2. Limites et continuité dans evn

Dans ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, d_E et d_F les distances associées, respectivement aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Dans ce qui suit, nous considérons :

- une partie X de E et un point a adhérent à X,
- une application $f : X \to F$ de $X \subset E$ dans F.

2.1 Limites et continuité

2.1.1 Limites

Définition 2.1 On dit que l'application f tend (ou converge) vers l'élément $l \in F$ en $a \in \overline{X}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ : \ \forall x \in X, \ d_E(x,a) \leqslant \eta \implies d_F(f(x), l) \leqslant \varepsilon.$$

Ce qu'on peut traduire en utilisant la notion de voisinages par :

$$\forall W \in \mathscr{V}_F(l), \exists V \in \mathscr{V}_E(a) \ : \ \forall x \in X \cap V, \ f(x) \in W.$$

Notation. *Les relations précédentes se notent* $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ *ou* $f \underset{a}{\longrightarrow} l$ *ou encore* $f \underset{x \in X \to a}{\longrightarrow} l$.

R $a \in \overline{X}$ est nécessaire pour s'assurer que $X \cap V \neq \emptyset$, sinon cette définition serai triviale.

Remarque. *On peut généraliser cette définition au cas de l'infini :*

- *Si* $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \to F$, *on dit que* f *admet* $l \in F$ *pour limite en* $+\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ : \ \forall x \in [a, +\infty[, \ x \geqslant A \implies d_F(f(x), l) \leqslant \varepsilon.$$

- *Si* $f : E \to F$, *on dit que* f *admet* $l \in F$ *pour limite quand* $\|x\|_E \to +\infty$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ : \ \forall x \in E, \ \|x\|_E \geqslant A \implies d_F(f(x), l) \leqslant \varepsilon.$$

- *Si $f : X \to \mathbb{R}$, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en $a \in \overline{X}$ si et seulement si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \;:\; \forall x \in X\,,\; d_E(x,a) \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant A.$$

- *Si $f : X \to \mathbb{R}$, on dit que f admet $-\infty$ pour limite en $a \in \overline{X}$ si et seulement si :*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \;:\; \forall x \in X\,,\; d_E(x,a) \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant -A.$$

Proposition 2.1 L'application $f : X \subset E \to F$ tend en $a \in \overline{X}$, vers au plus un élément de F.

Preuve *Si f tend vers deux limites $l \neq l'$ en a, alors il existe $W \in \mathscr{V}_F(l)$ et $W' \in \mathscr{V}_F(l')$ tels que*

$$W \cap W' = \emptyset.$$

D'autre part, il existe $V \in \mathscr{V}_E(a)$ et $V' \in \mathscr{V}_E(a)$ tels que

$$\forall x \in X \cap V,\; f(x) \in W \quad \textit{et} \quad \forall x \in X \cap V',\; f(x) \in W'.$$

Puisque $V \cap V' \in \mathscr{V}_E(a)$ et $a \in \overline{X}$, il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \in V \cap V'$, et donc

$$f(x_0) \in W \cap W',$$

ce qu'est absurde.

■

Proposition 2.2 Si f a une limite finie en $a \in \overline{X}$, alors f est bornée au voisinage de a, c-à-dire

$$\exists V \in \mathscr{V}_E(a), \exists C \in \mathbb{R}_+ \;:\; \forall x \in X \cap V\,,\; \|f(x)\|_F \leqslant C.$$

Preuve *Notons l la limite de f en a. Puisque, $B(l,1) \in \mathscr{V}_F(l)$, alors il existe $V \in \mathscr{V}_E(a)$ tel que*

$$f(X \cap V) \subset B(l,1).$$

Par suite, pour tout $x \in X \cap V$, on a $d_F(f(x),l) \leqslant 1$, et donc

$$\|f(x)\|_F \leqslant \|l\|_F + 1.$$

■

Pour la limite de la restriction de f à une partie Y de X avec $a \in Y$, on a la définition :

Définition 2.2 — Limite suivant une partie. Soit Y une partie de X telles que $a \in \overline{Y}$. On dit que $f : X \to F$ tend vers l en a suivant Y, si la restriction $f_{|_Y}$ tend vers l en a, et on note

$$f \underset{\substack{x \to a \\ x \in Y}}{\longrightarrow} l.$$

Ce qui revient à écrire

$$\forall W \in \mathscr{V}_F(l), \exists V \in \mathscr{V}_E(a) \;:\quad f(V \cap Y) \subset W,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \;:\; \forall x \in Y,\; d_E(x,a) \leqslant \eta \implies d_F(f(x),l) \leqslant \varepsilon.$$

Exemple La notion de limite selon une partie, permet d'exprimer les notions classiques suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ désigne, lorsque a est adhérent à $X \setminus \{a\}$, la limite en a selon $X \setminus \{a\}$.
- lorsque $X \subset \mathbb{R}$, on a
  - $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = l$ désigne, quand a est adhérent à $X \cap]a, +\infty[$, la limite en a selon $X \cap]a, +\infty[$.
  - $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = l$ denote, quand a est adhérent à $X \cap [a, +\infty[$, la limite en a selon $X \cap [a, +\infty[$.

