①

CHAPITRE 5

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

5.1 Généralités sur les variables aléatoires continues

5.1.1 Définitions

Définition 5.1 (Densité) *On appelle densité (de probabilité)(abrégée par d.d.p) sur $\mathbb{R}$ toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *f positive,*
2. *f est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$,*
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$, *(intégrale généralisée).*

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = a > 0$:

soit $f(x) = \frac{1}{a} g(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$

Définition 5.2 (Variable aléatoire continue) *On appelle variable aléatoire réelle (abrégé par v.a.r.) toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$.*
On dit que X est une variable aléatoire continue (abrégé par v.a.c.) de densité f si :

1. *f est une densité,*
2. $\displaystyle\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx.$

5.1.2 Propriétés fondamentales des v.a.c. admettant une d.d.p.

Soit X une v.a.r. admettant une d.d.p f. On a alors les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\mathbb{P}(X \in [a,b]) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$;
2. $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = t) = 0$;
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b)$;
4. $\displaystyle P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$;
5. $\displaystyle\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$ car $\displaystyle\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$

Remarque : la propriété 3. s'interprète en disant que, dans le cas d'une v.a.c. admettant une d.d.p., les probabilités d'événements sont invariantes lorsqu'on remplace une ou plusieurs inégalités strictes définissant les événements par des inégalités larges et réciproquement.

5.1.3 Fonction de répartition

Définition 5.3 *De même que pour les variables aléatoires discrètes, on peut définir la fonction de répartition (abrégée par f.r.) F_X de la variable continue X, admettant f pour densité, qui permet de connaître la probabilité que X soit inférieure à une valeur donnée :*

$$\boxed{F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx}$$

Remarque : S'il n y a pas de confusion possible, on notera F (à la place de F_X) la fonction de répartition d'une v.a.c. X

Proposition 5.4 *Soit X une v.a.c. admettant une densité de probabilité f et notons F la fonction de répartition de X. On a alors les propriétés suivantes de F :*

1. *F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *$F'(x) = f(x)$ pour tout réel x où f est continue.*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
4. $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a).$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{-\infty} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \int_{-\infty}^b f(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

L'importance de la fonction de répartition est capitale puisqu'elle permet de calculer les probabilités sur les intervalles classiques. On peut néanmoins souligner que la f.r. joue un rôle pour caractériser la loi de probabilité d'une v.a. quelconque au sens suivant :

Théorème 5.5 (admis) *X et Y sont deux v.a. admettent la même fonction de répartition, si et seulement si X et Y ont la même loi de probabilité c-à-d que :*

$$\boxed{F_X(t) = F_Y(t), \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P[X \in A] = P[Y \in A],\ \forall A \subseteq \mathbb{R}}$$

5.1.4 Espérance mathématique et Variance

Définition 5.6 (Espérance mathématique et Variance)
Soit X une variable aléatoire continue de densité f.
Alors on définit l'espérance mathématique(abrégée par e.m.) ou moyenne par :

$$\boxed{E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx}$$

De même pour toute fonction ϕ on définit l'espérance de $\phi(X)$ par $E(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, f(x)\, dx$.
On définit la variance de $V(X)$ par $V(X) = E(\phi(X))$ où $\phi(t) = (t - E(X))^2$, c-à-d

$$\boxed{V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)}$$

$$E\left((X-E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2E(X)E(X) + (E(X))^2\right) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = \boxed{E(X^2) - E(X)^2}$$

Théorème 5.7 (Formule de Huggens)

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Proposition 5.8 (Linéarité de l'espérance) *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Proposition 5.9 (Variance d'une transformée affine)

$$V(a \times X + b) = a^2 \times V(X)$$

Définition 5.10 *On conviendra de noter l'indicatrice d'un ensemble A par $\mathbb{1}_A$ telle que*

$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Avec cette notation, on a alors

- $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, dx = \int_a^b dx = b - a\,; \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f(x)\, dx = \int_A f(x) dx\,;$
- $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) f(x)\, dx = \int_a^b f(x) dx\,; \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx\,.$

