Chapitre 1 : Magnétostatique dans le vide

I- Définition

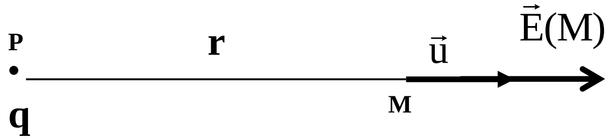
La magnétostatique est une branche de l'électromagnétisme qui a pour objet l'étude des champs magnétiques indépendants du temps crées par des courants stationnaires.

II- Champ d'induction magnétique $\vec{B}$, Loi de BIOT et SAVART

1- Cas d'une charge électrique

En électrostatique, on sait qu'une charge q placée en un point P dans le vide crée, en un point M de l'espace, un champ électrique donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.\vec{u} \quad (1)$$



où $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ est un vecteur unitaire de la direction **PM**

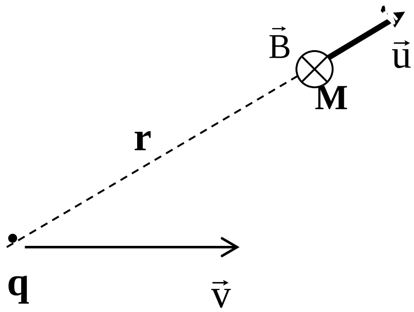
Si la charge q se déplace avec une vitesse $\vec{v}$, son mouvement engendre un courant électrique et, par suite, crée dans l'espace un champ d'induction magnétostatique $\vec{B}$ donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}.q.\vec{v}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2} \quad (2)$$

Où μ_0 est la perméabilité du vide .

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 .c} \overset{2}{=} 4.\pi.10^{-7} \quad \text{S.I.}$$

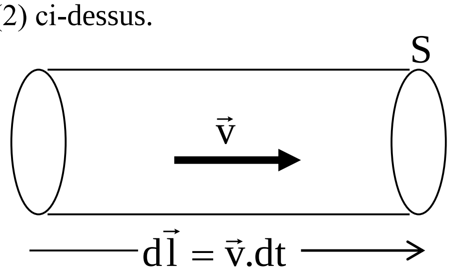
Le champ d'induction magnétique est donc perpendiculaire au plan $(\vec{v},\vec{r})$.



2- Cas d'un circuit filiforme (c.à.d. de dimension transversale négligeable)

Considérons un conducteur **C**, de section S négligeable, parcouru par un courant d'intensité constante I, dû au déplacement de charges mobiles **q** de vitesse moyenne $\vec{v}$. Chaque charge **q** crée au point M, situé à une distance **r**, un champ d'induction magnétostatique élémentaire donné par l'expression (2) ci-dessus.

Un élément du conducteur, de longueur dl telle que $d\vec{l} = \vec{v}.dt$, de section S négligeable, portant n charges mobiles par unité de volume, contient N charges : $N = n.S.dl = n.S.v.dt$ qui crée un champ élémentaire :



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}.N.q.\vec{v}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2} \qquad (3)$$

Ces N charges transportent la charge $dQ = N.q$ qui traverse la section S pendant la durée dt, l'intensité du courant transporté est :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N.q}{dt} \qquad (4)$$

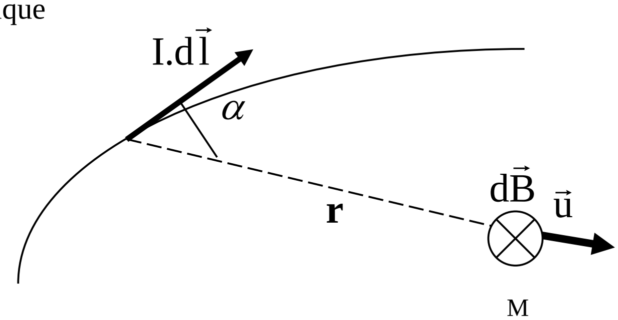
donc $N.q.\vec{v} = I.dt.\vec{v} = I.d\vec{l}$, et l'expression (3) du champ s'écrit :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}.I.d\vec{l}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2} \qquad (5)$$

C'est la loi de Biot et Savart pour un circuit filiforme, seul cas où cette loi a un sens physique.

