CHAPITRE 3

CALCULS MATRICIELS

3.1 Matrices

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 3.1
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
*Une **matrice** $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.
L'élément a_{ij} est un scalaire appartenant au corps $\mathbb{K}$ qui est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Notation 3.1
L'ensemble des matrices indicées par $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $p = n$ est appelé ensemble des matrices carrées d'ordre n et sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.1
- ➔ *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.*
- ➔ *a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la $2^{\text{ième}}$ ligne et de la $3^{\text{ième}}$ colonne, il vaut 5.*

Définition 3.2
Soit A une matrice $n \times p$.

- ➤ *Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$*
- ➤ *Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$*
- ➤ *Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- ➤ *La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.*

Exemple 3.2
- ➔ *La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.*
- ➔ *La matrice $N = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 12 & -11 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.*
- ➔ *La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.*
- ➔ *La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.*

3.1.2 Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, A est appelée matrice **triangulaire supérieure** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, A est appelée matrice **triangulaire inférieure** :

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée **matrice diagonale** :

Exemple 3.3

➔ *Matrice triangulaire supérieure :* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

➔ *Matrice triangulaire inférieure :* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

➔ *Matrice diagonale :* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Définition 3.3 (Matrice unité)
La matrice unité d'ordre n notée I_n avec n entier naturel non nul est la matrice carrée d'ordre n diagonale dont tous les termes de la diagonale sont égaux à 1.

Exemple 3.4

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Opérations sur les matrices

Propriété 3.1 (Egalité de deux matrices)
*Les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de dimension $n \times p$ sont **égales** ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.*

Propriété 3.2 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)
Si $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple 3.5
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

alors $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times 1 & -2 \times (-2) \\ -2 \times 0 & -2 \times -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété 3.3 (Somme de deux matrices de même taille)
Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple 3.6
Somme de deux matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3.1
A, B et C désignent des matrices ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. k et k' sont deux réels. O la matrice nulle ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. On a :

- $A + B = B + A\,;\ (A + B) + C = A + (B + C)\,;$
- $A + O = A\,;\ A + (-A) = O\,;$
- $k(A + B) = kA + kB\,;\ (k + k')A = kA + k'A\,;$
- $k(k'A) = (kk')A\,;\ 1A = A.$

Proposition 3.1
Pour $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \ell \leq p$, notons $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui sur la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne qui vaut 1.
*Alors $\{E_{k\ell},\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq \ell \leq p\}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.*

Exemple 3.7
Considérons le cas où $n = 2$, $p = 3$.

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.1 (*Structure sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension np.

Propriété 3.4 (Produit de deux matrices)
Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = (c_{ik})$ définie par $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$.

Remarque 3.1 *Le produit de A par B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Illustration

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1k} & \\ & \vdots & \\ & b_{jk} & \\ & \vdots & \\ & b_{pk} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \dots & \dots & c_{ik} & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 3.8

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times1+2\times2+3\times5 & 5\times7+2\times4+3\times1 \\ 4\times1+2\times1+4\times5 & 4\times7+4+4\times1 \\ 6\times1+3\times2+1\times5 & 6\times7+3\times4+1\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 46 \\ 26 & 36 \\ 17 & 55 \end{pmatrix}$$

Exercice d'application 1 : *Produits possibles ?*

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rappel 3.1
Pour que le produit AB soit bien défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Solution :

1. Puisque A et B sont deux matrices carrées de même ordre, les deux produits AB et BA sont possibles. On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $AB = BA = 0$ alors que ni A ni B ne sont nulles.

2. Le produit AB n'est pas défini car A a trois colonnes et B deux lignes. Pour BA, on trouve

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Le produit BA n'est pas défini. En revanche, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice d'application 2 : *Produit particulier*

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -1,5 & 2 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $AB = I_3$ et $BA = I_3$.

Propriété 3.5
Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.

3.1.4 Matrices inversibles

Dans ce paragraphe, on ne considère que des matrices **carrées**.

Définition 3.4
On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I$ et dans ce cas on note
$B = A^{-1}$ appelée matrice **inverse** *de A.*

Remarque 3.2 *Si B existe, elle est la seule à vérifier cette propriété.*
En effet, si $AB = BA = I$ et $AC = CA = I$, on écrit

$$\begin{aligned} C(AB) &= CI = C \\ &= (CA)B = IB = B \end{aligned}$$

et donc $B = C$.

