Universite Sultan Moulay Slimane
Faculte Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Module: Analyse 1
Responsable: N. Mrhardy

TD n°2: Corrigé
Les suites numériques

Exercice 1. En utilisant la définition, montrer que

$$(1)\ \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \text{ converge vers } 0 \qquad (2)\ (\ln(n^2+1))_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty$$

***Corrigé* 1.**

(1) On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que : } \forall n \geq N_\varepsilon\ \ |\frac{1}{2^n}| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

On remarque que

$$\left(\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n\ln(2) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} > 0 \ si\ \varepsilon < 1\right)$$

Soit maintenant $0 < \varepsilon < 1$. On pose $N_\varepsilon = E\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}\right) + 1 \in \mathbb{N}$, donc on obtient

$$\forall n \geq N_\varepsilon \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \Longrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

(2) On veut montrer que

$$\forall A \in \mathbb{R}(\text{où } \mathbb{R}^+),\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > A.$$

(c-à-d $\qquad \exists N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N, \ln(n^2+1) > A \Longleftrightarrow n^2 > e^A - 1 \Longleftarrow n > \sqrt{|e^A - 1|}$.)

Soit donc $A \in \mathbb{R}^+$, prenons $N = E(\sqrt{e^A - 1}) + 1$. On a donc pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

Exercice 2. Soit un réel $\alpha \in]0,1[$ et une suite $(u_n)_n$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que si $(\varepsilon_n)_n$ est une suite convergeant vers 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{n-k} = 0$

(2) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha^k u_{n-k} = \dfrac{\ell}{1-\alpha}$

***Corrigé* 2.**

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\varepsilon_n)_n$ est une suite convergeant vers 0 alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_1,\ |\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)$$

On commence par écrire

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-(N_1+1)}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\right| + \left|\sum_{k=n-N_1}^{n}\alpha^k\varepsilon_{n-k}^n\right| \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-(N_1+1)}\alpha^k\left|\varepsilon_{n-k}\right|}_{\lambda_n} + \underbrace{\sum_{k=n-N_1}^{n}\alpha^k\left|\varepsilon_{n-k}^n\right|}_{\beta_n}\end{aligned}$$

et donc

$$\lambda_n \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n-(N_1+1)}\alpha^k = \frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)\frac{1-\alpha^{N_1}}{1-\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, si on pose $M = \max(|\varepsilon_0|, \ldots, |\varepsilon_{N_1}|)$, alors

$$\beta_n \leq M\sum_{k=n-N_1}^{n}\alpha^k = M\alpha^{n-N_1}\frac{1-\alpha^{N_1+1}}{1-\alpha} \leq \frac{M}{\alpha^{N_1}(1-\alpha)}\alpha^n$$

puisque $0<\alpha<1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{\alpha^{N_1}(1-\alpha)}\alpha^n = 0$ et donc

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_2,\ \beta_n \leq \frac{M}{\alpha^{N_1}(1-\alpha)}\alpha^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prenons $N = \max(N_1, N_2)$. On a montré que pour tout $n \geq N$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\right| \leq \lambda_n + \beta_n \leq \varepsilon$$

c-à-d $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\varepsilon_{n-k} = 0$

(2) Si on pose $\varepsilon_n = u_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k(\varepsilon_{n-k}+\ell) = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\varepsilon_{n-k} + \ell\sum_{k=0}^{n}\alpha^k = \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\varepsilon_{n-k} + \ell\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

comme $\displaystyle\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}$ alors d'après la première question

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha^k u_{n-k} = \frac{\ell}{1-\alpha}$$

Exercice 3. Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$

(1) Trouver une relation de récurrence simple entre u_{n+1} et u_n.
(2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(3) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

***Corrigé* 3.**

(1) D'abord puisque $u_0 > 0$ on peut montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus, puisque

$$u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} \Longrightarrow u_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

donc

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

(2) On a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} > 0$$

d'où la suite $(u_n)_n$ est croissante.

(3) Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ, alors puisque $(u_n)_n$ est croissante et $u_0 > 0$ on aura $\ell > 0$. D'autre part en passant à la limite dans l'équation $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$, on trouve que ℓ vérifie

$$\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell} \Longleftrightarrow \ell = 0$$

ce qui contredit $\ell > 0$, donc $(u_n)_n$ ne converge pas. D'aprés le théorème des suites monotones, la suite $(u_n)_n$ va sûrement diverger vers $+\infty$.

Exercice 4. On se propose d'étudier la suite définie par:

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 0.8u_n + 2,\ n \geq 1$$

On considère la suite de terme général $v_n = u_n + c$

(1) Trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général v_n soit géométrique.
(2) Exprimer u_n en fonction de n et calculer sa limite.
(3) Calculer $T_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ en fonction de n .
(4) Calculer les limites des suites $(T_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$.