Pour le circuit **C** le champ magnétostatique créé au point M est :

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C I.d\vec{l}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2} \qquad (6)$$



Caractéristiques de $d\vec{B}$:

- $d\vec{B}$ est perpendiculaire au plan $(d\vec{l}, \vec{r})$

- le sens est tel que le trièdre $(d\vec{l}, \vec{r}, d\vec{B})$ soit direct. Il est donné aussi par le bonhomme d'Ampère (regardant le point M et traversé par le courant des pieds vers la tête le champ est parallèle à la direction du bras gauche tendu perpendiculairement au corps du bonhomme) où par la règle du tire bouchon (on place le tire bouchon en M, si on le fait tourner dans le sens du courant, il avance dans le sens de $d\vec{B}$.

- le module est : $\|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I.dl.\sin\alpha}{r^2}$ (7)

- l'unité de B dans le système international est le Tesla (T) ou Weber par mètre carré ($Wb.m^{-2}$). $1\,Tesla = 10^4$ Gauss

3- Cas d'un circuit non filiforme

a- Courants distribués en volume

Les courants électriques sont distribués avec une densité volumique $\vec{j}$ telle que l'intensité du courant circulant dans ce volume est donnée par le flux de $\vec{j}$ à travers la section du conducteur volumique :

$$I = \iint_S \vec{j}.d\vec{S} \qquad (8)$$

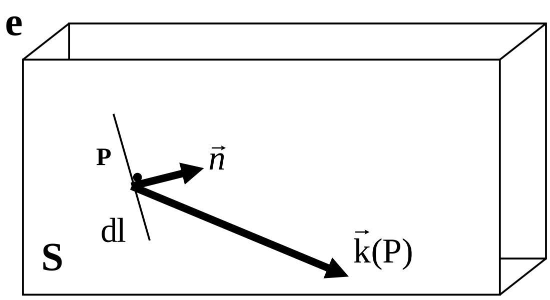
Pour $\vec{j}$ uniforme on a $I.d\vec{l} = \vec{j}.\vec{S}.d\vec{l} = \vec{j}.d\tau$, où $d\tau = S.dl$ est un élément de volume du circuit. Le champ magnétostatique d'un courant non filiforme est, alors, donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\iiint_\tau \frac{\vec{j}\,\Lambda\,\vec{u}}{r^2}.d\tau \qquad (9)$$

b- Courants distribués en surface

On considère un conducteur de volume $\tau = S \text{ x } e$, où S est la surface et e l'épaisseur négligeable devant les deux autres dimensions de la surface S. On assimile, donc, ce volume à une surface. Les charges mobiles de densité $\sigma(P)$ se déplacent à la surface S avec une vitesse $\vec{v}(P)$ et engendrent un courant distribué avec une densité surfacique $\vec{k}(P) = \sigma.\vec{v}(P)$ telle que

$$I = \int_C \vec{k}(P).\vec{n}.dl \qquad (10)$$



C'est l'intensité du courant électrique qui traverse un élément de longueur dl, tangent en P, à la surface du conducteur, dans le sens orthogonal.

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire tangent également au point P, à la surface S, et perpendiculaire à dl.

On a , donc, $\vec{j}d\tau = \vec{j}.e.dS = \vec{k}.dS$

Avec $\vec{j}.e = \vec{k}$

Ces courants surfaciques créent en un point M de l'espace un champ d'induction magnétique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\vec{k}\,\Lambda\,\vec{u}}{r^2}.dS \qquad (11)$$

III- Postulats de la magnétostatique

1èr postulat

- $\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad (12)$

Soit un volume V de l'espace de surface S: $\iiint_V \text{div}\,\vec{B}.dV = 0$

d'après le théorème de GREEN OSTROGRADSKII

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{B}.dV = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

donc

$$\oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0 \quad \forall S \qquad (13)$$

le flux du champ magnétostatique est conservatif.