③

5.2 Lois continues usuelles

5.2.1 Loi uniforme sur $]a, b[$: Définitions, f.r. , représentations et paramètres

Définition 5.11 (Loi uniforme) *On dit que* $X \hookrightarrow U_{]a,b[},\ a < b,$ *si* X *a pour densité la fonction :*

$$\boxed{f : x \mapsto \frac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{]a,b[}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in]a, b[, \\ 0 & sinon. \end{cases}}$$

On commence par remarquer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{]a,b[}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$

Proposition 5.12 (Fonction de répartition)
Si $X \hookrightarrow U_{]a,b[}$*, alors*

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & si\ x \geqslant b \end{cases}}$$

Preuve : détaillée en cours

5.2.1.0.1 Représentations graphiques

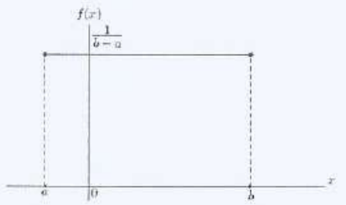


FIGURE 5.1 – d.d.p de la loi uniforme

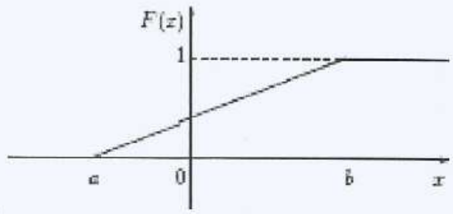


FIGURE 5.2 – f.r. de la loi uniforme

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{]a,b[}(x)\,dx$

$= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b$

$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$

$= \frac{b+a}{2}$

Proposition 5.13 (Espérance et variance)
Si $X \hookrightarrow U_{]a,b[}$*, alors*

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2},\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

5.2.2 Loi exponentielle : Définitions, f.r., représentations et paramètres

Définition 5.14 (Loi exponentielle) *On dit que* X *suit la loi exponentielle de paramètre* λ*, avec* $\lambda > 0$*, que l'on écrit* $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$*, si* X *a pour densité :*

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}^{*+}}(x)}$$

On commence par remarquer que

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{*+}}(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \boxed{1.}$$

Proposition 5.15 (Fonction de répartition)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors :

$$\boxed{F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)}$$

Preuve.

Pour $x \leqslant 0$, $F_X(x) = 0$.
Pour $x > 0$ on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda\, e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{*+}}\,dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = \lambda \times \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Représentations graphiques

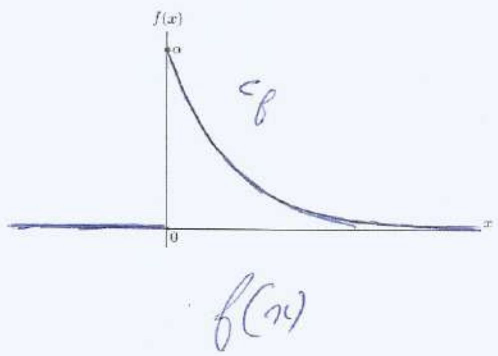


FIGURE 5.3 – d.d.p de la loi exponentielle

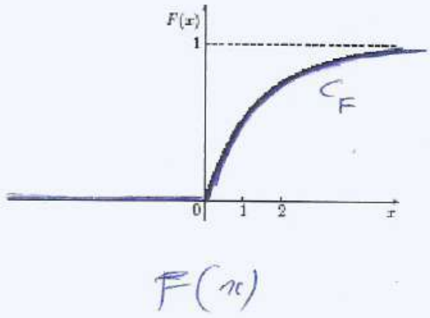


FIGURE 5.4 – f.r. de la loi exponentielle

Proposition 5.16 (Espérance et variance)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}\ ,\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'}\,dx = \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

5.2.3 Loi gaussienne ou normale : Définitions, f.r., représentations et paramètres

5.2.3.1 Loi gaussienne ou normale standardisée

Théorème 5.17 (Résultat préliminaire admis) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

Définition 5.18 (Loi gaussienne ou normale standardisée)
On dit que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ si X a pour densité :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Proposition 5.19 (Fonction de répartition)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors F_X vérifie : 1. $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$;   2. $F_X(0) = \frac{1}{2}$.

