CHAPITRE 5

DIAGONALISATION DES MATRICES

Dans tout ce chapitre, on considère un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, et un endomorphisme f de E : $f \in \mathcal{L}(E)$ et A est la matrice de f dans une base donnée de E.

5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

5.1.1 Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Dfinitions 5.1
*Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f ou de A s'il existe un vecteur u non nul de E tel que $f(u) = \lambda u$ ou $A.u = \lambda u$.*
*L'ensemble des valeurs propres est le **spectre** de f ou de A, il est noté $sp(f)$ ou $sp(A)$.*
*Tout vecteur u non nul tel que $f(u) = \lambda u$ ou $A.u = \lambda u$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.*
*On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel E_λ de E défini par $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id_E) = Ker(A - \lambda I_n)$.*

Remarque 5.1 *λ est valeur propre de f ou de $A \iff f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif $\iff f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif $\iff A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$.*

Dfinition 5.1 (Diagonalisation)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ A est la matrice de f dans une base donnée de E. f (resp. A) est dit(resp. dite) diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E(resp. une matrice de passage P inversible) telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $P^{-1}AP$) est diagonale.

5.2 Exemples de diagonalisation corrigés ou avec éléments de réponse

Exercice d'application 1 : *Exemple standard en dimension 2 détaillé*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.
Écrire la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique puis diagonaliser cette matrice.

Solution

Au début, on commence par déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Nous cherchons après à trouver les valeurs λ pour lesquelles il existe des vecteurs $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nuls tels que $f(v) = Av = \lambda v$. En utilisant la notation matricielle, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On a ainsi un système homogène, qui aura des solutions différentes du vecteur nul si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible. Ceci est équivalent à,

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 .$$

Cet exemple standard nous permet de définir le polynôme caractéristique d'une matrice carrée M de type $n \times n$ par : $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - M)$.
Il s'agit d'un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de M.
Dans notre cas, les valeurs propres de f ou de sa matrice A sont : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.
Cherchons maintenant les sous espaces propres associés à ces valeurs propres séparément.
Pour ceci on résout le système suivant :
$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec la valeur propre λ transposée à gauche et mise à l'intérieur de la matrice.

$\underline{\lambda = -1}$: Nous résolvons le système linéaire $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les deux équations sont équivalentes à $y = -x$, donc chaque vecteur $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ est solution du dernier système.

Ainsi $E_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(A + I_2) = \text{Vect}(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

$\underline{\lambda = 4}$: Nous résolvons le système linéaire $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les deux équations sont équivalentes à $y = \frac{3}{2}x$, donc chaque vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{pmatrix}$ est solution du dernier système.

Ainsi $E_4 = \text{Ker}(f - 4\,\text{Id}) = \text{Ker}(A - 4I_2) = \text{Vect}(v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$.

On remarque que $B_{new} = \{v_1, v_2\}$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ car le déterminant associé à ces deux vecteurs est $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$. La matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, elle est inversible et son inverse, après calculs, est $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

La matrice associée à l'endomorphisme f dans la base canonique est $Mat(f, B_c, B_c) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, par contre la matrice associée à l'endomorphisme f dans la nouvelle base est $Mat(f, B_{new}, B_{new}) = A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ car $f(v_1) = -v_1$ et $f(v_2) = 4v_2$. La relation liant A et A' est la formule de changement de base

$$A' = P^{-1}AP.$$

La démarche suivie est la suivante :

— Calculer le polynôme caractéristique de la matrice initiale A (donnée directement ou par un endomorphisme) noté P_A tel que $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$;

— Chercher les valeurs propres de la matrice initiale A qui sont les racines du polynôme caractéristique (en dimension 3 ou plus ($n \geq 3$) on cherche à factoriser le polynôme caractéristique en remarquant des racines évidentes et en utilisant la division euclidienne du polynôme caractéristique par $(\lambda - \lambda_i)$ où λ_i est une racine évidente)

— Déterminer les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de la matrice initiale A et choisir (de manière non unique) des bases de ces sous-espaces propres ;

— Constituer une nouvelle base qui est constituée de toutes les bases des sous-espaces propres ;

— La nouvelle matrice A' obtenue par rapport à la nouvelle base est alors <u>diagonale</u> dont les éléments diagonaux sont en fait les valeurs propres de la matrice initiale A.

