CHAPITRE 1

RESEAUX LINEAIRES en REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

(Courants Alternatifs)

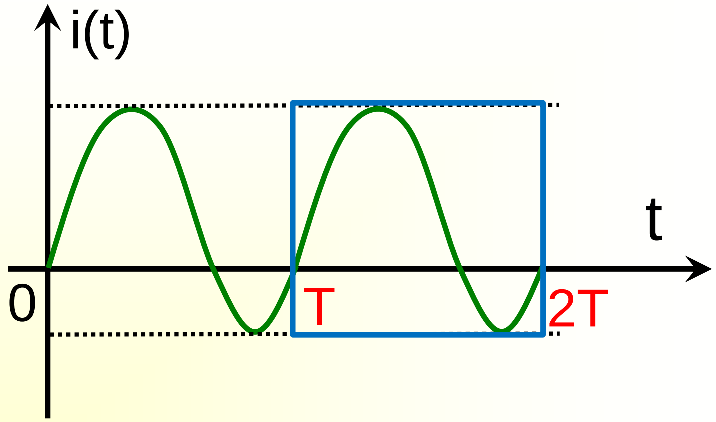
I- DEFINITIONS

1) Courant périodique

= courant variable dont l'intensité est une fonction périodique du temps

$$i(t) = f(t) = f(t + nT) \qquad \text{n entier}$$

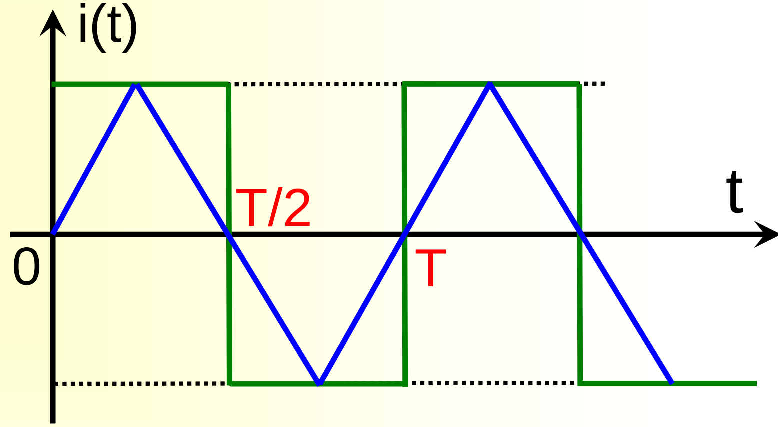
$$T = \frac{1}{N} \qquad N = \text{fréquence en Hz}$$



2) Courant alternatif

= courant périodique tel que:

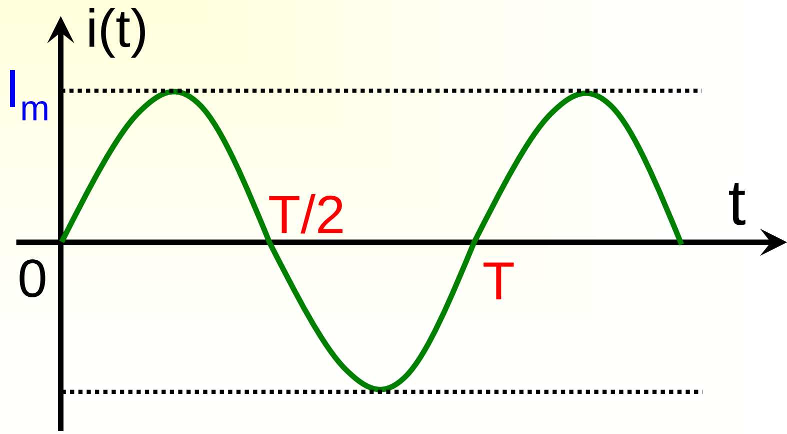
$$i(t) = f(t) = -f(t + T/2)$$



3) Courant alternatif sinusoïdal

= courant alternatif tel que:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$\rightarrow$ $i(t)$ = intensité instantanée

$\rightarrow$ I_m = amplitude = valeur maximale

$\rightarrow$ $\omega t + \varphi$ = phase instantanée

$\rightarrow$ ω = pulsation $\qquad \omega = 2\pi N = \dfrac{2\pi}{T}$ $\qquad$ N = fréquence, T = période

$\rightarrow$ φ = phase à l'origine

Remarques

$*$ On peut définir d'autres grandeurs sinusoïdales:

$e = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ fem sinusoïdale

$u = u_m \cos(\omega t + \varphi)$ ddp sinusoïdale

$B = B_m \cos(\omega t + \varphi)$ induction magnétique

$*$ $N_{secteur} = 50$ Hz au Maroc $\qquad$ (N = 60 Hz aux USA)

➔ Valeur moyenne

$$< i(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\cdot dt$$

* Si i(t) sinusoïdale, alors $< i(t) > \; = 0$

➔ Valeur quadratique moyenne

$$< i^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T \left[i^2(t)\right]\cdot dt$$

* Si i(t) sinusoïdale, alors $< i^2(t) > \; \neq 0$

➘ Objectif de l'étude du régime sinusoïdal permanent:

Résolution des circuits alimentés par des tensions sinusoïdales dans le cadre de l'ARQP

$\Rightarrow$ toutes les lois du régime permanent sont valables:

loi d'Ohm, lois de Kirchhoff, lois de l'induction….

II- INTENSITE ET DDP EFFICACES

➘ L'intensité efficace d'un courant alternatif est l'intensité du courant continu I qui donnerait le même effet Joule que le courant alternatif pendant une période

→ Energie dissipée dans R par effet Joule et pendant 1 période par un courant alternatif i(t):

$$dW = Ri^2dt \quad \Rightarrow \quad W = \int_0^T Ri^2dt = RI^2T$$

d'où $\boxed{I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$ Intensité efficace de i(t)

$=$ valeur quadratique moyenne de i(t)

➘ ddp efficace:

de même: $\boxed{V^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}$ $=$ valeur quadratique moyenne de v(t)

➘ Courant et tension sinusoïdales:

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi) \qquad v(t) = V_m\cos(\omega t + \varphi)$$

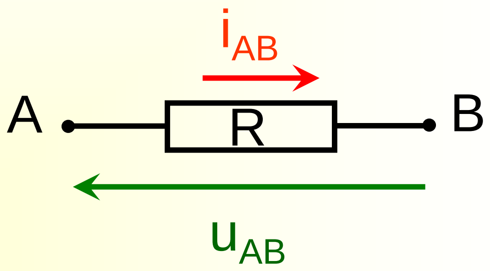
$$\Rightarrow \quad I^2 = \frac{I_m^2}{2} \quad \text{et} \quad V^2 = \frac{V_m^2}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

II- CIRCUIT RLC Série en REGIME FORCE

1) Rappel: dipôles élémentaires (en convention "récepteur")

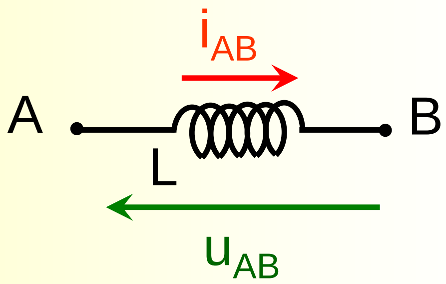
→ Conducteur ohmique de résistance R:

$$u_{AB} = V_A - V_B = R \cdot i_{AB}(t)$$



→ Bobine (self) d'inductance propre L:

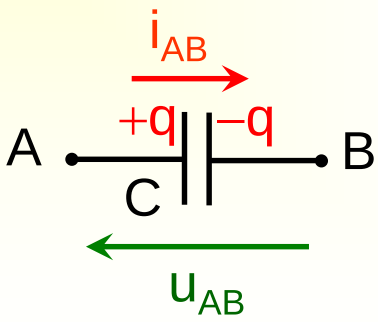
$$u_{AB} = -e = L \cdot \frac{di_{AB}}{dt}$$



→ Condensateur de capacité C:

$$u_{AB} = \frac{q}{C}$$

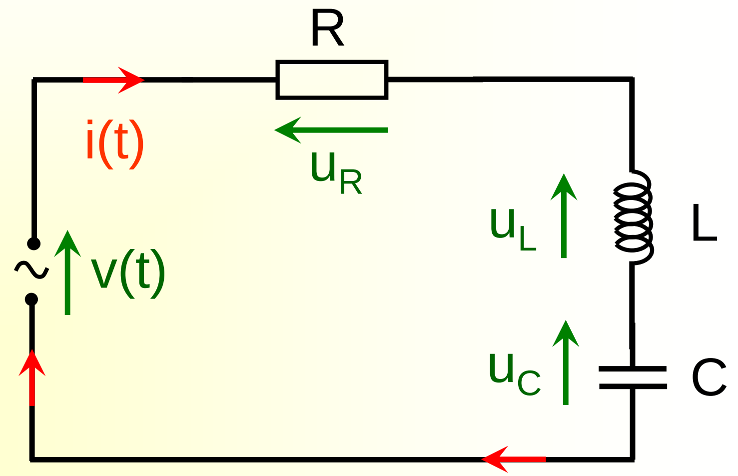
$$i_{AB} = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_{AB}}{dt}$$