Preuve

1. $F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leqslant -x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1 - F_X(x)$.
2. $F_X(0) = 1 - F_X(0) = \frac{1}{2}$.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \left[\frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 1 = 0$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[x(-e^{-\frac{x^2}{2}})\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1$

Proposition 5.20 (Espérance et variance)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\boxed{E(X) = 0, \text{ et } V(X) = 1}$$

Définition 5.21 (Loi centrée réduite) *On dit que X est centrée réduite si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.*

Remarque : Si X n'est pas centrée réduite, alors $\boxed{Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}}$ est centrée réduite. En effet :

$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E(X - E(X)) = \frac{1}{\sqrt{V(X)}} (E(X) - E(X)) = 0$;
$V(Y) = \frac{V(X - E(X)))}{V(X)} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$.

5.2.3.2 Courbe de la densité de la normale standardisée

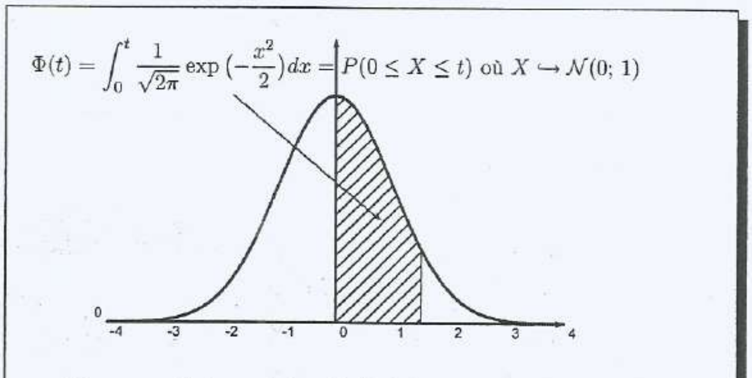


FIGURE 5.5 – d.d.p de la loi normale standardisée

5.2.3.3 Loi gaussienne ou normale généralisée

Définition 5.22 (Loi gaussienne ou normale générale)

$$\boxed{\text{On dit que } \boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)} \text{ si } \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

si $\begin{cases} m = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$ alors on trouve la loi centrée reduite $X \hookrightarrow N(0,1)$

Proposition 5.23 *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la densité de probabilité de X est donnée par*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

Représentations graphiques

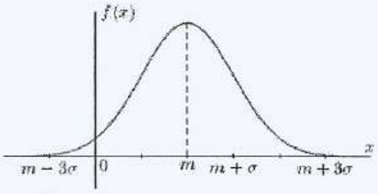


FIGURE 5.6 – d.d.p de la loi normale

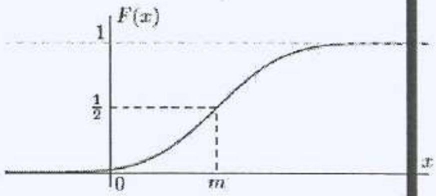


FIGURE 5.7 – f.r. de la loi normale

$Y = \frac{X-m}{\sigma} \Rightarrow E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$

$\frac{E(X)-m}{\sigma} = 0$ et $\frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$

$\boxed{E(X) = m}$ et $\boxed{V(X) = \sigma^2}$

Proposition 5.24 (Espérance et variance)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *alors*

$$\boxed{E(X) = m,\ V(X) = \sigma^2}$$

la variable standardisée suit une loi normale de paramètres 0 et 1. La loi standardisée est appelée loi normale centrée réduite, et notée $\mathcal{N}(0,1)$. Donc si X suit $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on pose $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ et T suit $\mathcal{N}(0,1)$.
On peut résumer la correspondance de la façon suivante :