— La relation liant A et A' est la formule de changement de base

$$A' = P^{-1}AP.$$

Exercice d'application 2 : *Premier exemple 3d*

Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution

On a par développement selon la première ligne ou la première colonne

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - 3) - 2(3 - (3-\lambda))$
$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) - 2\lambda = -\lambda((\lambda-1)(\lambda-4) + 2)$.

$P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$.

Enfin après factorisation, on trouve que $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$, ainsi, $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$ et A a trois valeurs propres distinctes qui sont $0, 2, 3$. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

1. Le système $\boldsymbol{AV = 0}$ a un degré de liberté : $\boldsymbol{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On choisit $\boldsymbol{V_1^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Le système $\boldsymbol{AV = 2V}$ a un degré de liberté : $\boldsymbol{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On choisit $\boldsymbol{V_1^2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Le système $\boldsymbol{AV = 3V}$ a un degré de liberté : $\boldsymbol{V}$ est de la forme $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On choisit $\boldsymbol{V_1^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{V_1^1}, \boldsymbol{V_1^2}, \boldsymbol{V_1^3}\} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

La matrice associée à cette famille est donc $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 3 : *Deuxième Exemple 3d*

Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

Comme la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base de vecteurs propres, et on va chercher P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. On a par développement selon la première ligne ou la première colonne

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4})$

$= -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}$.

On constate que 1 est une racine évidente, et on en déduit (grâce à la division euclidienne) que $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4})$.

Enfin après factorisation, on trouve que

$P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})^2$ et A a deux valeurs propres distinctes qui sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

1. Le système $A\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$ a un degré de liberté : $\boldsymbol{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\boldsymbol{V}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Le système $A\boldsymbol{V} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{V}$ a deux degrés de liberté : $\boldsymbol{V}$ est de la forme $a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

   On choisit $\boldsymbol{V}_1^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{V}_2^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ATTENTION : le choix des vecteurs propres n'est jamais unique, cela dépend de la manière dont on mène le calcul pour la résolution du système. Les seuls critères objectifs sont que ces vecteurs doivent être solution du système considéré, doivent former une famille libre et que l'on doit en choisir autant que de degrés de liberté. Ceci est nécessaire et suffisant.

On a donc $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{V}_1^1, \boldsymbol{V}_1^2, \boldsymbol{V}_2^2\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

La matrice associée à cette famille est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice d'application 4 : *Non diagonalisibilité et Trigonalisation en 2d*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

2. Expliciter P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice d'application 5 : *Non diagonalisibilité et Trigonalisation en 3d*

Trigonaliser la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A, on trouve $P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$. On commence par chercher le sous-espace propre associé à la valeur propre 3, en résolvant $AX = 3X$. Un rapide calcul montre qu'il est engendré par le vecteur propre $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, en résolvant $AX = 2X$. On trouve cette fois qu'il est engendré par un seul vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On en conclut dans un premier temps que la matrice n'est pas diagonalisable car $d_2 = \dim E_2 = 1 < m_2 = 2$ où m_2 est la multiplicité algébrique de $\lambda = 2$ alors que d_2 est la multiplicité géométrique de $\lambda = 2$. Au lieu de diagonaliser la matrice, ce qui est d'ailleurs impossible, on peut chercher à trigonaliser cette matrice.

Pour trigonaliser la matrice, il suffit de compléter la base par un troisième vecteur indépendant des deux premiers, par exemple $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $Au_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6u_1 + u_2 + 2u_3$. La matrice A est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage étant $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Il n'y a bien sûr pas unicité ni de la matrice triangulaire supérieure à laquelle A est semblable, ni de la matrice de passage.

