Série 1

Exercice 1

1/ Repère $R(O, x, y, z)$; $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$; $\vec{B}$ uniforme $\vec{B} = \overrightarrow{cst}$

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2}$$

$\vec{B}$ uniforme $\Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{cst} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0.$

$$\vec{B} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{zB_y - yB_z}{2} \\ \frac{xB_z - zB_x}{2} \\ \frac{yB_x - xB_y}{2} \end{pmatrix}$$

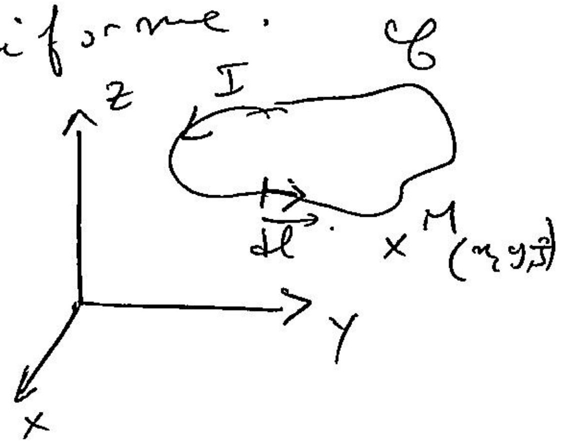
d'autre part $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} =$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \Rightarrow B_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \frac{B_x}{2} + \frac{B_x}{2} = B_x$$

même calcul pour B_y et B_z

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2}$$

2/ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ pour circuit filiforme.



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \operatorname{div}\left(\frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}\right)$$

on sait que $\operatorname{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{b}$.

on pose $\vec{a} = \vec{dl}$ et $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}}\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{dl} - \vec{dl}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$

or $\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$.

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{dl} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{0} \quad ; \quad \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\frac{1}{r}$$

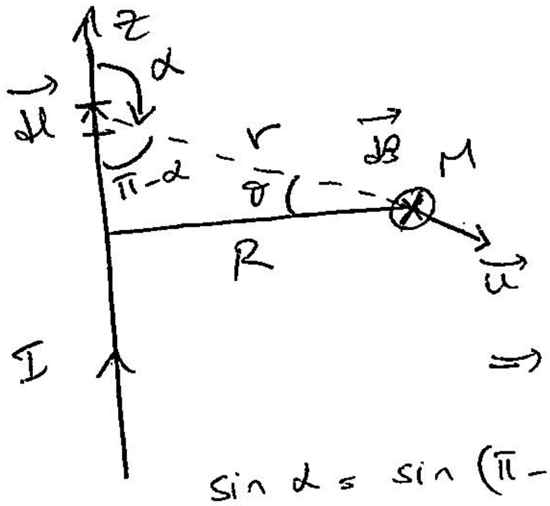
$$\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\vec{\mathrm{grad}}\,\frac{1}{r}\right) = -\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{grad}}\,\frac{1}{r}\right)$$

or $\forall f \quad \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{0}$

donc $\mathrm{div}\,\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\vec{0} - \vec{0}\right) = \vec{0}$ $\quad \oiint \vec{B}\,\vec{dS} = 0$

Pour une surface fermée ~~de~~ le flux est conservatif.

Exercice 2 (coordonnées cylindriques)



Biot et Savart $\Rightarrow \vec{dB} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\,\dfrac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$

$\vec{dl}$ suivant $\vec{Oz}$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \qquad \alpha = (\vec{dl}, \vec{u})$

$\Rightarrow dB = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\, dl\, \dfrac{\sin\alpha}{r^2}$ avec un sens entrant.

$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \cos\theta = \dfrac{R}{r}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{l}{R} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{dl}{R} \Rightarrow dl = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\,d\theta}{\cos^2\theta} \frac{1}{r^2} \cos\theta \quad \text{avec } \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{R}$$

$$\Rightarrow dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{\cos^2\theta} \frac{\cos^2\theta}{R^2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \cos\theta\, d\theta$$

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

* si $\theta_2 = -\theta_1 = \theta \Rightarrow B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin\theta$

* Fil infini $\theta_2 = -\theta_1 = \pi/2 \Rightarrow \boxed{B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$

2/ Th d'Ampère.

le sens par le bonhomme d'Ampère est entrant.