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $E(X) = m$ $Var(X) = \sigma^2$	$T = \dfrac{X-m}{\sigma}$	$T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ $E(T) = 0$ $Var(T) = 1$

5.2.3.4 Représentations graphiques pour l'un des paramètre fixe et l'autre variable

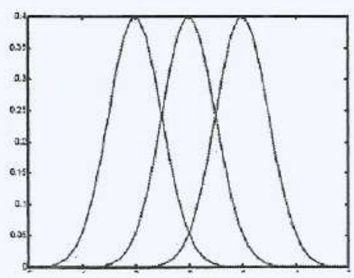


FIGURE 5.8 – figures des d.d.p. de lois normales de même écart-type et d'espérances différentes : -2, 0, 2.

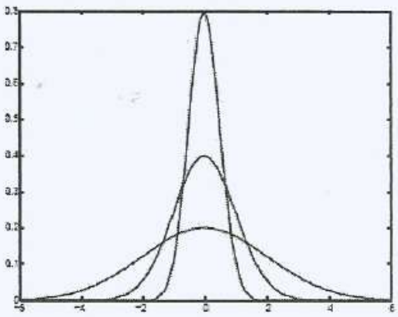


FIGURE 5.9 – figures des d.d.p. de lois normales d'espérance nulle et d'écart-types différents : 0.5, 1, 2.

7

5.2.3.5 Utilisation de la table de la loi normale ou gaussienne standardisée

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est tabulée à l'aide de la fonction de répartition des valeurs positives. Elle donne les valeurs de $\Phi(t) = \mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$ pour $t > 0$. Ce nombre représente l'aire sous la courbe représentative de la distribution et au dessus de l'intervalle $[0, t]$. Pour cette raison la table de la loi normale est aussi appelée table d'aires. Cette table ne dépend d'aucun paramètre, mais permet cependant de déterminer les probabilités de n'importe quelle distribution normale !

Comment utiliser la table d'aires ?

La première colonne de la table indique les unités et les dixièmes des valeurs de T alors que les centièmes des valeurs de T se lisent sur la ligne supérieure de la table. La valeur trouvée à l'intersection de la ligne et de la colonne adéquates donne l'aire cherchée.

a) On cherche la valeur de $\mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 0.5)$ à l'intersection de la ligne "0.5" et de la colonne "0.00", on lis 0.1915.

b) On cherche la valeur de $\mathbb{P}(-0.5 \leqslant T \leqslant 0)$. On utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées et on en conclus que $\mathbb{P}(-0.5 \leqslant T \leqslant 0) = \mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 0.5) = \Phi(0.5) = 0.1915$.

c) On cherche la valeur de $\mathbb{P}(-2.24 \leqslant T \leqslant 1.12)$. L'aire cherchée correspond à la somme suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-2.24 \leqslant T \leqslant 1.12) &= \mathbb{P}(-2.24 \leqslant T \leqslant 0) + \mathbb{P}(0 < T \leqslant 1.12)\\ &= \Phi(2.24) + \Phi(1.12) = 0.4875 + 0.3686 = 0.8561.\end{aligned}$$

d) On cherche la valeur de $\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)$. L'aire cherchée correspond à la différence suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) &= \mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 2) - \mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 1)\\ &= \Phi(2) - \Phi(1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359.\end{aligned}$$

e) On cherche la valeur a de T telle que $\mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant a) = 0.4750$. C'est le problème inverse de celui des exemples précédents. Il s'agit de localiser dans la table l'aire donnée et de déterminer la valeur de T correspondante. On trouve $a = 1.96$: $\Phi(a) = 0.4750 \Rightarrow a = 1.96$ en utilisant la table de la loi normale.