Théorème 3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\Big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I\Big) \iff \Big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I\Big)$$

qui équivaut aussi à A inversible (et alors $A^{-1} = B$).

Notation 3.2 *On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 3.2
Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors
$A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
Si en plus $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exemple 3.9

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors A^{-1} existe et vaut : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -1,5 & 2 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car on a déjà vérifié que $AB = I_3$ donc $A^{-1} = B$.

3.1.5 Transposition

Définition 3.5
La transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ est la matrice $A^t = (a_{ji})$ de taille $p \times n$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A : $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

Exemple 3.10
Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *a pour transposée* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

De même, la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ *a pour transposée* $B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriétés 3.2
Si A est de dimension (m, n), alors A^t est de dimension (n, m). En particulier, si A est carrée d'ordre n, alors A^t a le même format. La transposée d'une matrice-colonne est une matrice-ligne, et réciproquement. Enfin, $(A^t)^t = A$ pour toute matrice A.

Définition 3.6
Une matrice carrée A est dite symétrique si elle vérifie : $A^t = A$.
Si n est l'ordre de A ceci équivaut à : $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, a_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple 3.11
la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ *est symétrique. On a* $a_{ij} = a_{ji}, \forall (i,j) \in [\![1; 3]\!]^2$.

Définition 3.7
Une matrice carrée A est dite antisymétrique si elle vérifie : $A^t = -A$.
Si n est l'ordre de A ceci équivaut à : $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, a_{i,j} = -a_{j,i}$

Exemple 3.12
la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique. On a* $b_{ij} = -b_{ji}, \forall (i,j) \in [\![1; 3]\!]^2$.

Proposition 3.3
1. $(A + B)^t = A^t + B^t$ *; pour toutes matrices A, B de même taille $n \times p$,*
2. $(\lambda A)^t = \lambda (A)^t$ *; pour toute matrice A de taille quelconque $n \times p$;*
3. $(A \times B)^t = B^t \times A^t$ *; pour toute matrice A de taille quelconque $n \times p$ et pour toute matrice B de taille quelconque $p \times m$.*

Exercice d'application 3 :
Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\mathcal{S}_n(R)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Donner la décomposition sur cette somme directe de $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3.2 Matrice et applications linéaires

Définition 3.8 (Matrice de coordonnées d'un vecteur dans une base)
Soit $B = \{f_1, ..., f_n\}$ une base d'un espace vectoriel de F de dimension n.
Soit $u \in F$, $\exists !(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $u = x_1 f_1 + ... + x_n f_n$.

On note $mat_B(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *la matrice de u dans B.*

Définition 3.9 (Matrice d'une famille de vecteurs)
Si $\forall j \in \{1, ..p\}$, $u_j \in F$ et

$$mat_B(u_j) = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ . \\ . \\ x_{n,j} \end{pmatrix}, \text{ alors : } mat_B(u_1, ..., u_p) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & . & . & x_{1,p} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{n,1} & . & . & x_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.10 (Matrice de passage entre deux bases)
On note $mat_B(B')$ la matrice de passage de B à B'. On la note P.

$$\boxed{P = mat_B(B')}$$

Exemple 3.13
Nous considérons tout au long de cette section (fin de chapitre 3) les exemples suivants :
Exemple 2d - *On considère ici $E = F = \mathbb{R}^2$ et $B_1 = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$,*
$B_1' = \{u_1, u_2\} = \{(1,1), (1,-1)\}$.

Exemple 3d - *On considère ici* $E = F = \mathbb{R}^3$ *et* $B_2 = \{i, j, k\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, B_2^{'} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1),(0,1,-1),(0,0,2)\}$.

Déterminons $mat_{B_1}(B_1^{'})$, $mat_{B_2}(B_2^{'})$.

Proposition 3.4 (Coordonnées d'un vecteur dans deux bases)
On note B *et* $B^{'}$ *deux bases de* E.
On note $P = mat_B(B') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *la matrice de passage de* B *à* $B^{'}$.
Soit $u \in E$. *On pose* $X = mat_B(u)$ *et* $X' = mat_{B'}(u)$
On obtient la relation :

$$\boxed{X = PX', (i.e.) \quad mat_B(u) = mat_B(B')mat_{B'}(u)}$$

De plus, P *est inversible, et son inverse est :* $P^{-1} = mat_{B'}(B)$.

