poids est compris entre 480g et 520g.

b)

$$\begin{aligned} p(480 \le X \le 490) &= p(-0.8 \le Y \le -0.4) \\ &= p(0.4 \le Y \le 0.8) \\ &= p(Y \le 0.8) - p(Y \le 0.4) = 0.1327. \end{aligned}$$

On s'attend donc à ce que, sur 1000 paquets, il y en ait 132 dont le poids est compris entre 480g et 490g.

c)

$$p(450 \le X) \;=\; 0.5 + p(Y \le 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772.$$

On s'attend donc à ce que, sur 1000 paquets, il y en ait 977 dont le poids est supérieur à 450g.

d) Il faut trouver t tel que $p(|Y| < t) = 0.9$. La table donne $t = 1.645$, puis $500 + 25t = 541$, $500 - 25t = 459$. Par conséquent, environ 90% de la production a un poids compris entre 459g et 541g.

Exercice 4.9 : *Une nouvelle d.d.p*

1) On veut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a^2 - x^2)\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)dx \\
&= \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\,dx \\
&= 2\left(\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^A\right) \\
&= 2\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \frac{4a^3}{3} \\
a^3 &= \frac{3}{4} \\
a &= \sqrt[3]{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

2)

a)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,(a^2 - x^2)\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\,dx \\
&= \int_{-a}^{a} (a^2x - x^3)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} x^2 (a^2 - x^2)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{a} (a^2x^2 - x^4)\, dx \\
&= 2\left(a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a\right) \\
&= 2\left(\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5}\right) \\
&= \frac{4a^5}{15} \\
V(X) &= \frac{4a^5}{15}
\end{aligned}$$

b)

— Si $x < -a$:

$$F_X(x) = 0$$

— Si $-a \leq x \leq a$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-a}^{x} f(t)\, dt \\
&= \int_{-a}^{x} (a^2 - t^2)\, \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\, dt \\
&= \left[a^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_{-a}^{x} \\
&= a^2 x - \frac{x^3}{3} - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right) \\
&= a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2a^2}{3}
\end{aligned}$$

— Si $x > a$:

$$F_X(x) = 1$$

Exercice 4.10 : $Y = aX + b$

Théorème 1
Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.
De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

1) **Étape 1 : fonction de répartition de Y**
On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y.
Le but est d'exprimer G en fonction de F.
Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(aX + b \leqslant x) = P(aX \leqslant x - b)$. Afin de « passer a de l'autre côté » il nous faut différencier 2 cas :
• Si $a > 0$, $G(x) = P\left(X \leqslant \dfrac{x-b}{a}\right) = F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$
• Si $a < 0$, $G(x) = P\left(X \geqslant \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

2) **Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité**
On souhaite ici utiliser le théorème 1 donc nous avons deux hypothèses à vérifier sur G.
• Que a soit positif ou négatif, G est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car F est continue ainsi que la fonction $x \to \dfrac{x-b}{a}$.
• Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = ax_i + b$, on voit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \cdots, y_n\}$.
On en déduit donc grâce au théorème 1 que Y est bien une variable à densité.

3) **Étape 3 : donner une densité de Y**
Pour donner une densité de Y il nous faut calculer G'. En tout point où G est dérivable, on a :

$$\begin{cases} \text{si } a > 0 & G'(x) = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right) \\ \text{si } a < 0 & G'(x) = -\dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right) \end{cases}$$

Ainsi en posant $g(x) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ on a obtenu une densité de Y.

Exercice 4.11 : *Fonction carrée $Y = X^2$ et exponentielle $Y = e^X$*

1)

a) **Étape 1 : fonction de répartition de Y**
On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y.
Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x)$
• Si $x < 0$, $G(x) = 0$.
• Si $x \geqslant 0$, $G(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$

b) **Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité**

• G est bien évidemment continue sur $]-\infty;0[$ et par opération sur les fonctions continues, G est continue sur $]0;+\infty[$. De plus $\lim\limits_{0^+} G = F(0) - F(0) = 0 = \lim\limits_{0^-} G = G(0)$ donc G est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

• Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = x_i^2$, on voit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \cdots, y_n\}$.

On en déduit donc grâce au théorème 1 que Y est bien une variable à densité.

c) Étape 3 : donner une densité de Y

Lorsque $G'(x)$ existe, on a $G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc en posant : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ on obtient une densité de Y.

2)

a) Étape 1 : fonction de répartition de Y

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y.

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(e^X \leqslant x)$

• Si $x \leqslant 0$, $G(x) = 0$.

• Si $x > 0$, $G(x) = P(X \leqslant \ln(x)) = F(\ln(x))$

b) Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité

• G est bien évidemment continue sur $]-\infty;0[$ et par opération sur les fonctions continues, G est continue sur $]0;+\infty[$. De plus $\lim\limits_{0^+} G = 0$ car $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, et comme $\lim\limits_{0^-} G = 0 = G(0)$, G est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

• Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = e^{x_i}$, on voit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \cdots, y_n\}$.

On en déduit donc grâce au théorème 1 que Y est bien une variable à densité.

c) Étape 3 : donner une densité de Y

• Lorsque $G'(x)$ existe, on a $G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc en posant : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ on obtient une densité de Y.

Exercice 4.12 : *Encore un composant électronique !*

Fait :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Idée pour démontrer le fait : On exprime I_n en fonction de I_{n-1}, par l'intégration par partie.

1) Montrons que :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 x e^{-\alpha x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(x)\,dx \\
&= \alpha^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x}\,dx}_{I_1} \\
&= \alpha^2 \frac{1}{\alpha^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2) On calcule $E(x)$ et $V(x)$:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \\
&= \alpha^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}\,dx}_{I_2} \\
&= \alpha^2 \frac{2}{\alpha^3} \\
&= \frac{2}{\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx \\
&= \alpha^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} x^3\,e^{-\alpha x}\,dx}_{I_3} \\
&= \alpha^2 \frac{3!}{\alpha^4} \\
&= \frac{6}{\alpha^2} \\
V(x) &= \frac{6}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha^2} \\
&= \frac{2}{\alpha^2}
\end{aligned}
$$

3) On veut :

$$
\begin{aligned}
P\left(X \geq \frac{2}{\alpha}\right) &= \int_{\frac{2}{\alpha}}^{+\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{2}{\alpha}}^{+\infty} \alpha^2 x e^{-\alpha x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(x)\,dx \\
&= \alpha^2 \int_{\frac{2}{\alpha}}^{+\infty} x e^{-\alpha x}\,dx \\
&= \alpha^2 \left(-\frac{1}{\alpha}\left[x e^{-\alpha x}\right]_{\frac{2}{\alpha}}^{+\infty} - \int_{\frac{2}{\alpha}}^{+\infty} -\frac{1}{x} e^{-\alpha x}\,dx\right) \\
&= \alpha\left(\frac{2}{\alpha}\,e^{-2} - \frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha x}\right]_{\frac{2}{\alpha}}^{+\infty}\right) \\
&= 2\,e^{-2} + e^{-2} \\
&= \frac{3}{e^2}
\end{aligned}
$$

Exercice 4.13 : *Particularité de la loi de Cauchy*

À faire