TD 1

EX 1)

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - t)^2$$

Proposons deux methodes :

<u>**1er méthode :**</u>

$$g'(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i \left(-2(x_i - t) \right)$$

$$= -2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - t)$$

$$= -2 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i - t \frac{\sum n_i}{n} \right]$$

$$= -2 (\bar{x} - t)$$

t		$\bar{x}$	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	V	$\nearrow$

si $g'(t) = 0 \iff t = \bar{x}$

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = V(x)$$

<u>**2ème methode :**</u>

Developpons g en t :

$$g(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i^2 - 2 t x_i + t^2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2t \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{n} + t^2 \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i}{n}$$

$$= t^2 - 2t\bar{x} + \overline{x^2}$$

$$= (t^2 - 2t\bar{x} + \bar{x}^2) + \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$= (t - \bar{x})^2 + V(x)$$

$g(t) \geq V(x)$ et $g(t) = V(x)$ pour $t = \bar{x}$.

$(t - \bar{x})^2$ est positif et minimal pour $t = \bar{x}$

EX2

① $(x_i) = (9, 9, 9, 10, 19, 19, 19)$ $moy_1 = 13,42$ $med_1 = 10$

$(y_i) = (0, 0, 0, 10, 11, 11, 11)$ $moy_2 = 6,14$ $med_2 = 10$

② $(z_i) = (0, 0, 0, 0, 20, 20, 20)$ $moy_1 = 8,57$ $med_1 = 0$

$(t_i) = (0, 0, 0, 15, 15, 15, 15)$ $moy_2 = 8,57$ $med_2 = 15$

③

④

x_i	2	3	4	5
n_i	20	30	35	15
N_i	20	50	85	100

$m = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$

x_i	2	3	4	5
n_i	52	28	15	5
N_i	52	80	95	100

$m = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

x_i	2	3	4	5
n_i	12	13	22	53
N_i	12	25	47	100

$m = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$

⑤ $y_i = x_i - 2003$ alors $(y_i) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$

$\bar{y} = 0$

$V_y = \overline{y^2} = \frac{1}{7}(9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9) = \frac{28}{7} = 4$ $\quad (V_x = \overline{y^2} - \bar{y}^2)$

$V_x = 1^2 V_y = 4 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{4} = 2$

EX3

(1)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Somme
x_i	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	
n_i	5	5	4	4	4	3	2	4	2	1	1	35
N_i	5	10	14	18	22	25	27	31	33	34	35	
$n_i x_i$	20	25	24	28	32	27	20	44	26	14	15	275
$n_i x_i^2$	80	125	144	196	256	243	200	484	338	196	225	2487

(2)

$$med = x_{18} = 7$$

(3)

(a) la médiane ne change pas si on modifie les valeurs extrêmes ou extremales.

(b) même reponse : changer ~~ou~~ en modifier les valeurs extremales ~~—~~ raisonablement (sans ~~a~~ depasser la mediane) ne change pas la mediane.

(c) si on augmente toutes les notes de m points, la médiane ~~deviendra~~ ~~$f+m$~~ deviendra $f+m$ (pour 3 points, la nouvelle médianne est 10)

(d) Dans ce cas $n = 34$, $Med = \dfrac{x_{17} + x_{18}}{2} = \dfrac{7+8}{2} = 7{,}5$

(4) $EIQ = Q_3 - Q_1 = 10 - 5 = \mathbf{5}$ est l'ecart-interquartile.

(5) $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n} = \frac{275}{35} = 7{,}86$$

$$V_x = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_1^n n_i x_i^2}{n} - (7{,}86)^2 = 71{,}05 - 7{,}86 = \boxed{9{,}32}$$

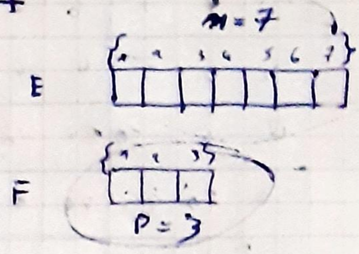
$$\sigma = \sqrt{V_x} \simeq 3{,}05$$

EX 5

$A_n^p = \frac{10!}{(n-5)!} = \frac{n!}{5!}$

Ω

Ω_1 avec effectif N_1	Ω_2 avec effectif N_2



$P(E) = F$

card (F)

$$\bar{x} = \frac{1}{N_1 + N_2} \sum_{w \in \Omega} X(w)$$

$$\overline{X_1} = \frac{1}{N_1} \sum_{w \in \Omega_1} X_1(w)$$

$$\overline{X_2} = \frac{1}{N_2} \sum_{w \in \Omega_2} X_2(w)$$

Donc $$\bar{x} = \frac{1}{N_1 + N_2} \left(\sum_{w \in \Omega_1} X_1(w) + \sum_{w \in \Omega_2} X_2(w) \right)$$

$$= \frac{N_1 \overline{X_1} + N_2 \overline{X_2}}{N_1 + N_2}$$