2) Position du problème

$\rightarrow$ Circuit série RLC alimenté par une ddp sinusoïdale:

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$



$\rightarrow$ Problème posé:

Trouver i(t) en régime permanent

$\rightarrow$ Equadiff du système:

$$L\frac{d^2q}{dt} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_m \cos \omega t$$

$\Rightarrow$ En régime permanent (régime forcé), on cherche q(t) telle que:

$$q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{et donc} \quad \boxed{i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

$\Rightarrow$ Il faut déterminer I_m et φ pour caractériser i(t)

* I_m : amplitude de i(t)

* φ : déphasage de i(t) par rapport à v(t)

3) Méthode algébrique

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = V_m \cos\omega t$$

$$i(t) = I_m\left(\cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi\right) \qquad \times R$$

$$\frac{di}{dt} = -I_m\omega\left(\sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi\right) \qquad \times L$$

$$\int i \cdot dt = \frac{I_m}{\omega}\left(\sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi\right) \qquad \times \frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow \qquad I_m\left[\begin{array}{l}\cos\omega t\left(R \cdot \cos\varphi - L\omega \cdot \sin\varphi + \dfrac{1}{C\omega}\sin\varphi\right) \\ +\sin\omega t\left(-R \cdot \sin\varphi - L\omega \cdot \cos\varphi + \dfrac{1}{C\omega}\cos\varphi\right)\end{array}\right] = V_m \cos\omega t$$

$\Rightarrow$ Par identification:

$$I_m\left[R\cdot\cos\varphi-\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\sin\varphi\right]=V_m \qquad (1)$$

$$I_m\left[R\cdot\sin\varphi+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi\right]=0 \qquad (2)$$

$$(1)^2+(2)^2 \Rightarrow \quad R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2=\frac{V_m^2}{I_m^2}$$

$$(2) \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi=-\frac{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

$\rightarrow$ Z(ω) impédance du circuit

$$\boxed{Z(\omega)=\frac{V_m}{I_m}=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$\Rightarrow$ i(t) sera caractérisé par:

$$\begin{cases} I_m = \dfrac{V_m}{Z} \\ \operatorname{tg} \varphi = -\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

➔ **Remarques**

* $Z \geq R$

* $\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \end{cases}$ $\quad\quad \begin{matrix} \varphi_{i/v} = \varphi_i - \varphi_v \\ \varphi_{v/i} = \varphi_v - \varphi_i \end{matrix}$

➘ Dans le cas étudié, on a: $\varphi =$ déphasage de i / v

$\varphi > 0 \Rightarrow$ i est en avance sur v

$\varphi < 0 \Rightarrow$ i est en retard sur v

4) Méthode de FRESNEL

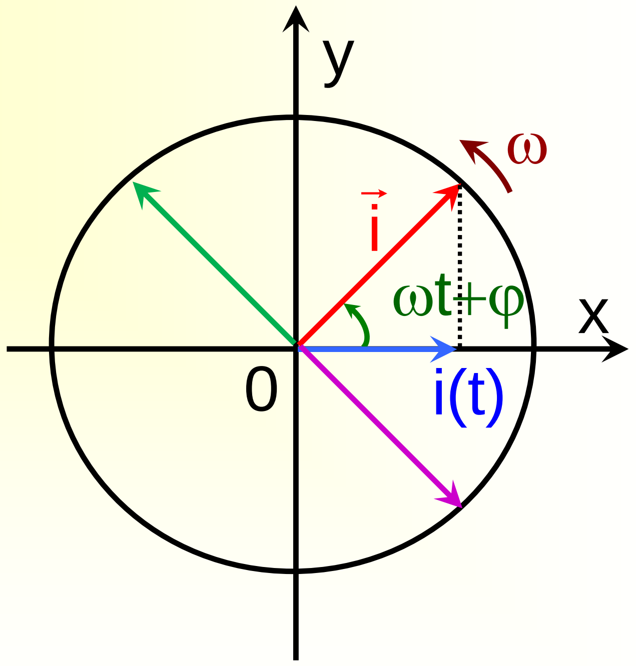
➔ Principe

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par le vecteur $\vec{i}$ de module I_m tournant avec une vitesse angulaire ω