Remarque 5.2 ***Les résultats suivants sont aussi valables pour un endomorphisme f que pour A une matrice de f dans une base donnée.***
Si l'endomorphisme f admet dans une base donnée (le plus souvent canonique) une matrice A alors on parlera de valeurs propres / Vecteurs propres de f ou de A sans faire de différence.

Proposition 5.1 (Famille libre de vecteurs propres)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de f. Alors toute famille $(u_1, \cdots, u_p)$ de p vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ est une famille libre de E.

Proposition 5.2 (Nombre de valeurs propres)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $dim(E) = n$. Le nombre de valeurs propres distinctes est inférieur ou égal à n.

Thorme 5.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est diagonalisable,*
2. *il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f,*
3. *La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E.*

Thorme 5.2 (*Condition suffisante de diagonalisation*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Proposition 5.3 (Projecteur-Involution)
Tout projecteur p (vérifiant $p \circ p = p$) de E de dimension finie (sur E_1 parallèlement à E_2 avec E_1, E_2 non réduits au s.e.v trivial $\{0_E\}$) est diagonalisable de spectre l'ensemble $\{0.1\}$.
Toute involution s (vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$) de E de dimension finie (par rapport à E_1 parallèlement à E_2 avec E_1, E_2 non réduits au s.e.v trivial $\{0_E\}$) est diagonalisable de spectre l'ensemble $\{-1.1\}$.

Proposition 5.4

1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n, si A admet une unique valeur propre λ alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.*
2. *Soit A une matrice carrée d'ordre n, si A est une matrice triangulaire dont tous les coefficients sur la diagonale sont distincts alors A est diagonalisable.*

5.2.0.1 Polynômes annulateurs

Dfinition 5.2
Soit $P \in K[X]$. Soit f un endomorphisme de E, P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.
Soit A une matrice carrée d'ordre n, P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.

Dfinition 5.3 (Polynôme caractéristique)
Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$. Si $A = [a_{i,j}]$ est une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$, $P_A(\lambda)$ est le déterminant

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}}$$

Ainsi, P_A est un polynôme de degré n.

Exemples 5.1
Voici quelques polynômes caractéristiques de matrices :
- *matrice nulle : $P_0(\lambda) = (-\lambda)^n$;*
- *matrice unité d'ordre n : $P_{I_n}(\lambda) = (1-\lambda)^n$;*
- *matrice diagonale $D = diag(\lambda_i) = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$: $P_D(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$;*
- *matrice triangulaire $T = [t_{i,j}]$: $P_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(t_{i,i} - \lambda)$.*

Proposition 5.5 (Pratique de la recherche des valeurs propres)
Les valeurs propres d'un endomorphisme f ou de sa matrice A dans une base donnée(le plus souvent canonique) sont les racines du polynôme caractéristique P_A.

Justification :
Soit f un endomorphisme de E et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans une base donnée (le plus souvent canonique).

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda & \text{valeur propre de } f \text{ ou } A \,. \\ x & \text{vecteur propre de } f \text{ ou } A \text{ associé à } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x) = Ax = \lambda x$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} det(A - \lambda \cdot I) = 0 \\ x \in E_\lambda^* = Ker^*(A - \lambda \cdot I) \end{array}\right.$$

Puisque $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, les valeurs propres de A sont donc les racines du polynôme P_A.

Proposition 5.6
$d_i = \dim E_\lambda$ est inférieur ou égal à la multiplicité de λ noté m_i en tant que racine du polynôme caractéristique P_A.