Proposition 2.3 — Caractérisation par les suites. Pour que $f : X \to F$ admette l pour limite en $a \in \overline{X}$, il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de X, convergente vers a, on ait

$$f(u_n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l.$$

Preuve ($\Rightarrow$) *Supposons $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de X convergente vers a. Si $W \in \mathscr{V}_F(l)$, alors il existe $V \in \mathscr{V}_E(a)$ tel que $f(X \cap V) \subset W$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in X \cap V, \quad f(x) \in W$$

De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq N \implies u_n \in V$, et alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \implies u_n \in X \cap V \implies f(u_n) \in W.$$

On en déduit donc que $f(u_n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} l$.

($\Leftarrow$) *Par contraposition, supposons f n'admet pas l pour limite en a, c'est-à-dire*

$$\exists W \in \mathscr{V}_F(l), \forall V \in \mathscr{V}_E(a), \exists x \in X; \quad x \in V \ \text{ et } \ f(x) \notin W.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $V_n = B_E(a, 1/n) \in \mathscr{V}_E(a)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in X; \quad u_n \in V_n \ \text{ et } \ f(u_n) \notin W.$$

La suite (u_n) ainsi construite, satisfait $u_n \underset{n+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(u_n) \underset{n+\infty}{\not\longrightarrow} l$. ■

Théorème 2.1 — Théorème d'encadrement. Soient f, g, $h : X \subset E \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{X}$. Si f et h convergent vers $l \in \mathbb{R}$ en a telles que

$$\exists V \in \mathscr{V}_E(a) \ : \ \forall x \in X \cap V, \ \ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

alors g admet l pour limite en a.

Preuve *Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe V_1, $V_2 \in \mathscr{V}_E(a)$ tels que :*

$$\forall x \in X \cap V_1, \ |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in X \cap V_2, \ |h(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons $V_3 = V \cap V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}_E(a)$, alors

$$\forall x \in X \cap V_3, \ \ l - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant l + \varepsilon.$$

Ce qui montre que g admet l pour limite en a.

■

Proposition 2.4 — Composition. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-**evn**, $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ telles que $f(X) \subset Y$ et $l \in G$. Si f tend vers b en $a \in \overline{X}$ (alors b est adhérent à $f(X)$ et donc à Y) et si g converge vers l en $b \in \overline{Y}$, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a.

Preuve *Soit $W \in \mathscr{V}_G(l)$, il existe $V \in \mathscr{V}_F(b)$ tels que*

$$\forall y \in Y \cap V, \quad g(y) \in W.$$

Puis, il existe $U \in \mathscr{V}_E(a)$ tels que $\forall x \in X \cap U,\ f(x) \in V$, et comme $f(x) \in f(X) \subset Y$, il vient

$$\forall x \in X \cap U,\ g\big(f(x)\big) \in W.$$

Ce qui montre que $g \circ f$ admet l pour limite en a.

■

Proposition 2.5 Soient $f, g : X \subset E \to F$, $\lambda : X \to \mathbb{K}$ et $a \in \overline{X}$, alors on a :

1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in F \implies \|f(x)\|_F \underset{x\to a}{\longrightarrow} \|l\|.$
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0_F \iff \|f(x)\|_F \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$
3. $\begin{cases} f \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in F \\ g \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \in F \end{cases} \implies f+g \underset{x\to a}{\longrightarrow} l+l' \in F.$
4. $\begin{cases} \lambda \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \\ g \text{ bornée au voisinage de } a \end{cases} \implies \lambda g \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0_F.$
5. $\begin{cases} \lambda \text{ bornée au voisinage de } a \\ g \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \implies \lambda g \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0_F.$
6. $\begin{cases} \lambda \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha \in \mathbb{K} \\ g \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \in F \end{cases} \implies \lambda g \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha l' \in F.$

Preuve *À vérifier en exercice.* ■

Proposition 2.6 — Limite de fonctions à valeurs dans un espace produit. Soit $F_1, \cdots, F_n$ une famille finie de $\mathbb{K}$-ev normés, $f : X \to F = \prod_{k=1}^{n} F_k$ et $a \in \overline{X}$, alors on a :

$$f \underset{x\to a}{\longrightarrow} l = (l_1, \cdots, l_n) \in F \iff \forall k \in \{1, \cdots, n\},\ f_k = pr_k \circ f \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_k,$$

où l'application $pr_k : \prod_{k=1}^{n} F_k \to F_k$, $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto y_k$ est la $k^{\text{ème}}$ projection de F.