$\rightarrow$ $i(t)$ est la projection de $\vec{i}$ sur Ox

$\rightarrow$ $Ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i \cdot dt = v(t)$ sera représentée par l'éq. vectorielle:

$$R\vec{i} + L\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \vec{i} \cdot dt = \vec{v}(t)$$



$\rightarrow$ Tous ces vecteurs tournent à la même vitesse ω $\Rightarrow$ ils forment une figure fixe tournant à la vitesse ω

➔ Application

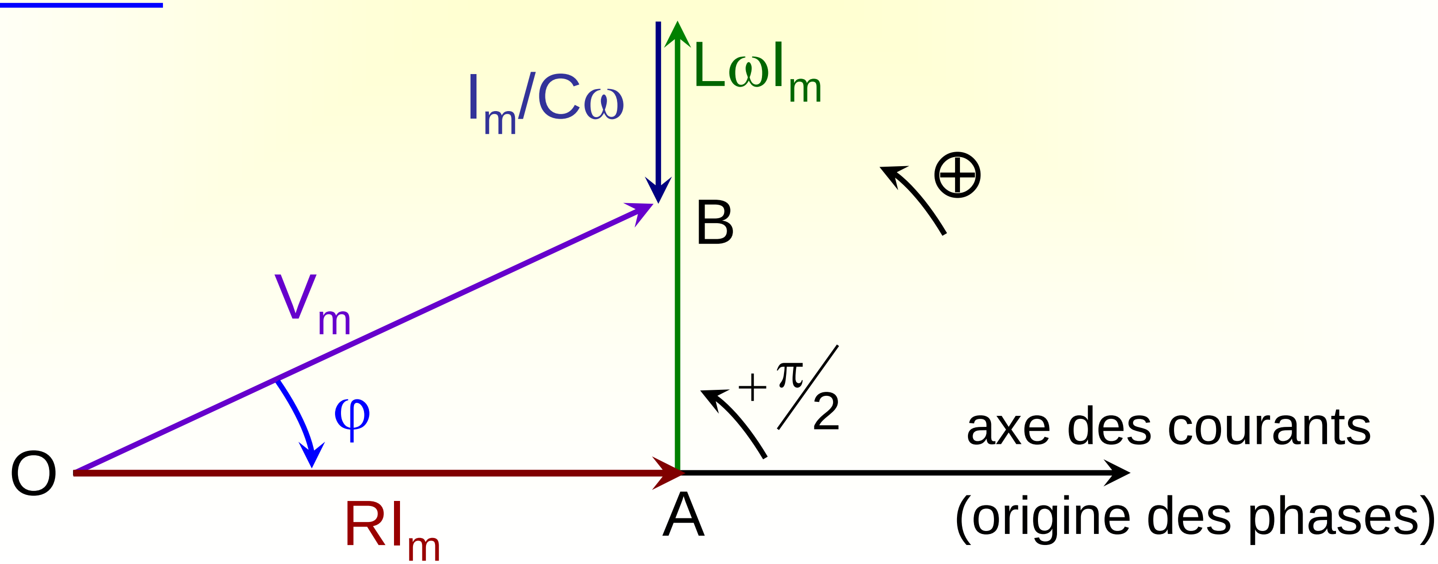
$$Ri = RI_m \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{vecteur}} (RI_m, \omega t + \varphi)$$

$$L\frac{di}{dt} = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{vecteur}} \left(L\omega I_m, \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{vecteur}} \left(\frac{I_m}{C\omega}, \omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_m \cos\omega t \xrightarrow{\text{vecteur}} (V_m, \omega t)$$

→ diagramme:



→ calcul de I_m et φ :

triangle OAB: $$V_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_m^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z(\omega) = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

et $$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$$ avec $$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

→ Conclusion:

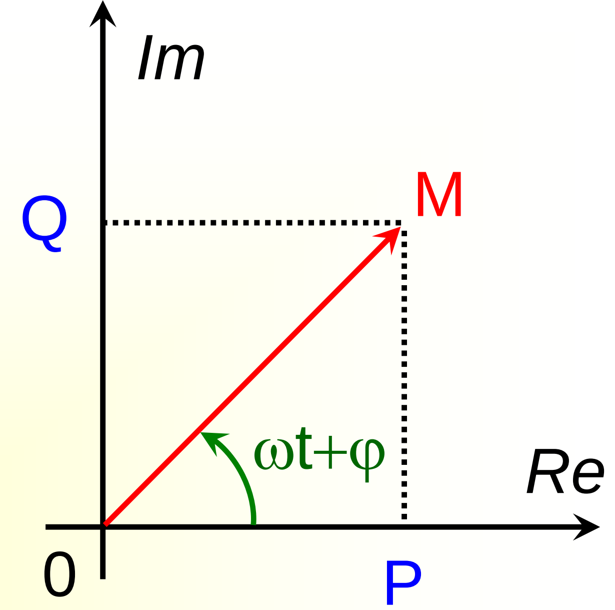
méthode simple et rapide, mais difficile à utiliser pour des circuits complexes

5) Méthode des complexes

➔ Principe

la grandeur sinusoïdale $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$

est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$



$\rightarrow$ Dans le plan complexe, $\overrightarrow{OM}$ représente le nombre complexe:

$$\overline{f(t)} = \underbrace{\mathrm{Re}\ \overline{f(t)}}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{j\ \mathrm{Im}\ \overline{f(t)}}_{\text{partie imaginaire}}$$

$\rightarrow$ On fait la transformation:

$$f(t) \rightarrow \overline{f(t)} \qquad \text{telle que} \qquad \mathrm{Re}\ \overline{f(t)} = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad f(t) \quad \rightarrow \quad \overline{f(t)} = F\left[\cos(\omega t + \varphi) + j\ \sin(\omega t + \varphi)\right]$$

$$\text{donc} \qquad \overline{f(t)} = F\ e^{j(\omega t+\varphi)} = F\ e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \overline{F}\ e^{j\omega t}$$

avec: $\bar{F} = Fe^{j\varphi}$ amplitude complexe

$$= F(\cos\varphi + j\ \sin\varphi) = \text{Re}\ \bar{F} + j\ \text{Im}\ \bar{F}$$

module: $F = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$ argument: $\text{tg}\varphi = \dfrac{\text{Im}}{\text{Re}}$

➔ Application à v(t) et i(t):

$$v(t) = V_m \cos\omega t \quad \rightarrow \quad \bar{v} = V_m\ e^{j\omega t} = \bar{V}\ e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \bar{i} = I_m\ e^{j\varphi}\ e^{j\omega t} = \bar{I}\ e^{j\omega t}$$

d'où: $\begin{cases} \bar{V} = V_m & = \text{amplitude complexe associée à } v(t) \\ \bar{I} = I_m\ e^{j\varphi} & = \text{amplitude complexe associée à } i(t) \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'amplitude complexe associée à i(t) contient les informations recherchées I_m et φ.

➔ Opérations élémentaires:

$$\overline{f_1(t)} = \overline{F}_1\ e^{j\omega t} \quad ; \quad \overline{f_2(t)} = \overline{F}_2\ e^{j\omega t}$$

* Addition:

$$\overline{f} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2 = \left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2\right)\ e^{j\omega t}$$

* Multiplication:

$$\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_2 = F_1 F_2\ e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\ e^{j2\omega t}$$

les phases s'ajoutent

* Dérivation:

$$\frac{d}{dt}\overline{f}(t) = \frac{d}{dt}\overline{F}\ e^{j\omega t} = j\omega \cdot \overline{f}$$

dériver = multiplier la grandeur complexe par $j\omega$

* Intégration:

$$\int \overline{f}(t) \cdot dt = \overline{F} \int e^{j\omega t} \cdot dt = \frac{\overline{f}}{j\omega}$$

intégrer = diviser la grandeur complexe par par $j\omega$

ex. :

$$\overline{i} = \overline{I}\ e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\overline{i}}{dt} = j\omega\,\overline{i}$$

et

$$\int \overline{i} \cdot dt = \frac{\overline{i}}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}\,\overline{i}$$

➔ Application au circuit série RLC

L'équadiff du circuit

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = v(t) = V_m \cos\omega t$$

devient $$R\bar{i} + L\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \bar{i} \cdot dt = \bar{v}(t) = \bar{V}\ e^{j\omega t}$$

