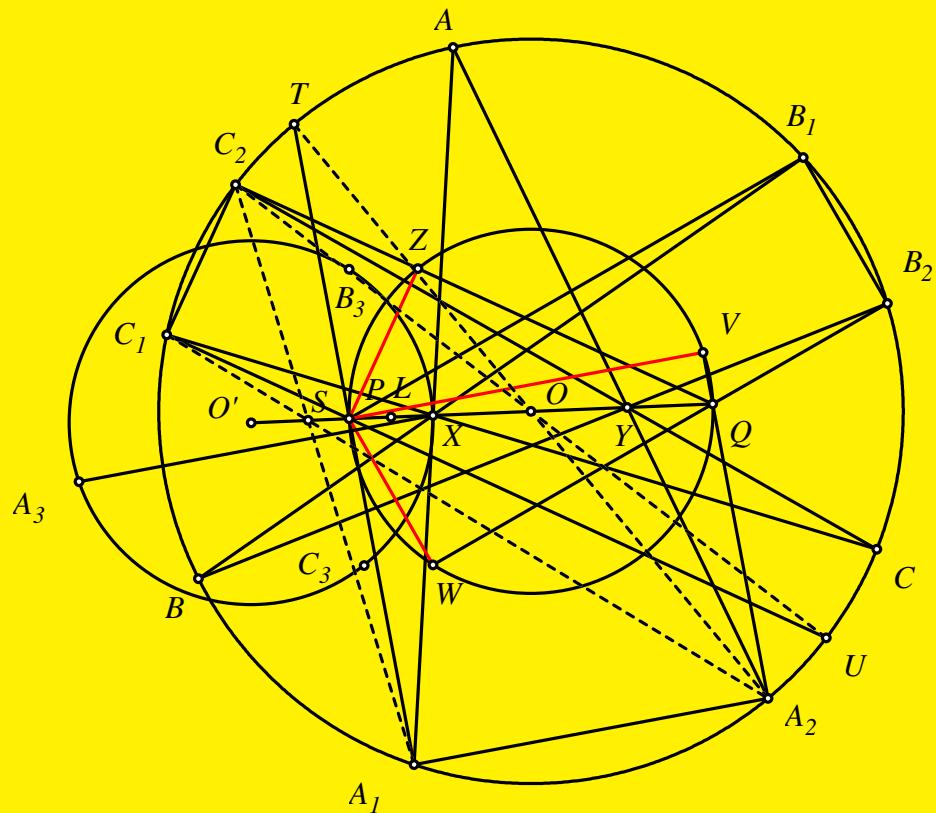


Nguyễn Văn Linh

108 BÀI TOÁN HÌNH HỌC SƠ CẤP



108 bài toán hình học sơ cấp

Nguyễn Văn Linh

Biên tập: Nguyễn Hoàng Tùng Lâm

Lời nói đầu

Hình học sơ cấp là một phân môn rất khác biệt so với phần còn lại của toán phổ thông. Nó mang vẻ đẹp ẩn chứa trong những điểm, đường thẳng, đường tròn mà muôn cảm nhận ta phải có cái nhìn tinh tế, một trí tưởng tượng phong phú. Vẻ đẹp ấy có sức cuốn hút kì lạ đến nỗi những người đam mê săn sàng bỏ rất nhiều thời gian chỉ để ngồi vẽ hình. Họ tìm tòi lời giải, khai thác những tính chất thú vị xung quanh bài toán. Để rồi đêm trăn trọc mất ngủ khi chưa thể giải ra, nhưng cũng thật khó diễn tả cảm giác hạnh phúc khi kẻ được đường phụ hay sáng tạo được vấn đề mới.

Cuốn sách này là kết quả của những đêm trăn trở như vậy. 108 bài toán đều do tác giả sáng tác trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy đội tuyển HSG Quốc gia. Khá nhiều trong số đó về sau được sử dụng làm đề thi của một số nước như Nga, Trung Quốc, Arab Saudi... Đặc biệt là bài toán G8 trong bộ IMO Shortlist 2012 trùng với bài tác giả đưa lên diễn đàn AoPS trước đó 2 năm. Cũng có một số bài được đưa vào sách nước ngoài như cuốn *Geometry in Figures* của tác giả A.Akopyan, *555 geometry problems* của nhóm tác giả người Bulgaria...

Nội dung của cuốn sách gồm 4 chương. Chương 1 cung cấp một số định lý cổ điển trong hình học. Đây là những định lý được sử dụng khá nhiều trong các lời giải. Vì vậy bạn đọc có thể xem chúng như kiến thức cơ bản và đối chiếu lại khi gặp vướng mắc. Chương 2 và chương 3 là tuyển tập các bài toán cùng lời giải của chúng. Thứ tự của các bài toán không theo mức độ từ dễ đến khó, nhưng có một số chuỗi được tác giả sắp xếp theo cùng một chủ đề để tiện theo dõi. Chương cuối là một số kinh nghiệm của tác giả trong việc sáng tạo bài toán mới, lời giải thích về quá trình những bài toán trong cuốn sách này được tìm ra. Bên cạnh đó là quan niệm của tác giả về một bài toán đẹp.

Nội dung của cuốn sách phù hợp với các bạn học sinh ôn thi học sinh giỏi Quốc gia, là tài liệu cho các giáo viên bồi dưỡng đội tuyển cũng như bạn đọc yêu thích hình học sơ cấp. Nhân đây xin chân thành cảm ơn sự đóng góp của bạn bè và học sinh trong việc đưa ra lời giải cho một số bài toán.

Cuốn sách được tác giả biên soạn khá kĩ lưỡng, tuy nhiên chắc chắn không thể tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp cho cuốn sách từ độc giả. Mọi góp ý xin gửi về hòm thư nguyenvanlinhkhthn@gmail.com hoặc nguyenhoangtunglam2001@gmail.com.

Hà Nội, ngày 26 tháng 03 năm 2018
Nguyễn Văn Linh

Mục lục

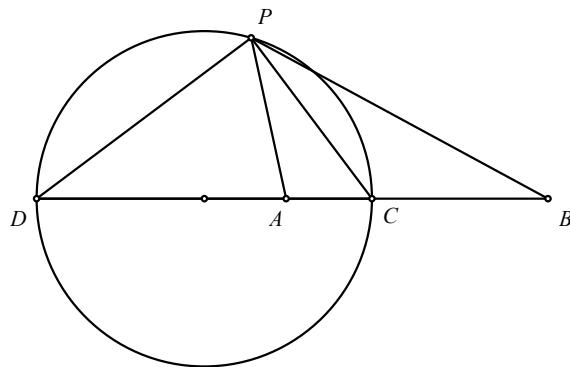
Lời nói đầu	1
1 Các định lý cổ điển	3
2 Đề bài	23
3 Lời giải	35
4 Sáng tạo một bài toán hình học	171
4.1 Mở đầu	171
4.2 Sáng tạo ra bài toán mới như thế nào?	171
4.2.1 Lấy cảm hứng từ một mô hình đã biết	171
4.2.2 Đặc biệt hóa	174
4.2.3 Tổng quát hóa	176
4.2.4 Nghịch đảo	179
4.3 Thế nào là một bài toán đẹp?	180

Chương 1

Các định lý cổ điển

Trong chương này, tác giả giới thiệu tới bạn đọc các định lý cổ điển trong hình học sơ cấp. Các định lý này được sử dụng khá nhiều trong quá trình giải toán. Vì vậy tác giả cố gắng chứng minh chi tiết cho từng định lý theo cách dễ hiểu nhất để bạn đọc tiện sử dụng như những bỗ đề.

1. **Đường tròn Apollonius.** Cho hai điểm A, B . Tập hợp các điểm P sao cho tỉ số $\frac{PA}{PB} = k$ không đổi ($k > 0$) là một đường tròn, được gọi là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng AB ứng với tỉ số k .



Chứng minh. Gọi C, D là hai điểm nằm trong và ngoài đoạn thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$.

Khi đó $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ nên C, D lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc APB . Suy ra $\angle CPD = 90^\circ$. Vậy P nằm trên đường tròn đường kính CD .

Ngược lại giả sử P là điểm bất kì nằm trên đường tròn đường kính CD . Khi đó $\angle CPD = 90^\circ$. Mà $(ABCD) = -1$ nên theo tính chất hàng phân giác, suy ra C, D lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc APB . Từ đó $\frac{PA}{PB} = k$.

Như vậy tập hợp các điểm P là đường tròn đường kính CD . □

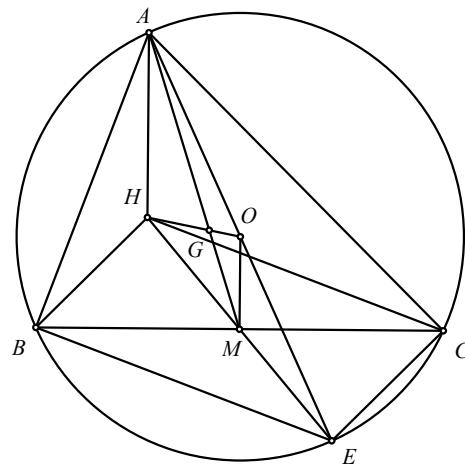
Chú ý rằng khi $k = 1$, đường tròn Apollonius suy biến thành đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Từ định nghĩa đường tròn Apollonius của đoạn thẳng chúng ta xây dựng đường tròn Apollonius của một tam giác như sau.

Đường tròn Apollonius của tam giác ABC ứng với đỉnh A là đường tròn có đường kính là đoạn thẳng nối hai chân đường phân giác trong và ngoài góc BAC.

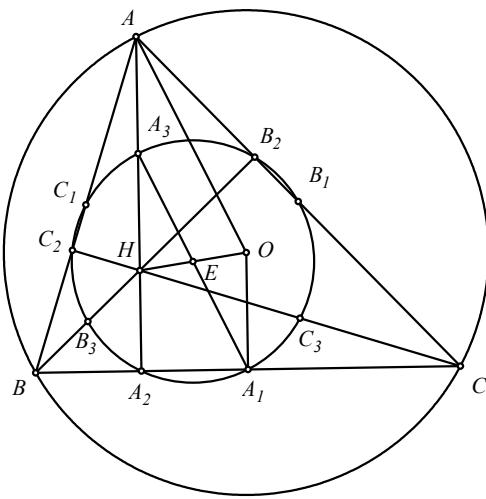
Như vậy trong một tam giác, có ba đường tròn Apollonius ứng với ba đỉnh của tam giác. Rõ ràng các đỉnh của tam giác đều nằm trên đường tròn Apollonius tương ứng. Sau đây chúng ta tìm hiểu một số tính chất của các đường tròn này.

2. **Đường thẳng Euler.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), với trực tâm H , trọng tâm G . Khi đó H, G, O thẳng hàng và $\overline{GH} : \overline{GO} = -2$.



Chứng minh. Gọi E là điểm đối xứng với A qua O . M là trung điểm BC . Dễ thấy $BHCE$ là hình bình hành nên M đồng thời là trung điểm HE . Suy ra MO là đường trung bình của tam giác AHE . Do $\frac{AG}{GM} = \frac{AH}{OM} = 2$ nên theo định lý Thales, G là điểm chia đoạn HO theo tỉ số -2 . \square

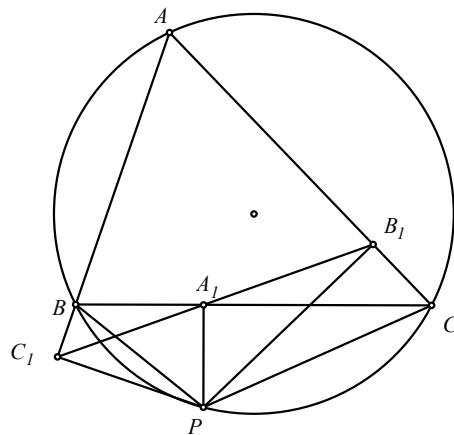
3. **Đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm).** Cho tam giác ABC với trực tâm H , tâm đường tròn ngoại tiếp O . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C xuống BC, CA, AB ; A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm AH, BH, CH . Khi đó 9 điểm $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ cùng nằm trên đường tròn có tâm là trung điểm OH .



Chứng minh. Theo phép chứng minh đường thẳng Euler, $AH \parallel 2OA_1$ nên $AA_3 \parallel OA_1$, từ đó AA_3A_1O là hình bình hành. Suy ra A_1A_3 đi qua trung điểm E của HO và $A_1A_3 = AO = R$. Do $\angle A_3A_2A_1 = 90^\circ$ nên A_1, A_2, A_3 cùng nằm trên đường tròn $(E, \frac{R}{2})$. Chứng minh tương tự suy ra 9 điểm cùng nằm trên $(E, \frac{R}{2})$. \square

Nhận xét. Dễ thấy rằng đường tròn Euler là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$, hoặc qua phép vị tự tâm G tỉ số $\frac{-1}{2}$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

4. **Đường thẳng Simson của tam giác.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Khi đó hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh của tam giác ABC thẳng hàng khi và chỉ khi P nằm trên (O) .



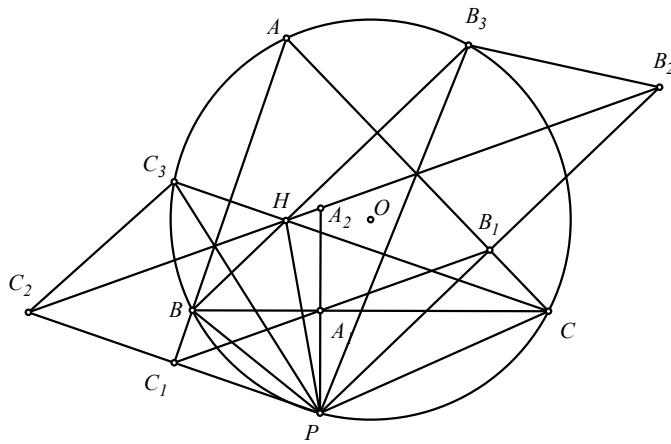
Chứng minh. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P trên BC, CA, AB .

Ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle BA_1C_1 = \angle B_1A_1C$.

Do các tứ giác PC_1BA_1, PA_1B_1C nội tiếp nên $\angle BA_1C_1 = \angle BPC_1, \angle B_1A_1C = \angle B_1PC$.

Vậy $\angle BA_1C_1 = \angle B_1A_1C$ khi và chỉ khi $\angle BPC_1 = \angle B_1PC$ hay $\angle BPC = \angle B_1PC_1 = 180^\circ - \angle BAC$. Điều này tương đương P nằm trên (O) . \square

5. **Đường thẳng Steiner của tam giác.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm bất kì nằm trên (O) . Khi đó các điểm đối xứng với P qua ba cạnh của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng, đồng thời đường thẳng đó đi qua trực tâm của tam giác ABC .



Chứng minh. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB ; H là trực tâm tam giác ABC ; B_3, C_3 lần lượt là giao điểm thứ hai của BH, CH với (O) .

Để thấy B_3, C_3 lần lượt là điểm đối xứng với H qua AC, AB . Do đó HC_3C_2P, HB_3B_2P là các hình thang cân.

Ta có $\angle C_3HC_2 + \angle C_3HB_3 + \angle B_3HB_2 = \angle HC_3P + 180^\circ - \angle BAC + \angle HB_3P = \angle PAC + \angle PAB + 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ$.

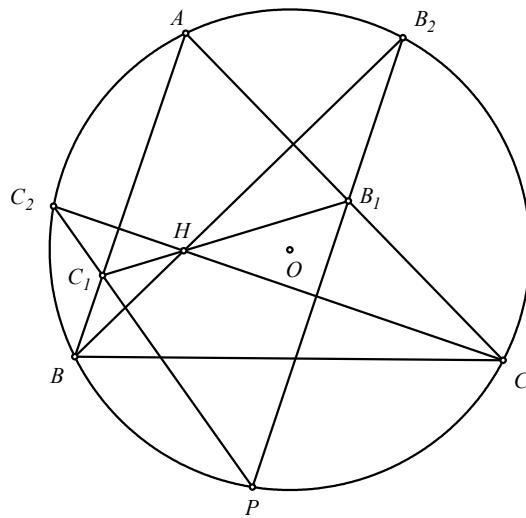
Vậy C_2, H, B_2 thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có đpcm. \square

Dựa theo chứng minh đường thẳng Simson, ta nhận thấy chiều đảo của đường thẳng Steiner cũng đúng:

Nếu các điểm đối xứng của P qua BC, CA, AB thẳng hàng thì P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chúng ta đến với một dạng đảo khác của bài toán đường thẳng Steiner.

6. **Định lý Collings.** Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi d là đường thẳng bất kì đi qua H . Khi đó các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .



Chứng minh. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao của d với BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 là giao điểm thứ hai của AH, BH, CH với (O) ; B_1B_2 giao C_1C_2 tại P .

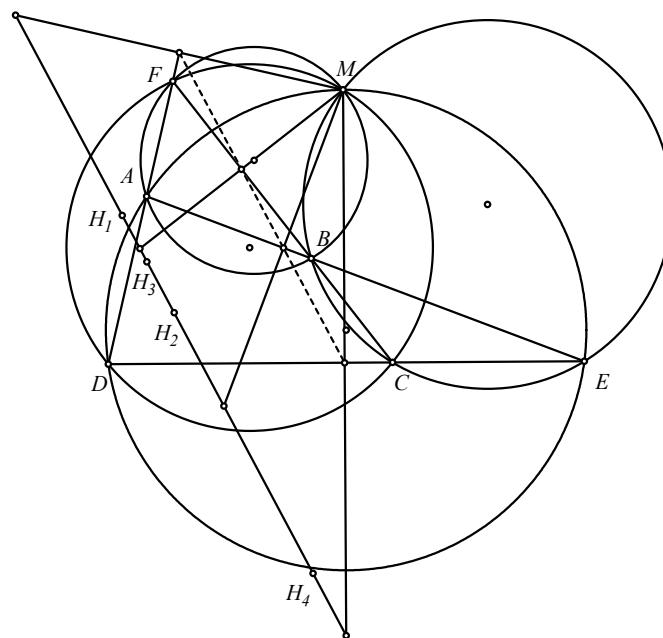
Chú ý rằng B_2, C_2 lần lượt đối xứng với H qua AC, AB .

Ta có $\angle C_1PB_1 = 180^\circ - \angle PC_1B_1 - \angle PB_1C_1 = 180^\circ - (360^\circ - 2\angle AC_1B_1 - 2\angle AB_1C_1) = 180^\circ - 2\angle BAC = \angle ABB_2 + \angle ACC_2$.

Suy ra P nằm trên (O) . Chứng minh tương tự ta thu được A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy. \square

Nhận xét. Điểm P được gọi là điểm **Anti-Steiner** của đường thẳng d .

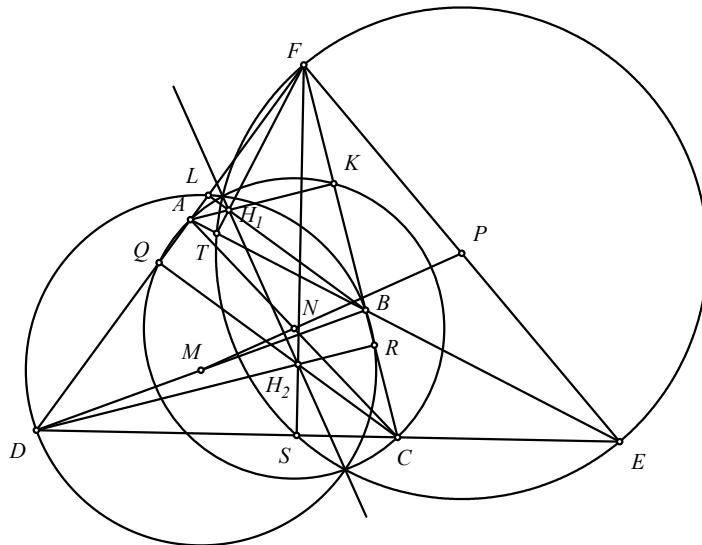
7. **Đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần.** Cho tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Khi đó trực tâm của các tam giác ABF, DCF, BCE, ADE cùng nằm trên một đường thẳng, được gọi là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$.



Chứng minh. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Các trực tâm của tam giác ABF, DCF, BCE, ADE lần lượt nằm trên đường thẳng Steiner của M ứng

với các tam giác ABF, DCF, BCE, ADE . Mà M có chung đường thẳng Simson nên cũng có chung đường thẳng Steiner với 4 tam giác này. Suy ra trực tâm của 4 tam giác thẳng hàng. \square

8. **Đường thẳng Gauss-Newton của tứ giác toàn phần.** Trung điểm các đường chéo của một tứ giác toàn phần cùng nằm trên một đường thẳng.



Chứng minh. Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm các tam giác AFB, DFC . Kẻ các đường cao AK, BL, FT của tam giác FAB, DR, CQ, FS của tam giác FDC .

Ta có $\overline{H_1A} \cdot \overline{H_1K} = \overline{H_1B} \cdot \overline{H_1L}$, $\overline{H_2D} \cdot \overline{H_2R} = \overline{H_2C} \cdot \overline{H_2Q}$ nên H_1H_2 là trực đẳng phuong của (AC) và (BD) .

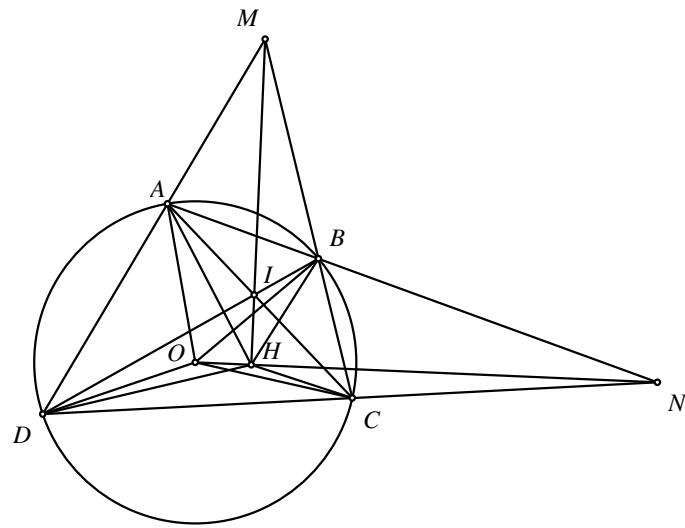
$\overline{H_1F} \cdot \overline{H_1T} = \overline{H_1B} \cdot \overline{H_1L}$, $\overline{H_2F} \cdot \overline{H_2S} = \overline{H_2D} \cdot \overline{H_2R}$ nên H_1H_2 là trực đẳng phuong của (BD) và (EF) .

Như vậy ba đường tròn $(AC), (BD), (EF)$ đồng trực và có trực đẳng phuong là H_1H_2 . Do đó trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng. \square

Nhận xét. Từ lời giải trên ta thu được kết quả sau.

Trong một tứ giác toàn phần, đường thẳng Steiner và đường thẳng Simson cùng vuông góc với đường thẳng Gauss-Newton.

9. **Định lý Brocard.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . AD giao BC tại M , AB giao CD tại N , AC giao BD tại I . Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác MIN .



Chứng minh. Gọi H là giao điểm khác I của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID , BIC . Hiển nhiên M nằm trên trực tiếp phương của (AID) và (BIC) nên M, I, H thẳng hàng.

Xét tứ giác $DOHC$ ta có

$$\angle DHC = 360^\circ - \angle DHI - \angle CHI = \angle DAC + \angle DBC = \angle DOC.$$

Từ đó suy ra tứ giác $DOHC$ nội tiếp. Tương tự ta cũng có tứ giác $AOHB$ nội tiếp.

$$\text{Để thấy } \overline{NA} \cdot \overline{NB} = \overline{NC} \cdot \overline{ND}.$$

Suy ra N nằm trên trực tiếp phương của hai đường tròn $(AIHD)$, $(BIHC)$, suy ra O, H, N thẳng hàng.

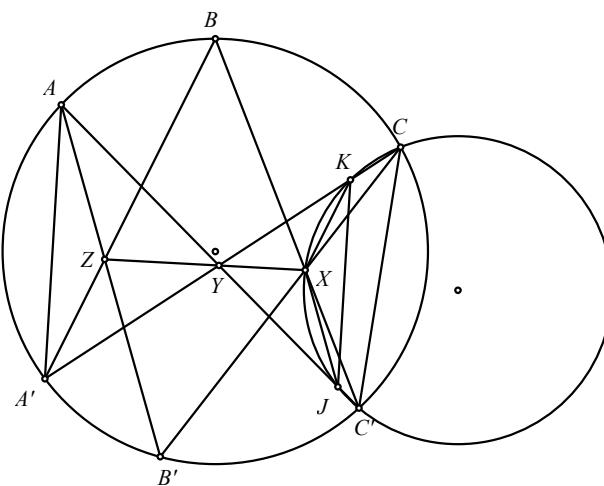
Ta có $\angle AHI = \angle ADB = \angle ACB = \angle BHI$. Suy ra HI là phân giác $\angle AHB$. Lại có $OA = OB$ nên HO là phân giác ngoài của $\angle AHB$.

Suy ra $IM \perp ON$. Tương tự ta có $IN \perp OM$.

Vậy O là trực tâm tam giác MIN . □

10. **Định lý Pascal.** Cho sáu điểm bất kì A, B, C, A', B', C' cùng thuộc một đường tròn. Khi đó giao điểm của các cặp đường thẳng (AB', BA') , (AC', CA') , (BC', CB') thẳng hàng.

Chứng minh. Cách 1 (Jan van Yzeren).

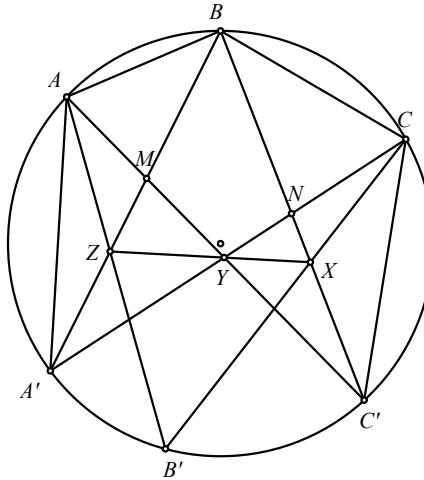


Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (BC', CB') , (AC', CA') , (AB', BA') .

$A'C, AC'$ giao (XCC') lần thứ hai tại K, J .

Ta có $\angle A'KX = \angle XC'C = \angle BA'C$ nên $XK \parallel A'Z$. Chứng minh tương tự ta suy ra hai tam giác KKJ và ZAJ có cạnh tương ứng song song. Từ đó XZ, KA', JA đồng quy hay X, Y, Z thẳng hàng.

Cách 2.



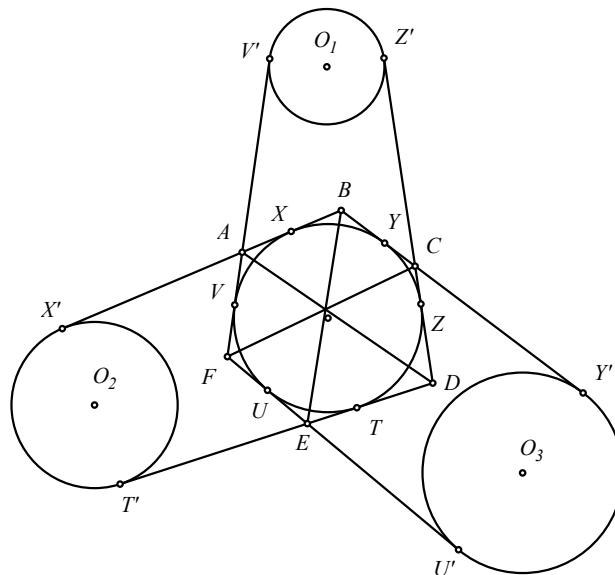
Gọi M, N lần lượt là giao của AC' và BA' , BC' và CA' .

Ta có $A(A'C'B'B) = C(A'C'B'B)$ nên $(A'MZB) = (NC'XB)$. Điều đó nghĩa là MC', NA', XZ đồng quy hay X, Y, Z thẳng hàng. \square

11. **Định lý Brianchon.** Cho lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Khi đó các đường chéo AD, BE, CF đồng quy.

Chú ý rằng lục giác $ABCDEF$ không nhất thiết phải là lục giác lồi.

Chứng minh. Cách 1 (A.S.Smogorzhevski).



Gọi X, Y, Z, T, U, V lần lượt là tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DE, EF, FA .

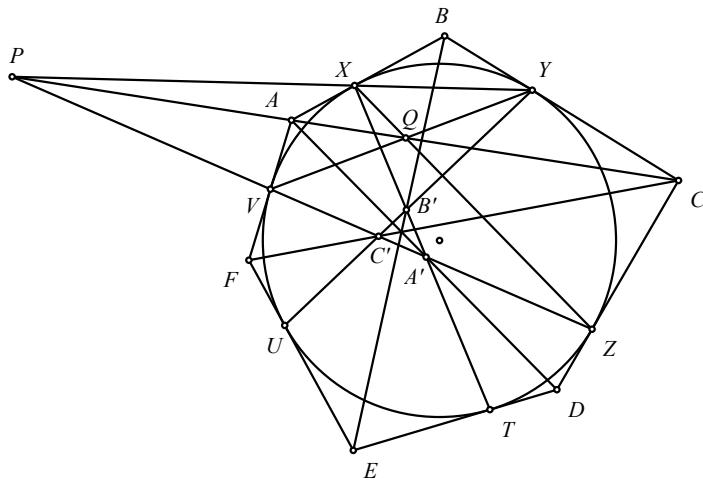
Trên tia XA lấy X' , tia YC lấy Y' , tia ZC lấy Z' , tia TE lấy T' , tia UE lấy U' , tia VA lấy V' sao cho $XX' = YY' = ZZ' = TT' = UU' = VV'$.

Rõ ràng tồn tại đường tròn (O_1) tiếp xúc với VV', ZZ' tại V', Z' ; đường tròn (O_2) tiếp xúc với YY', UU' tại Y', U' ; đường tròn (O_3) tiếp xúc với XX', TT' tại X', T' .

Lại có $AV' = VV' - VA = XX' - XA = AX'$. Suy ra A nằm trên trực đẳng phương của (O_1) và (O_3) , chứng minh tương tự suy ra AD là trực đẳng phương của (O_1) và (O_3) .

Tương tự ta thu được AD, BE, CF đồng quy tại tâm đẳng phương của $(O_1), (O_2), (O_3)$.

Cách 2.



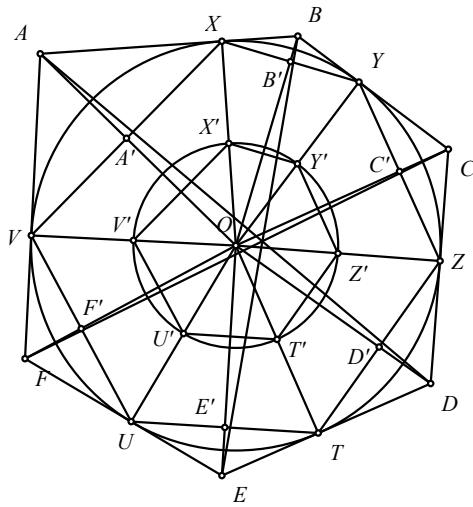
Kí hiệu các tiếp điểm giống cách 1. Gọi $XY \cap VZ = \{P\}, XZ \cap YU = \{Q\}$.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm X, X, Y, Z, V, V suy ra P, A, Q thẳng hàng. Tương tự suy ra P, Q, A, C thẳng hàng.

Bằng phương pháp tương tự ta thu được XT, ZV, AD đồng quy tại A' , XT, YU, BE đồng quy tại B' , YU, ZV đồng quy tại C' .

Xét hai tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có $AB \cap A'B' = \{X\}, AC \cap A'C' = \{P\}, BC \cap B'C' = \{Y\}$ thẳng hàng nên theo định lý Desargues, AA', BB', CC' đồng quy hay AD, BE, CF đồng quy.

Cách 3.



Vẫn kí hiệu các tiếp điểm giống cách 1.

Gọi A' là giao của OA với XV , tương tự xác định B', C', D', E', F' .

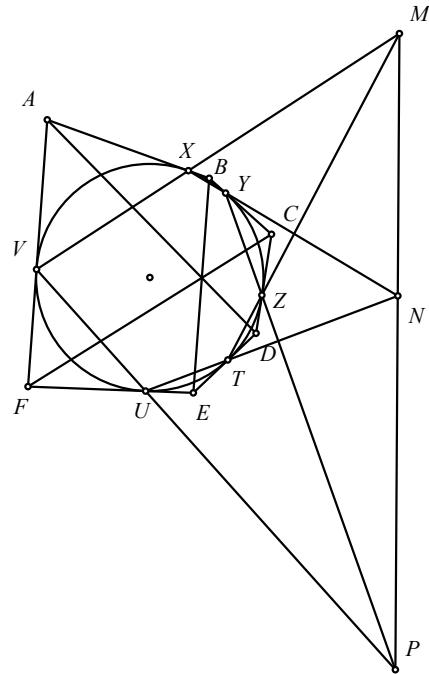
Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}_O^{R^2}: A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto D', E \mapsto E', F \mapsto F'$.

Xét phép vị tự $\mathcal{H}_O^{\frac{1}{2}}: X \mapsto X', Y \mapsto Y', Z \mapsto Z', T \mapsto T', U \mapsto U', V \mapsto V'$.

Khi đó AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A'OD', B'OE', C'OF'$ đồng trực. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp của 3 tam giác này thẳng hàng hay $X'V' \cap Z'T', X'Y' \cap T'U', Y'Z' \cap U'V'$ thẳng hàng.

Mà X', Y', Z', T', U', V' cùng nằm trên $(O, \frac{R}{2})$ nên theo định lý Pascal, $X'V' \cap Z'T', X'Y' \cap T'U', Y'Z' \cap U'V'$ thẳng hàng. Ta có đpcm.

Cách 4.



Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm X, Y, Z, T, U, V suy ra $VX \cap ZT = \{M\}$, $XY \cap UT = \{N\}$, $YZ \cap UV = \{P\}$ thẳng hàng.

Xét cực và đối cực ứng với đường tròn (O).

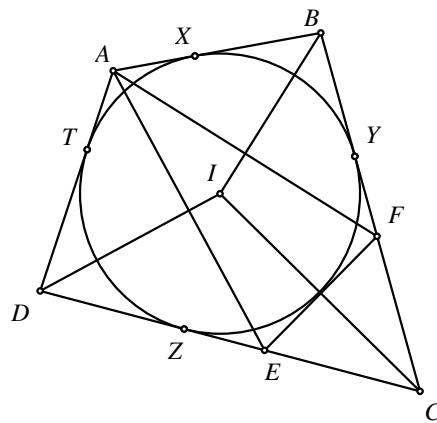
Ta có M nằm trên đường đối cực của A và D nên A, D nằm trên đường đối cực của M . Vậy AD là đường đối cực của M .

Tương tự BE là đường đối cực của N , CF là đường đối cực của P .

Do M, N, P thẳng hàng nên AD, BE, CF đồng quy tại cực của đường thẳng qua M, N, P . \square

Nhận xét. Cách 3,4 cho thấy định lý Brianchon và định lý Pascal đối ngẫu với nhau. Có thể dùng định lý này để chứng minh định lý kia.

12. **Định lý Pithot.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Khi đó $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp khi và chỉ khi $AB + CD = AD + BC$.



Chứng minh. - Chiều thuận. Giả sử tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I).

Gọi X, Y, Z, T lần lượt là tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA .

Ta có $AB + CD = AX + BX + DZ + CZ = AT + DT + BY + CY = AD + BC$.

- Chiều đảo. Giả sử $AB + CD = AD + BC$. Ta sẽ chứng minh tứ giác $ABCD$ có 3 đường phân giác đồng quy.

Trên các tia DC, BC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $DE = DA, BF = BA$.

Từ giả thiết ta thu được $DC - DA = CB - BA$ hay $CE = CF$.

Suy ra phân giác $\angle DCB$ chính là trung trực của đoạn thẳng EF .

Mặt khác, phân giác $\angle ADC, \angle ABC$ lần lượt là trung trực của các đoạn thẳng AE, AF nên đường phân giác của các góc DCB, ADC, ABC đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Từ đó ta có đpcm. \square

Nhận xét. Người ta còn sử dụng các dạng phát biểu sau cho định lý Pithot.

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai tia CB, DA cắt nhau tại E , hai tia BA, CD cắt nhau tại F . Khi đó tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau thỏa mãn.

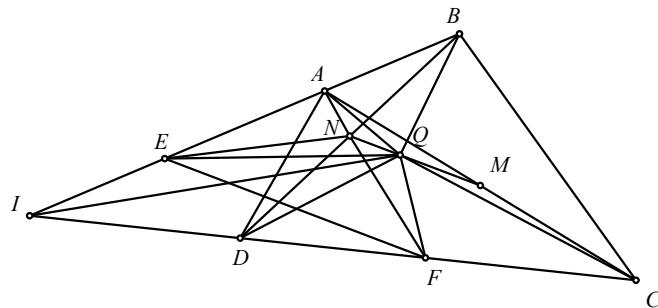
$$1) EC - FC = EA - FA.$$

$$2) EB + FB = ED + FD.$$

13. **Đường thẳng Gauss-Newton của tứ giác ngoại tiếp.** Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Khi đó O nằm trên đường thẳng nối trung điểm của AC và BD .

Chứng minh. Trước tiên ta phát biểu một bô đê sau.

Bô đê 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BD, Q là điểm trên mặt phẳng sao cho $S_{AQB} + S_{CQD} = S_{BQC} + S_{AQD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Khi đó M, N, Q thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi I là giao của AB và CD . Lấy E trên đoạn IB sao cho $AB = IE, F$ trên đoạn IC sao cho $IF = DC$.

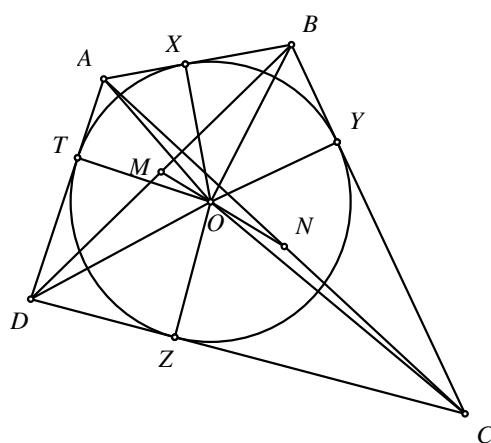
Ta có $\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{AQB} + S_{DQC} = S_{IEQ} + S_{IFQ} = S_{IEQF}$.

Mặt khác do N là trung điểm BD nên $S_{IEND} = S_{IEN} + S_{IDN} = S_{ANB} + S_{DNC} = S_{ANB} + S_{DNC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Suy ra $S_{IEQF} = S_{IEND}$ hay $S_{ENF} = S_{EQF}$. Từ đó $NQ \parallel EF$. Tương tự ta cũng chứng minh được $MQ \parallel EF$.

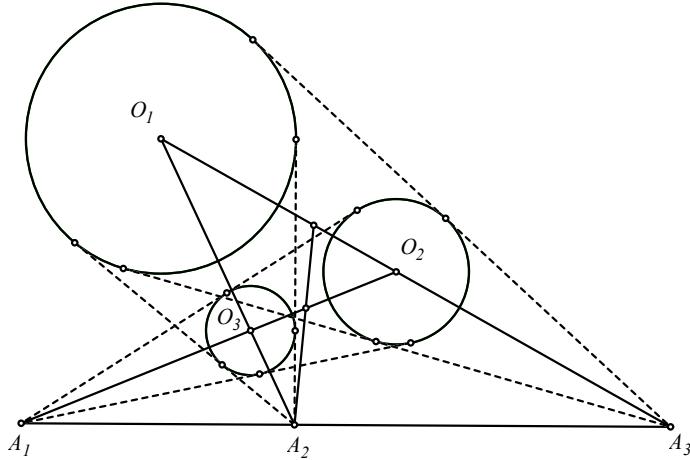
Vậy M, N, Q thẳng hàng. □

Trở lại bài toán.



Gọi r là bán kính của (O) . Theo định lý Pithot ta có $AB + CD = AD + BC$. Do đó $\frac{r}{2}(AB + CD) = \frac{r}{2}(AD + BC)$, hay $S_{AOB} + S_{COD} = S_{BOC} + S_{AOD}$. Theo bô đê trên, ta thu được O nằm trên đường thẳng nối trung điểm của AC và BD . □

14. **Định lý Monge-D'Alembert.** Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1), C_2(O_2, R_2), C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn $(C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1)$ cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cũng thuộc một đường thẳng.



Chứng minh. Ta chứng minh định lý trong trường hợp ba tâm vị tự ngoài, trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

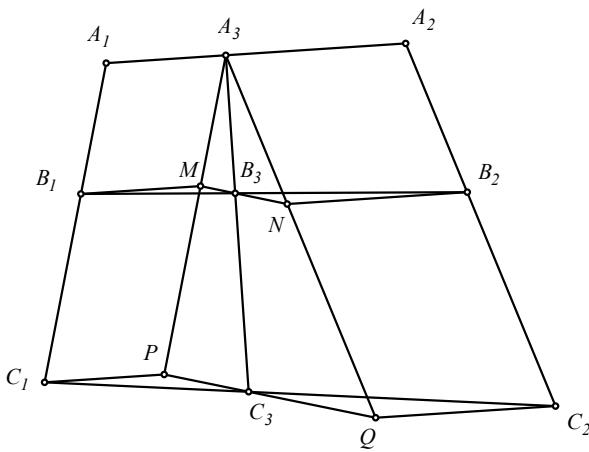
Gọi tâm vị tự của các cặp đường tròn $(C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1)$ lần lượt là A_3, A_1, A_2 . Khi đó:

$$V_{A_3}^{\frac{R_1}{R_2}} : O_2 \mapsto O_1; V_{A_2}^{\frac{R_3}{R_1}} : O_1 \mapsto O_3; V_{A_1}^{\frac{R_2}{R_3}} : O_3 \mapsto O_2.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\overline{A_1O_2}}{\overline{A_1O_3}} \cdot \frac{\overline{A_2O_3}}{\overline{A_2O_1}} \cdot \frac{\overline{A_3O_1}}{\overline{A_3O_2}} = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} = 1.$$

Theo định lý Menelaus thu được A_1, A_2, A_3 thẳng hàng. □

15. **Định lý ERIQ.** Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy các điểm A_1, B_1, C_1 , trên d_2 lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} = k$. Trên A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt lấy các điểm A_3, B_3, C_3 sao cho $\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}} = \frac{\overline{C_3C_1}}{\overline{C_3C_2}} = k$. Khi đó A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3C_3}} = k$.



Chứng minh. Dựng các hình bình hành $A_1A_3MB_1, A_1A_3PC_1, A_3A_2B_2N, A_3A_2C_2Q$.

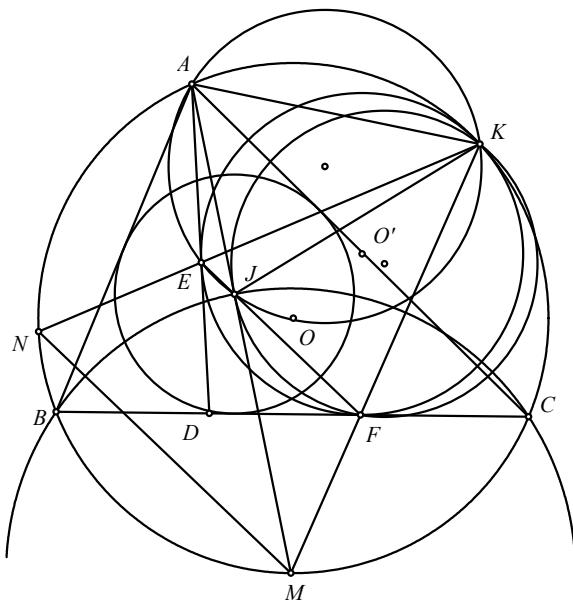
Ta có $\frac{\overline{B_1M}}{\overline{B_2N}} = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{B_1B_3}}{\overline{B_2B_3}}$ nên theo định lý Thales, B_3, M, N thẳng hàng và $\frac{\overline{B_3M}}{\overline{B_3N}} = \frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}}$.

Chứng minh tương tự suy ra C_3, P, Q thẳng hàng và $\frac{\overline{C_3P}}{\overline{C_3Q}} = \frac{\overline{B_3M}}{\overline{B_3N}} \dots (1)$

Mặt khác ta có $\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_3P}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{A_3N}}{\overline{A_3Q}}$. Suy ra $MN \parallel PQ \dots (2)$

Từ (1) và (2) suy ra A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_3P}} = k$. \square

16. **Định lý Sawayama- Thebault 1.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). D là một điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc trong với (O), tiếp xúc với các đoạn thẳng CD, AD lần lượt tại E, F . Khi đó I, E, F thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi K là tiếp điểm của (O') với (O) . KE, KF lần lượt cắt (O) lần thứ hai tại N, M . AM cắt EF tại J . Khi đó M là điểm chính giữa cung BC .

Do K là tâm vị tự ngoài của (O) và (O') nên hiển nhiên $EF \parallel MN$.

Do đó $\angle AKE = \angle AMN = \angle AJE$, suy ra tứ giác $AKJE$ nội tiếp.

Mà (O') tiếp xúc với AD nên $\angle EFK = \angle AEK = \angle AJK$, nghĩa là đường tròn ngoại tiếp tam giác JKF tiếp xúc với AM .

Suy ra $MJ^2 = MF \cdot MK$. Mặt khác, $\angle MKC = \angle BCM$ nên $MC^2 = MF \cdot MK$, ta thu được $MJ^2 = MC^2$ hay $MB = MC = MJ$.

Lại có M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC , suy ra $J \equiv I$ hay $I \in EF$. \square

Nhận xét. Đường tròn (O') được gọi là đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với AD và đỉnh C

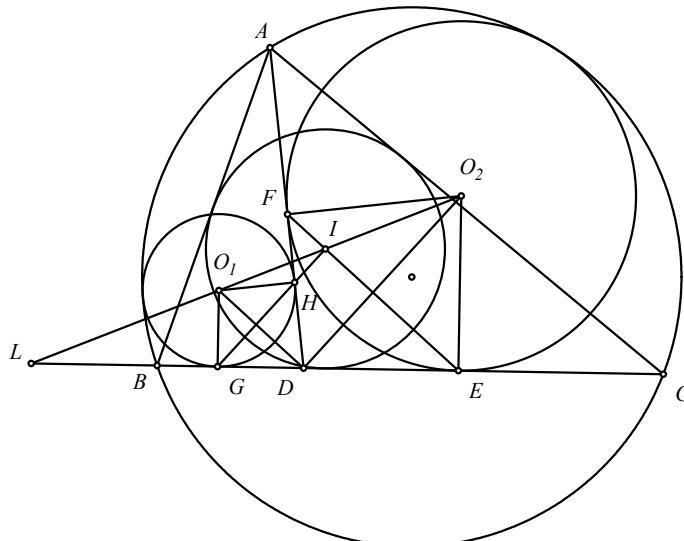
Trong trường hợp $D \equiv B$ hoặc $D \equiv C$, ta thu được bài toán sau.

17. **Bổ đề Sawayama.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi (J) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với hai cạnh AC, AB lần lượt tại E, F . Khi đó trung điểm của EF là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lưu ý rằng (J) được gọi là đường tròn mixtilinear nội tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC . Trường hợp tiếp xúc ngoài được phát biểu tương tự với tâm đường tròn nội tiếp được thay thế bằng các tâm đường tròn bằng tiếp.

Định lý Sawayama- Thebault 1 cũng như bổ đề Sawayama là một phương pháp khá thú vị để chứng minh hai đường tròn tiếp xúc nhau, dựa trên nhận xét rằng các đường tròn Thebault và mixtilinear nói trên được dựng một cách duy nhất. Nếu có một đường tròn tiếp xúc với AD, DC lần lượt tại E, F thỏa mãn EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì đường tròn đó phải là đường tròn Thebault của tam giác ABC . Do đó nó tiếp xúc với (O) .

18. **Định lý Sawayama-Thebault 2.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . D là một điểm bất kỳ trên cạnh BC . Gọi $(O_1), (O_2)$ lần lượt là các đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với đường thẳng AD và các đỉnh B, C . Khi đó I, O_1, O_2 thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi L là giao điểm của O_1O_2 và BC ; G, H là tiếp điểm của (O_1) với DB, DA ; E, F là tiếp điểm của (O_2) với DC, DA .

Theo định lý Sawayama-Thebault 1, I là giao điểm của EF và GH .

Gọi I' là giao của GH và O_1O_2 . Do GH và DO_2 cùng vuông góc với DO_1 nên $GH \parallel DO_2$.

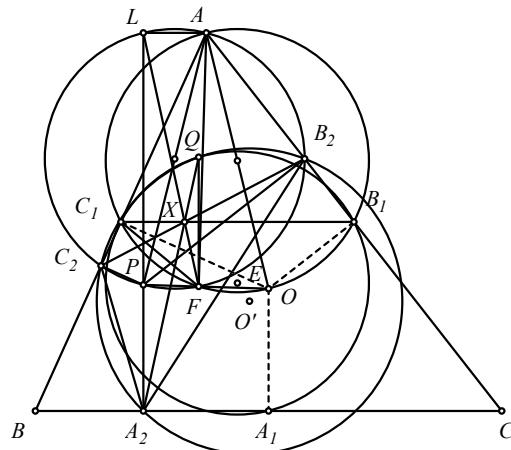
Suy ra $\frac{LI'}{LO_2} = \frac{LG}{LD}$. (1)

Mặt khác, $O_1G \parallel O_2E$ nên $\frac{LO_1}{LO_2} = \frac{LG}{LE}$. (2)

Chia theo vế của (1) cho (2) ta thu được $\frac{LI'}{LO_1} = \frac{LE}{LD}$ hay $O_1D \parallel EI'$.

Mà EI và O_1D cùng vuông góc với O_2D nên $EI \parallel O_1D$. Từ đó $I' \equiv I$ hay O_1, I, O_2 thẳng hàng. Bài toán được chứng minh. \square

19. **Định lý Fontené 1.** Cho tam giác ABC . P là điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi A_1, B_1, C_1 thứ tự là trung điểm BC, CA, AB ; $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P đối với tam giác ABC . X, Y, Z thứ tự là giao điểm của B_1C_1 với B_2C_2, A_1C_1 với A_2C_2, A_1B_1 với A_2B_2 . Khi đó A_2X, B_2Y, C_2Z đồng quy tại giao điểm của $(A_1B_1C_1)$ với $(A_2B_2C_2)$.



Chứng minh. Gọi E là tâm $(A_1B_1C_1)$, O' là tâm $(A_2B_2C_2)$, F là giao điểm của OP với đường tròn đường kính OA , L là điểm đối xứng của A_2 qua B_1C_1 thì $AL \parallel BC$. Do đó $\angle ALP = 90^\circ$.

Ta có $\angle AFP = \angle AB_2P = \angle AC_2P = \angle ALP = 90^\circ$ nên L, F, B_2, C_2 cùng thuộc (AP) .

$\angle FC_1X = \angle FAB_1 = \angle B_2C_2F$ suy ra tứ giác FXC_1C_2 nội tiếp.

Gọi L' là giao của FX với (AP) thì tứ giác $AL'C_2F$ nội tiếp. Mà FXC_1C_2 nội tiếp nên $AL' \parallel B_1C_1$ hay $L' \equiv L$. Vậy L, X, F thẳng hàng.

Gọi Q là giao của A_2X với (E) . F' là điểm đối xứng với Q qua B_1C_1 .

Xét phép đối xứng trực $B_1C_1 : (AO) \mapsto (E)$, mà $Q \in (E)$ suy ra $F' \in (AO)$.

Mặt khác cũng qua phép đối xứng trực $B_1C_1 : A_2 \mapsto L$. Vì A_2, X, Q thẳng hàng nên L, X, F' thẳng hàng. Suy ra $F' \equiv F$.

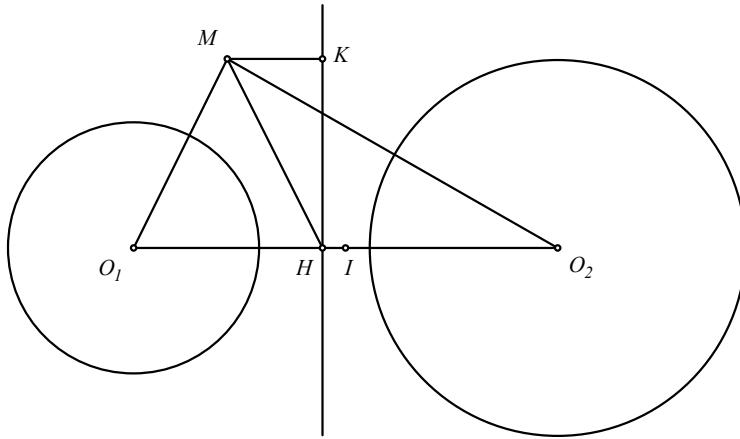
Ta thu được tứ giác A_2LQF là hình thang cân.

Suy ra $\overline{XQ} \cdot \overline{XA_2} = \overline{XL} \cdot \overline{XF} = \overline{XB_2} \cdot \overline{XC_2}$.

Vậy Q nằm trên (O') . Tương tự B_2Y, C_2Z cũng đi qua Q . Ta có đpcm. \square

20. **Công thức hiệu số phuong tích.** Cho hai đường tròn không đồng tâm (O_1, R_1) và (O_2, R_2) có trực đẳng phuong d . Xét một điểm M bất kì, gọi K là hình chiếu của M trên d , H là giao điểm của O_1O_2 với d .

Khi đó $\mathcal{P}_{M/(O_1)} - \mathcal{P}_{M/(O_2)} = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{KM}$. (1)



Chứng minh. Gọi I là trung điểm O_1O_2 .

$$\text{Ta có } \mathcal{P}_{M/(O_1)} - \mathcal{P}_{M/(O_2)} = (MO_1^2 - R_1^2) - (MO_2^2 - R_2^2).$$

$$= MO_1^2 - MO_2^2 + R_2^2 - R_1^2 = (MO_1^2 - MO_2^2) + (HO_2^2 - HO_1^2)$$

$$= (\overrightarrow{MO_1} - \overrightarrow{MO_2})(\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2}) - (\overrightarrow{HO_1} - \overrightarrow{HO_2})(\overrightarrow{HO_1} + \overrightarrow{HO_2}).$$

$$= \overrightarrow{O_2O_1} \cdot 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{O_2O_1} \cdot 2\overrightarrow{HI}$$

$$= 2\overrightarrow{O_2O_1} \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{HI}) = 2\overrightarrow{O_2O_1} \cdot \overrightarrow{MH}$$

$$= 2\overrightarrow{O_2O_1} \cdot \overrightarrow{MK} = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{KM}$$

\square

Nhận xét. Nếu điểm M nằm trên (O_2) ta có $\mathcal{P}_{M/(O_2)} = 0$, công thức hiệu số phuong tích trở thành:

$$\mathcal{P}_{M/(O_1)} = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{KM}. \quad (2)$$

Từ đó chúng ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ đồng trục và một điểm M bất kì nằm trên (O_3) . Khi đó $\frac{\mathcal{P}_{M/(O_1)}}{\mathcal{P}_{M/(O_2)}} = \frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}}$.

Chứng minh. Gọi K là hình chiếu của M trên trực đẳng phuong d của 3 đường tròn.

$$\text{Theo nhận xét trên ta có } \frac{\mathcal{P}_{M/(O_1)}}{\mathcal{P}_{M/(O_2)}} = \frac{\overline{O_1O_3} \cdot \overline{KM}}{\overline{O_2O_3} \cdot \overline{KM}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_2O_3}}.$$

\square

Ngược lại, ta cũng có:

Hệ quả 2. Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\frac{\mathcal{P}_{M/(O_1)}}{\mathcal{P}_{M/(O_2)}} = k$ không đổi là một đường tròn đồng trục với (O_1) và (O_2) .

Chứng minh. Dựng đường tròn (O_3) qua M sao cho $(O_3), (O_1), (O_2)$ đồng trục, suy ra O_1, O_2, O_3 thẳng hàng.

Theo hệ quả trên $\frac{\mathcal{P}_{M/(O_1)}}{\mathcal{P}_{M/(O_2)}} = \frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}} = k$.

Do đó O_3 cố định. Với mỗi vị trí của tâm O_3 chỉ có duy nhất một đường tròn đồng trục với (O_1) và (O_2) . Như vậy (O_3) không phụ thuộc vào vị trí của M , tức là M chuyển động trên đường tròn (O_3) đồng trục với (O_1) và (O_2) .

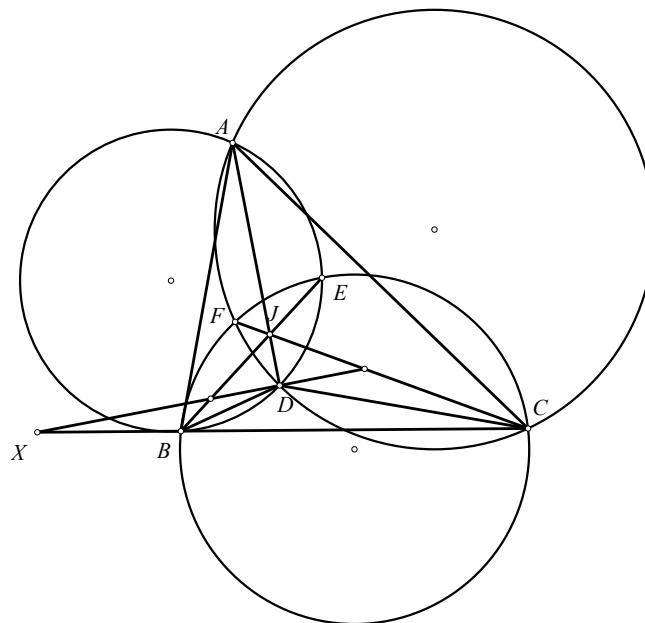
Ngoài ra ta có thể chứng minh bán kính của (O_3) bằng $\frac{\sqrt{R_2^2k^2 + R_1^2 + (O_1O_2^2 - R_1^2 - R_2^2)k}}{|1 - k|}$.

□

21. **Định lý Sondat.** Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trực giao có tâm trực giao là P và Q . Giả sử hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ thâu xạ theo tâm O . Khi đó O, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh. Trước tiên ta phát biểu 2 bổ đề sau.

Bổ đề 1 (Định lý Dergiades). Cho tam giác ABC . 3 đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt đi qua các cặp đỉnh $B, C; C, A; A, B$. Gọi D, E, F là giao điểm thứ hai của 3 đường tròn này. Đường thẳng Qua D vuông góc với AD cắt BC tại X . Tương tự xác định Y, Z . Khi đó X, Y, Z thẳng hàng.



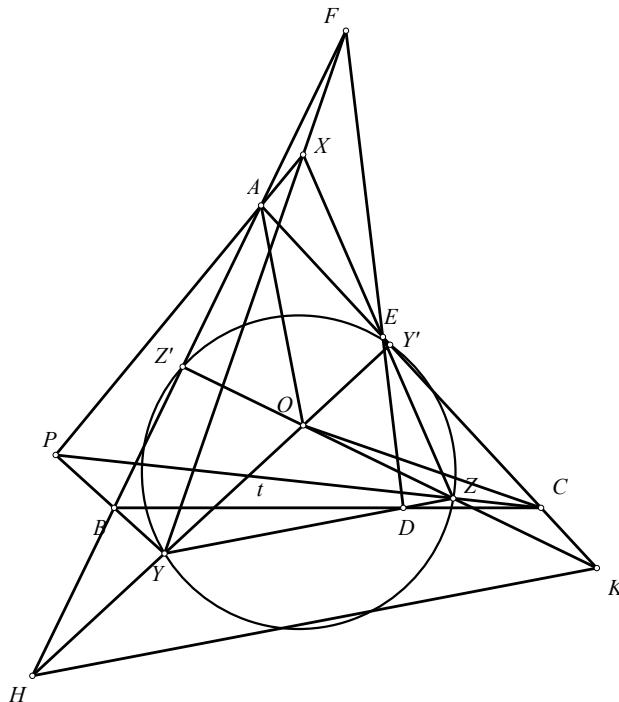
Chứng minh. Đặt $\angle BEC = \angle BFC = \alpha, \angle ADC = \angle AFC = \beta, \angle AEB = \angle ADB = \gamma$, bán kính của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt tại R_a, R_b, R_c .

Ta có $\frac{XB}{XC} = \frac{BD \cdot \sin \angle XDB}{CD \cdot \sin \angle XDC} = \frac{BD \cdot (-\cos \angle ADB)}{CD \cdot (-\cos \angle ADC)} = \frac{BD \cdot \cos \gamma}{CD \cdot \cos \beta}$.

Chứng minh tương tự suy ra $\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF}$.

Ta lại có $\frac{BD}{CD} = \frac{2R_c \sin \angle BAD}{2R_b \sin \angle CAD}$. Tương tự và áp dụng định lý Céva sin cho tam giác ABC với các đường AD, BE, CF đồng quy tại tâm đẳng phương của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ ta thu được $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$. Vậy X, Y, Z thẳng hàng. \square

Bổ đề 2. Cho hai tam giác ABC và XYZ thỏa mãn các đường vuông góc kẻ từ A, B, C tới YZ, ZX, XY và các đường vuông góc kẻ từ X, Y, Z tới BC, CA, AB cùng đồng quy tại O . Khi đó hai tam giác ABC và XYZ thấu xạ.

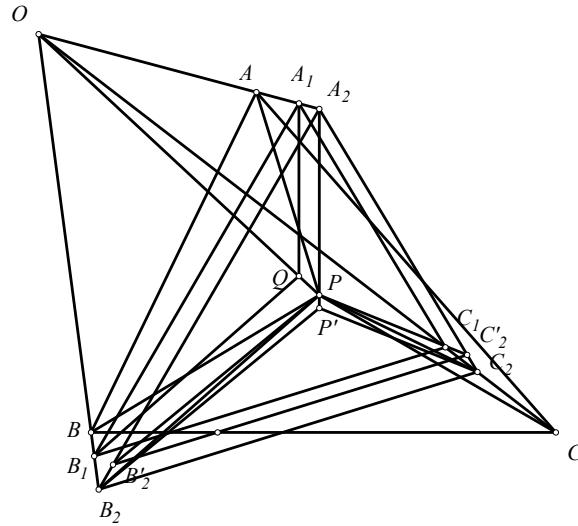


Chứng minh. Gọi X', Y', Z' lần lượt là hình chiếu của X, Y, Z trên BC, CA, AB . D, E, F lần lượt là giao của BC và YZ , AC và XZ , AB và XY . Gọi H, K lần lượt là giao của AB và OY' , AC và OZ' .

Do O là trực tâm của tam giác AHK nên $AO \perp HK$. Mà $AO \perp YZ$ nên $YZ \parallel HK$. Lại có $HZ'Y'K$ là tứ giác nội tiếp nên áp dụng định lý Reim suy ra Y, Z, Y', Z' cùng nằm trên đường tròn ω_x . Tương tự có ω_y, ω_z .

Áp dụng định lý Dergiades cho tam giác XYZ và 3 đường tròn $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ suy ra D, E, F thẳng hàng. Theo định lý Desargues ta có hai tam giác ABC và XYZ thấu xạ. \square

Trở lại việc chứng minh định lý.



Gọi A_2 là điểm nằm trên AA_1 sao cho $PA_2 \perp BC$, B_2, C_2 là hai điểm trên BB_1, CC_1 sao cho $A_2B_2 \parallel A_1B_1, A_2C_2 \parallel A_1C_1$.

Do A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại O nên hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ vị tự theo tâm O . Suy ra $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. P là tâm trực giao của tam giác $A_2B_2C_2$ ứng với tam giác ABC .

Gọi D, E, F là giao điểm của B_2C_2 với BC , A_2C_2 với AC , A_2B_2 với AB . Do hai tam giác $A_2B_2C_2$ và ABC thấu xạ nên theo định lý Desargues, D, E, F thẳng hàng.

Qua P kẻ đường thẳng vuông góc với AC, AB cắt A_2B_2, A_2C_2 lần lượt tại B'_2, C'_2 . Do các đường vuông góc kẻ từ B_2 tới AC, C_2 tới AB cắt nhau tại một điểm P' trên A_2P nên hai tam giác $PB'_2C'_2$ và $P'B_2C_2$ vị tự theo tâm A_2 . Suy ra $B'_2C'_2 \parallel B_2C_2$ và do đó P là tâm trực giao của hai tam giác $A_2B'_2C'_2$ và ABC . Theo bổ đề 2 suy ra $A_2B'_2C'_2$ và ABC thấu xạ. Theo định lý Desargues, giao điểm D' của $B'_2C'_2$ với BC nằm trên EF . Mà D và D' cùng nằm trên BC nên $D \equiv D'$ hay hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ có chung tâm trực giao P .

Ta có hai tam giác A_2PB_2 và A_1QB_1 có cạnh tương ứng song song nên vị tự theo tâm O . Suy ra O, P, Q thẳng hàng. \square

Chương 2

Đề bài

- Bài 1.** (*Tạp chí TTT2 năm 2012*) Cho tam giác ABC . P là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của P trên BC, CA, AB . Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt BC tại T khác X . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, BA . MN cắt YT tại L . Chứng minh rằng $LY = LZ$.
- Bài 2.** (*Tạp chí TTT2 năm 2008*) Cho tứ giác $ABCD$. Dựng ra ngoài tứ giác các hình vuông $ABEF, BCGH, CDJI, DALK$. Gọi R, S, U, V lần lượt là trung điểm của FL, EG, HI, JK . Chứng minh rằng $RU \perp SV$ và $RU = SV$.
- Bài 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BH_b, CH_c giao nhau tại trực tâm H . H_bH_c cắt BC tại P . N là trung điểm AH , L là hình chiếu của O trên đường đối trung ứng với đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\angle NLP = 90^\circ$.
- Bài 4.** (*Arab Saudi TST 2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BE, CF giao nhau tại trực tâm H . Gọi M là trung điểm BC . K là hình chiếu của H trên AM . EF cắt BC tại P . Q là giao của tiếp tuyến tại A của (O) với BC . T đối xứng với Q qua P . Chứng minh rằng $\angle OKT = 90^\circ$.
- Bài 5.** Cho tam giác ABC . Các đường cao BH_b, CH_c cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . M_bM_c cắt H_bH_c tại L . H_bH_c cắt BC tại K . E là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC . Chứng minh rằng hai tam giác ALK và HEM_a đồng dạng.
- Bài 6.** (*Tạp chí THHT tháng 11/2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , trực tâm H . P là điểm bất kì trên cung BC . P' đối xứng với P qua BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác OPP' cắt AP tại G . Chứng minh rằng trực tâm tam giác AGO nằm trên HP' .
- Bài 7.** (*Arab Saudi TST 2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Hai tiếp tuyến tại B, C giao nhau tại P . Phân giác góc A cắt (P, PB) tại điểm E nằm trong tam giác ABC . Gọi M, N là điểm chính giữa cung BC và cung BAC . Đường tròn đường kính BC cắt đoạn thẳng EN tại F . Chứng minh rằng trực tâm tam giác EFM nằm trên BC .
- Bài 8.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại P . Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác APD, BPC cắt nhau lần thứ hai tại Q . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác AQD, BQC . Trên AD lấy hai điểm X, T , trên BC lấy hai điểm Y, Z sao cho XY, ZT là hai tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2) . Chứng minh rằng X, Y, Z, T đồng viên.

- Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ADC, ABC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 cắt AC lần thứ hai tại K . Chứng minh rằng $AK = AB + AD$.
- Bài 10.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) và đường tròn bàng tiếp góc A (I_a) tiếp xúc với BC lần lượt tại D, P . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp của các tam giác $APC, APB, (J_1), (J_2)$ lần lượt là các đường tròn đối xứng với $(I_1), (I_2)$ qua trung điểm của AC, AB . Chứng minh rằng AD là trực đằng phương của (J_1) và (J_2) .
- Bài 11.** Cho tam giác ABC . Gọi P là điểm nằm trong $\triangle ABC$ sao cho $AB + BP = AC + CP$. Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BP và AC, CP và AB . Chứng minh rằng trung điểm BC nằm trên trực đằng phương của hai đường tròn nội tiếp tam giác YCP và ZBP .
- Bài 12.** Cho tam giác ABC . P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AB + BP = AC + CP$. Chứng minh rằng trung điểm BC nằm trên trực đằng phương của đường tròn nội tiếp các tam giác ABP, ACP .
- Bài 13.** (*Tạp chí THTT tháng 9/2017*) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , với đường tròn (I_a) bàng tiếp góc A . (I_a) tiếp xúc với BC tại T . Trung trực của AT cắt I_aT tại K . J là điểm bất kì trên AK sao cho (J, JA) và (I) ngoài nhau. Gọi P, Q là giao của tiếp tuyến chung trong của (I) và (J, JA) với BC . Chứng minh rằng $BP = CQ$.
- Bài 14.** (*Tạp chí THTT tháng 9/2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Một đường tròn tâm J bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . Tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P, Q . Chứng minh rằng (J, JP) tiếp xúc với (O) và (AEF) .
- Bài 15.** Cho tam giác ABC có N là điểm Nagel. Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm chính giữa các cung BAC, ABC, ACB . Chứng minh rằng N là tâm đằng phương của các đường tròn $(X, XA), (Y, YB), (Z, ZC)$.
- Bài 16.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm nội tiếp. AI cắt (O) lần thứ hai tại J . Gọi ω là đường tròn tâm J và tiếp xúc với AB, AC . Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và ω tiếp xúc với (O) tại hai điểm E, F . Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng.
- Bài 17.** Cho tứ giác $A'B'C'D'$. Gọi A, C lần lượt là hình chiếu của A', C' trên $B'D'$; B, D lần lượt là hình chiếu của B', D' trên $A'C'$. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.
- Bài 18.** (*Tạp chí THTT tháng 6/2016*) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Tia AB giao tia CD tại E , Tia DA giao tia CB tại F . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác EFB, EFD . Chứng minh rằng $\angle I_1IB = \angle I_2ID$.
- Bài 19.** Cho hình vuông $ABCD$. P là điểm bất kì trên AB . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ADP, CBP . DI_1, CI_2 cắt AB lần lượt tại E, F . Đường thẳng qua E song song với AC cắt BD tại M , đường thẳng qua F song song với BD cắt AC tại N . Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của (I_1) và (I_2) .
- Bài 20.** Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$ nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Gọi M_a là trung điểm BC . Chứng minh rằng các đường tròn đường kính HM_a và AO tiếp xúc với nhau.

- Bài 21.** Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A . Đường tròn (A, AI_a) cắt BC tại E, F sao cho E thuộc tia CB , F thuộc tia BC . Đường tròn (EBI_a) cắt AB tại M , (FCI_a) cắt AC tại N . Chứng minh rằng tứ giác $BCNM$ là tứ giác lưỡng tâm.
- Bài 22.** Cho tam giác ABC có $AB + AC = 3BC$. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A . Trên BC lấy hai điểm P, Q sao cho $CP = CA, BQ = BA$ và theo thứ tự P, B, C, Q . Đường tròn (PBI_a) cắt AB lần thứ hai tại M , đường tròn (QCI_a) cắt AC lần thứ hai tại N . Chứng minh rằng $BCNM$ là tứ giác lưỡng tâm.
- Bài 23.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E , AD giao BC tại F . Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với tia EA, EB và tiếp xúc trong với (O) . (O_2) là đường tròn tiếp xúc với tia FA, FB và tiếp xúc ngoài với (O) tại một điểm trên cung AB không chứa C, D . Chứng minh rằng giao của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nằm trên (O) .
- Bài 24.** (*ARMO 2010*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại K . Gọi $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, BCD, CDA, DAB . M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3, I_4M_4, OK$ đồng quy.
- Bài 25.** Cho tam giác ABC . D là một điểm bất kì trên BC . Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với AB, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC , (O_2) là đường tròn tiếp xúc với AC, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB . Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) với BC , G là tiếp điểm của (O_1) với (ADC) , H là tiếp điểm của (O_2) với (ADB) . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHF, CGE và đường tròn đường kính BC đồng quy.
- Bài 26.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại P . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC lần lượt giao CD tại E và F sao cho E, F thuộc đoạn thẳng CD . AE, BF giao (O) lần lượt tại K, L . Gọi I_1, I_2, J_1, J_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, CEK, BCF, DFL . Chứng minh rằng I_1, I_2, J_1, J_2 đồng viên.
- Bài 27.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Gọi M là điểm chính giữa cung BHC của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . BM giao AC tại E , CM giao AB tại F . Kẻ phân giác AD của tam giác ABC . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .
- Chứng minh rằng $TD \perp BC$.
 - Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF bằng OD .
- Bài 28.** (*Arab Saudi JBMO TST 2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác góc A cắt BC tại D và cắt (O) tại E . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O, K, L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD . Chứng minh rằng K, L, E, A' đồng viên.
- Bài 29.** (*Arab Saudi TST 2016*) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Gọi d_1 và d_2 là hai đường thẳng đi qua A và đối xứng nhau qua AB . d_1 cắt (O_1) , (O_2) lần lượt tại G, E , d_2 cắt (O_1) , (O_2) lần lượt tại F, H sao cho E nằm giữa A và G , F nằm giữa A và H . EH cắt FG tại J . BJ cắt (O_1) , (O_2) lần lượt tại K, L , O_1K cắt O_2L tại N . Chứng minh rằng (NLK) tiếp xúc với AB .