2nd postulat

- $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0.\vec{j}$ (14)

où $\vec{j}$ est la densité du courant qui crée le champ $\vec{B}$

Si on calcule le flux du vecteur $\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$ à travers une surface S s'appuyant sur un contour fermé Γ et on tient compte du théorème de Stockes il vient :,

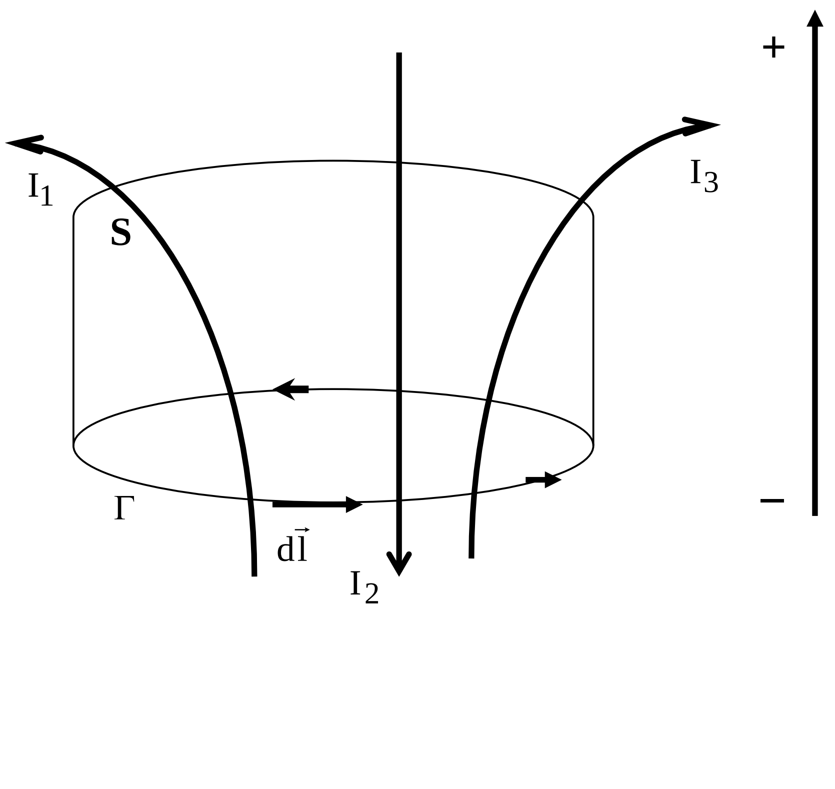
$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{B}.d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0.\iint_S \vec{j}.d\vec{S} = \mu_0.I \qquad (15)$$

soit :

$$\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0.I \qquad (16)$$

C'est le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale. Il représente la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé.

I étant l'intensité du courant total qui traverse le contour fermé Γ. Elle est égale au flux de $\vec{B}$ à travers la surface S.



L'orientation de la surface S est déduite de celle de la courbe Γ par la règle du tire bouchon : Si on fait tourner le tire bouchon dans le sens de parcours de Γ, il avance vers la face positive de S. Une intensité est comptée positivement si elle sort par la face + de S. On a donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 . \iint_{S} \vec{j}.d\vec{S} = \mu_0 .(I_1 - I_2 + I_3) \qquad (17)$$

IV- Potentiel vecteur $\vec{A}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$

Soit $\vec{b}$ un champ tel que $\vec{b} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{a}$. La divergence de $\vec{b}$ est nulle :

$$\vec{\nabla}.\vec{b} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \Lambda \vec{a}) = 0$$

car la divergence d'un rotationnel est nulle.
Si le champ $\vec{B}$ vérifie : La relation $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, il existe au moins un champ $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A}$.
On dit que $\vec{B}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$. Comme en électrostatique le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V : $\vec{E} = -\vec{\nabla}.V$.

<u>Remarque</u> :
La relation : $\vec{B} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A}$ ne définit pas $\vec{A}$ de façon univoque. En effet, soit un champ $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$, où f est une fonction de scalaire quelconque :

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{A}' = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A} + \nabla \Lambda \vec{\nabla}f = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A} = \vec{B}$$

car le rotationnel d'un gradient est nul.

Le potentiel vecteur n'est défini qu'à un gradient près (de la même manière que le potentiel électrostatique n'est défini qu'à une constante près).