Preuve *À faire en exercice (on rappelle que l'espace produit $\prod_{k=1}^{n} F_k$ est muni de la norme produit $\nu_\infty(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} N_k(x_k)$ où les N_k sont respectivement les normes des $\mathbb{K}$-evn F_k).* ■

Exercice 2.1 *Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite en* $(0,0)$ *pour les fonctions*

$a)\ f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ $\quad b)\ f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^6+y^4}$ $\quad c)\ f(x,y) = \dfrac{x^4 y^3}{x^6+y^8}$

$d)\ f(x,y) = \dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ $\quad e)\ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ $\quad f)\ f(x,y) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{|xy|})}{|y|}.$

Exercice 2.2 *la fonction* $f : (x,y,u,v) \to \dfrac{x^3+y^3-u^3-v^3}{x^2+y^2-u^2-v^2}$ *a-t-elle une limite en* $(0,0,0,0)$ *?*

2.1.2 Continuité

Définition 2.3 On dit que $f : X \subset E \to F$ est continue en $a \in X$ si elle tend vers $f(a)$ en a, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ : \ \forall x \in X,\ d_E(x,a) \leqslant \eta \implies d_F(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui revient à dire

$$\forall W \in \mathscr{V}_F(f(a)), \exists V \in \mathscr{V}_E(a) \ : \ \forall x \in X \cap V,\ f(x) \in W.$$

Et on dit que f est continue sur X lorsque elle est continue en tout point de X.

Remarque. *La fonction f est dite discontinue en a si et seulement si f n'est pas continue en a.*

Proposition 2.7 Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Preuve *Puisque f est continue en a, alors f converge vers une limite finie en a, et par suite, f est bornée au voisinage de a.*

■

Proposition 2.8 — Caractérisation par les suites. Pour que $f : X \to F$ soit continue en $a \in X$, il faut et il suffit que, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de X convergente vers a, on ait

$$f(u_n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

Preuve *À faire en exercice.* ■

Proposition 2.9 Si $f : X \subset E \to F$ est continue en $a \in A \subset X$, alors sa restriction $f_{|A} : A \to F$ est continue en a.

Preuve *À faire en exercice.* ■

Proposition 2.10 Soit $E_1, \cdots, E_n$ une famille finie de $\mathbb{K}$**-evn**, alors pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, la $k^{\text{ème}}$ projection $pr_k : \prod_{k=1}^{n} E_k \to E_k,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$ est une application continue.

Preuve *À faire en exercice.* ■

Proposition 2.11 Soient $F_1, \cdots, F_n$ une famille de $\mathbb{K}$-**evn** et $f : X \subset E \to \prod_{k=1}^{n} F_k$. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, notons $f_k = pr_k \circ f$ où $pr_k : \prod_{k=1}^{n} F_k \to F_k$ est la $k^{\text{ème}}$ projection, alors on a

$$f \text{ est continue en } a \in X \iff \forall k \in \{1, \cdots, n\},\ f_k \text{ est continue en } a \in X.$$

Preuve *À faire en exercice.* ■

Proposition 2.12 Soient $f, g : X \subset E \to F$ et A une partie de X, alors on a :

$$\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont continues sur } X \\ A \text{ est dense dans } X \\ \forall a \in A, \quad f(a) = g(a) \end{cases} \implies f = g.$$

Preuve *Posons $h = f - g$, comme $\{0_F\}$ est un fermé de F et h est continue sur X, alors $h^{-1}(0_F)$ est un fermé de X. En outre $A \subset h^{-1}(0_F)$ puisque $f = g$ sur A. Par conséquent*

$$X = \overline{A} \subset \overline{h^{-1}(0_F)} = h^{-1}(0_F).$$

Donc $h = 0_F$ et finalement $f = g$. ■

Remarque. *Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Il découle de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ que*

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = g(x) \implies f = g \ \text{ sur } \ \mathbb{R}.$$

La définition ponctuelle de la continuité, possède la caractérisation ensembliste suivante.

Théorème 2.2 Soit $f : X \subset E \to F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue,

(ii) l'image réciproque par f de tout fermé de F, est un fermé relatif de X,

(iii) l'image réciproque par f de tout ouvert de F, est un ouvert relatif de X.

Preuve *$(i) \implies (ii)$: Supposons que f est continue. Si B est un fermé de F, notons A l'adhérence de $f^{-1}(B)$ dans E. Il est clair que $f^{-1}(B) \subset X \cap A$. Soit maintenant, $a \in X \cap A \subset A = \overline{f^{-1}(B)}$, alors il existe une suite (a_n) d'éléments de $f^{-1}(B)$ qui converge vers a. Par continuité de f en $a \in X$, la suite $(f(a_n))$ d'éléments de B converge vers $f(a)$. La limite $f(a)$ appartient au fermé B, d'où $a \in f^{-1}(B)$ et donc $X \cap A \subset f^{-1}(B)$. Finalement, il vient*

$$f^{-1}(B) = X \cap A.$$

Comme A est un fermé de E, alors l'image réciproque du fermé B de F est un fermé relatif de X.