$\rightarrow$ on cherche $\bar{i}(t) = \bar{I}\ e^{j\omega t}$ avec $\bar{I} = I_m\ e^{j\varphi}$

★ En remplaçant $\bar{i}(t)$ dans l'équadiff, on trouve:

$$\bar{I}\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] = \bar{V} \quad \text{d'où} \quad \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$\bar{Z}$ est l'impédance complexe du circuit série RLC

➔ Grandeurs réelles:

* Modules: $\left|\bar{V}\right| = \left|\bar{Z}\right| \cdot \left|\bar{I}\right|$ avec $\left|\bar{V}\right| = V_m$ et $\left|\bar{I}\right| = I_m$

donc $$\boxed{Z(\omega) = \left|\bar{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

* Arguments: $\mathrm{Arg}\ \bar{V} = \mathrm{Arg}\ \bar{Z} + \mathrm{Arg}\ \bar{I}$

$0 = \mathrm{Arg}\ \bar{Z} + \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = -\mathrm{Arg}\ \bar{Z}}$

c-à-d: $$\boxed{\mathrm{tg}\ \varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$$

➔ Impédance complexe des dipôles élémentaires

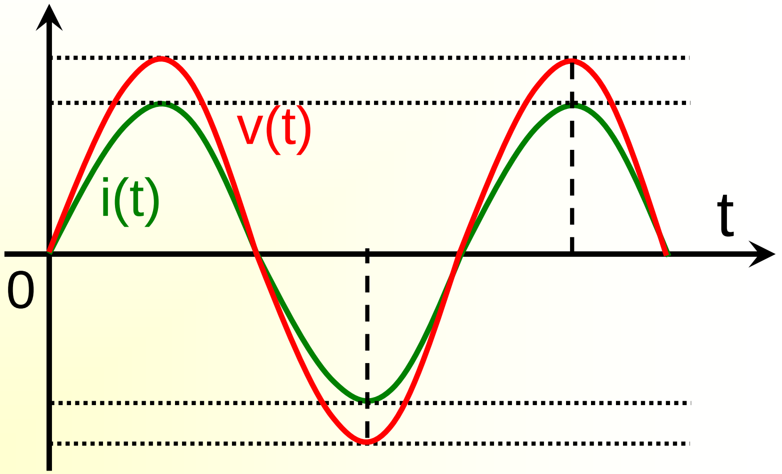
* **Résistance pure:**

$$v(t) = R\ i(t) \Rightarrow \bar{v} = R\ \bar{i} \Rightarrow \bar{V} = R\ \bar{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{Z} = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{R} \cos \omega t}$$

$\Rightarrow$ i(t) et v(t) sont en phase

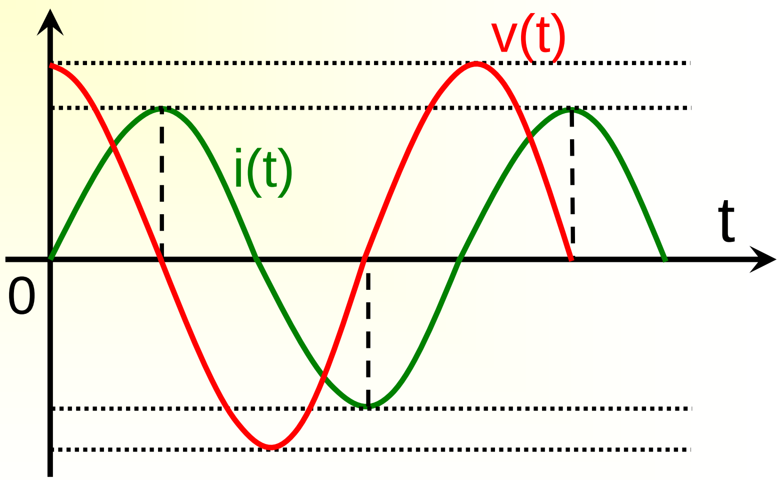


* **Bobine idéale:**

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \bar{v} = jL\omega\ \bar{i} \Rightarrow \bar{V} = jL\omega\ \bar{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{Z} = jL\omega = L\omega\ e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \varphi_L = -\text{Arg}\ \bar{Z} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