Corrigé **4.**

(1) Comme $v_n = u_n + c$, alors on peut écrire

$$v_{n+1} = 0.8u_n + 2 + c = 0.8\left(u_n + \frac{2+c}{0.8}\right)$$

donc $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0.8 si $\dfrac{2+c}{0.8} = c$; c.à.d $c = -10$

(2) $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0.8 donc son terme générale s'écrit

$$v_n = v_0(0.8)^n = -8(0.8)^n$$

on déduit que

$$u_n = -8\,(0.8)^n + 10 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 10$$

(3) Puisque $(v_n)_n$ est géométrique de raison 0.8, alors

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n = v_0\frac{1-(0.8)^{n+1}}{1-0.8} \\ &= -40\left(1-(0.8)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Puisque $u_n = v_n + 10$, on déduit que

$$S_n = T_n + \underbrace{(10 + 10 + \ldots + 10)}_{(n+1)\ fois} = -40\left(1-(0.8)^{n+1}\right) + 10(n+1)$$

(4) $\lim_{n\to+\infty} T_n = -40$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 5. Etudier les suites suivantes;

1. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ 2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ 3. $u_n = \dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$

4. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$ 5. $u_n = \sin(\dfrac{2n\pi}{3})$ 6. $u_n = n\cos n + n^2$

7. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 8. $u_n = \dfrac{E(nx)}{x}$, 9. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$

Corrigé **5.**

(1) On écrit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{5n}\left(\frac{1+\frac{(-1)^n}{2n}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{5n}}\right)$$

or d'aprés le critère d'encadrement; on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{5n} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{5}$$

(2) On a pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$

donc $(u_n)_n$ est minorée par 0 et décroissante, on conclut qu'elle est convergente.

(3) On a

$$(n+\frac{1}{2})^2 - 1 < E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right) \leq (n+\frac{1}{2})^2$$

$$(n-\frac{1}{2})^2 - 1 < E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right) \leq (n-\frac{1}{2})^2$$

donc

$$\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} < u_n < \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1} = 1$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

(4) On a

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leq 3^{\frac{1}{n}}$$

d'autre part

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 3^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln 3} = 1$$

donc par le théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et parsuite (u_n) C.V

(5) On a

$$u_{3n} = \sin(2n\pi) = 0, \quad et \quad u_{3n+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

On conclut que $(u_n)_n$ est divergente.

(6) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\cos(n) \geq -1 \Longrightarrow u_n \geq n^2 - n$$

or $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^2 - n = +\infty$ alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

d'où $(u_n)_n$ est divergente.

(7) On a

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

or

$$\frac{-}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ donc par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, et parsuite (u_n) C.V

(8) On a

$$nx - 1 \leq E(nx) < nx$$

- Si $x > 0$ alors

$$\frac{E(nx)}{x} \geq \frac{nx-1}{x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \Longrightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- Si $x < 0$ alors

$$\frac{E(nx)}{x} \geq \frac{nx}{x} = n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \Longrightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Dans les deux cas $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $(u_n)_n$ diverge.

(9) On a pour tout $1 \leq k \leq n$

$$kx - 1 \leq E(kx) < kx$$

En sommant

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} kx = x\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ alors on trouve

$$\frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) < \frac{1}{n^2}x\frac{n(n+1)}{2}$$

c-à-d

$$\frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} \leq u_n < \frac{(n+1)}{2n}x$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n+1)}{2n}x = \dfrac{x}{2}$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{x}{2}$$

parsuite (u_n) C.V

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}{n}$$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée suite des sommes de césaro associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite l. Réciproque ?

(2) Application: Soit (u_n) une suite de réels on suppose que $(u_{n+1} - u_n) \longrightarrow \lambda$. Montrer que $(\frac{u_n}{n}) \longrightarrow \lambda$.

Corrigé **6.**

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ telque\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} |s_n - l| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_1-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{N_1}^{n-1}(u_k - l)\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1-1}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{N_1}^{n-1}|u_k - l| \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{N_1-1}|u_k - l| = 0$ donc

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ telque\ \forall n \geq N_2,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1-1}|u_k - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$, on aura

$$|s_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = l$$

La réciproque est fausse; il suffit de considérer la suite $u_n = (-1)^n$

(2) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. La suite des sommes de césaro associée à $(v_n)_n$ est

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}}{n} \\ &= \frac{u_n - u_0}{n} = \frac{u_n}{n} - \frac{u_0}{n} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lambda$ alors

$$\frac{u_n}{n} = s_n + \frac{u_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

Exercice 7. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on suppose que e est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers p et q premiers entre eux tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n \geq 1$, par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

(1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement monotones.
(2) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
(3) On admet que la limite commune de (u_n) et (v_n) est le nombre réel e. Montrer que

$$q!u_q < p \times (q-1)! < q!u_q + 1$$

(4) En déduire que e n'est pas rationnel.

Corrigé **7.**

(1) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
et $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n-1}{n!(n+1)!} < 0, \forall n > 1$ $(v_n)_n$ est strictement décroissante.
(2) Puisque $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ alors

$$u_n < v_n \ et\ v_n - u_n = \frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On déduit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite.
(3) Pour $n = q$ on aura

$$u_q < e < v_q \Longrightarrow u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q!}$$

en multipliant par $q!$ on trouve

$$q!u_q < p(q-1)! < q!u_q + 1$$

(4) On a

$$q!u_q = q!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!})$$

or pour tout $k \in \{1, \ldots ; q\}$ on a

$$q!\frac{1}{k!} = q(q-1)\ldots(q-k+1) \in \mathbb{N}$$

donc $N = q!u_q$ est un entier avec

$$N < p(q-1)! < N + 1$$

on a trouvé $p(q-1)!$ un entier inclus strictement entre deux entiers successifs , ceci étant absurde, on conclut que e n'est pas rationnel.