$(ii) \implies (iii)$: Supposons que l'image réciproque de tout fermé de F, est un fermé relatif de X. Si U est un ouvert de F, alors $B = \complement_F U$ est un fermé dans F et son image réciproque $f^{-1}(B)$ est un fermé relatif de X, c'est-à-dire, il existe A un fermé de E tel que

$$f^{-1}(B) = X \cap A.$$

Par suite, la relation suivante

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\big(\complement_F B\big) = \complement_X\big(f^{-1}(B)\big) = \complement_X\big(X \cap A\big) = X \cap \complement_E(A).$$

Comme $\complement_E(A)$ *est un ouvert de* E*, alors* $f^{-1}(U)$ *est un ouvert relatif de* X.

$(iii) \implies (i)$ *: Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de* F*, est un ouvert relatif de* X*. Soit* $a \in X$*, pour tout* $\varepsilon > 0$*, la boule* $B(f(a),\varepsilon)$ *est un ouvert de* F*, alors son image réciproque par l'application* f*, est un ouvert relatif de* X*, c'est-à-dire, il existe* U *un ouvert de* E *tel que*

$$f^{-1}\big(B(f(a),\varepsilon)\big) = X \cap U.$$

Comme $a \in U$ *ouvert de* E*, il existe* $\eta > 0$ *tel que* $B(a,\eta) \subset U$*, et par suit on a*

$$f\big(B(a,\eta)\cap X\big) \subset f\big(U \cap X\big) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Donc, f *est continue en* a*, un point quelconque de* X*, alors l'application* f *est continue.*

■

Corollaire 2.1 Une application $f : E \to F$ est continue, si et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de F, est un ouvert (resp. fermé) de E.

Preuve *À vérifier en exercice.*

■

Exemple L'intérieur de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ défini comme étant l'ensemble

$$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy > 1\},$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car c'est l'image réciproque de $]1,+\infty[$ par l'application continue

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

Exercice 2.3 *Soient* $(E,\|\cdot\|)$ *un* **evn** *et* $f : E \to E,\ x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|^2}$ *une application. Montrer que* f *est continue et que* $f(E) = \overline{B}(0,1/2)$.

Exercice 2.4 *Soient* E*,* F *et* G *trois* **evn**, $A \neq \emptyset \in \mathscr{P}(E)$, $B \neq \emptyset \in \mathscr{P}(F)$ *et* $f : A \to G$, $g : B \to G$ *deux applications. Montrer que* $\varphi : A \times B \to G,\ (x,y) \mapsto f(x)+g(y)$ *est continue si et seulement si les deux fonctions* f *et* g *sont continues.*

Exercice 2.5 *Soient* E*,* F *deux* **evn**, $f : E \to F$ *une application et* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert de* E *(c'est-à-dire une famille* $(U_i)_{i\in I}$ *d'ouverts de* E *satisfaisant* $\bigcup_{i\in I} U_i = E$*). Supposons que, pour tout* $i \in I$*, la restriction* $f_{|U_i}$ *de* f *à* U_i *est continue, montrer que* f *est aussi continue.*

Exercice 2.6 *Étudier la continuité des applications* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *suivantes :*

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases} x\sin(1/y)+y\sin(1/x) & si \quad xy\neq 0\\ 0 \quad si \quad xy\neq 0. \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y)=\begin{cases} x^2 & si \quad |x|\leqslant |y|\\ y^2 & si \quad |x|>|y|. \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^4-y^2)^2}{x^6} & si \quad |y|<x^2\\ 0 & si \quad |y|\geqslant x^2. \end{cases}$$

2.2 Continuité uniforme

Définition 2.4 On dit que $f : X \subset E \to F$ est uniformément continue si et seulement si :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \ : \ \forall (x',x'')\in X^2,\ d_E(x',x'')\leqslant \eta \implies d_F(f(x'),f(x''))\leqslant \varepsilon.$$

Proposition 2.13 Si f est uniformément continue sur X, alors f est continue sur X.

La réciproque de ce résultat est fausse, f peut être continue sur X sans être **uc** sur X, par exemple,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x)=x^2.$$

Cependant, si $f : X \to F$ est continue et X compact alors f est **uc** sur X (Théorème de Heine).