Remarque 5.1 *Si la valeur de l'aire ne peut se lire directement dans les valeurs de la table, on pourra toujours effectuer une interpolation linéaire entre deux valeurs adjacentes ou prendre la valeur la plus proche. C'est cette dernière qu'on doit utiliser en T.D. et examen.*

5.2.4 Loi de Cauchy : Définitions, f.r. et paramètres

Définition 5.25 (Loi de Cauchy standard)
On dit que X suit la loi de Cauchy, que l'on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{C}$, si X a pour densité :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}} \xrightarrow{x \to +\infty} \simeq \frac{1}{\pi x^2}$$

Intégrabilité de la d.d.p de la loi de cauchy standard

$$\boxed{t \mapsto \frac{1}{\pi(t^2+1)} \text{ est intégrable sur }]-\infty, +\infty[\text{ et } \int_{]-\infty,+\infty[} \frac{1}{\pi(t^2+1)}\, dt = 1}$$

Preuve.

$\int_{[B,A]} \frac{1}{\pi(t^2+1)}\, dt = \int_B^A \frac{1}{\pi(t^2+1)}\, dt = \frac{1}{\pi}(\arctan A - \arctan B)$ a une limite (finie) quand $A \to +\infty$ et $B \to -\infty$; dans ce cas, cette limite est $\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1$.

Ainsi on vient de vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$.

En notant F_X la fonction de répartition de X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{C}$, vérifions que

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{\pi}(\arctan x + \frac{\pi}{2})}$$

Preuve. Faites en cours.

Proposition 5.26 *On admettra que l'espérance et la variance de la loi de Cauchy n'existent pas.*

5.2.4.1 Représentations graphiques

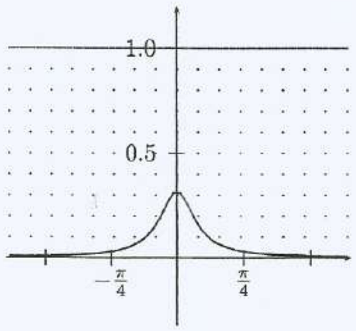


FIGURE 5.10 – d.d.p de la loi de Cauchy

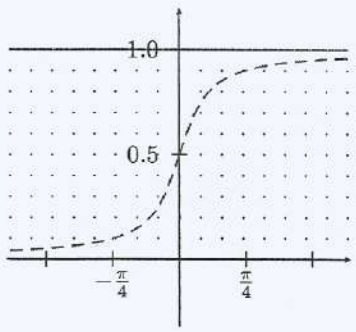


FIGURE 5.11 – f.r. de la loi de Cauchy

5.3 Compléments

5.3.1 Approximation de quelques lois par la loi normale

5.3.1.1 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Soit X une variable qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

$$\boxed{\text{On approche la loi } \mathcal{B}(n,p) \text{ par la loi } \mathcal{N}(np,\ npq) \text{ dès que } \begin{cases} n \geqslant 30 \\ np \geqslant 15 \\ nq \geqslant 15 \end{cases}}$$

5.3.1.2 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

On admettra qu'on peut aussi approcher la loi de Poisson par la loi normale pour les grandes valeurs du paramètre de la loi de Poisson.

$$\boxed{\text{On approche la loi } \mathcal{P}(\lambda) \text{ par la loi } \mathcal{N}(\lambda,\ \lambda) \text{ dès que } \lambda \geqslant 16}$$

RÈGLE IMPORTANTE. Lorsqu'on approche une loi par une autre, on choisit le ou les paramètres de la loi approchante de manière que l'espérance (et la variance lorsqu'on a suffisamment de paramètres) de la loi approchante soit égale à l'espérance (et la variance) de la loi approchée.