- Bài 30.** (*Trường đông việt toán học 2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ các đường kính AA' , BB' , CC' của (O) . Các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ cắt cạnh BC , CA , AB tại các điểm X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự xoay vòng ngược kim đồng hồ ($X, Y \in BC$, $Z, T \in AC$, $U, V \in AB$). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , I_a, I_b, I_c lần lượt là các tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của các tam giác AUT, BXV, CYZ . Chứng minh rằng I, I_a, I_b, I_c đồng viên.
- Bài 31.** (*Arab Saudi IMO Training Test 2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Trung tuyến AM cắt (O) lần thứ hai tại N . AH cắt (O) tại K . Các đường thẳng KN, BC và đường thẳng qua H vuông góc với AN cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O) .
- Bài 32.** Cho tam giác ABC . Một đường tròn (O_a) đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . BE giao CF tại P . Gọi M là trung điểm BC . Kẻ PK vuông góc với AO_a . Q đối xứng với P qua BC , L đối xứng với K qua M . Các đường thẳng PK, QL, BC cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (ABC) .
- Bài 33.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt BA', CA' lần lượt tại L, K . Các đường thẳng qua L vuông góc với BA' , qua K vuông góc với CA' và đường thẳng OM cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Gọi P là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của (O) . Chứng minh rằng (AMP) tiếp xúc với (XYZ) .
- Bài 34.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H , đường đối trung AD ($D \in BC$). Qua D kẻ đường thẳng cắt AC, AB lần lượt tại E, F sao cho D là trung điểm EF . Gọi K là trực tâm tam giác AEF .
 - Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK tiếp xúc với (O) .
 - Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK tiếp xúc với (BHC) .
- Bài 35.** (*Tạp chí Pi số 1/2017*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với hai đường chéo AC và BD vuông góc. AD giao BC tại P . Kẻ đường kính PQ của (PCD) . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa hai cung CD của (PCD) . QM giao BD, CD lần lượt tại E, F . QN giao AC, CD lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng (EDF) tiếp xúc với (KCL) .
- Bài 36.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định, A chuyển động. Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) giao nhau tại P . Đường tròn đường kính OP cắt AC, AB lần lượt tại D, E . DE cắt PB, PC lần lượt tại Q, R . Chứng minh rằng (PQR) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
- Bài 37.** Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường cao AH cắt đường tròn (A, AE) tại điểm M nằm trong tam giác. MI cắt BC tại T . AT cắt ID tại P . Chứng minh rằng hai tứ giác $APDB$ và $APDC$ bàng tiếp.
- Bài 38.** Cho tam giác ABC . Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . BE cắt CF tại P . Một đường thẳng d bất kì qua A cắt BE, CF lần lượt tại L, K . Đường thẳng d' đẳng giác với d trong góc BAC cắt BE, CF lần lượt tại M, N . MK cắt LN tại X , MK, LN cắt BC lần lượt tại Z, Y . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BPC và XYZ tiếp xúc nhau.

- Bài 39.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r) . (I) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F . Trên các tia EA, FA lần lượt lấy điểm K, L sao cho $EK = FL = r$. Đường thẳng qua K vuông góc với AC cắt đường thẳng qua L vuông góc với AB tại J . Chứng minh rằng đường tròn (J, JL) tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .
- Bài 40.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Hai điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh AC, AB sao cho EF tiếp xúc với (BHC) . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF . Chứng minh rằng (EJF) tiếp xúc với (O) .
- Bài 41.** Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn đi qua A tiếp xúc ngoài với (BIC) và cắt AC, AB lần lượt tại E, F . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng (EJF) tiếp xúc với BC .
- Bài 42.** Cho tứ giác $ABCD$. AD cắt BC tại P . Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCD, PAB , H, H' lần lượt là trực tâm các tam giác PCD, PAB . Chứng minh rằng (DOC) tiếp xúc với $(AO'B)$ khi và chỉ khi (DHC) tiếp xúc với $(AH'B)$.
- Bài 43.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Qua H kẻ đường vuông góc với AO cắt BC tại J . Tiếp tuyến tại B và C của (O) giao nhau tại P . Gọi M là trung điểm BC . EM cắt PC tại X , FM cắt PB tại Y .
- Chứng minh rằng 4 điểm X, Y, P, M đồng viên.
 - Chứng minh rằng (PXY) tiếp xúc với (J, JH) .
- Bài 44.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P . PO cắt AC, AB lần lượt tại X, Y . Gọi Q là trung điểm XY . Qua Q kẻ đường thẳng song song với AO cắt đường thẳng qua P song song với BC tại J .
- Chứng minh rằng đường tròn đường kính XY trực giao với (O) .
 - Chứng minh rằng (QPJ) tiếp xúc với (O) .
- Bài 45.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại K khác A . Tiếp tuyến tại B và C của (O) giao nhau tại T . TO cắt KA tại S . Qua S kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng qua T song song với AO tại R . Chứng minh rằng (TSR) tiếp xúc với (O) .
- Bài 46.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . EF cắt BC tại K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt CH, BH lần lượt tại P, Q . Đường thẳng AH cắt (O) tại T khác A .
- Chứng minh rằng P, Q, H, T đồng viên.
 - Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt BC tại L . Kẻ đường kính AA' của (O) . Đường thẳng qua L vuông góc với BC cắt $A'B, A'C$ lần lượt tại Y, Z . Chứng minh rằng $(A'YZ)$ tiếp xúc với (HPQ) .
- Bài 47.** (Trường đông Titan 2017) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . AO cắt BC tại T và cắt (O) tại D khác A . Gọi K là điểm đối xứng với D qua BC . BK cắt AC tại E , CK cắt AB tại F . Gọi J, L là hai điểm trên BC sao cho $\angle JFT = \angle LET = 90^\circ$. P là giao của tiếp tuyến tại B và C của (O) . Chứng minh rằng P nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (J, JF) và (L, LE) .

- Bài 48.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc với BC tại D . Gọi L là điểm đối xứng với D qua I ; X, Y, Z lần lượt là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C với cạnh BC, CA, AB . Giả sử $\angle AIO = 90^\circ$. Chứng minh rằng X, Y, Z, L cùng thuộc một đường tròn.
- Bài 49.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BB_1, CC_1 cắt nhau tại trực tâm H . Gọi N là điểm chính giữa cung BAC của (O) . Giả sử rằng B_1C_1 tiếp xúc với (I) . Chứng minh rằng tiếp điểm của (I) với đường tròn Euler của tam giác ABC nằm trên HN .
- Bài 50.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Các đường tròn $(I_a), (I_b), (I_c)$ bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z . Giả sử $OI \parallel BC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ nằm trên phân giác $\angle BAC$.
- Bài 51.** Cho tam giác ABC với đường tròn $(I_b), (I_c)$ bàng tiếp góc B và C . Gọi J_a, J_b, J_c lần lượt là tiếp điểm của (I_c) với BC, CA, AB , L_a, L_b, L_c lần lượt là tiếp điểm của (I_b) với BC, CA, AB . J_aJ_b cắt I_bI_c tại K , L_aL_c cắt I_bI_c tại Q . KL_b cắt QJ_c tại R , KJ_c cắt QL_b tại P .
- Chứng minh rằng tứ giác J_cRL_bP nội tiếp.
 - Chứng minh rằng $AP = r_a$ với r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC .
- Bài 52.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) , ngoại tiếp đường tròn (I, r) . Các đường tròn bàng tiếp $(I_a), (I_b), (I_c)$. (I_a) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại A_b, A_c . Tương tự xác định B_a, B_c, C_a, C_b . I_aI_b, I_aI_c cắt A_bA_c lần lượt tại N, M . I_aI_b, I_cI_b cắt B_aB_c lần lượt tại P, Q . I_cI_b, I_cI_a cắt C_aC_b lần lượt tại R, S . RB_a cắt QC_a tại X , Tương tự xác định Y, Z . XQ cắt ZP tại T , ZN cắt YM tại V , YS cắt XR tại U . Chứng minh rằng 6 điểm X, Y, Z, T, U, V cùng nằm trên đường tròn $(O, R+r)$.
- Bài 53.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . K là điểm nằm trong tam giác ANB sao cho $\angle KAB = \angle EAN$, $\angle KBA = \angle EBN$. Chứng minh rằng MO là phân giác của $\angle EMK$.
- Bài 54.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho P nằm trên phân giác $\angle BAC$. Gọi K, L lần lượt là giao điểm khác P của BP với $(APC), CP$ với (APB) , E, F lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AB của (O) . AE, AF cắt $(APC), (APB)$ lần lượt tại M, N khác A . Chứng minh rằng 4 điểm L, K, M, N cùng thuộc một đường tròn.
- Bài 55.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . P là điểm bất kì nằm trên phân giác góc A . BP giao (APC) lần thứ hai tại K , CP giao (APB) lần thứ hai tại L . J là điểm bất kì nằm trên AP sao cho đường tròn tâm J tiếp xúc với BC không chứa trong (O) . Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc với (O) tại M và N . Chứng minh rằng L, K, M, N đồng viên.
- Bài 56.** (*China TST 2010*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với A, B, C qua O , P là điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P ứng với $\triangle ABC$, A_3, B_3, C_3 lần lượt là các

điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn.

Bài 57. (*Trường xuân Titan 2017*) Cho tam giác ABC với trực tâm H . P là điểm bất kì trên mặt phẳng. Kẻ PX, PY, PZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB . Dựng các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{PY}, \overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{PZ}$. Chứng minh rằng H, A_1, B_1, C_1 đồng viên.

Bài 58. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . P là điểm bất kì nằm trong tam giác. AP, BP, CP cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC . A_1A_2 cắt AH tại A_3 , tương tự xác định B_3, C_3 . Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 đồng viên.

Bài 59. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , trực tâm H . P là một điểm bất kì trên mặt phẳng, A_1, B_1, C_1 là giao điểm thứ hai của AP, BP, CP với (O) , $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P đối với $\triangle ABC$, A_3, B_3, C_3 thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua A_2, B_2, C_2 . Khi đó H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn.

Bài 60. (*Tạp chí THTT tháng 12/2015*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H . P là điểm bất kì trên OH . AP, BP, CP cắt (O) lần thứ hai lần lượt tại A_2, B_2, C_2 . Gọi A_3, B_3, C_3 là các điểm đối xứng với A_2, B_2, C_2 qua A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn có tâm nằm trên OH .

Bài 61. Cho tam giác ABC với O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Qua A kẻ đường thẳng song song với OH cắt BC tại P . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác APB, APC, ABC đồng quy tại một điểm nằm trên BC .

Bài 62. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Đường cao AH . M là trung điểm BC . AM giao OH tại G . Chứng minh rằng G nằm trên trực đường phương của (BOC) và đường tròn Euler của tam giác ABC .

Bài 63. Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle A = \angle C = 120^\circ$. Phân giác góc A và góc C giao nhau tại P . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của 10 tam giác có đỉnh là 3 trong 5 điểm A, B, C, D, P đồng quy.

Bài 64. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A, B, C cắt cạnh đối diện lần lượt tại $P_a, P_b, P_c; M_a, M_b, M_c$ lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Chứng minh rằng đường tròn Euler của các tam giác $AP_aM_a, BP_bM_b, CP_cM_c$ có trung trực đường phương là đường thẳng Euler của tam giác ABC .

Bài 65. (*Trường thu Hùng Vương 2016*) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Trung tuyến AX cắt (BHC) tại P nằm giữa A và X . BP, CP lần lượt cắt AC, AB tại Y, Z . Chứng minh rằng A nằm trên trực đường phương của (XYZ) và đường tròn Euler của tam giác ABC .

Bài 66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, AB . MN cắt (O) tại P, Q . Các tia MH, NH lần lượt cắt (O) tại X, Y . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PHQ , HK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác XHY . Chứng minh rằng trung điểm JK là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC .

- Bài 67.** (*Vietnam IMO Training Test 2015*) Cho tam giác ABC có E là tâm đường tròn Euler. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của E trên BC, CA, AB . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác AYZ, BXZ, CXY, ABC đồng quy.
- Bài 68.** (*Vietnam IMO Training Test 2014*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Đường thẳng qua A vuông góc với OH cắt BC tại D . Gọi E, E_b, E_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC, ABD, ACD . Chứng minh rằng E, E_b, E_c, H cùng thuộc một đường tròn.
- Bài 69.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao ứng với đỉnh A, B, C kéo dài cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Kẻ các đường kính AA', BB', CC' của (O) . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua AA', BB', CC' . Đường thẳng Simson của A_2, B_2, C_2 ứng với tam giác ABC cắt nhau tạo thành tam giác $A''B''C''$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A''B''C''$ có chung đường tròn Euler.
- Bài 70.** (*Mathley No.2 2014*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . L là điểm bất kì trên cung BC không chứa A . Chứng minh rằng đường tròn A -mixtilinear nội tiếp của tam giác ABC , các đường tròn L -mixtilinear nội tiếp của các tam giác LAB, LAC có chung một tiếp tuyến.
- Bài 71.** (*Mathley No.3 2014*) Cho tứ giác lưỡng tâm $ABCD$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là O . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD , AD và BC . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tâm O tiếp xúc với bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác EAD, EBC, FAB, FCD .
- Bài 72.** Cho tam giác ABC . P là điểm chuyển động trên BC . Kẻ PX, PY lần lượt vuông góc với AC, AB . Đường tròn (BPX) giao AB lần thứ hai tại M , đường tròn (CPY) giao AC lần thứ hai tại N . Chứng minh rằng (AMN) luôn đi qua một điểm cố định.
- Bài 73.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A chuyển động trên cung BC . P là một điểm cố định nằm trong (O) . Kẻ PE, PF lần lượt vuông góc với AC, AB . Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng T chuyển động trên một đường tròn cố định có tâm là trung điểm PQ .
- Bài 74.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là một điểm chuyển động trên (O) . Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với AP, BP, CP qua BC, CA, AB . l_a, l_b, l_c cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng khi P chuyển động, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác XYZ luôn nằm trên một đường tròn cố định.
- Bài 75.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $AC \perp BD$. Tiếp tuyến tại (O) lần lượt qua A, B, C, D cắt nhau tạo thành tứ giác $XYZT$. XZ cắt YT tại P . Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của 8 tam giác $XPY, YPZ, ZPT, TPX, XYZ, YZT, ZTX, TXY$ cùng thuộc một đường tròn.
- Bài 76.** Cho 4 cung tròn $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ (được sắp xếp theo thứ tự) cùng dựng trên dây cung AB sao cho chúng cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB . Giả sử tồn tại đường tròn (O_1) tiếp xúc với ω_1 và ω_2 , đường tròn (O_2) tiếp xúc với ω_3 và ω_4 sao cho giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nằm trên AB . Gọi (O_3) là đường tròn bất kì tiếp xúc với ω_1 và ω_2 . Từ điểm C trên AB kẻ hai tiếp tuyến tới (O_3) , cắt ω_3 và ω_4 lần lượt tại $(X, Y); (T, Z)$. Chứng minh rằng tứ giác cong $XYZT$ (tạo bởi các cạnh XY, ZT và các cung YZ, XT) ngoại tiếp.

Bài 77. (*Mathley No.1 2014*) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại A, B . Từ A kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới (O_2) , từ B kẻ hai tiếp tuyến l_1, l_2 tới (O_1) sao cho t_1 và l_1 nằm cùng một phía với đường thẳng AB . Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của t_1 và l_1, t_2 và l_2 . Chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp.

Bài 78. Với kí hiệu như bài toán 77, gọi M, N lần lượt là giao của AX, AY với (O_1) , P, Q lần lượt là giao của BX, BY với (O_2) . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn mixtilinear incircle ứng với đỉnh A và B của các tam giác AMN và BPQ . Chứng minh rằng (I_1) và (I_2) có cùng bán kính.

Bài 79. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . D, E là hai điểm nằm trên cạnh BC . Gọi $(I_1), (I_2)$ là đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE . (I) tiếp xúc với AB, AC tại X, Y . P là một điểm chuyển động trên cung nhỏ XY . PB, PC lần lượt giao $(I_1), (I_2)$ tại L, K sao cho giao điểm còn lại của PB với (I_1) , PC với (I_2) nằm giữa B, L và nằm giữa C, K . Chứng minh rằng khi P chuyển động, giao điểm của LD và KE nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 80. (*IMO Shortlist 2012*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi d là đường thẳng bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z ; P là hình chiếu của O trên d . Chứng minh rằng các đường tròn $(AXP), (BYP), (CZP)$ đồng trực.

Bài 81. Cho tam giác ABC . M, N nằm trên AB, P, Q nằm trên AC sao cho $\frac{\overline{MN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} = k$.

Chứng minh rằng các điểm chia đoạn nối trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AMP, ANQ, ABC theo cùng một tỉ số là các bộ điểm thẳng hàng.

Bài 82. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác AHB, AHC .

a) Chứng minh rằng các đường tròn $(I_1), (I_2), (BC)$ có chung một tiếp tuyến l .

b) Giả sử l cắt AB, AC lần lượt tại X, Y . Chứng minh rằng đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AXY tiếp xúc với (BC) .

Bài 83. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P là điểm bất kì nằm trên AO, X, Y, Z lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB sao cho PX, PY, PZ lần lượt là phân giác của các góc BPC, CPA, APB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Chứng minh rằng H, X, Y, Z đồng viên.

Bài 84. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Gọi $(I_a), (I_b), (I_c)$ là các đường tròn có bán kính bằng nhau và lần lượt tiếp xúc với cặp cạnh $(AB, AC), (BA, BC), (CA, CB)$. Gọi d_a là tiếp tuyến của (I_a) sao cho $d_a \perp AO$ và I_a nằm khác phía với B, C bờ là đường thẳng d_a . d_a cắt AC, AB lần lượt tại A_b, A_c . Tương tự ta xác định B_a, B_c, C_a, C_b . Các đường tròn $(BCA_bA_c), (CAB_cB_a), (ABC_aC_b)$ cắt nhau tại X, Y, Z . Chứng minh rằng I_a, I_b, I_c, X, Y, Z đồng viên.

Bài 85. (*Mathley No.1 2011*) Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ đôi một cắt nhau; mỗi đường tròn cắt hai đường tròn kia tại hai điểm phân biệt. Gọi (X_1) là đường tròn tiếp xúc ngoài với (O_1) và tiếp xúc trong với các đường tròn $(O_2), (O_3)$; tương tự xác định được các đường tròn $(X_2), (X_3)$. Gọi (Y_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (O_1) và tiếp xúc ngoài với các đường tròn $(O_2), (O_3)$, tương tự xác định được các đường tròn $(Y_2), (Y_3)$. Gọi $(Z_1), (Z_2)$

là hai đường tròn cùng tiếp xúc trong với cả ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Chứng minh rằng $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, Z_1Z_2$ đồng quy.

Bài 86. (*Mathley No.2 2011*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Một đường thẳng bất kì đi qua H cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q . Qua P, Q lần lượt kẻ các đường vuông góc với AP, AQ , các đường này cắt đường thẳng BC lần lượt tại hai điểm M, N . Chứng minh rằng đường thẳng qua P và vuông góc với OM và đường thẳng qua Q và vuông góc với ON cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Bài 87. (*Mathley No.3 2011*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Một đường tròn (O', R') tiếp xúc trong với (O) tại I sao cho $R < R'$. P là một điểm bất kì trên (O) . Các tia PA, PB, PC lần lượt cắt (O') tại A_1, B_1, C_1 . Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác tạo bởi các giao điểm của các đường thẳng đối xứng với B_1C_1 qua BC , C_1A_1 qua CA , A_1B_1 qua AB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ cũng tiếp xúc với (O) .

Bài 88. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P và Q là hai điểm bất kì trong mặt phẳng. Một đường tròn bất kì qua P, Q cắt $(BPC), (CPA), (APB)$ lần lượt tại M, N, K khác P . Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ là các đường tròn qua Q và tiếp xúc với $(BPC), (CPA), (APB)$ lần lượt tại M, N, K . $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ cắt nhau lần thứ hai tại X, Y, Z . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O) .

Bài 89. (*Mathley No.4 2011*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . E là tâm Euler. Qua E kẻ các đường thẳng MN song song với BC , PQ song song với AC , KL song song với AB ($K, P \in BC, N, L \in AC, M, Q \in AB$). Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác ALQ, BMK, CPN, ABC đồng quy.

Bài 90. (*Mathley No.5 2012*) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi P là một điểm tùy ý trong mặt phẳng tam giác ABC . Các điểm A', B', C' lần lượt là đối xứng của P qua các đường thẳng BC, CA, AB ; X là giao điểm, khác A , của đường tròn đường kính AP và đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C'$. Các điểm Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh rằng năm đường tròn $(O), (AB'C'), (BC'A'), (CA'B'), (XYZ)$ có một điểm chung.

Bài 91. (*Mathley No.6 2012*) Cho AB là một dây cung bất kì của đường tròn (O) . Hai đường tròn (X) và (Y) nằm cùng phía với dây cung AB sao cho chúng cùng tiếp xúc trong với (O) và lần lượt tiếp xúc với AB tại C, D ; C nằm giữa A và D . Gọi H là giao điểm của XY và AB . M là điểm chính giữa cung AB không chứa $(X), (Y)$. Biết HM cắt (O) lần thứ hai tại I . Gọi IX, IY lần lượt giao AB tại K, J . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IKJ tiếp xúc với (O) .

Bài 92. (*Mathley No.7 2012*) Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. AB giao CD tại E , AD giao BC tại F . Hai đường thẳng bất kì qua E lần lượt cắt AD, BC tại M, N, P, Q ($M, N \in AD, P, Q \in BC$). Hai đường thẳng bất kì qua F lần lượt cắt AB, CD tại X, Y, Z, T ($X, Y \in AB, Z, T \in CD$). Gọi d_1, d_2 là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ E tới đường tròn nội tiếp các tam giác FXY, FZT ; d_3, d_4 là các tiếp tuyến thứ hai kẻ từ F tới đường tròn nội tiếp các tam giác EMN, EPQ . Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3, d_4 cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.

Bài 93. (*Mathley No.8 2012*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kì vuông góc với nhau và đi qua H . d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt

tại X_1, Y_1, Z_1 . Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác tạo bởi các đường thẳng qua X_1 và vuông góc với BC , qua Y_1 và vuông góc với CA , qua Z_1 và vuông góc với AB . Tương tự ta xác định được tam giác $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ tiếp xúc với nhau tại một điểm nằm trên (O) .

Bài 94. (*Mathley No.9 2012*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . Kí hiệu $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ lần lượt là các đường tròn bắt kí đi qua các cặp điểm $(A, B); (B, C); (C, D); (D, A)$. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là giao điểm thứ hai của (O_1) và $(O_2), (O_2)$ và $(O_3), (O_3)$ và $(O_4), (O_4)$ và (O_1) . Chứng minh

- (a) bốn điểm X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn có tâm I .
- (b) trung điểm các đoạn thẳng O_1O_3, O_2O_4, OI thẳng hàng.

Bài 95. (*Mathley No.10 2012*) Cho n -giác lưỡng tâm $A_1A_2A_3...A_n (\geq 3)$. Kí hiệu I_i là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_{i-1}A_iA_{i+1}; A_{i(i+1)}$ là giao điểm của A_iA_{i+2} và $A_{i-1}A_{i+1}; I_{i(i+1)}$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_iA_{i(i+1)}A_{i+1} (i = \overline{1, n})$. Khi đó $2n$ điểm $I_1, I_2, \dots, I_n, I_{12}, I_{23}, \dots, I_{n1}$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 96. (*Mathley No.11 2012*) Cho tam giác ABC , với P là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác đó. Các đường thẳng AP, BP, CP cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm Miquel của tứ giác toàn phần $AB_1PC_1BC, BC_1PA_1CA, CA_1PB_1AB$. Chứng minh rằng sáu đường tròn ngoại tiếp các tam giác $APA_2, BPP_2, CPC_2, BA_2C, AB_2C, AC_2B$ đồng quy tại một điểm.

Bài 97. (*Mathley No.12 2012*) Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần tạo bởi các đường thẳng AB, BC, CD, DA . L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (MAC) và (MBD) . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác LAB, LBC, LCD, LDA cùng nằm trên đường tròn ω và 3 đường tròn $(MAC), (MBD), \omega$ đối một trực giao.

Bài 98. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Q là điểm bất kí nằm trong tam giác. Gọi $A'B'C'$ là tam giác pedal của Q ứng với tam giác ABC . $B'C'$ cắt (O) tại hai điểm A_1, A_2 . Tương tự xác định các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 . Biết rằng AA', BB', CC' đồng quy. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của ba đường tròn $(A'A_1A_2), (B'B_1B_2), (C'C_1C_2)$ nằm trên đường thẳng OQ .

Bài 99. Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn $(A, AA'), (B, BB'), (C, CC')$ nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC .

Bài 100. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . NP giao (O) tại hai điểm A_1, A_2 , tương tự xác định B_1, B_2, C_1, C_2 . Chứng minh rằng I là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2)$.

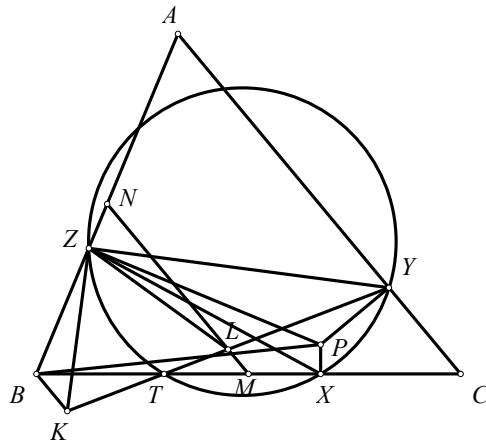
Bài 101. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\angle B > \angle C$, trực tâm H . P là điểm nằm trên (O) sao cho H và P khác phía với AO và $\angle AOP = \frac{2}{3}\angle HAO$. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua O . Chứng minh rằng đường thẳng Simson của Q tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC .

- Bài 102.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , với tâm đường tròn nội tiếp I . Gọi l_1, l_2 là hai đường thẳng bất kì qua I . l_1, l_2 cắt (BIC) lần thứ hai tại A_1, A_2 . Tương tự ta xác định các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 . Gọi XYZ là tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ nằm trên (O) .
- Bài 103.** Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Gọi X là điểm bất kì trong mặt phẳng sao cho X không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tâm đường tròn pedal của X ứng với các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB đồng viên.
- Bài 104.** (*China TST 2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , P là điểm bất kì trong mặt phẳng. AP, BP, CP cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB . Chứng minh rằng 4 đường tròn $(O), (PA_1A_2), (PB_1B_2), (PC_1C_2)$ đồng quy.
- Bài 105.** Cho tam giác ABC . Gọi P là điểm bất kì trong mặt phẳng, $A_1B_1C_1$ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC . Gọi O là tâm của $(A_1B_1C_1)$, L là điểm bất kì trên PO . A_1L, B_1L, C_1L cắt $(A_1B_1C_1)$ lần lượt tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.
- Bài 106.** Cho tam giác ABC với tâm đường tròn ngoại tiếp O . Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm bất kì nằm trên BC, CA, AB . Đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau và tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$ với tâm đường tròn ngoại tiếp I . Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB , J là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ 3 điểm (A_3, B_3, C_3) . Chứng minh rằng $OI \geq OJ$.
- Bài 107.** (*Tạp chí THTT năm 2009*) Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD giao AC lần thứ hai tại X , đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao AC lần thứ hai tại Y . Khi đó tứ giác $BXDY$ ngoại tiếp.
- Bài 108.** Cho tam giác ABC . Một đường thẳng d bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm AX, BY, CZ . Các đường thẳng qua P, Q, R lần lượt vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng trực tâm tam giác $A'B'C'$ nằm trên d .

Chương 3

Lời giải

Bài 1. (*Tạp chí TTT2 năm 2012*) Cho tam giác ABC . P là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của P trên BC, CA, AB . Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt BC tại T khác X . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, BA . MN cắt YT tại L . Chứng minh rằng $LY = LZ$.



Lời giải. Qua Z kẻ đường thẳng vuông góc với ZY cắt TY tại K .

Ta có $\angle ZYK = \angle ZXT = \angle ZPB$ nên hai tam giác vuông ZYK và ZPB đồng dạng.

Suy ra $\triangle ZPY \sim \triangle ZBK$.

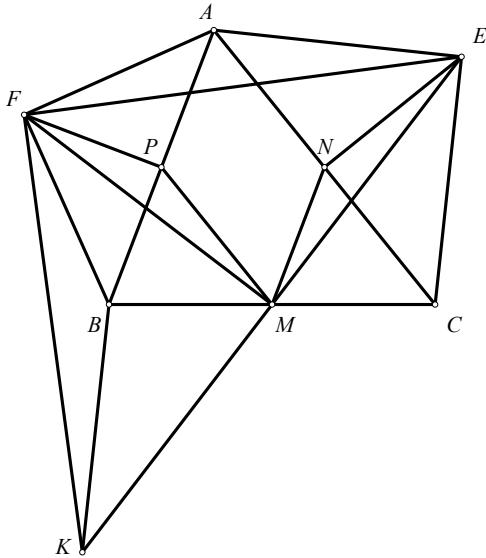
Từ đó $\angle ZBK = \angle ZPY = 180^\circ - \angle BAC$, suy ra $BK \parallel AC$.

Ta có MN là đường trung bình của hình thang $AYKB$ nên L là trung điểm KY . Vậy $LY = LK = LZ$. \square

Bài 2. (*Tạp chí TTT2 năm 2008*) Cho tứ giác $ABCD$. Dựng ra ngoài tứ giác các hình vuông $ABEF, BCGH, CDJI, DALK$. Gọi R, S, U, V lần lượt là trung điểm của FL, EG, HI, JK . Chứng minh rằng $RU \perp SV$ và $RU = SV$.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu 2 bở đề sau.

Bở đề 1. Cho tam giác ABC . Dựng ra ngoài tam giác các tam giác AEC và AFB lần lượt vuông cân tại E và F . Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó tam giác EMF vuông cân tại M .



Chứng minh. Cách 1.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AC, AB . Ta có $NE = \frac{1}{2}AC = PM, NM = \frac{1}{2}AB = PF$.

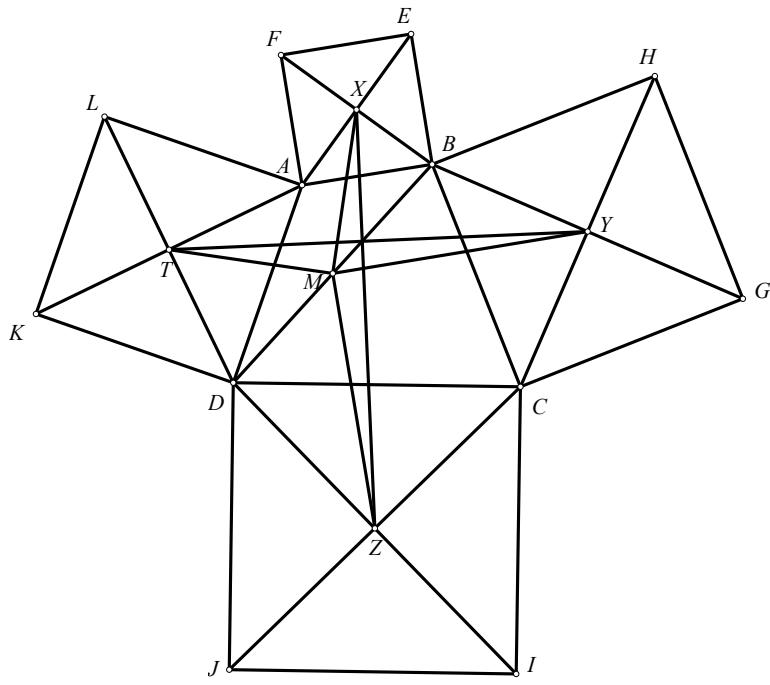
Đồng thời $\angle FPM = 90^\circ + \angle BAC = \angle MNE$, suy ra $\triangle FPM = \triangle MNE$ (c.g.c).

Từ đó $ME = MF$ và $\angle FME = \angle FMP + \angle PMN + \angle NME = \angle BAC + \angle PMF + \angle PFM = 180^\circ - \angle FPB = 90^\circ$. Vậy tam giác EMF vuông cân tại M .

Cách 2.

Gọi K đối xứng với E qua M . Suy ra $BK = EC = AE$. Bằng phép cộng góc đơn giản dễ thấy $\angle FBK = 90^\circ + \angle BAC = \angle FAE$. Do đó $\triangle FAE = \triangle FBK$ (c.g.c), suy ra $FE = FK$ và $\angle AFE = \angle BFK$. Ta thu được $\angle KFE = \angle BFA = 90^\circ$. Suy ra tam giác KFE vuông cân tại F . Lại có M là trung điểm của EK nên tam giác EMF vuông cân tại M . \square

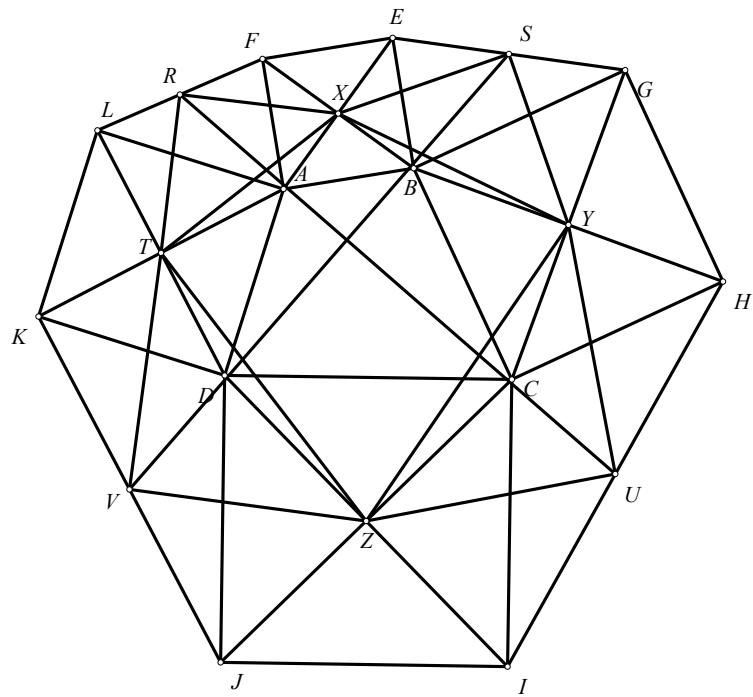
Bố đề 2. (*Dịnh lý Van-Aubel*). Cho tứ giác $ABCD$. Dựng ra ngoài tứ giác các hình vuông $ABEF, BCGH, CDJI, DALK$. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là tâm của các hình vuông này. Khi đó $XZ \perp YT$ và $XZ = YT$.



Chứng minh. Gọi M là trung điểm BD . Áp dụng bô đê 1 cho hai tam giác ABD và CBD suy ra các tam giác MXT và MYZ đều vuông cân tại M . Từ đó $\angle XMZ = \angle TMY$ và $MX = MT$, $MY = MZ$. Ta thu được $\triangle XMZ = \triangle TMY$ (c.g.c).

Suy ra $XZ = YT$ và $\angle MXZ = \angle MTY$. Bằng một số phép cộng góc đơn giản suy ra $XZ \perp YT$. \square

Trở lại bài toán.

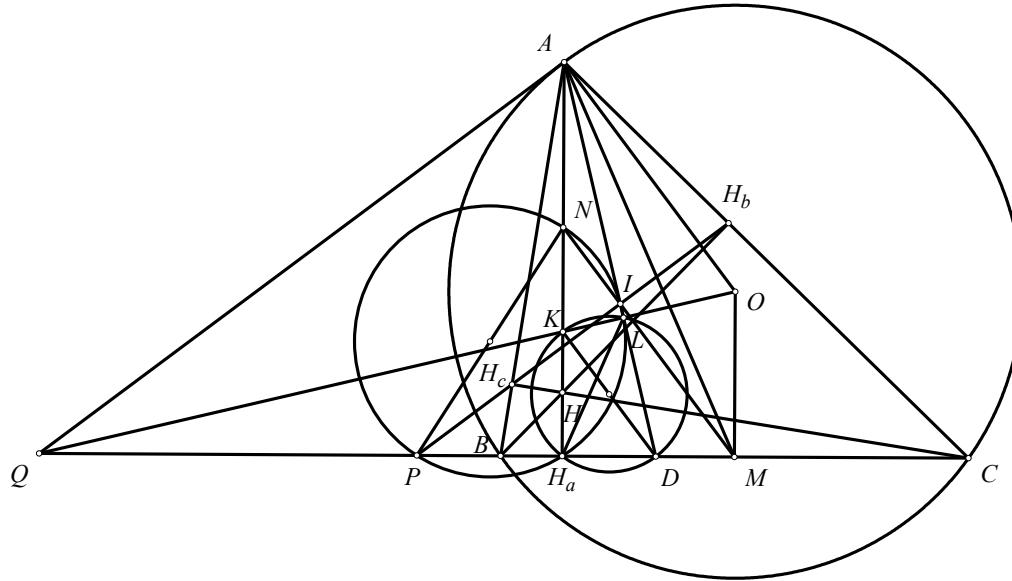


Gọi X, Y, Z, T lần lượt là tâm của 4 hình vuông trên. Áp dụng bổ đề 1 cho tam giác FAL suy ra tam giác TRX vuông cân tại R . Chứng minh tương tự, các tam giác XSY, YUZ, ZVT lần lượt vuông cân tại S, U, V .

Áp dụng bổ đề 2 cho tứ giác $XYZT$ suy ra $RU \perp SV$ và $RU = SV$.

□

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BH_b, CH_c giao nhau tại trực tâm H . H_bH_c cắt BC tại P . N là trung điểm AH , L là hình chiếu của O trên đường đối trung ứng với đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\angle NLP = 90^\circ$.



Lời giải. Gọi M là trung điểm BC , MN giao H_bH_c tại I . AD là đường đối trung ứng với đỉnh A ($D \in BC$). OL giao đường cao AH_a tại K , giao BC tại Q .

Do AD là đường đối trung nên AQ là tiệp tuyến của (O) . Suy ra $\angle QAO = 90^\circ$.

Ta có tứ giác DH_aKL, ALH_aQ nội tiếp nên $\angle LKD = \angle LH_aD = \angle QAL = \angle AOL$, suy ra $KD \parallel AO \parallel MN$.

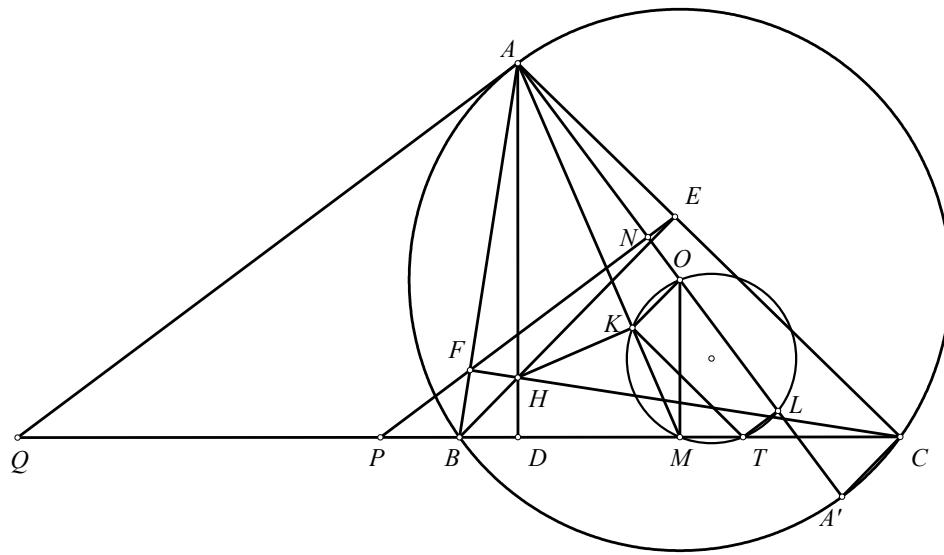
Mặt khác, MN là đường trung trực của H_bH_c nên I là trung điểm H_bH_c . Mà $\triangle AH_bH_c \sim \triangle ABC$ nên AI là đường đối trung của tam giác ABC hay $I \in AD$.

Từ đó $\angle H_aNI = \angle H_aKD = \angle H_aLD$. Suy ra tứ giác NH_aLI nội tiếp. Mặt khác, tứ giác NIH_aP nội tiếp đường tròn đường kính NP nên các điểm I, L, H_a đều nằm trên đường tròn đường kính NP .

Vậy $\angle NLP = 90^\circ$.

□

Bài 4. (Arab Saudi TST 2017) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BE, CF giao nhau tại trực tâm H . Gọi M là trung điểm BC . K là hình chiếu của H trên AM . EF cắt BC tại P . Q là giao của tiệp tuyến tại A của (O) với BC . T đối xứng với Q qua P . Chứng minh rằng $\angle OKT = 90^\circ$.

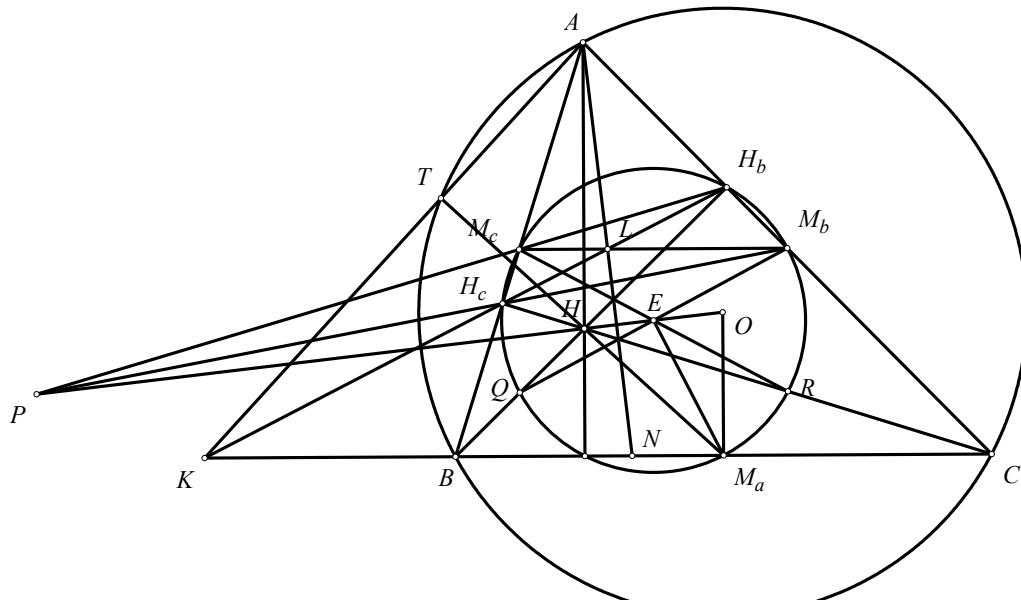


Lời giải. Kẻ đường cao AD của tam giác ABC , đường kính AA' của (O) . AO cắt EF tại N . L đối xứng với A qua N .

Ta có $AO \perp EF$ nên tứ giác $NECA'$ nội tiếp. Do đó $AO \cdot AL = \frac{1}{2}AA' \cdot 2AN = AA' \cdot AN = AE \cdot AC = AH \cdot AD = AK \cdot AM$. Suy ra tứ giác $KOLM$ nội tiếp.

Mặt khác do $AQ \parallel EF$ và P là trung điểm QT nên $ALTQ$ là hình thang nhọn PN làm đường trung bình. Suy ra $\angle LTC = \angle EPC = \angle HAO = \angle MOL$. Suy ra tứ giác $OMTL$ nội tiếp. Vậy 5 điểm O, K, M, T, L đồng viên hay K nằm trên đường tròn đường kính OT hay $\angle OKT = 90^\circ$. \square

Bài 5. Cho tam giác ABC . Các đường cao BH_b, CH_c cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . M_bM_c cắt H_bH_c tại L . H_bH_c cắt BC tại K . E là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC . Chứng minh rằng hai tam giác ALK và HEM_a đồng dạng.



Lời giải. Gọi N là giao điểm của AL với BC , (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , Q, R lần lượt là trung điểm HB, HC . $M_a H$ cắt (O) tại T suy ra A, T, K thẳng hàng và $\angle ATH = 90^\circ$.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm M_b, M_c, H_b, H_c, Q, R ta thu được $P = M_b H_b \cap H_b M_c, H = Q H_b \cap R H_c, E = Q M_b \cap R M_c$ thẳng hàng.

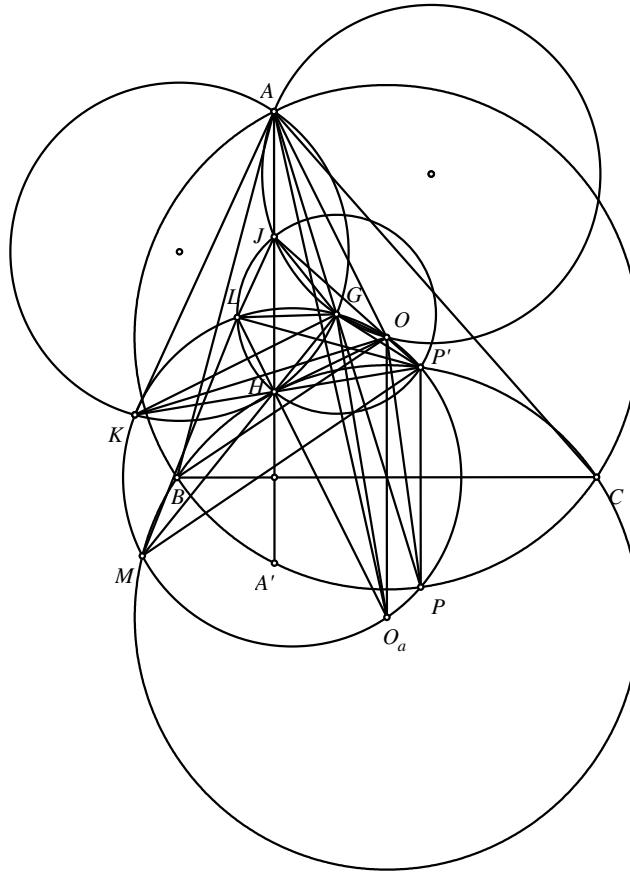
Lại có AL là đường đối cực của P ứng với (E) suy ra $AL \perp OH$.

Suy ra $\angle ANK = \angle HOM_a$ và $\angle OHM_a = \angle TAN$.

Suy ra $\triangle ANK \sim \triangle HOM_a$. Do L, E lần lượt là trung điểm AN và HO nên $\triangle ALK \sim \triangle HEM_a$. \square

Bài 6. (*Tạp chí THTT tháng 11/2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , trực tâm H . P là điểm bất kì trên cung BC . P' đối xứng với P qua BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác OPP' cắt AP tại G . Chứng minh rằng trực tâm tam giác AGO nằm trên HP' .

Lời giải. Cách 1.



Gọi J là giao của OP' với AH . Ta có $\angle JAG = \angle GPP' = \angle GOJ$ nên tứ giác $AJGO$ nội tiếp. (AGH) giao HP' lần thứ hai tại K suy ra G là điểm Miquel của tam giác JHP ứng với bộ 3 điểm (A, O, K) . Ta thu được tứ giác $KGOP'$ nội tiếp.

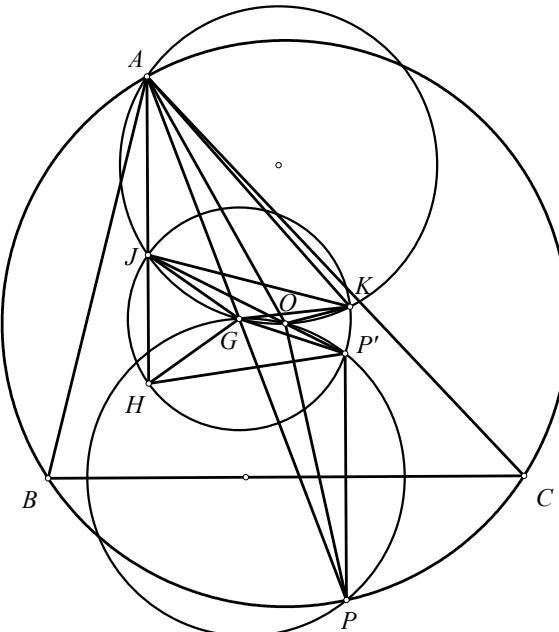
Gọi O_a là tâm ngoại tiếp của tam giác BHC , GH giao (O_a) lần thứ hai tại M . Gọi A' là giao điểm của AH với (O) . Do hai đường tròn (O) và (O_a) đối xứng nhau qua BC nên $A'P = HP'$. Ta có $\angle GMP' = \angle HMP' = \angle HAP = \angle HKG$ nên $M \in (OPP')$.

Gọi L là giao của O_aH với (OPP') . Do $O_aH = O_aM = O_aP'$, ta thu được H là tâm nội tiếp của tam giác LMP' . Suy ra $GL = GH = GP'$.

Lại có $\angle HLP' = \angle O_aOP' = \angle HJP'$ nên tứ giác $HLJP'$ nội tiếp đường tròn tâm G . Do hai đường tròn (AGO) và (AGH) cắt nhau tại A và G , đồng thời $\angle AOG = \angle GJH = \angle GHJ$ nên $R(AGO) = R(AGH)$. Mặt khác, $\angle GAO = \angle GPO$ nên $R(AGO) = R(PGO)$.

Vậy 3 đường tròn (AGO) , (AGK) , (KGO) có bán kính bằng nhau và đồng quy tại G nên K là trực tâm tam giác AGO .

Cách 2 (Nguyễn Duy Khương, HS THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam).



Gọi J là giao điểm thứ hai của AH và (AGO) .

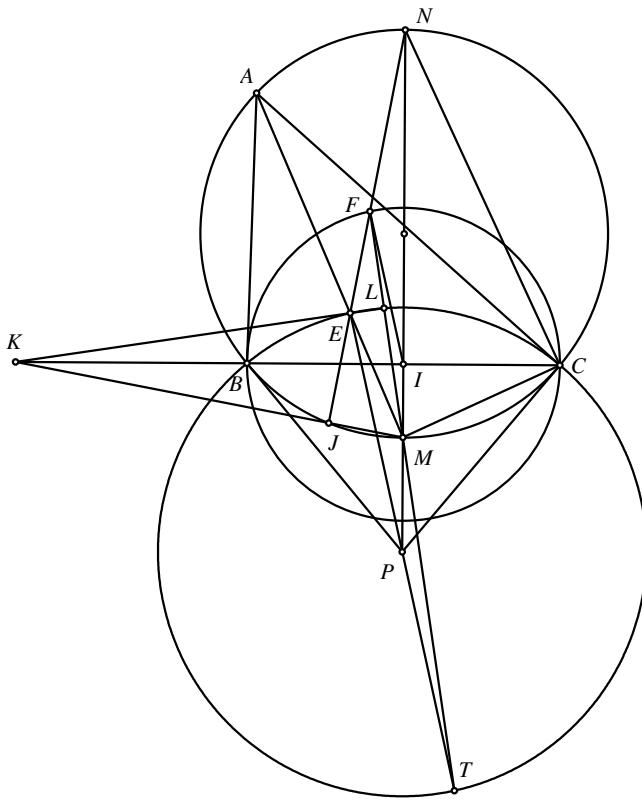
Ta có $\angle JOG = \angle HAG = \angle GPP' = 180^\circ - \angle GOP'$ nên O, P', J thẳng hàng.

Lại có $\angle GJO = \angle PAO = \angle GPO = \angle GP'O$ nên tam giác GJP' cân tại G . Suy ra $\angle JGP' = \angle AOP = 2\angle ACP$ mà $\angle AHP' = \angle HPP' = \angle ACP$ suy ra G là tâm của (JHP') . Gọi (JHP') cắt (AGO) tại điểm thứ hai K khác J .

Thé thì $\angle GKO = \angle OAG = \angle GPO = \angle GP'O$ nên $\angle OP'K = \angle OKP'$ hay $OK = OP'$. Điều này nghĩa là K đối xứng với P' qua GO .

Mặt khác, $GJ = GK$ nên AG là phân giác $\angle HAK$. Mà $\angle GKA = \angle GJH = \angle AHG$, ta thu được K đối xứng H qua AG . Do đó HP' là đường thẳng Steiner của K trong tam giác AGO hay trực tâm tam giác AGO nằm trên HP' . \square

Bài 7. (Arab Saudi TST 2016) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Hai tiếp tuyến tại B, C giao nhau tại P . Phân giác góc A cắt (P, PB) tại điểm E nằm trong tam giác ABC . Gọi M, N là điểm chính giữa cung BC và cung BAC . Đường tròn đường kính BC cắt đoạn thẳng EN tại F . Chứng minh rằng trực tâm tam giác EFM nằm trên BC .



Lời giải. Gọi I là trung điểm BC . Ta có $\angle ICM = \angle MAC = \angle MCP$ nên CM là phân giác $\angle ICP$, suy ra M là tâm vị tự trong của (I) và (P) . Do $\angle MCN = 90^\circ$ nên N là tâm vị tự ngoài của (I) và (P) .

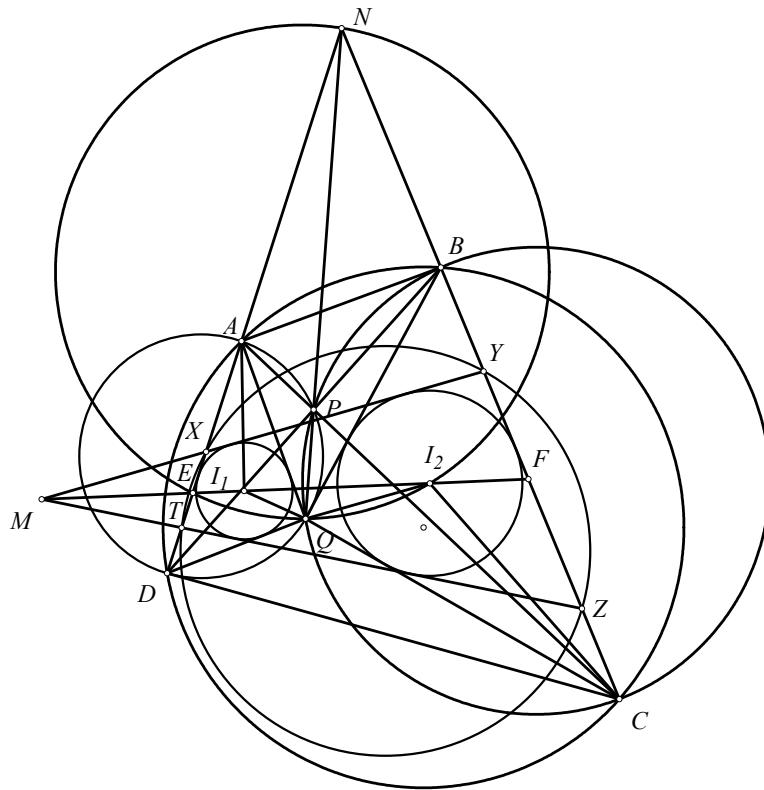
Gọi L, T là giao của FM với (P) (L nằm giữa F và M). Xét phép vị tự $\mathcal{H}_M^{\frac{PC}{IC}} : F \mapsto T$, suy ra $IF \parallel PT$.

Lại xét phép vị tự $\mathcal{H}_N^{\frac{PC}{IC}} : F \mapsto E$, suy ra $IF \parallel PE$.

Vậy E, P, T thẳng hàng hay ET là đường kính của (P) , suy ra $\angle ELP = 90^\circ$.

Gọi J là giao điểm thứ hai của FN với (O) . Xét 3 đường tròn $(O), (P), (ELMJ)$ có trực đẳng phương lần lượt là EL, BC, JM nên EL cắt JM tại K nằm trên BC . Vậy trực tâm K của tam giác EFM nằm trên BC . \square

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại P . Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác APD, BPC cắt nhau lần thứ hai tại Q . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác AQD, BQC . Trên AD lấy hai điểm X, T , trên BC lấy hai điểm Y, Z sao cho XY, ZT là hai tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2) . Chứng minh rằng X, Y, Z, T đồng viên.



Lời giải. (Phạm Xuân Quý, HS K50 THPT chuyên DHSP)

Gọi N là giao của AD và BC , M là giao của XY và ZT . I_1I_2 cắt AD , BC lần lượt tại E, F .

Ta có Q là tâm vị tự quay của hai đường tròn (APD) và (BPC) nên $\triangle AQD \sim \triangle CQB$. Suy ra $\triangle QI_1A \sim \triangle QI_2C$. Từ đó $\triangle QI_1I_2 \sim \triangle QAC$.

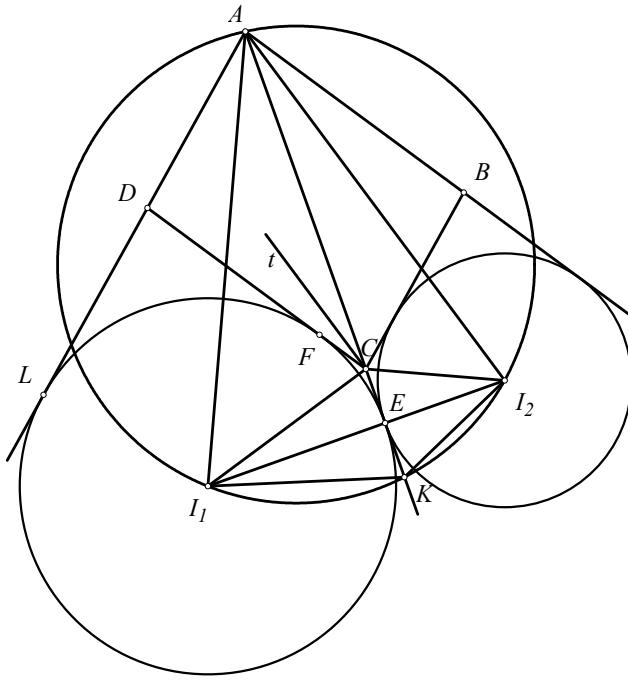
Lại có Q là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $NAPB \cdot DC$ nên ta có $\angle QNE = \angle QCA = \angle QI_2I_1$. Suy ra tứ giác $NEQI_2$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, tứ giác NI_1QF nội tiếp.

Ta thu được $\angle NEF = \angle NQI_2 = \frac{1}{2}\angle AQB + \frac{1}{2}\angle BQC = \frac{1}{2}\angle AQB + \frac{1}{2}\angle BPC = \frac{1}{2}\angle AQB + \frac{1}{2}\angle AQC = \angle I_1QN = \angle EFN$.

Suy ra $\angle NEF - \angle EMX = \angle NFE - \angle FMZ$ hay $\angle MXE = \angle FZM$. Vậy tứ giác $XYZT$ nội tiếp. \square

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi (I_1) , (I_2) lần lượt là đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ADC , ABC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 cắt AC lần thứ hai tại K . Chứng minh rằng $AK = AB + AD$.



Lời giải. Gọi E_1, E_2 lần lượt là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với AC .

Do chu vi của hai tam giác ADC và ABC bằng nhau nên $AE_1 = AE_2$. Suy ra $E_1 \equiv E_2 \equiv E$.

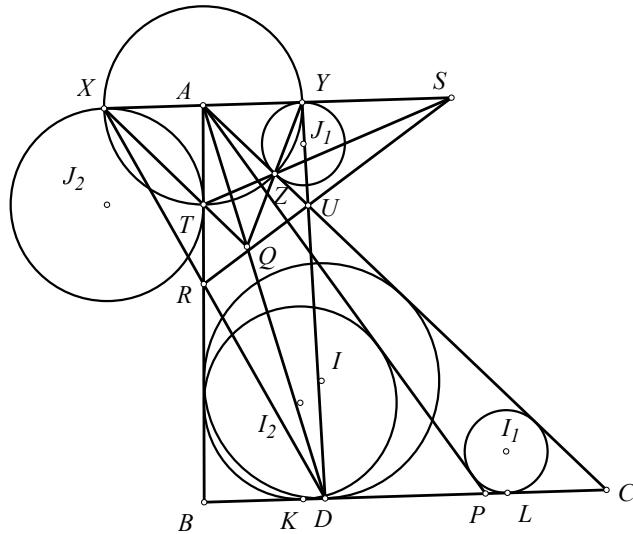
Gọi F, L lần lượt là tiếp điểm của (I_1) với CD, DA .

Kẻ phân giác Ct của $\angle ACD$. Ta có $Ct \parallel AI_2$. Lại có $Ct \perp CI_1$ nên $I_1C \perp AI_2$. Tương tự $I_2C \perp AI_1$. Từ đó C là trực tâm tam giác AI_1I_2 .

Suy ra C và K đối xứng qua I_1I_2 hay $EC = EK$.

Từ đó $AK = AE + EK = AL + CF = AD + DL + CF = AD + DF + CF = AD + CD = AD + AB$. \square

Bài 10. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) và đường tròn bàng tiếp góc A (I_a) tiếp xúc với BC lần lượt tại D, P . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp của các tam giác $APC, APB, (J_1), (J_2)$ lần lượt là các đường tròn đối xứng với $(I_1), (I_2)$ qua trung điểm của AC, AB . Chứng minh rằng AD là trực đẳng phuong của (J_1) và (J_2) .



Lời giải. Từ A kẻ tiếp tuyến AX tới (J_2) , AY tới (J_1) . Do phép đối xứng tâm nên $AX \parallel BC$ và $AY \parallel BC$. Suy ra X, A, Y thẳng hàng.

Do P là tiếp điểm của đường tròn bằng tiếp góc A với BC nên chu vi hai tam giác ABP và ACP bằng nhau. Từ đó nếu gọi tiếp điểm của (I_1) , (I_2) với BC lần lượt là L, K thì $AY = CL = BK = AX$. Suy ra A nằm trên trực đẳng phương của (J_1) và (J_2) .

Gọi T, Z lần lượt là tiếp điểm của (J_2) với AB , (J_1) với AC . Ta thu được X, Y, Z, T cùng nằm trên đường tròn tâm A .

Gọi XY giao TZ tại S và XT giao YZ tại Q . Do tứ giác $XYZT$ nội tiếp nên X, Y và Z, T là các cặp điểm ảnh của nhau qua phép nghịch đảo tâm S hay S là tâm vị tự ngoài của (J_1) và (J_2) . Đồng thời ta cũng có Q nằm trên trực đẳng phương của (J_1) và (J_2) .

Vậy ta cần chứng minh A, Q, D thẳng hàng.

Gọi R là giao của DX với AB , U là giao của DY với AC .

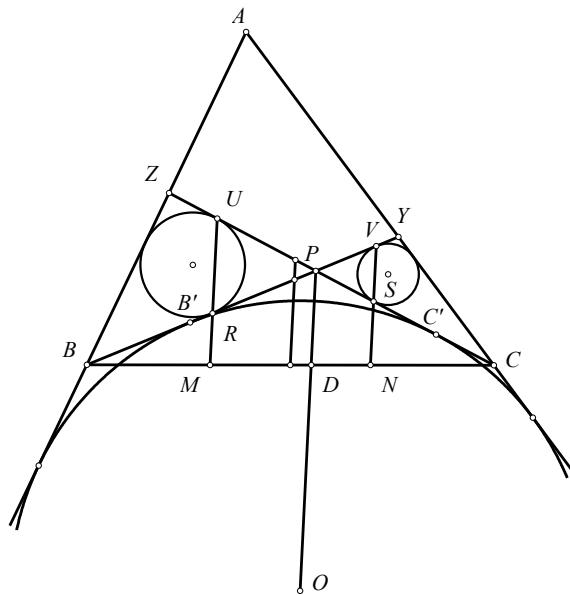
Do $AX \parallel BD$ nên R là tâm vị tự trong của (J_2) và (I) . Tương tự U là tâm vị tự trong của (J_1) và (I) .

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn (I) , (J_1) , (J_2) ta thu được R, U, S thẳng hàng.

Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác XDY và TAZ suy ra XT, AD, YZ đồng quy hay Q nằm trên AD . Ta có đpcm. \square

Bài 11. Cho tam giác ABC . Gọi P là điểm nằm trong $\triangle ABC$ sao cho $AB + BP = AC + CP$. Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BP và AC , CP và AB . Chứng minh rằng trung điểm BC nằm trên trực đẳng phương của hai đường tròn nội tiếp tam giác YCP và ZBP .

Lời giải. Cách 1.



Do $AB + BP = AC + CP$ nên tứ giác $AZPY$ bằng tiếp một đường tròn ω có tâm O . Gọi ω_1 và ω_2 lần lượt là đường tròn nội tiếp $\triangle ZPB$ và $\triangle YPC$. U, V và R, S lần lượt là tiếp điểm của ω_1, ω_2 với PZ, PY và PB, PC . UR, VS, PO cắt BC lần lượt tại M, N, D . Rõ ràng $UR \parallel VS \parallel OP$ nên $\triangle BRM \sim \triangle BPD$ và $\triangle CSN \sim \triangle CPD$.

Ta thu được $\frac{BR}{BP} = \frac{BM}{BD}$, $\frac{CS}{CP} = \frac{CN}{CD}$ suy ra $\frac{BR}{CS} \cdot \frac{CP}{BP} = \frac{BM}{CN} \cdot \frac{CD}{BD}$

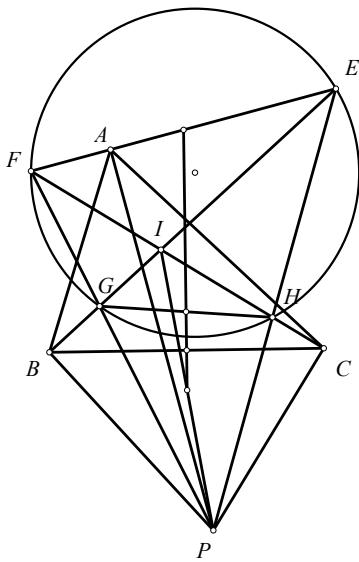
Lại có $\frac{CP}{BP} = \frac{CD}{BD}$. Gọi B', C' là tiếp điểm của ω với PB, PC , ta có $PB' = PC' = BR = CS$. Từ đó suy ra $BM = CN$, hay trung điểm của BC đồng thời là trung điểm của MN .

Dễ thấy trung điểm của BC nằm trên đường trung bình của hình thang $UVSR$ và đường thẳng này hiển nhiên là trực đằng phương của ω_1, ω_2 .

Cách 2.

Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC . P là điểm bất kì nằm trên phân giác trong góc A . Qua B, C lần lượt kẻ đường vuông góc với PB, PC , cắt phân giác ngoài góc A tại hai điểm E, F . Khi đó trung trực của BC chia đôi EF .



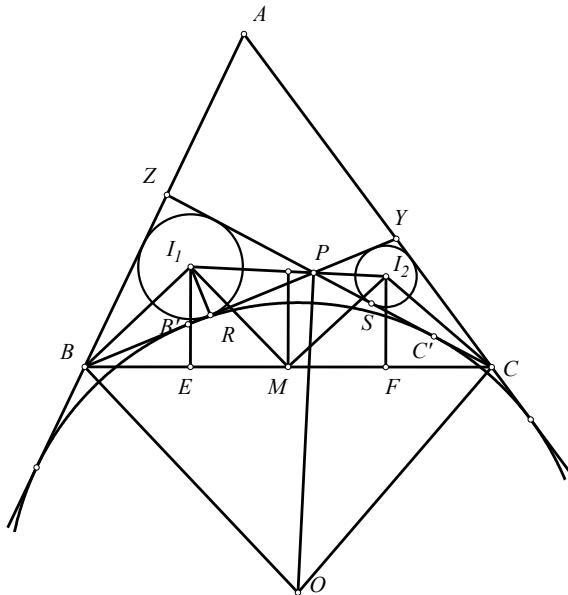
Chứng minh. Gọi G, H là giao của PF với BE, PE với CF . BE giao CF tại I .

Ta có tứ giác $FACP, PBAE$ nội tiếp nên $\angle PFC = \angle PAC = \angle PAB = \angle BEP$. Suy ra tứ giác $FGHE$ nội tiếp. Từ đó $\angle PGB = \angle PHC$. Mà hai tam giác FCP và EBP đồng dạng nên $\frac{BG}{GE} = \frac{CH}{HF}$.

Theo định lý ERIQ, trung điểm EF, GH, BC thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý đường thẳng Gauss trong tứ giác toàn phần $GIHP.EF$ ta có trung điểm EF, GH, IP thẳng hàng. Mà trung điểm IP là tâm của $(BICP)$ nên nằm trên trung trực BC . Như vậy trung trực BC đi qua trung điểm EF . \square

Trở lại bài toán.



Điều kiện của đề bài tương đương tồn tại một đường tròn (O) bàng tiếp tứ giác $AYPZ$.

Kẻ I_1E, I_2F vuông góc với BC . Gọi M là trung điểm BC . Áp dụng bổ đề trên cho tam giác BPC với điểm O nằm trên phân giác góc P suy ra trung trực BC chia đôi I_1I_2 . Do đó $ME = MF$.

Gọi R, S là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với PB, PC, B', C' là tiếp điểm của (O) với PB, PC .

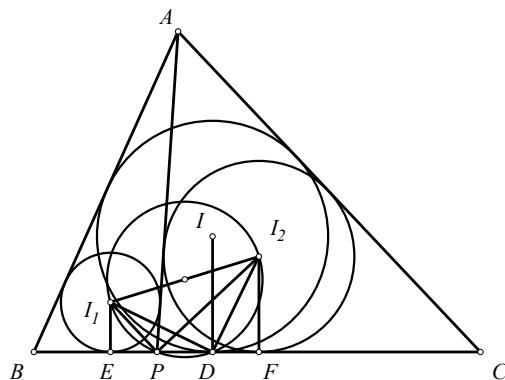
Ta có $BR = PB' = PC' = CS$. Do đó $BI_1^2 - r_1^2 = BR^2 = CS^2 = CI_2^2 - r_2^2$.

Mặt khác, $BI_1^2 - MI_1^2 = BE^2 - ME^2 = CF^2 - MF^2 = CI_2^2 - MI_2^2$ nên $MI_1^2 - r_1^2 = MI_2^2 - r_2^2$. Vậy M nằm trên trực đường phẳng của (I_1) và (I_2) . \square

Bài 12. Cho tam giác ABC . P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AB + BP = AC + CP$. Chứng minh rằng trung điểm BC nằm trên trực đường phẳng của đường tròn nội tiếp các tam giác ABP, ACP .

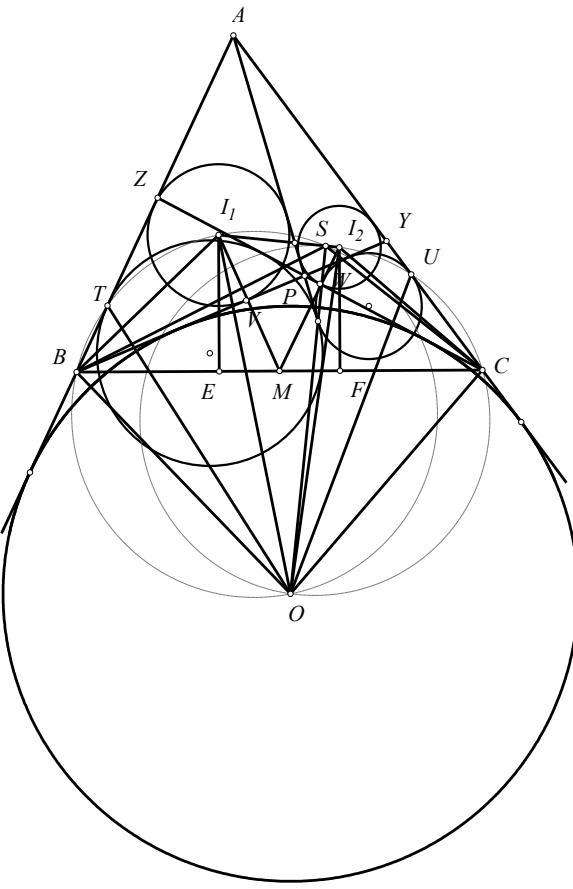
Lời giải. Ta phát biểu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC . P là điểm bất kì trên BC , gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABP, ACP . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Khi đó I_1, I_2, P, D cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Gọi E, F là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với BC . Bằng công thức tính đoạn nối đỉnh tới tiếp điểm của đường tròn nội tiếp, dễ thấy $EP = FD$. Đồng thời do $\triangle I_1PE \sim \triangle PI_2F$ nên $\triangle DEI_1 \sim \triangle I_2FD$. Suy ra $\angle I_1DI_2 = 90^\circ$. \square

Trở lại bài toán.



Gọi Y, Z lần lượt là giao của BP với AC, CP với AB , $(I_1), (I_2)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABP, ACP .

Điều kiện của đề bài tương đương tồn tại một đường tròn (O) bàng tiếp tứ giác $AYPZ$.

Gọi ω_1, ω_2 là đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác APZ, APY, T, U là tiếp điểm của ω_1, ω_2 với AB, AC .

Áp dụng tương tự bởđề trên cho đường tròn bàng tiếp tam giác APZ với điểm B nằm trên AZ ta có (I_1) là đường tròn nội tiếp tam giác APB , (O) là đường tròn bàng tiếp góc Z của tam giác ZPB nên O, I_1, B, T cùng thuộc một đường tròn. Tương tự, O, I_2, C, U cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, $AT = p_{AZP} = \frac{1}{2}(AZ + ZP + PA)$, $AU = p_{APY} = \frac{1}{2}(AY + YP + AP)$. Do tứ giác $AYPZ$ bàng tiếp nên $AZ + ZP = AY + YP$, từ đó $AT = AU$, suy ra $\angle OTB = \angle OUC$.