Proposition 2.14 Soient $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ telles que $f(X)\subset Y$, alors on a :

$$\begin{cases} f : X \to F \text{ est } \textbf{uc} \text{ sur } X\\ g : Y \to G \text{ est } \textbf{uc} \text{ sur } Y \end{cases} \implies f\circ g \text{ est } \textbf{uc} \text{ sur } X.$$

Preuve *Soit $\varepsilon>0$, puisque g est* **uc** *sur Y, il existe $\eta>0$ tels que :*

$$\forall (y',y'')\in Y^2,\ d_F(y',y'')\leqslant \eta \implies d_G(g(y'),g(y''))\leqslant \varepsilon.$$

Puis, puisque f est **uc** *sur X, il existe $\alpha>0$ tels que :*

$$\forall (x',x'')\in X^2,\ d_E(x',x'')\leqslant \alpha \implies d_F(f(x'),f(x''))\leqslant \eta.$$

On en déduit que :

$$\forall (x',x'')\in X^2,\ d_E(x',x'')\leqslant \alpha \implies d_G(g(f(x')),g(f(x'')))\leqslant \varepsilon.$$

Finalement, l'application composée $g\circ f$ est **uc** *sur X.* ■

Définition 2.5 Soit $k\in\mathbb{R}_+$, on dit que $f : X\subset E\to F$ est k-lipschitzienne si

$$\forall (x_1,x_2)\in X^2,\ d_F(f(x_1),f(x_2))\leqslant k\,d_E(x_1,x_2).$$

Exemple 1. L'application norme $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne, puisque

$$\Big| \|y\|_E - \|x\|_E \Big| \leqslant \|y-x\|.$$

2. Soit $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ muni de la norme produit $\nu_\infty(x_1,\cdots,x_n) = \max_{1\le k\le n} N_k(x_k)$ où les N_k sont les normes des E_k, alors les projections $pr_k : E \to E_k$, $(x_1,\cdots,x_n) \mapsto x_k$ sont 1-lipschitziennes, puisque

$$\forall k \in \{1,\cdots,n\}, \forall x = (x_k)_k,\ y = (y_k)_k \in E;$$

$$N_k\big(p_k(y) - p_k(x)\big) \leqslant \max_{1\le k\le n} N_k(y_k - x_k) = \nu_\infty(y-x),$$

Proposition 2.15

$$\begin{cases} f : X \to F \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ g : X \to F \text{ est } k'\text{-lipschitzienne} \end{cases} \implies f+g \text{ est } k+k'\text{-lipschitzienne.}$$

$$\begin{cases} f : X \to F \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases} \implies \lambda f \text{ est } |\lambda|k\text{-lipschitzienne.}$$

$$\begin{cases} f : X \to F \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ g : Y \to G \text{ est } k'\text{-lipschitzienne} \\ \quad f(X) \subset Y \end{cases} \implies g\circ f \text{ est } kk'\text{-lipschitzienne.}$$

Remarque. *Le produit de deux fonctions lipschitziennes, peut ne pas être lipschitzien. Par exemple*

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x.$$

Proposition 2.16 Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Preuve *Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. En posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$, il découle de la k-lipschitzianité de f que*

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad d_E(x_1,x_2) \leqslant \eta \implies d_F(f(x_1), f(x_2)) \leqslant k\,d_E(x_1,x_2) \leqslant k\eta \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, l'application f est uniformément continue sur X.

■

La réciproque est fausse, une application peut être **uc** sans être lipschitzienne. Par exemple,

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}.$$

Remarque. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. D'après le théorème des accroissements finis, f est lipschitzienne si et seulement si sa dérivé f' est bornée.*

Exercice 2.7 *Soient $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \mapsto (ax_2, bx_1)$. Montrer que f est uniformément continue.*

Soient X et Y deux parties de E et F respectivement. Une application $f : X \to Y$ continue bijective dont la réciproque $f^{-1} : Y \to X$ est continue est dite un homéomorphisme, et dans ce cas, on dit que X est homéomorphe à Y.

Exercice 2.8 *Montrer que les parties suivantes de $\mathbb{C}$ sont homéomorphes :*

$$E_1 = \mathbb{C}^*, \quad E_2 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\}, \quad E_3 = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}, \quad E_4 = \{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 2\}.$$

2.3 Continuité des applications linéaires

Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, on rappelle qu'une application $f : E \to F$ est dite linéaire ou $\mathbb{K}$-linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F (resp. de E dans E). Cet ensemble est un $\mathbb{K}$-ev et on a :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G), \quad g \circ f \in \mathcal{L}(E,G).$$

Le théorème très utile suivant caractérise les applications linéaires continues.

Théorème 2.3 Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$.

Preuve *Supposons que f est continue sur E, elle l'est donc en particulier, en 0 et alors*

$$\exists \eta > 0, \forall x \in E, \quad \|x\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon = 1.$$

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, puisque on a $\left\| \frac{\eta}{\|x\|_E} x \right\|_E = \eta$, il vient alors que

$$\left\| f\Big(\frac{\eta}{\|x\|_E} x\Big) \right\|_F \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta} \|x\|_E.$$

Finalement, on trouve l'inégalité suivant qui est également valable pour $x = 0_E$.

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant \frac{1}{\eta} \|x\|_E.$$

Inversement, si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$, alors

$$\forall (x_1,x_2) \in E^2, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_F = \|f(x_1 - x_2)\|_F \leqslant M \|x_1 - x_2\|_E.$$

Donc, l'application f est continue sur E puisqu'elle est M-lipschitzienne.