Exercice 8. On définie par récurrence $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant: $u_0 = 3,\ v_0 = 4$, et si $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

(1) On pose $w_n = v_n - u_n$, $\forall n \geq 0$. Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive et calculer sa limite.
(2) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
(3) On considère à présent la suite $(t_n)_n$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par: $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Montrer que la suite $(t_n)_n$ est constante. En déduire la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Corrigé **8.**

(1) Il est facile à vérifier que pour tout n

$$w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n$$

donc $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique positive de raison $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 0$.

(2)
- d'aprés (1) on a $0 < w_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$
- $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante
- $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante.

On conclut les deux suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers la même limite ℓ.

(3) On a

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{v_n + u_n}{2} + 2\frac{u_n + 3v_n}{4}\right) = t_n$$

donc $(t_n)_n$ est constante et parsuite

$$t_n = t_0 = \frac{11}{3}$$

En passant à la limite dans t_n on trouve

$$\frac{\ell + 2\ell}{3} = \frac{11}{3} \Longleftrightarrow \ell = \frac{11}{3}$$

Exercice 9.

(1) Soit (x_n) une suite réelle telle que les suites extraites (x_{2n}) et $(x_{2n+1}$) tendent vers la même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'il en est de même pour la suite(x_n).

(2) Soit (x_n) une suite réelle telle que les suites extraites (x_{2n}) et $(x_{2n+1}$) et (x_{3n}) soient convergentes. Montrer que la suite(x_n) est convergente.

Corrigé 9.

(1) Supposons $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ alors
$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N_1,\ |x_{2p} - l| < \varepsilon$
$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N_1,\ |x_{2p+1} - l| < \varepsilon$
Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ et soit $n \geq N$ alors on a deux cas possible pour n
- Si $n = 2p \Rightarrow 2p \geq N \geq 2N_1 \Rightarrow p \geq N_1 \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$
- Si $n = 2p + 1 \Rightarrow 2p + 1 \geq N \geq 2N_2 + 1 \Rightarrow p \geq N_2 \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$

dans les deux cas on a montré que

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - l| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

(2) On suppose

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = l_1,\ \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = l_2,\ \lim_{n\to+\infty} x_{3n} = l_3$$

alors $(x_{6n})_n$ est une sous-suite de $(x_{2n})_n$ et $(x_{3n})_n$ alors $l_1 = l_3$, d'autre part $(x_{6n+1})_n$ est une sous-suite de $(x_{2n+1})_n$ et $(x_{3n})_n$ alors $l_2 = l_3$. On déduit que

$$l_1 = l_2$$

En utilisant la première question, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l_1 = l_2 = l$$

d'où la suite(x_n) est convergente.

Exercice 10.
Soit (u_n) une suite pour laquelle il existe un nombre $\lambda \in [0,1[$, et un nombre réel positive k tels que, pour tout entier n

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k\lambda^n.$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

Corrigé 10 **.** Soient n, p deux entiers. En écrivant:

$$u_{n+p} - u_n = (u_{n+p} - u_{n+p-1}) + (u_{n+p-1} - u_{n+p-1}) + \ldots + (u_{n+1} - u_n)$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient:

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &\leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-1}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq k(\lambda^{n+p-1} + \cdots + \lambda^n) \end{aligned}$$

le terme de droite est la somme des termes d'une suite géométrique qui se calcule,et l' on obtient

$$|u_{n+p} - u_n| \leq k\lambda^n \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \leq k\frac{1}{1-\lambda}\lambda^n, \quad \lambda \in [0,1[$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k\lambda^n}{1-\lambda} = 0$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{k\lambda^n}{1-\lambda}\right| < \varepsilon$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N,\ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

c-à-d $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et parsuite elle est convergente.

Exercice 11.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n})$ pour tout entier n.

(1) Montrer que pour tout n on a : $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$.
(2) Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.
(3) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il complet? (on peut remarquer que la suite $(u_n)_n$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$)

Corrigé **11.**

(1) On montre par récurrence que pour tout n on a : $u_n > 0$. De même on a $u_0^2 > 2$ et

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^4 - 4u_n^2 + 4\right) \\ &= \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^2 - 2\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

donc $u_n^2 > 2$.

(2) On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{2}{u_n^2}) < 1$ donc $(u_n)_n$ est décroissante. De plus $u_n > 0$ et $u_n^2 > 2$ alors la suite $(u_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$, de plus elle est décroissante donc d'aprés le théorème de la convergence monotone elle converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}) \Longleftrightarrow \ell^2 = 2 \Longleftrightarrow \ell = \sqrt{2}$$

(3) $(u_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ convergente donc c'est une suite de Cauchy mais sa limite n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. On conclut que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.