Pour enlever cette indétermination, on impose au champ $\vec{A}$ de vérifier une condition supplémentaire, appelée « condition de jauge » :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ vérifie donc :

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{A} \\ \vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

1- Equation de Poisson du potentiel vecteur $\vec{A}$

Reprenons la forme locale du théorème d'Ampère (expression 14) : $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 .\vec{j}$ et introduisons y le potentiel vecteur :

$$\mu_0 .\vec{j} = \vec{\nabla} \Lambda \vec{B} = \vec{\nabla} \Lambda (\vec{\nabla} \Lambda \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

comme $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, on obtient l'équation :

$$\nabla^2\vec{A} + \mu_0.\vec{j} = 0 \qquad (19)$$

(équation de Poisson du potentiel vecteur)

2- Expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ d'une distribution de courants

a – Cas des circuits non filiformes

• **Courants volumiques**

En électrostatique, et pour une distribution finie, l'équation de Poisson du potentiel électrostatique : $\nabla^2 V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ possède une solution générale :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho.d\tau}{r} \qquad (20)$$

Si on considère un repère cartésien orthonormé direct les projections sur les axes Ox, Oy et Oz de l'équation de poisson du potentiel vecteur (équation 19):

$$\begin{cases}\nabla^2 A_x + \mu_0.j_x = 0\\ \nabla^2 A_y + \mu_0.j_y = 0\\ \nabla^2 A_z + \mu_0.j_z = 0\end{cases} \qquad (21)$$

sont mathématiquement identiques à l'équation de poisson du potentiel électrostatique.
Une solution de l'équation de Poisson du potentiel vecteur est donc, pour une distribution finie :
Suivant les trois axes

$$\begin{cases}A_x = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\iiint\frac{j_x.d\tau}{r}\\ A_y = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\iiint\frac{j_y.d\tau}{r}\\ A_z = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\iiint\frac{j_z.d\tau}{r}\end{cases} \qquad (22)$$

On peut montrer que cette solution vérifie la condition de jauge $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$.
Donc, pour une distribution fini de courants non filiformes on a :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}.d\tau}{r} \qquad (23)$$

• **Courants surfaciques**

Dans le cas des courants surfaciques, il suffit de remplacer $\vec{j}.d\tau$ par $\vec{k}.dS$, soit :

$$\int$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{k}.dS}{r} \qquad (24)$$

c – Cas des circuits filiformes

Pour les circuits filiformes (dimension transversale négligeable), on remplace $\vec{j}.d\tau$ par $I.d\vec{l}$, soit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I.d\vec{l}}{r} \qquad (25)$$

IV- Forces exercées par les champs magnétiques sur les courants

1- Force de Lorentz

Si une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ est soumise simultanément à un champ électrique et à un champ magnétique, elle subit la force :

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\,\Lambda\,\vec{B}) \qquad (26)$$

(force de Lorentz)

Cette formule n'est pas limitée aux régimes permanents (électrostatique et magnétostatique), elle s'étend à l'ensemble de l'électromagnétisme.

2- Densité volumique des forces magnétiques

Soit ρ et $\vec{v}$ respectivement la densité volumique et la vitesse d'ensemble des charges mobiles au voisinage d'un point M. Un élément de volume $d\tau$ autour de M contient la charge mobile : $dq = \rho\, d\tau$,

Si $\vec{B}$ est le champ magnétique en M, les charges contenues dans l'élément de volume $d\tau$ subissent la force magnétique :

$$d\vec{F} = dq\,\vec{v}\,\Lambda\,\vec{B} = \rho\,\vec{v}\,\Lambda\,\vec{B}\,d\tau \qquad (27)$$

sachant que la densité de courant en M est : $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$, la densité volumique de force magnétique est :

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j}\,\Lambda\,\vec{B} \qquad (28)$$

3- Force exercée sur un élément de courant filiforme

Soit un élément de longueur dl d'un fil conducteur de faible section parcouru par un courant d'intensité I et de densité $\vec{j}$.

Si $\vec{B}$ est le champ magnétique au niveau de cet élément de courant, celui-ci subit la force :

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \wedge \vec{B} \qquad (29)$$

(force de Laplace)

Caractéristiques de $d\vec{F}$:

- $d\vec{F}$ est perpendiculaire au plan $(d\vec{l}, \vec{B})$
- le sens est tel que le trièdre $(d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F})$ soit direct.