■

Remarque. *D'après le théorème 2.3, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en 0.*
2. *f est continue sur E.*
3. *f est uniformément continue sur E.*

4. *f est lipschitzienne.*
5. $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.
6. *f est bornée sur la boule unité fermée de E, c'est-à-dire :*

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq 1 \implies \|f(x)\|_F \leq M_1.$$

7. *f est bornée sur la sphère unité , c'est-à-dire :*

$$\exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \|x\|_E = 1 \implies \|f(x)\|_F \leq M_2.$$

Notation. *On dénote l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F par*

$$\mathcal{LC}(E,F) \quad (\text{et } \mathcal{LC}(E) \text{ si } E = F).$$

L'ensemble $\mathcal{LC}(E,\mathbb{K})$ est dit le dual topologique de E et on le note E'.

2.4 Norme subordonnée d'une application linéaire continue

L'ensemble $\mathcal{LC}(E,F)$ est un espace vectoriel. Si $E \neq \{0_E\}$ et $f \in \mathcal{LC}(E,F)$, on appelle norme subordonnée aux normes de E et F de l'application f, la borne supérieure suivante :

$$\|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Cette borne existe, puisque $\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ est non vide majorée de $\mathbb{R}$, et de plus, on a

$$\|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 2.17

1. $\forall f \in \mathcal{LC}(E,F), \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant \|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)} \|x\|_E$.
2. $\forall f, g \in \mathcal{LC}(E,F), \quad \begin{cases} f+g \in \mathcal{LC}(E,F), \\ \|f+g\|_{\mathcal{LC}(E,F)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)} + \|g\|_{\mathcal{LC}(E,F)}. \end{cases}$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{LC}(E,F), \quad \lambda f \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $\|\lambda f\|_{\mathcal{LC}(E,F)} = |\lambda| \, \|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)}$.
4. $\forall f \in \mathcal{LC}(E,F), g \in \mathcal{LC}(F,G), \quad \begin{cases} g \circ f \in \mathcal{LC}(E,G), \\ \|g \circ f\|_{\mathcal{LC}(E,G)} \leqslant \|g\|_{\mathcal{LC}(F,G)} \|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)}. \end{cases}$

Preuve *À vérifier en exercice.* ■

R Il découle de la proposition 2.17 que $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{LC}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$.

Proposition 2.18 — Caractérisation de l'équivalence des normes. Soient N et N' deux normes de E et $\mathscr{O}$ (resp. $\mathscr{O}'$) l'ensemble des ouverts de (E,N) (resp. (E,N')). Les trois propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

1. N et N' sont équivalentes.
2. $Id_E : (E,N) \to (E,N')$ et $Id_E : (E,N') \to (E,N)$ sont continues.
3. $\mathscr{O} = \mathscr{O}'$.

Preuve *À vérifier en exercice.* ■

Proposition 2.19 — Continuité d'une application bilinéaire. Une application bilinéaire $\mathcal{B} : E \times F \to G$ de l'espace $E \times F$ muni de la norme produit v_∞ vers G, est continue s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in E \times F\,, \quad \|B(x,y)\|_G \leqslant k\, \|x\|_E\, \|y\|_F\,.$$

Preuve $(\Rightarrow)$ *: Si $\mathcal{B}$ et continue, alors elle est continue en $(0,0)$ et donc il existe $\eta > 0$ tel*

$$\mathcal{B}\Big(B\big((0,0),\eta\big)\Big) \subset B(0,1) \quad (\varepsilon = 1).$$

Pour tout $(x,y) \in E \times F$ non nul, on a $\left\|\mathcal{B}\Big(\frac{\eta}{\|x\|_E}x, \frac{\eta}{\|x\|_F}y\Big)\right\|_G \leqslant 1$, *et donc*

$$\left\|\mathcal{B}\big(x,,y\big)\right\|_G \leqslant \frac{1}{\eta^2}\,\|x\|_E\,\|x\|_F\,.$$

On termine alors en remarquant que la relation ci-dessus est vraie également pour $(0,0)$.

$(\Leftarrow)$ *: Si la suite (x_n, y_n) de $E \times F$ converge vers (a,b), alors (x_n) converge vers a et (y_n) converge vers b. On a $\mathcal{B}(x_n,y_n) - \mathcal{B}(a,b) = \mathcal{B}(x_n - a, y_n) - \mathcal{B}(a, y_n - b)$ et donc la relation*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}(x_n,y_n) - \mathcal{B}(a,b)\|_G &\leqslant \|\mathcal{B}(x_n - a, y_n)\|_G + \|\mathcal{B}(a, y_n - b)\|_G \\ &\leqslant k\,\|x_n - a\|_E\,\|y_n\|_F + k\,\|a\|_E\,\|y_n - b\|_F \underset{n+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

montre que $\mathcal{B}(x_n,y_n)$ converge vers $\mathcal{B}(a,b)$ et donc l'application $\mathcal{B}$ est continue en (a,b). ■

Exemple $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda\, x$ et $\mathcal{LC}(E)^2 \to \mathcal{LC}(E)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$ sont continues.