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 I$ $\quad\mathcal{C}$ = contour fermé = cercle de rayon R

$\vec{dl}$ est un élt de longueur de $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{dl} \Rightarrow \vec{B}\,\vec{dl} = B\,dl \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\,\vec{dl} = \oint B\,dl = B\,2\pi R.$

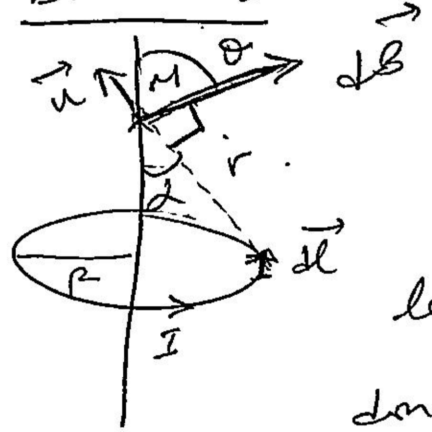
$\Rightarrow B(M) \cdot 2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$.

par ~~...~~ raison de symétrie

$\vec{B} \parallel \vec{dl}$ $\Rightarrow$ si on fixe $R \Rightarrow B = $ cst $\Rightarrow$

$$\oint_{\mathcal{C}} B\,dl = B \oint_{\mathcal{C}} dl = B \cdot 2\pi R.$$

④ Exercice 3



$(\widehat{\vec{dl}, \vec{u}}) = \pi/2 \Rightarrow$

$\|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$

or si on applique la règle de Tire-Bouchon le champ $\vec{B}$ resultant est porté par $\vec{Oz}$

donc $\|\vec{dB}\|_z$ est la projection de $\vec{dB}$ sur $\vec{Oz}$

tel que $\|\vec{dB}\|_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos\theta$. avec $\theta = (\vec{dB}, \vec{Oz})$

on pose $\alpha = (\widehat{\vec{u}, \vec{Oz}}) \Rightarrow \alpha + \theta = \pi/2$ car

$\vec{dB}$ ~~en plan~~ $\perp$aire au plan $(\vec{dl}, \vec{u})$; $\cos\theta = \sin\alpha = \frac{R}{r}$

$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\alpha}{R^2}$

$\Rightarrow \|\vec{dB}\|_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos\theta$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} \sin^3\alpha$

$\|\vec{B}\|_z = \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^3\alpha}{R^2} \int_{\mathcal{C}} dl$; $\int_{\mathcal{C}} dl = 2\pi R$

$\Rightarrow \vec{B}(M) = \|\vec{B}\|_z \cdot \vec{e_z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sin^3\alpha \cdot 2\pi R \ \vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha \ \vec{e_z}}$$

on a : $r = \sqrt{R^2 + z^2}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^{3/2}} \cdot \vec{e_z}}$$

au centre de la spire $\Rightarrow z = 0$

$$\boxed{\vec{B}(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e_z}} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \vec{B}(0) \cdot \frac{1}{\left[1 + (z/R)^2\right]^{3/2}} \vec{e_z}}$$

⑤

Exercice 3 suite

champ $\vec{B}$ crée par les deux spires en E, F, G.

* spire 1 à gauche crée un $\vec{B}$ selon $\vec{Oz}$
* spire 2 à droite crée un $\vec{B}$ selon $(-\vec{Oz})$

* Au point E. * $\vec{B}_1 = + \frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)^{3/2}}\right]\vec{e_z}$

$$* \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{b+d}{R}\right)^2\right)^{3/2}}\right]\vec{e_z}$$

$\vec{B}(E) = \vec{B}_1(E) + \vec{B}_2(E)$ champ resultant.

* Au pt F.

$\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont la même norme mais de signe opposé car $z = \frac{d}{2}$ pour la spire ① et $z = -\frac{d}{2}$ pour la spire ②. donc $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$.