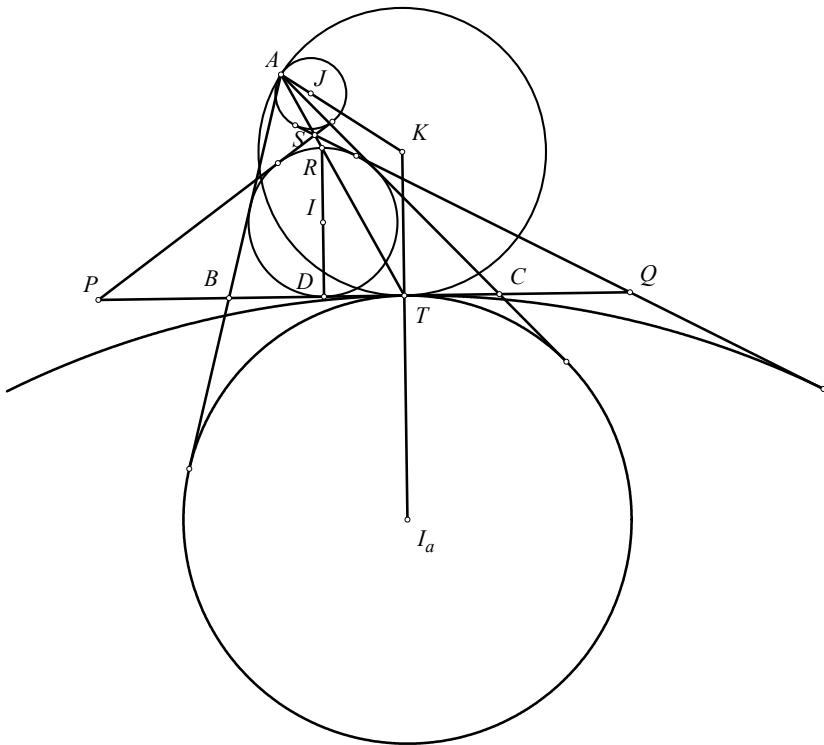
Gọi S là hình chiếu của O trên I_1I_2 suy ra các bộ điểm S, O, I_1, B, T và S, O, I_2, C, U cùng thuộc một đường tròn. Ta có $\angle OSB = \angle OTB = \angle OUC = \angle OSC$.

Như vậy O nằm trên phân giác $\angle BSC$, I_1I_2 là phân giác ngoài $\angle BSC$. Áp dụng bởđề trong cách 2 bài 11 suy ra trung trực BC chia đôi I_1I_2 . Từ đó hạ $I_1E, I_2F \perp BC$ ta thu được $BE = CF$. Gọi M là trung điểm BC ta có $BI_1^2 - MI_1^2 = BE^2 - ME^2 = CF^2 - MF^2 = CI_2^2 - MI_2^2$.

Gọi V, W là tiếp điểm của $(I_1), (I_2)$ với BP, CP . Ta có $BV = \frac{1}{2}(AB + BP - AP) = \frac{1}{2}(AC + CP - AP) = CW$. Do đó $BI_1^2 - r_1^2 = CI_2^2 - r_2^2$.

Vậy $MI_1^2 - r_1^2 = MI_2^2 - r_2^2$ hay M nằm trên trục đẳng phương của (I_1) và (I_2) . \square

Bài 13. (*Tạp chí THTT tháng 9/2017*) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , với đường tròn (I_a) bằng tiếp góc A . (I_a) tiếp xúc với BC tại T . Trung trực của AT cắt I_aT tại K . J là điểm bất kì trên AK sao cho (J, JA) và (I) ngoài nhau. Gọi P, Q là giao của tiếp tuyến chung trong của (I) và (J, JA) với BC . Chứng minh rằng $BP = CQ$.



Lời giải. Gọi S là giao của hai tiếp tuyến chung trong của (J) và (I) . Dựng đường tròn (K, KA) suy ra (K, KA) tiếp xúc với (J) tại A và tiếp xúc với (I_a) tại T .

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho ba đường tròn $(I), (K), (I_a)$ ta thu được tâm vị tự trong của (I) và (K) nằm trên AT .

Lại áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho ba đường tròn $(J), (I), (K)$ ta thu được tâm vị tự trong của (I) và (K) nằm trên AS .

Suy ra A, S, T thẳng hàng.

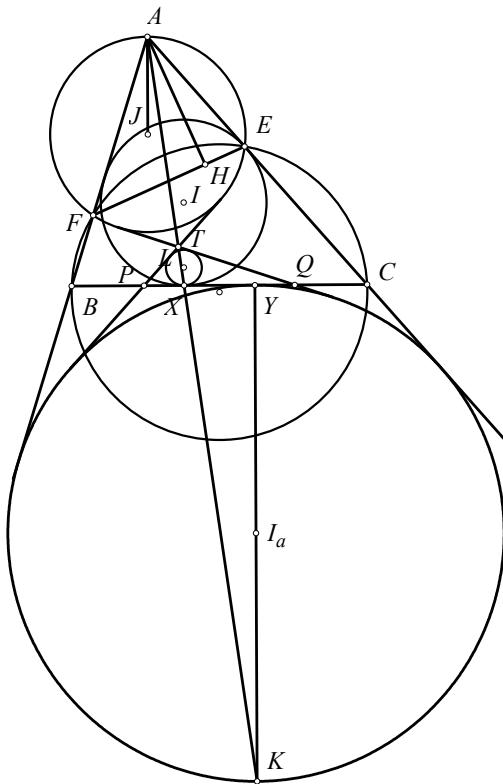
Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , R là điểm đối xứng với D qua I . Ta có A là tâm vị tự ngoài của (I) và (I_a) nên A, R, T thẳng hàng. Suy ra S, R, T thẳng hàng. Từ đó T là tiếp điểm của đường tròn bằng tiếp góc S của tam giác SPQ với PQ .

Suy ra $DP = TQ$. Mà $DB = TC$ suy ra $BP = CQ$. \square

Bài 14. (*Tạp chí THTT tháng 9/2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Một đường tròn tâm J bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . Tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P, Q . Chứng minh rằng (J, JP) tiếp xúc với (O) và (AEF) .

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề sau.

Bổ đề. Cho tam giác ABC với (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A . Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . Tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) cắt BC tại P, Q . Khi đó $BP = CQ$.



Chứng minh. Gọi J là tâm của (AEF) , kẻ $AH \perp EF$. Gọi T là tâm vị tự trong của (J) và (I_a) , (I) , (L) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABC , TPQ . (I) , (I_a) tiếp xúc với BC lần lượt tại X, Y . Kẻ đường kính YK của (I_a) .

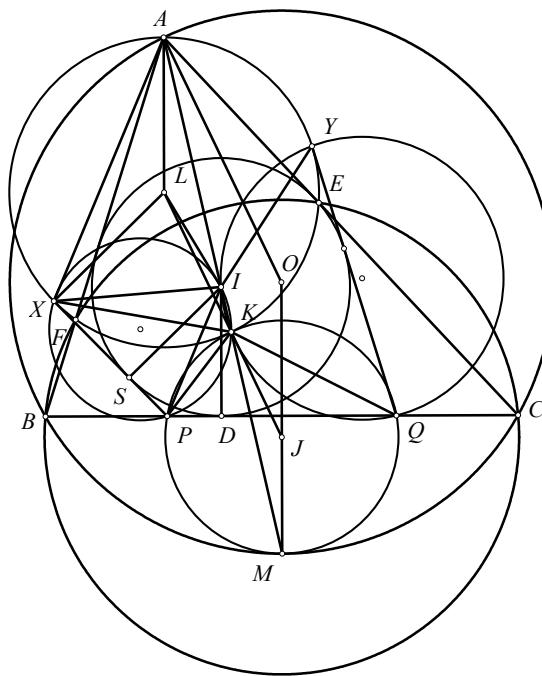
Ta có AJ, AH đẳng giác trong $\angle BAC$. Lại có EF và BC đối song trong $\angle BAC$ nên $AJ \perp BC$.

Do đó $AJ \parallel I_aK$, suy ra A, T, K thẳng hàng.

Mặt khác, A là tâm vị tự ngoài của (I) và (I_a) nên A, X, K thẳng hàng. Suy ra T, X, K thẳng hàng. Do T là tâm vị tự ngoài của (L) và (I_a) nên X đồng thời là tiếp điểm của (L) với BC .

Như vậy $XP = YQ$ và $XB = YC$. Suy ra $BP = CQ$. □

Trở lại bài toán.



Gọi K, M lần lượt là giao của phân giác $\angle BAC$ với (O) ; L là tâm (AEF) . Ta có K là điểm chính giữa cung EF của (L) nên L, K, J thẳng hàng. Ta có $AL \perp BC$. Chứng minh tương tự $AO \perp EF$ nên $ALJO$ là hình bình hành.

Do đó $JK = LJ - LK = AO - AL = OM - OJ = JM$. Như vậy (J, JM) tiếp xúc với (O) và (L) .

Áp dụng bô đê trên, $BP = CQ$ nên $JP = JQ$. Vậy ta chỉ cần chứng minh tứ giác $PKQM$ nội tiếp.

Do $MP = MQ$ nên ta cần chứng minh KM là phân giác $\angle PKQ$.

Gọi X, S lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung qua P của $(L), (I)$ với $(L), (I)$; Y là tiếp điểm của tiếp tuyến chung qua Q của $(L), (I)$ với $(L), (I)$. (I) tiếp xúc với BC tại D .

Ta có $IS \parallel LX, ID \parallel LA$ nên $\angle ALX + \angle SID = 180^\circ$. Suy ra $\angle PID + \frac{1}{2}\angle ALX = 180^\circ$ hay $\angle PID = \angle XAL$.

Từ đó $AX \parallel IP$. Ta thu được $\angle PIK = \angle XAK = \angle PXK$ hay tứ giác $PXIK$ nội tiếp.

Tương tự tứ giác $QYIK$ nội tiếp.

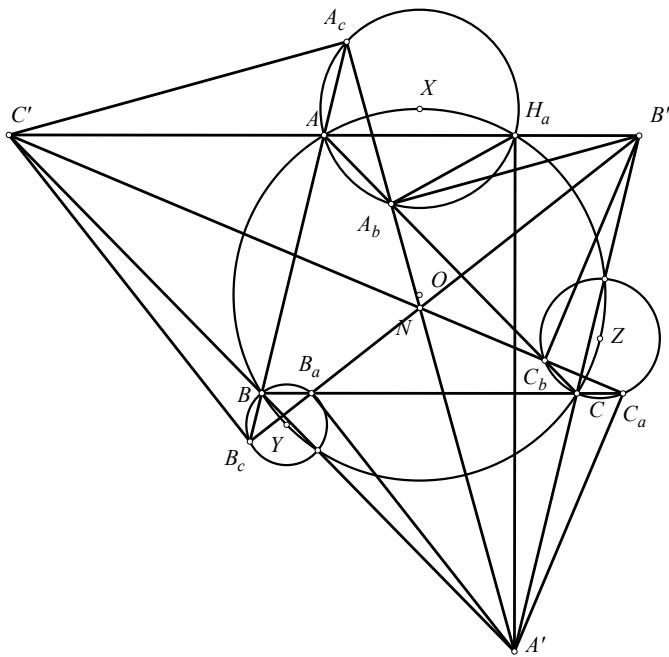
Suy ra $\angle PKM = \angle PXI = \angle IYQ = \angle MKQ$ (do PX và QY đối xứng nhau qua LI). Ta có đpcm. \square

Bài 15. Cho tam giác ABC có N là điểm Nagel. Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm chính giữa các cung BAC, ABC, ACB . Chứng minh rằng N là tâm đường tròn $(X, XA), (Y, YB), (Z, ZC)$.

Lời giải. Ta phát biểu và không chứng minh một bô đê quen thuộc:

Bô đê. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I . Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của A trên BC , của B, C trên AI, M là trung điểm BC . Khi đó H, K, L, M cùng thuộc một đường tròn có tâm là điểm chính giữa cung MH của đường tròn Euler.

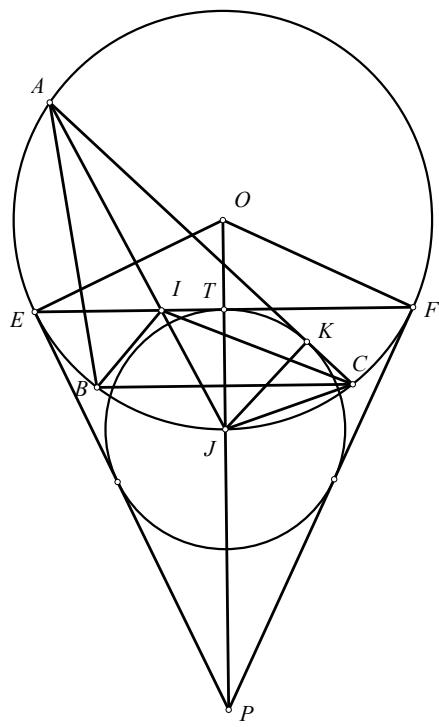
Trở lại bài toán.



Qua A, B, C lần lượt kẻ đường thẳng song song với BC, CA, AB cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Khi đó N là tâm nội tiếp của tam giác $A'B'C'$. Gọi A_c, A_b lần lượt là hình chiếu của C', B' trên $A'N$, tương tự xác định B_a, B_c, C_a, C_b, H_a là hình chiếu của A' trên BC . Khi đó A_c, A_b, A, H_a cùng nằm trên (X, XA) . Dễ thấy $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ nằm trên 3 cạnh của tam giác ABC .

Ta có $\angle C'B_cB_c = \angle C'B'N = \angle B'B_aC$ nên tứ giác $B_cB_aC_bC_a$ nội tiếp. Suy ra N nằm trên trực đường phương của (Y, YB) và (Z, ZC) . Chứng minh tương tự ta có đpcm. \square

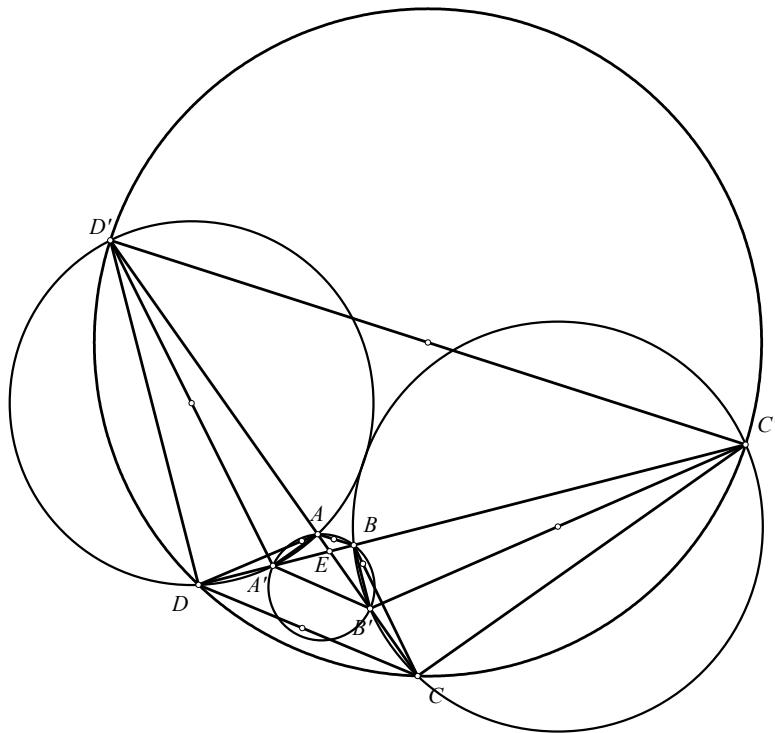
Bài 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm nội tiếp. AI cắt (O) lần thứ hai tại J . Gọi ω là đường tròn tâm J và tiếp xúc với AB, AC . Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và ω tiếp xúc với (O) tại hai điểm E, F . Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng.



Lời giải. Gọi P là tâm vị tự ngoài của (O) và ω . Hiển nhiên J nằm trên phân giác $\angle EPF$. Mà $OE = OF = OJ$, O nằm trên (EPF) nên J là tâm nội tiếp tam giác PEF . Từ đó EF tiếp xúc với ω .

Ta có $EF \perp OJ$ nên $EF \parallel BC$. Gọi T là giao của OJ với ω . Ta có $\angle OJC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle AJK$ nên $\angle IJT = \angle CJK$. Từ đó $\triangle IJT \cong \triangle CJK$. Suy ra $\angle ITJ = 90^\circ$ hay tiếp tuyến kẻ từ I tới ω song song với BC . Như vậy $I \in EF$. \square

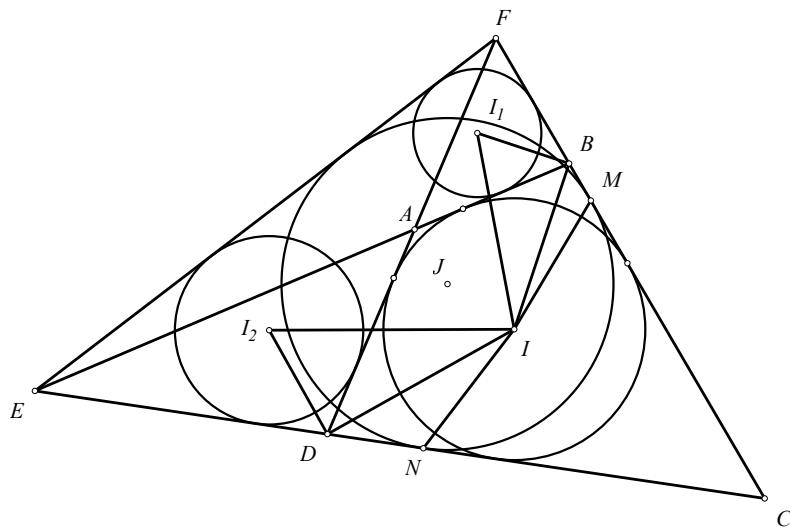
- Bài 17.** Cho tứ giác $A'B'C'D'$. Gọi A, C lần lượt là hình chiếu của A', C' trên $B'D'$; B, D lần lượt là hình chiếu của B', D' trên $A'C'$. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.



Lời giải. Dễ thấy các tứ giác $AA'DD'$, $ABB'A'$, $BB'CC'$, $DCC'D'$ nội tiếp đường tròn đường kính $A'D'$, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$.

Đặt $\angle AA'B = \angle AB'B = \angle AD'D = \angle BC'C = \alpha$. Theo định lý hàm số sin, $AD = A'D' \sin \angle AD'D = A'D' \sin \alpha$, $BC = B'C' \sin \angle BC'C = B'C' \sin \alpha$. Suy ra $AD + BC = \sin \alpha(A'D' + B'C')$. Tương tự $AB + CD = \sin \alpha(A'B' + C'D')$. Từ đó tứ giác $A'B'C'D'$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$ khi và chỉ khi $AB + CD = AD + BC$ hay tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. \square

- Bài 18.** (*Tạp chí THHT tháng 6/2016*) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Tia AB giao tia CD tại E , Tia DA giao tia CB tại F . Gọi (I_1) , (I_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác EFB , EFD . Chứng minh rằng $\angle I_1 IB = \angle I_2 ID$.



Lời giải. Gọi (J) là đường tròn nội tiếp tam giác EFC . (J) tiếp xúc với EC và FC lần lượt tại N, M .

Áp dụng bổ đề của bài 12 cho tam giác EFC với điểm D trên EC , điểm B trên FC ta suy ra các bộ 4 điểm I_2, I, D, N và I_1, I, B, M đồng viên.

Suy ra $\angle DI_2I = \angle INC, \angle BI_1I = \angle IMC$.

Do CI là phân giác $\angle FCE$ và $CM = CN$ nên $\angle IMC = \angle INC$. Từ đó $\angle DI_2I = \angle BI_1I$.

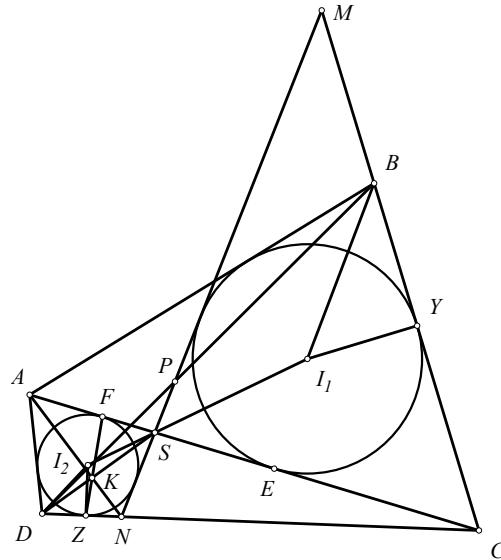
Suy ra $\angle I_1IB = 90^\circ - \angle II_1B = 90^\circ - \angle DI_2I = \angle I_2ID$. \square

Bài 19. Cho hình vuông $ABCD$. P là điểm bất kì trên AB . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ADP, CBP . DI_1, CI_2 cắt AB lần lượt tại E, F . Đường thẳng qua E song song với AC cắt BD tại M , đường thẳng qua F song song với BD cắt AC tại N . Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của (I_1) và (I_2) .

Lời giải. Cách 1.

Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi (I_1, r_1) và (I_2, r_2) lần lượt là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$. Tiếp tuyến chung trong ℓ khác AC của (I_1) và (I_2) cắt BD tại P . Khi đó $\frac{BP}{CP} = \frac{\cot \angle ABI_1}{\cot \angle ADI_2}$.



Chứng minh. Gọi ℓ cắt CB, CD, CA lần lượt tại M, N, S . (I_1) tiếp xúc với CA, CB lần lượt tại E, Y , (I_2) tiếp xúc với CA, CD lần lượt tại F, Z . Do tứ giác $ADNS$ ngoại tiếp nên AN, DS, FZ đồng quy tại K . Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle DSC$, với cát tuyến \overline{ANK} , ta có:

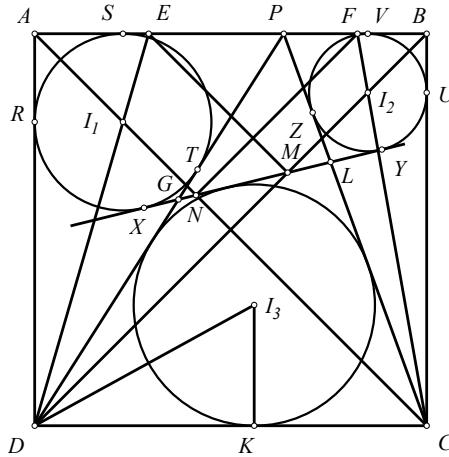
$$\frac{CN}{ND} = \frac{AC}{AS} \cdot \frac{KS}{DK} = \frac{AC}{AS} \cdot \frac{SF}{DZ}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự, } \frac{MB}{CM} = \frac{AS}{AC} \cdot \frac{BY}{SE}$$

Lại áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle BCD$ với cát tuyến ℓ , ta thu được:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{MB}{CM} \cdot \frac{CN}{ND} = \frac{SF}{SE} \cdot \frac{BY}{DZ} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{BY}{DZ} = \frac{\cot \angle ABI_1}{\cot \angle ADI_2}.$$
□

Trở lại bài toán.



Gọi (I_3) là đường tròn nội tiếp tam giác PCD .

Ta sẽ chứng minh 3 đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3)$ có chung một tiếp tuyến.

Gọi XY là tiếp tuyến chung ngoài khác AB của (I_1) và (I_2) , XY giao PD, PC lần lượt tại G, L . (I_1) tiếp xúc với AD, DP, PA lần lượt tại R, T, S ; (I_2) tiếp xúc với BC, CP, PB lần lượt tại U, Z, V .

Tứ giác $GLCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $GL + CD = DG + CL$.

$$\Leftrightarrow XY - GX - LY + CD = DT - GT + CZ - LZ$$

$$\Leftrightarrow SV + CD = DT + CZ = DR + CU = AD - AR + BC - BU.$$

$$\Leftrightarrow AB - AS - BV + CD = AD - AR + BC - BU.$$

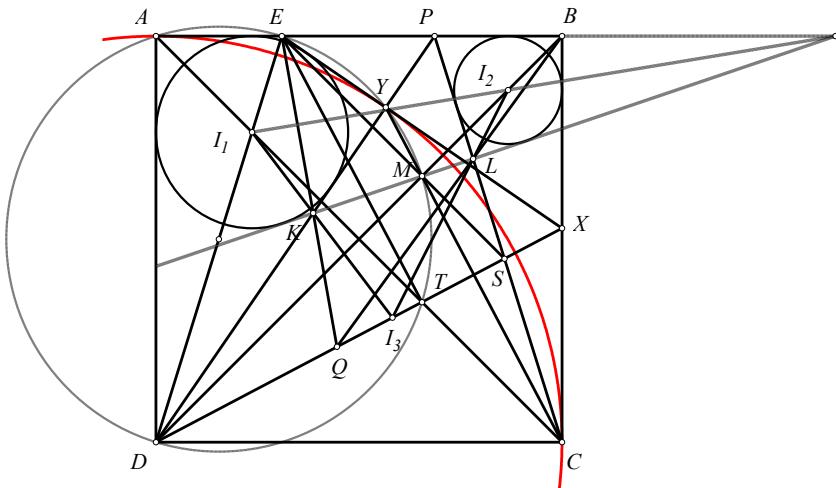
$$\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC, \text{ luôn đúng.}$$

Kẻ $I_3K \perp CD$. Ta có $\angle I_1DI_3 = \frac{1}{2}\angle ADC = \angle BDC$ nên $\angle EDM = \angle I_3DK$.

Do đó $\triangle EDM \sim \triangle I_3DK$. Suy ra $\frac{DM}{MB} = \frac{DM}{ME} = \frac{DK}{KI_3} = \cot \angle I_3DC = \frac{\cot \angle I_3DC}{\cot 45^\circ} = \frac{\cot \angle I_3DC}{\cot \angle I_2BC}$.

Áp dụng bở đề trên suy ra M nằm trên tiếp tuyến chung của (I_2) và (I_3) . Chứng minh tương tự suy ra MN là tiếp tuyến chung của (I_1) và (I_2) .

Cách 2 (Jean-Louis Ayme).



Gọi K, L lần lượt là giao của tiếp tuyến chung ngoài thứ hai của (I_1) và (I_2) với PD, PC, I_3 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PDC . Gọi Q là giao của EK và BL .

Theo bổ đề của cách 1, ba đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3)$ có chung một tiếp tuyến nên từ giác $DKLC$ ngoại tiếp đường tròn (I_3) . Suy ra I_1K giao I_2L tại I_3 .

Ta có EB, I_1I_2, KL đồng quy tại tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (I_1) và (I_2) nên hai tam giác EI_1K và BI_2L thấu xạ. Theo định lý Desargues, giao điểm của các cặp đường thẳng EI_1 và BI_2 , EK và BL , I_1K và I_2L thẳng hàng hay $Q \in DI_3$.

Gọi Y là hình chiếu của E trên DP , EY giao BC tại X . Ta có DE là phân giác $\angle ADY$ nên $DY = DA = DC$. Suy ra $\triangle XYD \cong \triangle XCD$. Từ đó $X \in DI_3$.

Gọi T là giao của DX với AC , ta có $\angle EDX = \frac{1}{2}\angle ADC = 45^\circ = \angle TAE$, suy ra tứ giác $AETD$ nội tiếp. Suy ra $\angle ETD = 90^\circ$.

Do $EM \parallel AC$ nên $EM \perp BD$. Suy ra các điểm A, E, Y, M, T, D cùng thuộc đường tròn đường kính DE .

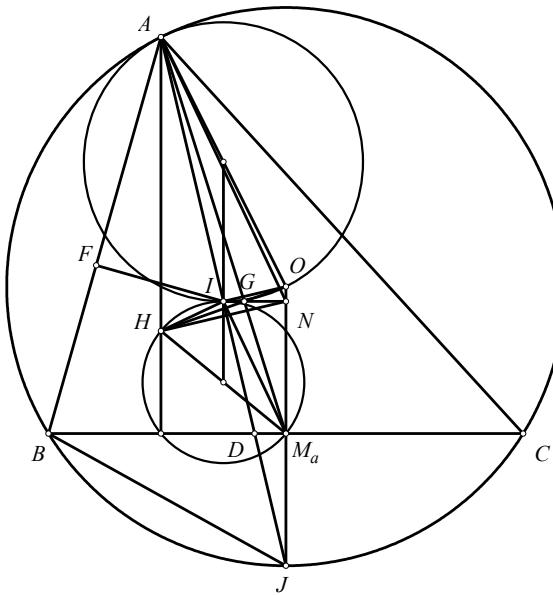
Suy ra $\angle MYX = \angle MDE = \angle BDE = \angle XDC = \angle CYX$. Ta thu được Y, M, C thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, E, Y, M, T, D ta có $AE \cap DY = \{P\}$, $EM \cap DT = \{S\}$, $YM \cap AT = \{C\}$ thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pappus cho 2 bộ 3 điểm (E, P, B) và (D, Q, S) ta có $EQ \cap PD = \{K\}$, $ES \cap BD = \{M\}$, $PS \cap BQ = \{L\}$ thẳng hàng. Vậy M nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2) .

Chứng minh tương tự suy ra MN là tiếp tuyến chung ngoài của (I_1) và (I_2) .

Bài 20. Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$ nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H . Gọi M_a là trung điểm BC . Chứng minh rằng các đường tròn đường kính HM_a và AO tiếp xúc với nhau.



Lời giải. Gọi F là hình chiếu của I trên AB . AI cắt (O) lần thứ hai tại J . Ta có $AF = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{BC}{2} = BM_a$. Lại có $\angle FAI = \angle JBM_a$ nên $\triangle IFA \sim \triangle JM_aB$.

Suy ra $AI = BJ = JI$. Ta thu được $OI \perp AJ$ hay $I \in (AO)$.

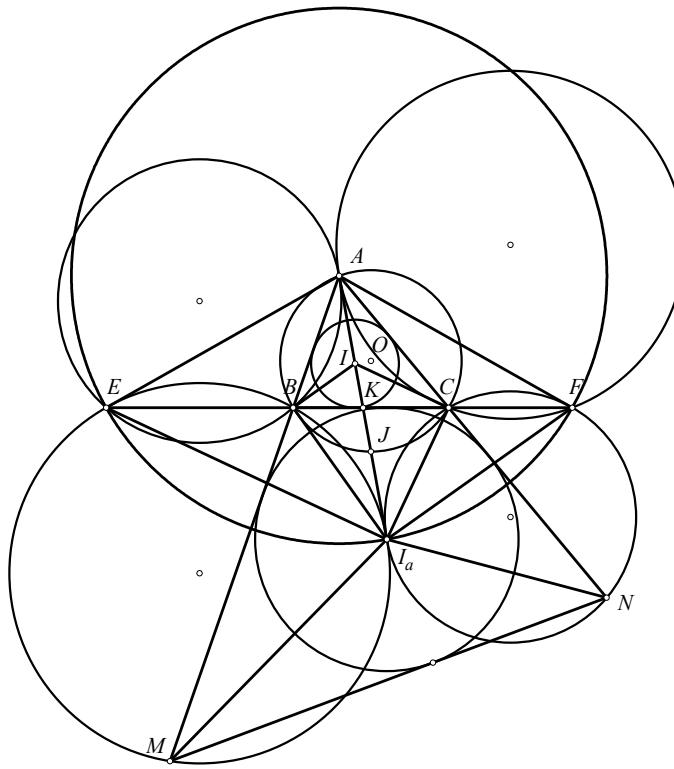
Gọi D là giao của AI với BC . Ta có $IF = JM_a$ nên khoảng cách từ I và J đến BC bằng nhau, suy ra $DI = DJ = \frac{1}{2}IJ$.

Do đó nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $IG \parallel BC$. Gọi N là giao của IG với OM_a . Ta có $NM_a = r = M_aJ$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác INJ với cát tuyến (A, G, M_a) ta có $\frac{AI}{AJ} \cdot \frac{M_aJ}{M_aN} \cdot \frac{GN}{GI} = 1$. Do đó $\frac{GN}{GI} = 2 = \frac{GH}{GO}$. Ta thu được $IO \parallel HN$.

Mà $AI \perp OI$ nên $AI \perp HN$. Đồng thời $NI \perp AH$ nên I là trực tâm tam giác AHN . Suy ra $HI \perp AN$.

Lại có IM_a là đường trung bình của tam giác AJN nên $IM_a \parallel AN$. Suy ra $HI \perp IM_a$ hay $I \in (HM_a)$. Do I nằm trên đường trung bình của hình thang AOM_aH nên I nằm trên đường nối hai tâm của (AO) và (HM_a) . Ta có đpcm. \square

Bài 21. Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A . Đường tròn (A, AI_a) cắt BC tại E, F sao cho E thuộc tia CB , F thuộc tia BC . Đường tròn (EBI_a) cắt AB tại M , (FCI_a) cắt AC tại N . Chứng minh rằng tứ giác $BCNM$ là tứ giác lưỡng tâm.



Lời giải. Gọi E' là giao của đường tròn qua A, B và tiếp xúc với AI_a với BC , K là giao của AI_a với BC , J là giao của AI với (O) .

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABJC$ ta có $AB \cdot JC + AC \cdot BJ = AJ \cdot BC$. Do $JB = JC = JI \cdot (AB + AC) = AJ \cdot BC$. Suy ra $AJ = 2JI$. Từ đó $AI = IJ = JI_a$, lại có $AI = 2IK$ nên $AK = KI_a$. Từ đó $KI_a^2 = KA^2 = KB \cdot KE'$, nghĩa là $(E'BI_a)$ tiếp xúc với AI_a .

Như vậy $\angle AE'I_a = \angle AE'K + \angle KE'I_a = \angle BAI + \angle BI_aI = \angle BAI + \angle BCI$.

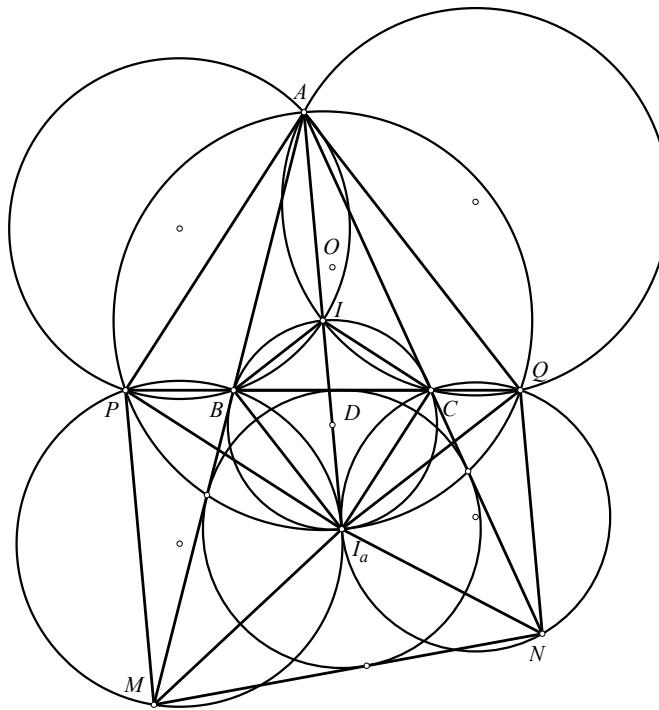
Mà $\angle E'AI_a = \angle ABC$ nên $\angle E'AI_a = 180^\circ - 2\angle AE'I_a$ hay tam giác $AE'I_a$ cân tại A . Từ đó $E' \equiv E$.

Suy ra $\angle BI_aM = 180^\circ - \angle MBI_a - \angle BMI_a = 180^\circ - (90^\circ - \angle IBC) - \angle BI_aI = 90^\circ + \angle IBC - \angle ICB$.

Chứng minh tương tự, $\angle CI_aN = 90^\circ + \angle ICB - \angle IBC$. Suy ra $\angle BI_aM + \angle CI_aN = 180^\circ$ hay tứ giác $BCNM$ ngoại tiếp.

Mặt khác, AI_a là tiếp tuyến chung của (BI_aM) và (CI_aN) nên $AB \cdot AM = AI_a^2 = AC \cdot AN$ hay tứ giác $BCNM$ nội tiếp. Ta có đpcm. \square

Bài 22. Cho tam giác ABC có $AB + AC = 3BC$. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A . Trên BC lấy hai điểm P, Q sao cho $CP = CA, BQ = BA$ và theo thứ tự P, B, C, Q . Đường tròn (PBI_a) cắt AB lần thứ hai tại M , đường tròn (QCI_a) cắt AC lần thứ hai tại N . Chứng minh rằng $BCNM$ là tứ giác lưỡng tâm.



Lời giải. Gọi D là điểm chính giữa cung BC . Dễ thấy $IA = IQ = IP$. Từ giả thiết $AB + AC = 3BC$, áp dụng định lý Ptolemy như bài 21 suy ra $AI = 2ID$ hay $IA = II_a$. Vậy API_aQ nội tiếp đường tròn tâm I . Bằng một số phép cộng góc đơn giản suy ra $AICQ, AIBP$ nội tiếp.

Ta có $\angle PMB = \angle PI_aB = \angle PI_aA - \angle BI_aA = \angle AQB - \angle ICB = \angle I_aIC - \angle ICA = \angle IAC$. Suy ra $\angle BI_aM = 180^\circ - \angle BPM = \angle PBM + \angle PMB = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$.

Tương tự $\angle CI_aN = \angle C + \frac{1}{2}\angle A$. Ta thu được $\angle BI_aM + \angle CI_aN = 180^\circ$.

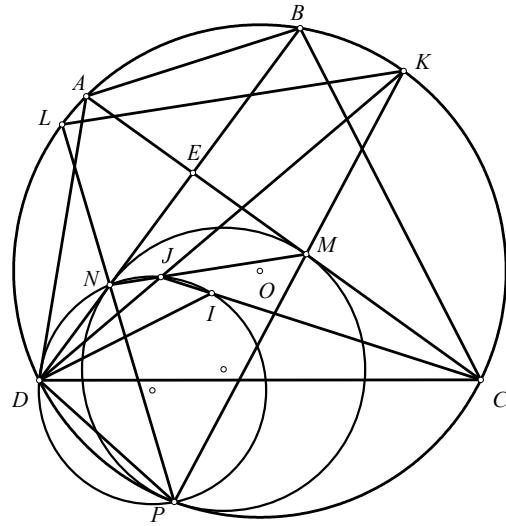
Suy ra MN tiếp xúc với (I_a) hay tứ giác $BCNM$ ngoại tiếp.

Mặt khác, $\angle CNM = 2\angle CNI_a = 2\angle PQI_a = 2\angle PAI = 2\angle IBC = \angle ABC$ hay tứ giác $BCNM$ nội tiếp. Ta có đpcm. \square

Bài 23. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E , AD giao BC tại F . Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với tia EA, EB và tiếp xúc trong với (O) . (O_2) là đường tròn tiếp xúc với tia FA, FB và tiếp xúc ngoài với (O) tại một điểm trên cung AB không chứa C, D . Chứng minh rằng giao của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nằm trên (O) .

Lời giải. Ta phát biểu và chứng minh hai bở đề sau.

Bở đề 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , AC cắt BD tại E . Gọi ω là đường tròn tiếp xúc với tia EC, ED lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong với (O) tại P . I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ECD, ACD . Khi đó P, I, J, N, D cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Gọi K, L lần lượt là giao của PM, PN với (O) .

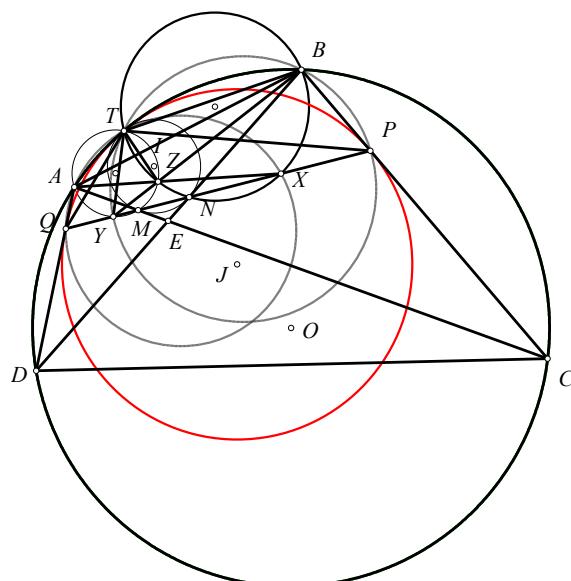
Theo định lý Sawayama-Thebault ta có J nằm trên MN .

Suy ra $\angle ENJ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DEC = \angle JID$. Từ đó N, J, I, D cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, P là tâm vị tự ngoài của ω và (O) nên $LK \parallel MN$. Suy ra $\angle NPD = \angle LKD = \angle NJD$ hay N, J, P, D cùng thuộc một đường tròn.

Vậy P, I, J, N, D cùng thuộc một đường tròn. \square

Bố đề 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E . Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với tia EA, EB và tiếp xúc trong với (O) ; (J) là đường tròn tiếp xúc với AD, BC và tiếp xúc trong với (O) tại một điểm nằm trên cung AB không chứa C, D . Khi đó $(I), (J), (O)$ có chung một tiếp điểm.



Chứng minh. Gọi T là tiếp điểm của (I) với (O) , X, Y, Z lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABC, ABD, ABE . M, N là tiếp điểm của (I) với EA, EB ; MN cắt BC, AD lần lượt tại P, Q .

Hiển nhiên các bộ 3 điểm $A, Z, X; B, Z, Y$ thẳng hàng. Theo định lý Sawayama-Thebault, X, Y nằm trên MN .

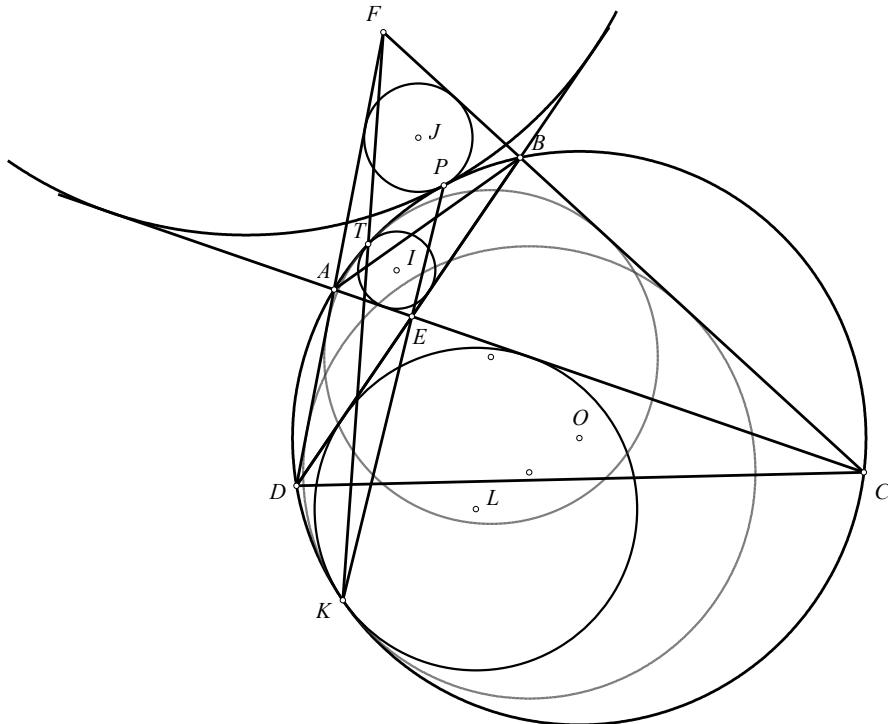
Áp dụng bô đê 1 suy ra $TZNXB, TZMYA$ nội tiếp.

Suy ra $\angle TYM = \angle TAC = 180^\circ - \angle TBC$. Ta thu được $YTBP$ nội tiếp. Tương tự $TAQX$ nội tiếp.

Từ đó $\angle TPB = \angle TYB = \angle TAX = \angle TQP$ hay BC tiếp xúc với (PQT) . Tương tự AD tiếp xúc với (PQT) .

Đồng thời $\angle BTP = \angle BYP = \angle MAZ = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BTC$ nên TP là phân giác $\angle BTC$. Suy ra (PTQ) tiếp xúc với (O) tại T . Vậy $(PTQ) \equiv (J)$. Ta có đpcm. \square

Trở lại bài toán.



Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc với tia EC, ED và tiếp xúc trong với (O) tại K . T, P lần lượt là tiếp điểm của $(I), (J)$ với (O) .

Theo bô đê 2, tồn tại đường tròn ω_1 và ω_2 tiếp xúc với AD, BC và lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại T, K . Chứng minh tương tự bô đê 2 ta cũng thu được tồn tại đường tròn ω_3 tiếp xúc với AC, BD và tiếp xúc ngoài với (O) tại P .

Áp dụng định lý Monge D'Alembert cho 3 đường tròn $\omega_1, \omega_2, (O)$ suy ra F, T, K thẳng hàng; cho 3 đường tròn $\omega_3, (L), (O)$ suy ra P, E, K thẳng hàng.

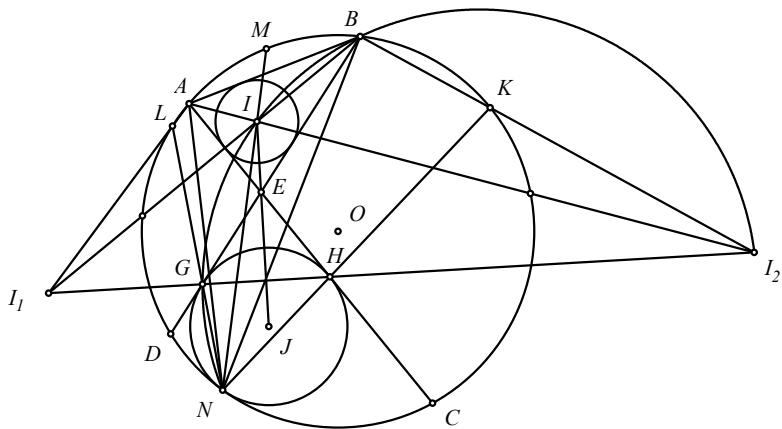
Lại áp dụng định lý Monge D'Alembert cho 3 đường tròn $(I), (J), \omega_1$ suy ra tâm vị tự ngoài của (I) và (J) nằm trên TF ; cho 3 đường tròn $(I), (J), \omega_3$ suy ra tâm vị tự ngoài

của (I) và (J) nằm trên PE . Mà FT giao PE tại K nên K là tâm vị tự ngoài của (I) và (J) . Ta có đpcm. \square

Bài 24. (*ARMO 2010*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại K . Gọi $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, BCD, CDA, DAB . M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3, I_4M_4, OK$ đồng quy.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E . Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác AEB , (J) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) tại N và tiếp xúc với các tia EC, ED . Gọi M là điểm chính giữa cung AB không chứa N . Khi đó M, I, N thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi G, H lần lượt là tiếp điểm của (J) với BD, AC . L, K lần lượt là điểm chính giữa cung BD chứa A , cung AC chứa B . BI giao AL tại I_1 , AI giao BK tại I_2 .

Do tiếp tuyến tại L của (O) song song với tiếp tuyến tại G của (J) nên phép vị tự tâm N biến (J) thành (O) sẽ biến G thành L , suy ra N, G, L thẳng hàng. Tương tự, N, H, K thẳng hàng.

Ta có AI_1 là phân giác ngoài của $\angle DAB$ nên I_1 là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của $\triangle ABD$. Tương tự, I_2 là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC .

Theo định lý Sawayama-Thébault, I_1, I_2, G, H thẳng hàng.

Ta có $\angle NGH = \angle NHC = \angle NBK$ suy ra tứ giác $NGBI_2$ nội tiếp.

$$\angle BII_2 = \frac{1}{2}(\angle BAE + \angle ABE) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AEB = \angle BGI_2.$$

Suy ra tứ giác $GIBI_2$ nội tiếp. Từ đó 5 điểm N, G, I, B, I_2 cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra $\angle INB = \angle II_2B$. (1)

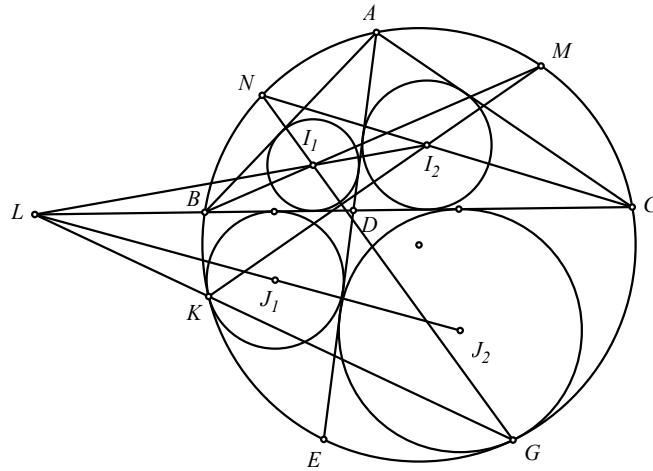
Tương tự, $\angle INA = \angle II_1A$. (2)

Mặt khác, AI, BI lần lượt đi qua điểm chính giữa các cung BC, AD nên $\angle I_1AI_2 = \angle I_1BI_2$.

Từ đó tứ giác I_1ABI_2 nội tiếp, suy ra $\angle II_1A = \angle II_2B$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra NI là phân giác góc ANB hay M, I, N thẳng hàng. \square

Bố đề 2. (*Yetti*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . D là điểm bất kì nằm trên cạnh BC , AD cắt (O) lần thứ hai tại E . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ADB, ADC ; $(J_1), (J_2)$ lần lượt là đường tròn tiếp xúc với các cặp tia (DB, DE) , (DC, DE) và cùng tiếp xúc trong với (O) . Khi đó $I_1 I_2, J_1 J_2, BC$ đồng quy.



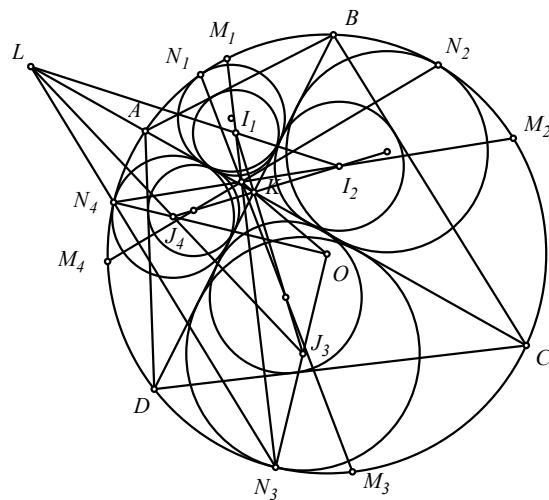
Chứng minh. Gọi K, G lần lượt là tiếp điểm của $(J_1), (J_2)$ với (O) . M, N lần lượt là điểm chính giữa các cung AC, AB .

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho ba đường tròn $(O), (J_1), (J_2)$ suy ra $BC, KG, J_1 J_2$ đồng quy tại L .

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm N, M, B, C, K, G suy ra giao điểm của các cặp đường thẳng $(NC, MB), (NG, MK), (BG, CK)$ thẳng hàng.

Từ đó theo định lý Desargues, $I_1 I_2, BC, J_1 J_2$ đồng quy. \square

Trở lại bài toán.



Gọi $(J_1), (J_2), (J_3), (J_4)$ lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với các cặp tia (KA, KB) , (KB, KC) , (KC, KD) , (KD, KA) và tiếp xúc trong với (O) lần lượt tại N_1, N_2, N_3, N_4 .

Theo bô đê 1 ta có M_1, I_1, N_3 thẳng hàng và M_2, I_2, N_4 thẳng hàng. Do đó ta chỉ cần chứng minh I_1N_3, I_2N_4, OK đồng quy.

Theo bô đê 2, N_3N_4, J_3J_4, I_1I_2 đồng quy tại một điểm trên AC .

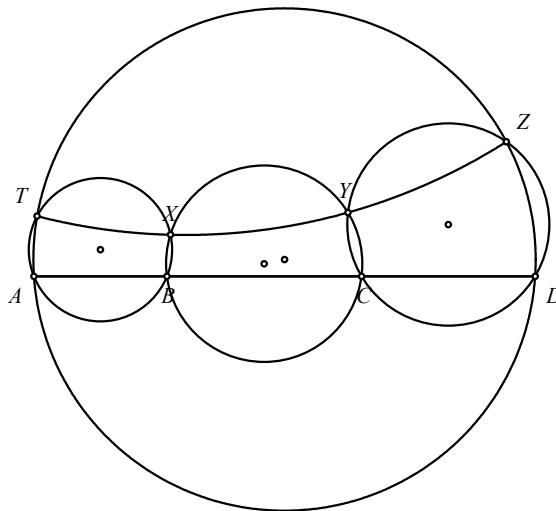
Áp dụng định lý Desargues cho ba đường thẳng N_3N_4, J_3J_4, I_1I_2 suy ra giao điểm của các cặp đường thẳng $(I_1N_3, I_2N_4), (N_4J_4, N_3J_3), (I_1J_3, I_2J_4)$ thẳng hàng, tức là giao điểm của I_1N_3 và I_2N_4 nằm trên OK .

Chứng minh tương tự ta thu được $I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3, I_4M_4, OK$ đồng quy. \square

Bài 25. Cho tam giác ABC . D là một điểm bất kì trên BC . Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với AB, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC , (O_2) là đường tròn tiếp xúc với AC, BC và tiếp xúc ngoài với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB . Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) với BC , G là tiếp điểm của (O_1) với (ADC) , H là tiếp điểm của (O_2) với (ADB) . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHF, CGE và đường tròn đường kính BC đồng quy.

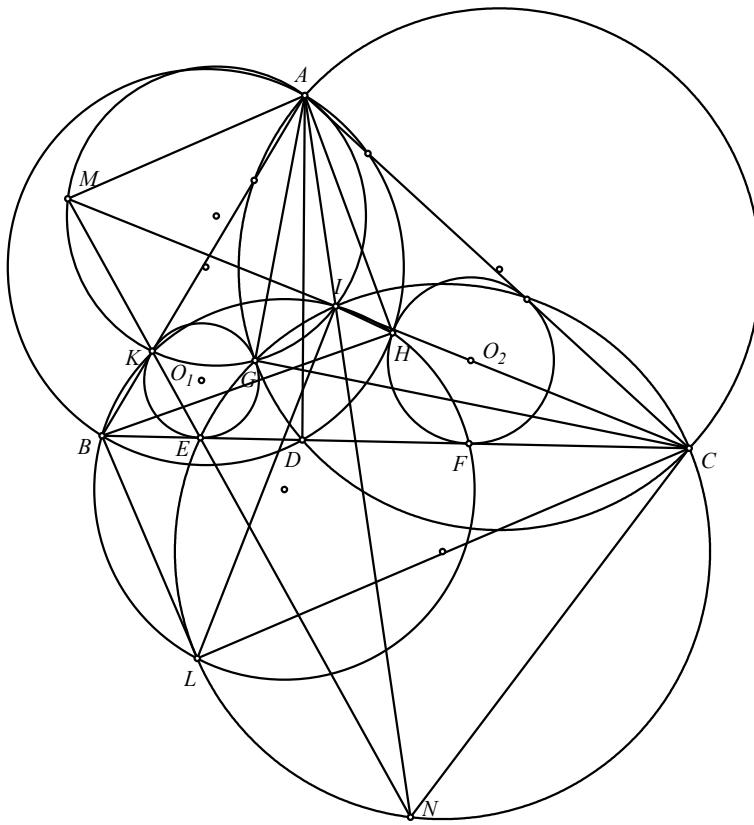
Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bô đê.

Bô đê. Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Gọi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ lần lượt là đường tròn bất kì qua các cặp điểm $(A, B), (B, C), (C, D), (D, A)$. X, Y, Z, T lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn ω_1 và ω_2 , ω_2 và ω_3 , ω_3 và ω_4 , ω_4 và ω_1 . Khi đó X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Bô đê trên có thể chứng minh bằng một số phép cộng góc đơn giản hoặc xét phép nghịch đảo cực A phương tích bất kì biến bài toán thành định lý điểm Miquel của tam giác. \square

Trở lại bài toán.



Gọi K là tiếp điểm của (O_1) với AB . (AKG) cắt (CEG) lần thứ hai tại I . AI, CI lần lượt cắt EK tại N, M .

Áp dụng định lý điểm Miquel cho tam giác AKN với bộ 3 điểm K, E, I ta có (AKI) cắt (KKE) tại G nên G là điểm Miquel của tam giác AKN ứng với 3 điểm K, E, I , hay $N \in (CEG)$. Tương tự, $M \in (AKG)$.

Gọi C' là giao của (AMN) và (IEN) . Áp dụng bổ đề trên cho 4 điểm M, K, E, N và 4 đường tròn $(MKI), (O_1), (NEI), (MAN)$ ta thu được (AGC') tiếp xúc với (O_1) . Từ đó suy ra $C' \equiv C$ hay tứ giác A, M, N, C nội tiếp.

Suy ra $\angle IAB = \angle IMK = \angle IAC$, $\angle ICB = \angle IEN = \angle ICA$ hay I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Ta có $\angle AGI = \angle AMI = \angle CNI = \angle IGC$ hay GI là phân giác $\angle AGC$.

Tương tự, (BHF) cũng đi qua I và HI là phân giác $\angle BHA$.

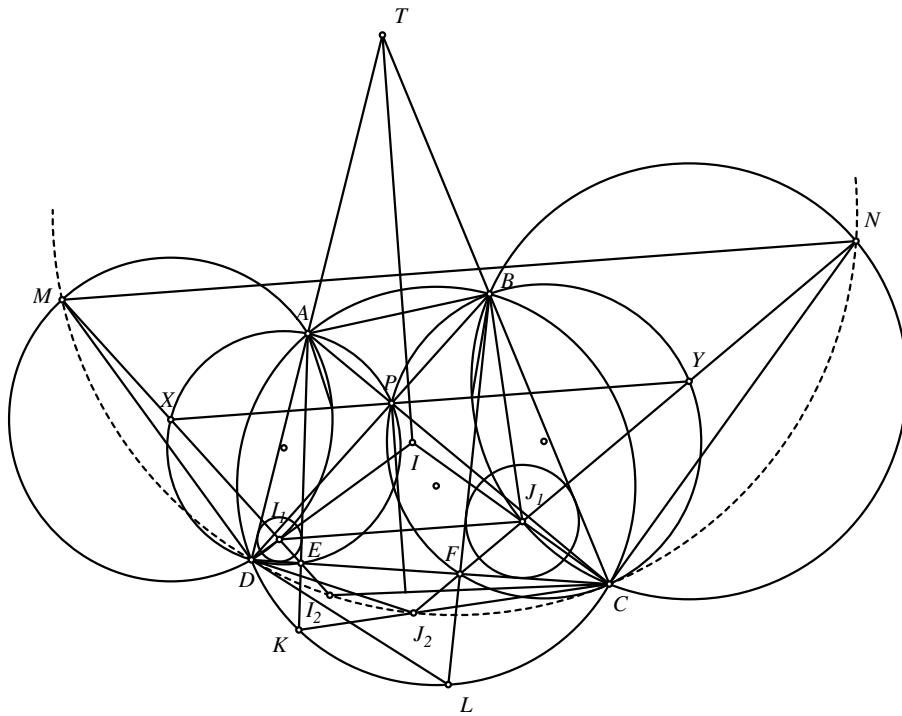
Gọi L là giao điểm thứ hai của (BHF) và (CGE) .

Ta có

$$\angle BLC = \angle BLI + \angle CLI = \angle BHI + \angle CGI = \frac{1}{2}(\angle BHA + \angle CGA) = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle ADC) = 90^\circ. \text{ Suy ra đpcm. } \square$$

- Bài 26.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại P . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC lần lượt giao CD tại E, F sao cho E, F thuộc đoạn thẳng CD . AE, BF giao (O) lần lượt tại K, L . Gọi I_1, I_2, J_1, J_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, CEK, BCF, DFL . Chứng minh rằng I_1, I_2, J_1, J_2 đồng viên.

Lời giải. Cách 1.



Gọi T là giao của AD và BC . I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TCD , (X) và (Y) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC . Ta có X và Y lần lượt là điểm chính giữa cung AD và BC của (APD) và (BPC) nên XY là phân giác $\angle APD$.

Dễ thấy TI song song với phân giác $\angle DPC$ nên $TI \perp XY$. Mà $TA \cdot TD = TB \cdot TC$ nên T nằm trên trực đường phẳng của (X) và (Y). Suy ra TI là trực đường phẳng của (X) và (Y).

Do đó $ID \cdot II_1 = IC \cdot IJ_1$ hay tứ giác DI_1J_1C nội tiếp.

Suy ra $\angle EI_1J_1 = \angle DI_1J_1 - \angle DI_1E = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle DAE) = \frac{1}{2}\angle DAB - \frac{1}{2}\angle DAE = \angle EAP = \angle EXP$. Do đó $I_1J_1 \parallel XY$.

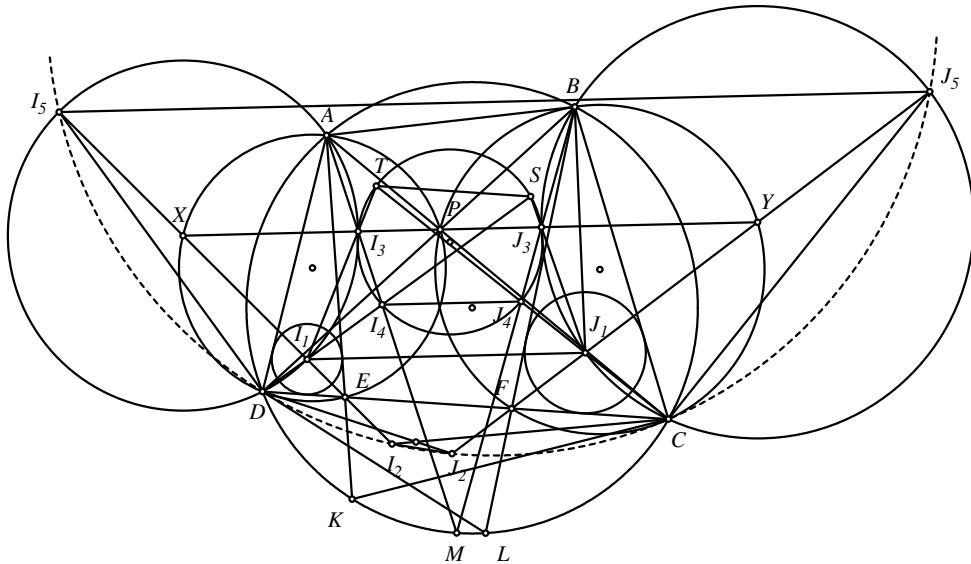
Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng với I_1 qua X, J_1 qua Y suy ra $MN \parallel XY \parallel I_1J_1$.

Suy ra $\angle MNC = \angle MNJ_1 + \angle J_1NC = \angle I_1J_1F + \angle J_1BC = \angle I_1J_1F + \angle FJ_1C - 90^\circ = \angle I_1J_1C - 90^\circ = 270^\circ - \angle I_1DC = 180^\circ - (90^\circ + \angle I_1DC) = 180^\circ - \angle MDC$. Do đó tứ giác $MNCD$ nội tiếp.

Ta có $\angle MI_2C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle EKC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADC = \angle MDC$ nên $I_2 \in (MNCD)$, tương tự với J_2 .

Suy ra tứ giác MNJ_2I_2 nội tiếp. Mà $I_1J_1 \parallel MN$ nên theo định lý Reim, tứ giác $I_1J_1J_2I_2$ nội tiếp.

Cách 2 (Cho phần chứng minh I_1, J_1, C, D đồng viên).



(Luis González) Gọi I_3, I_4, J_3, J_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APD, ADC, BPC, BDC .

AI_4 giao BJ_4 tại M là trung điểm cung CD của (O) . Dễ thấy tứ giác DCJ_4I_4 nội tiếp đường tròn (M, MB) nên $MI_4 = MJ_4$.

Lại có I_3J_3 đi qua P và $\angle PI_3I_4 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ADP = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = \angle PJ_3J_4$ nên tam giác MI_3J_3 cân tại M . Ta thu được $I_3J_3J_4I_4$ là hình thang cân.

Mặt khác, dễ thấy tứ giác AI_3I_1D và BJ_3J_1C lần lượt nội tiếp đường tròn có tâm X và Y là trung điểm cung AD và BC của (APD) và (BPC) . Gọi T là giao của I_1I_3 và J_1J_4 , S là giao của I_1I_4 và J_1J_3 .

Ta có $\angle I_1I_3I_4 = \angle ADI_1 = \angle CDI_1 = \angle I_4J_4T$ nên tứ giác $TI_3I_4J_4$ nội tiếp.

Tương tự tứ giác $SJ_3J_4I_4$ nội tiếp. Vậy $S, T \in (I_4J_4J_3I_3)$.

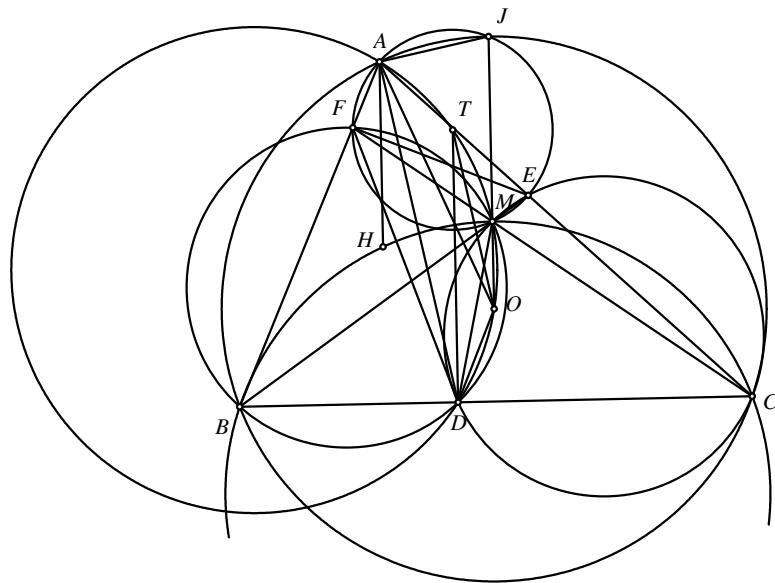
Suy ra $\angle I_1TJ_1 = \angle I_3TJ_4 = \angle J_3SI_4 = \angle J_1SI_1$ hay tứ giác TSJ_1I_1 nội tiếp.

Do các tứ giác TSJ_4I_4 và DCJ_4I_4 nội tiếp nên áp dụng định lý Reim, $TS \parallel DC$. Lại có TSJ_1I_1 nội tiếp nên áp dụng định lý Reim ta có DCJ_1I_1 nội tiếp và $I_1J_1 \parallel I_4J_4 \parallel I_3J_3$. \square

Bài 27. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Gọi M là điểm chính giữa cung BHC của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . BM giao AC tại E , CM giao AB tại F . Kẻ phân giác AD của tam giác ABC . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

a) Chứng minh rằng $TD \perp BC$.

b) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF bằng OD .



Lời giải. a) Ta có $\angle FAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle MCB$ nên tứ giác $FACD$ nội tiếp.

Suy ra $\angle DFC = \angle DAC = \angle MBC$, ta thu được tứ giác $FMDB$ nội tiếp, tương tự $MECD$ nội tiếp.

Dễ thấy $M \in (AEF)$, gọi T là tâm của (AEF) . Ta có

$$TB^2 - TC^2 = \mathcal{P}_{B/(T)} - \mathcal{P}_{C/(T)} = BM \cdot BE - CM \cdot CF = BD \cdot BC - CD \cdot CB = BC(BD - CD) = (BD + CD)(BD - CD) = BD^2 - CD^2. \text{ Suy ra } TD \perp BC.$$

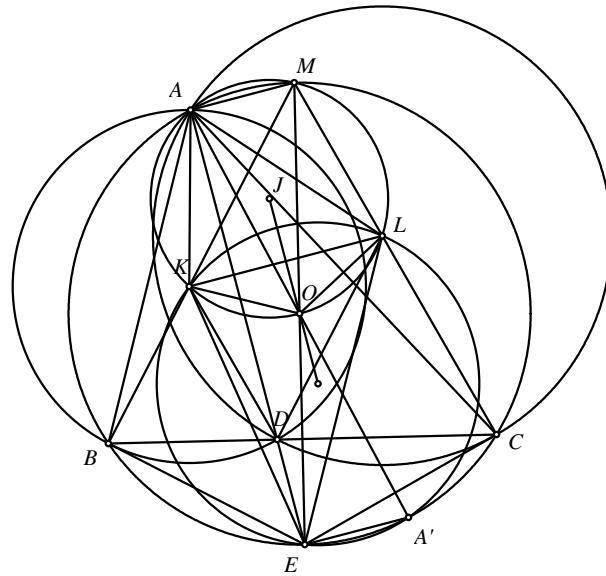
b) Ta có $\angle ADB = \angle AEB = \angle MDC$ nên DA và DM đối xứng nhau qua DT .

Do $BM = CM$ và $\angle BFM + \angle CEM = 180^\circ$ nên $R_{(BMF)} = R_{(CME)}$. Suy ra $BF = CE$.

Ta có (AEF) giao (O) tại J là tâm của phép vị tự quay biến BF thành CE nên $JB = JC$. Do $OT \perp AJ$ và $AJ \perp AD$ nên $OT \parallel AD$.

Ta thu được $\angle TOM = \angle ADT = \angle TDM$, suy ra tứ giác $TMOD$ nội tiếp. Mà $OM \parallel TD$ nên $TMOD$ là hình thang cân. Vậy $TM = OD$ hay $R_{(AEF)} = OD$. \square

Bài 28. (*Arab Saudi JBMO TST 2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác góc A cắt BC tại D và cắt (O) tại E . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O, K, L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD . Chứng minh rằng K, L, E, A' đồng viên.



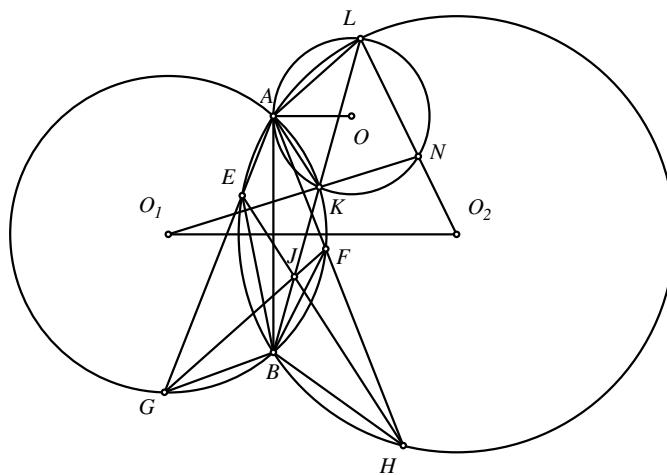
Lời giải. Ta có $EB^2 = ED \cdot EA = \mathcal{P}_{E/(K)}$ nên $\angle KBE = 90^\circ$. Tương tự, $\angle LCE = 90^\circ$. Gọi M là giao của BK và CL suy ra M là điểm chính giữa cung BAC .

Ta có $\angle AOM = 2\angle ABM = \angle AKM$ nên tứ giác $AMOK$ nội tiếp. Chứng minh tương tự suy ra A, M, K, L, O cùng thuộc một đường tròn.

Lại có MO là phân giác $\angle KML$ nên $OK = OL$. Gọi J là tâm của (AKL) thì OJ là trung trực của KL và AM . Mà A', E lần lượt đối xứng với A, M qua O nên phép đối xứng trực OJ :

$S_{OJ} : K \mapsto L, A \mapsto M, A' \mapsto E$, suy ra $KLA'E$ là hình thang cân. Vậy $KLA'E$ là tứ giác nội tiếp. \square

Bài 29. (*Arab Saudi TST 2016*) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Gọi d_1 và d_2 là hai đường thẳng đi qua A và đối xứng nhau qua AB . d_1 cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại G, E , d_2 cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại F, H sao cho E nằm giữa A và G , F nằm giữa A và H . EH cắt FG tại J . BJ cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại K, L , O_1K cắt O_2L tại N . Chứng minh rằng (NLK) tiếp xúc với AB .



Lời giải. Ta có

$$\angle AKO_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_1K = 90^\circ - \angle ABK = 90^\circ - \angle ABL = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_2L = \angle ALO_2.$$

Suy ra $ALNK$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ALNK$.

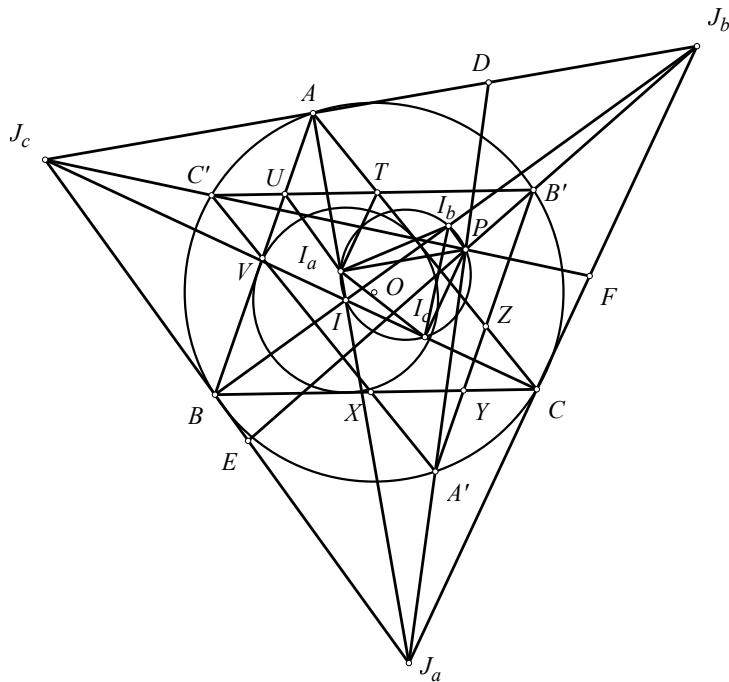
Do B là giao của (AGF) và (AEH) nên B là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $AEJF.GH$ hay $B \in (JFH)$.

Ta thu được $\angle BAO = \angle BAK + \angle KAO = \angle BAF + \angle FAK + 90^\circ - \angle ALK$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{BF} + \widehat{FK}) + 90^\circ - \angle AHB = \frac{1}{2}(\widehat{BG} + \widehat{FK}) - \angle GJB + 90^\circ = 90^\circ.$$

Suy ra AB tiếp xúc với (O) . □

Bài 30. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ các đường kính AA' , BB' , CC' của (O) . Các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ cắt cạnh BC , CA , AB tại các điểm X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự xoay vòng ngược kim đồng hồ ($X, Y \in BC$, $Z, T \in AC$, $U, V \in AB$). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , I_a, I_b, I_c lần lượt là các tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của các tam giác AUT, BXV, CYZ . Chứng minh rằng I, I_a, I_b, I_c đồng viên.