Plusieurs règles sont utilisées pour indiquer le sens d'une force magnétique :

• Règle du tire-bouchon

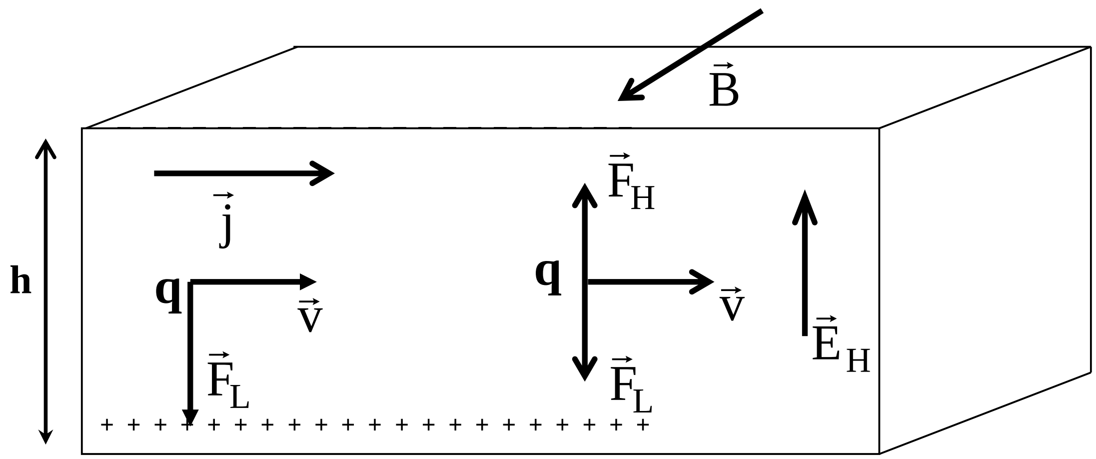
un tire-bouchon qui tourne de manière à amener son manche de $d\vec{l}$ à $\vec{B}$ progresse dans le sens $d\vec{F}$.

• Règle du bonhomme (ou observateur) d'Ampère

Le bonhomme d'Ampère étant placé sur le fil de telle sorte que le courant lui rentre par les pieds et lui sorte par la tête, regardant la direction de $\vec{B}$, la direction de $d\vec{F}$ est donnée par son bras gauche tendu perpendiculairement à son corps.

4- Effet HALL

On considère un barreau conducteur, parcouru par un courant constant I de densité $\vec{j}$, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au vecteur densité de courant $\vec{j}$.



Interprétation :
Rappelons que :

- la densité du courant la densité du courant est : $\vec{j} = nq\,\vec{v}$, où n est le nombre de charges mobiles par unité de volume dans le barreau conducteur
- la force de Laplace est : $\vec{F}_L = q\,(\vec{v}\,\Lambda\,\vec{B})$

Sous l'action de la force de Laplace les charges positives s'accumulent sur la face inférieure et par suite, des charges négatives apparaissent sur la face supérieure. Les deux faces (ou plans) créent un champ électrique $\vec{E}_H$ appelé champ de Hall. Une d.d.p. apparaît entre la face supérieure et la face inférieure du barreau.

à t = 0 $\vec{F}_H = 0$ et $\vec{F}_L \neq 0$, les charges s'accumulent sur les deux plans et par suite, il apparaît un champ électrique $\vec{E}_H$ et de la force $\vec{F}_H$ de Hall.
L'équilibre s'établit lorsque $\vec{F}_L + \vec{F}_H = \vec{0}$, soit :

$$q\,\vec{E}_H + q\,\vec{v}\,\Lambda\,\vec{B} = \vec{0}$$

multiplions cette équation par n et remplaçant $nq\vec{v}$ par le vecteur $\vec{j}$, il vient :

$$\vec{E}_H = -\frac{1}{nq}\,\vec{j}\,\Lambda\,\vec{B} \qquad (30\ )$$

soit encore :

$$\vec{E}_H = -R_H\,\vec{j}\,\Lambda\,\vec{B} \qquad (31)$$

où $R_H = \dfrac{1}{nq}$ est la constante de Hall.
La d.d.p. entre les deux plans chargés est :

$$V = h.E_H = h.R_H.j.B = h.R_H.\frac{I}{S}.B \qquad (32)$$

V- Dipôle magnétostatique

1- Vecteur surface d'un contour
Soients M un point quelconque d'un contour C et O une origine d'un repère cartésien.
$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

On définit le vecteur surface du contour C par :

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r} \wedge d\vec{r} \qquad (33)$$

Si le contour C est plan le vecteur $\vec{S}$ est perpendiculaire à ce plan.