Proposition 2.20 — Continuité en dimension finie. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-**evn**, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ est une application continue.

Cette proposition affirme que pour E de dimension finie, on a :

$$\mathcal{LC}(E,F) = \mathcal{L}(E,F).$$

Preuve *Soit N la norme de E, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on considère l'application*

$$\begin{array}{rccl} N_\infty \;: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \mapsto & N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \end{array}$$

D'après le théorème 1.1, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad N_\infty(x) \leqslant M N(x).$$

Par conséquent, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_F \\
&\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\Big) N_\infty(x) \\
&\leqslant C N(x) \quad \text{avec} \quad C = M \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F.
\end{aligned}$$

Enfin, on applique le théorème 2.3 pour conclure que f est continue.

■

Exercice 2.9 *Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :*

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Soit $\psi : E \to \mathbb{R}$, $\psi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$, montrer que $\psi \in \mathcal{LC}(E,\mathbb{R})$ et calculer sa norme $\|\psi\|_{\mathcal{LC}(E,\mathbb{R})}$.

2.5 Continuité et compacité

Proposition 2.21 Soit $f : X \subset E \to F$ une application, alors on a :

$$\begin{cases} X \text{ compacte} \\ f \text{ continue} \end{cases} \Longrightarrow \quad f(X) \text{ compacte}$$

Preuve *Soit $(y_n)_n$ une suite dans $f(X)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque X ext compact, il existe une extractrice σ et un élément $x \in X$ tels que*

$$\lim_{n+\infty} x_{\sigma(n)} = x.$$

Or f est continue, alors $\lim_{n+\infty} y_{\sigma(n)} = \lim_{n+\infty} f(x_{\sigma(n)}) = f(x)$ et ainsi la suite $(y_n)_n$ admet $f(x) \in f(X)$ pour valeur d'adhérence. Finalement, $f(X)$ est compacte.

■

Remarque. *L'image réciproque d'un compact par une application continue peut ne pas être compacte. Par exemple, la fonction nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, le singleton $\{0\}$ est compact, mais la partie $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ n'est pas compacte puisqu'elle n'est pas bornée.*

La notion de compacité est une notion topologique, c'est-à-dire invariante par homéomorphisme :

$$\begin{cases} X \text{ homéomorphe à } Y \\ X \text{ est un compact} \end{cases} \Longrightarrow \quad Y \text{ est un compact}$$

Par contraposition, si X est compact et Y est non compact, alors X et Y ne peuvent pas être homéomorphes. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ usuel, $I = [0,1]$ et $J = [0,1[$ ne sont pas homéomorphe.

Corollaire 2.2 Soient X une partie non vide de E et $f : X \to \mathbb{R}$ une application, alors si X est compacte et f continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve *$f(X)$ est une partie compacte, alors elle est fermée bornée de $\mathbb{R}$.* ■

Corollaire 2.3 Si $X \neq \emptyset$ est un compact de E et si $f : X \to F$ est une application continue, alors

$$\begin{array}{rccl} \|f\| : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f(x)\|_F \end{array}$$

est bornée et elle atteint ses bornes.

Preuve *Appliquer le corollaire 2.2 à l'application $\|f\|$ qui est continue sur le compact X.* ■

Théorème 2.4 — Théorème de Heine. Toute application $f : X \subset E \to F$ continue sur un compact X, est uniformément continue.

Preuve *À montrer en exercice.* ■

Exercice 2.10 *Soient E, F deux evn et $f : A \subset E \to F$ une application telle que $\overline{f(A)}$ est compact. Montrer que si le graphe $G_f = \{(x, f(x)),\ x \in A\}$ de f est un fermé de $A \times F$, alors f est une application continue.*

Exercice 2.11 *Soient E, F deux evn tels que E soit de dimension finie et $f : E \to F$ continue telle que, pour tout borné B de F, $f^{-1}(B)$ est un borné de E.*

1. *Montrer que pour tout fermé G de E, $f(G)$ est un fermé de F.*
2. *Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout fermé G de $\mathbb{K}$, $P(G)$ est fermée.*

2.6 Continuité et connexité par arcs

On appelle arc continu (ou chemin continu) du $\mathbb{K}$-**evn** E, toute application continue $\gamma : I \to E$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Puisque un tel intervalle est homéomorphe à $[0,1]$, on peut prendre $I = [0,1]$

Définition 2.6 Une partie A de E est dite connexe par arcs (en abrégé **cpa**) si et seulement si, pour tout $(x,y) \in A^2$, il existe un arc continu $\gamma : [a,b] \to E$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma(a) = x \ \text{ et } \ \gamma(b) = y \\ \forall t \in [a,b], \ \ \gamma(t) \in A. \end{cases}$$

On dit que γ est un arc continu joignant x et y dans A.