Lời giải. Gọi J_a, J_b, J_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC . Ta thu được I là trực tâm tam giác $J_a J_b J_c$.

Ta có $C'TCX$ là hình bình hành có O là trung điểm CC' nên O đồng thời là trung điểm của XT . Tương tự, O là trung điểm của UY . Suy ra $UTYX$ là hình bình hành.

Suy ra $UT = XY$.

Hiển nhiên I_a, I_b, I_c lần lượt nằm trên AJ_a, BJ_b, CJ_c . Ta có hai tam giác AUT và ABC đồng dạng, có I_a, J_a lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , suy ra $\frac{AI_a}{AJ_a} = \frac{AU}{AB} = \frac{UT}{BC} = \frac{XY}{BC}$.

Tương tự, $\frac{BI_b}{BJ_b} = \frac{BX}{BC}$, $\frac{CI_c}{CJ_c} = \frac{CY}{CB}$.

$$\text{Vậy } \frac{AI_a}{AJ_a} + \frac{BI_b}{BJ_b} + \frac{CI_c}{CJ_c} = \frac{XY}{BC} + \frac{BX}{BC} + \frac{CY}{BC} = 1.$$

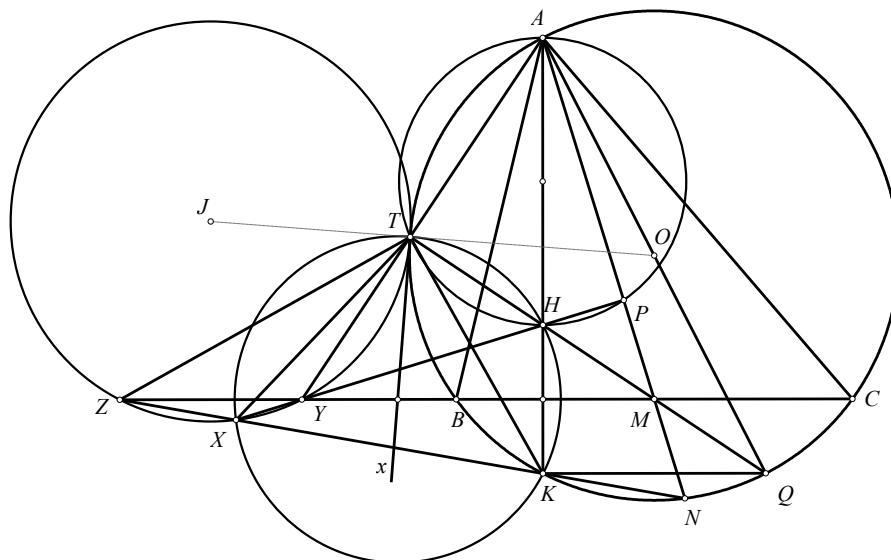
Qua I_b, I_c lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BJ_b, CJ_c , hai đường thẳng này cắt nhau tại P . J_aP, J_bP, J_cP cắt cạnh đối diện của tam giác $J_aJ_bJ_c$ lần lượt tại D, E, F .

Ta có $\frac{DP}{DJ_a} + \frac{EP}{EJ_b} + \frac{FP}{FJ_c} = \frac{S_{J_bPJ_c}}{S_{J_aJ_bJ_c}} + \frac{S_{J_aPJ_c}}{S_{J_aJ_bJ_c}} + \frac{S_{J_aPJ_b}}{S_{J_aJ_bJ_c}} = 1$.

Theo định lý Thales, ta lại có $\frac{EP}{EJ_b} = \frac{BI_b}{BJ_b}$, $\frac{FP}{FJ_c} = \frac{CI_c}{CJ_c}$ nên $\frac{DP}{DJ_a} = \frac{AI_a}{AJ_a}$. Suy ra $I_aP \parallel AD$ hay $PI_a \perp J_aA$.

Vậy I, I_a, I_b, I_c đều nằm trên đường tròn đường kính IP . \square

- Bài 31.** (*Arab Saudi IMO Training Test 2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Trung tuyến AM cắt (O) lần thứ hai tại N . AH cắt (O) tại K . Các đường thẳng KN, BC và đường thẳng qua H vuông góc với AN cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O) .



Lời giải. Giả sử vị trí các điểm X, Y, Z như hình vẽ. Gọi T là giao điểm thứ hai của (AH) và (O) , P là hình chiếu của H trên AM , Q là điểm đối xứng với A qua O .

Theo kết quả quen thuộc, T, H, M, Q thẳng hàng.

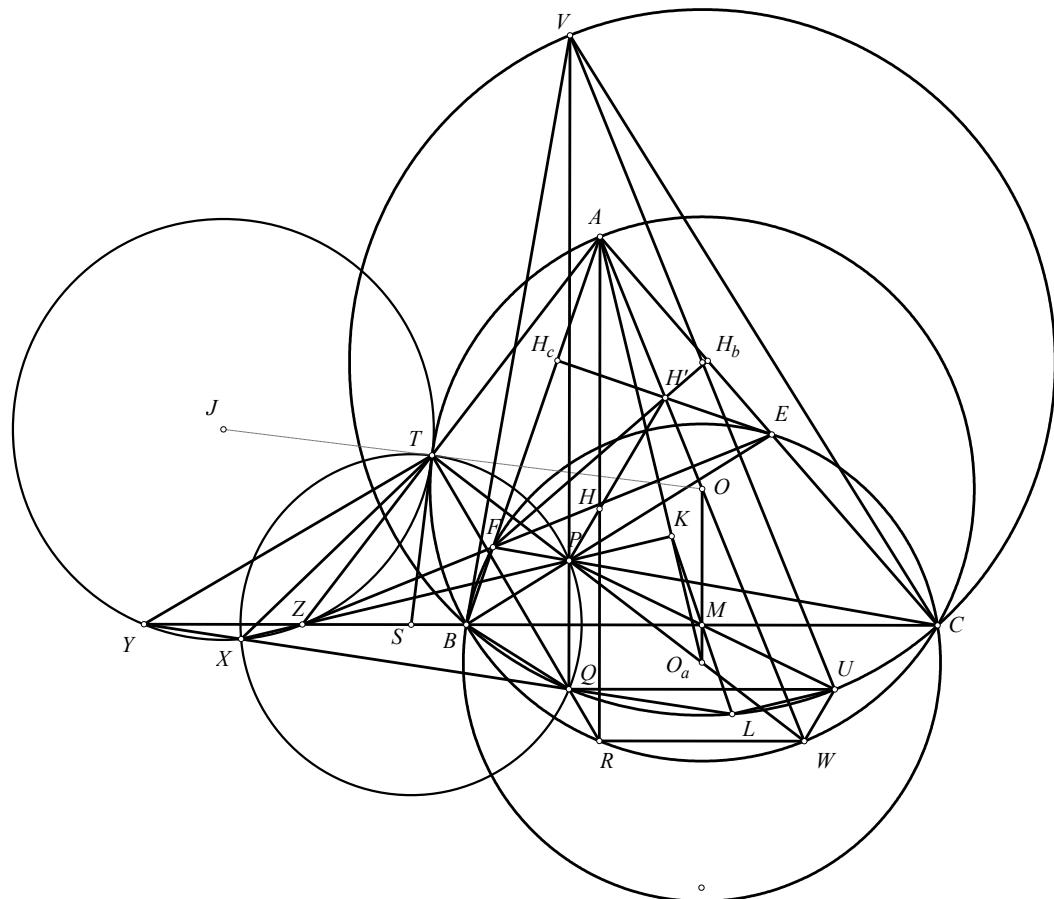
Ta có $\angle HXK = 90^\circ - \angle PNX = 90^\circ - \angle ANK = 90^\circ - \angle AQK = \angle KAQ = \angle KTH$. Suy ra tứ giác $XKHT$ nội tiếp.

Do $HP \perp AM$, $YM \perp AH$ nên Y là trực tâm tam giác AHM , suy ra Y, T, A thẳng hàng.

Từ đó $\angle TXK = \angle THA = \angle TYB$ hay tứ giác $ZXYT$ nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến Tx của (O) . Ta có $\angle XTx = \angle XTK - \angle xTK = \angle XHK - \angle TAK = \angle TYH = \angle TZX$. Suy ra Tx đồng thời là tiếp tuyến của (XYZ) . Vậy hai đường tròn (XYZ) và (O) tiếp xúc nhau tại T . \square

Bài 32. Cho tam giác ABC . Một đường tròn (O_a) đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . BE giao CF tại P . Gọi M là trung điểm BC . Kẻ $PK \perp AO_a$. Q đối xứng với P qua BC , L đối xứng với K qua M . Các đường thẳng PK, QL, BC cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (ABC) .



Lời giải. Giả sử vị trí của ba điểm X, Y, Z như hình vẽ.

Gọi T là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AP với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Do $PK \perp AO_a$ nên theo định lý Brocard, Z là giao của EF và AT .

Gọi H, H' lần lượt là trực tâm các tam giác ABC, AEF . H_b, H_c lần lượt là hình chiếu của F, E trên AC, AB .

Ta có $\overline{H'F} \cdot \overline{H'H_b} = \overline{H'E} \cdot \overline{H'H_c}$ suy ra H' thuộc trực đẳng phương của (BE) và (CF) . Chứng minh tương tự suy ra HH' là trực đẳng phương của (BE) và (CF) . Mà $\overline{PE} \cdot \overline{PB} = \overline{PF} \cdot \overline{PC}$ nên P, H, H' thẳng hàng.

Do $O_aT \perp AZ$ nên T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BFEC.AZ$. Suy ra T có chung đường thẳng Simson với hai tam giác AEF, ABC . Do đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson qua phép vị tự tâm T tỉ số 2 nên HH' là đường thẳng Steiner của T ứng với hai tam giác AEF, ABC hay PH là đường thẳng Steiner của P ứng với tam giác ABC .

Kéo dài AH cắt (O) tại R suy ra TR đi qua Q .

Ta có $\overline{ZP} \cdot \overline{ZK} = \overline{PZ}_{/(O_a)} = \overline{ZB} \cdot \overline{ZC}$. Suy ra tứ giác $BPKC$ nội tiếp.

Gọi U là đối xứng của P qua M . Phép đối xứng tâm M biến đường tròn ($BPKC$) thành ($BLUC$). Lại có Q đối xứng với P qua BC nên $QU \parallel BC$ và $QB = QP = UC$ hay tứ giác $BQUC$ là hình thang cân. Vậy 5 điểm B, Q, L, U, C đồng viên.

Ta có $PK \parallel UL$ nên $\angle PXL = 180^\circ - \angle QLU$. (1)

Gọi V là giao điểm thứ hai của PQ với (BQC). W là điểm đối xứng với A qua O . Do hai đường tròn (BPC) và (BQC) đối xứng với nhau qua BC nên P là trực tâm tam giác BVC . Đồng thời VU đi qua tâm ngoại tiếp tam giác VBC nên $\angle QVU = |\angle VBC - \angle VCB|$.

Lại có $\angle ABP = \angle ACP$ nên $\angle VBA = \angle VCA$. Suy ra $|\angle VBC - \angle VCB| = |\angle ABC - \angle ACB| = \angle RAW = \angle RTW = \angle QTP$.

Vậy $\angle QVU = \angle QTP$. (2)

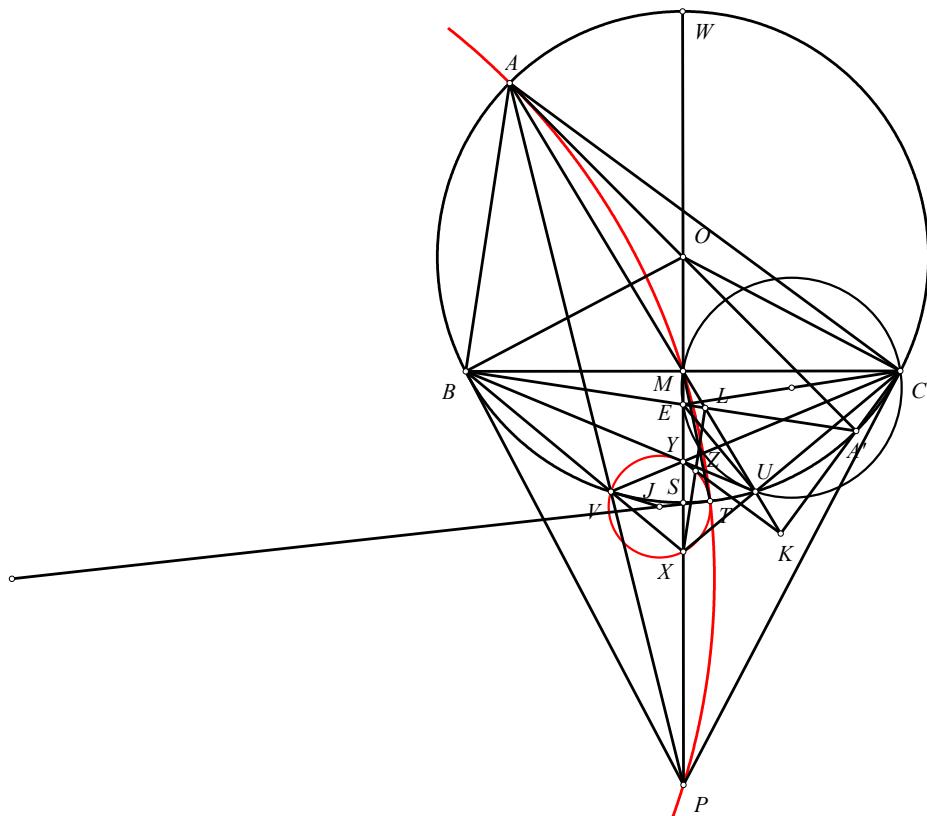
Từ (1) và (2) suy ra $\angle QTP = \angle QXP$ hay tứ giác $XTPQ$ nội tiếp đường tròn (S).

Ta có $\angle STP = 90^\circ - \angle TQP = 90^\circ - \angle TRA = 90^\circ - \angle TWA = \angle TAW$. Suy ra ST là tiếp tuyến của (O).

Mặt khác, $\angle STX = 90^\circ - \angle TPX = \angle TZP = \angle TYX$. Suy ra ST là tiếp tuyến của (XYZ).

Vậy hai đường tròn (O) và (XYZ) tiếp xúc nhau tại T . □

- Bài 33.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt BA', CA' lần lượt tại L, K . Các đường thẳng qua L vuông góc với BA' , qua K vuông góc với CA' và đường thẳng OM cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Gọi P là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của (O). Chứng minh rằng (AMP) tiếp xúc với (XYZ).



Lời giải. Giả sử vị trí của các điểm X, Y, Z như hình vẽ.

Gọi U, V lần lượt là giao điểm thứ hai của AM, AP với (O) . BA' giao OM tại E .

Ta có $\angle MEC = \angle MEB = \angle ABC = \angle MUC$ nên tứ giác $MEUC$ nội tiếp.

Suy ra $\angle EUM = \angle ECM = \angle EBM = \angle EXL$ hay tứ giác $ELUX$ nội tiếp. Từ đó $\angle EUX = \angle ELX = 90^\circ = \angle EUC$. Suy ra X, U, C thẳng hàng.

Do V, U đối xứng nhau qua OM nên B, V, X thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta cũng có B, Y, U và C, Y, V lần lượt thẳng hàng.

Ta có $\angle YVX = \angle BA'K = \angle YZL$ nên tứ giác $XZYV$ nội tiếp đường tròn (J) .

Do đó $\angle JVC = 90^\circ - \angle VXY = \angle VBC$ hay JV là tiếp tuyến của (O) . Từ đó (XYZ) trực giao với (O) . (1)

Mặt khác, kéo dài PM cắt (O) tại hai điểm W và S thì $(TMSW) = -1$. Suy ra $P_{O/(AMP)} = \overline{OM} \cdot \overline{OP} = OB^2$ nên (AMP) trực giao với (O) . (2)

Gọi T là giao điểm thứ hai của (XYZ) và (O) thì T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $AMYV.CX$. Suy ra $\angle TMP = \angle TBX = \angle TAP$ hay $T \in (AMP)$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đường nối tâm các đường tròn (AMP) và (XYZ) nằm trên tiếp tuyến tại T của (O) hay (AMP) tiếp xúc với (XYZ) tại T . \square

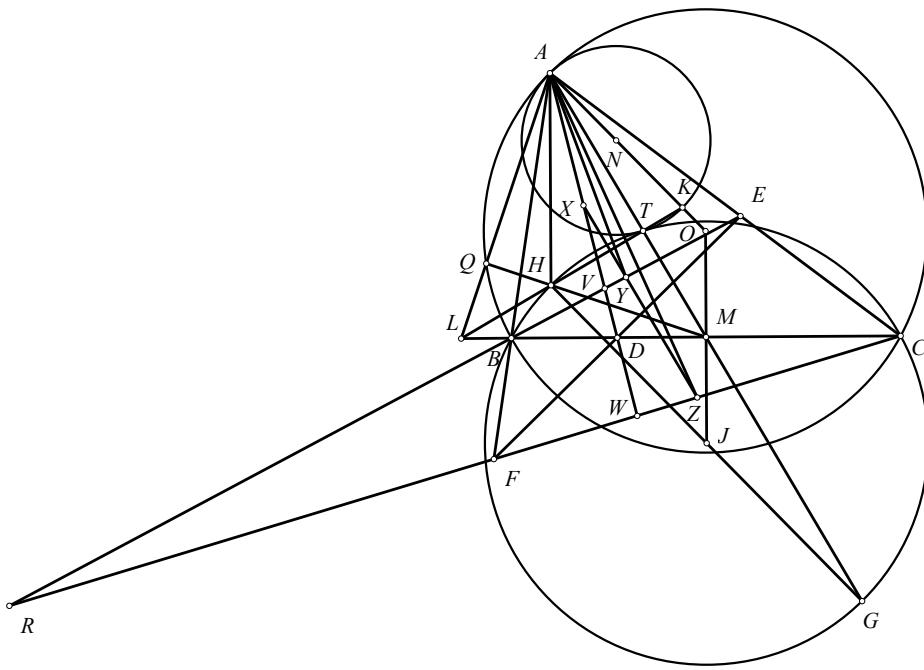
Bài 34. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H , đường đối trung AD ($D \in BC$). Qua D kẻ đường thẳng cắt AC, AB lần lượt tại E, F sao cho D là trung điểm EF . Gọi K là trực tâm tam giác AEF .

a) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK tiếp xúc với (O) .

b) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK tiếp xúc với (BHC) .

Lời giải. a) Gọi M là trung điểm BC . Do AM và AD đẳng giác trong $\angle BAC$ và D là trung điểm EF nên tứ giác $FBEC$ nội tiếp và $\triangle AFE \sim \triangle ACB$. Do AH và AO đẳng giác trong góc A nên $K \in AO$. Suy ra (AK) tiếp xúc với (O) tại A .

b) *Cách 1.*



Gọi T là hình chiếu của H trên AM . Ta chứng minh (AK) và (BHC) tiếp xúc nhau tại T .

Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm AD, BE, CF . AD cắt BE, CF lần lượt tại V, W ; BE cắt CF tại R .

Ta có $(RWFC) = (RVBE) = -1$ nên theo hệ thức Maclaurin, $\overline{RV} \cdot \overline{RY} = \overline{RB} \cdot \overline{RE} = \overline{RF} \cdot \overline{RC} = \overline{RW} \cdot \overline{RZ}$. Suy ra tứ giác $VWZY$ nội tiếp.

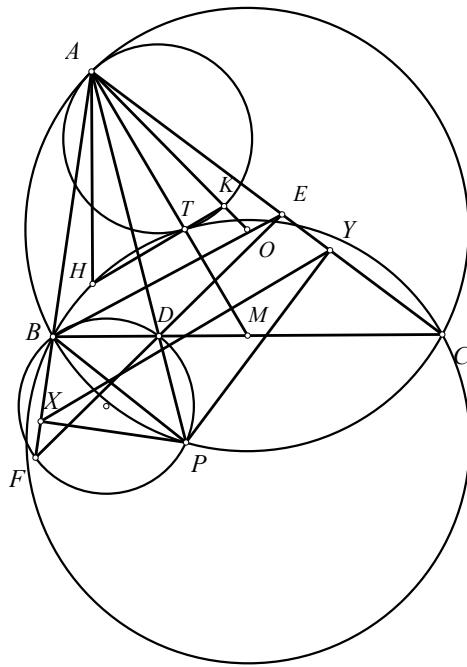
Theo hệ thức Newton, $\overline{XY} \cdot \overline{XZ} = \overline{XV} \cdot \overline{XW} = \overline{XA}^2$. Do AY, AZ cũng đẳng giác trong $\angle BAC$ nên ta thu được $\angle AZX = \angle XAY = \angle ZAM$ hay $AM \parallel XZ$.

Do XZ là đường thẳng Gauss-Newton của tứ giác toàn phần $ABDE.FC$ nên XZ vuông góc với đường thẳng Steiner HK . Suy ra $AM \perp HK$ hay HK đi qua T .

Gọi Q là giao điểm thứ hai của (AH) với (O) . HT cắt BC tại L . Dễ thấy Q, H, M thẳng hàng và H là trực tâm tam giác ALM nên L, A, Q thẳng hàng. Suy ra $LH \cdot LT = LA \cdot LQ = LB \cdot LC$ nên $T \in (BHC)$.

Gọi G là điểm đối xứng với A qua M , J là tâm của (BHC) . Ta có J và O đối xứng với nhau qua BC nên $G \in (BHC)$ và $JG \parallel AO$. Vậy T là tâm vị tự của hai đường tròn (AK) và (BHC) hay hai đường tròn tiếp xúc nhau tại T .

Cách 2.



Theo cách 1, hai đường tròn đường kính AK và (BHC) tiếp xúc nhau nếu ta chứng minh được $HK \perp AM$.

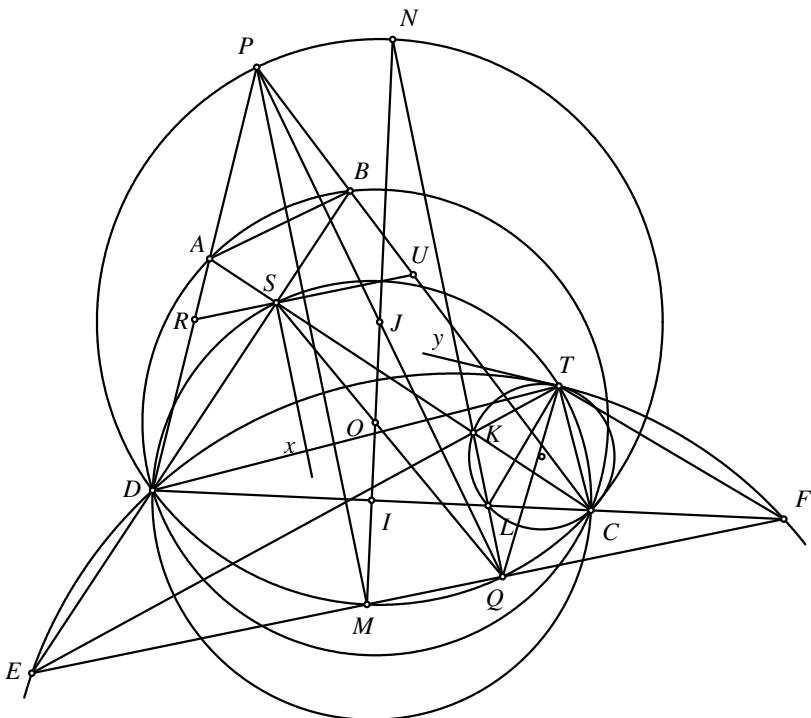
Kéo dài AD cắt (O) tại P . Ta có $\angle BPA = \angle BCA = \angle BFD$. Suy ra P là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABDE.CF$.

Do H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC, AEF nên HK là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $ABDE.CF$ hay đường thẳng Steiner của điểm Miquel P ứng với tam giác ABC .

Kẻ $PX \perp AB, PY \perp AC$. Suy ra XY là đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC . Ta thu được $XY \parallel HK$.

Mặt khác, ta có AP là đường kính của (AXY) , AM đồng giác với AP trong $\angle BAC$ nên $AM \perp XY$. Vậy $AM \perp HK$. \square

- Bài 35.** (*Tạp chí Pi số 1/2017*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với hai đường chéo AC và BD vuông góc. AD giao BC tại P . Kẻ đường kính PQ của (PCD) . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa hai cung CD của (PCD) . QM giao BD, CD lần lượt tại E, F . QN giao AC, CD lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng (EDF) tiếp xúc với (KCL) .



Lời giải. Gọi S là giao của AC và BD . Phân giác $\angle ASD$ cắt AD, BC lần lượt tại R, U .

Ta có $\angle DRU = \angle DAS + \angle ASR = \angle CBD + \angle BSU = \angle CUR$. Suy ra tam giác PRU cân tại P .

Do PM là phân giác $\angle PRU$ nên $PM \perp RU$, suy ra PM song song với phân giác Sx của $\angle DSC$ hay $Sx \perp MQ$.

Lại có $\angle DSC = 90^\circ$ nên $\angle SEF = 45^\circ$. Tứ giác $ESKQ$ nội tiếp nên $\angle LKC = \angle SEQ = 45^\circ$.

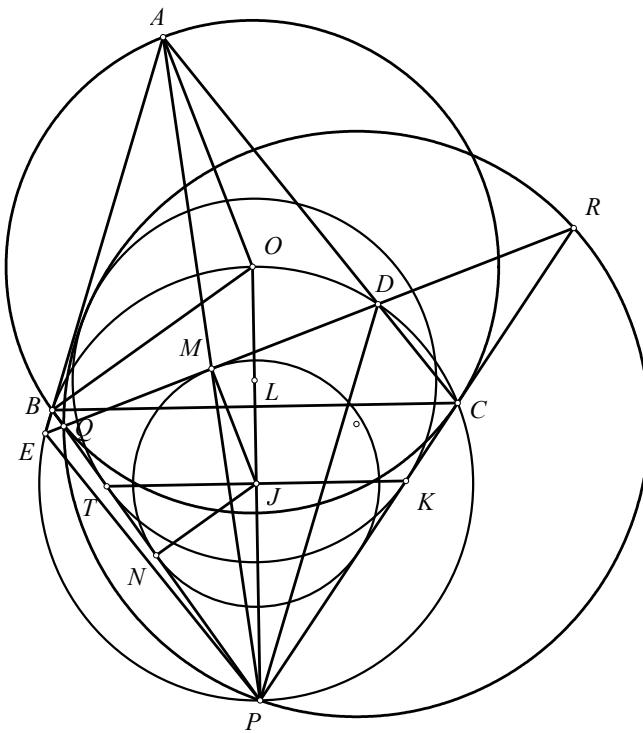
Gọi T là giao điểm khác C của (CD) và (KCL) suy ra $\angle LTC = \angle LKC = 45^\circ$. Suy ra $\angle DTL = 45^\circ$.

Do M, N là điểm chính giữa hai cung CD nên QM, QN là hai phân giác của $\angle DQC$, suy ra $(DCLF) = -1$. Mà $\angle DTC = 90^\circ$ nên TC là phân giác $\angle LTF$. Ta thu được $\angle LTF = 90^\circ$. Từ đó $\angle DTF = 135^\circ$.

Suy ra $\angle DTF + \angle DEF = 180^\circ$ hay $T \in (DEF)$.

Kẻ tiếp tuyến Ty của (LTC) . Ta có $\angle yTD = \angle yTL - \angle DTL = \angle TCL - \angle CTF = \angle TFD$. Suy ra Ty đồng thời là tiếp tuyến của (DEF) . Vậy hai đường tròn tiếp xúc nhau tại T . \square

- Bài 36.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có B, C cố định, A chuyển động. Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) giao nhau tại P . Đường tròn đường kính OP cắt AC, AB lần lượt tại D, E . DE cắt PB, PC lần lượt tại Q, R . Chứng minh rằng (PQR) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.



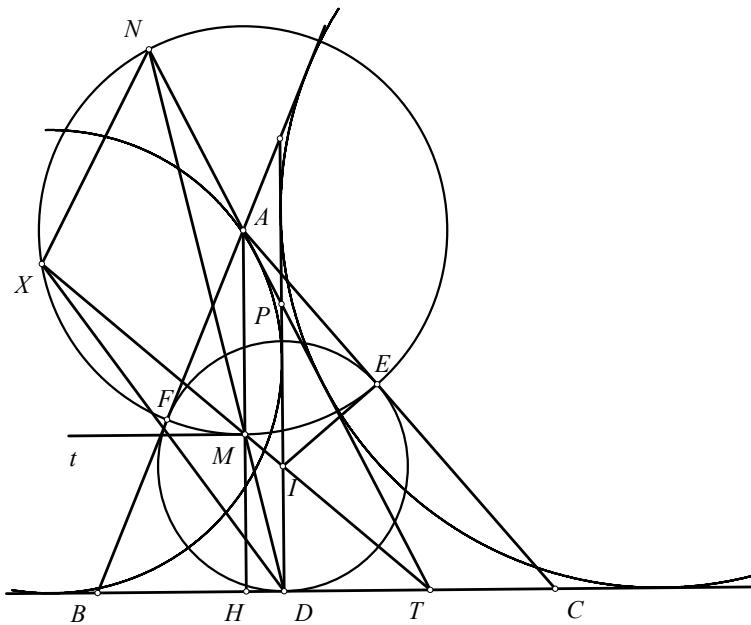
Lời giải. Ta có $\angle PDC = \angle PBC = \angle BAC$ nên $PD \parallel AB$. Tương tự $PE \parallel AC$. Từ đó $ADPE$ là hình bình hành. Suy ra AP cắt DE tại trung điểm M của mỗi đường.

Gọi J là trung điểm OP suy ra JM là đường trung bình của tam giác AOP . Dễ thấy D, E lần lượt nằm trên trung trực của AB, AC nên O là trực tâm tam giác ADE , suy ra $AO \perp DE$. Suy ra $JM \perp DE$ và $JM = \frac{AO}{2} = \frac{R}{2}$.

Gọi N là trung điểm BP , ta có JN là đường trung bình của tam giác BOP nên $JN = \frac{R}{2}$ và $JN \perp BP$. Tương tự suy ra J là tâm nội tiếp của tam giác PQR .

Qua J kẻ đường vuông góc với JP cắt PC, PB lần lượt tại K, T . Suy ra K, T cố định và theo bổ đề Sawayama, K, T là tiếp điểm của đường tròn P -mixtilinear (L) của tam giác PQR . Suy ra (L) là đường tròn cố định và (L) tiếp xúc với (PQR) . \square

- Bài 37.** Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường cao AH cắt đường tròn (A, AE) tại điểm M nằm trong tam giác. MI cắt BC tại T . AT cắt ID tại P . Chứng minh rằng hai tứ giác $APDB$ và $APDC$ bằng tiếp.



Lời giải. Gọi X là giao điểm thứ hai của MI với (A) . DM cắt (A) lần thứ hai tại N .

Kẻ tiếp tuyến Mt của (A) suy ra $Mt \parallel BC$.

Ta có $\angle XNM = \angle XMt = \angle MTD$ suy ra tứ giác $XNTD$ nội tiếp.

Suy ra $\angle DNT = \angle DXT$.

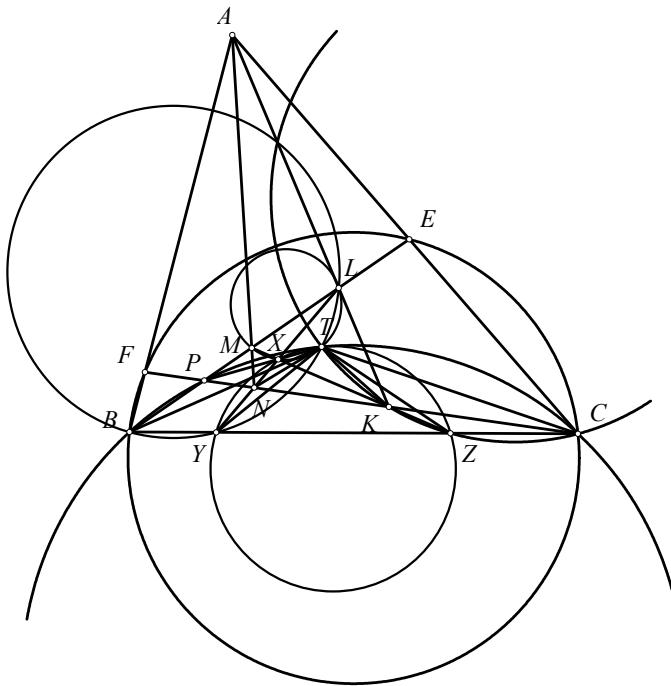
Lại có $IM \cdot IX = IE^2 = ID^2$ nên $\angle DXI = \angle IDM = \angle DMH = \angle AMN = \angle ANM$.

Do đó $\angle ANM = \angle DXT = \angle DNT$, suy ra N, A, T thẳng hàng.

Do $AN = AM$ và $AM \parallel DP$ nên $PD = PN$. Suy ra $PD - PA = PN - PA = AN = AE = AC - DC = AB - BD$.

Suy ra các tứ giác $ABDP$ và $ACDP$ bằng tiếp. □

Bài 38. Cho tam giác ABC . Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F . BE cắt CF tại P . Một đường thẳng d bất kì qua A cắt BE, CF lần lượt tại L, K . Đường thẳng d' đẳng giác với d trong góc BAC cắt BE, CF lần lượt tại M, N . MK cắt LN tại X , MK, LN cắt BC lần lượt tại Z, Y . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BPC và XYZ tiếp xúc nhau.



Lời giải. Gọi T là giao điểm khác P của (MXL) và (NXK) . Khi đó T là tâm vị tự quay của hai đoạn thẳng LM và NK .

Do B, C, E, F đồng viên nên $\triangle AEB \sim \triangle AFC$. Lại có hai đường thẳng d và d' đẳng giác trong $\angle BAC$ nên $\frac{\overline{LM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{KC}}$.

Suy ra T là tâm vị tự quay của hai đoạn thẳng LB và NC .

Ta thu được T là giao của hai đường tròn (BPC) và (LPN) .

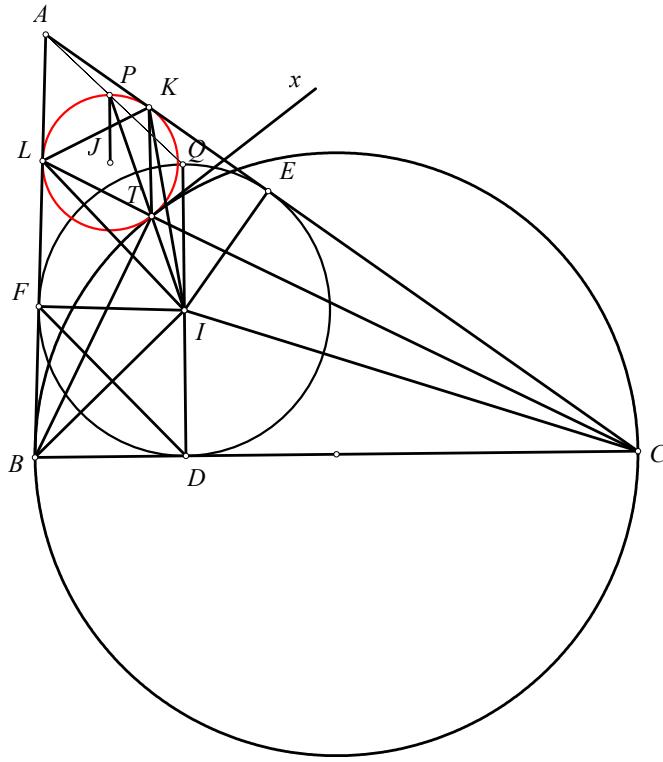
Suy ra T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BNPY.LC$. Suy ra $T \in (NYC)$.

Từ đó T đồng thời là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $YNKZ.XC$. Suy ra $T \in (XYZ)$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh TY, TZ đẳng giác trong $\angle BTC$.

Do d và d' đẳng giác trong $\angle BAC$ nên $\angle ALE = \angle ANF$, suy ra tứ giác $MNKL$ nội tiếp. Suy ra $\angle CTZ = \angle CKZ = \angle XKN = \angle MLN = \angle BTY$. Ta có đpcm. \square

Bài 39. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r) . (I) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F . Trên các tia EA, FA lần lượt lấy điểm K, L sao cho $EK = FL = r$. Đường thẳng qua K vuông góc với AC cắt đường thẳng qua L vuông góc với AB tại J . Chứng minh rằng đường tròn (J, JL) tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .



Lời giải. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , Q là điểm đối xứng của D qua I .

Do $AE = AF$ nên $AK = AL$. Suy ra (J) tiếp xúc với AB, AC . Do đó A là tâm vị tự ngoài của (I) và (J) .

Xét phép vị tự tâm $A \mathcal{H}_A: (I) \rightarrow (J), Q \mapsto P, F \mapsto L$.

Gọi T là giao điểm thứ hai của IP với (J) thì do tính chất của phép vị tự, $\angle PTL = \angle QDF = \angle ABI$ nên tứ giác $LTIB$ nội tiếp. Tương tự, tứ giác $KTIC$ nội tiếp.

Do đó $\angle BTC = \angle BTI + \angle CTI = \angle BLI + \angle CKI = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. Suy ra $T \in (BC)$.

Ta có $\angle KTC = \angle KIC = 135^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$.

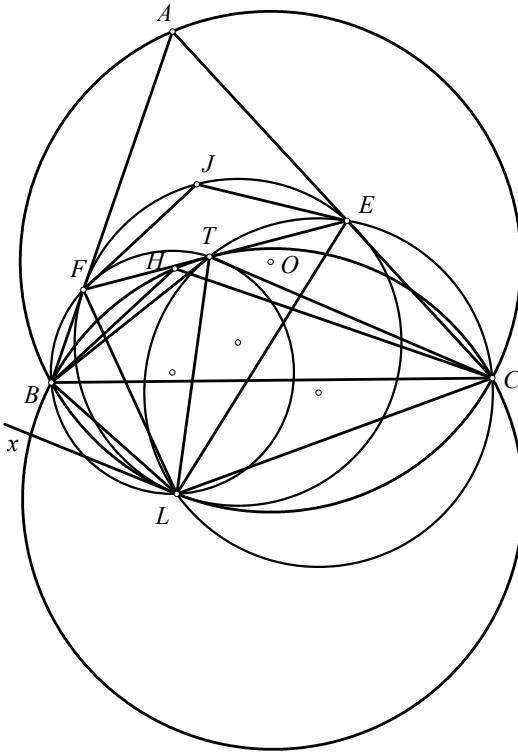
$$\begin{aligned} \angle KLT + \angle CBT &= \angle KLI + \angle IBC = 180^\circ - \angle ALK - \angle BLI + \frac{1}{2}\angle ABC \\ &= 135^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle ABC = 135^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB. \end{aligned}$$

Do đó $\angle KTC = \angle KLT + \angle CBT$.

Kẻ tiếp tuyến Tx của (BC) . Ta có $\angle KTx + \angle xTC = \angle KLT + \angle CBT$.

Mà $\angle xTC = \angle TBC$ suy ra $\angle KTx = \angle KLT$. Suy ra Tx là tiếp tuyến của (J) . Vậy (J) và (BC) tiếp xúc nhau tại T . \square

Bài 40. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Hai điểm E, F lần lượt nằm trên cạnh AC, AB sao cho EF tiếp xúc với (BHC) . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF . Chứng minh rằng (EJF) tiếp xúc với (O) .



Lời giải. Gọi T là tiếp điểm của EF với (BHC) . (BFT) cắt (O) lần thứ hai tại L .

Ta có $\angle TLC = \angle BLC - \angle BLT = 180^\circ - \angle EAF - \angle AFE = \angle AEF$. Do đó tứ giác $CLTE$ nội tiếp.

Ta có $\angle ELF = \angle ELT + \angle TLF = \angle ECT + \angle FBT = \angle BHC - \angle BAC = 180^\circ - 2\angle BAC = 180^\circ - \angle EJF$.

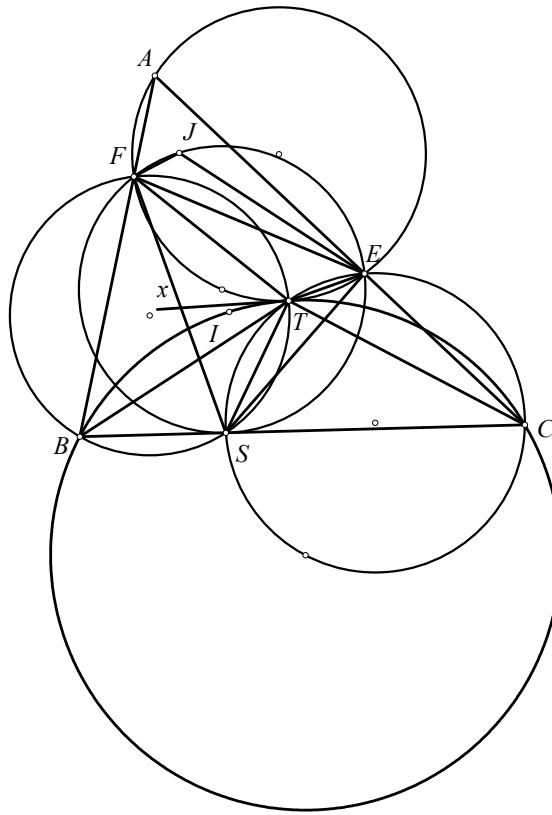
Suy ra tứ giác $EJFL$ nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến Lx của (O) .

Ta có $\angle xLF = \angle xLB + \angle BLF = \angle BCL + \angle FTB = \angle BCL + \angle TCB = \angle TCL = \angle FEL$.

Suy ra Lx cũng đồng thời là tiếp tuyến của (EJF) . Vậy (EJF) và (O) tiếp xúc nhau tại L . \square

Bài 41. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn đi qua A tiếp xúc ngoài với (BIC) và cắt AC, AB lần lượt tại E, F . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng (EJF) tiếp xúc với BC .



Lời giải. Gọi T là tiếp điểm của (AEF) với (BIC) . (BFT) cắt BC tại S suy ra tứ giác $STEC$ nội tiếp.

Ta có $\angle ESF = \angle EST + \angle TSF = \angle ECT + \angle FBT = \angle BTC - \angle BAC = \angle BIC - \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 180^\circ - \angle EJF$.

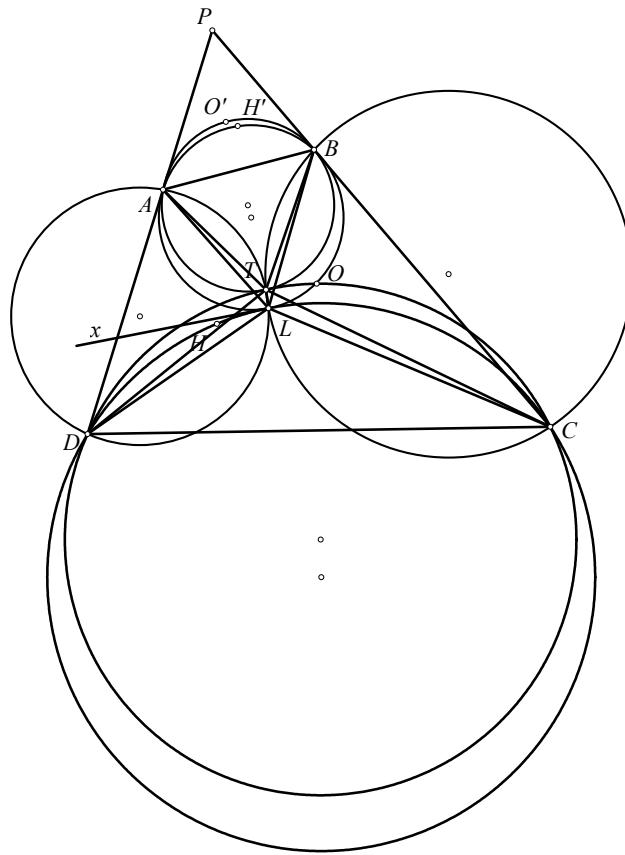
Do đó tứ giác $EJFS$ nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến chung Tx của (AEF) và (BIC) . Suy ra $\angle xTB = \angle TCB$ và $\angle xTF = \angle TEF$.

Từ đó $\angle FSB = \angle FTB = \angle TCB + \angle TEF = \angle TES + \angle TEF = \angle SEF$.

Vậy BC là tiếp tuyến của (EJF) . □

Bài 42. Cho tứ giác $ABCD$. AD cắt BC tại P . Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCD, PAB , H, H' lần lượt là trực tâm các tam giác PCD, PAB . Chứng minh rằng (DOC) tiếp xúc với $(AO'B)$ khi và chỉ khi (DHC) tiếp xúc với $(AH'B)$.



Lời giải. Giả sử (DOC) tiếp xúc với $(AO'B)$ tại T .

Gọi L là giao điểm thứ hai của (ATD) và (BTC) .

Ta có $\angle ALB = \angle ALT + \angle TLB = \angle ADT + \angle BCT = \angle DTC - \angle DPC = \angle DOC - \angle DPC = \angle DPC = 180^\circ - \angle AH'B$. Do đó $L \in (AH'B)$.

Lại có $\angle DLC = \angle DAT + \angle CBT = \angle APB + \angle ATB = \angle APB + 180^\circ - 2\angle APB = 180^\circ - \angle APB = \angle DHC$.

Suy ra $L \in (DHC)$.

Kẻ tiếp tuyến Lx của (DHC) .

Ta có $\angle ALx = \angle ALD - \angle xLD = \angle ATD - \angle LCD = \angle ABT + \angle TCD - \angle LCD = \angle ABT + \angle TCL = \angle ABT + \angle TBL = \angle ABL$.

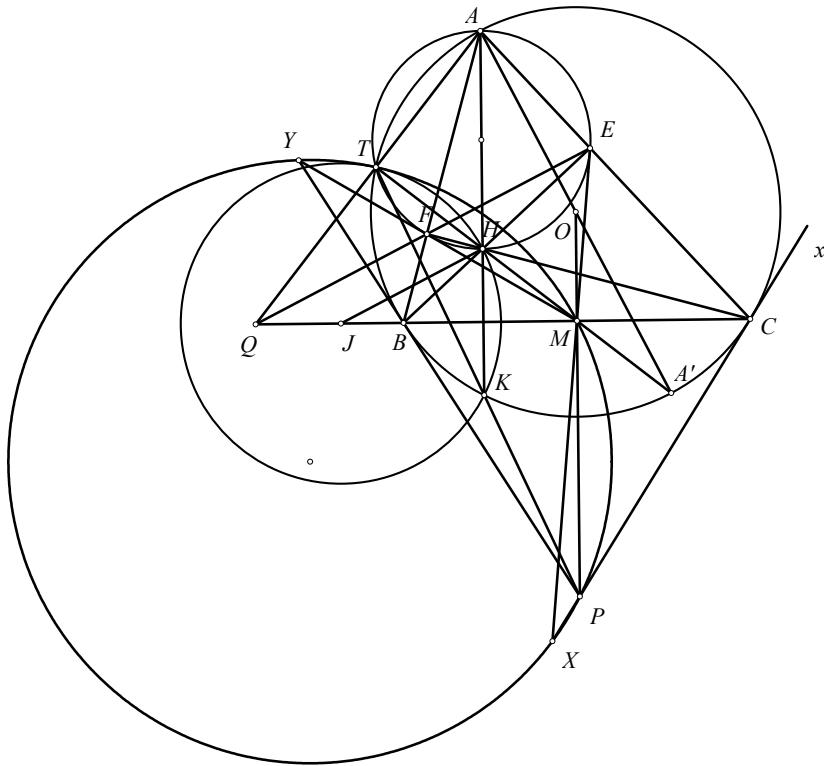
Suy ra Lx đồng thời là tiếp tuyến của $(AH'B)$. Suy ra $(AH'B)$ tiếp xúc với (DHC) tại L .

Chiều ngược lại có thể chứng minh tương tự. □

Bài 43. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Qua H kẻ đường vuông góc với AO cắt BC tại J . Tiếp tuyến tại B và C của (O) giao nhau tại P . Gọi M là trung điểm BC . EM cắt PC tại X , FM cắt PB tại Y .

a) Chứng minh rằng 4 điểm X, Y, P, M đồng viên.

b) Chứng minh rằng (PXY) tiếp xúc với (J, JH) .



Lời giải. a) Ta có ME, MF là hai tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nên $\angle EMF = 180^\circ - 2\angle BAC$.

Lại có PB, PC là hai tiếp tuyến của (O) nên $\angle BPC = 180^\circ - 2\angle BAC$. Suy ra $\angle EMF = \angle BPC$.

Từ đó $\angle XMY = \angle XPY$ hay tứ giác $XPMY$ nội tiếp.

b) Không mất tính tổng quát giả sử $\angle B > \angle C$.

Gọi T là giao của (AH) với (O) , K là giao của AH với (P) , A' là điểm đối xứng với A qua O .

Áp dụng định lý tâm đẳng phương cho 3 đường tròn $(AH), (BC), (O)$ ta có AT, EF, BC đồng quy tại Q . Suy ra $A(TH, BC) = -1$. Chiếu lên (O) ta thu được $(TK, BC) = -1$ hay tứ giác $TBKC$ điều hòa.

Suy ra T, K, P thẳng hàng.

Hiển nhiên T, H, M, A' thẳng hàng. Ta thu được $\angle PTM = \angle KTA' = \angle KAA' = \angle ABC - \angle ACB$.

Mặt khác, $\angle MXP = \angle ACx - \angle MEC = \angle ABC - \angle ACB$ suy ra $\angle MXP = \angle PTM$ hay $T \in (PXY)$.

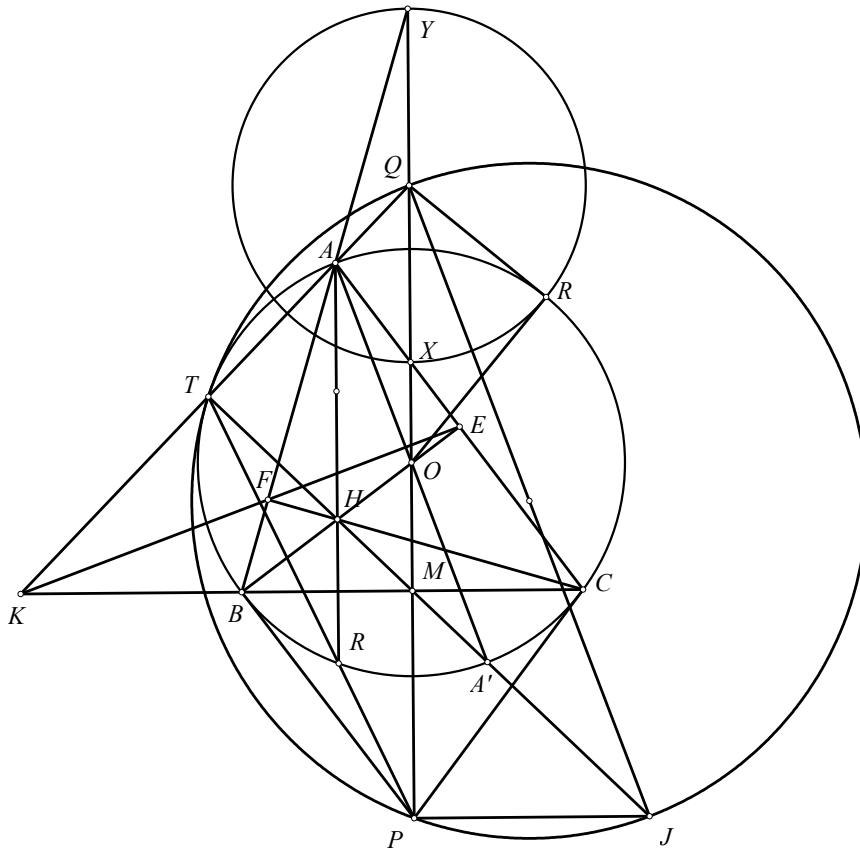
Do $JH \perp AO$ nên $JH \parallel EF$. Lại có H và K đối xứng nhau qua BC nên $K \in (J)$.

Ta có $\angle KTH = \angle KAA' = \angle FQB = \angle HJB$ suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác THK .

Do $HK \parallel PM$ nên (THK) tiếp xúc với (TPM) hay (J, JH) tiếp xúc với (PXY) . \square

Bài 44. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P . PO cắt AC, AB lần lượt tại X, Y . Gọi Q là trung điểm XY . Qua Q kẻ đường thẳng song song với AO cắt đường thẳng qua P song song với BC tại J .

- Chứng minh rằng đường tròn đường kính XY trực giao với (O) .
- Chứng minh rằng (QPJ) tiếp xúc với (O) .



Lời giải. a) Ta có $\angle AYX = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAH = \angle OAC$.

Suy ra OA là tiếp tuyến của (AXY) . Suy ra $\overline{OX} \cdot \overline{OY} = OA^2$.

Từ O kẻ tiếp tuyến OR tới (XY) suy ra $OR^2 = OA^2$ nên $R \in (O)$ và $\angle QRO = 90^\circ$. Suy ra (O) trực giao với (XY) .

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC , M là trung điểm BC . Tia MH cắt (O) tại T . E, F là hình chiếu vuông góc của B, C trên AC, AB .

Ta biết rằng AT, EF, BC đồng quy tại K . Suy ra $(KH, BC) = -1$. Lại có $QX = QY$ và $AH \parallel XY$ nên $A(HQ, XY) = -1$. Chiếu lên BC suy ra T, A, Q thẳng hàng.

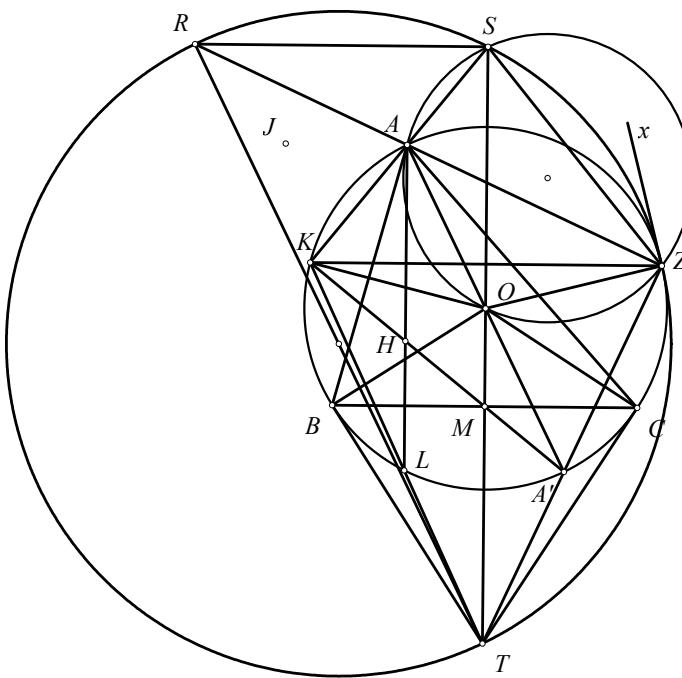
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O , AH cắt (O) tại R . Hiển nhiên T, H, M, A' thẳng hàng. Gọi J' là giao của TA' với QJ .

Ta có $A(KH, BC) = -1$. Chiếu lên (O) suy ra tứ giác $TBRP$ điều hòa. Suy ra T, R, P thẳng hàng.

Ta có $\angle PQJ' = \angle RAA' = \angle RTA' = \angle PTJ'$ nên tứ giác $TQJ'P$ nội tiếp. Suy ra $\angle QPJ' = \angle QTJ' = 90^\circ$. Từ đó $J' \equiv J$.

Do $AA' \parallel QJ$ nên tồn tại phép vị tự tâm T biến A thành Q , A' thành J , (TAA') thành (TQJ) . Vậy (PQJ) tiếp xúc với (O) tại T . \square

- Bài 45.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại K khác A . Tiếp tuyến tại B và C của (O) giao nhau tại T . TO cắt KA tại S . Qua S kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng qua T song song với AO tại R . Chứng minh rằng (TSR) tiếp xúc với (O) .



Lời giải. Kẻ đường kính AA' của (O) . AH cắt (O) tại L .

Ta có $A(KH, BC) = -1$ nên $(KLBC) = -1$. Suy ra tứ giác $KBLC$ điều hòa. Từ đó KL đi qua T .

Do AL, AA' đẳng giác trong $\angle BAC$ nên TL, TA' đối xứng qua OT .

Gọi Z là giao của TA' với (O) suy ra K đối xứng với Z qua OT .

Suy ra $\angle OZS = \angle OKA = \angle OAK$. Suy ra tứ giác $AOZS$ nội tiếp.

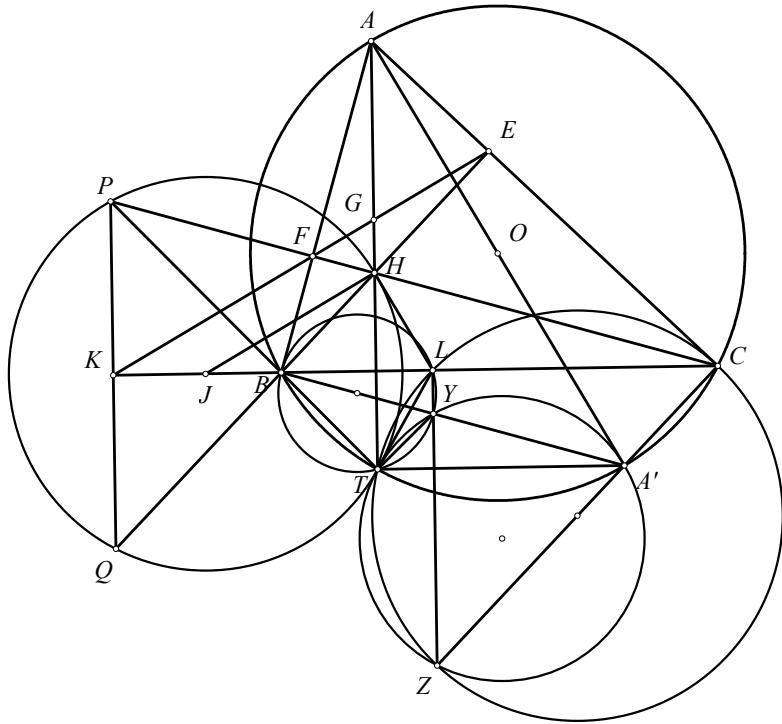
Gọi R' là giao của ZA với SR . Ta thu được tứ giác $R'SZT$ nội tiếp đường tròn đường kính $R'T$. Mà tứ giác $AOZS$ nội tiếp nên theo định lý Reim, $TR' \parallel AO$. Suy ra $R' \equiv R$.

Phép vị tự tâm Z biến A thành R, A' thành T sẽ biến (ZAA') thành (ZRT) . Vậy (TSR) tiếp xúc với (O) tại Z . \square

- Bài 46.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . EF cắt BC tại K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt CH, BH lần lượt tại P, Q . Đường thẳng AH cắt (O) tại T khác A .

a) Chứng minh rằng P, Q, H, T đồng viên.

b) Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt BC tại L . Kẻ đường kính AA' của (O) . Đường thẳng qua L vuông góc với BC cắt $A'B, A'C$ lần lượt tại Y, Z . Chứng minh rằng (AYZ) tiếp xúc với (HPQ) .



Lời giải. a) Gọi G là giao của AH với EF . Ta có $(GK, EF) = -1$ nên $H(GK, EF) = -1$.
Lại có $PQ \parallel AH$ nên $KP = KQ$.

Mặt khác, H và T đối xứng nhau qua BC nên BC là đường trung trực của HT và PQ .

Suy ra $PQTH$ là hình thang cân hay P, Q, H, T đồng viên.

b) Gọi J là tâm của (HPQ) suy ra J nằm trên BC .

Do $PHTQ$ là hình thang cân nên QH giao PT tại B .

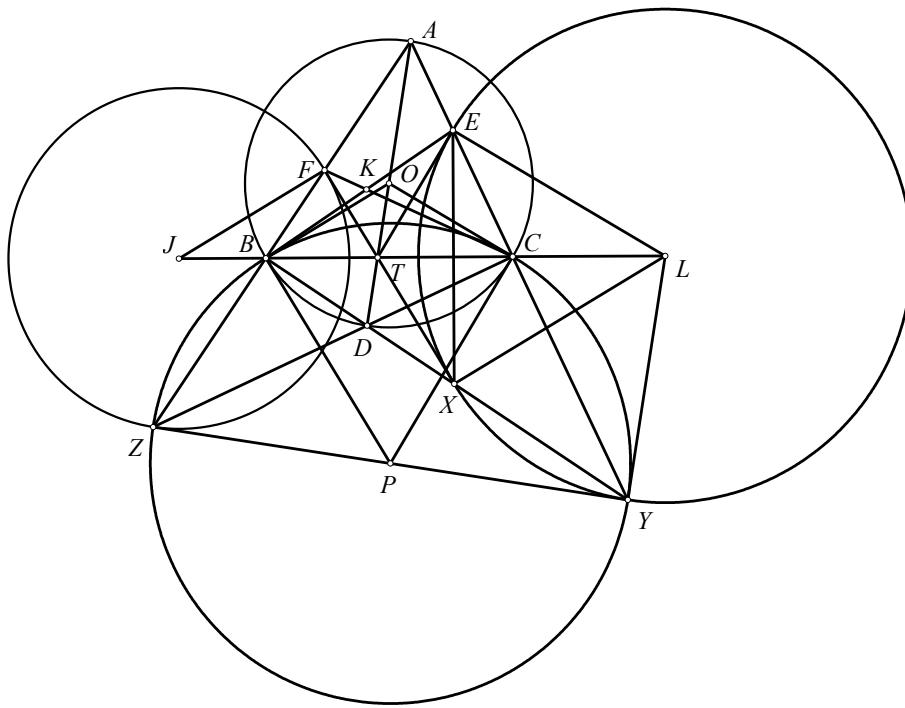
Suy ra $\angle HJC = \angle HPT = \angle FHA - \angle BTH = \angle ABC - \angle ACB = \angle HAO = \angle FKB$.
Suy ra $JH \parallel EF$. Suy ra $\angle JHL = 90^\circ$ hay LH là tiếp tuyến của (HPQ) . Từ đó, LT là tiếp tuyến còn lại kẻ từ L tới (HPQ) .

Mặt khác, $\angle LYB = 90^\circ - \angle CBA' = 90^\circ - \angle BCH = 90^\circ - \angle FEH = 90^\circ - \angle JHB = \angle BHL = \angle BTL$. Suy ra tứ giác $BLYT$ nội tiếp.

Suy ra T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $LYA'C.BZ$. Suy ra $T \in (A'YZ)$.

Lại có $\angle LTY = \angle LBY = \angle YA'T$ nên LT là tiếp tuyến của $(A'YZ)$. Vậy (HPQ) tiếp xúc với $(A'YZ)$ tại T . \square

Bài 47. (*Trường đông Titan 2017*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . AO cắt BC tại T và cắt (O) tại D khác A . Gọi K là điểm đối xứng với D qua BC . BK cắt AC tại E , CK cắt AB tại F . Gọi J, L là hai điểm trên BC sao cho $\angle JFT = \angle LET = 90^\circ$. P là giao của tiếp tuyến tại B và C của (O) . Chứng minh rằng P nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (J, JF) và (L, LE) .



Lời giải. Gọi Y là giao của BD với AC , Z là giao của CD với AB .

Ta có $\angle ZBY = \angle ZCY = 90^\circ$ nên tứ giác $ZBCY$ nội tiếp đường tròn đường kính YZ .
Lại có $\angle BZC = 90^\circ - \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BPC$ suy ra P là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ZBCY$ hay P là trung điểm YZ .

Gọi X là giao của BD và TF .

Ta có $\angle TAF = \angle TCD = \angle KCT$ suy ra tứ giác $AFTC$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AETB$ nội tiếp.

Suy ra $\angle ETC = \angle BAC = \angle FTB$ hay TE và TB đối xứng nhau qua BC .

Ta thu được E và X đối xứng nhau qua BC , suy ra $TE = TX$.

Lại có $\angle XYE = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \angle ETC = \angle ELT = \frac{1}{2}\angle ETX$. Suy ra L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EXY hay $Y \in (L, LE)$.

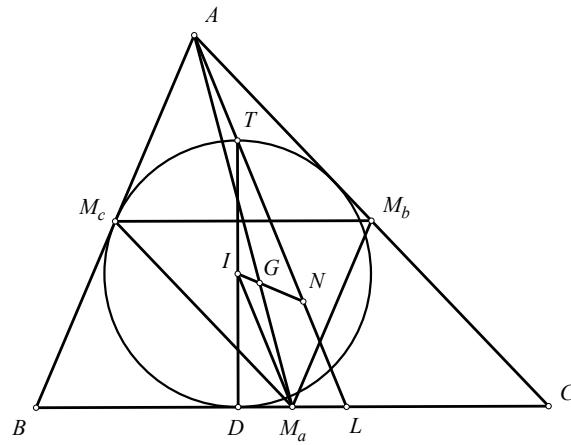
Lại có $\angle XYZ = \angle BCZ = \angle BAD = 90^\circ - \angle ADB = 90^\circ - \angle ACB = \angle XEY$, suy ra YZ là tiếp tuyến của (L, LE) .

Tương tự ta thu được YZ là tiếp tuyến chung ngoài của (L, LE) và (J, JF) . Vậy P nằm trên tiếp tuyến chung ngoài của (J, JF) và (L, LE) . \square

- Bài 48.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc với BC tại D . Gọi L là điểm đối xứng với D qua I ; X, Y, Z lần lượt là tiếp điểm của các đường tròn bằng tiếp góc A, B, C với cạnh BC, CA, AB . Giả sử $\angle AIO = 90^\circ$. Chứng minh rằng X, Y, Z, L cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm và điểm Nagel thẳng hàng.

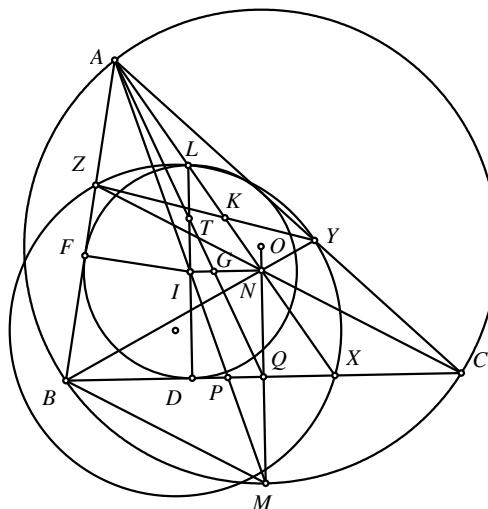


Chứng minh. Gọi D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC , DI cắt (I) lần thứ hai tại T , AT cắt BC tại L ; gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ; N là điểm Nagel của tam giác ABC .

Ta biết rằng M_a là trung điểm DL nên $M_aI \parallel AL$ hay $M_aI \parallel AN$. Chứng minh tương tự, $M_bI \parallel BN, M_cI \parallel CN$. Do đó I là điểm Nagel của tam giác $M_aM_bM_c$.

Do G là tâm vị tự của hai tam giác ABC và $M_aM_bM_c$ nên I, G, N thẳng hàng và $\frac{IG}{GN} = \frac{1}{2}$. \square

Trở lại bài toán.



Gọi M là điểm chính giữa cung BC , G là trọng tâm tam giác ABC , Q là trung điểm BC , P là giao của AI với BC , F là tiếp điểm của (I) với AB .

Do $\angle AIO = 90^\circ$ nên $AI = IM = MB = MC$. Lại có $\angle IAF = \angle MBQ$ nên $\triangle IFA = \triangle MQB(g.c.g)$. Ta thu được $MQ = IF = ID$. Suy ra $PI = PM = \frac{1}{2}IM = \frac{1}{2}IA$.

Suy ra $\frac{AI}{IP} = \frac{AG}{GQ}$ hay $IG \parallel BC$. Gọi N là giao của IG với OM ta thu được $QN = ID = QM$. Gọi T là giao của AQ với ID suy ra IT là đường trung bình của tam giác

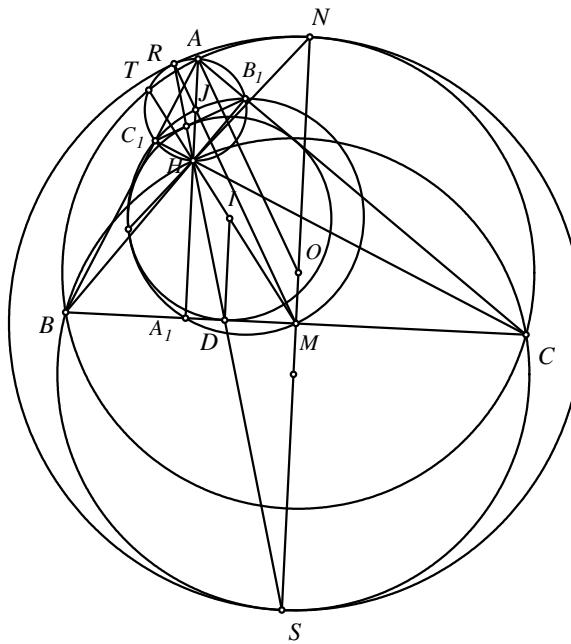
AMQ , suy ra $IT = \frac{1}{2}MQ = \frac{1}{2}NQ$. Do đó $\frac{IG}{IN} = \frac{1}{2}$. Ta thu được N là điểm Nagel của tam giác ABC , tức là AX, BY, CZ đồng quy tại N .

Gọi K là giao của YZ và AX suy ra $(ANKX) = -1$. Mà IL là đường trung bình của tam giác AMN nên $LA = LN$. Áp dụng hệ thức Maclaurin suy ra $KL \cdot KX = KN \cdot KA$.

Mặt khác, do N đối xứng với M qua BC nên $\angle YNZ = \angle BNC = \angle BMC = 180^\circ - \angle BAC$, suy ra tứ giác $AZNY$ nội tiếp. Do đó $KN \cdot KA = KY \cdot KZ$.

Vậy $KY \cdot KZ = KL \cdot KX$ hay tứ giác $LZXY$ nội tiếp. \square

- Bài 49.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BB_1, CC_1 cắt nhau tại trực tâm H . Gọi N là điểm chính giữa cung BAC của (O) . Giả sử rằng B_1C_1 tiếp xúc với (I) . Chứng minh rằng tiếp điểm của (I) với đường tròn Euler của tam giác ABC nằm trên HN .



Lời giải. Trước tiên ta chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với (BHC) , (O) , (AH) .

Do phép đối xứng trực, dễ nhận thấy (M, MN) tiếp xúc với (O) và (BHC) lần lượt tại N và S đối xứng với N qua BC .

Như vậy ta chỉ cần chứng minh (M, MN) tiếp xúc với (AH) .

Gọi J là trung điểm AH , MJ cắt (AH) tại R sao cho J nằm giữa R và M .

Ta có $MR = MJ + JR = OA + JA = ON + OM = MN$, suy ra (M, MN) tiếp xúc với (AH) tại R .

Do MJ là trung trực của B_1C_1 nên R là điểm chính giữa cung B_1C_1 của (AH) . Mà S là điểm chính giữa cung BC của (BHC) nên RS là phân giác $\angle BHC$. Do đó RS đi qua tiếp điểm D của (I) với BC theo tính chất của tứ giác lưỡng tâm.

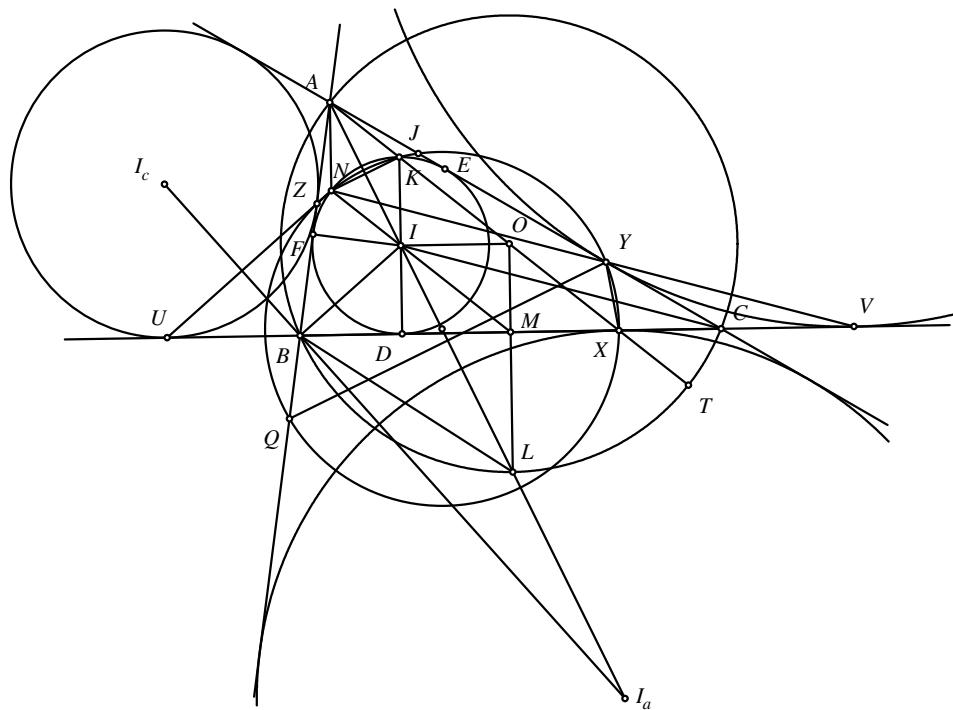
Phép nghịch đảo $I_H^{\overline{HB} \cdot \overline{HB_1}}$: $(AH) \leftrightarrow BC, (BHC) \leftrightarrow B_1C_1, (O) \leftrightarrow (A_1B_1C_1)$.