2- Moment magnétique

On appelle moment magnétique d'un circuit de vecteur surface $\vec{S}$ parcouru par un courant d'intensité I :

$$\vec{M} = I.\vec{S} = \frac{I}{2}\oint_C \vec{r} \wedge d\vec{r} \qquad (34)$$

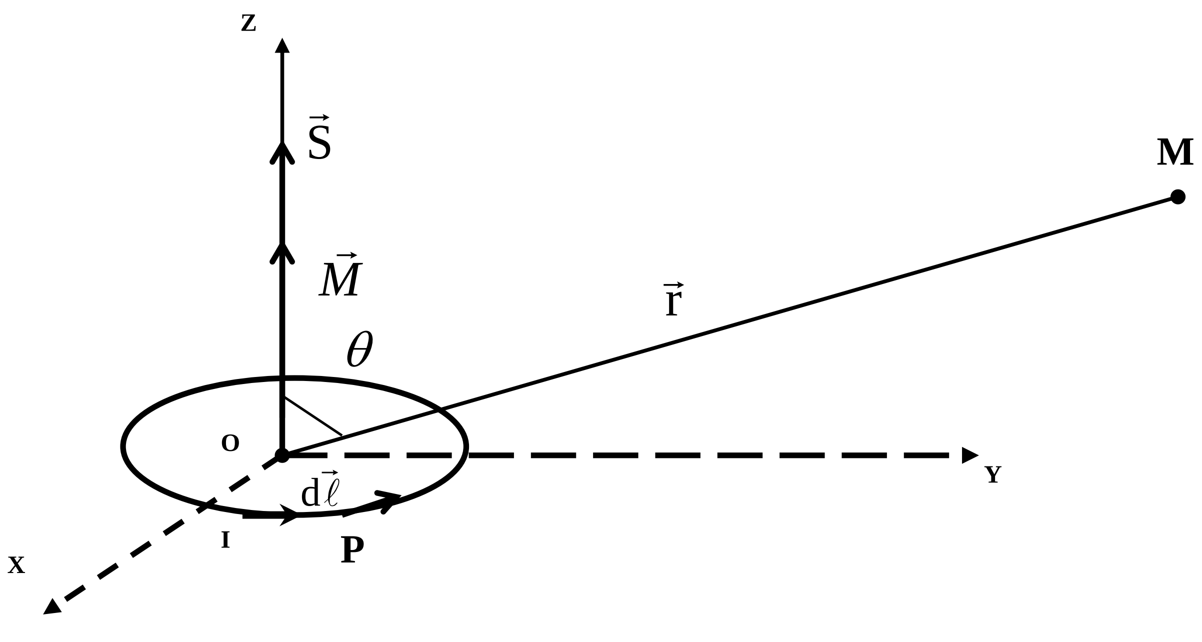
le module s'exprime en $A.m^2$

3- Dipôle magnétostatique

a- Définition

Une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I, dont les dimensions sont assez petites devant la distance à un point M ($R \ll r$) ou l'on étudie son effet est appelé dipôle magnétique.

b- Potentiel vecteur créé par un dipôle magnétostatique en un point M de l'espace



avec $\vec{M} = I.\vec{S}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et $\theta = (\vec{M}, \vec{r})$

Soit $\Re\,(O, X, Y, Z)$ Un repère orthonormé direct tel que l'axe OZ est perpendiculaire à la spire de même sens que $\vec{M}$ et OX et OY deux axes du plan de la spire. Le point M appartient au plan (YOZ)

Un élément de courant $\mathrm{I}d\vec{\ell}$ centré en P crée au point M de l'espace un potentiel vecteur :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{I}d\vec{\ell}}{\mathrm{PM}}$$

Soient :

$$\psi = (\vec{OX}, \vec{OP}) \;\; ; \;\; P\begin{pmatrix} R\cos\psi \\ R\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; d\vec{\ell}\begin{pmatrix} -R\sin\psi\, d\psi \\ R\cos\psi\, d\psi \\ 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; M\begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{PM} = \sqrt{R^2 - 2\,R\,r\sin\theta\sin\psi + r^2}$

Le potentiel vecteur $\vec{A} = \displaystyle\int_{\text{spire}} d\vec{A}$ appartient au plan XOY et de sens opposé à OX.