* Au pt G $\vec{B}_1 = + \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a+d}{R}\right)^2\right]^{3/2}}\right)\vec{e_z}$

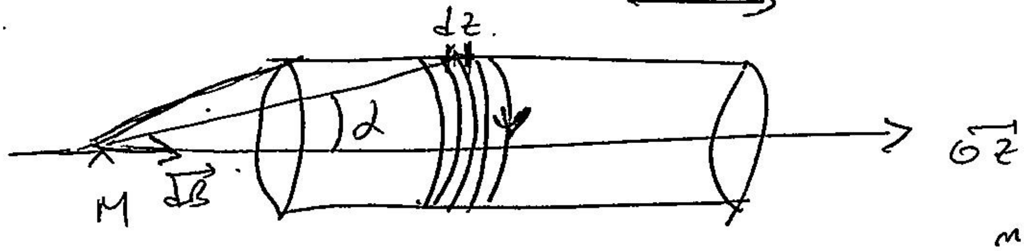
$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{a}{R}\right)^2\right)^{3/2}}\right]\vec{e_z}$$

$\vec{B}(G) = \vec{B}_1(G) + \vec{B}_2(G)$

Tire-Bouchon $\Rightarrow \vec{B}$ est porté par $\vec{Oz}$

Exercice 4

n : densité de spire / dz



$n = \frac{N}{L}$

dN = nombre infinitésimal de spire / $dN = n.dz$

$$dB = \frac{\mu_0 (dN\, I)}{2R} \sin^3\alpha$$

avec $dN.I$ est le courant qui crée dB contenu dans dz. or $dN = n.dz$.

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 n I}{2R} . dz . \sin^3\alpha \; ; \quad tg\alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{tg\alpha}$$

$$\Rightarrow dz = -\frac{R}{\sin^2\alpha}\, d\alpha$$

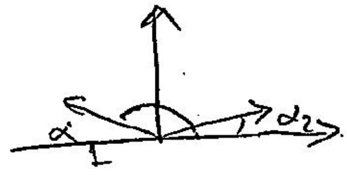
$$\Rightarrow dB = -\frac{\mu_0 n I}{2R} . \frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha} . R\, d\alpha$$

$$= -\frac{\mu_0 n I}{2\cancel{R}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right]$$

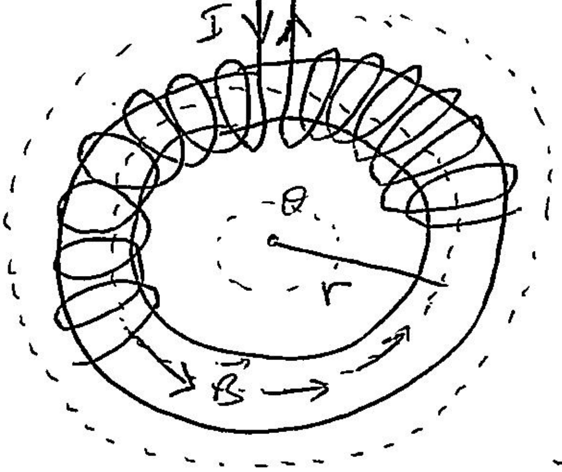
α_1 et $\alpha_2 \Leftrightarrow$ les bornes du solenoïde.

* Pour un solenoïde infinie $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \pi$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n I\, \vec{e_z}}$$

Exercice 5 Bobine torique



La bobine torique est équivalente à un solénoïde sous forme circulaire de rayon r.

Les lignes de champ $\vec{B}$ à l'intérieur du torre forment des cercles de rayon r de centre O. La forme circulaire (de centre O) montre qu'on peut utiliser le théorème d'Ampère. si on fixe r le B devient uniforme $\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_{\mathcal{C}} B\,dl = B \oint_{\mathcal{C}} dl = B \cdot 2\pi r$

le torre à un rayon Rint intérieur et un rayon Rext extérieur

a/ si $R_{int} \leq r \leq R_{ext} \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \cdot N$; $I_{tot} = NI$

$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$; B dépend de r ; B est plus intense au voisinage de Rint.

b) $r > R_{ext}$ et $r < R_{int}$

* $r < R_{int}$ pas de courant $\Rightarrow$ pas de champ

$I = 0 \Rightarrow B = 0$.

* $r > R_{ext}$, I traverse deux fois le contour $\mathcal{C}$ mais dans 2 sens opposés $\Rightarrow I_{tot} = NI - NI = 0$

$\Rightarrow B = 0$