Từ đó $R \leftrightarrow D$.

Do đó ảnh của (M, MN) là một đường tròn tiếp xúc với BC tại D , tiếp xúc với B_1C_1 và đường tròn Euler của tam giác ABC hay chính là (I) . Suy ra điểm Feuerbach F_e là ảnh của N hay F_e nằm trên HN . \square

- Bài 50.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Các đường tròn $(I_a), (I_b), (I_c)$ bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z . Giả sử $OI \parallel BC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ nằm trên phân giác $\angle BAC$.

Lời giải. *Cách 1.*



Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB ; K đối xứng với D qua I , M là trung điểm BC .

Do AK đi qua X và M là trung điểm DX nên $IM \parallel AK$. Mà $IO \parallel BC$ nên $OM = ID$, suy ra $OM \parallel IK$ hay $IKOM$ là hình bình hành. Suy ra $OK \parallel IM$. Ta thu được A, K, O, X thẳng hàng.

Qua A kẻ đường vuông góc với BC cắt IM tại N . Gọi U, V lần lượt là tiếp điểm của $(I_c), (I_b)$ với BC . L là điểm chính giữa cung BC không chứa A .

$$\text{Do } AN \parallel ML \text{ nên } \frac{NI}{MI} = \frac{AI}{LI} = \frac{AI}{LB}.$$

Lại có $\triangle AFI \sim \triangle BML$ nên $\frac{AI}{LB} = \frac{AF}{BM} = \frac{BZ}{BM} = \frac{BU}{BM}$. Suy ra $\frac{NI}{MI} = \frac{BU}{BM}$ hay $BI \parallel UN$. Mà $BI \parallel UZ$ nên UZ đi qua N . Tương tự VY đi qua N .

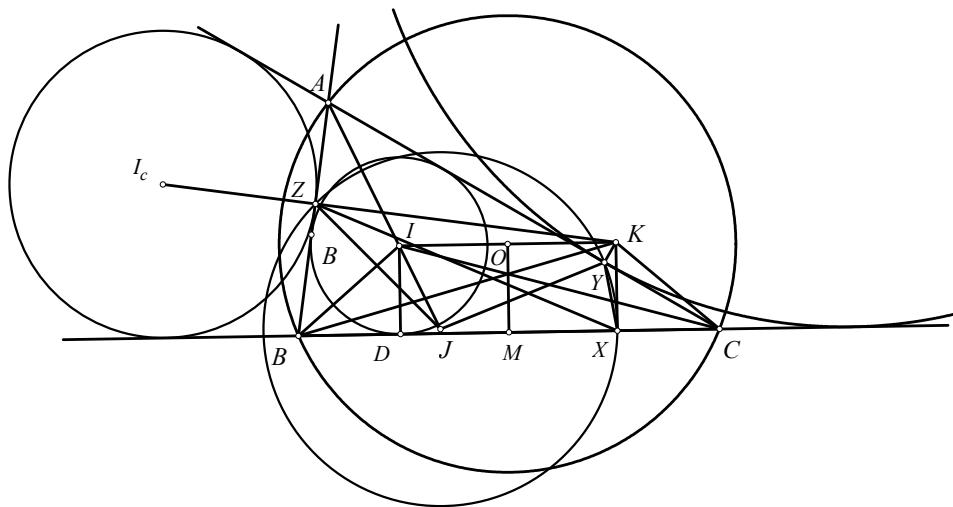
Gọi J, Q lần lượt đối xứng với Z, Y qua phân giác AI . Ta có $\angle ZNY = \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle ZQY = \angle AQY = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ nên $\angle ZNY + \angle ZQY = 180^\circ$, suy

ra tứ giác $ZNYQ$ nội tiếp. Suy ra 5 điểm Z, J, Y, Q, N cùng thuộc một đường tròn. Lại có $AKIN$ là hình bình hành và AN, AO đẳng giác trong $\angle BAC$ nên AI là phân giác $\angle NAK$, suy ra $AKIN$ là hình thoi. Nghĩa là N đối xứng với K qua AI . Suy ra 6 điểm K, J, Y, Q, N, X thuộc một đường tròn.

Kéo dài AX cắt (O) tại T . Ta có O là trung điểm KX nên $AK = XT$.

Suy ra $AK \cdot AX = AX \cdot XT = XB \cdot XC = DB \cdot DC = BF \cdot CE = AZ \cdot AY = AJ \cdot AY$. Suy ra tứ giác $KJYX$ nội tiếp. Vậy $X \in (ZJYQ)$. Mà $ZJYQ$ là hình thang cân có trực đối xứng AI nên tâm của (XYZ) nằm trên AI .

Cách 2 (Lê Quang Dũng, học sinh THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa).



Gọi D là tiếp điểm của (I) trên BC , M là trung điểm BC , K là điểm đối xứng của I qua O .

Ta có $ID \parallel OM$ và O, M lần lượt là trung điểm của IK, DX nên $KX \perp BC$. Chứng minh tương tự, $KY \perp AC, KZ \perp AB$.

Ta thu được $\angle BZX + \angle CYX = \angle BKC + \angle CKX = \angle BKC$.

Do $OI \parallel BC$ nên $BIKC$ là hình thang cân. Ta thu được $\angle BKC = \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

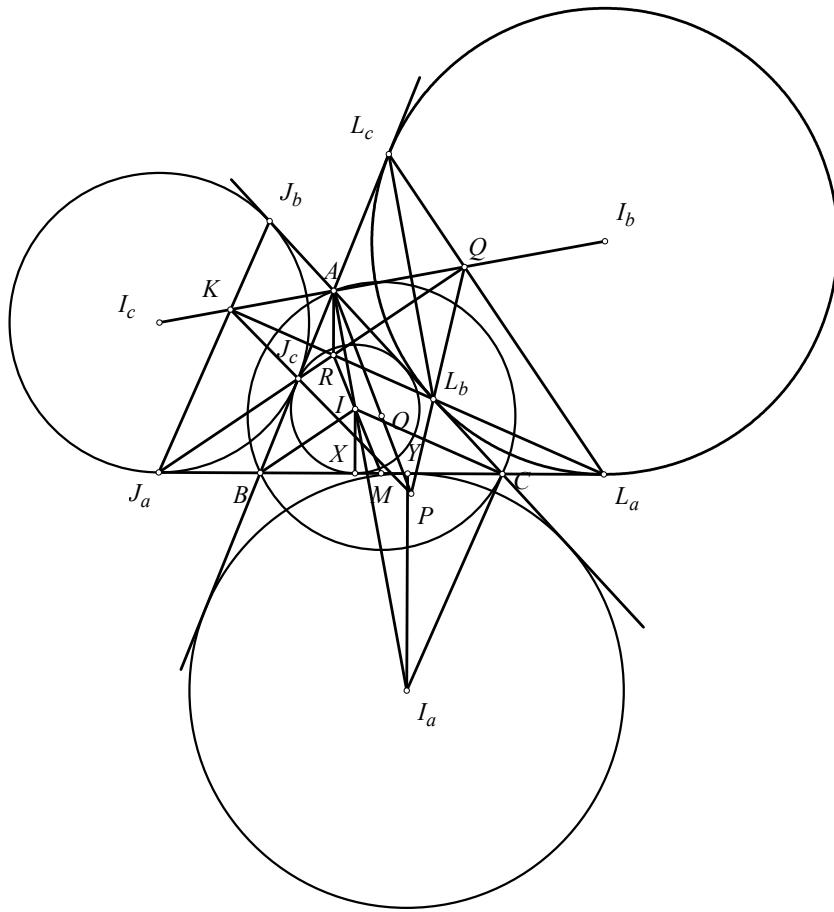
Suy ra $\angle YXZ = \angle BZX + \angle CYX - \angle BAC = \angle BKC - \angle BAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC - \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.

Gọi J là điểm trên phân giác AI sao cho tứ giác $AZJY$ nội tiếp. Ta thu được $\angle YJZ = 180^\circ - \angle BAC = 2\angle YXZ$. Suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ . \square

Bài 51. Cho tam giác ABC với đường tròn $(I_b), (I_c)$ bằng tiếp góc B và C . Gọi J_a, J_b, J_c lần lượt là tiếp điểm của (I_c) với BC, CA, AB , L_a, L_b, L_c lần lượt là tiếp điểm của (I_b) với BC, CA, AB . $J_a J_b$ cắt $I_b I_c$ tại K , $L_a L_c$ cắt $I_b I_c$ tại Q . KL_b cắt QJ_c tại R , KJ_c cắt QL_b tại P .

a) Chứng minh rằng tứ giác $J_c RL_b P$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $AP = r_a$ với r_a là bán kính đường tròn bằng tiếp góc A của tam giác ABC .



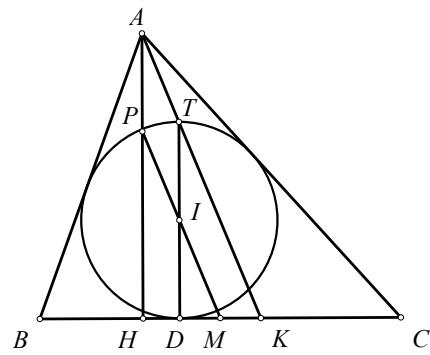
Lời giải. a) Ta có $\angle L_c Q A = 180^\circ - \angle L_c A Q - \angle A L_c Q = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \angle I_b C L_a$, suy ra tứ giác $Q C L_a I_b$ nội tiếp. Suy ra $\angle A Q C = \angle I_b L_a C = 90^\circ$.

Bằng phép cộng góc tương tự, nếu gọi Q' là giao của $J_a J_c$ với $I_b I_c$ thì $\angle A Q' C = 90^\circ$. Suy ra $Q' \equiv Q$ hay Q, J_a, J_c thẳng hàng. Tương tự K, L_a, L_b thẳng hàng. Từ đó tứ giác $K Q L_a J_a$ nội tiếp đường tròn đường kính $L_a J_a$.

Suy ra $\angle A L_b K = \angle C L_b L_a = \angle C L_a L_b = \angle K Q J_a$. Suy ra tứ giác $A Q L_b R$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $A R J_c K$ nội tiếp. Từ đó R là điểm Miquel của tam giác $P Q K$ với bộ 3 điểm A, J_c, L_b . Suy ra tứ giác $R L_b P J_c$ nội tiếp.

b) Trước tiên ta phát biểu một bổ đề như sau.

Bổ đề. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r) . Đường cao AH . M là trung điểm BC . MI cắt AH tại P . Khi đó $AP = r$.



Chứng minh. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , T là điểm đối xứng với D qua I . AT cắt BC tại K .

Ta có $MD = MK$, suy ra IM là đường trung bình của tam giác TDK .

Suy ra $IP \parallel AT$. Mà $AP \parallel IT$ suy ra $APIT$ là hình bình hành. Vậy $AP = IT = r$. \square

Trở lại bài toán.

Gọi M là trung điểm BC . (I, r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . I_a là tâm đường tròn bằng tiếp góc A . (I) và (I_a) tiếp xúc với BC lần lượt tại X, Y .

Ta có K, J_c, J_a nằm trên đường tròn đường kính I_cB nên $\angle RAJ_c = \angle RKJ_c = 90^\circ - \angle J_a K J_c = 90^\circ - \angle ABC$. Suy ra $AR \perp BC$.

Lại có $BI \parallel J_a R, CI \parallel L_a R$ và $\frac{MB}{MC} = \frac{MJ_a}{MJ_b} = 1$ nên theo định lý Thales, M, I, R thẳng hàng. Áp dụng bổ đề trên ta thu được $AR = r$.

Ta có $\angle KAJ_c = \angle KRJ_c = \angle KPQ$ nên tứ giác $J_c A Q P$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AL_b P K$ nội tiếp.

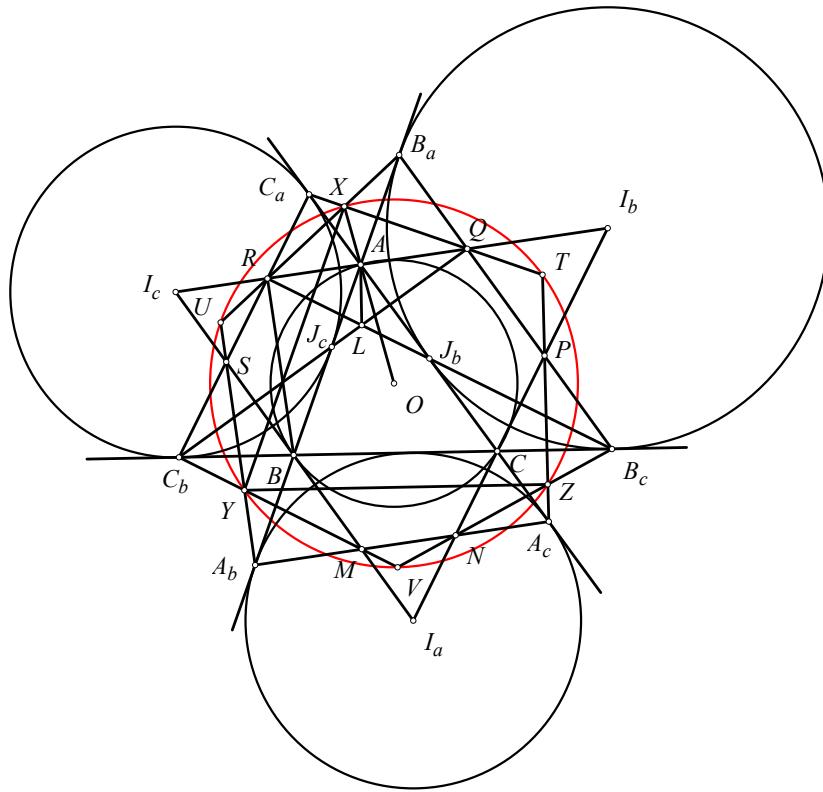
Suy ra $\angle APL_b = \angle AJ_c R$, $\angle AL_b P = 180^\circ - \angle AKJ_c = \angle ARJ_c$. Suy ra $\triangle ARJ_c \sim \triangle AL_b P$.

Suy ra $AP \cdot AR = AL_b \cdot AJ_c = BX \cdot BY$.

Dễ thấy $\triangle BXI \sim \triangle I_a Y B$ nên $BX \cdot BY = IX \cdot I_a Y = r \cdot r_a$.

Vậy $AP \cdot AR = r \cdot r_a$. Mà $AR = r$ nên $AP = r_a$. \square

- Bài 52.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) , ngoại tiếp đường tròn (I, r) . Các đường tròn bằng tiếp $(I_a), (I_b), (I_c)$. (I_a) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại A_b, A_c . Tương tự xác định B_a, B_c, C_a, C_b . $I_a I_b, I_a I_c$ cắt $A_b A_c$ lần lượt tại N, M . $I_a I_b, I_c I_b$ cắt $B_a B_c$ lần lượt tại P, Q . $I_c I_b, I_b I_a$ cắt $C_a C_b$ lần lượt tại R, S . $R B_a$ cắt $Q C_a$ tại X , Tương tự xác định Y, Z . XQ cắt ZP tại T , ZN cắt YM tại V , YS cắt XR tại U . Chứng minh rằng 6 điểm X, Y, Z, T, U, V cùng nằm trên đường tròn $(O, R + r)$.



Lời giải. Gọi L là giao của C_bQ với B_cR . Theo bài 51, $AL \perp BC$ và $AL = r$.

Ta có C_bQ đi qua tiếp điểm J_c của (I_c) với AB . Mà J_c và C_a đối xứng nhau qua I_bI_c nên QC_a và QC_b đối xứng nhau qua I_bI_c . Tương tự RB_a và RB_c đối xứng nhau qua I_bI_c . Ta thu được X và L đối xứng nhau qua I_bI_c . Từ đó $AX = r$ và AX, AL đẳng giác trong $\angle BAC$.

Suy ra X, A, O thẳng hàng và $OX = OA + AX = R + r$.

Tương tự suy ra $X, Y, Z \in (O, R + r)$.

Từ đó dễ thấy $XY \parallel AB, YZ \parallel BC$.

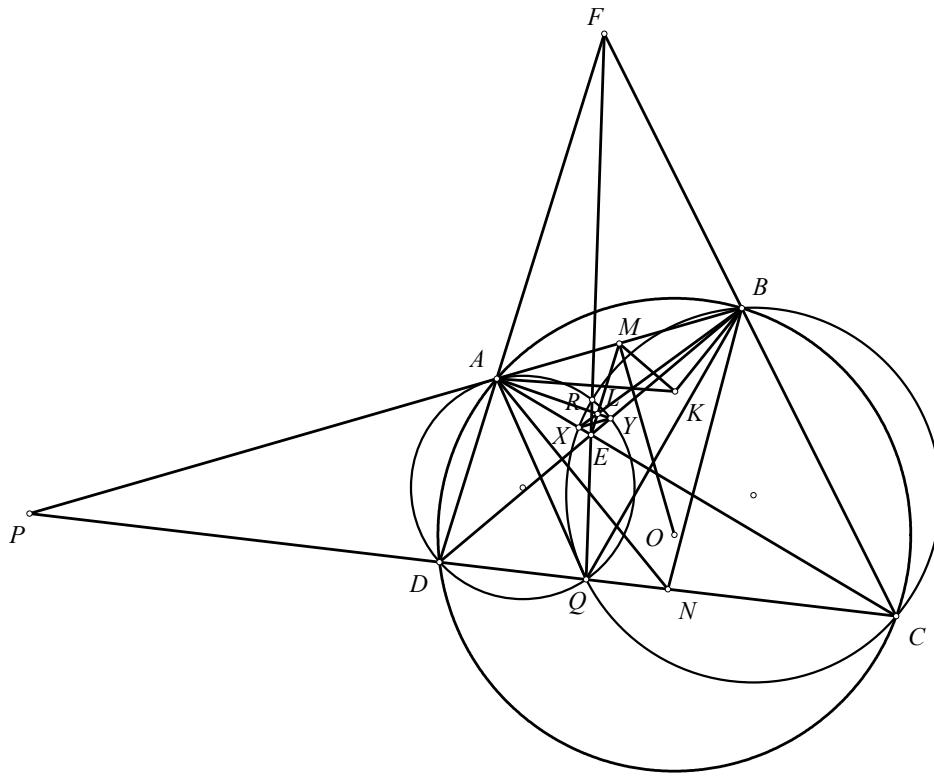
Ta có $\angle TQI_b = \angle XQR = \angle RQL = \angle RB_cC_b = \frac{1}{2}\angle ACB$. Tương tự $\angle TPI_b = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Suy ra $\angle QTP = \angle QI_bP + \angle I_bQT + \angle I_bPT = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle XYZ$.

Suy ra $T \in (O, R + r)$. Tương tự với các điểm U, V ta có đpcm. \square

- Bài 53.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . K là điểm nằm trong tam giác ANB sao cho $\angle KAB = \angle EAN$, $\angle KBA = \angle EBN$. Chứng minh rằng MO là phân giác của $\angle EMK$.

Lời giải. Cách 1.



Gọi AD giao BC tại F , AB giao CD tại P . EF giao CD tại Q .

Gọi L là điểm nằm trong tam giác QAB sao cho $\angle LAB = \angle EAQ$, $\angle LBA = \angle EBQ$.

Gọi X, Y là giao của BL với AC , AL với BD .

Ta có $\angle YAQ = \angle EAB = \angle YDQ$ nên tứ giác $AYQD$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $BXQC$ nội tiếp.

Gọi R là giao điểm thứ hai của (AQD) và (BQC) thì AD, BC, QR đồng quy tại F là tâm đẳng phương của $(ADQ), (BCQ), (O)$. Từ đó ta thu được $\overline{EY} \cdot \overline{ED} = \overline{EL} \cdot \overline{EQ} = \overline{EX} \cdot \overline{EC}$.

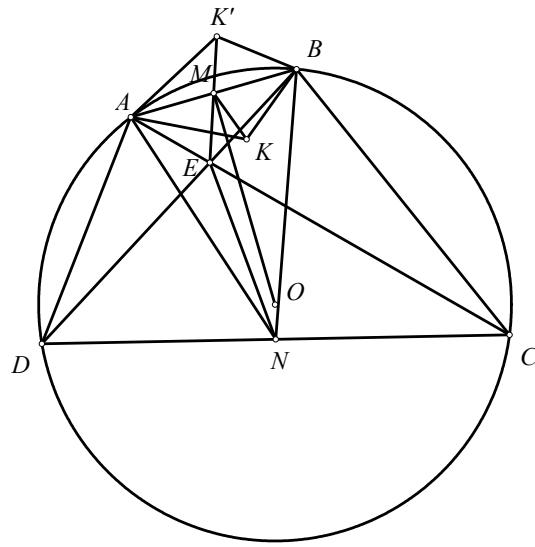
Suy ra tứ giác $DXYC$ nội tiếp. Ta thu được $\angle YXC = \angle YDC = \angle EAB$ nên $XY \parallel AB$.
Áp dụng bổ đề hình thang cho hình thang $ABYX$ ta có EL đi qua M .

Mặt khác, $(DC, PQ) = -1$ nên theo hệ thức Maclaurin, $\overline{PQ} \cdot \overline{PN} = \overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.
Suy ra tứ giác $ABNQ$ nội tiếp.

Từ đó $\angle ABK = \angle EBN = \angle BNC - \angle BDC = \angle QAB - \angle BAE = \angle QAE = \angle BAL$.
Tương tự, $\angle BAK = \angleABL$.

Suy ra $\triangle ABL = \triangle BAK$ hay K, L đối xứng nhau qua OM . Mà M, L, E thẳng hàng
nên MO là phân giác $\angle EMK$.

Cách 2 (Trần Quang Đô, HS THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam).



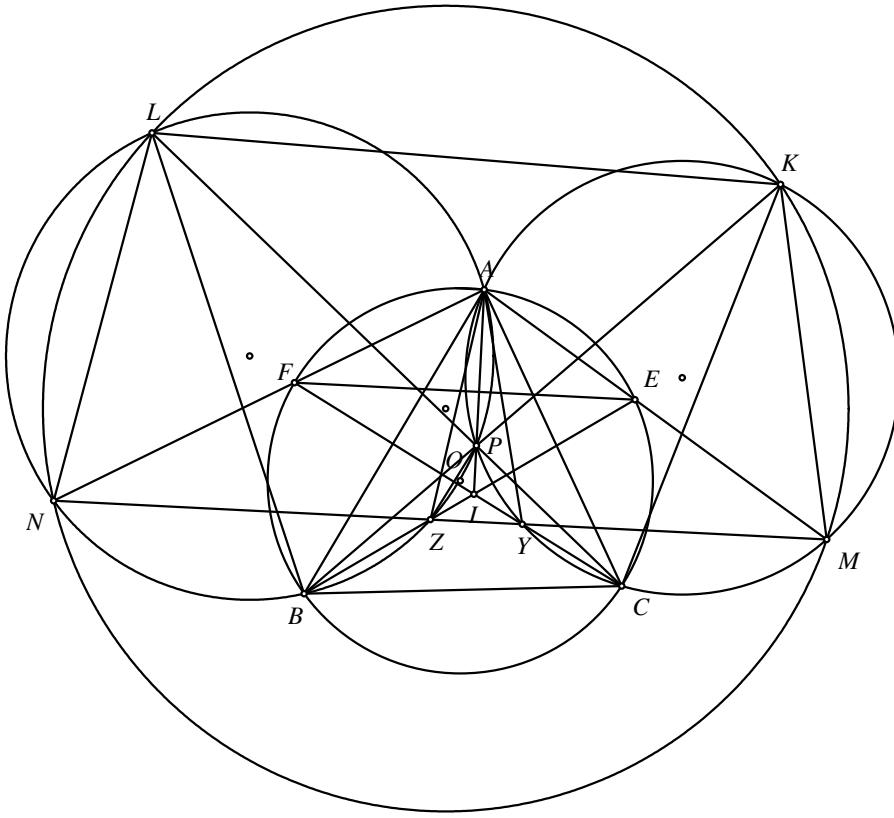
Gọi K' là điểm đối xứng với K qua AB . Ta có $\angle K'AB = \angle CAB = \angle EAN$, $\angle K'BA = \angle KBA = \angle EBN$.

Suy ra K' và N là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác AEB . Suy ra EK' và EN đẳng giác trong $\angle AEB$.

Lại có 2 tam giác AEB và DEC đồng dạng với 2 trung tuyến tương ứng EM và EN nên $\angle MEB = \angle NEC$. Suy ra EM và EN đẳng giác trong $\angle AEB$. Suy ra E, M, K' thẳng hàng.

Nghĩa là hai đường thẳng EM và KM đối xứng nhau qua AB , hay MO là phân giác $\angle EMK$. \square

- Bài 54.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho P nằm trên phân giác $\angle BAC$. Gọi K, L lần lượt là giao điểm khác P của BP với (APC) , CP với (APB) , E, F lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AB của (O) . AE, AF cắt $(APC), (APB)$ lần lượt tại M, N khác A . Chứng minh rằng 4 điểm L, K, M, N cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm của (APC) với CF , (APB) với BE , I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ta có $\angle NZB = \angle NAB = \angle EFB$ nên $NZ \parallel EF$. Tương tự $YM \parallel EF$.

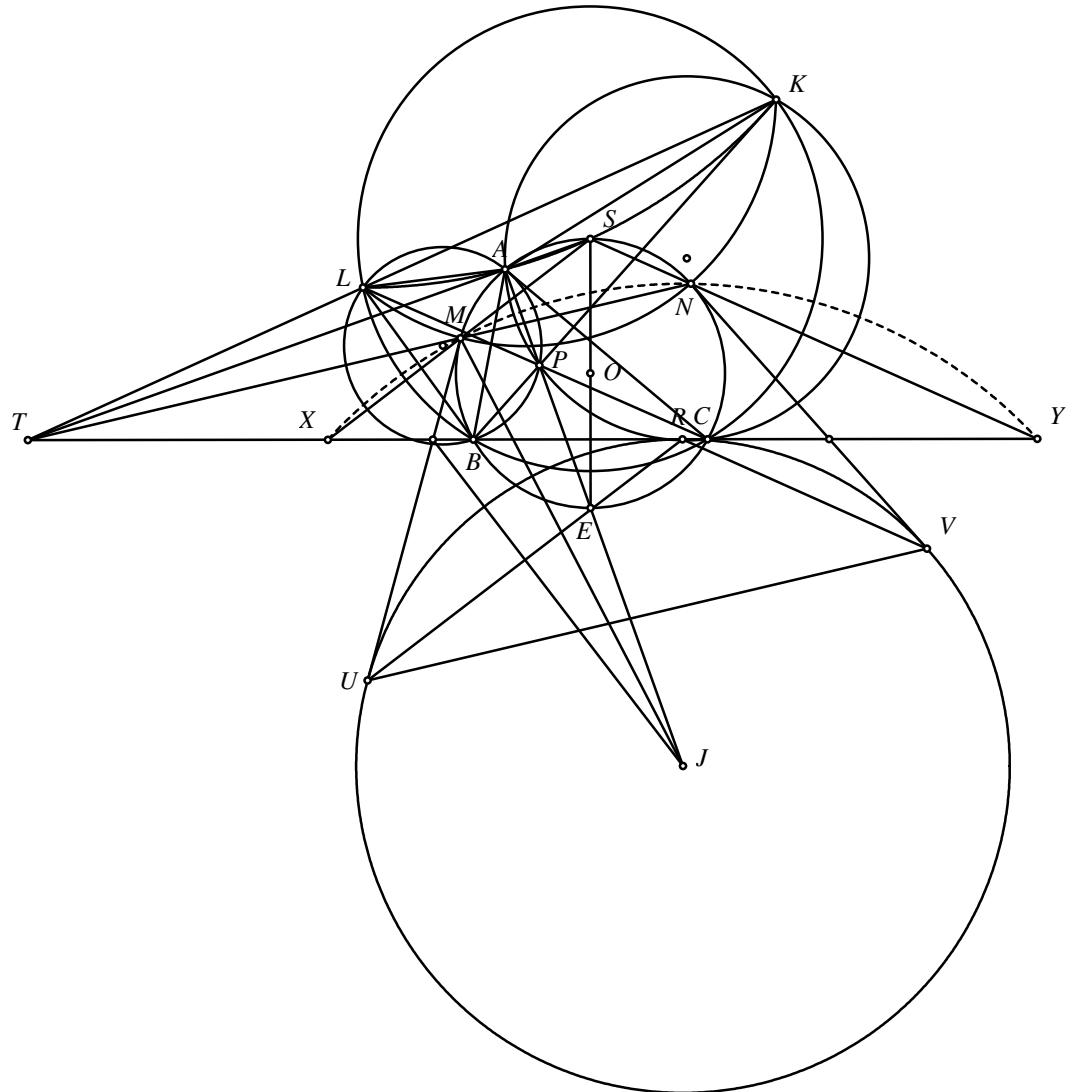
Do A, P, I thẳng hàng nên I nằm trên trục đẳng phuơng của (APB) và (APC) . Suy ra $IY \cdot IC = IZ \cdot IB$. Suy ra tứ giác $BZYC$ nội tiếp. Ta thu được $\angle IZY = \angle ICB = \angle FEZ$. Suy ra $YZ \parallel EF$.

Vậy 4 điểm B, Z, Y, C thẳng hàng.

Mặt khác, ta có $\angle BLC = \angle BAP = \angle CAP = \angle CKB$. Suy ra tứ giác $BLKC$ nội tiếp. Ta thu được $\angle LKB = \angle LCB$.

Từ đó $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = 180^\circ - \angle LBC + \angle CAM = 180^\circ - \angle LBZ - \angle ZBC + \angle EBC = 180^\circ - \angle LBZ = 180^\circ - \angle LNM$. Suy ra tứ giác $LKMN$ nội tiếp. \square

Bài 55. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . P là điểm bất kì nằm trên phân giác góc A . BP giao (APC) lần thứ hai tại K , CP giao (APB) lần thứ hai tại L . J là điểm bất kì nằm trên AP sao cho đường tròn tâm J tiếp xúc với BC không chứa trong (O) . Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc với (O) tại M và N . Chứng minh rằng L, K, M, N đồng viên.



Lời giải. Gọi S là điểm chính giữa cung BAC . Ta có $SB = SC$ và $\angle BSC = \angle BAC = 2\angle PAC = 2\angle BKC = 2\angle BLC$ nên S là tâm ngoại tiếp của tứ giác $BLKC$.

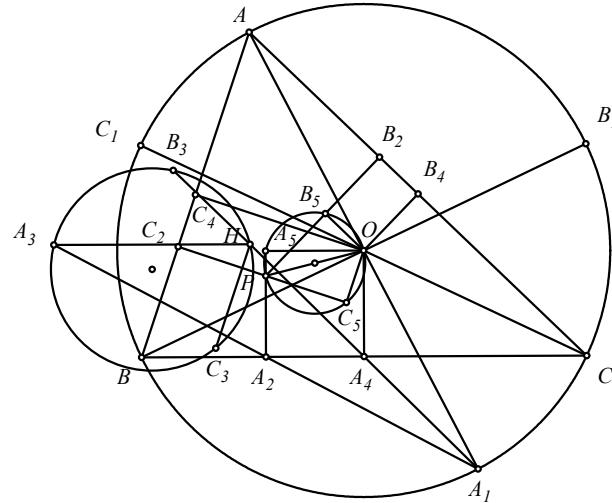
Mặt khác, $\angle LAB = \angle LPB = \angle CPK = \angle CAK$ nên AB, AC đồng giác trong $\angle LAK$ hay AP là phân giác của $\angle LAK$, suy ra AS là phân giác ngoài $\angle LAK$. Mà $SL = SK$ nên L, A, S, K đồng viên. Áp dụng định lý về tâm đồng phương cho 3 đường tròn $(LASK), (O), (S)$ suy ra LK, AS, BC đồng quy tại T .

Kéo dài SM, SN giao BC tại X, Y . Gọi U, V lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung ngoài với $(J), R$ là tiếp điểm của (J) với BC . Ta có $OS \parallel JR$ suy ra $MS \parallel RU, NS \parallel RV$.

Ta có $\angle SM \cdot SX = SB^2 = SN \cdot SY$ nên tứ giác $XMNY$ nội tiếp, suy ra $\angle MXY = \angle MNS = \angle XMU$, suy ra $XMRU$ là hình thang cân có J nằm trên trực đối xứng, suy ra $JM = JX$. Tương tự $JN = JY$, mà $JM = JN$ nên tứ giác $XMNY$ nội tiếp đường tròn tâm J . Gọi E là điểm chính giữa cung BC suy ra A là giao của JE với (SMN) . Từ đó A là điểm Miquel của tứ giác toàn phần nội tiếp $XMNYS$, suy ra AS, MN, XY đồng quy tại T .

Vậy $TL \cdot TK = TA \cdot TS = TM \cdot TN$ hay tứ giác $LMNK$ nội tiếp. □

- Bài 56.** (*China TST 2010*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với A, B, C qua O , P là điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P ứng với $\triangle ABC$, A_3, B_3, C_3 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi A_4, B_4, C_4 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB , suy ra A_4 là trung điểm A_3H . Tương tự với B_4, C_4 .

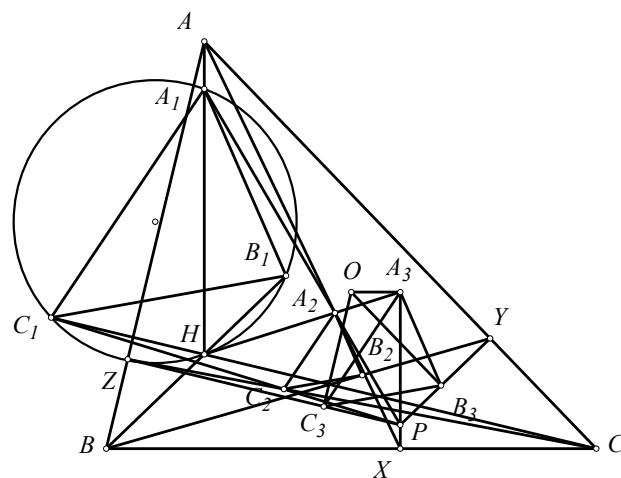
$$\text{Ta thu được } HA_3 \parallel= 2A_2A_4, HB_3 \parallel= 2B_2B_4, HC_3 \parallel= 2C_2C_4. \quad (1)$$

Dựng các hình chữ nhật $OA_4A_2A_5, OB_4B_2B_5, OC_4C_2C_5$ suy ra A_5, B_5, C_5 nằm trên đường tròn đường kính OP . (2)

$$\text{Lại có } OA_5 \parallel= A_4A_2, OB_5 \parallel= B_4B_2, OC_5 \parallel= C_4C_2. \quad (3)$$

Từ $(1), (2), (3)$ suy ra H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn. Hơn nữa ta có thể chứng minh $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$. \square

- Bài 57.** (*Trường xuân Titan 2017*) Cho tam giác ABC với trực tâm H . P là điểm bất kì trên mặt phẳng. Kẻ PX, PY, PZ lần lượt vuông góc với BC, CA, AB . Dựng các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{PY}, \overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{PZ}$. Chứng minh rằng H, A_1, B_1, C_1 đồng viên.



Lời giải. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao của các cặp đường thẳng AX với PA_1, BY với PB_1, CZ với PC_1 . Theo giả thiết ta thu được $\frac{AA_2}{A_2X} = \frac{A_1A_2}{A_2P} = 2$. Tương tự suy ra tam giác $A_2B_2C_2$ là ảnh của tam giác $A_1B_1C_1$ qua phép vị tự tâm P tỉ số $\frac{1}{3}$.

Suy ra $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Kẻ OA_3, OB_3, OC_3 lần lượt vuông góc với PX, PY, PZ . Suy ra $A_3X \parallel AH$ và $A_3X = \frac{1}{2}AH$.

Theo định lý Thales, H, A_2, A_3 thẳng hàng và $\frac{HA_2}{A_2A_3} = 2$.

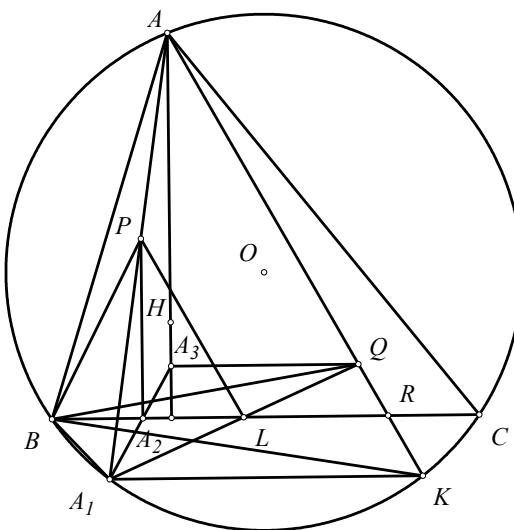
Chứng minh tương tự suy ra $A_3B_3C_3$ là ảnh của tam giác $A_2B_2C_2$ qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{3}{2}$.

Suy ra $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Lại có A_3, B_3, C_3 nằm trên đường tròn đường kính OP nên $\angle B_3A_3C_3 = \angle C_3OB_3 = \angle BAC$. Tương tự suy ra $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$.

Vậy $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Suy ra $\angle B_1A_1C_1 + \angle B_1HC_1 = 180^\circ$. Ta có đpcm. \square

- Bài 58.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H . P là điểm bất kì nằm trong tam giác. AP, BP, CP cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC . A_1A_2 cắt AH tại A_3 , tương tự xác định B_3, C_3 . Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 đồng viên.



Lời giải. Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC . AQ cắt (O) tại K , cắt BC tại R .

Gọi L là giao của QA_1 với BC . Ta sẽ chứng minh $PL \parallel AQ$.

Điều này tương đương $\frac{AP}{AA_1} = \frac{QL}{QA_1} = \frac{QR}{QK}$

$$\Leftrightarrow \frac{AP}{QR} = \frac{AA_1}{QK}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{AP}{\sin \angle PBA} : \frac{QR}{\sin \angle QBC} = \frac{AA_1}{QK} \\
 &\Leftrightarrow \frac{BP}{\sin \angle BAP} : \frac{BQ}{\sin \angle QRB} = \frac{AA_1}{QK} \\
 &\Leftrightarrow \frac{BP \cdot QK}{BQ} = \frac{AA_1 \cdot \sin \angle BAP}{\sin \angle AKA_1} = 2R \sin \angle BAP = BA_1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{BP}{BA_1} = \frac{QB}{QK}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Do $\angle BPA_1 = \angle BAP + \angle PBA = \angle QAC + \angle QBC = \angle QBC + \angle CBK = \angle QBK$, $\angle BA_1P = \angle BKQ$, ta thu được $\triangle A_1BP \sim \triangle KQB$. Suy ra (1) đúng. Vậy $PL \parallel AQ$.

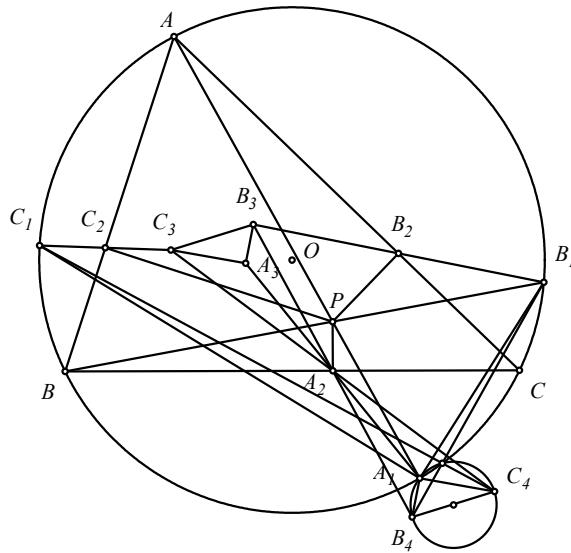
Kẻ $QA'_3 \perp AH$. Ta có hai tam giác PA_2L và AA'_3Q có cạnh tương ứng song song suy ra AP, A'_3A_2, QL đồng quy tại A_1 . Suy ra $A'_3 \equiv A_3$.

Chứng minh tương tự ta thu được B_3, C_3 lần lượt là hình chiếu của Q trên BH, CH . Vậy A_3, B_3, C_3, H cùng nằm trên đường tròn đường kính HQ . \square

Bài 59. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , trực tâm H . P là một điểm bất kì trên mặt phẳng, A_1, B_1, C_1 là giao điểm thứ hai của AP, BP, CP với (O) , $A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của P đối với $\triangle ABC$, A_3, B_3, C_3 thứ tự là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua A_2, B_2, C_2 . Khi đó H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu và chứng minh hai bổ đề:

Bổ đề 1. Với các kí hiệu như bài toán, ta có $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$.



Chứng minh. Kết quả $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ là quen thuộc. Vì vậy chúng ta chỉ chứng minh $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_1B_1C_1$.

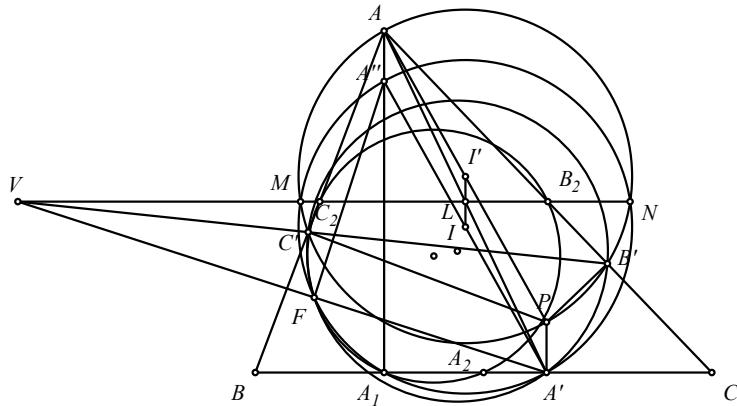
Gọi B_4, C_4 lần lượt là điểm đối xứng của B_3, C_3 qua A_2 suy ra $\triangle A_1B_4C_4 \sim \triangle A_3B_3C_3$. (1)

Do C_2A_2 là đường trung bình của tam giác $C_1C_3C_4$ nên $C_1C_4 \parallel C_2A_2$. Tương tự, $B_1B_4 \parallel B_2A_2$. Gọi $R = B_1B_4 \cap C_1C_4$ thì $\angle B_1RC_1 = \angle B_2A_2C_2 = \angle B_1A_1C_1$. Suy ra $R \in (O)$.

$$\Rightarrow \angle A_1 C_1 C_4 = \angle A_1 B_1 B_4.$$

Mặt khác, $\frac{A_1 C_1}{A_1 B_1} = \frac{A_2 C_2}{A_2 B_2} = \frac{C_1 C_4}{B_1 B_4}$. Do đó $\triangle A_1 C_1 C_4 \sim \triangle A_1 B_1 B_4$. \square

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC . Gọi A_1 là hình chiếu của A trên BC , A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . P là điểm bất kì trên mặt phẳng, $A'B'C'$ là tam giác pedal của P ứng với $\triangle ABC$. $(A'B'C') \cap (A_2 B_2 C_2) = \{F, F'\}$. đường thẳng qua A' song song với AP cắt AA_1 tại A'' . Khi đó đường tròn đường kính $A'A''$ đi qua một trong hai điểm F, F' .



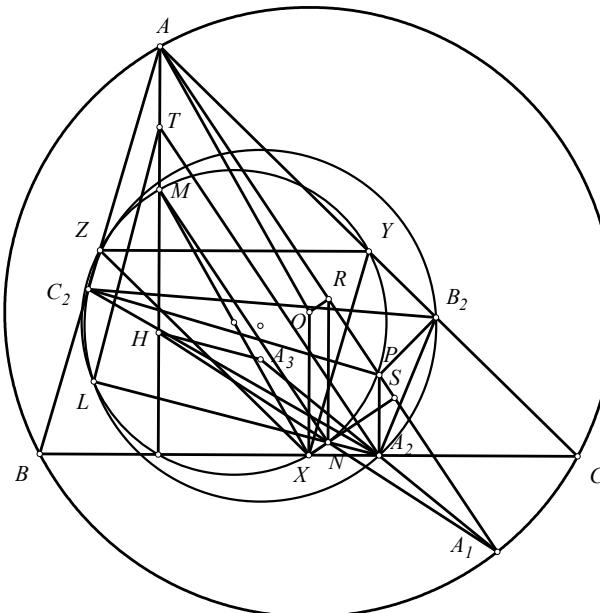
Chứng minh. Gọi V là giao điểm của $B'C'$ và $B_2 C_2$. Áp dụng định lý Fontené 1 ta thu được A', V, F thẳng hàng.

Mặt khác, gọi I', L lần lượt là trung điểm của AP, AA' .

Do $AA''A'P$ là hình bình hành nên I, L, I' thẳng hàng và $II' \perp BC$. Mà $L \in B_2 C_2$ suy ra I' đối xứng với I qua $B_2 C_2$. Vậy $(I', I'A)$ đối xứng với (I, IA'') qua $B_2 C_2$. Suy ra giao điểm M, N của hai đường tròn nằm trên đường thẳng $B_2 C_2$.

Lại có $B', C' \in (I', I'A)$ nên $\overline{VF} \cdot \overline{VA'} = \overline{VB'} \cdot \overline{VC'} = \overline{VM} \cdot \overline{VN}$, suy ra F, A', M, N cùng thuộc một đường tròn hay (I, IA'') đi qua F . \square

Trở lại bài toán.



Gọi L là giao điểm của $(A_2B_2C_2)$ với đường tròn 9 điểm của tam giác ABC , X, Y, Z thứ tự là trung điểm BC, CA, AB . $LA_2 \cap (XYZ) = \{L, N\}$. Gọi M là trung điểm AH , K là hình chiếu của A trên BC , R là trung điểm AA_1 .

Vì $OX \parallel AM$ nên $AO \parallel XM$.

Gọi T là giao của đường thẳng qua A_2 song song với AA_1 và AK . Áp dụng bổ đề 2 ta thu được (A_2T) đi qua L .

Suy ra $\angle TA_2L = \angle TKL = \angle MNL$ kéo theo $MN \parallel A_2T \parallel AP$. Vậy $\angle XMN = \angle OAR$. Nhưng $\angle XNM = \angle ORA = 90^\circ$ nên $\triangle XMN = \triangle OAR$.

$\Rightarrow OR \parallel XN$ suy ra $ORNX$ là hình bình hành, do đó $RN \parallel OX \parallel \frac{1}{2}AH$.

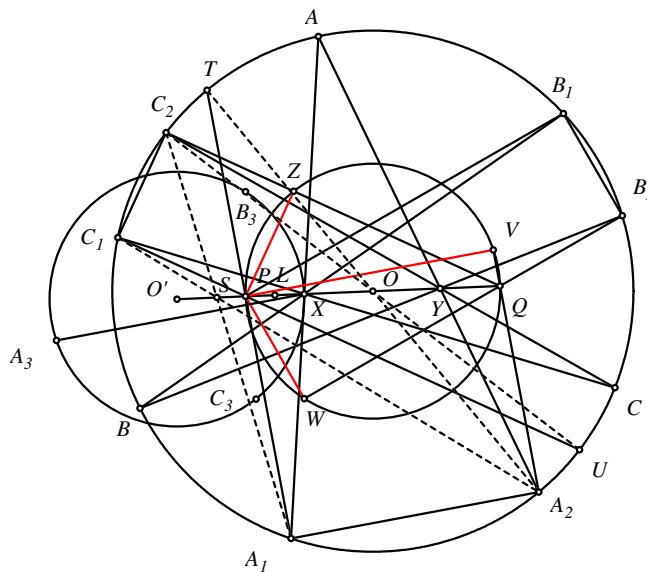
Vì vậy N là trung điểm HA_1 hay NA_2 là đường trung bình của tam giác HA_3A_1 .

$\Rightarrow HA_3 \parallel A_2L$. Tương tự ta cũng có $HB_3 \parallel B_2L$.

$\Rightarrow \angle A_3HB_3 = \angle A_2LB_2 = \angle A_2C_2B_2$.

Áp dụng bổ đề 1 ta thu được $\angle A_3HB_3 = \angle A_3C_3B_3$ hay A_3, B_3, C_3, H cùng thuộc một đường tròn. \square

Bài 60. (*Tạp chí THTT tháng 12/2015*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H . P là điểm bất kì trên OH . AP, BP, CP cắt (O) lần thứ hai lần lượt tại A_2, B_2, C_2 . Gọi A_3, B_3, C_3 là các điểm đối xứng với A_2, B_2, C_2 qua A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn có tâm nằm trên OH .



Lời giải. Ta chứng minh bằng cách mở rộng bài toán như sau.

Mở rộng. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi X, Y là hai điểm bất kì sao cho X, O, Y thẳng hàng. Gọi $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ lần lượt là các tam giác circumcevian của X và Y ứng với tam giác ABC . Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là điểm đối xứng của A_2, B_2, C_2 qua trung điểm A_1X, B_1X, C_1X . Khi đó A_3, B_3, C_3, X cùng nằm trên một đường tròn có tâm O' nằm trên XY .

Chứng minh.

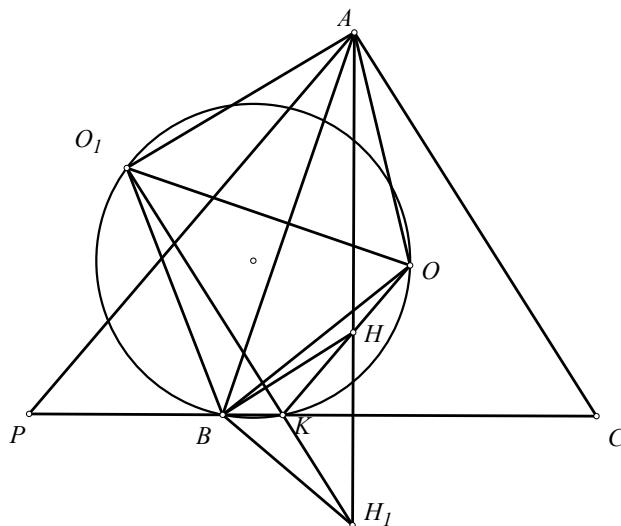
Gọi S là giao điểm của A_1C_2 và A_2C_1 . Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm C_1, C_2, A_1, A_2, A, C ta thu được $S \in XY$.

Gọi T, U lần lượt là giao điểm thứ hai của đường thẳng qua A_1, C_1 lần lượt vuông góc với A_1A_2, C_1C_2 với (O) . A_1T cắt C_1U tại P . Áp dụng định lý Pascal lần thứ hai cho 6 điểm A_1, A_2, C_1, C_2, T, U suy ra $P \in XY$. Tương tự ta thu được đường thẳng qua B_1 vuông góc với B_1B_2 cũng đi qua P , các đường thẳng lần lượt qua A_2, B_2, C_2 và vuông góc với A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại $Q \in XY$.

Dựng các điểm V, W, Z sao cho $\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{PW} = \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{C_1C_2}$. Suy ra $\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_3X}$. Gọi L là trung điểm XP thì V đối xứng với A_3 qua L .

Tương tự suy ra $(A_3B_3C_3)$ là đối xứng của (VWZ) qua L . Mà P, V, W, Z nằm trên đường tròn tâm O đường kính PQ và X đối xứng với P qua L nên X nằm trên $(A_3B_3C_3)$. Hơn nữa, O' đối xứng với O qua L , suy ra $O' \in XY$. \square

- Bài 61.** Cho tam giác ABC với O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Qua A kẻ đường thẳng song song với OH cắt BC tại P . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác APB, APC, ABC đồng quy tại một điểm nằm trên BC .



Lời giải. Gọi K là giao của OH với BC , H_1, O_1 lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APB .

Ta có $H_1B \perp AP$ nên $H_1B \perp HK$. Mà $BK \perp HH_1$ nên K là trực tâm tam giác BHH_1 . Suy ra $H_1K \perp BH$.

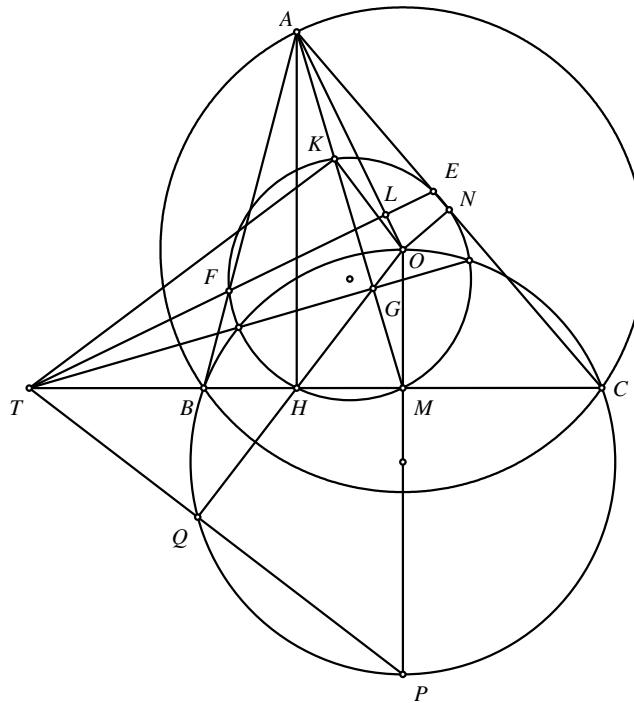
Mặt khác, ta có $\angle OKC = \angle APB = \frac{1}{2}\angle BO_1A = \angle BO_1O$. Suy ra tứ giác O_1BKO nội tiếp.

Suy ra $\angle O_1KB = \angle O_1OB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$.

Suy ra $O_1K \parallel AC$ hay $O_1K \perp BH$.

Vậy O_1, K, H_1 thẳng hàng. Chứng minh tương tự, đường thẳng Euler của tam giác APC cũng đi qua K . \square

- Bài 62.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường cao AH . M là trung điểm BC . AM giao OH tại G . Chứng minh rằng G nằm trên trực đường phẳng phương của (BOC) và đường tròn Euler của tam giác ABC .



Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là giao của OM, OH với (BOC) ; E, F là chân đường cao kẻ từ B, C . Gọi (E_u) là đường tròn Euler của tam giác ABC , d là trực đường phẳng phương của (E_u) và (BOC) .

Xét 3 đường tròn $(BOC), (E_u), (BC)$ có EF, BC, d là các trực đường phẳng phương nên EF, BC, d đồng quy tại T .

Ta có OP là đường kính của (BOC) nên $\angle HQP = 90^\circ$. Xét 3 đường tròn $(HMPQ), (BOC), (E_u)$ có PQ, HM, d là các trực đường phẳng phương nên PQ đi qua T .

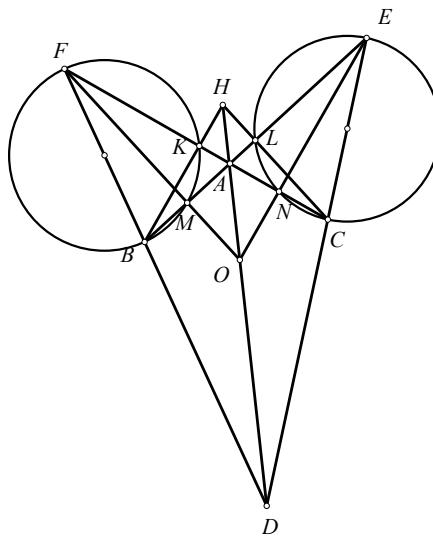
Gọi K là giao điểm thứ hai của AM với (E_u) , N là trung điểm BC . Ta có AO vuông góc với EF tại L , suy ra tứ giác $LONE$ nội tiếp.

Suy ra $AL \cdot AO = AE \cdot AN = AK \cdot AM$ hay tứ giác $KMOL$ nội tiếp. Mà các điểm L, M, Q cùng nằm trên đường tròn đường kính OT nên tứ giác $KOMQ$ nội tiếp. Vậy $GK \cdot GM = GO \cdot GQ$ hay G thuộc trực đường phẳng phương của (BOC) và (E_u) . \square

- Bài 63.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle A = \angle C = 120^\circ$. Phân giác góc A và góc C giao nhau tại P . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của 10 tam giác có đỉnh là 3 trong 5 điểm A, B, C, D, P đồng quy.

Lời giải. Ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi D là điểm thỏa mãn $\angle DBA = \angle BAC = \angle DCA$. Khi đó D nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC .



Chứng minh. Gọi E là giao của AB và CD , F là giao của AC và BD . Khi đó hai tam giác FAB và EAC lần lượt cân tại F và E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra FM giao EN tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC .

Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của B trên AC, C trên AB . BK giao CL tại trực tâm H của tam giác ABC .

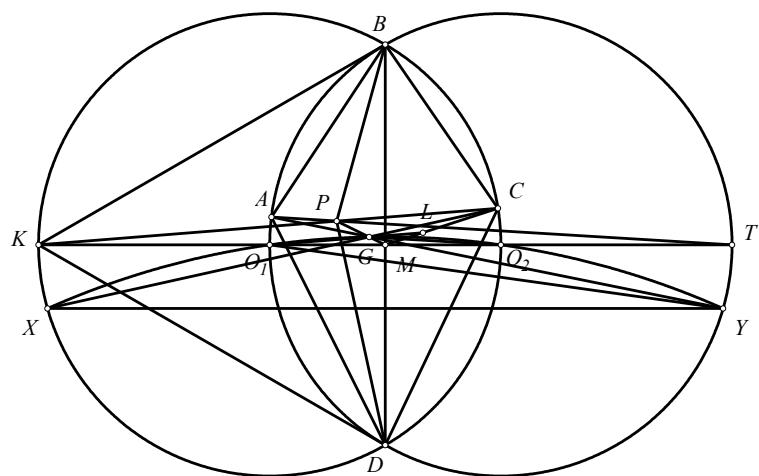
Xét hai đường tròn đường kính BF và CE . Ta có $\overline{HK} \cdot \overline{HB} = \overline{HL} \cdot \overline{HC}$ nên $\mathcal{P}_H/(BF) = \mathcal{P}_H/(CE)$.

Do tứ giác $FMNE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF nên $\overline{OF} \cdot \overline{OM} = \overline{OE} \cdot \overline{ON}$ hay $\mathcal{P}_O/(BF) = \mathcal{P}_O/(CE)$.

Ta có $\angle FBE = \angle FCE$ nên tứ giác $FBCE$ nội tiếp, suy ra $\overline{DB} \cdot \overline{DF} = \overline{DC} \cdot \overline{DE}$ hay $\mathcal{P}_D/(BF) = \mathcal{P}_D/(CE)$.

Vậy H, O, D cùng nằm trên trực tuyến đường phẳng của (CE) và (BF) hay D nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC . \square

Trở lại bài toán.



Gọi G, L lần lượt là trọng tâm tam giác BPD, BCD ; M là trung điểm BD , O_1, O_2 lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác BCD, BCA . CP cắt (O_1) lần thứ hai tại K . Dễ thấy tam giác KBD đều nên O_1 là trọng tâm tam giác KBD . Từ đó $\frac{MO_1}{MK} = \frac{MG}{MP} = \frac{ML}{MC} = \frac{1}{3}$. Suy ra O_1, G, L thẳng hàng hay đường thẳng Euler của tam giác BCD đi qua trọng tâm tam giác BPD . Chứng minh tương tự với các tam giác BAD, ABP, ADP, BCP, DPC .

Như vậy ta cần chứng minh G nằm trên đường thẳng Euler của các tam giác ABC, ADC, APC .

Gọi Y, X là giao của AG với (O_2) , CG với (O_1) , AP cắt (O_2) lần thứ hai tại T .

Ta có $GO_1 \parallel CK$ nên theo định lý Reim, X, O_1, G, O_2 đồng viên.

Tương tự O_1, G, O_2, Y đồng viên. Như vậy 5 điểm X, O_1, G, O_2, Y cùng nằm trên ω .

Mà $O_1X = O_2Y$ nên $XY \parallel KT$. Từ đó $\angle BAY = \angle BCX$.

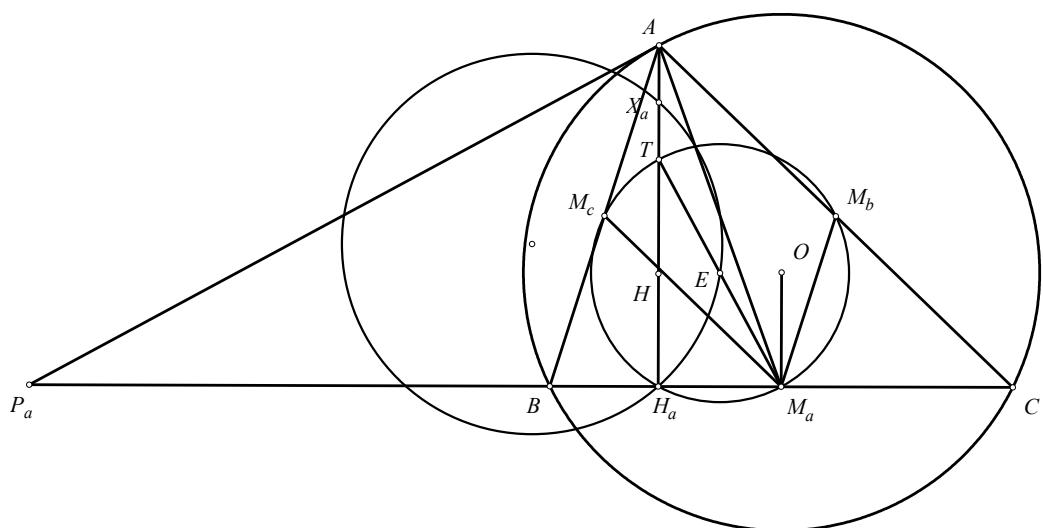
Đặt $\angle PAG = \angle PCG = x$. Hiển nhiên số đo các cung XO_1, O_1O_2, O_2Y của ω đều bằng $2x$. Do đó $\angle XGY = 180^\circ - 3x$.

Mà $\angle XGY = 360^\circ - \angle ABC - \angle BAG - \angle BCG = 360^\circ - 2x - 120^\circ - \angle ABC$.

Do đó $\angle ABC = 60^\circ + x = \angle BAG = \angle BCG$.

Áp dụng bổ đề trên suy ra G nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC . Tương tự với tam giác ADC . Bằng cộng góc cũng suy ra $\angle APC = 180^\circ - x = 180^\circ - \angle PAG = 180^\circ - \angle PCG$. Suy ra G nằm trên đường thẳng Euler của tam giác APC . Ta có đpcm. \square

- Bài 64.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A, B, C cắt cạnh đối diện lần lượt tại $P_a, P_b, P_c; M_a, M_b, M_c$ lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Chứng minh rằng đường tròn Euler của các tam giác $AP_aM_a, BP_bM_b, CP_cM_c$ có trung trực đẳng phương là đường thẳng Euler của tam giác ABC .



Lời giải. Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt là đường tròn Euler của các tam giác $AP_aM_a, BP_bM_b, CP_cM_c$. Gọi E là tâm của ω_a , H_a, H_b, H_c là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB .

Ta có $\angle EM_aH_a = 90^\circ - \angle EM_aO = 90^\circ - |\angle M_aM_bM_c - \angle M_aM_cM_b| = 90^\circ - |\angle B - \angle C|$.

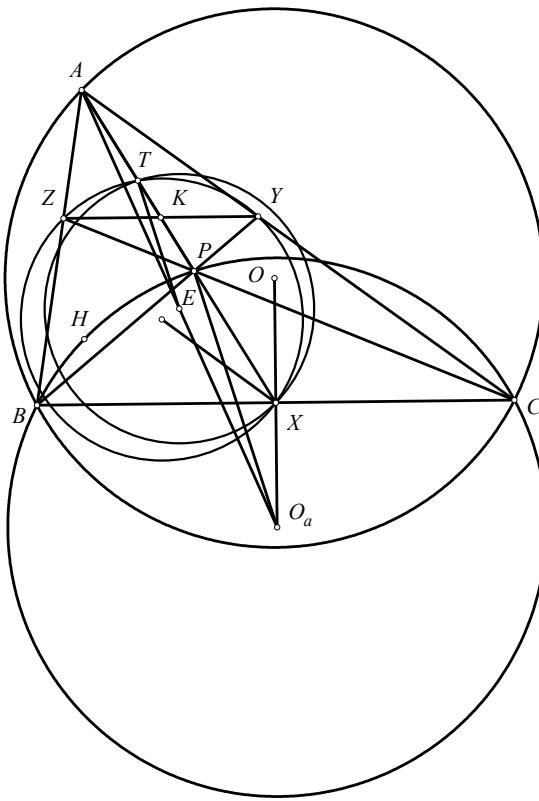
Mà $\angle AP_aM_a = |\angle B - \angle P_aAB| = |\angle B - \angle C|$ nên $\angle EM_aH_a + \angle AP_aM_a = 90^\circ$.

Suy ra $M_aE \perp AP_a$. Gọi $T_a = M_aE \cap AH_a$ thì T_a là trực tâm của tam giác AP_aM_a . Do E là trung điểm M_aT_a nên E nằm trên w_a . Chứng minh tương tự suy ra $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ đồng quy tại E .

Mặt khác, gọi X_a là giao của ω_a với AH_a . Ta thu được X_a là trung điểm AT_a . Mà T_a là trung điểm AH nên $HX_a \cdot HH_a = \frac{3}{4}HA \cdot HH_a = \frac{3}{4}HB \cdot HH_b = HX_b \cdot HH_b$. Do đó H nằm trên trực đường đẳng phương của ω_a và ω_b .

Chứng minh tương tự suy ra đường thẳng Euler của tam giác ABC là trực đường đẳng phương của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$. \square

Bài 65. (*Trường thu Hùng Vương 2016*) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Trung tuyến AX cắt (BHC) tại P nằm giữa A và X . BP, CP lần lượt cắt AC, AB tại Y, Z . Chứng minh rằng A nằm trên trực đường đẳng phương của (XYZ) và đường tròn Euler của tam giác ABC .



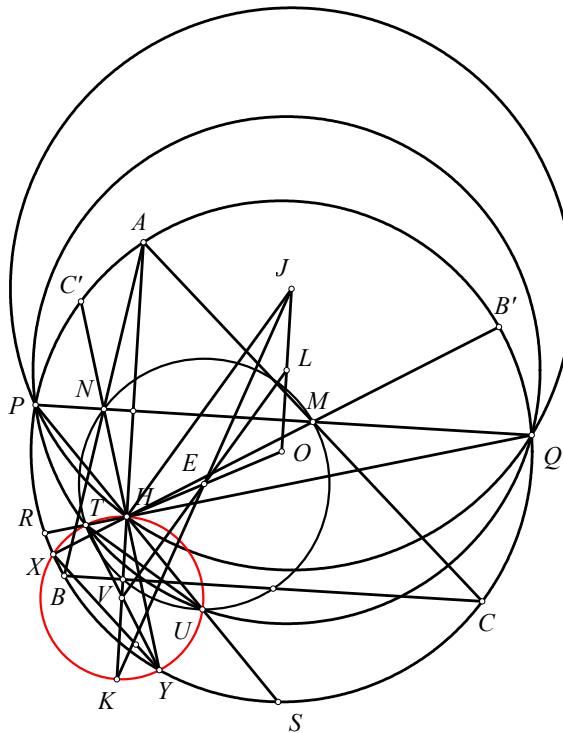
Lời giải. Gọi (E) là đường tròn Euler của tam giác ABC , (O_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC , T là trung điểm AP .

Do A là trực tâm tam giác BHC nên xét phép vị tự $\mathcal{H}_A^{\frac{1}{2}} : (O_a) \mapsto (E)$, do $P \in (O_a)$ nên $T \in (E)$.

Mặt khác gọi K là giao của YZ với AP . Ta có $\angle YPZ = \angle BPC = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ nên tứ giác $AYPZ$ nội tiếp. Suy ra $\overline{KY} \cdot \overline{KZ} = \overline{KP} \cdot \overline{KA}$.

Lại có $(APKX) = -1$ nên áp dụng hệ thức Maclaurin ta có $\overline{KP} \cdot \overline{KA} = \overline{KT} \cdot \overline{KX}$. Suy ra $\overline{KY} \cdot \overline{KZ} = \overline{KT} \cdot \overline{KX}$ hay tứ giác $XYTZ$ nội tiếp. Vậy TX là trực đường đẳng phương của (XYZ) và (E) , suy ra đpcm. \square

- Bài 66.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, AB . MN cắt (O) tại P, Q . Các tia MH, NH lần lượt cắt (O) tại X, Y . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PHQ , HK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác XHY . Chứng minh rằng trung điểm JK là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC .



Lời giải. Gọi (E) là đường tròn Euler của tam giác ABC , T, U lần lượt là giao điểm của QH, PH với (E) (H nằm giữa TQ và PU), R, S lần lượt là giao điểm thứ hai của QH, PH với (O) , V là tâm đường tròn (XHY) .

Kéo dài XH, YH cắt (O) tại B', C' .

Do H là tâm vị tự ngoài của (E) và (O) với tỉ số $\frac{1}{2}$ nên U, T, M, N lần lượt là trung điểm HS, HR, HB', HC' .

Suy ra $\overline{HM} \cdot \overline{HX} = \overline{HN} \cdot \overline{HY} = \overline{HT} \cdot \overline{HQ} = \overline{HP} \cdot \overline{HU} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{H/(O)}$.

Do đó tứ giác $PTUQ$ nội tiếp đường tròn tâm L và ta thu được $\angle TUH = \angle PQH = \angle NYT$. Tương tự ta thu được 5 điểm H, T, U, X, Y đồng viên.

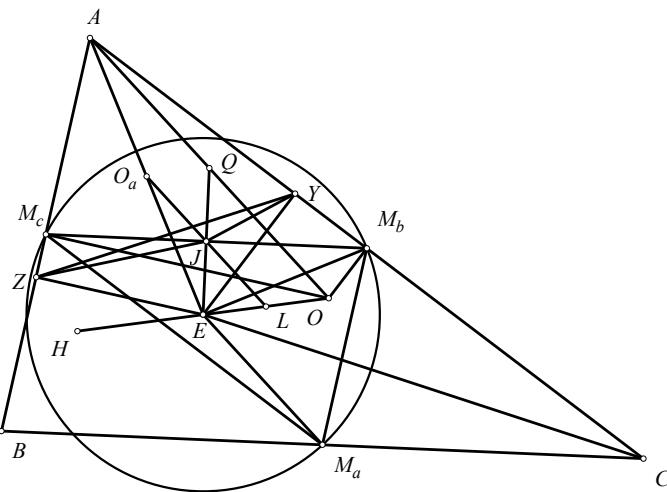
Suy ra V, E, L đều nằm trên đường trung trực của UT .

Ta có $\angle VHY + \angle HXY = 90^\circ$. Mà $\angle HXY = \angle HNM, \angle HNM + \angle NHA = 90^\circ$ nên A, H, V thẳng hàng. Suy ra $HV \parallel LO$. Mà E là trung điểm HO nên E là trung điểm LV .

Mặt khác, hai tam giác PHQ và THU đồng dạng nên HJ là đường cao của tam giác THU , suy ra $HJ \parallel LE$. Suy ra L là trung điểm JO . Mà V là trung điểm HK nên E là trung điểm JK . \square

Bài 67. (Vietnam IMO Training Test 2015) Cho tam giác ABC có E là tâm đường tròn Euler. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của E trên BC, CA, AB . Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác AYZ, BXZ, CXY, ABC đồng quy.

Lời giải. *Cách 1.*



Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC , L là trung điểm EO . ta sẽ chứng minh đường thẳng Euler của các tam giác AYZ, BXZ, CXY đều đi qua L .

Gọi O_a là tâm ngoại tiếp tam giác AYZ . J là trung điểm O_aL . EJ cắt AO tại Q .

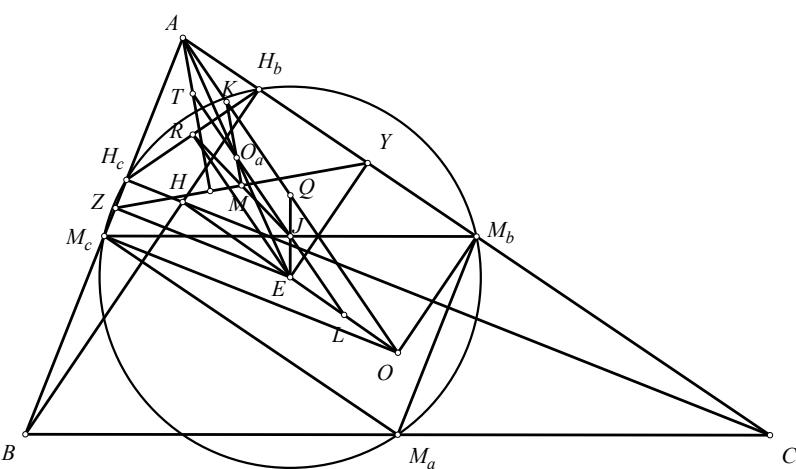
Ta có O_a là trung điểm AE nên $O_aL \parallel AO$. Từ đó thu được Q là trung điểm AO .

Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Ta có Q và E lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác AM_bM_c và $M_aM_bM_c$ nên Q và E đối xứng nhau qua M_bM_c . Từ đó J là trung điểm M_bM_c và $EJ \perp M_bM_c$.

Suy ra tứ giác $EJYM_b$ nội tiếp, ta thu được $\angle JYA = \angle JEM_b = \angle M_bM_aM_c = \angle BAC$.

Tương tự suy ra $\angle AYJ = \angle AZJ = \angle YAZ$. Áp dụng bổ đề của bài 63 suy ra J nằm trên đường thẳng Euler của tam giác AYZ . Vậy O_aL là đường thẳng Euler của tam giác AYZ . Chứng minh tương tự ta có đpcm.

Cách 2 (Lê Thị Hải Linh, HS THPT chuyên Bắc Ninh).



Gọi Q, Q_a, J, L lần lượt là trung điểm $AO, AE, EQ, EO; M_a, M_b, M_c$ lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Ta có $(M_a M_b M_c)$ và $(AM_b M_c)$ đối xứng qua $M_b M_c$ nên các tâm ngoại tiếp E và Q đối xứng qua $M_b M_c$, suy ra J là trung điểm $M_b M_c$. Hiển nhiên J là trung điểm $O_a L$.