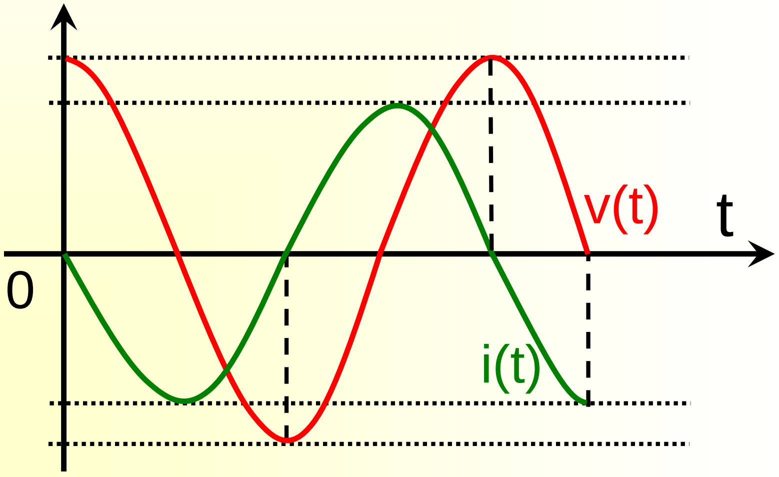


i(t) est en quadrature retard dans L

* Condensateur:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i \cdot dt \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{jC\omega}\,\bar{i} \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{jC\omega}\,\bar{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{Z} = \dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{1}{C\omega}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ \varphi_C = -\mathrm{Arg}\,\bar{Z} = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



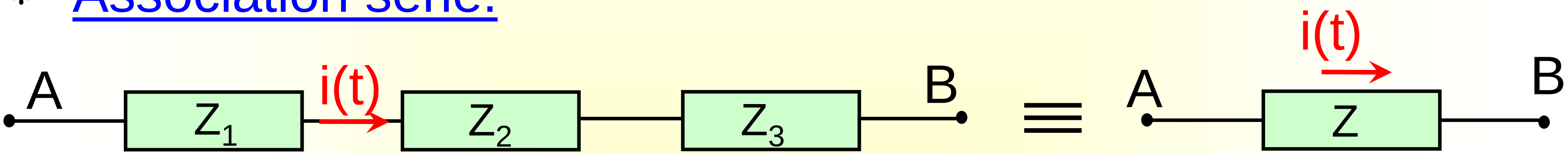
$$\boxed{i(t) = V_m C\omega \,\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

i(t) est en quadrature avance dans C

➔ Association d'impédances

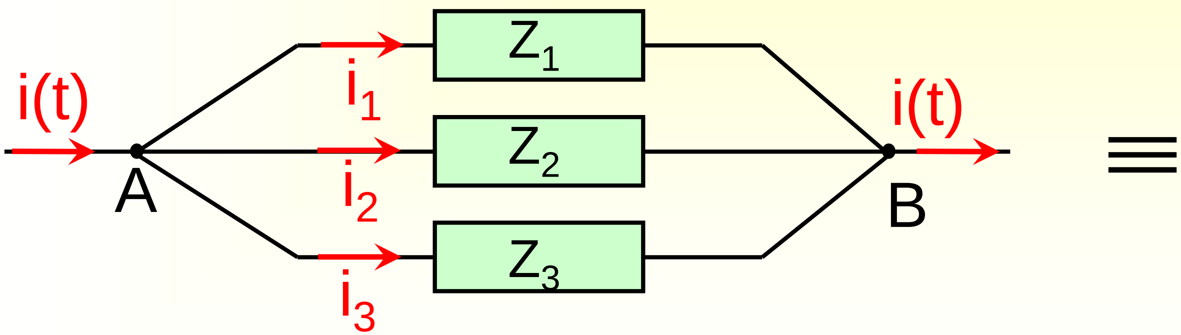
Les lois d'association des impédances complexes sont les mêmes que celles des résistances:

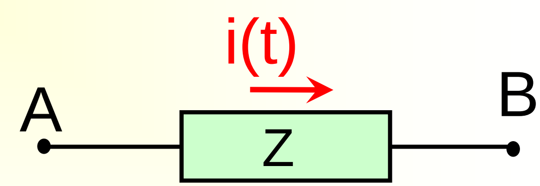
* Association série:



$$\boxed{\overline{Z} = \sum_i \overline{Z}_i}$$

* Association parallèle:





$$\boxed{\frac{1}{\overline{Z}} = \sum_i \frac{1}{\overline{Z}_i}}$$