En remplaçant PM par son expression et $d\vec{\ell}$ par sa composante suivant OX, et en tenant compte que $R \ll r$ on démontre que le potentiel dû au dipôle au point est donné par :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (35)$$

c- Champ magnétostatique créé par le dipôle

Les composantes de $\vec{B}$ sont déduites de $\vec{A}$ à partir de la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en utilisant les composantes du rotationnel en coordonnées sphériques. On obtient alors :

$$\vec{B}\begin{cases} B_r = \dfrac{2\mu_0 M\cos\theta}{4\pi\, r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0 M\sin\theta}{4\pi\, r^3} \\ B\varphi = 0 \end{cases} \qquad (36)$$

Ces composantes sont formellement identiques à celles du champ électrostatique créé par un dipôle électrique.

$$E_r = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \quad , \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

d- Energie potentielle d'un dipôle magnétostatique plongé dans un champ extérieur

L'énergie potentielle d'un dipôle de moment magnétique $\vec{M}$ en présence d'un champ magnétostatique extérieur $\vec{B}$ est donnée par :

$$E_p = -\vec{M}.\vec{B} \qquad (37)$$

On remarquera l'analogie avec celle d'un dipôle électrostatique de moment $\vec{p}$ placé dans un champ électrique $\vec{E}$:
$$E_p = -\vec{p}.\vec{E}$$

Sous l'action du champ extérieur le dipôle sera soumis à :

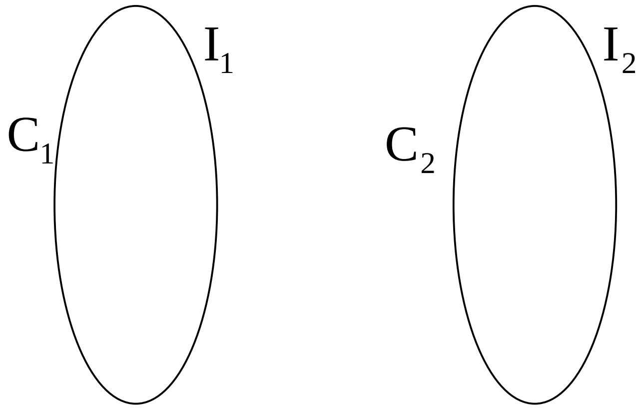
- un couple : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$
- une force : $\vec{F} = (\vec{M}.\overrightarrow{grad})\,\vec{B}$

Comme en électrostatique le couple tend à aligner le moment du dipôle avec le champ appliqué.

VI- Induction mutuelle et induction propre des circuits

1- induction mutuelle

Soient deux circuits C_1 et C_2 parcourus par des courants I_1 et I_2.



Le circuit C_1 envoie dans le circuit C_2 un flux ϕ_{12} proportionnel à I_1, de la forme :
$$\phi_{12} = M_{12}\, I_1 \qquad (38)$$
M_{12} est le coefficient d'induction mutuelle de C_1 sur C_2. Il dépend de la position des deux circuits.
ϕ_{12} peut être positif ou négatif. Il en est de même de M_{12} dont le signe dépend des sens des courants I_1 et I_2.
De même C_2 crée dans C_1 un flux ϕ_{21} proportionnel à I_2 :
$$\phi_{21} = M_{21}\, I_2 \qquad (39)$$
On montre que :
$$M_{12} = M_{21} = M$$
Le coefficient M commun est appelé coefficient d'induction mutuelle des deux circuits ou inductance mutuelle.

2- inductance propre d'un circuit

Soit un circuit C parcouru par un courant I. Ce circuit crée un champ d'induction magnétique. Il est traversé par un flux d'induction magnétique créé par lui même, donc proportionnel à I.
$$\phi = L\, I \qquad (40)$$

Le coefficient de proportionnalité L est l'inductance propre ou coefficient d'auto-induction. Il est toujours positif et dépend des caractéristiques géométriques du circuit.