Gọi H_b, H_c là chân đường cao kẻ từ B, C . R, M lần lượt là trung điểm $H_b H_c, XY$.

Do $\frac{H_b Y}{Y M_b} = \frac{H_c Z}{Z M_c} = 1$ và R, M, J lần lượt là trung điểm $H_b H_c, YZ, M_b M_c$ nên theo định lý ERIQ, M là trung điểm RJ .

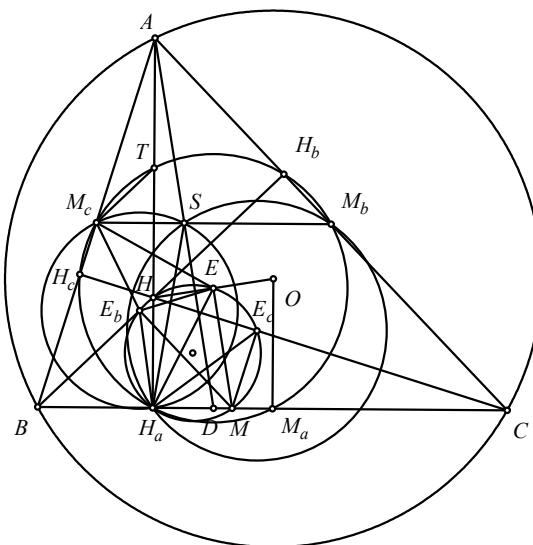
Ta có $ER \perp H_b H_c, AO \perp H_b H_c, O_a L \parallel AO$ nên $ER \parallel O_a L \parallel AO$.

Gọi K là giao của MO_a với AO .

Kí hiệu $d_{A/l}$ là khoảng cách từ A đến đường thẳng l . Do $EL = LO$ nên $d_{R/AO} = 2d_{J/AO}$. M là trung điểm RJ nên $d_{M/AO} = \frac{3}{2}d_{J/AO}$. Từ đó $O_a K = 2O_a M$.

Gọi T là trực tâm tam giác AYZ thì $AT \parallel 2O_a M$ hay $AT \parallel O_a K$, suy ra $TO_a \parallel AO$. Từ đó T, O_a, L thẳng hàng hay đường thẳng Euler của tam giác AYZ đi qua trung điểm EO . Chứng minh tương tự ta có đpcm. \square

- Bài 68.** (*Vietnam IMO Training Test 2014*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Đường thẳng qua A vuông góc với OH cắt BC tại D . Gọi E, E_b, E_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC, ABD, ACD . Chứng minh rằng E, E_b, E_c, H cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ; H_a, H_b, H_c là chân các đường cao của tam giác ABC . AD giao $M_b M_c$ tại S, T là trung điểm AH_a .

Qua E kẻ đường song song với AD cắt BC tại M . Từ M kẻ $ME'_b \perp BH_b, ME'_c \perp BH_c$. Ta sẽ chứng minh $E'_b \equiv E_b, E'_c \equiv E_c$.

Do E'_b, E, H_a cùng nằm trên đường tròn kính HM nên $\angle E'_b EH_a = \angle E'_b HH_a = \angle M_c TH_a = \frac{1}{2}\angle M_c EH_a$.

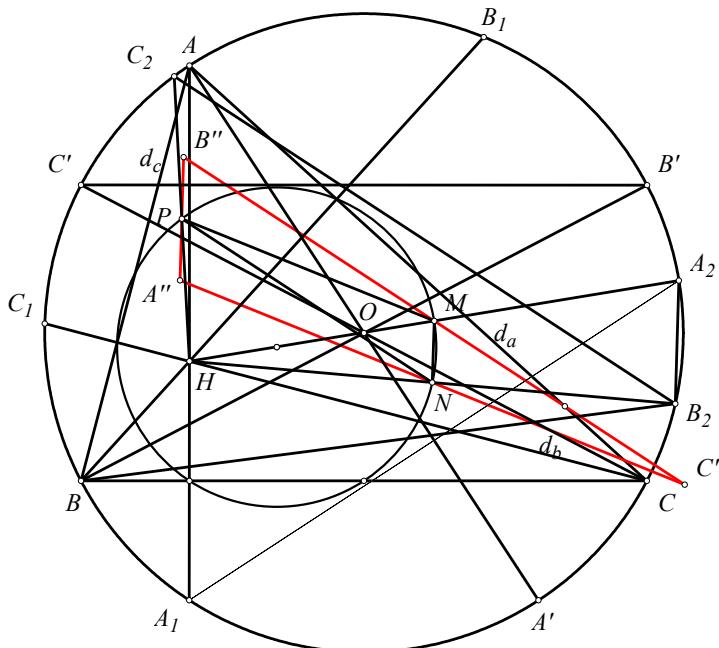
Do đó EE'_b là phân giác $\angle M_c EH_a$. Mà $EM_c = EH_a$ nên $E'_b M_c = E'_b H_a$.

Ta có $\angle M_c E'_b H_a = 360^\circ - 2\angle E E'_b H_a = 2\angle EMH_a = 2\angle EOM_a$.

Do $AD \perp EO$, $M_b M_c \perp OM_a$ nên $\angle EOM_a = \angle ASM_c$, suy ra $\angle M_c E'_b H_a = 2\angle ASM_c = 2\angle M_c SD$. Điều này nghĩa là E'_b là tâm của đường tròn Euler của tam giác ADB hay $E'_b \equiv E_b$.

Chứng minh tương tự, $E'_c \equiv E_c$. Từ đó H, E, E_b, E_c cùng nằm trên đường tròn đường kính MH . \square

- Bài 69.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao ứng với đỉnh A, B, C kéo dài cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Kẻ các đường kính AA', BB', CC' của (O) . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua AA', BB', CC' . Đường thẳng Simson của A_2, B_2, C_2 ứng với tam giác ABC cắt nhau tạo thành tam giác $A''B''C''$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A''B''C''$ có chung đường tròn Euler.



Lời giải. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các đường thẳng Simson của A_2, B_2, C_2 ứng với tam giác ABC .

Do $BC \parallel B'C'$ nên $(B_2 C_2, BC) = (B_2 C_2, B'C') = \frac{1}{2}sd(C' C_2 + B' B_2) = \frac{1}{2}sd(C' C_1 + B' B_1) = |\angle B - \angle C|$.

Mặt khác, theo kết quả quen thuộc, góc giữa hai đường thẳng Simson của hai điểm P, Q bất kì trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}sd PQ$. Chú ý rằng BC là đường thẳng Simson của A' ứng với tam giác ABC , ta thu được $(d_a, BC) = \frac{1}{2}sd A_2 A' = \frac{1}{2}sd A_1 A' = |\angle B - \angle C|$.

Suy ra $d_a \parallel B_2 C_2$.

Chứng minh tương tự ta thu được hai tam giác $A_2B_2C_2$ và $A''B''C''$ vị tự nhau.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm HA_2, HB_2, HC_2 suy ra M, N, P lần lượt nằm trên d_a, d_b, d_c .

Ta có $MN \parallel A_2B_2 \parallel A''B''$. Tương tự $NP \parallel B''C'', PM \parallel C''A''$. Suy ra M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh của tam giác $A''B''C''$.

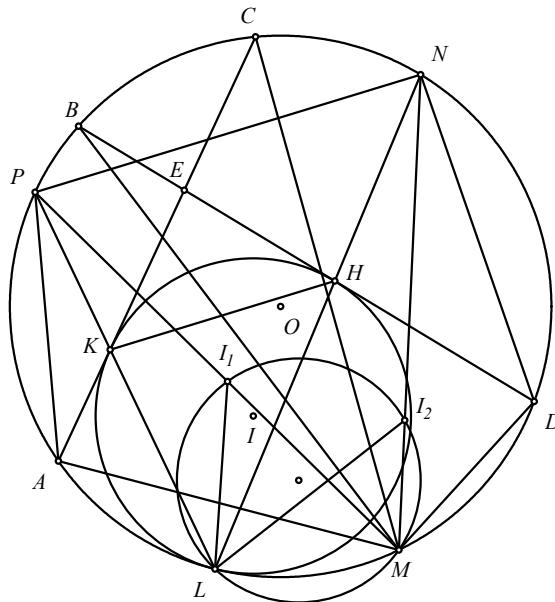
Suy ra (MNP) là đường tròn Euler của tam giác $A''B''C''$. Hiển nhiên (MNP) cũng là đường tròn Euler của tam giác ABC do (MNP) là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$. \square

Bài 70. (*Mathley No.2 2014*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . L là điểm bất kì trên cung BC không chứa A . Chứng minh rằng đường tròn A -mixtilinear nội tiếp của tam giác ABC , các đường tròn L -mixtilinear nội tiếp của các tam giác LAB, LAC có chung một tiếp tuyến.

Lời giải. (Luis González). Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC giao BD tại E . Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với tia EA, ED và tiếp xúc trong với (O) tại L . M là điểm bất kì trên cung AD không chứa B, C . Gọi I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác MAC, MBD . Chứng minh rằng I_1, I_2, M, L cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh.



Gọi K, H lần lượt là tiếp điểm của (I) với AC, BD . KL, HL giao (O) lần thứ hai tại P, N thì P, N là điểm chính giữa các cung AC, BD . Do đó $\overline{M, I_1, P}$ và $\overline{M, I_2, N}$.

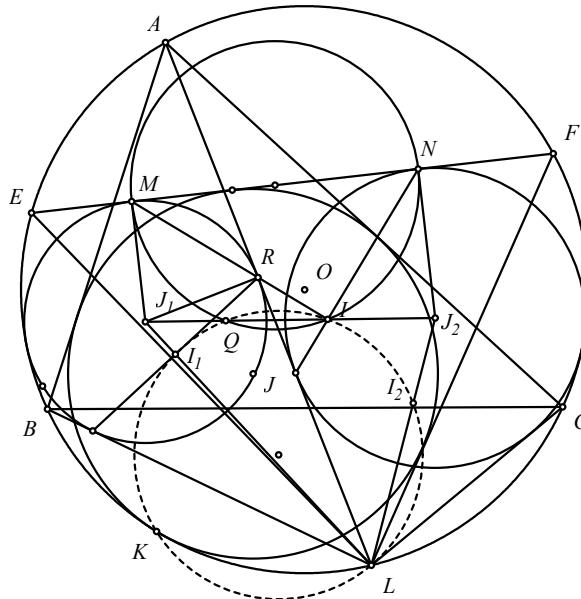
Bằng phép cộng góc đơn giản suy ra PN vuông góc với phân giác $\angle AED$ hay $PN \parallel KH$.

Từ đó $\frac{PK}{PL} = \frac{NH}{NL}$ hay $\frac{PK \cdot PL}{PL^2} = \frac{NH \cdot NL}{NL^2}$

Suy ra $\frac{PA^2}{PL^2} = \frac{ND^2}{NL^2}$ hay $\frac{PI_1}{PL} = \frac{NI_2}{NL}$.

Ta thu được $\triangle LPI_1 \sim \triangle LNI_2$ (c.g.c), do đó $\angle LI_1P = \angle LI_2N$ hay L, I_1, I_2, M cùng thuộc một đường tròn.

Trở lại bài toán.



Gọi (J) , (J_1) , (J_2) lần lượt là các đường tròn A -mixtilinear nội tiếp của tam giác ABC , các đường tròn L -mixtilinear nội tiếp của các tam giác LAB , LAC ; l là tiếp tuyến chung của (J_1) và (J_2) , cắt (O) tại E và F . Gọi I , I_1 , I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác LEF , LAB , LAC . Gọi M , N là tiếp điểm của (J_1) , (J_2) với l , R là tiếp điểm của (J_1) với AL .

Theo định lý Sawayama-Thebault, I nằm trên J_1J_2 và MR , $I_1R \perp J_1L$. Dễ thấy $\angle MIN = 90^\circ$.

Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính MN với J_1J_2 .

Do J_1M là tiếp tuyến của (MN) nên $J_1I_1 \cdot J_1L = J_1R^2 = J_1M^2 = J_1Q \cdot J_1I$.

Suy ra I_1 nằm trên (QIL) .

Tương tự I_2 cũng nằm trên (QIL) . Tức là I, I_1, I_2, L cùng thuộc một đường tròn.

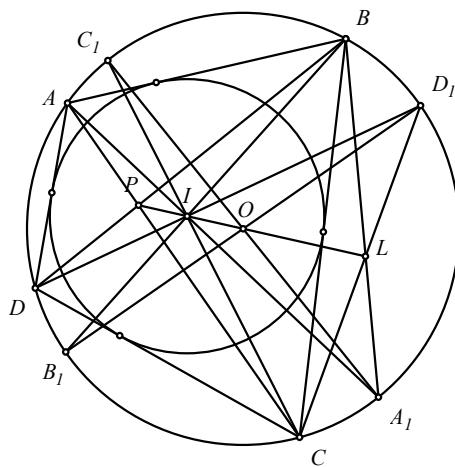
Gọi K là tiếp điểm của (J) với (O) . Áp dụng bô đề trên cho tứ giác $AABC$ suy ra I_1, I_2, L, K cùng thuộc một đường tròn.

Do đó lại áp dụng bô đề trên cho tứ giác $AFCE$ ta có (LII_2) đi qua tiếp điểm K của đường tròn tiếp xúc với EF , AC và (O) . Mà qua điểm K chỉ có duy nhất một đường tròn tiếp xúc với AC và tiếp xúc trong với (O) , suy ra (J) tiếp xúc với EF . Ta có đpcm. \square

- Bài 71.** (*Mathley No.3 2014*) Cho tứ giác lưỡng tâm $ABCD$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là O . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD , AD và BC . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tâm O tiếp xúc với bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác EAD , EBC , FAB , FCD .

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . AC giao BD tại P . Khi đó O, I, P thẳng hàng.



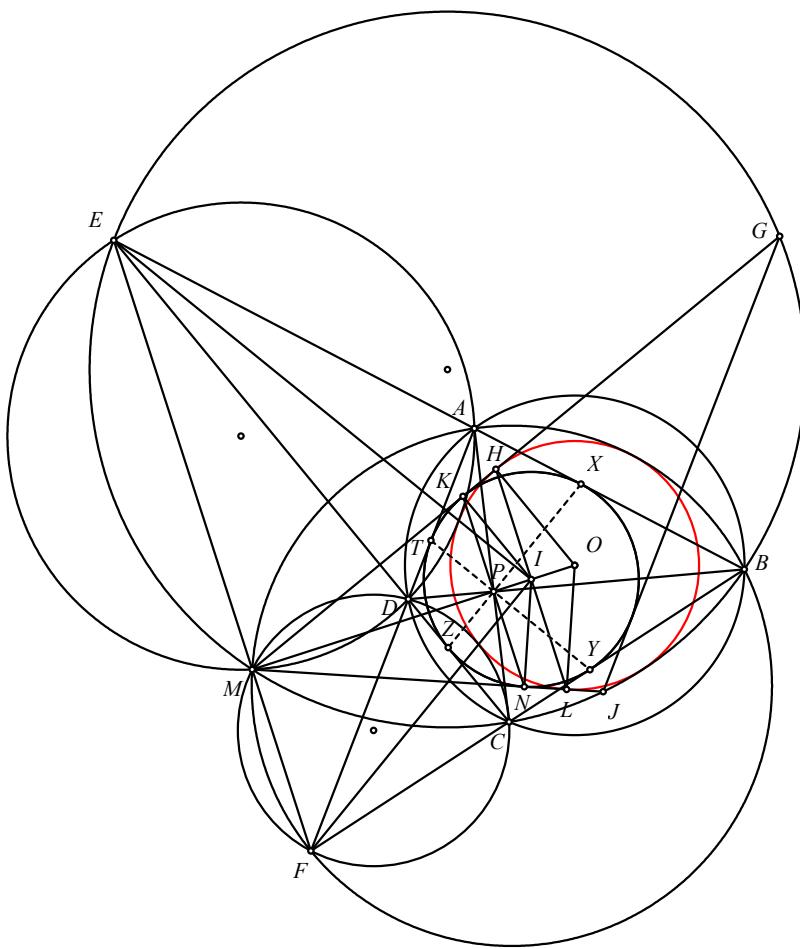
Chứng minh. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là giao điểm của AI, BI, CI, DI với (O) . Bằng một số phép cộng góc đơn giản dễ thấy A_1C_1 và B_1D_1 là các đường kính của (O) .

Gọi L là giao điểm của A_1B và D_1C .

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A_1, B_1, C_1, D_1, B, C suy ra I, O, L thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, B, C, D, A_1, D_1 suy ra I, P, L thẳng hàng. Như vậy P nằm trên OI . \square

Trở lại bài toán.



Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Khi đó dễ thấy M nằm trên EF và M, P, O thẳng hàng. Áp dụng bô đề trên suy ra M, P, O, I thẳng hàng.

Từ M kẻ tiếp tuyến MK, MN tới (I) . Từ O kẻ $OH \perp MK, OL \perp MN$. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là tiếp điểm của AB, BC, CD, DA với (I) .

Theo kết quả quen thuộc, AC, BD, XZ, YT đồng quy tại P .

Do đó EF là đường đối cực của P với đường tròn (I) . Suy ra P nằm trên đường đối cực của M với (I) hay P nằm trên KN .

Theo định lý Brocard, P là trực tâm của tam giác OEF suy ra $MP \cdot MO = ME \cdot MF$.

Mặt khác tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên bằng một số phép cộng cộng góc đơn giản, phân giác các góc DEA và DFC vuông góc với nhau tại I . Tức là tam giác EIF vuông tại I có IM là đường cao. Ta thu được $ME \cdot MF = MI^2$.

Như vậy $MP \cdot MO = MI^2$ hay $\frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MO}$.

Gọi I' là giao của MO với HL . Ta có $\frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MO} = \frac{MK}{MH} = \frac{MP}{MI'}$. Suy ra $I' \equiv I$, tức là I là trung điểm HL .

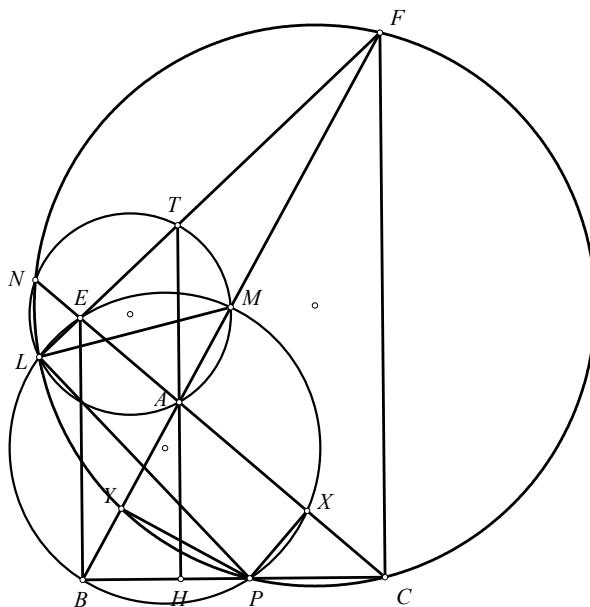
Gọi G, J là giao điểm thứ hai của MK, MN với (ECB) . Ta có (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ECB nên theo định lý Poncelet, (I) đồng thời là đường tròn nội tiếp tam giác MGJ .

Mà I là trung điểm đoạn nối hai tiếp điểm của đường tròn $\omega(O, OH)$ với MG, MJ nên theo bổ đề Sawayama, ω là đường tròn mixtilinear nội tiếp ứng với đỉnh M của tam giác MGJ . Tức là ω tiếp xúc với (ECB) .

Chứng minh tương tự ta cũng có ω tiếp xúc với $(EAD), (FAB), (FCD)$. \square

Nhận xét. Với trường hợp tứ giác $ABCD$ bất kì ngoại tiếp, luôn tồn tại một đường tròn tiếp xúc với bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác EAD, EBC, FAB, FCD .

- Bài 72.** Cho tam giác ABC . P là điểm chuyển động trên BC . Kẻ PX, PY lần lượt vuông góc với AC, AB . Đường tròn (BPX) giao AB lần thứ hai tại M , đường tròn (CPY) giao AC lần thứ hai tại N . Chứng minh rằng (AMN) luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. Qua B, C lần lượt kẻ đường vuông góc với BC cắt AC, AB tại E, F . Khi đó $E \in (BPX)$ và $F \in (CPY)$.

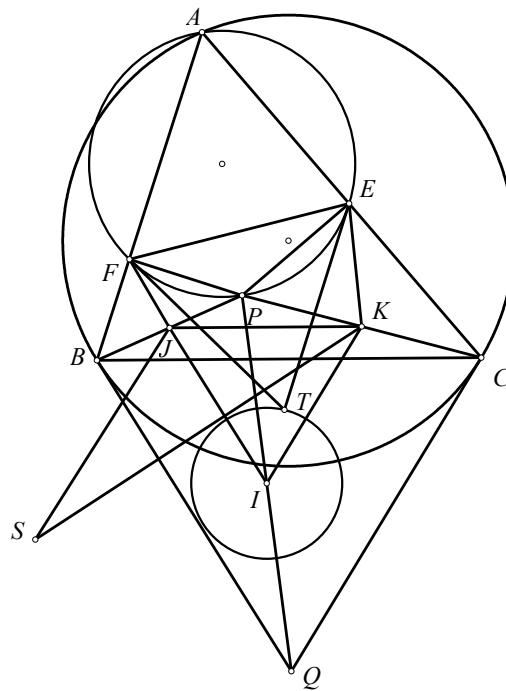
Gọi L là giao của EF với (BPX) thì $\angle FLP = 90^\circ$, suy ra $L \in (CPY)$ hay L là giao điểm của hai đường tròn (BPX) và (CPY) .

Ta có $\angle NLM = \angle NLF + \angle ELM = \angle ACF + \angle ABE = \angle BAC = \angle NAM$ hay $L \in (NAM)$.

Kẻ $AH \perp BC$, AH giao EF tại T . Ta có $\angle NAT = \angle HAC = \angle ACF = \angle NLT$, do đó $T \in (NAM)$.

Mà $BEFC$ là hình thang có A là giao điểm 2 đường chéo nên $AH = AT$. Suy ra T cố định. Vậy (AMN) luôn đi qua điểm đối xứng với chân đường cao kẻ từ A qua A . \square

- Bài 73.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A chuyển động trên cung BC . P là một điểm cố định nằm trong (O) . Kẻ PE, PF lần lượt vuông góc với AC, AB . Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng T chuyển động trên một đường tròn cố định có tâm là trung điểm PQ .



Lời giải. (Trần Quang Huy, HS K48 THPT chuyên KHTN)

Gọi J, K, I lần lượt là trung điểm BP, CP, QP .

Suy ra tam giác JIK là ảnh của tam giác BQC qua phép vị tự tâm P tỉ số $\frac{1}{2}$.

Suy ra $\triangle JIK \sim \triangle BQC \sim \triangle FTE$. Gọi S là tâm của phép vị tự quay biến tam giác JIK thành tam giác FTE .

Ta có $(FJ, EK) = \angle FJP + \angle EKP - \angle BPC = 2\angle ABP + 2\angle ACP - \angle BPC = 2\angle BPC - 2\angle BAC - \angle BPC = \angle BPC - 2\angle BAC$.

Do $\angle BAC$ không đổi nên (FJ, EK) không đổi, suy ra $\angle JSK$ không đổi.

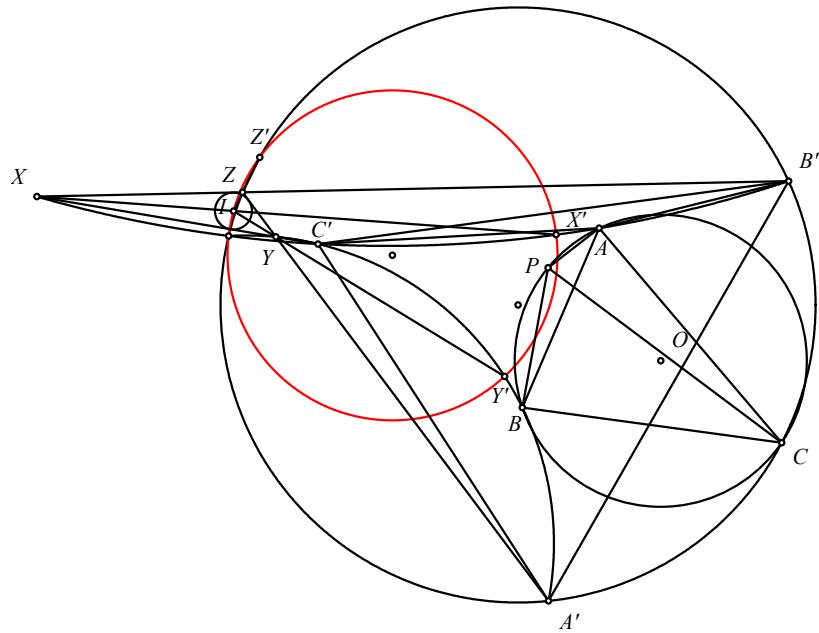
Mặt khác, $\frac{SJ}{SK} = \frac{JF}{KE} = \frac{\frac{1}{2}BP}{\frac{1}{2}CP} = \frac{BP}{CP}$ không đổi.

Suy ra S là điểm cố định.

Ta có $\frac{IT}{IS} = \frac{JF}{JS}$. Suy ra $IT = \frac{IS \cdot JF}{JS} = a$. Do các điểm J, S, I cố định và JF không đổi nên a không đổi.

Vậy T chuyển động trên (I, a) cố định. □

Bài 74. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là một điểm chuyển động trên (O) . Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với AP, BP, CP qua BC, CA, AB . l_a, l_b, l_c cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng khi P chuyển động, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác XYZ luôn nằm trên một đường tròn cố định.



Lời giải. (TelvCohl). Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với A, B, C qua BC, CA, AB . Do l_a đối xứng với PA qua BC nên $A' \in l_a$. Tương tự $B' \in l_b, C' \in l_c$.

Ta có $(XZ, XY) \equiv (XZ, AC) + (AC, AB) + (AB, XY) \equiv (AC, BP) + (AC, AB) + (PC, AB) \equiv (AC, PC) + (PC, BP) + (PC, AB) + (AC, AB) \equiv 3(AC, AB) \pmod{\pi}$.

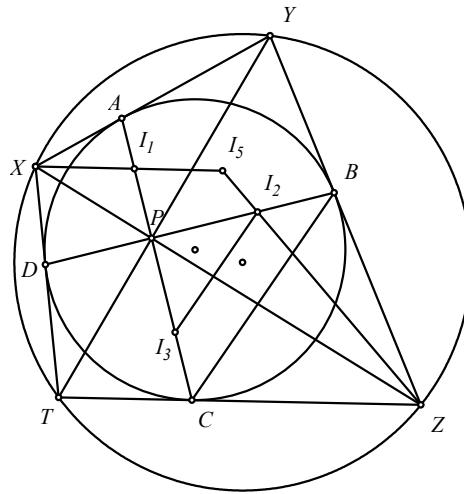
Mặt khác $(AB', AC') \equiv (AB', AC) + (AC, AB) + (AB, AC') \equiv 3(AC, AB) \pmod{\pi}$ nên $(XZ, XY) \equiv (AB', AC') \pmod{\pi}$.

Suy ra $X \in (AB'C')$. Tương tự $Y \in (BA'C')$, $Z \in (A'B'C)$.

Từ đó XI đi qua trung điểm X' của cung $B'C'$ của $(AB'C')$. Tương tự YI đi qua Y' , ZI đi qua Z' .

Do tam giác XYZ có dạng không đổi khi P chuyển động nên $\angle Y'IX', \angle Z'IX'$ luôn không đổi. Từ đó I là giao của hai cung tròn cố định dựng trên dây $Y'X', Z'X'$. Do I chuyển động nên I, X', Y', Z' đồng viên. Vậy $I \in (X'Y'Z')$ cố định. \square

Bài 75. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $AC \perp BD$. Tiếp tuyến tại (O) lần lượt qua A, B, C, D cắt nhau tạo thành tứ giác $XYZT$. XZ cắt YT tại P . Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của 8 tam giác $XPY, YPZ, ZPT, TPX, XYZ, YZT, ZTX, TXY$ cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8$ lần lượt là tâm nội tiếp của các tam giác XPY , YPZ , ZPT , TPX , XYZ , YZT , ZTX , TXY . Dễ thấy AC, BD, XZ, YT đồng quy tại P .

Do $AC \perp BD$ nên $\angle TXY + \angle TZY = 180^\circ$ hay tứ giác $XYZT$ nội tiếp.

Suy ra $\angle XYP = \angle TZP$. Nhưng $\angle PAY = \angle PCZ$ nên $\triangle PAY \sim \triangle PCZ$. Suy ra $\frac{PY}{PZ} = \frac{AY}{CZ} = \frac{YB}{ZB}$.

Ta thu được PB là phân giác $\angle YPZ$ hay $I_2 \in PB$. Tương tự, $I_3 \in PC$.

Ta có $\frac{PI_3}{CI_3} = \frac{PZ}{CZ} = \frac{PZ}{BZ} = \frac{PI_2}{BI_2}$. Do đó $I_2I_3 \parallel BC$.

Suy ra $\angle I_1I_3I_2 = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XYZ$.

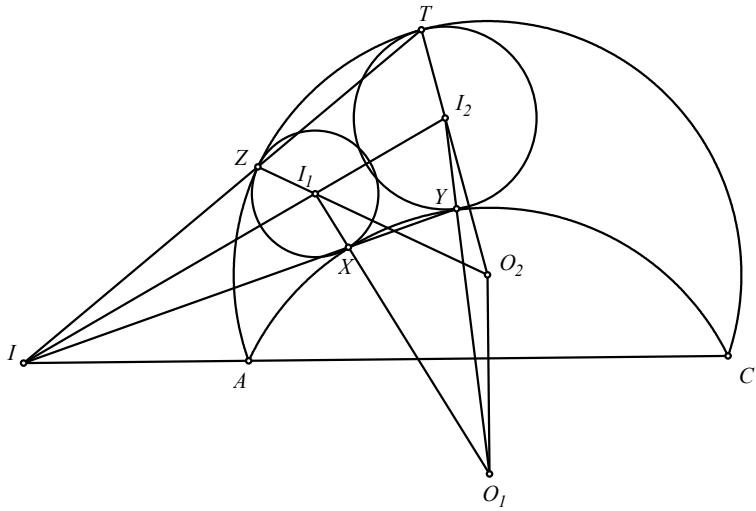
Vậy $\angle I_1I_3I_2 + \angle I_1I_5I_2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XYZ + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle XYZ = 180^\circ$.

Tương đương I_1, I_2, I_3, I_5 cùng thuộc một đường tròn. Tương tự, I_1, I_2, I_4, I_5 cùng thuộc một đường tròn hay $I_5 \in (I_1I_2I_3I_4)$. Tương tự với I_6, I_7, I_8 ta có đpcm. \square

Bài 76. Cho 4 cung tròn $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ (được sắp xếp theo thứ tự) cùng dựng trên dây cung AB sao cho chúng cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB . Giả sử tồn tại đường tròn (O_1) tiếp xúc với ω_1 và ω_2 , đường tròn (O_2) tiếp xúc với ω_3 và ω_4 sao cho giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nằm trên AB . Gọi (O_3) là đường tròn bất kì tiếp xúc với ω_1 và ω_2 . Từ điểm C trên AB kẻ hai tiếp tuyến tới (O_3) , cắt ω_3 và ω_4 lần lượt tại (X, Y) ; (T, Z) . Chứng minh rằng tứ giác cong $XYZT$ (tạo bởi các cạnh XY, ZT và các cung YZ, XT) ngoại tiếp.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề.

Bổ đề. Cho hai dây cung γ_1 và γ_2 cùng dựng trên dây AC sao cho chúng cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AC . Gọi C_1, C_2 là hai đường tròn tiếp xúc với γ_1 và γ_2 . Khi đó tâm vị tự ngoài của C_1 và C_2 nằm trên AC .



Chứng minh. Gọi (O_1, R_1) và (O_2, R_2) lần lượt là đường tròn chứa các cung γ_1, γ_2 ; I là tâm vị tự ngoài của C_1 và C_2 . X, Y là tiếp điểm của C_1, C_2 với γ_1 , Z, T là tiếp điểm của C_1, C_2 với γ_2 .

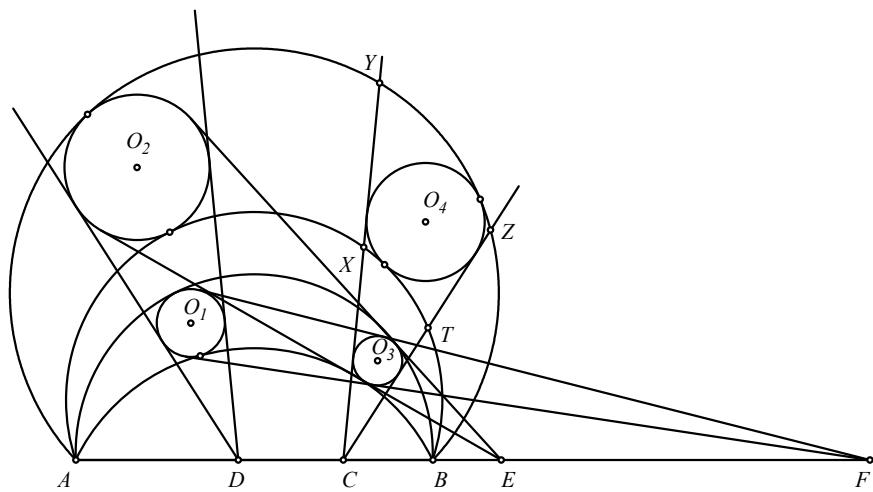
Áp dụng định Monge-D'Alembert cho bộ ba đường tròn $((O_1), \gamma_1, \gamma_2)$ và $((O_2), \gamma_1, \gamma_2)$ suy ra I, X, Y thẳng hàng và I, Z, T thẳng hàng.

Gọi IA_1A_2 là tiếp tuyến chung ngoài của γ_1, γ_2 .

Phép nghịch đảo $I_I^{\overline{IA_1} \cdot \overline{IA_2}} : \gamma_1 \mapsto \gamma_2$, đồng thời các cặp đường thẳng I_1Z và I_2T , I_1X và I_2Y không song song nên $\overline{IZ} \cdot \overline{IT} = \overline{IA_1} \cdot \overline{IA_2} = \overline{IX} \cdot \overline{IY}$. Suy ra X, Y, Z, T đồng viên.

Xét ba đường tròn $(O_1), (O_2), (XYTZ)$ có trực đẳng phương lần lượt là AC, XY, ZT nên AC, XY, ZT đồng quy. Từ đó $I \in AC$. \square

Trở lại bài toán.



Gọi (O'_4) là đường tròn tiếp xúc với XY , cung YZ , cung XT .

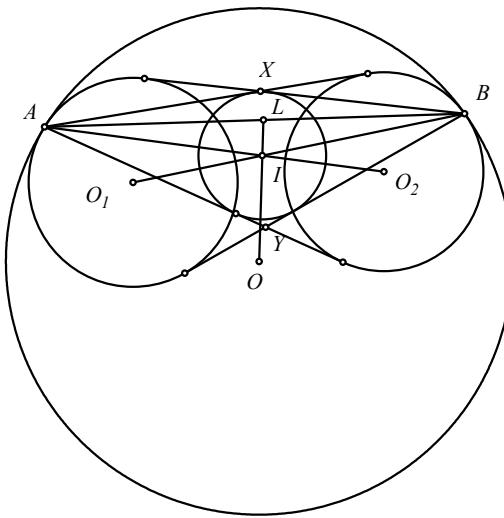
Áp dụng bô đê trên suy ra tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_1) và (O_3) ; (O_2) và (O'_4) nằm trên AB .

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ ta có tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2) , (O_1) và (O_3) cùng nằm trên AB nên tâm vị tự ngoài của (O_2) và (O_3) nằm trên AB .

Lại áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn $(O_2), (O_3), (O'_4)$ suy ra tâm vị tự ngoài của (O_3) và (O'_4) nằm trên AB . Ta có tiếp tuyến chung ngoài của (O_3) và (O'_4) cắt AB tại C . Do đó C là tâm vị tự ngoài của (O_3) và (O'_4) , nghĩa là (O'_4) tiếp xúc với ZT hay $(O'_4) \equiv (O_4)$. Ta có đpcm. \square

Nhận xét. Đây là mở rộng của bài toán G7 IMO Shortlist 2010.

Bài 77. (*Mathley No.1 2014*) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại A, B . Từ A kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới (O_2) , từ B kẻ hai tiếp tuyến l_1, l_2 tới (O_1) sao cho t_1 và l_1 nằm cùng một phía với đường thẳng AB . Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của t_1 và l_1, t_2 và l_2 . Chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp.



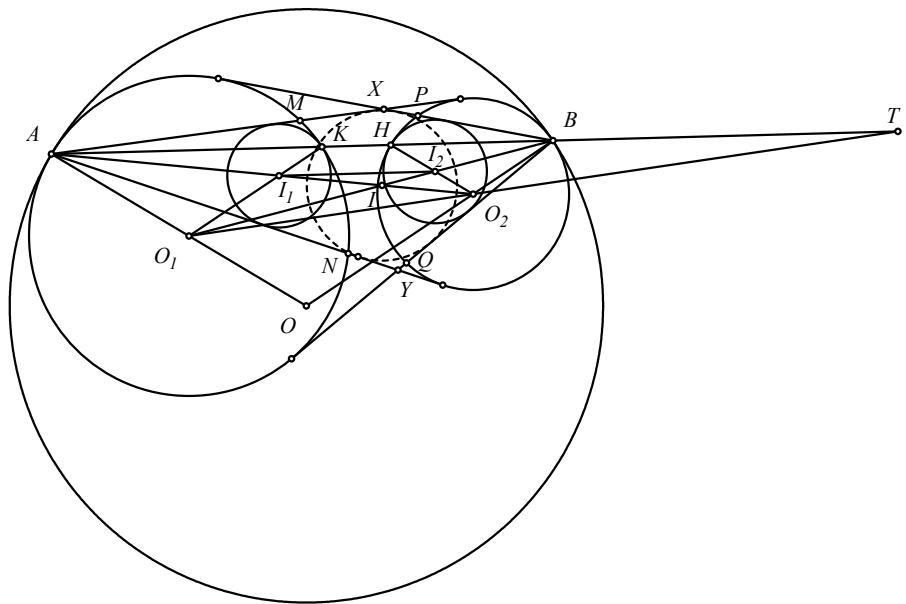
Lời giải. (*Lê Thị Hải Linh-HS THPT chuyên Bắc Ninh*)

Gọi O_1, O_2, O lần lượt là tâm của γ, δ, ω . AO_2 giao BO_1 tại I . Gọi α_1 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với AX, AY ; α_2 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với BX, BY . OI giao AB tại L .

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn δ, ω, α_1 ta có A là tâm vị tự ngoài của α_1 và δ , B là tâm vị tự ngoài của δ và ω , suy ra tâm vị tự ngoài của α_1 và ω nằm trên AB hay L là tâm vị tự ngoài của α_1 và ω .

Chứng minh tương tự L cũng là tâm vị tự ngoài của α_2 và ω . Từ đó $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ hay tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp. \square

Bài 78. Với kí hiệu như bài toán 77, gọi M, N lần lượt là giao của AX, AY với (O_1) , P, Q lần lượt là giao của BX, BY với (O_2) . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn mixtilinear incircle ứng với đỉnh A và B của các tam giác AMN và BPQ . Chứng minh rằng (I_1) và (I_2) có cùng bán kính.



Lời giải. Cách 1.

Gọi K, H lần lượt là tiếp điểm của (I_1) với (O_1) , (I_2) với (O_2) ; T là giao của O_1O_2 với AB . Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn $(O_1), (I_1), (I)$ suy ra A, K, B thẳng hàng. Tương tự suy ra A, K, H, B thẳng hàng.

Theo bài 77 thì tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Do đó $R_{(I_1)} = R_{(I_2)}$ khi và chỉ khi $I_1I_2 \parallel AB$.

Điều này tương đương $\frac{II_2}{I_2B} = \frac{II_1}{I_1A}$. (1)

Theo định lý Menelaus, $\frac{II_2}{I_2B} \cdot \frac{HB}{HA} \cdot \frac{O_2A}{O_2I} = 1$ suy ra $\frac{II_2}{I_2B} = \frac{HA}{HB} \cdot \frac{O_2I}{O_2A} = \frac{OO_2}{O_2B} \cdot \frac{O_2I}{O_2A}$.

Tương tự, $\frac{II_2}{I_1A} = \frac{OO_1}{O_1A} \cdot \frac{O_1I}{O_1B}$.

Như vậy (1) tương đương $\frac{OO_2}{O_2B} \cdot \frac{O_2I}{O_2A} = \frac{OO_1}{O_1A} \cdot \frac{O_1I}{O_1B}$.

Hay $\frac{OO_2}{O_2B} \cdot \frac{O_1A}{OO_1} = \frac{O_1I}{O_1B} \cdot \frac{O_2A}{O_2I}$, đúng vì cùng bằng $\frac{TA}{TB}$.

Bài toán được chứng minh.

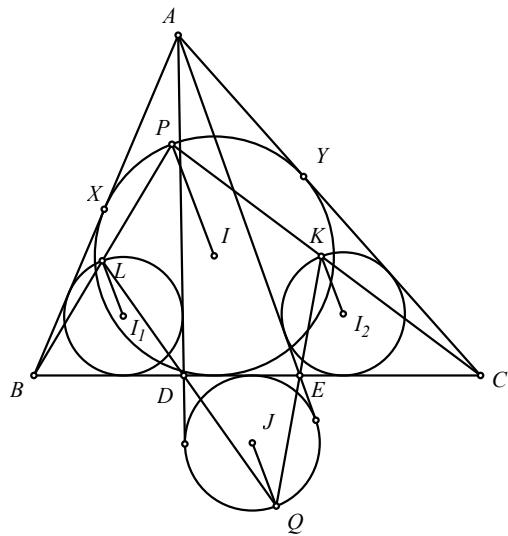
Cách 2. (Vương Nguyễn Thùy Dương, HS THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Gọi R, R_1, R_2, r_1, r_2 lần lượt là bán kính $(O), (O_1), (O_2), (I_1), (I_2)$.

Xét phép vị tự $\mathcal{H}_A^{\frac{R}{R_1}} : (I_1) \mapsto (O_2)$ suy ra $r_1 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R}$. Chứng minh tương tự suy ra $r_1 = r_2$. \square

Bài 79. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . D, E là hai điểm nằm trên cạnh BC . Gọi $(I_1), (I_2)$ là đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE . (I) tiếp xúc với AB, AC tại X, Y . P là một điểm chuyển động trên cung nhỏ XY . PB, PC lần lượt giao $(I_1), (I_2)$

tại L, K sao cho giao điểm còn lại của PB với (I_1) , PC với (I_2) nằm giữa B, L và nằm giữa C, K . Chứng minh rằng khi P chuyển động, giao điểm của LD và KE nằm trên một đường tròn cố định.



Lời giải. Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ADE . r, r_1, r_2, r_a lần lượt là bán kính của $(I), (I_1), (I_2), (J)$.

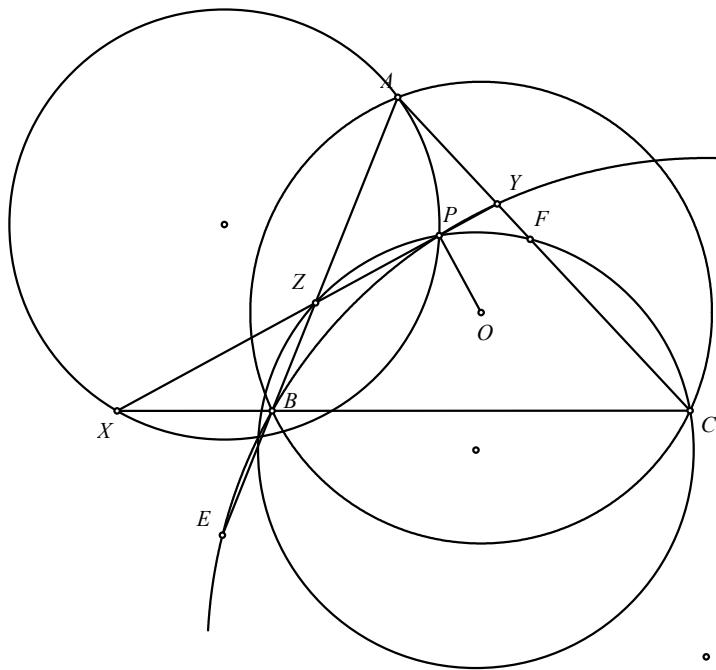
Xét phép vị tự $\mathcal{H}_B^r : P \mapsto L, \mathcal{H}_C^r : P \mapsto K$.

Suy ra $PI \parallel I_1L \parallel I_2K$.

Lại xét $\mathcal{H}_D^{-r_1} : L \mapsto Q, \mathcal{H}_E^{-r_2} : L \mapsto Q'$.

Suy ra $LI_1 \parallel JQ, KI_2 \parallel JQ'$ hay $Q' \equiv Q$. Như vậy giao điểm của LD và KE nằm trên (J) cố định. \square

Bài 80. (*IMO Shortlist 2012*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi d là đường thẳng bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z ; P là hình chiếu của O trên d . Chứng minh rằng các đường tròn $(AXP), (BYP), (CZP)$ đồng trực.



Lời giải. Đường tròn (APX) đồng trực với (BPY) và (CPZ) khi và chỉ khi $\frac{\mathcal{P}_{A/(BPY)}}{\mathcal{P}_{A/(CPZ)}} = \frac{\mathcal{P}_{X/(BPY)}}{\mathcal{P}_{X/(CPZ)}}$

$$\text{Hay } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AE}}{\overline{AC} \cdot \overline{AF}} = \frac{\overline{XP} \cdot \overline{XY}}{\overline{XP} \cdot \overline{XZ}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}}. \quad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AYZ với đường thẳng (X, B, C) ta có $\frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CY}} = 1$.

$$\text{Suy ra } \frac{\overline{XY}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{CA}}.$$

$$\text{Như vậy (1) tương đương } \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{BZ}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \overline{ZA} \cdot \overline{ZB} - \overline{YA} \cdot \overline{YC} = \mathcal{P}_{Z/(O)} - \mathcal{P}_{Y/(O)} \\ &= ZO^2 - YO^2 = ZP^2 - YP^2 = \overline{ZY} \cdot \overline{ZP} - \overline{YZ} \cdot \overline{YP} = \overline{ZB} \cdot \overline{ZE} - \overline{YF} \cdot \overline{YC}. \end{aligned}$$

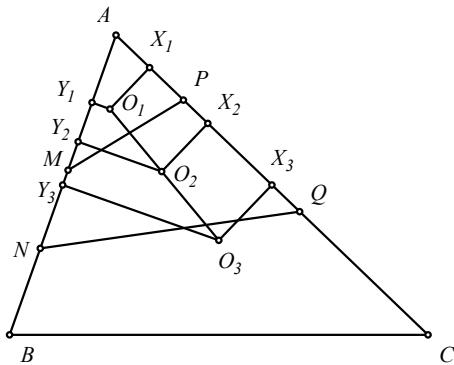
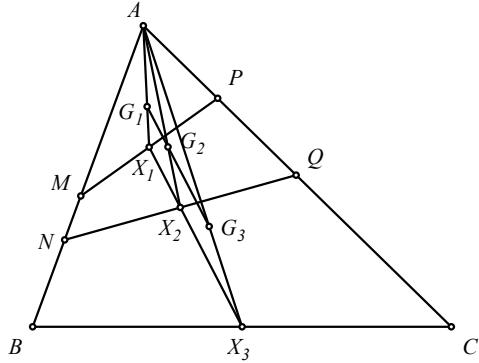
$$\text{Do đó } \overline{ZB} \cdot (\overline{ZA} - \overline{ZE}) = \overline{YC} \cdot (\overline{FY} + \overline{YA}) \text{ hay } \overline{ZB} \cdot \overline{EA} = \overline{YC} \cdot \overline{FA} \text{ hay } \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{BZ}}.$$

Ta có đpcm. □

Bài 81. Cho tam giác ABC . M, N nằm trên AB , P, Q nằm trên AC sao cho $\frac{\overline{MN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} = k$.

Chứng minh rằng các điểm chia đoạn nối trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AMP, ANQ, ABC theo cùng một tỉ số là các bộ điểm thẳng hàng.

Lời giải. Gọi X_1, X_2, X_3 lần lượt là trung điểm MP, NQ, BC . Theo định lý ERIQ dễ thấy X_1, X_2, X_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{X_1X_2}}{\overline{X_2X_3}} = k$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác AMP, ANQ, ABC . Ta có $\frac{AG_1}{AX_1} = \frac{AG_2}{AX_2} = \frac{AG_3}{AX_3} = \frac{2}{3}$ nên theo định lý Thales, G_1, G_2, G_3 thẳng hàng $\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{G_2G_3}} = k$.



Mặt khác, gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMP, ANQ, ABC ; X_1, X_2, X_3 lần lượt là hình chiếu của O_1, O_2, O_3 trên AC , Y_1, Y_2, Y_3 lần lượt là hình chiếu của O_1, O_2, O_3 trên AB .

Ta có $X_1X_2 = AX_2 - AX_1 = \frac{1}{2}(AQ - AP) = \frac{1}{2}PQ, X_2X_3 = \frac{1}{2}QC$.

Vậy $\frac{\overline{X_1X_2}}{\overline{X_2X_3}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} = k$.

Tương tự suy ra $\frac{\overline{Y_1Y_2}}{\overline{Y_2Y_3}} = k$.

Chú ý rằng $O_1X_1 \parallel O_2X_2 \parallel O_3X_3, O_1Y_1 \parallel O_2Y_2 \parallel O_3Y_3$. Theo định lý Thales suy ra O_1, O_2, O_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_2O_3}} = k$.

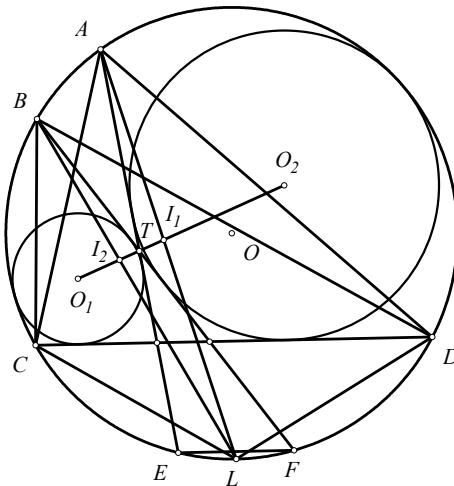
Vậy theo định lý ERIQ, các điểm chia đoạn thẳng O_iG_i theo cùng tỉ số thẳng hàng. \square

Bài 82. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác AHB, AHC .

- a) Chứng minh rằng các đường tròn $(I_1), (I_2), (BC)$ có chung một tiếp tuyến l .
- b) Giả sử l cắt AB, AC lần lượt tại X, Y . Chứng minh rằng đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AXY tiếp xúc với (BC) .

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu 2 bổ đề sau.

Bổ đề 1. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ ngoài nhau và cùng tiếp xúc trong với (O) . Gọi AE, BF là hai tiếp tuyến chung trong của (O_1) và (O_2) sao cho A, B khác phía với E, F bờ O_1O_2 . CD là tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) sao cho CD cùng phía với EF bờ O_1O_2 . Khi đó $CD \parallel EF$.

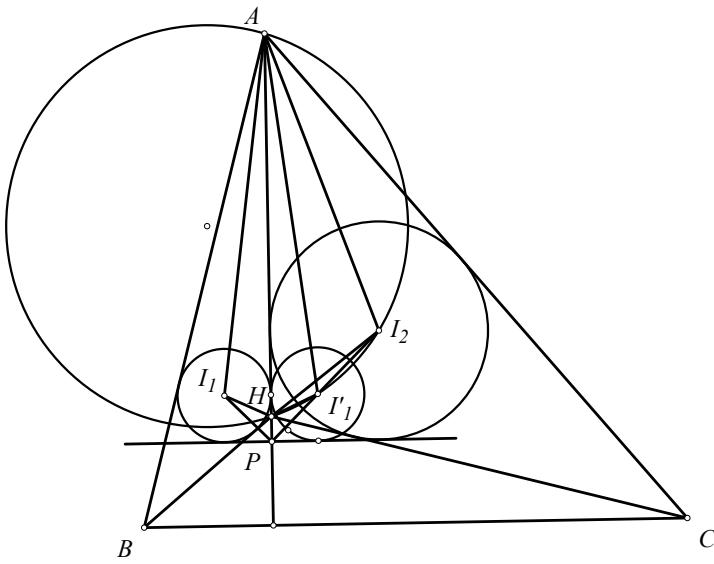


Chứng minh. Gọi L là điểm chính giữa cung CD không chứa A, B . AL, BL cắt O_1O_2 lần lượt tại I_1, I_2 . AE cắt BF tại T .

Áp dụng định lý Sawayama-Thebault suy ra I_1, I_2 lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ACD, BCD . Suy ra $LI_1 = LD = LI_2$. Từ đó $\angle AI_1T = \angle BI_2T$.

Mà $\angle BTI_2 = \angle ATI_1$ nên $\angle I_2BT = \angle I_1AT$ hay $\angle LBF = \angle LAE$. Suy ra L là điểm chính giữa cung EF . Vậy $CD \parallel EF$. \square

Bổ đề 2. Với kí hiệu như bài toán ban đầu, hai đường tròn (I_1) và (I_2) có một tiếp tuyến chung ngoài song song với BC .



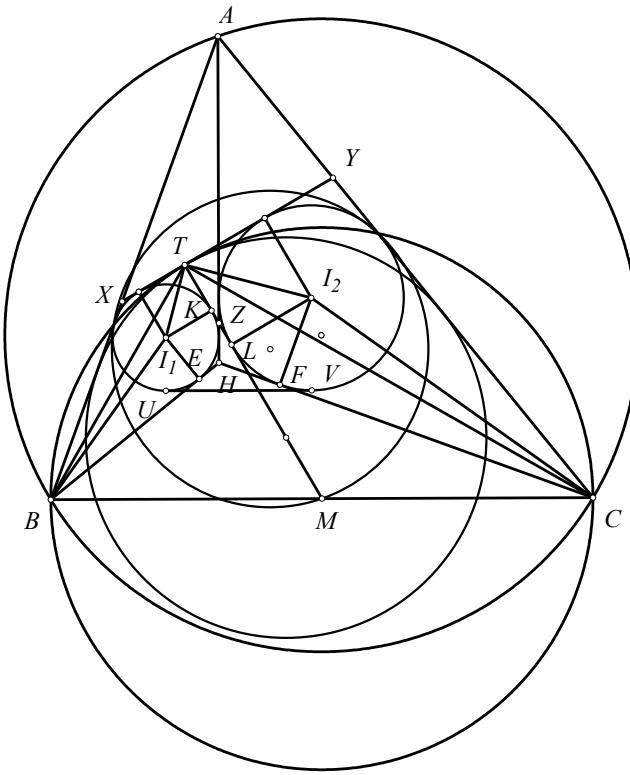
Chứng minh. Gọi (I'_1) là đường tròn đối xứng với (I_1) qua AH . I'_1I_2 cắt AH tại P .

Ta có $\angle AI'_1H = \angle AI_1H = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABH = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACH = \angle AI_2H$. Suy ra A, H, I'_1, I_2 đồng viên.

Từ đó $\angle API'_1 = \angle AI'_1I_2 - \angle PAI'_1 = \angle AHI_2 - \angle I_1AH = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle BAH = 45^\circ$.

Suy ra tiếp tuyến chung ngoài t khác AP của (I'_1) và (I_2) vuông góc với AP hay $t \parallel BC$. Do phép đối xứng trực AH nên cả hai tiếp tuyến chung ngoài của (I'_1) và (I_2) song song với BC . Suy ra tồn tại một tiếp tuyến trùng t . Vậy t là tiếp tuyến chung ngoài song song với BC của (I_1) và (I_2) . \square

Trở lại bài toán.



a) Theo bổ đề 2, gọi U, V lần lượt là các điểm trên $(I_1), (I_2)$ sao cho UV là tiếp tuyến chung ngoài của $(I_1), (I_2)$ và $UV \parallel BC$.

Gọi H_a, M lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và trung điểm BC .

Gọi (E_u) là đường tròn Euler của tam giác ABC . Theo định lý Feuerbach, (E_u) tiếp xúc với (I_1) và (I_2) . Lại có $UV \parallel H_aM$ nên theo bổ đề 1, tiếp tuyến chung trong d khác AH của (I_1) và (I_2) phải đi qua M .

Ta có $UV \perp AH$, do đó tiếp tuyến chung ngoài còn lại l của hai đường tròn này vuông góc với d . Gọi T là giao của d và l . K, L lần lượt là tiếp điểm của (I_1) và (I_2) trên d , E, F lần lượt là tiếp điểm của (I_1) với BH , (I_2) với CH .

Do $d \perp l$ nên các tam giác I_1TK và I_2TL vuông cân.

$$\text{Suy ra } \frac{I_1T}{I_2T} = \frac{I_1K}{I_2L} = \frac{I_1E}{I_2F} = \frac{BI_1}{CI_2}.$$

Bằng cộng góc dễ thấy $BI_1 \perp CI_2$. Lại có $TI_1 \perp TI_2$ nên $\angle TI_1B = \angle TI_2C$. Do đó $\triangle TI_1B \sim \triangle TI_2C$. Suy ra T là tâm của phép vị tự quay biến BI_1 thành CI_2 . Ta thu được $\angle BTC = \angle I_1TI_2 = 90^\circ$ hay $T \in (BC)$.

Do đó l là tiếp tuyến tại T của (BC) . Vậy ba đường tròn $(I_1), (I_2), (BC)$ có chung tiếp tuyến l .

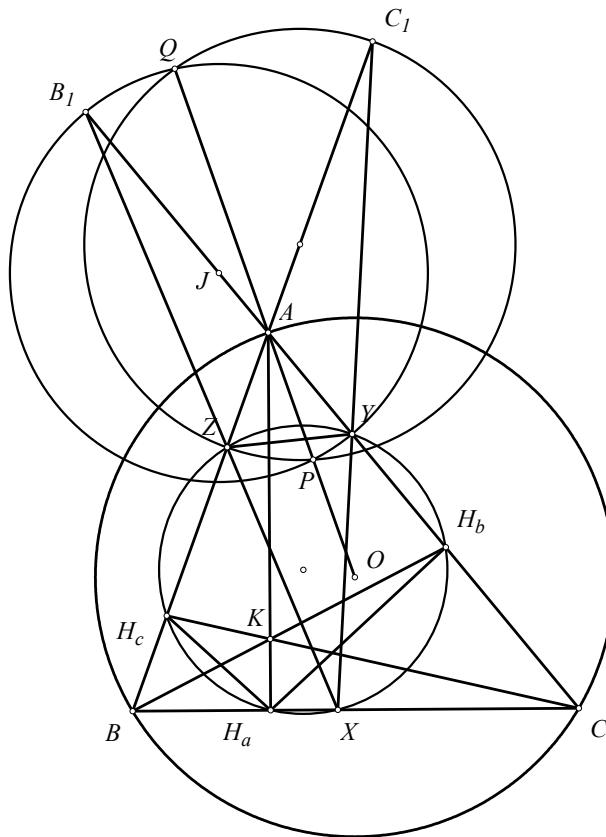
b) Gọi Z là giao của AH với d .

Các tứ giác $AXTZ$ và $AYTZ$ bằng tiếp đường tròn (I_1) và (I_2) nên theo định lý Pythagoras, $AX + XT = AZ + ZT, AY + YT = AZ + ZT$.

Suy ra $AX + XT = AY + YT$, hay AT là đường thẳng chia đôi vi tam giác AXY . Suy ra T là tiếp điểm của đường tròn bằng tiếp góc A của tam giác AXY với XY .

Vậy đường tròn bằng tiếp góc A của tam giác AXY tiếp xúc với (BC) tại T . \square

- Bài 83.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P là điểm bất kì nằm trên AO , X, Y, Z lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB sao cho PX, PY, PZ lần lượt là phân giác của các góc BPC, CPA, APB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Chứng minh rằng H, X, Y, Z đồng viên.



Lời giải. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của YZ với BC , XZ với AC , XY với AB .

Ta có $\frac{XB}{XC} = \frac{PB}{PC}$, $\frac{YC}{YA} = \frac{PC}{PA}$, $\frac{ZA}{ZB} = \frac{PA}{PB}$. Do đó theo định lý Céva ta thu được AX, BY, CZ đồng quy.

Theo tính chất cơ bản của hàng điều hòa suy ra $(XA_1BC) = (YB_1AC) = (ZC_1AB) = -1$.

Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ là các đường tròn Apollonius của đoạn thẳng BC, CA, AB lần lượt ứng với các bộ điểm $(X, A_1), (Y, B_1), (Z, C_1)$ suy ra $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ đồng quy tại P .

Gọi J là trung điểm B_1Y . Ta có $\overline{JY}^2 = \overline{JA} \cdot \overline{JC}$ suy ra ω_b và (O) trực giao nhau. Tương tự suy ra $\mathcal{P}_{O/\omega_a} = \mathcal{P}_{O/\omega_b} = \mathcal{P}_{O/\omega_c} = R^2$. Như vậy 3 đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ nhận OP làm trực đẳng phuong.

Do A thuộc trực đẳng phuong của 3 đường tròn nên $\overline{AC_1} \cdot \overline{AZ} = \overline{AB_1} \cdot \overline{AY}$ hay tứ giác C_1B_1ZY nội tiếp.

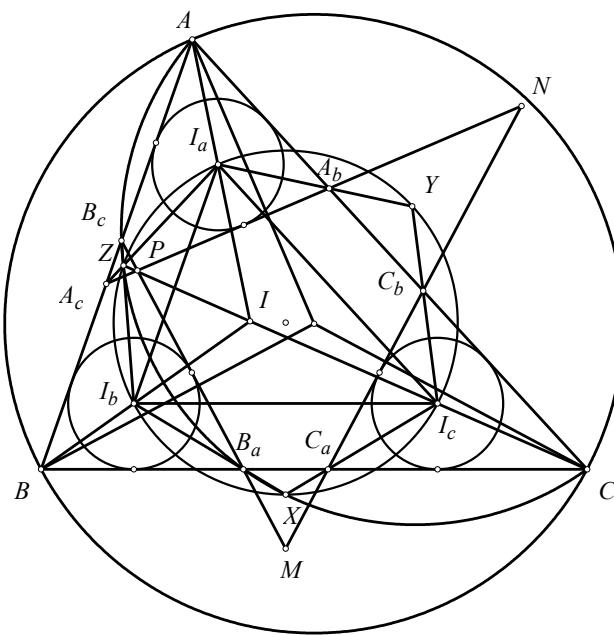
Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là giao điểm thứ hai của (XYZ) với BC, CA, AB . Suy ra $\angle H_c H_a B = \angle BZX = \angle CYX = \angle XH_a H_b$.

Lại có $\overline{AY} \cdot \overline{AH_b} = \overline{AZ} \cdot \overline{AH_c}$ nên $\frac{AY}{AZ} = \frac{AH_c}{AH_b}$. Xét tương tự với đỉnh B, C sau đó nhân

lại ta thu được $\frac{H_aB}{H_aC} \cdot \frac{H_bC}{H_bA} \cdot \frac{H_cA}{H_cB} = 1$. Suy ra AH_a, BH_b, CH_c đồng quy. Mà BC là phân giác ngoài $\angle H_bH_aH_c$ và $H_a(H_bH_cAB) = -1$ nên $AH_a \perp BC$.

Vậy $H_a \equiv H$ hay H, X, Y, Z đồng vien. \square

- Bài 84.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi $(I_a), (I_b), (I_c)$ là các đường tròn có bán kính bằng nhau và lần lượt tiếp xúc với cặp cạnh $(AB, AC), (BA, BC), (CA, CB)$. Gọi d_a là tiếp tuyến của (I_a) sao cho $d_a \perp AO$ và I_a nằm khác phía với B, C bờ là đường thẳng d_a . d_a cắt AC, AB lần lượt tại A_b, A_c . Tương tự ta xác định B_a, B_c, C_a, C_b . Các đường tròn $(BCA_bA_c), (CAB_cB_a), (ABC_aC_b)$ cắt nhau tại X, Y, Z . Chứng minh rằng I_a, I_b, I_c, X, Y, Z đồng vien.



Lời giải. Tứ giác BCA_bA_c nội tiếp do d_a là đường đối song ứng với BC của tam giác ABC .

Gọi MNP là tam giác tao bởi giao điểm của $d_a, d_b, d_c; X', Y', Z'$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác $MB_aC_a, NA_bC_b, PB_cA_c$.

Ta có $\angle BB_cB_a = \angle AA_cA_b = \angle ACB$ nên $\angle A_cPB_c = 180^\circ - 2\angle ACB$.

Từ đó $\angle I_aZ'I_b = \angle B_cZ'C_a = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A_cPB_c = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle I_aI_cI_b$.

Suy ra $Z' \in (I_aI_bI_c)$.

Ta có $\angle Z'I_aI_b = \angle Z'A_cB_c = \angle Z'B_cA_c = \angle Z'I_bI_a$. Suy ra $Z'I_a = Z'I_b$ hay I_cZ' là phân giác của $\angle I_aI_cI_b$. Suy ra Z', I_c, C thẳng hàng.

Suy ra $\angle Z'B_cB_a = \angle Z'CB_a$ hay $Z' \in (ACB_aB_c)$. Tương tự $Z' \in (BA_cA_bC)$ hay $Z' \equiv Z$. Chứng minh tương tự suy ra I_a, I_b, I_c, X, Y, Z đồng vien. \square

- Bài 85.** (*Mathley No.1 2011*) Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ đôi một cắt nhau; mỗi đường tròn cắt hai đường tròn kia tại hai điểm phân biệt. Gọi (X_1) là đường tròn tiếp xúc ngoài

với (O_1) và tiếp xúc trong với các đường tròn $(O_2), (O_3)$; tương tự xác định được các đường tròn $(X_2), (X_3)$. Gọi (Y_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (O_1) và tiếp xúc ngoài với các đường tròn $(O_2), (O_3)$, tương tự xác định được các đường tròn $(Y_2), (Y_3)$. Gọi $(Z_1), (Z_2)$ là hai đường tròn cùng tiếp xúc trong với cả ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Chứng minh rằng $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, Z_1Z_2$ đồng quy.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu và chứng minh bở đề sau

Bở đề. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Gọi (X) và (Z) là hai đường tròn tiếp xúc trong với cả hai đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại cặp điểm N, M và T, R ((X) nằm trong và (Z) nằm ngoài hai đường tròn). Gọi (Y) là đường tròn tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại Q, P . Gọi $(A), (B)$ lần lượt là đường tròn tiếp xúc ngoài với (O_1) và tiếp xúc trong với (O_2) lần lượt tại C, D ; tiếp xúc trong với (O_1) và tiếp xúc ngoài với (O_2) lần lượt tại E, F . Khi đó các bộ ba đường thẳng $XY, MP, NQ; XZ, MR, TN$ và AB, CE, DF đồng quy tại một điểm nằm trên trực đường phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

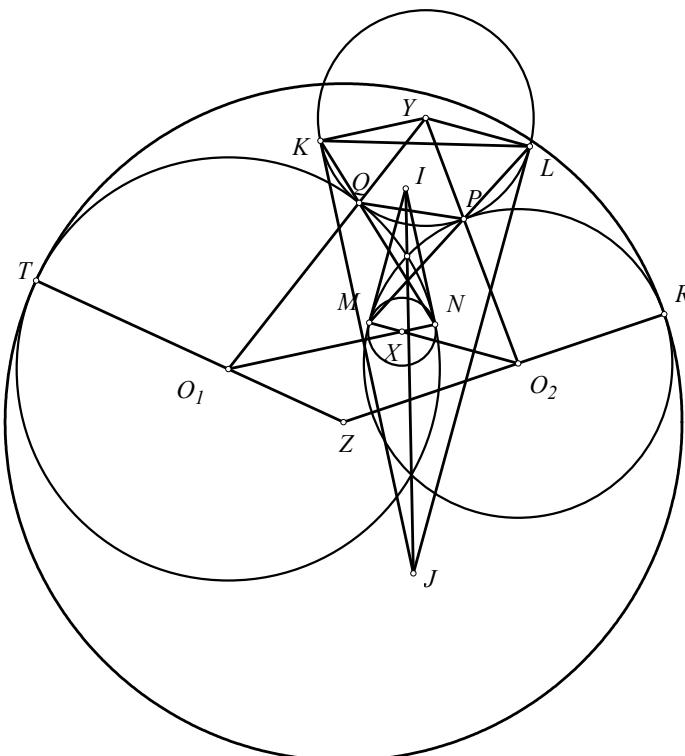
Chứng minh. Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của NQ, MP với (Y) . Gọi I, J lần lượt là giao điểm của hai tiếp tuyến tại M, N của (X) , tại K, L của (Y) .

Do các tam giác YPL và O_2MP cân ta có biến đổi góc sau

$$(LY, LM) \equiv (LY, LP) \equiv (PL, PY) \equiv (PM, PO_2) \equiv (MO_2, MP) \equiv (MO_2, ML) \pmod{\pi}$$

Suy ra $YL \parallel MO_2$.

Tương tự, $YK \parallel NO_1$. Do đó $IM \parallel JL$ (cùng vuông góc MO_2), $IN \parallel JK$ (cùng vuông góc NO_1). Mà hai tam giác IMN và JLK lần lượt cân tại I và J nên giao điểm của NK và LM là tâm vị tự của hai tam giác và cũng là tâm vị tự của hai đường tròn (X) và (Y) .



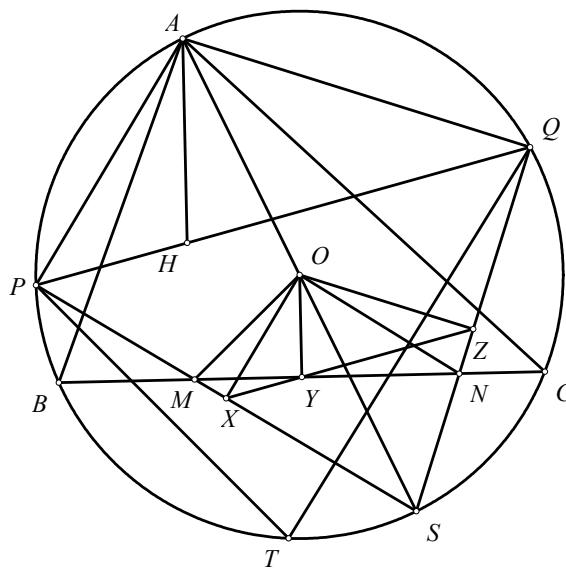
Ta có $MN \parallel KL$ và tứ giác $KLPQ$ nội tiếp nên tứ giác $MNPQ$ nội tiếp. Gọi S là giao của MP và NQ thì $\overline{SM} \cdot \overline{SP} = \overline{SN} \cdot \overline{SQ}$. Từ đó S nằm trên trực đường phong của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

Vậy XY, MP, NQ đồng quy tại S nằm trên trực đường phong của hai đường tròn (O_1) và (O_2)

Chứng minh tương tự với bộ ba XZ, MR, NT và AB, CE, DF . Ta có điều phải chứng minh. \square

Từ bở đê trên ta thấy tâm vị tự của (X_1) và (Y_1) nằm trên trực đường phong của (O_2) và (O_3) và nằm trên trực đường phong của (O_1) và (O_2) . Do đó X_1Y_1 đi qua tâm đường phong của ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Tương tự với X_2Y_2, X_3Y_3, Z_1Z_2 . Ta có điều phải chứng minh. \square

Bài 86. (*Mathley No.2 2011*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Một đường thẳng bất kì đi qua H cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q . Qua P, Q lần lượt kẻ các đường vuông góc với AP, AQ , các đường này cắt đường thẳng BC lần lượt tại hai điểm M, N . Chứng minh rằng đường thẳng qua P và vuông góc với OM và đường thẳng qua Q và vuông góc với ON cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .



Lời giải. (*Lê Bích Ngọc HS K46, THPT chuyên KHTN*)

Gọi đường thẳng qua P và vuông góc với OM và đường thẳng qua Q và vuông góc với ON cắt nhau tại T . Gọi AS là đường kính của (O) . Gọi X, Y, Z là hình chiếu của O lên PS, BC, SQ . Dễ thấy $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ mà P, H, Q thẳng hàng suy ra X, Y, Z thẳng hàng. Theo bài toán đảo của đường thẳng Simson suy ra O, M, N, S đồng viên. Từ đó ta có biến đổi góc định hướng như sau

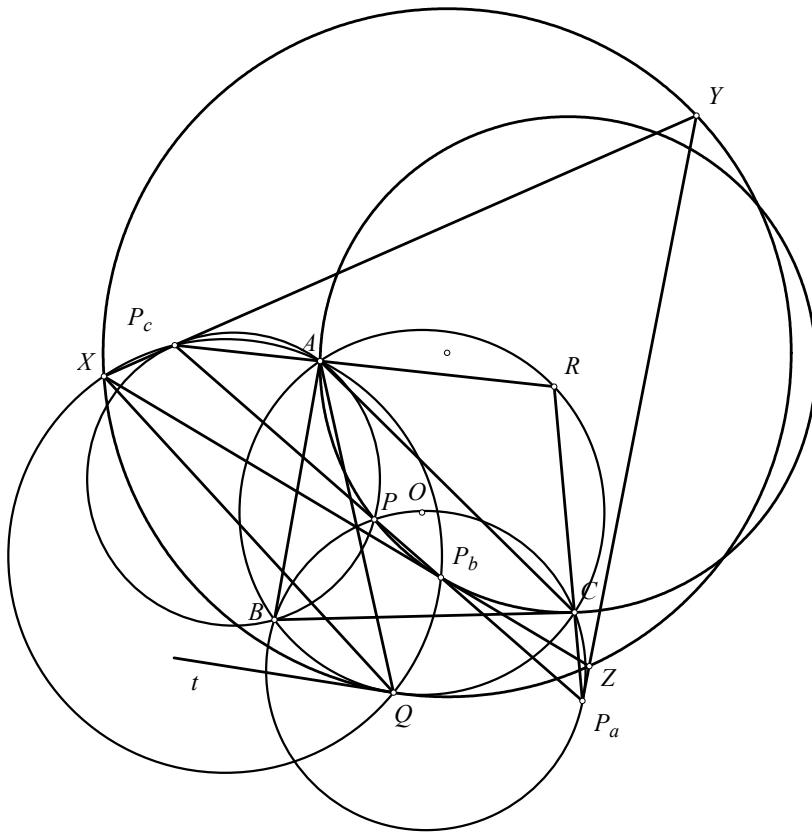
$$\begin{aligned} (TP, TQ) &\equiv (OM, ON) \pmod{\pi} \quad (\text{Do } PT \perp OM, QT \perp ON) \\ &\equiv (SM, SN) \pmod{\pi} \quad (\text{Do } O, M, N, S \text{ đồng viên}) \\ &\equiv (SP, SQ) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Từ đó T, S, P, Q đồng viên hay T thuộc (O) . \square

Bài 87. (*Mathley No.3 2011*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Một đường tròn (O', R') tiếp xúc trong với (O) tại I sao cho $R < R'$. P là một điểm bất kì trên (O) . Các tia PA, PB, PC lần lượt cắt (O') tại A_1, B_1, C_1 . Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác tạo bởi các giao điểm của các đường thẳng đối xứng với B_1C_1 qua BC , C_1A_1 qua CA , A_1B_1 qua AB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ cũng tiếp xúc với (O) .