Exemples 1. Pour toute arc continu $\gamma : [a,b] \to E$, la courbe $\gamma([a,b])$ est une partie **cpa** de E.

2. $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ est une partie **cpa** de $\mathbb{C}$, puisque $\mathbb{U} = \gamma([0,1])$ où γ est donné par

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{2i\pi t}. \end{array}$$

Proposition 2.22 Toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Preuve *Soit A une partie convexe de E, alors pour tout $(x,y) \in A^2$ et tout $t \in [0,1]$, on a :*

$$tx + (1-t)y \in A.$$

Il s'en suit alors que $\gamma : [0,1] \to A$, $t \mapsto tx + (1-t)y$ est un arc continu joignant x et y dans A. ■

Théorème 2.5 Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Preuve *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des convexes de $\mathbb{R}$, alors ils sont* **cpa***. Réciproquement, soit A une partie* **cpa** *de $\mathbb{R}$, alors pour tout $(x,y) \in A^2$, il existe un arc continu $\gamma : [0,1] \to A$ joignant x et y. Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma([0,1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et comme x, $y \in \gamma([0,1])$, alors $[x,y] \subset \gamma([0,1]) \subset A$. Alors, A est une partie convexe de $\mathbb{R}$ et donc un intervalle.* ■

Proposition 2.23 Soit $A \subset X$, F un **evn** de dimension finie et $f : X \subset E \to F$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ est } \mathbf{cpa} \\ f \text{ continue} \end{array} \right. \Longrightarrow f(A) \text{ est } \mathbf{cpa}.$$

Preuve *Soit $(u,v) \in f(A)^2$, il existe $(x,y) \in A^2$ tel que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. Comme A est* **cpa***, il existe un arc continu $\gamma : [0,1] \to A$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Par suite, $f \circ \gamma : [0,1] \to f(A)$ est un arc continu joignant u et v dans $f(A)$ puisque f, γ sont continues, $u = f \circ \gamma(0)$ et $v = f \circ \gamma(1)$. Finalement, la partie $f(A)$ est* **cpa***.* ■

Exemple Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et toute application continue $f : I \to E$, la courbe $f(I)$ est une partie **cpa** de E. Par exemple, la parabole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x\}$ est une partie **cpa** de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image de $\mathbb{R}$ (qui est **cpa**) par l'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2, x)$.

Remarque. *L'image réciproque d'une partie* **cpa***, par une application continue peut ne pas être* **cpa***. Par exemple, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2, x)$ et $B = [1,+\infty[\times \mathbb{R}$, on a B est* **cpa** *car convexe de $\mathbb{R}^2$, mais $f^{-1}(B) =]-\infty,-1] \bigcup [1,+\infty[$ n'est pas* **cpa** *(ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$).*

Théorème 2.6 — Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$, si A est connexe par arcs et f est continue, alors f atteint tout réel entre deux réels qu'elle atteint déjà.

Preuve *A est* **cpa** *et f continue, alors $f(A)$ est* **cpa** *de $\mathbb{R}$ et donc $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.* ■

Proposition 2.24 Si A est **cpa** de E et $P \subset A$ non vide, à la fois ouverte et fermée dans A, alors

$$P = A.$$

Preuve *Par l'absurde, supposons que $P \neq A$. Il existe alors $x \in P$ et $y \in \complement_A(P)$. Comme, A est une partie* **cpa**, *il existe un arc continu $\gamma : [0,1] \to A$ tel que $y = \gamma(0)$ et $x = \gamma(1)$. Soit $\chi_P : A \to \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de P, alors pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$, $\chi^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de A car :*

$$\chi^{-1}(\Omega) = \chi^{-1}(\{0,1\}) = A \quad ou \quad \chi^{-1}(\Omega) = \chi^{-1}(\{1\}) = P,$$

ou

$$\chi^{-1}(\Omega) = \chi^{-1}(\{0\}) = \complement_A(P) \quad ou \quad \chi^{-1}(\Omega) = \chi^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Il en résulte que χ_P est continue et donc $\chi_P \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue. Mais, $\chi_P \circ \gamma$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ avec $\chi_P \circ \gamma(0) = 0$ et $\chi_P \circ \gamma(1) = 1$ et ceci contredit le théorème des valeurs intermédiaires. Finalement, on obtient $P = A$.

■

Exercice 2.12 *Soient A et B deux parties* **cpa** *d'un* **evn** *E. Montrer que $A + B$ est* **cpa**.

Exercice 2.13 *Soient A (resp. B) est une partie* **cpa** *d'un* **evn** *E (resp. F).*

1. *Montrer que si A et B sont* **cpa**, *alors $A \times B$ est connexe par arcs.*
2. *Montrer que si $A \times B$ est* **cpa** *et A, B non vides, alors A et B sont* **cpa**.

Exercice 2.14 *Soit A* **cpa** *d'un* **evn** *de dimension finie E et $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. Montrer que f est constante. ($\{0,1\}$ est muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$).*