Exemple 3.14 (Donnés lors des séances de cours en amphi)

Définition 3.11 (Matrice d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $B_E = \{e_1, ..., e_p\}$ *une base de* E *et* $B_F = \{f_1, ..., f_n\}$ *une base de* F.
Soit M *la matrice de* f *dans* B_E, B_F *:*

$$M = mat_{B_E,B_F}(f) = mat_{B_F}(\{f(e_1), ..., f(e_p)\})$$

Le nombre de colonnes de la matrice est défini par la dimension de l'espace de départ p, *celui des lignes par la dimension de l'espace d'arrivée* n.

Exemple 3.15
Nous considérons les exemples suivants :
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$
5. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x, y) = (2x - y, -x + \frac{1}{2}y)$
6. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, h(x, y, z) = (x + y, y - z)$.
Déterminer pour chacune des applications linéaires ci-dessus la matrice associée en considérant les bases canoniques de E *et* F.

Propriétés 3.3 (Cas Particuliers)
a) *La matrice de l'application nulle* $\in \mathcal{L}(E, F)$ *est la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{dim(F),dim(E)}(\mathbb{K})$.
b) *La matrice d'un endomorphisme de* E *est une matrice carrée d'ordre* $\dim(E)$.
c) *La matrice de l'identité est* I_n.
d) *La matrice de l'homothétie de rapport* k *est* kI_n.

Proposition 3.5 (Coordonnées de l'image d'un vecteur)
Soient B_E *une base de* E, B_F *une base de* F. *Soit* $u \in E$.
Posons $M = mat_{B_E,B_F}(f)$, $X = mat_{B_E}(u)$, $Y = mat_{B_F}(f(u))$. *Alors :*

$$\boxed{Y = M.X, \quad mat_{B_F}(f(u)) = mat_{B_E,B_F}(f).mat_{B_E}(u)}$$

Théorème 3.3
Si f *est une application de* E *dans* F *tel que* $\exists M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *tel que* $\forall u \in E$ *on a* $mat_{B_F}(f(u)) = M.mat_{B_E}(u)$ *est vérifiée, alors* f *est une application linéaire.*

Exemple 3.16 (Donnés lors des séances de cours en amphi)

Proposition 3.6 (Unicité de la matrice, pour les bases fixes)
Soient B_E, B_F *des bases de* E *et de* F, *avec* $\dim(E) = n, \dim(F) = p$. *Soit :*

$$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$f \to mat_{B_E,B_F}(f)$$

φ *est une application linéaire bijective. De plus* $(f = g) \Leftrightarrow (mat_{B_E,B_F}(f) = mat_{B_E,B_F}(g))$.

Corollaire 3.1 (Matrice d'une combinaison linéaire de deux éléments de L(E,F))

$$\boxed{\varphi(f + \lambda g) = mat_{B_E,B_F}(f + \lambda g) = mat_{B_E,B_F}(f) + \lambda mat_{B_E,B_F}(g)}$$

Proposition 3.7
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, B_E, B_F *des bases de* E *et* F. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $x \in E$. *Supposons que* $X = mat_{B_E}(x)$ *et* $Y = mat_{B_F}(f(x))$, *et qu'on obtient :*

$$\boxed{Y = AX. \text{ Alors } A = mat_{B_E,B_F}(f).}$$

Définition 3.12 (Composée d'applications linéaires)
Soient E, F, G *des espaces vectoriels de dimensions finies, et de bases respectives* B_E, B_F, B_G. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. *Alors :*

$$\boxed{mat_{B_E,B_G}(gof) = mat_{B_F,B_G}(g) \times mat_{B_E,B_F}(f).}$$

Proposition 3.8 (Matrice inversible et isomorphisme - Endomorphisme)
Si f *est un isomorphisme de* E *dans* F, *alors* $mat_{B_E,B_F}(f)$ *est inversible et :*