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề sau.

Bổ đề (*Trần Quang Hùng, GV THPT chuyên KHTN*). Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì trên mặt phẳng. Một đường thẳng qua P cắt các đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại P_a, P_b, P_c . Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là tiếp tuyến của $(PBC), (PCA), (PAB)$ tại P_a, P_b, P_c . Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng l_a, l_b, l_c tiếp xúc với (ABC) .



Chứng minh. Gọi XYZ là tam giác tạo bởi các giao điểm của l_a, l_b, l_c , Q là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $XYZP_aP_bP_c$, R là giao của AP_c và CP_a .

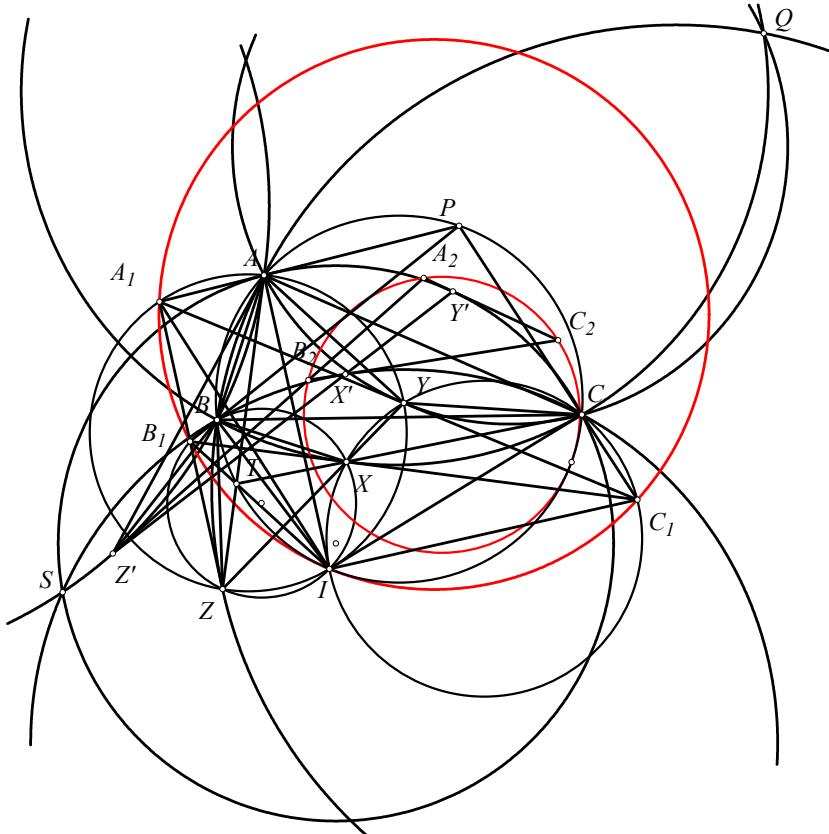
Ta có biến đổi góc định hướng như sau:

$(P_cA, P_cX) \equiv (P_cA, P_cY) \equiv (PA, PP_c) \equiv (CA, CP_b) \equiv (P_bA, P_bX) \pmod{\pi}$ suy ra $A \in (XP_bP_c)$. Tương tự với $B \in (YP_cP_a), C \in (ZP_aP_b)$. Ta sẽ chứng minh rằng Q nằm trên (ABC) , thật vậy, ta có biến đổi góc $(AP_c, AB) + (CB, CP_a) \equiv (PP_c, PB) + (PB, PP_a) \equiv (PP_b, PP_a) \pmod{\pi}$ nên A, B, C, R cùng thuộc một đường tròn. Từ đó $(QA, QC) \equiv (QA, QP_b) + (QP_b, QC) \equiv (P_cA, P_cP_b) + (P_aP_b, P_aC) \equiv (RA, RC) \pmod{\pi}$ suy ra $Q \in (ABC)$.

Dựng tiếp tuyến Qt của (XYZ) . Ta sẽ chứng minh Qt cũng là tiếp tuyến của (ABC) . Thật vậy, Qt tiếp xúc (ABC) khi và chỉ khi $(Qt, QA) \equiv (CQ, CA) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (Qt, QX) + (QX, QA) \equiv (CQ, CP_b) + (CP_b, CA) \pmod{\pi}$ (*).

Mà $(Qt, QX) \equiv (ZQ, ZX) \equiv (ZQ, ZP_b) \equiv (CQ, CP_b)$, $(QX, QA) \equiv (P_b X, P_b A) \equiv (CP_b, CA) \pmod{\pi}$ nên (*) đúng. Ta có điều phải chứng minh. \square

Trở lại bài toán.



Gọi Z là giao điểm của (IBB_1) với A_1B_1 . Tương tự ta xác định X, Y . Ta có $(IZ, B_1Z) \equiv (IB, B_1B) \equiv (AI, AP) \pmod{\pi}$ suy ra $Z \in (A_1AI) \pmod{\pi}$. Chứng minh tương tự với X, Y .

Mặt khác, $(ZI, ZX) \equiv (B_1I, B_1X) \equiv (A_1I, A_1C_1) \equiv (A_1I, A_1Y) \equiv (ZI, ZY) \pmod{\pi}$ suy ra X, Y, Z thẳng hàng. Gọi T là giao của IB_1 và CX . Kẻ tiếp tuyến It của (O) . Ta có $(It, IB_1) \equiv (C_1I, C_1B_1) \equiv (C_1I, C_1X) \equiv (CI, CX) \equiv (CI, CT) \pmod{\pi}$. Suy ra It là tiếp tuyến của (ITC) . Từ đó $T \in (O)$. Ta thu được $(XB_1, XB) \equiv (IB_1, IB) \equiv (CX, CB) \pmod{\pi}$, suy ra B_1C_1 là tiếp tuyến của (BCX) . Tương tự với C_1A_1, A_1B_1 .

Gọi Q là giao điểm của (XBC) với đường thẳng qua X, Y, Z .

Ta có $(QX, QB) \equiv (XB_1, XB) \equiv (ZB_1, ZB) \equiv (AZ, AB) \pmod{\pi}$ (do A_1B_1 là tiếp tuyến của (ABZ)). Vậy $Q \in (ABZ)$. Tương tự ta thu được $(ABZ), (BCX), (ACY)$ đồng quy tại Q .

Gọi $(O_a), (O_b), (O_c)$ lần lượt là các đường tròn đối xứng với $(BCX), (ACY), (ABZ)$ qua BC, CA, AB, X', Y', Z' là các điểm đối xứng với X, Y, Z qua BC, CA, AB . Do A_1B_1 ,

B_1C_1, C_1A_1 lần lượt là các tiếp tuyến của $(BCX), (ACY), (ABZ)$ nên theo phép đối xứng ta suy ra A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 lần lượt là tiếp tuyến của $(O_a), (O_b), (O_c)$. X, Y, Z lần lượt nằm trên B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 nên X', Y', Z' lần lượt nằm trên B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 .

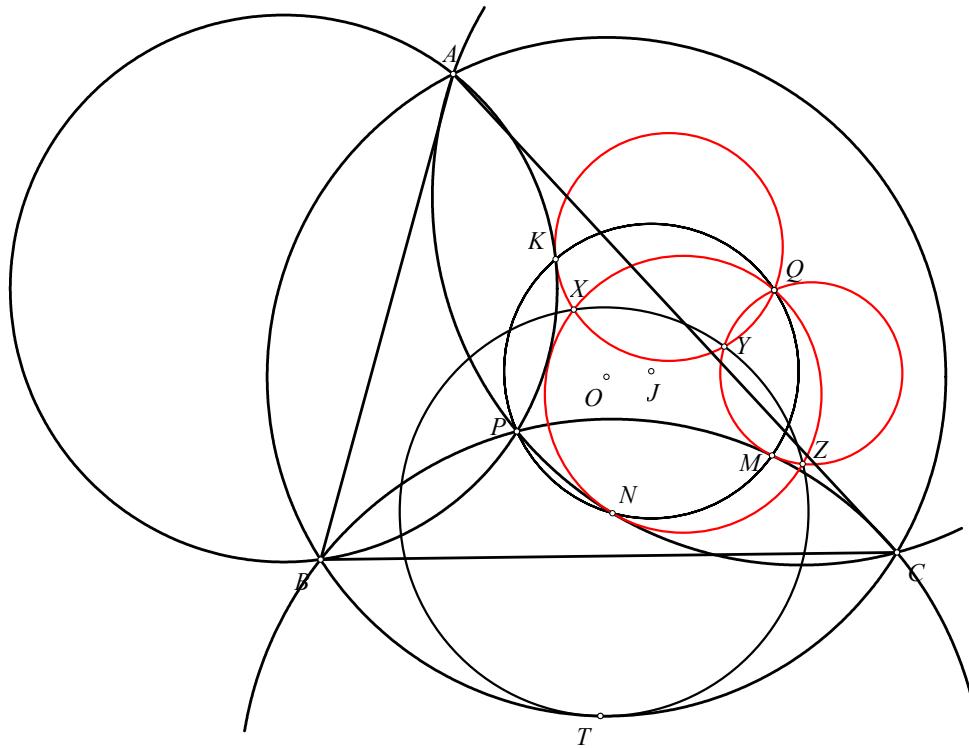
Gọi S là giao điểm của (O_a) và (O_b) .

Ta có: $(SB, SA) \equiv (SB, SC) + (SC, SA) \equiv (X'B, X'C) + (Y'C, Y'A) \equiv (XB, XC) + (YC, YA) \equiv (QB, QC) + (QC, QA) \equiv (QB, QA) \equiv (Z'B, Z'A) \pmod{\pi}$. Vậy $(O_a), (O_b), (O_c)$ đồng quy tại S . Ta có biến đổi góc

$(SC, SX') \equiv (BC, BX') \equiv (BX, BC) \equiv (BX, BI) + (BI, BC) \equiv (ZX, ZI) + (AI, AC) \equiv (AY, AI) + (AI, AC) \equiv (AY, AC) \equiv (AC, AY') \equiv (SC, SY') \pmod{\pi}$. Vậy S, X', Y', Z' thẳng hàng. Tương tự suy ra S, X', Y', Z' thẳng hàng.

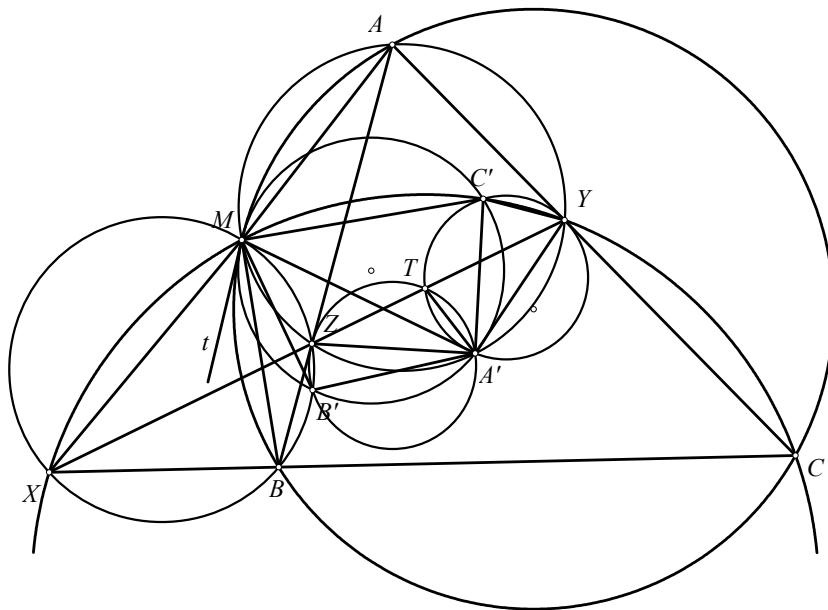
Từ đó áp dụng bở đê trên ta suy ra điều phải chứng minh. \square

Bài 88. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P và Q là hai điểm bất kì trong mặt phẳng. Một đường tròn bất kì qua P, Q cắt $(BPC), (CPA), (APB)$ lần lượt tại M, N, K khác P . Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ là các đường tròn qua Q và tiếp xúc với $(BPC), (CPA), (APB)$ lần lượt tại M, N, K . $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ cắt nhau lần thứ hai tại X, Y, Z . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O) .



Lời giải. Sử dụng phép nghịch đảo tâm P phương tích bất kì, ta chuyển bài toán về dạng sau.

Bài toán. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng d bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . T là điểm bất kì nằm trên d . Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt là các đường tròn qua T và tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z . $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ cắt nhau lần thứ hai tại các điểm A', B', C' . Chứng minh rằng $(A'B'C')$ tiếp xúc với (O) .



Chứng minh.

Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BZYCAX$.

Ta có $\angle Y A' Z = \angle Y A' T + \angle T A' Z = \angle A Y Z + \angle A Z Y = 180^\circ - \angle Y A Z$.

Suy ra $A' \in (AYZ)$. Tương tự $B' \in (BXZ)$.

Ta có $\angle B' A' M = \angle B' A' Z + \angle Z A' M = \angle B Z B' + \angle B A Z = \angle B M B' + \angle M A B$.

Chứng minh tương tự, $\angle B' C' M = \angle B M B' + \angle M A C$. Suy ra $\angle B' A' M = \angle B' C' M$.
Suy ra $M \in (A'B'C')$.

Kẻ tiếp tuyến Mt của (O) .

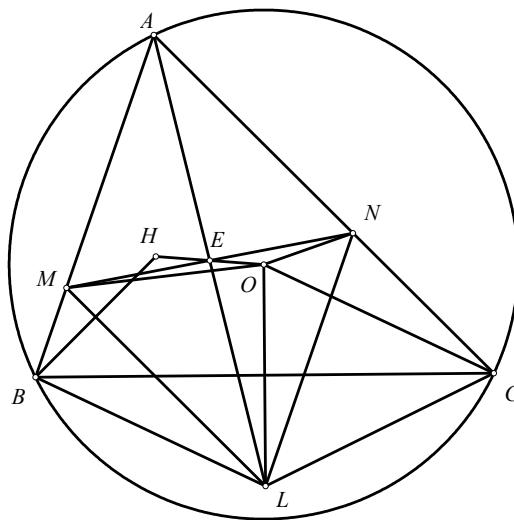
Ta có $\angle t M B' = \angle t M B + \angle B M B' = \angle M A B + \angle B M B' = \angle M A' B'$. Suy ra Mt đồng thời là tiếp tuyến của $(A'B'C')$.

Vậy $(A'B'C')$ tiếp xúc với (O) tại M . □

Bài 89. (*Mathley No.4 2011*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . E là tâm Euler. Qua E kẻ các đường thẳng MN song song với BC , PQ song song với AC , KL song song với AB ($K, P \in BC$, $N, L \in AC$, $M, Q \in AB$). Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác ALQ , BMK , CPN , ABC đồng quy.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu và chứng minh một bổ đề sau.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , E là tâm Euler. M, N là hai điểm trên AB, AC sao cho E là trung điểm MN . Chứng minh rằng O nằm trên đường thẳng Euler của tam giác AMN .

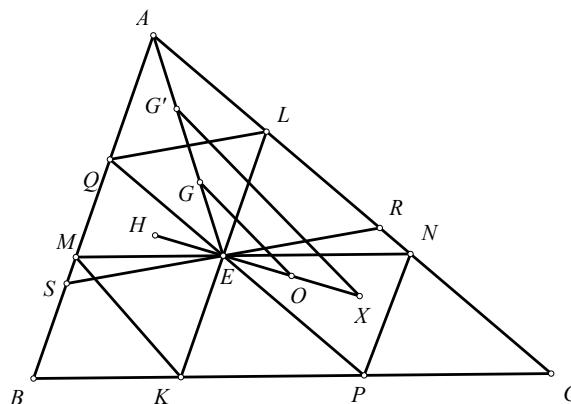


Chứng minh. (Nguyễn Tuấn Hải Đăng, HS K47 THPT chuyên KHTN)

Gọi L là điểm đối xứng với A qua E . Suy ra L đối xứng với O qua BC .

Ta có $AMLN$ là hình bình hành nên $\angle LNC = \angle BAC = \angle LOC$. Suy ra tứ giác $ONCL$ nội tiếp, từ đó $\angle ANO = \angle OLC = \angle LOC = \angle BAC$. Tương tự ta thu được $\angle ONA = \angle NAM = \angle AMO$. Theo bổ đề của bài 63, O nằm trên đường thẳng Euler của tam giác AMN . \square

Trở lại bài toán.



Trên AB, AC lấy các điểm S, R sao cho E là trung điểm SR . Theo bổ đề trên, O nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ASR .

Dễ thấy tam giác ELQ là tam giác trung tuyến của tam giác ARS nên đường thẳng Euler của các tam giác ELQ và ARS trùng nhau. Gọi G là trọng tâm tam giác ELQ thì GO là đường thẳng Euler của tam giác ELQ .

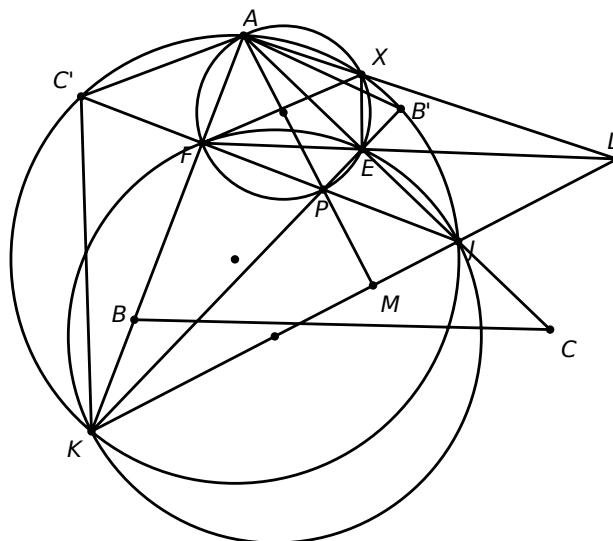
Gọi G' là trọng tâm tam giác ALQ thì G' đối xứng với G qua trung điểm LQ , từ đó G là trung điểm $G'E$.

Do hai tam giác ALQ và ELQ đối xứng nhau qua trung điểm LQ nên đường thẳng Euler của hai tam giác song song với nhau. Gọi X là điểm đối xứng với E qua O thì $G'X \parallel GO$ hay $G'X$ là đường thẳng Euler của tam giác ALQ .

Chứng minh tương tự suy ra đường thẳng Euler của các tam giác ALQ , BMK , CPN , ABC đồng quy tại điểm đối xứng với E qua O . \square

Bài 90. (*Mathley No.5 2012*) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi P là một điểm tùy ý trong mặt phẳng tam giác ABC . Các điểm A', B', C' lần lượt là đối xứng của P qua các đường thẳng BC, CA, AB ; X là giao điểm, khác A , của đường tròn đường kính AP và đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C'$. Các điểm Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh rằng năm đường tròn $(O), (AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$, (XYZ) có một điểm chung.

Lời giải. Bổ đề 1. Cho tam giác ABC , P là điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác ABC . Gọi B', C' lần lượt là điểm đối xứng với P qua AC, AB ; E, F lần lượt là hình chiếu của P trên AC, AB . Gọi X là giao điểm khác A của hai đường tròn $(AB'C')$ và đường tròn đường kính AP . Khi đó tứ giác $PEXF$ điều hòa.



Chứng minh. Gọi J là giao điểm của FP và AC , K là giao điểm của EP và AB .

Ta sử dụng góc định hướng:

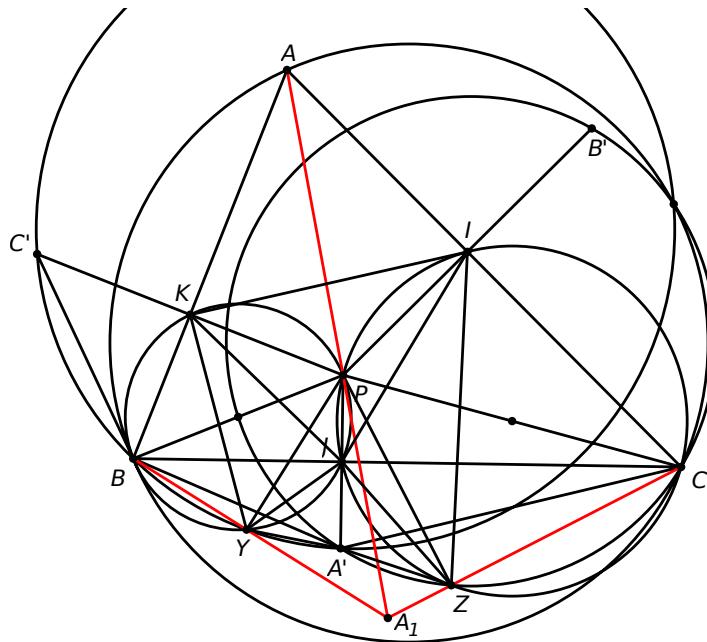
$$(AB', AC') \equiv 2(AE, AF) \equiv (KB', KC') \pmod{\pi} \text{ nêu } K \in (AB'C').$$

Tương tự $J \in (AB'C')$.

Xét ba đường tròn (AEF) , (AKJ) và đường tròn đường kính KJ có ba trực $\overline{d_1}$ $\overline{d_2}$ $\overline{d_3}$ phương là AX , EF , KJ nên chúng đồng quy tại điểm L .

Gọi M là giao điểm của AP với KJ thì $A(XPEF) = (LMJK) = -1$ nên tứ giác $PExF$ điều hòa. Ta có điều phải chứng minh. \square

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC , P là điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB . Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn $(BA'C')$ và đường tròn đường kính BP , $(CA'B')$ và đường tròn đường kính PC . Khi đó AP, BY, CZ đồng quy.



Chứng minh. Gọi J, I, K lần lượt là hình chiếu của P trên BC, AC, AB .

Áp dụng định lý Ceva dạng sin cho tam giác ABC ta có AP, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin(AB, AP)}{\sin(AP, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CZ)}{\sin(CZ, CB)} \cdot \frac{\sin(BY, BC)}{\sin(BY, BA)} = 1$$

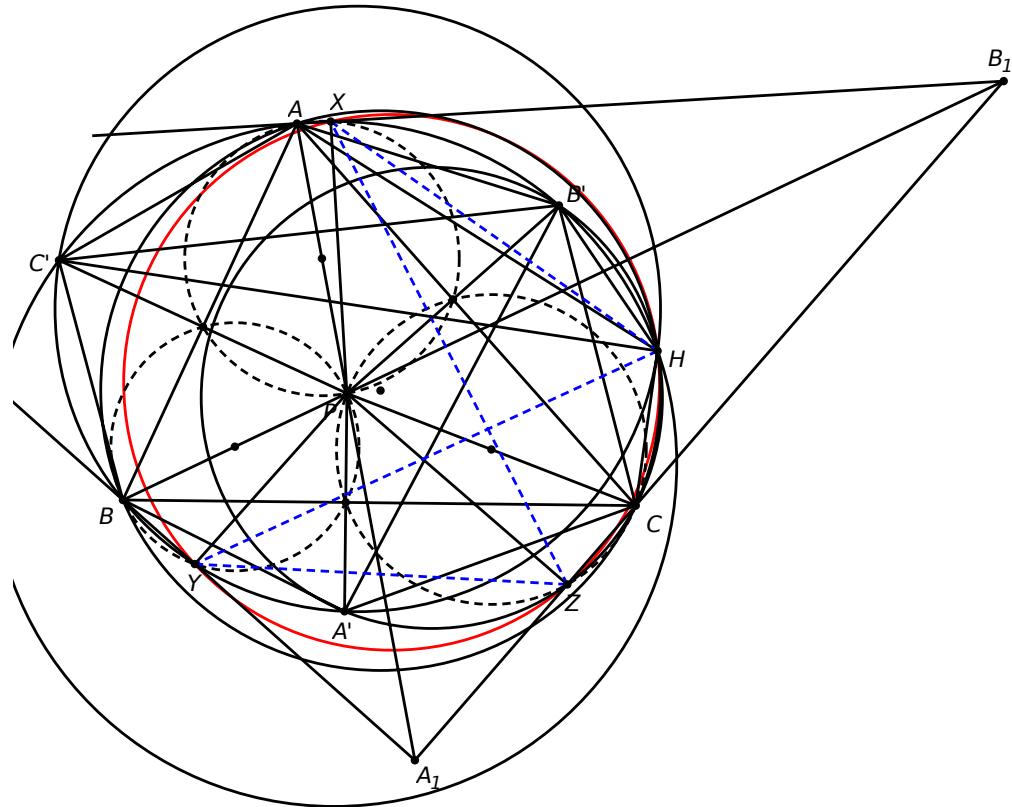
Ta có

$$\frac{\sin(AB, AP)}{\sin(AP, AC)} = \frac{KP}{IP}, \frac{\sin(CA, CZ)}{\sin(CZ, CB)} = \frac{IZ}{JZ}, \frac{\sin(BY, BC)}{\sin(BY, BA)} = \frac{JY}{KY}. \quad (3.1)$$

$$\text{Do đó ta cần chứng minh } \frac{KP}{IP} \cdot \frac{IZ}{JZ} \cdot \frac{JY}{KY} = 1$$

Theo bở đề 1, các tứ giác $KPBY$ và $IPJZ$ điều hòa nên $\frac{KP}{PJ} = \frac{YK}{YJ}$, $\frac{IP}{PJ} = \frac{IZ}{JZ}$. Từ đó suy ra (3.1) luôn đúng. Ta có điều phải chứng minh. \square

Trở lại bài toán.



Gọi H là giao điểm của $(AB'C')$ và $(CA'B')$. Ta chứng minh $H \in (O)$.

Thật vậy, $(HC, HA) \equiv (HC, HB') + (HB', HA) \equiv (A'C, A'B') + (C'B', C'A) \pmod{\pi}$
tương đương với $\frac{\pi}{2} - (CA, CB) + \frac{\pi}{2} - (AB, AC) \equiv (BC, BA) \pmod{\pi}$

Do đó $H \in (O)$. Chứng minh tương tự suy ra bốn đường tròn (O) , $(AB'C')$, $(BC'A')$, $(CA'B')$ đồng quy tại điểm H .

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao của BY và CZ, CZ và AX, AX và BY .

Xét $(XZ, XH) \equiv (XZ, XA) + (XA, XH) \pmod{\pi}$

$(YZ, YH) \equiv (YZ, YB) + (YB, YH) \pmod{\pi}$

Do đó để chứng minh $H \in (XYZ)$ ta cần chứng minh $(XZ, XH) \equiv (YZ, YH) \pmod{\pi}$,
khi và chỉ khi $(XZ, XA) + (XA, XH) \equiv (YZ, YB) + (YB, YH) \pmod{\pi}$

Hay $(XA, XH) + (YH, YB) \equiv (YZ, YB) + (XA, XZ) \pmod{\pi}$

Tương đương với $(C'A, C'H) + (C'H, C'B) \equiv (YZ, YA_1) + (XB_1, XZ) \pmod{\pi}$.

Chú ý rằng các tứ giác PYA_1Z, PXB_1Z nội tiếp ta thu được: $(YZ, YA_1) + (XB_1, XZ) \equiv (PZ, PA_1) + (PB_1, PZ) \equiv (PB_1, PA_1) \pmod{\pi}$

Do đó ta cần chứng minh $(C'A, C'H) + (C'H, C'B) \equiv (PB_1, PA_1) \pmod{\pi}$,

hay $(C'A, C'B) \equiv (PB_1, PA_1) \pmod{\pi}$.

Điều này tương đương với $(PA, PB) \equiv (PB_1, PA_1) \pmod{\pi}$ (do P và C' đối xứng nhau qua AB).

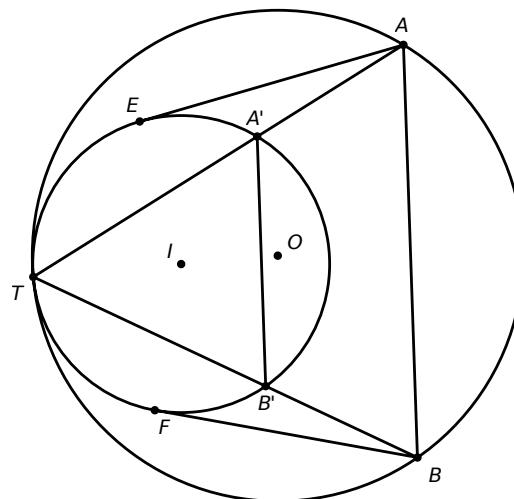
Điều này hiển nhiên đúng vì theo bổ đề 2 thì A, P, A_1 thẳng hàng, B, P, B_1 thẳng hàng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. \square

Bài 91. (*Mathley No.6 2012*) Cho AB là một dây cung bất kì của đường tròn (O) . Hai đường tròn (X) và (Y) nằm cùng phía với dây cung AB sao cho chúng cùng tiếp xúc trong với (O) và lần lượt tiếp xúc với AB tại $C, D; C$ nằm giữa A và D). Gọi H là giao điểm của XY và AB . M là điểm chính giữa cung AB không chứa $(X), (Y)$. Biết HM cắt (O) lần thứ hai tại I . Gọi IX, IY lần lượt giao AB tại K, J . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IKJ tiếp xúc với (O) .

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu và chứng minh một bổ đề

Bổ đề. Cho hai điểm A, B bất kì nằm trên đường tròn (O, R) . Một đường tròn (I, r) tiếp xúc trong với (O) tại $T(r < R)$. Gọi AE, BF lần lượt là tiếp tuyến kẻ từ A, B tới (I) . Khi đó $\frac{TA}{EA} = \frac{TB}{FB}$.



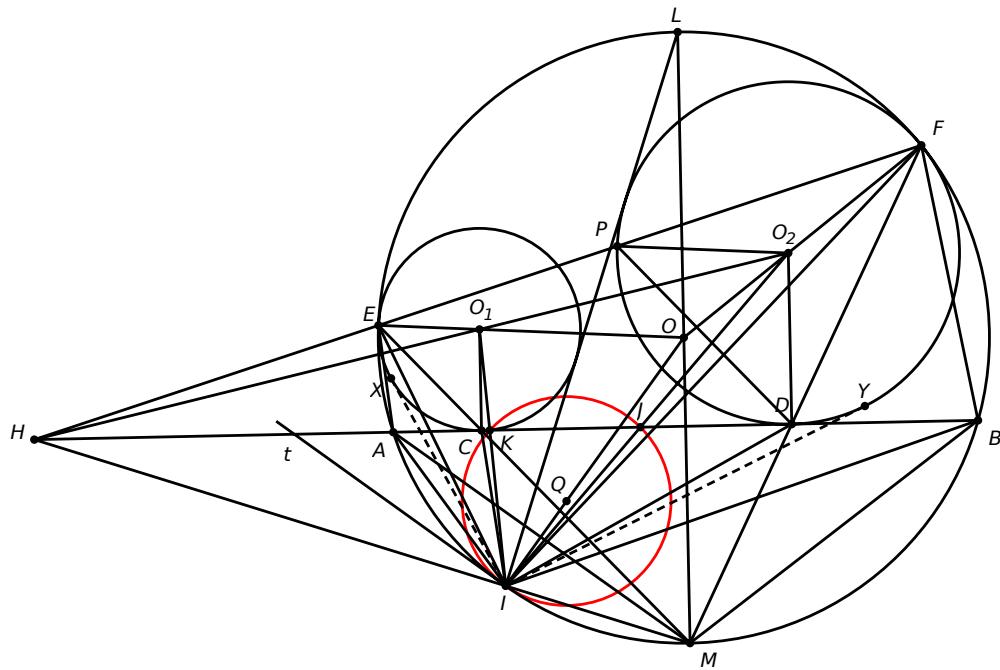
Chứng minh. Gọi A', B' lần lượt là giao điểm của AT, BT với (I) . Dễ dàng chứng minh được $AB \parallel A'B'$. Do đó

$$\left(\frac{AE}{TA'}\right)^2 = \frac{AA' \cdot AT}{A'T \cdot A'T} = \frac{BB'}{B'T} \cdot \frac{BT}{B'T} = \left(\frac{BF}{TB'}\right)^2.$$

Suy ra $\frac{AE}{TA'} = \frac{BF}{TB'}$ hay $\frac{AE}{BF} = \frac{TA'}{TB'} = \frac{TA}{TB}$.

Vậy $\frac{TA}{EA} = \frac{TB}{FB}$. Đó là điều phải chứng minh. □

Trở lại bài toán.



Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) với (O) . EF cắt (O_2) lần thứ hai tại P . Ta có $\angle OEF = \angle OFE = \angle O_2PF$. Do đó $O_1E \parallel O_2P$. Ta suy ra EF, O_1O_2, BC đồng quy tại tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O_1) và (O_2) . Kẻ tiếp tuyến It của (IKJ) . Ta có $\angle tIA + \angle AIK = \angle tIK = \angle KJI = \angle ABI + \angle JIB$.

Do đó It là tiếp tuyến của (O) khi và chỉ khi $\angle AIK = \angle JIB$ (1).

Mặt khác, từ I lần lượt kẻ các tiếp tuyến IX tới (O_1) , IY tới (O_2) .

Theo bô đê trên, $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$ nên EC là phân giác của góc AEB hay EC đi qua M . Tương tự, FD đi qua M .

Lại theo bô đê, $\frac{IX}{IE} = \frac{AC}{AE}$. Mà $\angle MAC = \angle MEB = \angleMEA$ nên hai tam giác MAC và MEA đồng dạng. Ta thu được $\frac{AC}{AE} = \frac{AM}{EM}$. Do đó $\frac{IX}{IE} = \frac{AM}{EM}$.

Tương tự,

$$\frac{IY}{IF} = \frac{BM}{FM}. \quad (2)$$

Vậy $\frac{IX}{IY} = \frac{IE}{IF} \cdot \frac{AM}{EM} \cdot \frac{FM}{BM} = \frac{IE}{IF} \cdot \frac{FM}{EM}$. Mặt khác, ta chứng minh được $CE \parallel DP$ nên $\angle ECH = \angle PDH = \angle PFD$, suy ra tứ giác $ECDF$ nội tiếp.

Vậy $HC \cdot HD = HE \cdot HF = HI \cdot HM$, suy ra tứ giác $CIMD$ nội tiếp.

Từ đó $\angle IEC = \angle IFD$, $\angle ICM = \angle IDM$. Ta thu được $\Delta ECI \sim \Delta FDI$.

Từ tính đồng dạng của hai tam giác HEA và HDF ta suy ra

$$\frac{IE}{IF} = \frac{CE}{DF} = \frac{HE}{HD}. \quad (3)$$

Ta có

$$\frac{EM}{FM} = \frac{\sin \angle EFD}{\sin \angle FEC} = \frac{\sin \angle ECH}{\sin \angle HEC} = \frac{HE}{HC}. \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra $\frac{IX}{IY} = \frac{HE}{HD} \cdot \frac{HC}{HE} = \frac{HC}{HD} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{O_1X}{O_2Y}$.

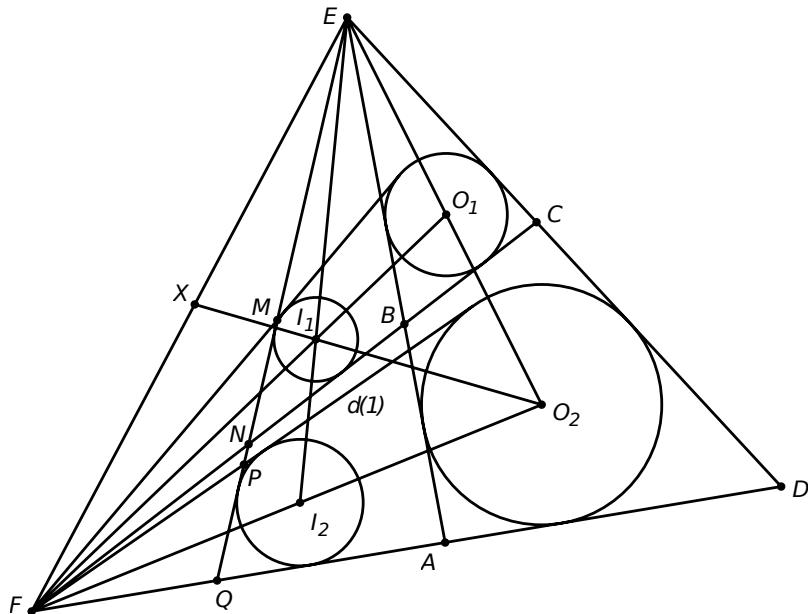
Từ đó $\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{HO_1}{HO_2}$.

Gọi L là điểm chính giữa cung AB chứa $(O_1), (O_2)$ thì $\angle LIM = 90^\circ$ nên IL là phân giác trong của góc O_1IO_2 . Tóm lại (1) đúng. Ta có điều phải chứng minh. \square

Bài 92. (*Mathley No. 7 2012*) Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. AB giao CD tại E , AD giao BC tại F . Hai đường thẳng bất kì qua E lần lượt cắt AD, BC tại M, N, P, Q ($M, N \in AD, P, Q \in BC$). Hai đường thẳng bất kì qua F lần lượt cắt AB, CD tại X, Y, Z, T ($X, Y \in AB, Z, T \in CD$). Gọi d_1, d_2 là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ E tới đường tròn nội tiếp các tam giác FXY, FZT ; d_3, d_4 là các tiếp tuyến thứ hai kẻ từ F tới đường tròn nội tiếp các tam giác EMN, EPQ . Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3, d_4 cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.

Lời giải. Ta phát biểu chứng minh ba bỗ đề

Bỗ đề 1. Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$ ($AB \cap CD = \{E\}, BC \cap CD = \{F\}$). Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ F tới đường tròn nội tiếp các tam giác EBC, EDA . Một đường thẳng bất kì qua E cắt d_1, FC, d_2, FD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi $(I_1, r_1), (I_2, r_2)$ lần lượt là đường tròn bàng tiếp các tam giác FMN, FPQ . Khi đó E là tâm vị tự ngoài của (I_1) và (I_2) .



Chứng minh. Gọi $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác EBC, EAD . EI_1 cắt FO_2 tại I'_2 . Dựng đường tròn (I'_2, r'_2) sao cho F là tâm vị tự ngoài của (I'_2) và (O_2) .

Ta sẽ chứng minh E là tâm vị tự ngoài của $(I_1), (I'_2)$.

Thật vậy, xét $\frac{r_1}{r'_2} = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{r'_2} = \frac{FI_1}{FO_1} \cdot \frac{EO_1}{EO_2} \cdot \frac{FO_2}{FI'_2}$.

Ta cần chứng minh $\frac{EI_1}{EI'_2} = \frac{r_1}{r'_2} = \frac{FI_1}{FO_1} \cdot \frac{EO_1}{EO_2} \cdot \frac{FO_2}{FI'_2}$.

Gọi X là giao của I_1O_2 và EF . Hiển nhiên theo định lý Menelaus ta có

$\frac{FI_1}{FO_1} \cdot \frac{EO_1}{EO_2} = \frac{XI_1}{XO_2} = \frac{EI_1}{EI'_2} \cdot \frac{FI'_2}{FO_2}$. Vậy E là tâm vị tự ngoài của (I_1) và (I'_2) . Suy ra EQ là tiếp tuyến chung của (I_1) và (I'_2) hay $(I'_2) \equiv (I_2)$. Ta có điều phải chứng minh. \square

Bổ đề 2. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. AB giao CD tại E , AD giao BC tại F . Một đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh chung đỉnh R của tứ giác $ABCD$ (R là một trong các đỉnh A, B, C, D). Hai tiếp tuyến (khác cạnh tứ giác $ABCD$) kẻ từ E, F tới (I) cắt nhau tại H . Khi đó tứ giác tạo bởi các đỉnh R, H, E, F ngoại tiếp.

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh trong trường hợp R là đỉnh D . Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

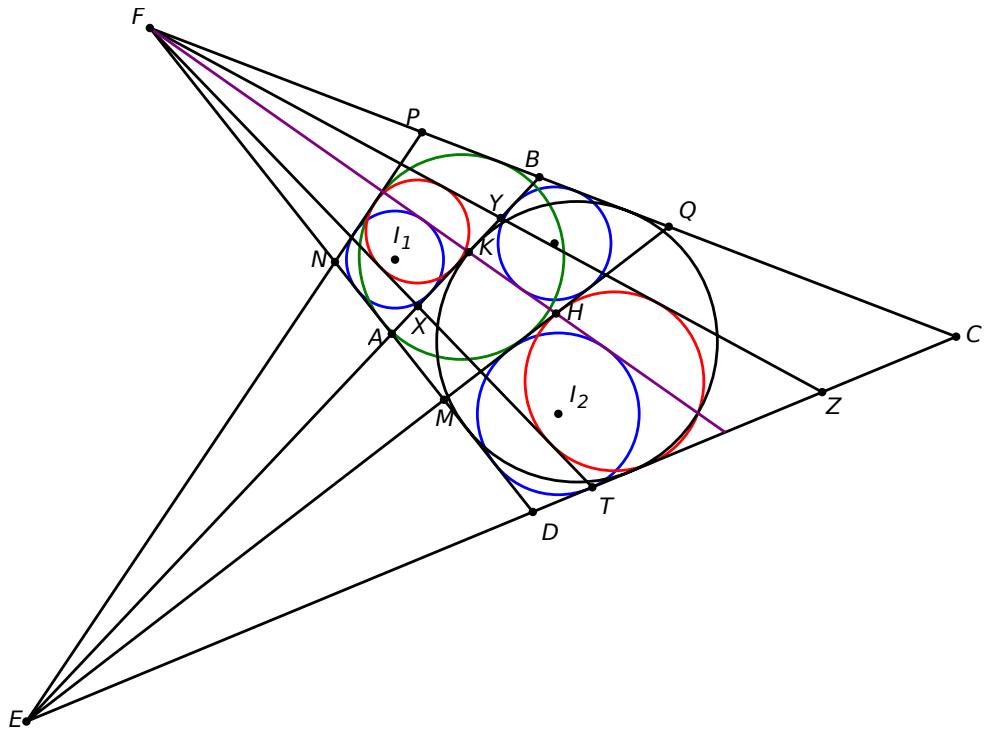
Ta có các tứ giác $EDFB, EDFH$ ngoại tiếp nên $FB - EB = FD - ED = FH - EH$. Từ đó suy ra tứ giác $HFBF$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. \square

Bổ đề 3. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. AB giao CD tại E , AD giao BC tại F . Hai đường thẳng bất kì qua F cắt AB, CD lần lượt tại X, Y, Z, T ($X, Y \in AB, Z, T \in CD$). Khi đó hai tiếp tuyến kẻ từ E tới đường tròn nội tiếp các tam giác FXY, FZT tạo với các cạnh AD, BC một tứ giác ngoại tiếp.

Chứng minh. Gọi M, Q là giao của tiếp tuyến thứ hai kẻ từ E tới đường tròn nội tiếp tam giác FZT với AD, BC . Tương tự xác định N, P . Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn bàng tiếp các tam giác ENA, EMD . Theo bổ đề 1 ta thu được F là tâm vị tự ngoài của (I_1) và (I_2) .

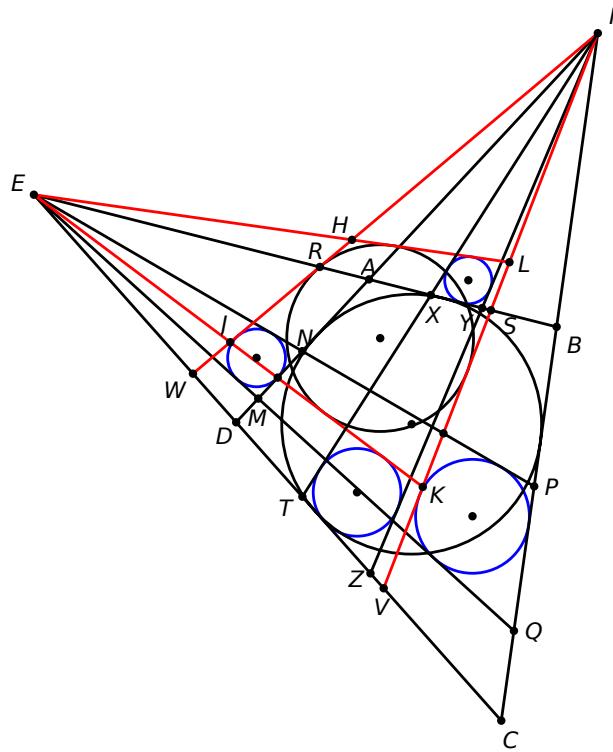
Gọi H, K là giao của tiếp tuyến thứ hai kẻ từ F tới (I_1) với EQ, EB .

Áp dụng bổ đề 2 suy ra tứ giác $KHBQ$ ngoại tiếp. Lại theo bổ đề 2, (I_1) tiếp xúc với KB và KH nên tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. \square



Gọi V, W, S, R lần lượt là giao của tiếp tuyến thứ hai kẻ từ F tới đường tròn nội tiếp các tam giác EPQ, EMN với CD, AB .

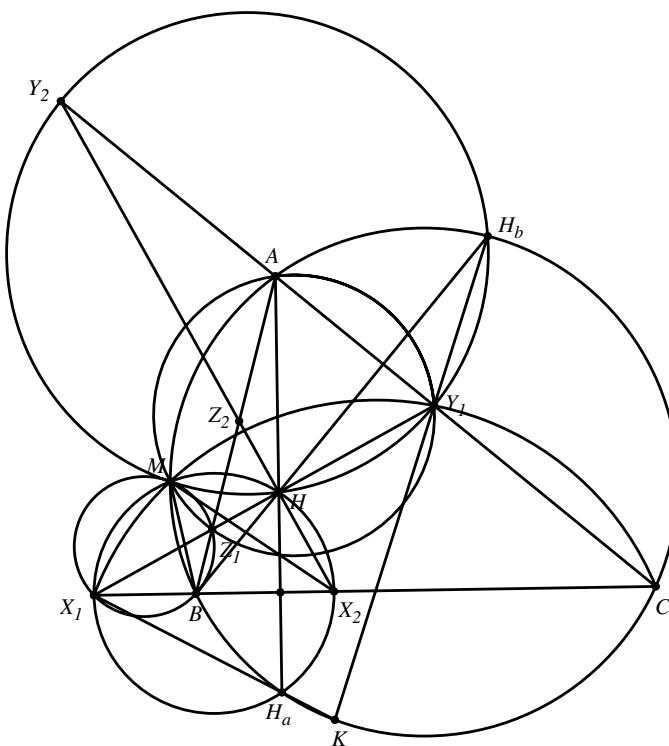
Áp dụng bổ đề 3 ta suy ra tứ giác $VWRS$ ngoại tiếp. Gọi $HLKJ$ là tứ giác tạo bởi giao điểm của d_1, d_2, d_3, d_4 . Lại áp dụng bổ đề 3 cho tứ giác $VWRS$ ta suy ra tứ giác $HLKJ$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh.



□

Bài 93. (*Mathley No.8 2012*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kí vuông góc với nhau và đi qua H . d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X_1, Y_1, Z_1 . Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác tạo bởi các đường thẳng qua X_1 và vuông góc với BC , qua Y_1 và vuông góc với CA , qua Z_1 và vuông góc với AB . Tương tự ta xác định được tam giác $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ tiếp xúc với nhau tại một điểm nằm trên (O) .

Lời giải. Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H . Hai đường thẳng d_1 và d_2 bất kí vuông góc với nhau và đi qua H . d_1 cắt BC, CA, AB lần lượt tại X_1, Y_1, Z_1 . Tương tự ta xác định X_2, Y_2, Z_2 . Khi đó hai tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$ và $ABCX_2Y_2Z_2$ có chung điểm Miquel.



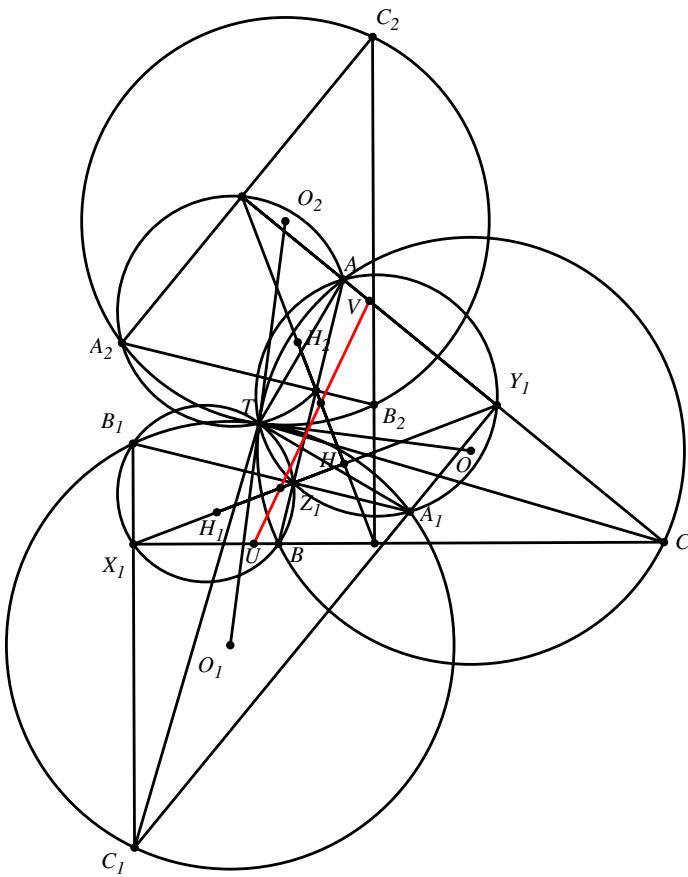
Chứng minh. Gọi H_a, H_b lần lượt là điểm đối xứng với H qua BC, CA . Suy ra X_1H_a, Y_1H_b cắt nhau tại K - điểm Anti-Steiner của tam giác ABC ứng với d_1 . Hơn nữa, theo tính chất đối xứng ta hiển nhiên có $H_a \in (X_1HX_2), H_b \in (Y_1HY_2)$.

Do H_a, H, H_b lần lượt nằm trên các cạnh của tam giác X_1KY_1 nên $(HX_1H_a), (H_aKH_b), (H_bY_1H)$ đồng quy tại điểm Miquel M của tam giác X_1KY_1 ứng với bộ ba điểm (H_a, H, H_b) .

Do (X_1HX_2) và (Y_1HY_2) cắt nhau tại M nên M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $X_1Y_1CX_2HY_2$. Từ đó $M \in (X_1CY_1)$.

Suy ra (X_1CY_1) và (ABC) giao nhau tại M hay M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$. Tương tự ta có điều phải chứng minh. \square

Giải bài toán.



Gọi T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCX_1Y_1Z_1$.

Ta có $A_1 \in (AY_1Z_1)$, $B_1 \in (BX_1Z_1)$. Do đó $(B_1X_1Z_1)$ và $(A_1Y_1Z_1)$ cắt nhau tại T .

Suy ra T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $A_1B_1C_1X_1Y_1Z_1$ hay $T \in (A_1B_1C_1)$.

Áp dụng bở đề trên suy ra T cũng là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCX_2Y_2Z_2$.
Chứng minh tương tự suy ra T là giao điểm của $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$.

Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm của $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$.

Theo tính chất của các tứ giác nội tiếp thì $\angle TC_1A_1 = \angle TCA$, $\angle TA_1C_1 = \angle TAC$. Suy ra hai tam giác TC_1A_1 và TCA đồng dạng. Từ đó $\angle O_1TA_1 = \angle OTA = 90^\circ - \angle A_1TO$.

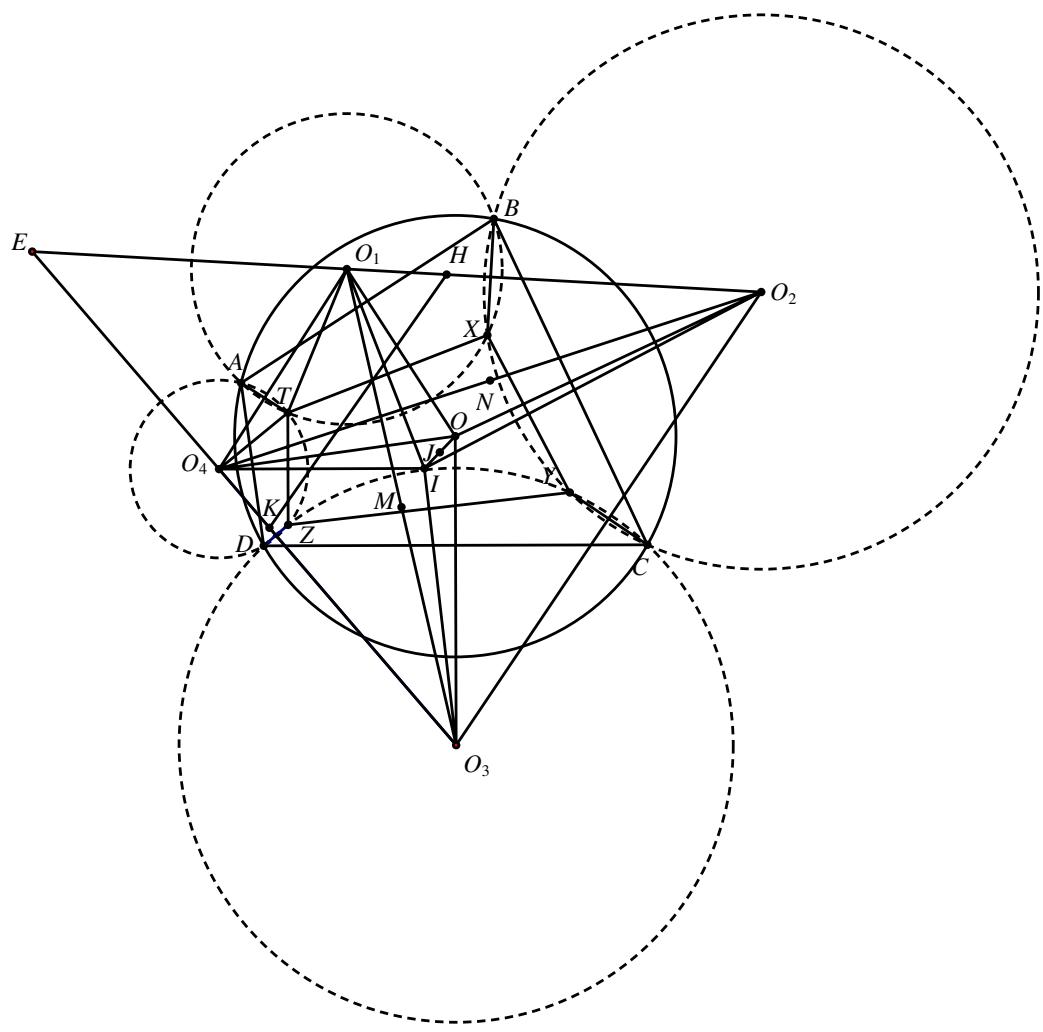
Suy ra $\angle O_1TO = 90^\circ$. Tương tự, $\angle O_2TO = 90^\circ$.

Vậy TO là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2) . Tức là (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại T . \square

Nhận xét. Bở đề trong bài 93 chính là bước để chứng minh định lý về đường thẳng **Droz-Farny** Trung điểm các đoạn thẳng X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 thẳng hàng. Trong bài toán trên, nếu ta gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thì có thể chứng minh được $H_1 \in d_1, H_2 \in d_2$. Đồng thời trung điểm của HH_1 và HH_2 cùng nằm trên đường thẳng **Droz-Farny**. Những tính chất thú vị này xin nhường lại cho bạn đọc.

Bài 94. (*Mathley No.9 2012*) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . Kí hiệu $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ lần lượt là các đường tròn bắt kì đi qua các cặp điểm $(A, B); (B, C); (C, D); (D, A)$. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) , (O_2) và (O_3) , (O_3) và (O_4) , (O_4) và (O_1) . Chứng minh

- (a) bốn điểm X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn có tâm I .
- (b) trung điểm các đoạn thẳng O_1O_3, O_2O_4, OI thẳng hàng.



Lời giải. (Ông Thê Phương, lớp 11 toán THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai).

a) Ta có

$$(XT, XY) \equiv (AT, AB) + (CB, CY) \pmod{\pi}$$

$$(ZT, ZY) \equiv (AT, AD) + (CD, CY) = -(AD, AT) - (CY, CD) \pmod{\pi}$$

Suy ra $(XT, XY) - (ZT, ZY) \equiv (AD, AB) + (CB, CD) \equiv \pi \pmod{\pi} \Rightarrow (XT, XY) \equiv (ZT, ZY) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow X, Y, Z, T$ thuộc một đường tròn có tâm I .

b) Gọi J là trung điểm OI . Ta có IO_1, IO_2, IO_3, IO_4 lần lượt là trung trực các đoạn XT, XY, YZ, ZT .

Do đó ta có

$$S_{IO_4O_3} + S_{IO_2O_1} = S_{ZIO_4} + S_{ZO_4O_3} + S_{ZO_3I} + S_{XIO_2} + S_{XO_2O_1} + S_{XO_1I}.$$

Nên $S_{IO_4O_3} + S_{IO_2O_1} = \frac{1}{2}(S_{ITO_4DO_3Y} + S_{IYO_2BO_1T})$ và cũng có

$$\begin{aligned} S_{OO_4O_3} + S_{OO_2O_1} &= S_{DO_4O_3} + S_{DO_3O} + S_{DOO_4} + S_{BOO_2} + S_{BO_2O_1} + S_{BO_1O} \\ &= \frac{1}{2} (S_{OAO_4O_3C} + S_{OCO_2O_1B} + S_{DO_4O_3} + S_{BO_2O_1}) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S_{IO_4O_3} + S_{IO_2O_1} + S_{OO_4O_3} + S_{OO_2O_1} = S_{O_1O_2O_3O_4}$

Hơn nữa do J là trung điểm của IO nên suy ra

$$S_{JO_4O_3} + S_{JO_2O_1} = \frac{1}{2} (S_{IO_4O_3} + S_{IO_2O_1} + S_{OO_4O_3} + S_{OO_2O_1}) = \frac{1}{2} S_{O_1O_2O_3O_4}$$

Gọi M, N là trung điểm O_1O_3, O_2O_4 . Ta cũng có $S_{MO_4O_3} + S_{MO_2O_1} = S_{NO_4O_3} + S_{NO_2O_1} = \frac{1}{2} S_{O_1O_2O_3O_4}$.

Gọi E là giao điểm của O_1O_2 và O_3O_4 . Trên các tia EO_1 và EO_4 lấy các điểm H, K sao cho $EH = O_1O_2, EK = O_3O_4$.

Khi đó ta có $S_{JO_4O_3} + S_{JO_2O_1} = S_{JEK} + S_{JHE} = S_{EKJH} = S_{EKH} + S_{JHK}$.

Tương tự

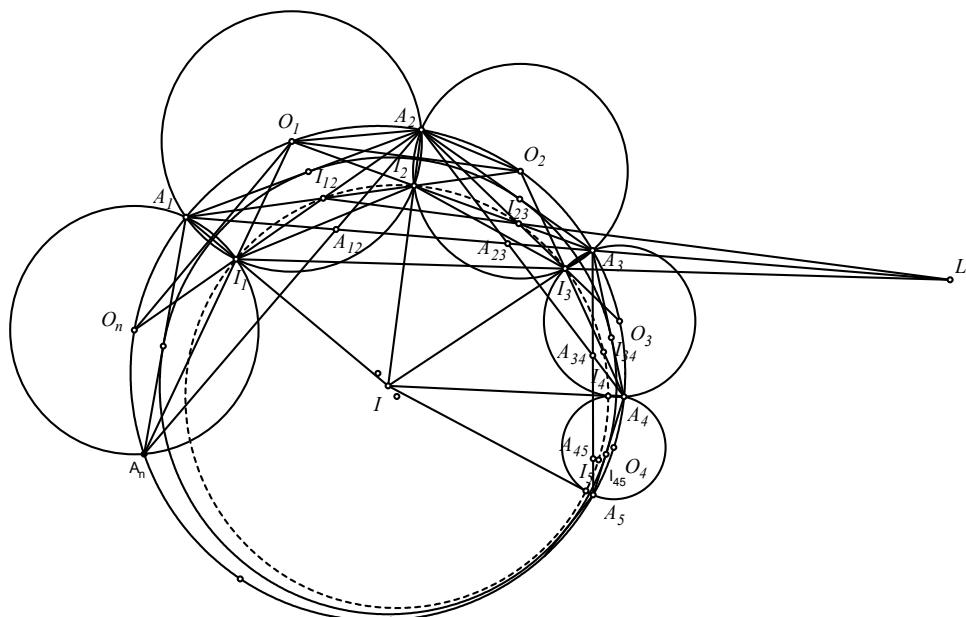
$$S_{MO_4O_3} + S_{MO_2O_1} = S_{MHK} + S_{MHK}; S_{NO_4O_3} + S_{NO_2O_1} = S_{NHK} + S_{NHK}.$$

$$\text{Mà } S_{JO_4O_3} + S_{JO_2O_1} = S_{MO_4O_3} + S_{MO_2O_1} = S_{NO_4O_3} + S_{NO_2O_1} = \frac{1}{2} S_{O_1O_2O_3O_4}$$

Nên $S_{JHK} = S_{MHK} = S_{NHK} \Rightarrow M, N, J$ nằm trên đường thẳng song song với HK .

Từ đây ta thu được kết luận của bài toán. \square

Bài 95. (*Mathley No.10 2012*) Cho n -giác lưỡng tâm $A_1A_2A_3\dots A_n (\geq 3)$. Kí hiệu I_i là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_{i-1}A_iA_{i+1}; A_{i(i+1)}$ là giao điểm của A_iA_{i+2} và $A_{i-1}A_{i+1}; I_{i(i+1)}$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_iA_{i(i+1)}A_{i+1} (i = \overline{1, n})$. Khi đó $2n$ điểm $I_1, I_2, \dots, I_n, I_{12}, I_{23}, \dots, I_{n1}$ cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi O_i là điểm chính giữa của cung A_iA_{i+1} . Do I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A_nA_1A_2, A_1A_2A_3$ nên $O_1A_1 = O_1A_2 = O_1I_1 = O_1I_2$ hay A_1, A_2, I_1, I_2 cùng thuộc (O_1, O_1A_1) . Tương tự với các đường tròn $(O_2), (O_3), \dots, (O_n)$.

Lại có $A_1I_1, A_2I_2, \dots, A_nI_n$ đồng quy tại tâm đường tròn nội tiếp I của n-giác $A_1A_2A_3\dots A_n$ nên phép nghịch đảo cực I , phương tích $\overline{IA_1}\cdot\overline{II_1}$ biến đường tròn ngoại tiếp n-giác $A_1A_2\dots A_n$ thành đường tròn đi qua I_1, I_2, \dots, I_n hay I_1, I_2, \dots, I_n cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác, Gọi I'_{23} là giao của đường thẳng qua I_{12} và song song với O_1O_2 với $O_1A_3 \cdot A_2I'_{23}$ cắt (O_2) tại I'_3 .

Do O_1, O_2, A_1, A_3 cùng thuộc một đường tròn và $I_{12}I_{23} \parallel O_1O_2$ nên tứ giác $A_1I_{12}I'_{23}A_3$ nội tiếp. (1)

Ta có $\angle I_2I_{12}I'_{23} = \angle I_2O_2O_1 = \angle O_1O_2A_2 = \angle O_1A_3A_2 = \angle I_2I'_3I'_{23}$ nên tứ giác $I_{12}I_2I'_{23}I'_3$ nội tiếp. Tương tự ta cũng có tứ giác $I_1I_{12}I_2I'_{23}$ nội tiếp hay tứ giác $I_1I_{12}I'_3I_3$ nội tiếp. (2)

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, } & \angle A_1I_1I'_3 = \angle A_1I_1A_2 + \angle I_{13}I_1I'_3 \\ & = \angle A_1I_2A_2 + \angle O_2I_2I'_3 = 180^\circ - \angle A_2I_2O_2 + \angle O_2I_2I'_3 = 180^\circ + \angle O_1O_2A_1 - \angle O_1A_3I'_3. \\ & \angle A_1A_3I'_3 = \angle O_1A_3I'_3 - \angle O_1A_3A_1 = \angle O_1A_3I'_3 - \angle O_1O_2A_1. \end{aligned}$$

Do đó $\angle A_1A_3I'_3 + \angle A_1I_1I'_3 = 180^\circ$ hay tứ giác $A_1I_1I'_3A_3$ nội tiếp. (3)

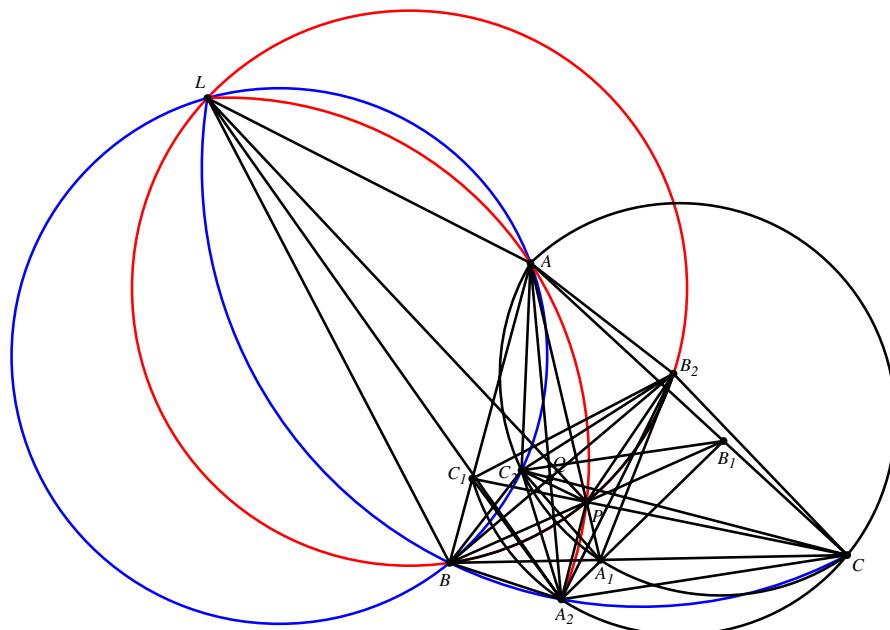
Từ (1), (2), (3) suy ra $I_{12}I'_{23}, A_1A_3, I_1I'_3$ đồng quy.

Áp dụng định lý Desargues ta suy ra $A_1I_1, A_2I_2, A_3I'_3$ đồng quy tại I . Mà A_3I_3 cũng đi qua I nên $I'_3 \equiv I_3$.

Suy ra $I'_{23} \equiv I_{23}$.

Từ đó $I_{12}, I_{23} \in (I_1I_2I_3)$. Tương tự ta có đpcm. □

Bài 96. (*Mathley No.11 2012*) Cho tam giác ABC , với P là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác đó. Các đường thẳng AP, BP, CP cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm Miquel của tứ giác toàn phần AB_1PC_1BC , BC_1PA_1CA , CA_1PB_1AB . Chứng minh rằng sáu đường tròn ngoại tiếp các tam giác $APA_2, BPB_2, CPC_2, BA_2C, AB_2C, AC_2B$ đồng quy tại một điểm.



Lời giải. Áp dụng định lý hàm số sin ta có

$$\frac{\sin(AB, AA_2)}{\sin(AA_2, AC)} = \frac{\sin(B_1B, B_1A_2)}{\sin(C_1A_2, C_1C)} = \frac{\frac{\sin(B_1B, B_1A_2)}{PA_2}}{\frac{\sin(C_1A_2, C_1C)}{PA_2}} = \frac{\frac{\sin(PC, PB_1)}{CB_1}}{\frac{\sin(PC_1, PB)}{BC_1}} = \frac{BC_1}{CB_1}.$$

Tương tự, $\frac{\sin(CA, CC_2)}{\sin(CC_2, CB)} = \frac{AB_1}{BA_1}$, $\frac{\sin(BC, BB_2)}{\sin(BB_2, BA)} = \frac{CA_1}{AC_1}$.

Suy ra $\frac{\sin(AB, AA_2)}{\sin(AA_2, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_2)}{\sin(CC_2, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_2)}{\sin(BB_2, BA)} = \frac{BC_1}{CB_1} \cdot \frac{AB_1}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{AC_1} = 1$ (do AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy)

Theo định lý Cava dạng lượng giác ta có AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại Q .

Ta có $(C_2Q, C_2A) \equiv (A_1C, A_1A) \equiv (A_1B, A_1A) \equiv (B_2Q, B_2A) \pmod{\pi}$

Do đó A, B_2, C_2, Q cùng thuộc một đường tròn. Tương tự suy ra $(AB_2C_2), (A_2BC_2), (A_2B_2C)$ đồng quy tại Q .

Suy ra $(A_2C, A_2B_2) \equiv (QC, QB_2) \equiv (QC_2, QB) \equiv (A_2C_2, A_2B) \pmod{\pi}$

Mặt khác, $(A_2A, A_2B) \equiv (B_1A, B_1B) \equiv (B_1C, B_1P) \equiv (A_2C, A_2P) \pmod{\pi}$

Ta thu được $(A_2Q, A_2C_2) \equiv (A_2Q, A_2B) + (A_2B, A_2C_2) \equiv (A_2C, A_2P) + (A_2B_2, A_2C) \equiv (A_2B_2, A_2P) \pmod{\pi}$

Tương tự suy ra Q là điểm liên hợp đẳng giác của P ứng với tam giác $A_2B_2C_2$.

Gọi L là giao điểm thứ 2 của (APA_2) và (BPB_2) . Ta sẽ chứng minh $L \in (ABC_2)$.

Xét $(LB, LA) \equiv (LB, LP) + (LP, LA) \equiv (B_2B, B_2P) + (A_2P, A_2A) \equiv (B_2C_2, B_2A_2) + 2(B_2Q, B_2C_2) + (A_2B_2, A_2C_2) + 2(A_2C_2, A_2Q) \pmod{\pi}$

$$(C_2B, C_2A) \equiv (C_2B, C_2A_2) + (C_2A_2, C_2B_2) + (C_2B_2, C_2A) \equiv 2(C_2B, C_2A_2) + (C_2A_2, C_2B_2) \equiv 2(QB, QA_2) + (C_2A_2, C_2B_2) \equiv 2(QB_2, QA_2) + (C_2A_2, C_2B_2) \pmod{\pi}$$

Dễ dàng chứng minh được $2(QB_2, QA_2) + (C_2A_2, C_2B_2) \equiv (B_2C_2, B_2A_2) + 2(B_2Q, B_2C_2) + (A_2B_2, A_2C_2) + 2(A_2C_2, A_2Q) \pmod{\pi}$ nên $(LB, LA) \equiv (C_2B, C_2A) \pmod{\pi}$

Vậy $L \in (ABC_2)$.

Tiếp theo ta chứng minh $L \in (BA_2C)$.

Xét $(LB, LA_2) \equiv (LB, LP) + (LP, LA_2) \equiv (B_2B, B_2P) + (AP, AA_2) \pmod{\pi}$

$(CB, CA_2) \equiv (CB, CP) + (CP, CA_2) \equiv (B_2A_1, B_2P) + (AC_1, AA_2) \equiv (B_2A_1, B_2B) + (B_2B, B_2P) + (AC_1, AP) + (AP, AA_2)$

$$\equiv (B_2B, B_2P) + (AP, AA_2) \pmod{\pi} \quad (\text{do tứ giác } ABA_1B_2 \text{ nội tiếp}).$$

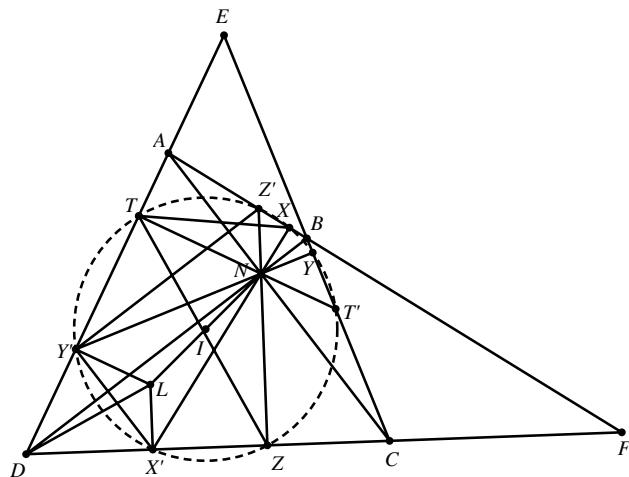
Từ đó $(LB, LA_2) \equiv (CB, CA_2) \pmod{\pi}$

Tương tự suy ra $(ABC_2), (AB_2C), (A_2BC)$ đồng quy tại L , suy ra sáu đường tròn ngoại tiếp các tam giác $APA_2, BPB_2, CPC_2, BA_2C, AB_2C, AC_2B$ đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. \square

Bài 97. (*Mathley No.12 2012*) Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần tạo bởi các đường thẳng AB, BC, CD, DA . L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (MAC) và (MBD) . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác LAB, LBC, LCD, LDA cùng nằm trên đường tròn ω và 3 đường tròn $(MAC), (MBD), \omega$ đồng một trực giao.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh một bổ đề.