Résumé des lois usuelles continues

Nom et paramètres	d.d.p. $f_X(x)$	f.r. $F_X(x)$	e.m. $E(X)$	$V(X)$
Uniforme $\mathcal{U}(]a,b[), (a<b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b[}(x)$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$	$(1-e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $\mathcal{N}(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$	passer par table $\mathcal{N}(0,1)$	0	1
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2), \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	passer par table $\mathcal{N}(0,1)$	m	σ^2
Cauchy $\mathcal{C}$	$\frac{1}{\pi(x^2+1)}$	$\frac{1}{\pi}(\arctan x + \frac{\pi}{2})$	$\nexists$	$\nexists$

Comparaison entre le discret et le continu

	X v.a. discrète	X v.a.r de loi absolument continue
Loi de probabilité	$X(\Omega) = \{x_j, j \in J\}, p_j = P[X = x_j]$	f_X
Conditions	$p_j \geqslant 0, \sum_{j \in J} p_j = 1$	$f_X \geqslant 0, \int_{\mathbb{R}} f_X(t)dt = 1$
$P_X[A] = P[X \in A]$	$\sum_{j \in J, x_j \in A} p_j$	$\int_A f_X(t)dt$
$F_X(t) = P[X \leqslant t]$	$\sum_{j \in J, x_j \leqslant t} p_j$	$\int_{-\infty}^{t} f_X(u)du$
$E(X)$	$\sum_{j \in J} x_j p_j$	$\int_{\mathbb{R}} t f_X(t)dt$
$E(X^2)$	$\sum_{j \in J} x_j^2 p_j$	$\int_{\mathbb{R}} t^2 f_X(t)dt$
$E(g(X))$	$\sum_{j \in J} g(x_j) p_j$	$\int_{\mathbb{R}} g(t) f_X(t)dt$

5.4 Calcul des paramètres des différentes lois continues

Paramètres de la loi uniforme

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{]a,b[}(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{2\,(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$ On a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3\,(b-a)} [x^3]_a^b = \frac{1}{3\,(b-a)} (b-a)\,(b^2 + ab + a^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$V(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-3b^2-6ab}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$.

Paramètres de la loi exponentielle

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda x} dx$

$= \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\, dx \right) = \lambda \left(0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx \right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$. On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\, e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} \left[x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx \right) = \frac{2}{\lambda^2}$.

$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Paramètres de la loi normale standardisée

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0$ (car l'intégrant est une fonction impaire intégrable sur $\mathbb{R}$).

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-[x\, e^{-\frac{x^2}{2}}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$.

5.5 Exercices résolus

Exercice 1 :

La durée de vie en heure d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité : $f(x) = \frac{2}{x^3} \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f est une densité.
2. Déterminer c tel que 84% des composants électronique de ce type aient une durée de vie $\leqslant c$.

Solution del'exercice 1

1. Montrons que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^3} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 2\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^{+\infty}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$

2. On cherche c tel que : $\mathbb{P}(X \leqslant c) = 0,84$.

$\mathbb{P}(X \leqslant c) = 0,84 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{2}{x^3} 1_{[1,+\infty[}(x)\,dx = 2\int_1^{c} \frac{dx}{x^3} = 2\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^{c}\right) = 1 - \frac{1}{c^2} = 0,84 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}.$

Exercice 2 :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30,2)$. Calculons $\mathbb{P}(X \in [28,35])$. On a ainsi $T = \frac{X-30}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$\mathbb{P}(28 \leqslant X \leqslant 35) = P\left(\frac{28-30}{2} \leqslant \frac{X-30}{2} \leqslant \frac{35-30}{2}\right) = P\left(-1 \leqslant \frac{X-30}{2} \leqslant \frac{5}{2}\right)$

Donc :$\mathbb{P}(28 \leqslant X \leqslant 35) = P\left(-1 \leqslant T \leqslant \frac{5}{2}\right) = \Phi(2.5) + \Phi(1) = 0,4938 + 0,3413 = 0,8351.$

Exercice 3 :

La taille des étudiants d'une section donnée est distribuée suivant une loi $X \hookrightarrow \mathcal{N}(170cm, 25cm)$. Déterminer la probabilité qu'un étudiant ait une taille :
1. inférieure à la moyenne, **2.** comprise entre $180cm$ et $190cm$, **3.** supérieure à $190cm$.