$$\boxed{(mat_{B_E,B_F}(f))^{-1} = mat_{B_F,B_E}(f^{-1}).}$$

Si f *est un endomorphisme, on a :*

$$\boxed{(mat_{B_E}(f))^n = mat_{B_E}(f^n)}$$

où $f^n = fofo\cdots of$ *avec la composition est répétée* n *fois.*

Proposition 3.9 (Changement de bases)
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $B_E, B_{E'}$ des bases de E. Soient $B_F, B_{F'}$ des bases de F.
On pose : $M = mat_{B_E,B_F}(f)$, $M' = mat_{B_{E'},B_{F'}}(f), P = mat_{B_E}(B_{E'}), Q = mat_{B_{F'}}(B_F)$,
alors : $M' = Q^{-1}MP$.
Si f est un endomorphisme ($F = E$) :

$$\boxed{M' = P^{-1}MP}$$

3.3 Rang de vecteurs et de matrices

Définition 3.13 (Rang d'une famille de vecteurs)
Soit F un espace vectoriel de dimension n.
On appelle rang d'une famille $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ de vecteurs de F et on note $\mathrm{rg}(\{u_1, u_2, \dots, u_k\})$, la dimension du sous espace vectoriel engendré par cette famille.

$$\boxed{\mathrm{rg}(\{u_1, u_2, \dots, u_k\}) = \dim(Vect\{u_1, u_2, \dots, u_k\}).}$$

Exemple 3.17 (Donnés lors des séances de cours en amphi)

Proposition 3.10
- *$rg(\{u_1, \dots, u_k\}) \leq k$ avec égalité si et seulement si $\{u_1, \dots, u_k\}$ est libre.*
- *$rg(\{u_1, \dots, u_k\}) \leq n$ avec égalité si et seulement si $\{u_1, \dots, u_k\}$ est génératrice.*

Proposition 3.11
Soit f une application linéaire de E dans F. Soit $\{u_1, \dots, u_k\} \subset E$. Alors $rg(\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)\}) \leq rg(\{u_1, \dots, u_k\})$.
En particulier, si f est bijective, l'égalité est vraie.

Rappel 3.2 (Rang d'une application linéaire)
On rappelle que le rang d'une application linéaire f est la dimension du s.e.v $\mathrm{Im}(f)$: $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Propriétés 3.4
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$.
- *$rg(f) \leq p$ avec égalité si et seulement si f est injective.*
- *$rg(f) \leq n$ avec égalité si et seulement si f est surjective.*
- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $rg(\lambda f) = rg(f)$.*

Remarque 3.3 *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$ alors $rg(f) \leq \min(p,n)$.*

Exemple 3.18 (Donnés lors des séances de cours en amphi)

Définition 3.14 (Rang d'une matrice)
On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{rg}(A)$, la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par les colonnes de A.
Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{ij}$, $C_i = (a_{1i}\, a_{2i} \dots, a_{ni})^t$ est le i-ème vecteur colonne de A et $rg(A) = \dim(Vect(\{C_1, C_2, \dots, C_n\})$.

Théorème 3.4

1. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$ où $M = mat_{B_E,B_F}(f)$.*
2. *$rg(A) = rg({}^tA)$, c'est à dire si $L_i = (a_{i1}\, a_{i2} \dots a_{im})$ est le i-ème vecteur ligne de A, alors $rg(A) = \dim(Vect(\{L_1, \dots, L_m\}))$.*
3. *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = mat_{B_E,B_F}(f)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$ alors*

$$\boxed{M \text{ est inversible } \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M) = n \Leftrightarrow \text{ les colonnes(resp lignes) de } M \text{ sont libres}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Leftrightarrow f \text{ est inj.} \Leftrightarrow f \text{ est surj.} \Leftrightarrow f \text{ est bij.}}$$

3.4 Matrices de projection et de symétrie

Théorème 3.5
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, et soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice associée à f dans une base donnée de E.
f est une projecteur(donc une projection) vérifiant $fof = f$ si et seulement si $A^2 = A$.
f est une involution(donc une symétrie) vérifiant $fof = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $A^2 = \mathrm{Id}_n$.

Corollaire 3.2
En réutilisant les notations du théorème précédent, on a :

1. *Si $A^2 = A$ alors f est une projection sur $F = \{u \in E, Au = u\} = \mathrm{Im}(f)$ dirigée par $G = \{u \in E, Au = 0\} = \mathrm{Ker}(f)$.*
2. *Si $A^2 = \mathrm{Id}_n$ alors f est une symétrie par rapport à $F = \{u \in E, Au = f(u) = u\} = Inv(f)$ dirigée par $G = \{u \in E, Au = f(u) = -u\} = Opp(f)$.*