Bổ đề. Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$ ($AD \cap BC = \{E\}, AB \cap CD = \{F\}$) có $AC \perp BD$ tại N . Khi đó tồn tại điểm L sao cho N và L là hai điểm liên hợp đẳng giác trong các tam giác ABE, DCE, BCF, ADF .



Chứng minh. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là hình chiếu của N trên AB, BC, CD, DA ; X', Y', Z', T' lần lượt là giao điểm của NX, NY, NZ, NT với CD, DA, AB, BC .

Ta có tứ giác $ATNX, TDZN$ nội tiếp đồng thời $AC \perp BD$ nên $\angle AXT = \angle ANT = \angle TDN = \angle TZN$. Do đó tứ giác $Z'XZT$ nội tiếp.

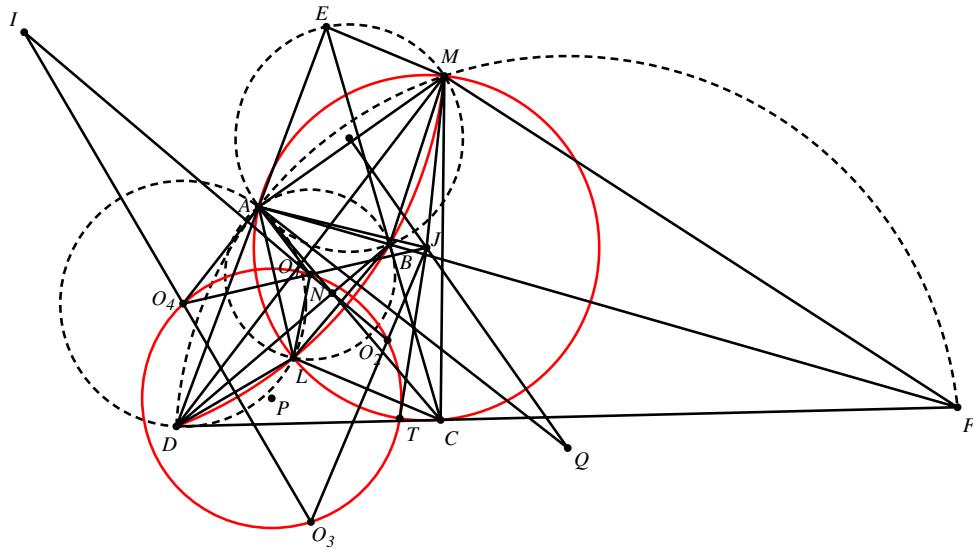
Mặt khác, dễ dàng chứng minh $Z'XZX'$ nội tiếp nên 5 điểm X, X', Z, Z', T cùng thuộc một đường tròn γ . Tương tự $Y \in \gamma$; X, Z cùng nằm trên $(TY'T'Y)$. Vậy 8 điểm $X, Y, Z, T, X', Y', Z', T'$ cùng thuộc đường tròn γ tâm I .

Qua X', Y', Z', T' lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với CD, DA, AB, BC . Theo tính chất đường trung bình của hình thang suy ra các đường thẳng này đồng quy tại L là đối xứng của N qua I .

Ta có $\angle LDX' = \angle LY'X' = 90^\circ - \angle DY'X' = 90^\circ - \angle TZD = \angle TZN = \angle TDN$.

Do đó N và L đẳng giác trong góc ADC . Chứng minh tương tự ta có điều phải. \square

Trở lại bài toán.



Gọi N là giao của AC và BD , E là giao của AD và BC , F là giao của AB và CD . Theo bô đê trên, gọi L' là điểm liên hợp đẳng giác với N trong các tam giác ABE, DCE, BCF, ADF .

Ta sẽ chứng minh tứ giác $AL'CM$ nội tiếp. Thật vậy, ta có $\angle DAL' + \angle CBL' = \angle NBA + \angle NBA = 90^\circ$. Suy ra $\angle EAL' + \angle EBL' = 270^\circ$, từ đó $\angle AEB + \angle AL'B = 90^\circ$. Tương tự, $\angle BL'C + \angle BFC = 90^\circ$. Suy ra $\angle AL'C + \angle AMC = \angle AL'B + \angle BL'C + \angle AMB + \angle BMC = \angle AL'B + \angle AEB + \angle BL'C + \angle BFC = 180^\circ$. Vậy tứ giác $AL'CM$ nội tiếp.

Tương tự, tứ giác $DL'BM$ nội tiếp. Do đó $L' \equiv L$.

Để chứng minh (MBD) và (MAC) trực giao ta sẽ chứng minh $\angle LDM + \angle LCM = 90^\circ$. Ta có $\angle MCL = \angle MCB + \angle BCL = \angle EDM + \angle NCD = \angle EDM + 90^\circ - \angle NDC = \angle EDM + 90^\circ - \angle ADL = 90^\circ - \angle MDL$.

Vậy (MBD) và (MAC) trực giao.

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác LAB, LBC, LCD, LDA . Như trên ta đã chứng minh $\angle ALB + \angle AEB = 90^\circ$. Bằng cách tương tự ta thu được

$$\angle DLC - \angle AEB = 90^\circ, \angle ALD - \angle AFD = 90^\circ. \quad (1)$$

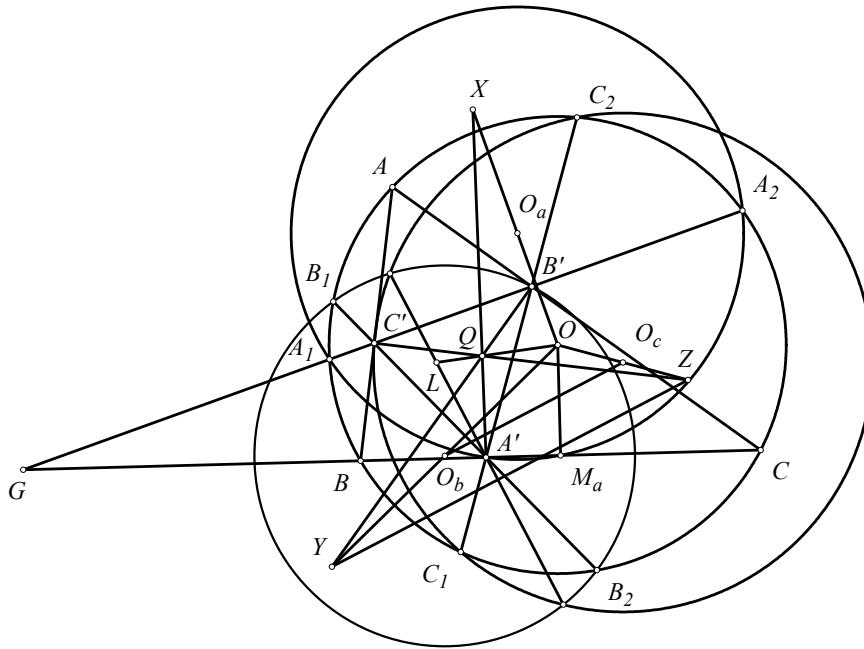
Ta có $\angle O_4O_1O_2 = 180^\circ - \angle ALB = 90^\circ + \angle AEB$, và $\angle O_4O_3O_2 = 180^\circ - \angle DLC = 90^\circ - \angle AEB$.

Suy ra $\angle O_4O_1O_2 + \angle O_4O_3O_2 = 180^\circ$ nên tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ nội tiếp. Gọi J, Q lần lượt là tâm $(MAC), (MAF)$. Rõ ràng O_1, O_4, J thẳng hàng. Ta có $\angle JAQ = \angle MAQ - \angle MAJ = 90^\circ - \angle MFA - 90^\circ + \angle ACM = \angle ACM - \angle BCM = \angle ACB$. $\angle O_1AL = 90^\circ - \angle ABL = 90^\circ - \angle NBC = \angle ACB$.

Vậy $\angle JAQ = \angle O_1AL$. Suy ra $\angle JAO_1 = \angle QAL$. Từ (1) ta có (O_4) và (Q) trực giao. Suy ra $\angle O_4AQ = 90^\circ$. Do đó $\angle QAL = \angle AO_4O_1$. Vậy $\angle JAO_1 = \angle AO_4O_1$.

Nghĩa là JA là tiếp tuyến của (AO_1O_4) hay $JA^2 = JO_1 \cdot JO_4$. Gọi T là giao điểm thứ hai của (J) với ω . Ta thu được $JT^2 = JO_1 \cdot JO_4$ hay JT là tiếp tuyến của ω . Vậy (MAC) và ω trực giao. Chứng minh tương tự ta có điều phải chứng minh. \square

- Bài 98.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Q là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi $A'B'C'$ là tam giác pedal của Q ứng với tam giác ABC . $B'C'$ cắt (O) tại hai điểm A_1, A_2 . Tương tự xác định các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 . Biết rằng AA', BB', CC' đồng quy. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của ba đường tròn $(A'A_1A_2), (B'B_1B_2), (C'C_1C_2)$ nằm trên đường thẳng OQ .



Lời giải. Gọi O_a, O_b, O_c là tâm của các đường tròn $(A'A_1A_2), (B'B_1B_2), (C'C_1C_2)$, L là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Gọi G là giao của A_1A_2 với BC , M_a là trung điểm BC .

Ta có $(GA', BC) = -1$ nên $\overline{GA'} \cdot \overline{GM_a} = \overline{GB} \cdot \overline{GC} = \overline{GA_1} \cdot \overline{GA_2}$. Suy ra M_a nằm trên đường tròn (O_a) .

Gọi X là giao của $A'Q$ với đường thẳng qua O vuông góc với A_1A_2 . Tương tự xác định các điểm Y, Z .

Do O_a nằm trên OX , O_a thuộc trục đẳng phương của $(A'A_1A_2)$ nên O_a là trung điểm OX .

Chứng minh tương tự O_b, O_c lần lượt là trung điểm OY, OZ .

Suy ra hai tam giác $O_aO_bO_c$ và XYZ có cạnh tương ứng song song.

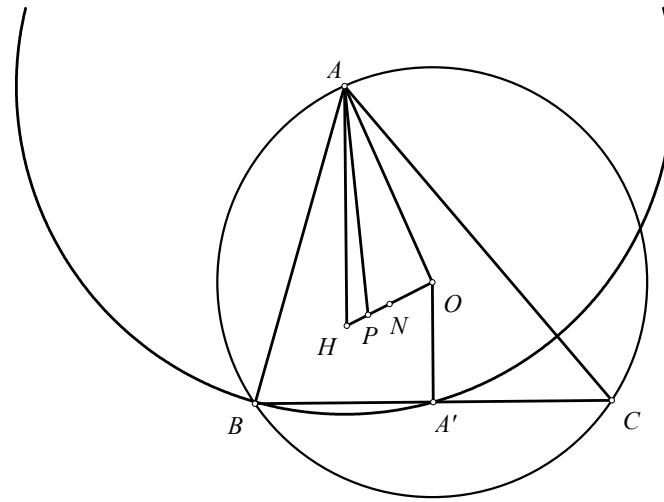
Ta có các đường thẳng lần lượt qua X, Y, Z và vuông góc với cạnh đối diện của tam giác $A'B'C'$ đồng quy tại O . (1)

Mặt khác, A' thuộc trục đẳng phương của $(O_b), (O_c)$ và $O_bO_c \parallel YZ$ suy ra $LA' \perp YZ$. Chứng minh tương tự, $LB' \perp XZ, LC' \perp XY$. (2)

Mà hai tam giác XYZ và $A'B'C'$ thấu xạ tâm Q . (3)

Từ (1), (2), (3), áp dụng định lý Sondat ta có L, O, Q thẳng hàng. \square

- Bài 99.** Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Chứng minh rằng tâm đẳng phương của các đường tròn (A, AA') , (B, BB') , (C, CC') nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC .



Lời giải. (Luis González)

Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , N là tâm đường tròn Euler, P là trung điểm HN .

Áp dụng hệ thức Stewart cho tam giác AOH với điểm P ta có:

$$\begin{aligned} AP^2 &= \frac{1}{4}R^2 + \frac{3}{4}AH^2 - \frac{3}{16}OH^2 \\ &= \frac{1}{4}R^2 + \frac{3}{4}(2OA')^2 - \frac{3}{16}OH^2 \\ &= \frac{1}{4}R^2 + 3\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{3}{16}OH^2 \\ &= \frac{13}{4}R^2 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{16}OH^2. \end{aligned}$$

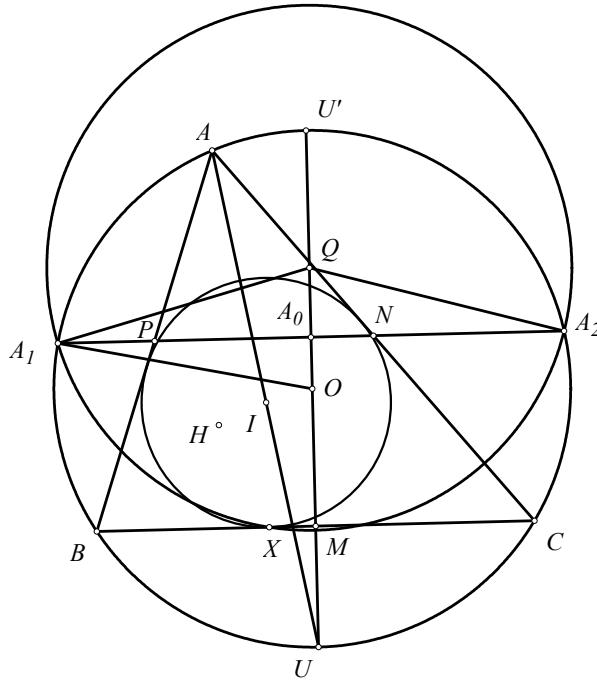
Ta có $\mathcal{P}_{P/(A,AA')} = AP^2 - AA'^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{13}{4}R^2 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{16}OH^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{13}{4}R^2 - \frac{3}{16}OH^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với (B, BB') và (C, CC')

suy ra P là tâm đẳng phuơng của ba đường tròn. \square

Bài 100. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . NP giao (O) tại hai điểm A_1, A_2 , tương tự xác định B_1, B_2, C_1, C_2 . Chứng minh rằng I là tâm đẳng phuơng của ba đường tròn $(XA_1A_2), (YB_1B_2), (ZC_1C_2)$.



Lời giải. (*Yetti*)

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp, H là trực tâm của tam giác ABC . AI, BI, CI giao (O) lần thứ hai tại U, V, W . Gọi Q, S, T lần lượt là các điểm nằm trên tia MO, NO, PO sao cho $MQ = NS = PT = R$. Gọi A_0 là giao của A_1A_2 với MO .

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác ABC ta thu được $BC \cdot MA_0 = \frac{abc}{4R}$.

Ta có

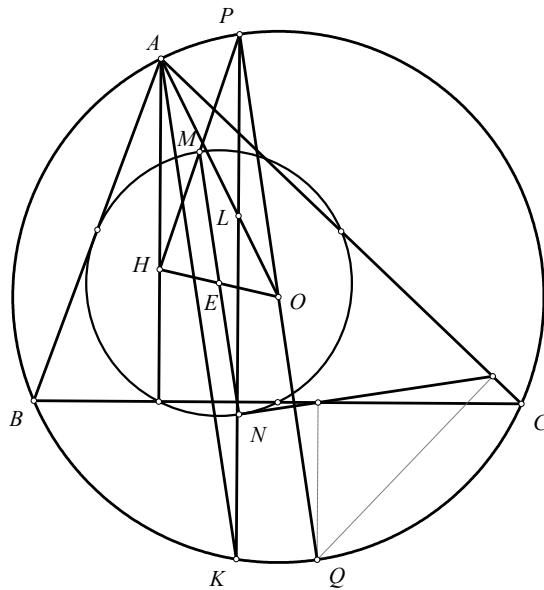
$$QA_1^2 = A_0Q^2 + A_0A_1^2 = (R - \overline{MA_0})^2 + (R^2 - OA_0^2) = 2R^2 - 2R \cdot \overline{MA_0} + MO^2 + 2\overline{MO} \cdot \overline{OA_0} = \\ 2R^2 - \frac{1}{2}bc + MO^2 + \frac{1}{4}(R^2 - OH^2) = MO^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = R^2 + \frac{1}{4}(b - c)^2 = \\ MQ^2 + MX^2 = QX^2$$

Suy ra $QA_1 = QA_2 = QX$ hay Q là tâm đường tròn (XA_1A_2) . tương tự, S, T là tâm của các đường tròn $(YB_1B_2), (ZC_1C_2)$.

Ta thu được $\mathcal{P}_{I/(XA_1A_2)} = IQ^2 - QX^2 = (MQ - XI)^2 - MQ^2 = r^2 - 2rR$.

Chứng minh tương tự với các đường tròn (YB_1B_2) , (ZC_1C_2) ta có đpcm.

Bài 101. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\angle B > \angle C$, trực tâm H . P là điểm nằm trên (O) sao cho H và P khác phía với AO và $\angle AOP = \frac{2}{3}\angle HAO$. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua O . Chứng minh rằng đường thẳng Simson của Q tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC .

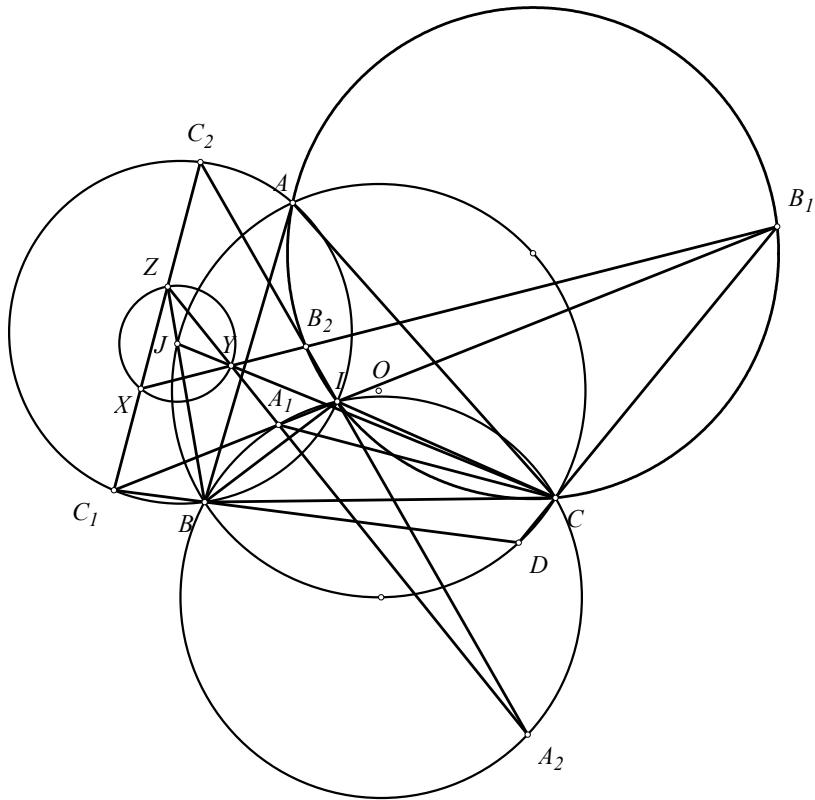


Lời giải. Qua P kẻ $PK \perp BC$ ($K \in (O)$). PK cắt AO tại L . Ta có $\angle LPO = \angle ALP - \angle AOP = \angle HAO - \angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOP = \angle AKP$. Suy ra $AK \parallel OP$.

Mà AK song song với đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC nên đường thẳng Simson của P song song với OP .

Gọi E là trung điểm HO , M là trung điểm HP suy ra M nằm trên đường thẳng Simson của P , mà $ME \parallel OP$ nên ME là đường thẳng Simson của P . Gọi N đối xứng với M qua E . Chúng ta biết rằng đường thẳng Simson của hai điểm là hai đầu của đường kính thì vuông góc với nhau tại một điểm trên đường tròn Euler nên đường thẳng Simson của Q là đường thẳng qua N vuông góc với MN hay tiếp tuyến tại N của (E) . Ta có đpcm. \square

Bài 102. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , với tâm đường tròn nội tiếp I . Gọi l_1, l_2 là hai đường thẳng bất kì qua I . l_1, l_2 cắt (BIC) lần thứ hai tại A_1, A_2 . Tương tự ta xác định các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 . Gọi XYZ là tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác XYZ nằm trên (O) .



Lời giải. (Luis González)

Gọi A_1A_2 giao B_1B_2 , C_1C_2 lần lượt tại Y, Z , J là giao của BZ và CY , D là giao của CB_1 và BC_1 .

Ta có $\angle CA_1A_2 = \angle CIA_2 = \angle CB_1B_2$ suy ra tứ giác A_1YB_1C nội tiếp.

Suy ra $\angle CYA_1 = \angle CB_1I = \frac{1}{2}\angle A$. Tương tự, $\angle BZA_2 = \frac{1}{2}\angle A$, suy ra $\triangle JYZ$ cân tại J với $\angle YJZ = 180^\circ - \angle A$. Từ đó $J \in (O)$.

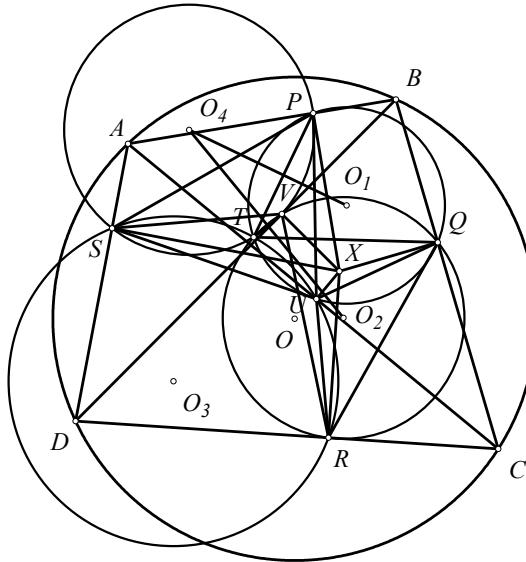
Bằng phép cộng góc đơn giản ta thu được $D \in (O)$.

Do $\angle XB_2C_2 = \angle DCI$ và $\angle XC_2I = \angle DBI$ nên $\angle XB_2C_2 + \angle XC_2I = 360^\circ - \angle BIC - \angle BDC = 360^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle A) - (180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

Suy ra $\angle YXZ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle YJZ$, suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle XYZ$. \square

Nhận xét. Khi $l_1 \perp l_2$, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm nằm trên (O) . Sử dụng phép nghịch đảo tâm I ta thu được đường thẳng Droz-Farny.

Bài 103. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Gọi X là điểm bất kì trong mặt phẳng sao cho X không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tâm đường tròn pedal của X ứng với các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB đồng viên.



Lời giải. Trước tiên ta chứng minh 4 đường tròn pedal luôn đồng quy tại một điểm với mọi tứ giác $ABCD$ (không nhất thiết nội tiếp).

Gọi P, Q, R, S, U, V lần lượt là hình chiếu của X trên AB, BC, CD, DA, AC, BD . Gọi $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ lần lượt là đường tròn pedal của X ứng với các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB . Gọi T là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_4) . Sử dụng góc định hướng theo $(\text{mod } \pi)$, ta có

$$(TV, TQ) \equiv (TP, TQ) + (TV, TP) \equiv (UP, UQ) + (SV, SP) \quad (1)$$

$$(UP, UQ) \equiv (UC, UQ) + (UP, UA) \equiv (RC, RQ) + (SP, SA) \quad (2)$$

$$(SV, SP) \equiv (SV, SA) - (SP, SA) \equiv (RV, RD) - (SP, SA) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$(TV, TQ) \equiv (RC, RQ) + (RV, RD) \equiv (RV, RQ) \text{ suy ra } T \in (O_2).$$

Chứng minh tương tự, $T \in (O_3)$.

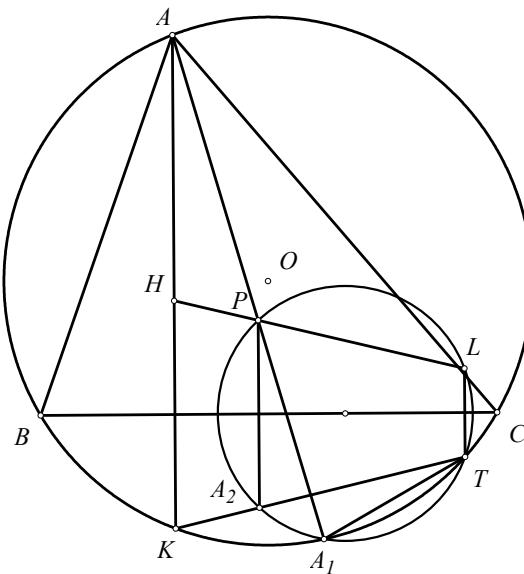
Giả sử rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Từ $O_1O_4 \perp TP$ và $O_1O_2 \perp TQ$, ta thu được

$$(O_1O_4, O_1O_2) \equiv (TP, TQ) \equiv (UP, UQ), (O_3O_4, O_3O_2) \equiv (US, UR)$$

Nhưng $(UQ, UP) \equiv (CB, CD) + (AD, AB) - (US, UR)$ suy ra $(UP, UQ) \equiv (US, UR)$.

Do đó, $(O_1O_4, O_1O_2) \equiv (O_3O_4, O_3O_2)$, suy ra O_1, O_2, O_3, O_4 đồng viên. \square

Bài 104. (*China TST 2016*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , P là điểm bất kì trong mặt phẳng. AP, BP, CP cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB . Chứng minh rằng 4 đường tròn $(O), (PA_1A_2), (PB_1B_2), (PC_1C_2)$ đồng quy.



Lời giải. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . AH cắt (O) lần thứ hai tại K . KA_2 cắt (O) tại T .

Ta có $\angle KTA_1 = \angle KAA_1 = \angle A_2PA_1$. Suy ra T nằm trên (PA_1A_2) .

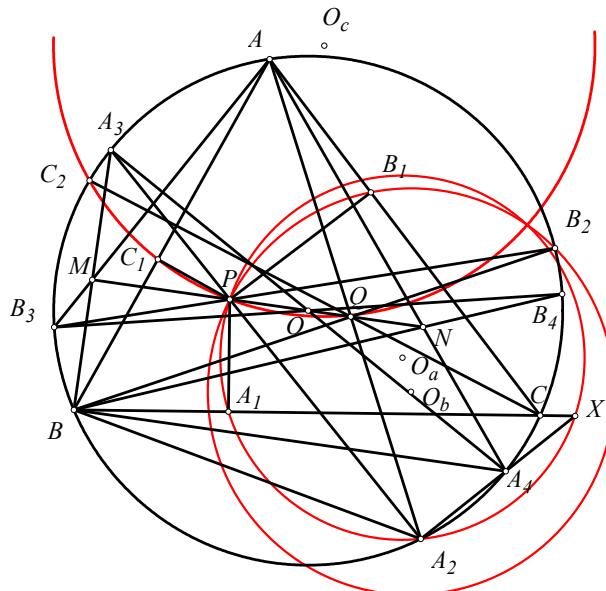
Gọi L là điểm đối xứng với T qua BC . Do HP và KA_2 đối xứng nhau qua BC nên L nằm trên HP . Vậy HP là đường thẳng Steiner của T ứng với tam giác ABC .

Vậy (PA_1A_2) đi qua điểm Anti-Steiner của đường thẳng HP ứng với tam giác ABC . Chứng minh tương tự ta thu được $(O), (PA_1A_2), (PB_1B_2), (PC_1C_2)$ đồng quy tại T . \square

Bài 105. Cho tam giác ABC . Gọi P là điểm bất kì trong mặt phẳng, $A_1B_1C_1$ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC . Gọi O là tâm của $(A_1B_1C_1)$, L là điểm bất kì trên PO . A_1L, B_1L, C_1L cắt $(A_1B_1C_1)$ lần lượt tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Lời giải. Trước tiên ta phát biểu một bổ đề như sau.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P và Q là hai điểm bất kì sao cho P, O, Q thẳng hàng. $A_1B_1C_1$ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC , A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm thứ hai của AQ, BQ, CQ với (O) . Khi đó các đường tròn $(PA_1A_2), (PB_1B_2), (PC_1C_2)$ đồng trực.



Chứng minh. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm của (PA_1A_2) , (PB_1B_2) , (PC_1C_2) ; Đường thẳng qua A_2 vuông góc với PA_2 cắt BC tại X . Tương tự xác định các điểm Y, Z .

Do O_a là trung điểm của PX nên $(O_a), (O_b), (O_c)$ đồng trực khi và chỉ khi O_a, O_b, O_c thẳng hàng, khi và chỉ khi X, Y, Z thẳng hàng. (1)

$$\text{Ta có } \frac{XB}{XC} = \frac{S_{XBA_2}}{S_{XCA_2}} = \frac{\sin \angle X A_2 B \cdot A_2 B}{\sin \angle X A_2 C \cdot A_2 C} = \frac{\sin \angle X A_2 B}{\sin \angle X A_2 C} \cdot \frac{\sin \angle B A Q}{\sin \angle C A Q}$$

$$\text{Lại có } \frac{\sin \angle X A_2 B}{\sin \angle X A_2 C} = \frac{\cos \angle B A_2 P}{\cos \angle C A_2 P}.$$

Gọi A_3 là giao của A_2P với (O) , A_4 là giao của A_3O với (O) . Tương tự ta xác định các điểm B_3, B_4, C_3, C_4 .

$$\text{Ta có } \frac{\cos \angle B A_2 P}{\cos \angle C A_2 P} = \frac{\cos \angle B A_4 A_3}{\cos \angle C A_4 A_3} = \frac{\sin \angle B A_3 A_4}{\sin \angle C A_3 A_4} = \frac{\sin \angle B A A_4}{\sin \angle C A A_4}$$

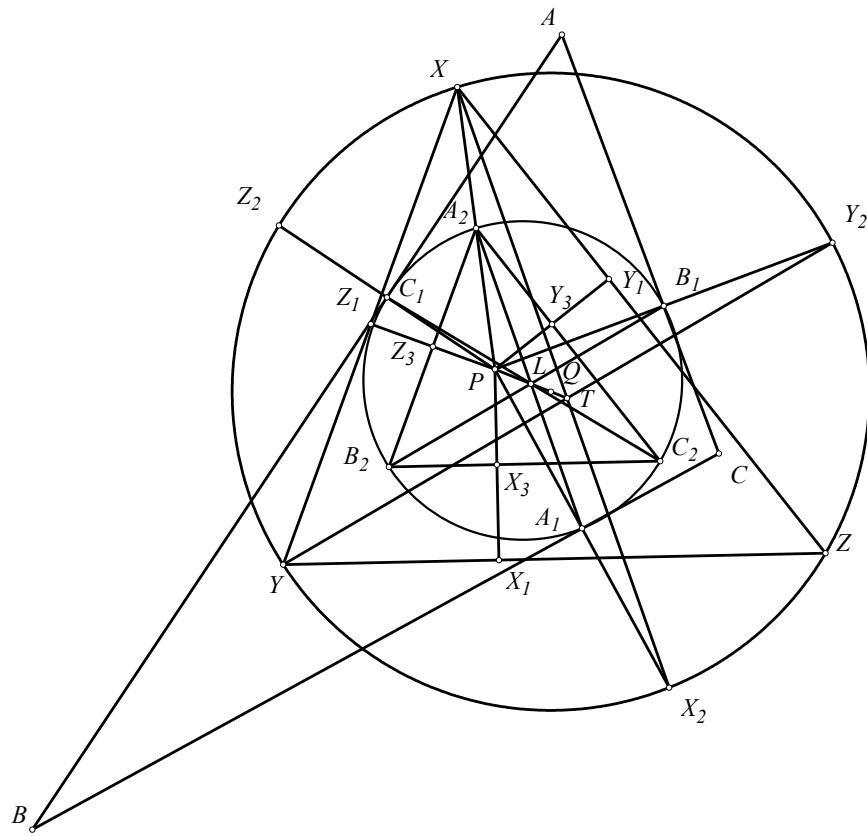
$$\text{Suy ra } \frac{XB}{XC} = \frac{\sin \angle B A Q}{\sin \angle C A Q} \cdot \frac{\sin \angle B A A_4}{\sin \angle C A A_4}.$$

Chứng minh tương tự với $\frac{YC}{YA}, \frac{ZA}{ZB}$. Áp dụng định lý Ceva dạng sin, (1) tương đương AA_4, BB_4, CC_4 đồng quy.

Mặt khác, gọi M là giao điểm của AB_3 với BA_3 . Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, B, A_3, B_3, A_2, B_2 ta thu được M, P, Q thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, B, A_3, B_3, A_4, B_4 ta thu được giao điểm của AA_4 và BB_4 nằm trên PQ . Chứng minh tương tự, giao điểm của CC_4 và BB_4 nằm trên PQ . Suy ra AA_4, BB_4, CC_4 đồng quy. Ta có đpcm. \square

Trở lại bài toán.



Gọi Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tam giác ABC . X_3, Y_3, Z_3 lần lượt là hình chiếu của P trên B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 .

Xét phép vị tự tâm P tỉ số 2, $\mathcal{H}_P^2: O \mapsto Q, A_2 \mapsto X, B_2 \mapsto Y, C_2 \mapsto Z, A_1 \mapsto X_2, B_1 \mapsto Y_2, C_1 \mapsto Z_2, X_3 \mapsto X_1, Y_3 \mapsto Y_1, Z_3 \mapsto Z_1; L \mapsto T$.

Suy ra Q là tâm của (XYZ) và $X_1Y_1Z_1$ là tam giác pedal của P ứng với ΔXYZ .

Ta có T, L, P thẳng hàng suy ra T, P, Q thẳng hàng và T là giao điểm của XX_2, YY_2, ZZ_2 .

Áp dụng bổ đề trên, ta thu được $(PX_1X_2), (PY_1Y_2), (PZ_1Z_2)$ đồng trực.

Suy ra giao điểm của các cặp đường thẳng B_2C_2 và BC, A_2C_2 và AC, A_2B_2 và AB thẳng hàng. Áp dụng định lý Desargues suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy. \square

Nhận xét.

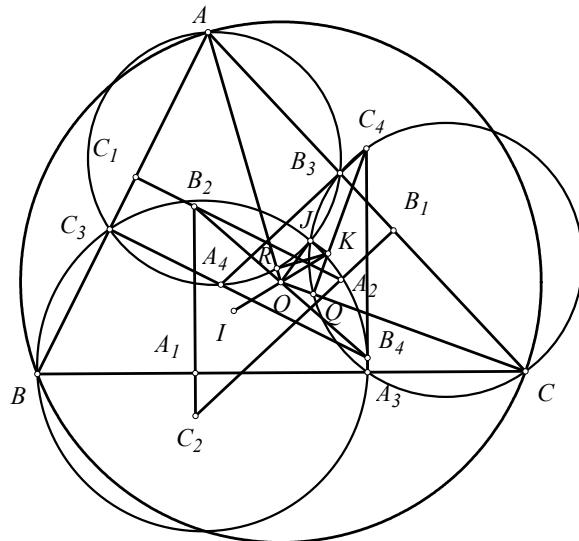
1. Bài toán trên là tổng quát của định lý Steinbart, phát biểu như sau.

Định lý. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi X, Y, Z là 3 điểm bất kì nằm trên (I) . Khi đó AX, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi DX, EY, FZ đồng quy.

2. Bằng phương pháp tương tự, bạn đọc có thể chứng minh bài toán sau.

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB , P là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC , A', B', C' là giao điểm thứ hai của AP, BP, CP với (O) . Chứng minh rằng các đường tròn $(A'OM_a)$, $(B'OM_b)$, $(C'OM_c)$ đồng trực.

Bài 106. Cho tam giác ABC với tâm đường tròn ngoại tiếp O . Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm bất kì nằm trên BC, CA, AB . Đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau và tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$ với tâm đường tròn ngoại tiếp I . Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB , J là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ 3 điểm (A_3, B_3, C_3) . Chứng minh rằng $OI \geq OJ$.



Lời giải. Các đường thẳng qua A_3, B_3, C_3 và vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau tạo thành tam giác $A_4B_4C_4$. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_4B_4C_4$.

Ta có $A_1B_2B_4A_3, C_1B_2B_4C_3$ là các hình thang vuông nên trung trực của A_1A_3, C_1C_3 cắt nhau tại trung điểm của B_2B_4 hay O là trung điểm B_2B_4 . Chứng minh tương tự suy ra hai tam giác $A_2B_2C_2$ và $A_4B_4C_4$ đối xứng nhau qua O .

Suy ra hai tâm đường tròn ngoại tiếp I và K cũng đối xứng với nhau qua O hay $OI = OK$.

Do hai tam giác ABC và $A_4B_4C_4$ có cạnh tương ứng vuông góc nên OC vuông góc với C_4K tại Q nằm trên đường tròn đường kính CC_4 . Hay nói cách khác OC cắt (CA_3B_3) tại Q . Tương tự OA cắt (AB_3C_3) tại R là hình chiếu của K trên AO .

Lại có (ARB_3) cắt (CQB_3) tại J nên J là điểm Miquel của tam giác AOC ứng với bộ 3 điểm B_3, R, Q . Suy ra O, R, Q, J đồng viên. Suy ra 5 điểm O, R, Q, J, K đồng viên.

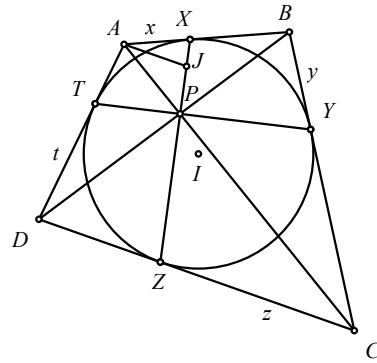
Từ đó $\angle OJK = 90^\circ$.

Vậy $OJ \leq OK$ hay $OJ \leq OI$. □

Bài 107. (*Tap chí THTT năm 2009*) Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD giao AC lần thứ hai tại X , đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao AC lần thứ hai tại Y . Khi đó tứ giác $BXDY$ ngoại tiếp.

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán theo dạng tổng quát hơn như sau.

Bài toán. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. AC giao BD tại P . Phép nghịch đảo tâm P phương tích bất kì biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành A', B', C', D' . Khi đó $A'B'C'D'$ cũng là một tứ giác ngoại tiếp.



Theo tính chất của phép nghịch đảo, $A'B' = k \cdot \frac{AB}{PA \cdot PB}$, $B'C' = k \cdot \frac{BC}{PB \cdot PC}$, $C'D' = k \cdot \frac{CD}{PC \cdot PD}$, $D'A' = k \cdot \frac{DA}{PD \cdot PA}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } A'B' + C'D' &= k \cdot \left(\frac{AB}{PA \cdot PB} + \frac{CD}{PC \cdot PD} \right) \\ &= \frac{k}{2} \sin \angle APB \cdot \left(\frac{AB}{1/2 PA \cdot PB \cdot \sin \angle APB} + \frac{CD}{1/2 PC \cdot PD \cdot \sin \angle DPC} \right) \\ &= \frac{k}{2} \sin \angle APB \cdot \left(\frac{AB}{S_{APB}} + \frac{CD}{S_{DPC}} \right) \end{aligned}$$

Gọi tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA lần lượt là X, Y, Z, T , $AX = AT = x$, $BX = BY = y$, $CY = CZ = z$, $DZ = DT = t$.

Từ A kẻ đường song song với DC cắt XZ tại J . Dễ thấy $\angle AXJ = \angle DZX = \angle AJX$ nên $AX = AJ = x$.

$$\text{Suy ra } \frac{S_{APB}}{S_{BPC}} = \frac{AP}{PC} = \frac{AJ}{CZ} = \frac{x}{z}.$$

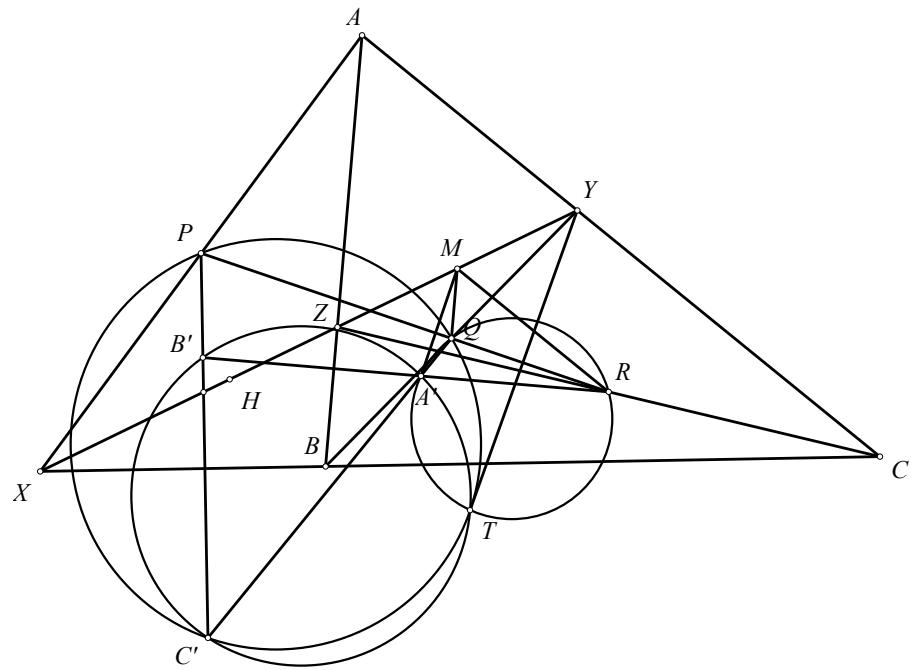
$$\text{Chứng minh tương tự suy ra } \frac{S_{APB}}{xy} = \frac{S_{BPC}}{yz} = \frac{S_{CPD}}{zt} = \frac{S_{DPA}}{tx} = q.$$

$$\text{Từ đó } \frac{AB}{S_{APB}} + \frac{CD}{S_{DPC}} = \frac{x+y}{qxy} + \frac{z+t}{qzt} = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right).$$

$$\text{Như vậy } A'B' + C'D' = \frac{k}{2q} \sin \angle APB \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right).$$

Tương tự suy ra $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$. Tức là tứ giác $A'B'C'D'$ ngoại tiếp. \square

- Bài 108.** Cho tam giác ABC . Một đường thẳng d bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm AX, BY, CZ . Các đường thẳng qua P, Q, R lần lượt vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng trực tâm tam giác $A'B'C'$ nằm trên d .



Lời giải. Gọi M là trung điểm YZ .

Ta có $A'Q \perp AC$ và MR là đường trung bình của tam giác ZYC nên $A'Q \perp MR$.

Tương tự $RQ \perp MA'$. Suy ra M là trực tâm tam giác RQA' . Vậy trực tâm tam giác RQA' nằm trên d .

Chứng minh tương tự, trực tâm các tam giác RPB' , PQC' cũng nằm trên d . Do đó d là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $PQA'B'.C'R$ (đường thẳng Steiner của điểm Miquel T ứng với 4 tam giác của tứ giác toàn phần $PQA'B'.C'R$). Do đó trực tâm tam giác $A'B'C'$ cũng nằm trên d . \square

Chương 4

Sáng tạo một bài toán hình học

4.1 Mở đầu

Hình học là một phân môn rất đặc biệt trong toán học. Vẻ đẹp của nó nằm trong hình vẽ mà muôn cảm nhận được đòi hỏi người đọc phải có một cái nhìn tinh tế, một trí tưởng tượng phong phú. Điều đó thuộc về năng khiếu mà không phải ai cũng có được. Vì vậy nói về câu chuyện sáng tạo một bài toán hình học thực sự rất khó, không thể giải thích tường tận cho người đọc rằng bài toán đã được tìm ra như thế nào, tại sao lại biết cách để dựng ra một mô hình như vậy. Ngoài những cấu hình lạ được tạo ra trong quá trình nghiên cứu hoặc những bài toán được tìm thấy trong quá trình giải bài toán khác, ta vẫn có thể có lời giải thích cho nhiều bài toán như dưới đây. Hi vọng qua các ví dụ này bạn đọc sẽ tìm ra kinh nghiệm cho riêng mình trong việc sáng tác ra một bài toán mới.

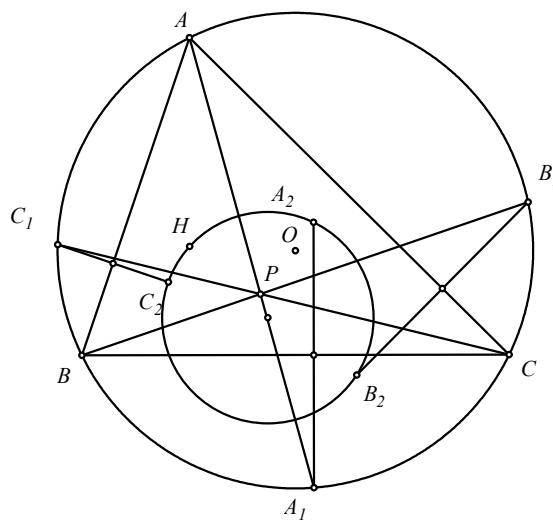
4.2 Sáng tạo ra bài toán mới như thế nào?

4.2.1 Lấy cảm hứng từ một mô hình đã biết

Rất nhiều bài toán khác nhau được sinh ra từ một dạng mô hình giống nhau. Lấy cảm hứng từ một mô hình đã biết tức là tìm ra những tính chất khác xung quanh hình vẽ của một bài toán, hoặc một dạng kết luận tương tự với bài toán đã biết.

Chúng ta hãy cùng xem xét một số ví dụ sau.

Bài 1. (*Dường tròn Hagge*) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Gọi P là điểm bất kì trên mặt phẳng. Các đường thẳng AP, BP, CP giao (O) lần thứ hai tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng H, A_2, B_2, C_2 cùng thuộc một đường tròn.



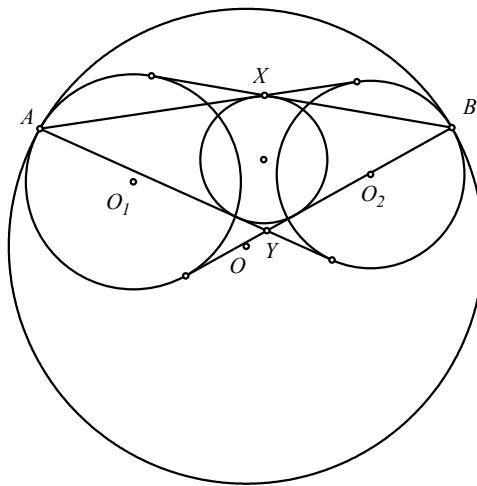
Đường tròn Hagge là một dạng mở rộng của đường thẳng Steiner. Trong cuốn sách này, bạn đọc đã thấy có một số bài toán có hình thức gần giống đường tròn Hagge như các bài 56, 57, 58, 59, 60. Đó là những phát hiện của tôi trong quá trình thay đổi giả thiết và đi tìm các tính chất của bài toán trên. Ý tưởng giải các bài toán này khá giống nhau, đó là sử dụng các phép biến hình và phương pháp chứng minh đại diện. Ý tưởng về đường tròn Hagge cũng được sử dụng trong bài toán số 1 tại kì thi chọn đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2018.

Chúng ta đến với một số ví dụ khác.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. Gọi d_1 và d_2 là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, P là điểm bất kì trên d_1 , Q là điểm bất kì trên d_2 . Từ P kẻ hai tiếp tuyến l_1, l_2 khác d_1 tới $(O_1), (O_2)$, từ Q kẻ hai tiếp tuyến l_3, l_4 khác d_2 tới $(O_1), (O_2)$. Chứng minh rằng l_1, l_2, l_3, l_4 cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.

Bài toán này không khó, chỉ cần một số phép cộng đoạn thẳng sau đó sử dụng định lý Pythagoras. Tuy nhiên sau một hồi biến đổi hình vẽ tôi tìm ra bài toán khá hay và lạ sau.

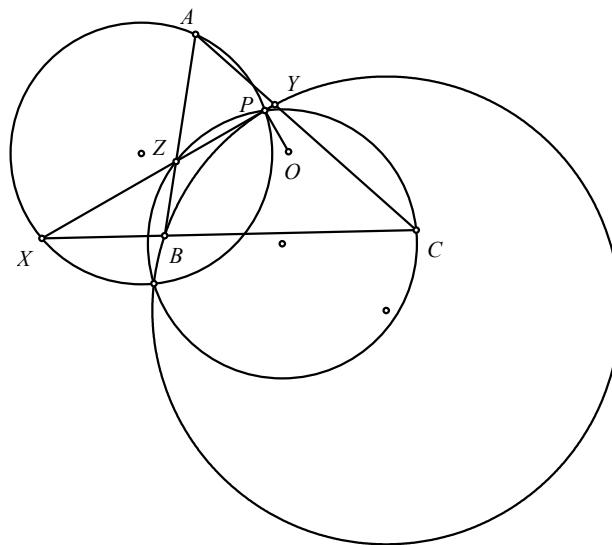
Bài 3. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A và B . Từ A kẻ hai tiếp tuyến d_1, d_2 tới (O_2) . Từ B kẻ hai tiếp tuyến d_3, d_4 tới (O_1) . Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3, d_4 cắt nhau tạo thành một tứ giác ngoại tiếp.



- Bài 4.** (*Tổng quát IMO 2009*). Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O . Gọi P, Q là hai điểm bất kì trên AC, AB . Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của BP, CQ, PQ ; R là hình chiếu của O trên PQ . Chứng minh rằng M, N, R, J cùng thuộc một đường tròn.

Quan sát hình vẽ thấy PQ là một đường thẳng đi qua AB, AC . Tôi cho đường thẳng PQ cắt BC và tìm các tính chất xung quanh mô hình. Kết quả thu được khá đặc sắc mà sau này trở thành đề thi IMO Shortlist 2012.

- Bài 5.** Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O . Một đường thẳng d bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Gọi P là hình chiếu của O trên d . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXP, BYP, CZP đồng trực.

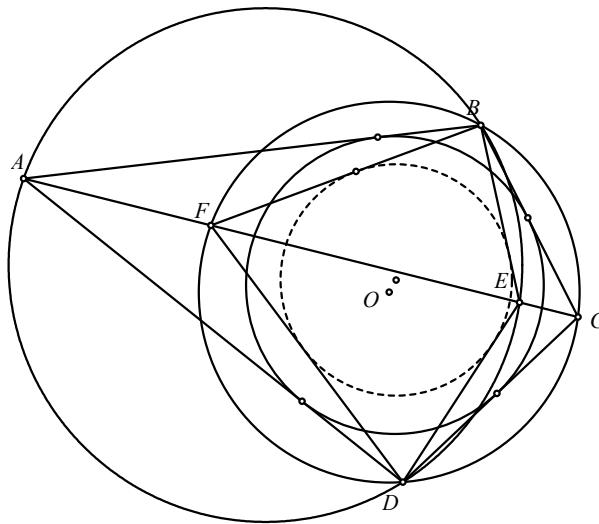


Câu hỏi sau được đặt ra bởi một thành viên trên diễn đàn AoPS.

Câu hỏi. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Tia OC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E , tia OA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại F . $BEDF$ có phải tứ giác ngoại tiếp hay không?

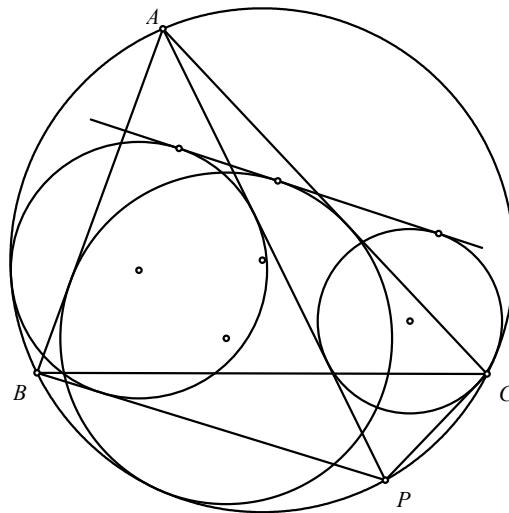
Dáng tiếc sau khi kiểm tra bằng các công cụ trên máy tính thì đáp án là không, dù sai số là rất nhỏ. Tuy nhiên dựa vào mô hình trên ta lại thu được bài toán mới khá thú vị.

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng AC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và BCD lần thứ hai tại E, F . Chứng minh rằng tứ giác $BEDF$ ngoại tiếp.



Bây giờ quan sát định lý Sawayama-Thebault 2 ở chương 3, thay vì chọn điểm D bất kì trên BC ta chọn điểm P bất kì trên (O) , kết quả thu được chính là bài toán 70.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm bất kì trên cung BC không chứa A . Chứng minh rằng đường tròn A -mixtilinear nội tiếp của tam giác ABC , các đường tròn P -mixtilinear nội tiếp của các tam giác PAB, PAC có chung một tiếp tuyến.



4.2.2 Đặc biệt hóa

Tư tưởng chính của phép đặc biệt hóa là từ một bài toán đã biết, lấy một trường hợp đặc biệt của hình vẽ rồi tạo ra bài toán mới.

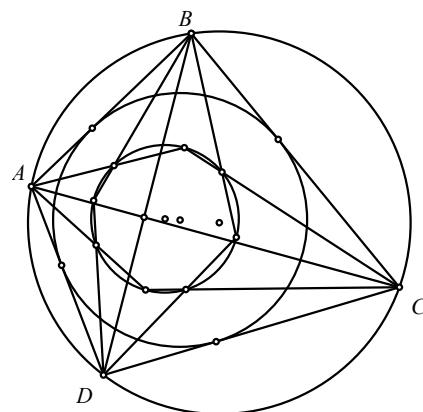
Chúng ta cùng xem xét một số ví dụ sau.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB . Chứng minh rằng $I_1I_2I_3I_4$ là hình chữ nhật.

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi P là giao điểm của AC và BD ; I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APB, BPC, CPD, DPA . Chứng minh rằng I_1, I_2, I_3, I_4 cùng thuộc một đường tròn.

Hai bài toán trên khá giống nhau, kết hợp giả thiết lại làm một ta thu được bài toán 75.

Bài 10. Cho tứ giác lưỡng tâm $ABCD$. Gọi P là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Chứng minh rằng tâm nội tiếp của 8 tam giác $ABC, BCD, CDA, DAB, APB, BPC, CPD, DPA$ cùng thuộc một đường tròn.

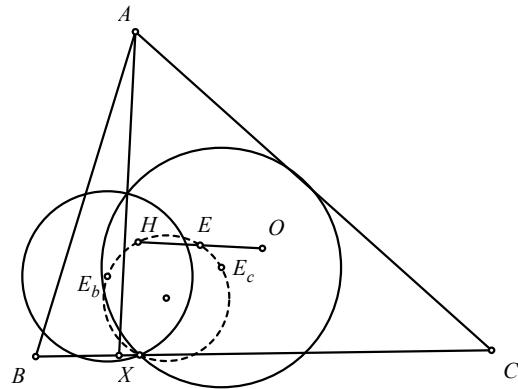


Ta xét một ví dụ khác.

Bài 11. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC cắt 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của các tam giác AYZ, BXZ, CXY lần lượt nằm trên các đường cao tương ứng của tam giác ABC .

Cho đường thẳng d chạy và thử xét bài toán trong trường hợp d đi qua đỉnh A . Khi đó tâm đường tròn Euler của các tam giác ABX, ACX lần lượt nằm trên đường cao hạ từ B và C . Từ đây ta lại thử liên hệ với đường tròn Euler của tam giác ABC xem có gì đặc biệt và thu được bài toán mới.

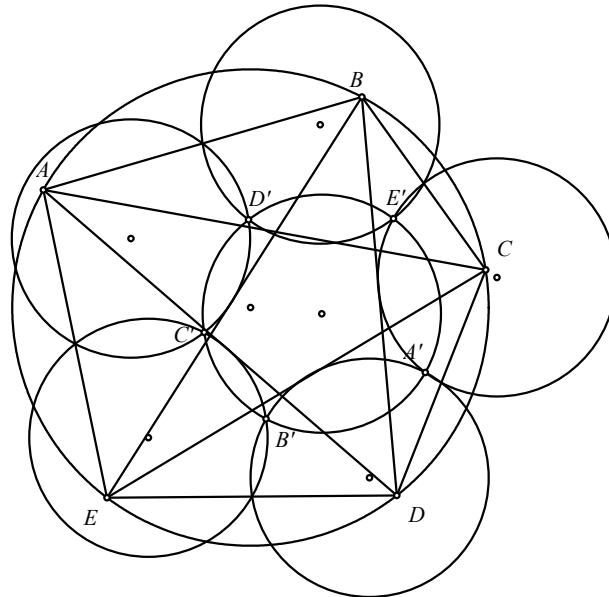
Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H . Đường thẳng qua A vuông góc với OH cắt BC tại X . Gọi E, E_b, E_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác ABC, ABX, ACX . Chứng minh rằng E, E_b, E_c, H cùng thuộc một đường tròn.



- Bài 13.** Cho 5 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nằm trên mặt phẳng và một điểm P bất kì sao cho P không nằm trên đường tròn ngoại tiếp của mỗi 3 điểm trong 5 điểm trên. Khi đó đường tròn pedal của P ứng với các tam giác $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4$ đồng quy tại X_5 . Tương tự ta cũng có các điểm X_1, X_2, X_3, X_4 . Khi đó X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán trên là một trường hợp riêng của một dạng phát biểu cho chuỗi đường tròn Clifford ứng với 5 điểm. Bây giờ thay vì 5 điểm bất kì trên mặt phẳng ta cho 5 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cùng thuộc một đường tròn có tâm O và cho P trùng O . Từ đó thu được bài toán sau.

- Bài 14.** Cho ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi A', B', C', D', E' lần lượt là giao điểm thứ hai không nằm trên cạnh ngũ giác $ABCDE$ của đường tròn Euler của các tam giác ABC, BCD, CDE, DEA, EAB . Chứng minh rằng A', B', C', D', E' cùng thuộc một đường tròn.



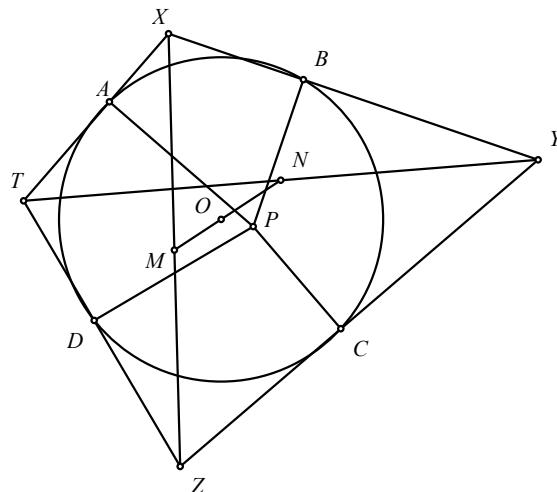
4.2.3 Tổng quát hóa

Ngược lại với đặc biệt hóa, tổng quát là việc mở rộng bài toán, tạo ra bài toán mới bao hàm bài toán cũ. Chúng ta hãy thử tìm hiểu phương pháp này qua một số ví dụ sau.

Bài 15. (*Dường thẳng Newton của tứ giác ngoại tiếp*). Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) . Khi đó O nằm trên đường thẳng nối hai trung điểm của AC và BD .

Gọi các tiếp điểm của AB, BC, CD, DA lần lượt là X, Y, Z, T . Ta có OX, OY, OZ, OT lần lượt vuông góc với 4 cạnh của tứ giác $ABCD$. Thay vì chọn O là tâm của đường tròn chúng ta sẽ chọn một điểm P bất kì nằm trong đường tròn và thu được bài toán sau.

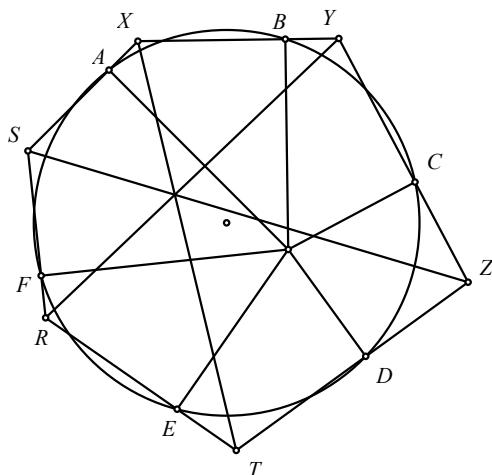
Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , P là điểm bất kì nằm trong (O) . Gọi $XYZT$ là tứ giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng qua A và vuông góc với PA , qua B và vuông góc với PB , qua C và vuông góc với PC , qua D và vuông góc với PD . Khi đó O nằm trên đường thẳng nối hai trung điểm XZ và YT .



Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể mở rộng định lý Brianchon cho lục giác ngoại tiếp.

Bài 17. (*Định lý Brianchon*). Cho lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp. Khi đó AD, BE, CF đồng quy.
Mở rộng.

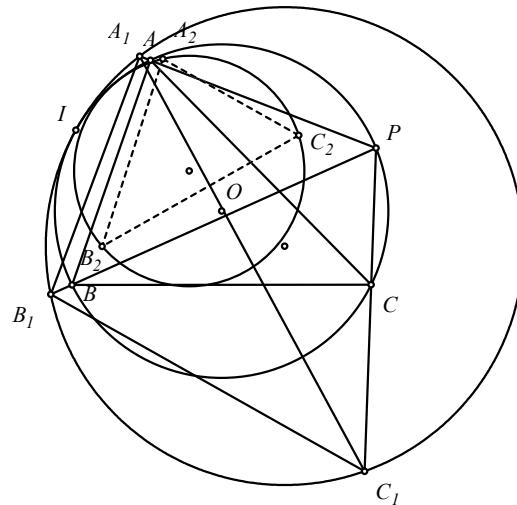
Bài 18. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm bất kì nằm trong (O) . Gọi $XYZTRS$ là lục giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng qua A vuông góc với PA , qua B vuông góc với PB , qua C vuông góc với PC , qua D vuông góc với PD , qua E vuông góc với PE và qua F vuông góc với PF . Khi đó XT, YR, ZS đồng quy.



- Bài 19.** (*IMO 2011*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn ω . Gọi t là tiếp tuyến bất kì của ω , t_a, t_b, t_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với t qua BC, CA, AB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác được tạo bởi giao điểm của các đường thẳng t_a, t_b, t_c tiếp xúc với ω .

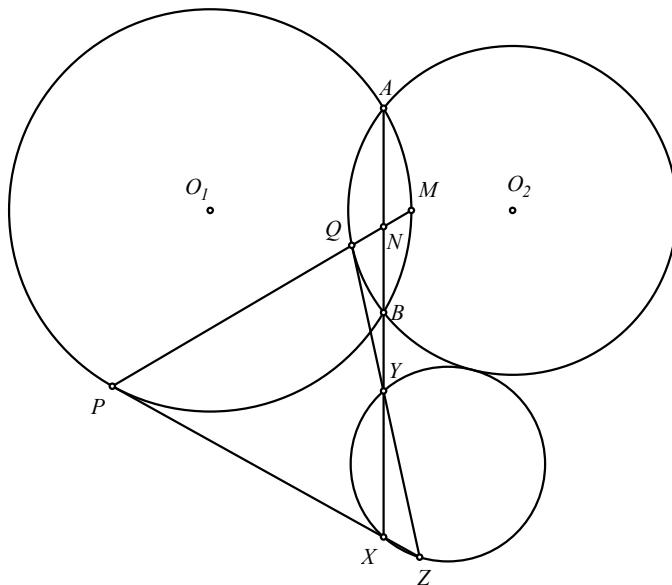
Gọi $A'B'C'$ là tam giác tạo bởi giao điểm của t_a, t_b, t_c . Ý tưởng quan trọng có trong lời giải bài toán là chứng minh AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm I trên (O) . Xuất phát từ ý tưởng này ta có thể mở rộng bài toán và thu được bài 87.

- Bài 20.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (O', R') tiếp xúc với (O) tại I sao cho $R < R'$. P là một điểm bất kì trên (O) . Các tia PA, PB, PC lần lượt cắt (O') tại A_1, B_1, C_1 . Gọi $A_2B_2C_2$ là tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng đối xứng với B_1C_1 qua BC , C_1A_1 qua CA , A_1B_1 qua AB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ cũng tiếp xúc với (O) .



Tiện đây chúng ta cũng xem xét một bài toán và ý tưởng chứng minh khá giống với bài toán IMO 2011, có thể bài toán được lấy cảm hứng từ chính mô hình của IMO 2011.

- Bài 21.** (*APMO 2014*). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) giao nhau tại hai điểm A, B . Gọi M là điểm chính giữa cung AB của (O_1) sao cho M nằm trong (O_2) . Dây cung MP của (O_1) cắt (O_2) tại Q sao cho Q nằm trong (O_1) . Gọi l_1, l_2 lần lượt là tiếp tuyến của (O_1) tại P và (O_2) tại Q . Chứng minh rằng tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng l_1, l_2, AB tiếp xúc với (O_2) .



Hãy cùng nhìn lại bài toán 60. Khi mới được tìm ra, thực sự đó là một bài toán rất khó và không có lời giải. Một thời gian khá dài sau trên diễn đàn AoPS có một lời giải sơ cấp của tác giả Kostas Vittas sử dụng tới 6 bỗng đề. Khi đó trong lúc bế tắc, tôi đã thử tổng quát bài toán và hóa ra trong trường hợp tổng quát nó trở nên khá đơn giản.

- Bài 22.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi X, Y là hai điểm bất kì nằm trong (O) sao cho O nằm trên XY . AX, BX, CX lần lượt cắt (O) lần thứ hai tại A_1, B_1, C_1 , AY, BY, CY cắt (O) lần thứ hai tại A_2, B_2, C_2 . Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là điểm đối xứng với A_2, B_2, C_2 qua trung điểm A_1X, B_1Y, C_1Z . Khi đó A_3, B_3, C_3, X cùng nằm trên một đường tròn có tâm nằm trên XY .

Bây giờ chúng ta cùng nhìn bài toán 10. Chúng ta đã có 8 tâm đường tròn nội tiếp đồng viên. Một câu hỏi đặt ra là có thể tổng quát cho những đa giác lưỡng tâm nhiều hơn 4 cạnh không? Sau một hồi biến đổi tôi đã chứng minh bài toán đúng với ngũ giác lưỡng tâm và nhận ra rằng lời giải cho trường hợp ngũ giác hoàn toàn áp dụng được cho trường hợp đa giác n cạnh bất kỳ. Đó cũng chính là nội dung của bài toán 95.

4.2.4 Nghịch đảo

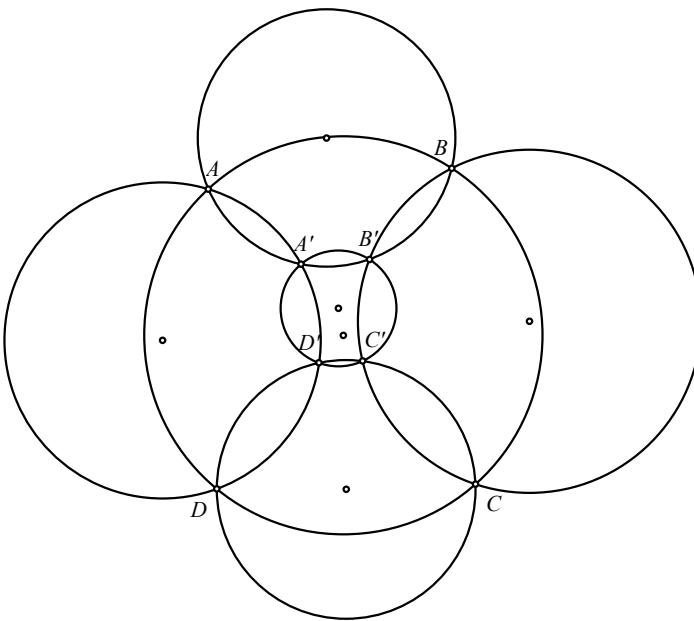
Phép nghịch đảo là một trong những công cụ rất mạnh của hình học. Nó biến một mô hình đã biết thành một mô hình mới mà thoát nhìn có vẻ không hề liên quan đến bài toán cũ. Như vậy có thể tìm ra bài toán mới bằng cách nghịch đảo từ bài toán đã biết, sau đó lại sử dụng các phép đặc biệt hóa, tổng quát hóa để "chế biến". Có nhiều bài toán rất đẹp được tạo ra từ phép nghịch đảo. Tuy nhiên việc quá lạm dụng phép nghịch đảo lại khiến cho nhiều bài toán mất đi vẻ đẹp do bị che giấu bản chất.

Một ví dụ điển hình cho phép nghịch đảo là định lý về điểm Miquel của tam giác và định lý Miquel về 6 đường tròn.

- Bài 23.** Cho tam giác ABC . A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm bất kì trên các cạnh BC, CA, AB . Khi đó đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ đồng quy tại một điểm gọi là điểm Miquel của tam giác ABC ứng với bộ 3 điểm A_1, B_1, C_1 .

Bây giờ ta chọn một điểm P bất kì trên mặt phẳng sao cho P không nằm trên các cạnh của tam giác ABC và nằm ngoài các đường tròn (AB_1C_1) , (A_1BC_1) , (A_1B_1C) . Sử dụng phép nghịch đảo cực P phương tích bất kì, bài toán trên biến thành bài toán sau:

- Bài 24.** (*Bài toán 6 đường tròn*). Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự nằm trên đường tròn (O) . Gọi $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ lần lượt là các đường tròn bất kì qua các cặp điểm (A, B) , (B, C) , (C, D) , (D, A) ; B', C', D', A' là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2) , (O_2) và (O_3) , (O_3) và (O_4) , (O_4) và (O_1) . Khi đó A', B', C', D' cùng thuộc một đường tròn.



Hay như một ví dụ khác bạn đọc có thể xem lại bài toán 88. Bài toán 88 là tổng quát của bối cảnh trong bài toán 87 bằng cách thay đường thẳng bất kì qua P bằng một đường tròn bất kì qua P . Qua phép nghịch đảo chúng ta lại biến bài 88 về dạng khác như trong lời giải.

4.3 Thé nào là một bài toán đẹp?

Chúng ta đã đi qua 4 phương pháp chính trong việc sáng tạo ra bài toán mới. Tất nhiên để tìm ra một kết quả đẹp, một bài toán hay thì không đơn giản. Cần một chút kinh nghiệm, một chút tinh tế trong quan sát và tất nhiên là một chút may mắn. Bản thân tác giả thích sử dụng phương pháp 1 nhất khi nó có thể tạo ra những kết quả đẹp và lạ đến bất ngờ. Tuy nhiên phương pháp 1 khá khó áp dụng và hay dẫn đến ngõ cụt.

Để kết thúc chúng ta sẽ bàn luận một chút về bài toán hình học đẹp. Theo quan điểm cá nhân thì tôi cho rằng một bài toán đẹp là bài toán có cách phát biểu ngắn gọn, dễ hiểu, dễ tưởng tượng. Kết luận cũng độc đáo lạ mắt. Tuy nhiên nó phải đảm bảo hai yếu tố. Một là kết luận không quá hiển nhiên. Có nhiều bài toán nhìn qua thì phát biểu khá đẹp, cách giải của người ra đề cũng khá phức tạp, tưởng như đó là một bài toán khó. Tuy nhiên đến khi xem lời giải của học sinh mới nhận ra mình đã thất bại vì bài toán quá hiển nhiên. Hai là các dữ liệu của bài toán không được kết hợp cơ học, có nghĩa là ghép nối một cách khéo léo các tính chất của bài toán nọ với bài toán kia để tạo ra bài toán mới. Những bài toán sinh ra kiểu này

nhìn khá khó chịu vì trong quá trình giải phải chia nhỏ ra nhiều bài toán phụ. Nó cũng đòi hỏi người làm phải biết nhiều bổ đề định lý. Một đề thi học sinh giỏi quá phức tạp như vậy có thể để lọt mất những học trò tiềm năng nhưng chưa được học nhiều.

Một lời khuyên tới bạn đọc là không nên mất thời gian cho những bài toán cơ học, rắc rối trong cách phát biểu mà nên làm những bài toán đẹp, có ý nghĩa và mang tính chìa khóa cho những bài toán khác.

Chúc các bạn thành công!

Tài liệu tham khảo

- [1] Roger A.Johnson, *Advanced Euclidean geometry, Dover reprint, 1960.*
- [2] Arseniy Akopyan, *Geometry in Figures*, 2011.
- [3] Tạp chí Pi số 1 năm 2017.
- [4] Tạp chí Toán tuổi thơ 2 các năm 2008, 2012.
- [5] Tổng tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ các năm 2010-2016.
- [6] Geometry Mathley Contest, Hexagon of Maths and Science.
<http://www.hexagon.edu.vn/mathley.html>
- [7] Nguyễn Văn Linh, Euclidean Geometry Blog.
<http://nguyenvanlinh.wordpress.com>
- [8] Jean-Louis Ayme's Geometry blog.
<http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr>
- [9] AoPS forum.
<http://artofproblemsolving.com>
- [10] H. Fukagawa và T. Rothman, *Sacred Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [11] T. Rothman, Japanese Temple Geometry, *Scientific American*, 1998, 5:84–91.
- [12] Paris Pamfilos, *Some Remarks on a Sangaku from Chiba*, Forum Geom, Vol.15 (2015) 275-280.

Email: *Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com*