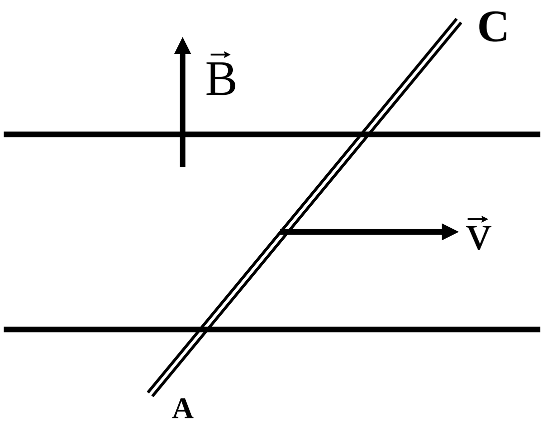
Remarque :
M et L ont les mêmes dimensions. Dans le système MKSA l'unité est le Henry (H).

VII- Phénomènes d'induction

En 1831 FARADAY, a montré l'existence des phénomènes d'induction, c'est à dire l'apparition d'une force électromotrice dans des circuits qui sont, ou bien mobiles dans un champ d'induction magnétique constant, ou bien immobiles dans un champ magnétique variable. Cette découverte montrait la possibilité de produire de l'électricité à partir du mouvement.

1- Circuit électriquement isolé en mouvement dans un champ d'induction magnétique uniforme.

On considère une barre métallique AC de longueur ℓ, en mouvement sur deux rails en matériau isolant, dans un champ $\vec{B}$ uniforme qui lui est perpendiculaire.



Si on déplace la barre conductrice avec une vitesse $\vec{v}$, ses charges électriques subissent la force magnétique : $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

Les charges positives se dirigent vers A et les charges négatives vers C. Tout se passe comme si les charges étaient soumises à un champ électrique $\vec{E}_m$ appelé champ électromoteur, tel que :

$$\vec{F} = q\,\vec{E}_m \qquad \text{avec} \qquad \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \qquad (41)$$

L'extrémité C de la barre se charge négativement et l'extrémité A positivement. Il apparaît donc un champ électrostatique $\vec{E}_S$ qui s'oppose au champ électromoteur.

$$\vec{E}_S = -\vec{E}_m$$

La barre conductrice se comporte comme un générateur en circuit ouvert de force électromotrice :

$$e = \int_C^A \vec{E}_m.d\vec{\ell} = \vec{E}_m.\vec{\ell} = (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{\ell} = \vec{B}.(\vec{\ell} \wedge \vec{v}) \qquad (42)$$

La barre conductrice AC se déplace d'une longueur $d\vec{h}$ pendant la durée dt tel que $d\vec{h} = \vec{v}.dt$. Elle balaie la surface :

$$d\vec{S} = d\vec{h} \wedge \vec{\ell} = \vec{v}.dt \wedge \vec{\ell} = -(\vec{\ell} \wedge \vec{v})dt$$

donc

$$e = -\frac{d\vec{S}}{dt}.\vec{B}$$

Or $\vec{B}.d\vec{S}$ est le flux de $\vec{B}$ à travers la surface dS, d'où :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (43)$$

(loi de FARADAY)

Toute variation du flux de $\vec{B}$ à travers un circuit produit une force électromotrice d'induction dans ce circuit. C'est la loi de FARADAY.
Lorsqu'on ferme le circuit un courant induit prend naissance. Le sens de ce courant induit est tel qu'il s'oppose à la variation du flux inducteur. C'est la loi de LENZ.

2- Circuit électriquement isolé immobile dans un champ d'induction magnétique lentement variable avec le temps.

Puisque $\vec{B}$ varie, il en est de même du flux d'induction à travers le circuit. La f.é.m. d'induction qui prend naissance dans le circuit est donnée par la relation (43). Le flux à travers le circuit est :

$$\phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{A}.d\vec{S} = \oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}$$

où la surface S s'appuyant sur le contour fermé C.
d'où :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.d\vec{\ell} = \oint_C \vec{E}_m.d\vec{\ell}$$

on en déduit donc :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (44)$$

Remarque :
Ce champ électromoteur possède des propriétés différentes du champ électrostatique. En particulier, sa circulation le long d'une courbe fermée n'est pas nulle.
En général on écrira le champ électrique produit par un circuit dont le courant varie lentement avec le temps :

$$\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_S = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\,V \qquad \mathbf{(45)}$$