Corollaire 5.1 *A est diagonalisable si et seulement si toutes les racines de P_A appartiennent à $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ_i de P_A, la dimension $d_i = \dim E_\lambda$ est égale à la multiplicité de λ_i égale à m_i en tant que racine de P_A.*

Thorme 5.3 (*Conditions suffisantes*)

1. *Si M est une matrice symétrique alors M est diagonalisable.*
2. *Si M est une matrice d'ordre n ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) qui admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable.*

Dfinition 5.4 (Trace d'une matrice)

La trace d'une matrice (carrée) A est une application linéaire $tr : Mat(n,n,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Thorme 5.4 (*Théorème Cayley-Hamilton*)

Soit A une matrice carrée, on a

$$\boxed{P_A(A) = 0}$$

Exercice d'application 6 : *Application du Théorème de Cayley-Hamilton*

Soit A la matrice carrée d'ordre 2 donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est défini par : $P_A(x) = x^2 - 2x - 3$.
2. En déduire que $A^2 - 4A + I = O_2$ et déduire A^2 et A^{-1}.

Remarque 5.3 (★ A retenir)

Si pour une matrice carrée réelle A il existe une matrice carrée réelle P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice carrée réelle diagonale alors

1. *La matrice A est diagonalisable (par définition) ;*
2. *Les matrices A et D ont le même polynôme caractéristique ;*
3. *Les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de la matrice D ;*
4. *Les matrices A et D ont le même déterminant ;*
5. *Les matrices A et D ont la même trace ;(la trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux)*
6. *Les matrices A et D sont deux matrices qui peuvent être associées à un même endomorphisme dans deux bases différentes ; (le plus souvent A est une matrice d'un endomorphisme dans la base canonique $A = Mat(f, B_{can}, B_{can})$ et $D = Mat(f, B_{new}, B_{new})$)*
7. *$D = P^{-1}AP$ avec $D = diag(\lambda_i) \Rightarrow A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = diag(\lambda_i^n)$;*
8. $\det(A) = \det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Exercice d'application 7 :

On note e_0, e_1, et e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.
On considère l'application f qui à tout élément P de E, associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
3. a) Établir que f est un automorphisme de E. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
   b) Écrire la matrice de f^{-1} relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
4. a) Déterminer la seule valeur propre λ de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution

1. • Si P est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 alors P'' est une fonction polynômiale constante et P' est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
   Donc $f(P)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égale à 2 ce qui signifie que $f(P) \in E$.
   f est une application de E dans E.
   • Montrons que f est linéaire. Soit P et Q deux fonctions de E et a et b deux réels. On a : $f(aP + bQ) =$
   $(aP + bQ)'' - 5(aP + bQ) + 6(aP + bQ) =$
   $aP'' + bQ'' - 5aP' - 5bQ' + 6aP + 6bQ = af(P) + bf(Q)$
   On a ici utilisé la linéarité de la dérivation.
   Donc f est une application linéaire.
   • Ainsi f est une application linéaire de E dans E, c'est-à -dire $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$
2. On a :
   $$f(e_0) = e_0'' - 5e_0' + 6e_0 = 6 = 6e_0 + 0e_1 + 0e_2$$
   $$f(e_1) = e_1'' - 5e_1' + 6e_1 = 6t - 5 = -5e_0 + 6e_1 + 0e_3$$
   $$f(e_2) = e_2'' - 5e_2' + 6e_2 = 6t^2 - 10t + 2 = 2e_0 - 10e_1 + 6e_2$$
   donc la matrice A est : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$.
3. a) • La matrice A de f est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale, elle est donc inversible. On peut donc en déduire que f est bijecive et comme f est un endomorphisme de E, on peut dire que $\boxed{f \text{ est bien un automorphisme de } E.}$
   • f étant bijective, elle est en particulier injective et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0\}.}$
   b) La matrice de f^{-1} dans la base canonique est la matrice inverse de celle de f dans cette même base, c'est-à -dire la matrice inverse de A. Grace au pivot de Gauss on a :
   $$\mathcal{M}(f^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{19}{108} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
4. a) • Comme la matrice A de f est triangulaire, on lit les valeurs propres sur la diagonale.
   Donc $\boxed{f \text{ admet 6 comme unique valeur propre.}}$
   • $\boxed{f \text{ n'est donc pas diagonalisable}}$ car sinon on aurait $f = 6Id$ ce qui n'est pas le cas.