Contrôle d'Analyse numérique

(Durée 1h30)

Les documents et téléphones portables ne sont pas autorisés. On attachera une grande importance à la rédaction

Exercice 1 : Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par 15

42

72

91

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 11

15

17

Soit $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ la solution du système linéaire (S) : $Ax = b$, où $b = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-a)^i b_{k+i}$
2. Trouver un algorithme pour déterminer la solution $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ du système (S) en fonction de b et de a.

Exercice 2 : On considère le système linéaire (S) : $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système (S).
2. Ecrire la matrice A sous la forme LU, i.e. trouver L et U avec L matrice triangulaire inférieure et U matrice triangulaire supérieure. En déduire le déterminant de la matrice A.
3. Résoudre le système linéaire (S) en remplaçant A par LU et en utilisant les algorithmes de descente et de remontée.
4. Ecrire la matrice B_J obtenue en appliquant la méthode de Jacobi à A pour calculer une valeur approché de x. La méthode de Jacobi converge-t-elle ?
5. Ecrire la matrice B_{GS} de la méthode de Gauss-Seidel correspondante. Calculer le rayon spectral $\rho(B_{GS})$ de la matrice B_{GS}. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?

Exercice 3 : Soit l'équation $(E_1) : x = \tan(x)$.

1. Donner l'intervalle contenant la plus petite solution strictement positive, notée α, de l'équation (E_1). (Indication : étudier la fonction $x \to \tan(x)$)
2. Peut-on appliquer la méthode du point fixe pour résoudre l'équation (E_1), en prenant $g(x) = \tan(x)$?
3. Montrer que la solution α de (E_1) est aussi solution de l'équation $(E_2) : x = \pi + \arctan(x)$.
4. Peut-on appliquer la méthode du point fixe, pour résoudre l'équation (E_2), en prenant $g(x) = \pi + \arctan(x)$?

Corrigé de contrôle : Analyse numérique SMI 2016-2…

Ex1) Pour $n=3$

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$Ax=b \iff \begin{cases} x_1+ax_2=b_1\\ x_2+ax_3=b_2\\ \quad\quad x_3=b_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3=b_3\\ x_2=b_2-ax_3=b_2-ab_3\\ x_1=b_1-ax_2=b_1-ab_2+a^2b_3\\ \quad\quad =(-a)^0b_{0+1}+(-a)^1b_{1+1}+(-a)^2b_{2+1}\end{cases}$$

Supposons que pour $k+1\leq l\leq n$ on a

$$x_l=\sum_{i=0}^{n-l}(-a)^i b_{i+l}$$

On a

$$Ax=b \iff \begin{cases} x_n=b_n\\ x_{n-1}+ax_n=b_{n-1}\\ \vdots\\ x_k+ax_{k+1}=b_k\\ \vdots\\ x_1+ax_2=b_1\end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_k &= b_k-ax_{k+1}\\ &= b_k-a\sum_{i=0}^{n-k-1}(-a)^i b_{i+k+1}\\ &= b_k+\sum_{i=0}^{n-1-k}(-a)^{i+1} b_{i+1+k}\\ &= b_k+\sum_{j=1}^{n-k}(-a)^j b_{j+k} \qquad \underline{j=i+1}\\ &= \sum_{j=0}^{n-k}(-a)^j b_{j+k}\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k\in\{1,\dots,n\}$ $\quad x_k=\sum_{i=0}^{n-k}(-a)^i b_{k+i}$

2/ Algorithme

Pour $k=1$ à n faire

$$x_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-a)^i b_{k+i}$$

Finpour

Ex2

1)
$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b^{(0)} = b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2\times L_2 \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Remonté

$$\begin{cases} x_3 = -1/_{-1} = 1 \\ x_2 = (4 - 3\times 1)/_{-1} = -1 \\ x_1 = \left(-2 - 2\times(-1) - (-2)\times 1\right)/_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2/
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\times\det(U) = 1$$

3/ $Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

Algorithme de Descente $Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 = -2/1 = -2 \\ y_2 = (2 - 1\times(-2))/1 = 4 \\ y_3 = (3 - 2\times(-2) - 2\times 4)/1 = -1 \end{cases} \rightarrow y = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Remonté $Ux = y$

$$\begin{cases} x_3 = -1/-1 = 1 \\ x_2 = (4 - 3\times 1)/-1 = -1 \\ x_1 = (-1 - 2\times(-1) - (-2)\times 1)/1 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4/ Méthode de Jacobi

$$A = D - E - F$$

$$I = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J = D^{-1}(E+F) = I\times(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le polynôme caractéristique de B_J

$$P_{B_J}(\lambda) = \det(B_J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$$

$\Rightarrow \rho(B_J) = 0 < 1 \Rightarrow$ La méthode de Jacobi converge

Méthode de Gauss-Seidel

$$D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_G = (D-E)^{-1} F$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Donc $\det(B_G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4)$$

$$\rightarrow P_{B_G}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-4-\sqrt{32}}{2} = -2-\sqrt{8} \\ \lambda_3 = \dfrac{-4+\sqrt{32}}{2} = -2+\sqrt{8} \end{cases}$$

Il y a donc 3 valeurs propres

$0, -2-\sqrt{8}, -2+\sqrt{8}$

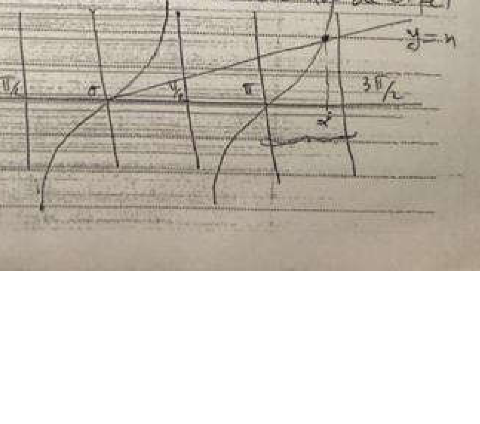
$\rho(B_G) = 2+\sqrt{8} > 1 \longrightarrow$ La méthode de Gauss-Seidel diverge.

Ex3/ On considère l'équation (E_1) : $x = tg(x)$

1/ Donnons un intervalle contenant la plus petite solution > 0, notée α, de l'équation.

Le résultat souhaité découle immédiatement de l'étude de la fct $x \rightarrow tg(x)$

Ainsi, $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$



2/ Soit $g(x) = tg(x)$

Alors α est un point fixe de g. Mais $|g'(x)| = 1 + tg^2(x) >$

Ainsi, pour ce choix, la méthode du point fixe sur

$]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ est divergente.

3/ Soit $(E_2) : x = \pi + Arctg(x)$

Montrons que $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$, Pour $x \in]\pi, 3\pi/2[$

$x = \pi + Arctg(x) \Leftrightarrow x - \pi = Arctg(x)$ et $x - \pi \in]0, \pi/2[$

$Arctg(tg(x-\pi)) = x - \pi \Leftrightarrow Arctg(tg(x)) = x - \pi$

$x \in]\pi, 3\pi/2[$

Comme $x = tg(x)$, alors $Arctg(tg(x)) = x - \pi$

$\Leftrightarrow Arctg(x) = x - \pi$

Ainsi $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$

$g(x) = \pi + Arctg(x)$

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow |g'(x)| < 1$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que

$g(]\pi, 3\pi/2[) \subset]\pi, 3\pi/2[$

Ainsi, la méthode du pt fixe, pour ce choix de g

est convergente $\forall x_0 \in]\pi, 3\pi/2[$