Solution del'exercice 3

Soit X la v.a.r. associée à la taille d'un étudiant. Soit $T = \frac{X-170}{25} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. On veut $\mathbb{P}(X < 170)$: or $\mathbb{P}(X < 170) = P\left(T \leqslant \frac{170-170}{25}\right) = P(T \leqslant 0) = 0,5$.

2. On veut $\mathbb{P}(180 < X < 190)$: or $\mathbb{P}(180 \leqslant X \leqslant 190) = P\left(\frac{180-170}{25} \leqslant T \leqslant \frac{190-170}{25}\right)$
$= P(0,4 \leqslant T \leqslant 0,8) = 0,2881 - 0,1554 = 0,1327.$

3. On veut $\mathbb{P}(190 < X)$: or $\mathbb{P}(190 < X) = P\left(\frac{190-170}{25} \leqslant T\right) = \mathbb{P}(0,8 \leqslant T) = 0.5 - \Phi(0,8) = 0.5 - 0,2881 = 0,2119.$

Exercice 4 :

Une usine fabrique en grand nombre des bouteilles dont le diamètre D sui une loi $\mathcal{N}(100,2)$.
1. Quel est la probabilité pour une bouteille quelconque d'avoir un diamètre dans $[95,105]$?
2. Trouver l'intervalle centré autour de l'espérance de D contenant 82% de la production ?

Solution del'exercice 4

On a donc $D \hookrightarrow \mathcal{N}(100,2)$. On pose $T = \frac{D-100}{2}$, ansi on a $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

1. On chercher alors :

$\mathbb{P}(95 \leqslant D \leqslant 105) = P\left(\frac{95-100}{2} \leqslant \frac{D-100}{2} \leqslant \frac{105-100}{2}\right) = P\left(\frac{-5}{2} \leqslant T \leqslant \frac{5}{2}\right)$
$= 2\Phi(2.5) = 2 \times 0.4938 = 0.9876$

2. On chercher $I_k = [100-k, 100+k]$ tel que $\mathbb{P}(D \in [100-k, 100+k]) = 0,82$.

$\mathbb{P}(100-k \leqslant D \leqslant 100+k) = P\left(\frac{100-k-100}{2} \leqslant \frac{D-100}{2} \leqslant \frac{100+k-100}{2}\right) = P\left(\frac{-k}{2} \leqslant \frac{D-100}{2} \leqslant \frac{k}{2}\right)$
$= P\left(\frac{-k}{2} \leqslant T \leqslant \frac{k}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{k}{2}\right) = 0.82 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k}{2}\right) = 0.41.$

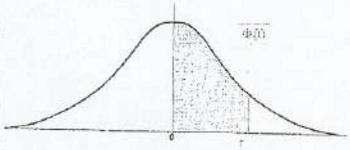
On trouve via la table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ que $\frac{k}{2} = 1.34$ c-à-d $k = 2.68$.
d'où $I = [100-2.68, 100+2.68] = [97,32; 102,68]$.

$a,bc = a,b + 0,0c$

Table d'aires de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

Soit X une v.a.c. suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;\,1)$ de d.d.p. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour tout réel positif ou nul t on a : $\Phi(t) := P(0 \leqslant X \leqslant t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$
et par parité de la d.d.p on a $P(-t \leqslant X \leqslant 0) = \Phi(t)$.
La lecture de la table ci-dessous nous permet de trouver $\Phi(t)$ pour $t > 0$ s'écrivant sous la forme $a,bc = a,b + 0,0c$ à l'intersection de la ligne associée à a, b et la colonne associée à c .



c

a,b

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	$\boxed{0.4750}$	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	$\boxed{0.4901}$	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Exemples :

lectures directes : $\Phi(1,43) = \underline{0,4236}$, $\Phi(2,98) = \underline{0,4986}$,

lectures inverses : $\Phi(x) = 0,4750 \Rightarrow \boxed{x = 1,96}$, $\Phi(y) = 0,49 \Rightarrow \boxed{y \cong 2,33}$