ИНСТИТУТ ТРАНСПОРТА И СВЯЗИ

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Лабораторная работа №3
По дисциплине
«Численные методы и прикладное программирование»

Тема:
«Методы решения нелинейного уравнения»

Работу выполнили:

Дзенис Ричард
Кобелев Денис
Якушин Владислав

Рига
2017 г.

Содержание

1 Формулировка задания

В данной лабораторной работе требуется реализовать два алгоритма решения нелинейного уравнения: метод бисекции и индивидуальный метод. Предусмотрено два способа реализации алгоритмов: с использованием скользящего окна или же с локально заданным интервалом. В зависимости от выбора реализации, будут меняться входные параметры метода. Во всех обоих случаях в качестве входного параметра требуется установить ввод точности решения (эпсилон). В таблице ниже представлены необходимые параметры для запуска алгоритмов:

Использование скользящего окна	Установка локальной области поиска
– Начальная точка всей области поиска	– Начальная точка локального окна
– Конечная точка всей области поиска	– Конечная точка локального окна
– Ширина скользящего окна	

Так же, для некоторых задач будет необходимо предусмотреть смещение функции по оси Y, поэтому для создания более универсальной реализации, требуется ввести и этот параметр.

2 Поиск корней методом бисекции

В данной лабораторной работе была разработана модификация метода половинного деления, которая способна находить абсолютно все корни на заданном интервале $(\mathrm{left}; \mathrm{right})$. Это достигается тем, что после нахождения очередного корня, в список интервалов для проверки добавляется два следующих интервала:

- $(\mathrm{oleft}; \mathrm{middle} - \varepsilon)$, и
- $(\mathrm{middle} + \varepsilon; \mathrm{oright})$.

где: oleft – исходная левая граница интервала;
oright – исходная правая граница интервала;
middle – найденный корень.

```cpp
#include "common.h"

roots find_roots(
        std::function<double(double)> f,
        double left,
        double right,
        const double epsilon
        )
{
    roots results;
    std::vector<std::pair<double, double>> intervals;

    intervals.emplace_back(std::make_pair(left, right));

    while (!intervals.empty()) {
        auto [oleft, oright] = intervals.back();
        intervals.pop_back();

        left = oleft;
        right = oright;

        size_t iterations = 0;
        double middle;
        do {
            middle = left / 2 + right / 2;
            if (f(left) * f(middle) <= 0)
                right = middle;
            else
                left = middle;
            iterations++;
        } while (right - left > epsilon);

        if (middle - oleft > epsilon
        && oright - middle > epsilon) {
            intervals.emplace_back(std::make_pair(oleft, middle - epsilon));
            intervals.emplace_back(std::make_pair(middle + epsilon, oright));
        } else {
            continue;
        }

        if (can_insert(results, middle, epsilon))
            results.emplace(middle, iterations);
    }

    return results;
}

#include "main.h"
```

Основная логика метода бисекции располагается на строчках 24-31.

Также можно заметить, что отсутствует начальная проверка на наличие корней в интервале, это делается из расчёта на то, что количество корней может быть чётное на заданном интервале.

Наконец, в случае если метод половинного деления «ушёл» в исходную левую или правую границу, то найденный корень считается «ложным» и отбрасывается.

2.1 Результаты работы метода

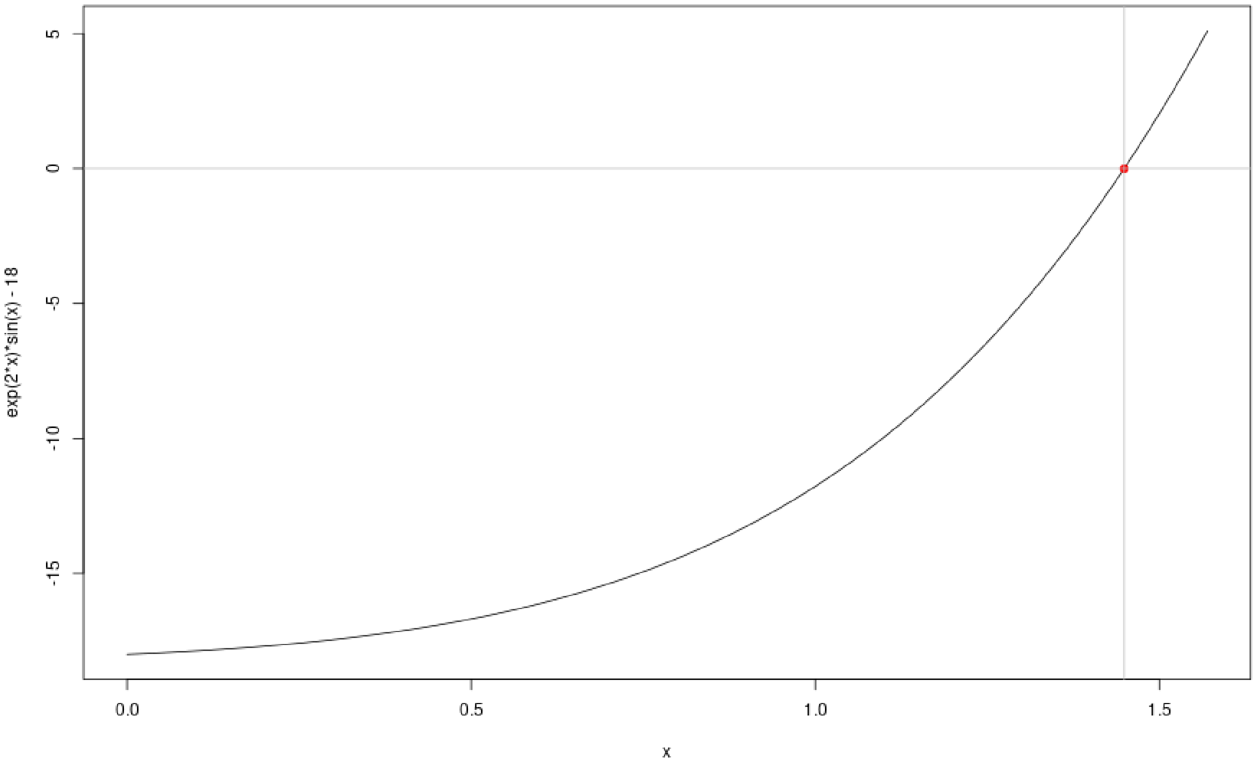

Рис. 1: График функции $e^{2x} \cdot \sin(x) - 18$ на интервале $[0; ^{\pi}/_{2}]$.

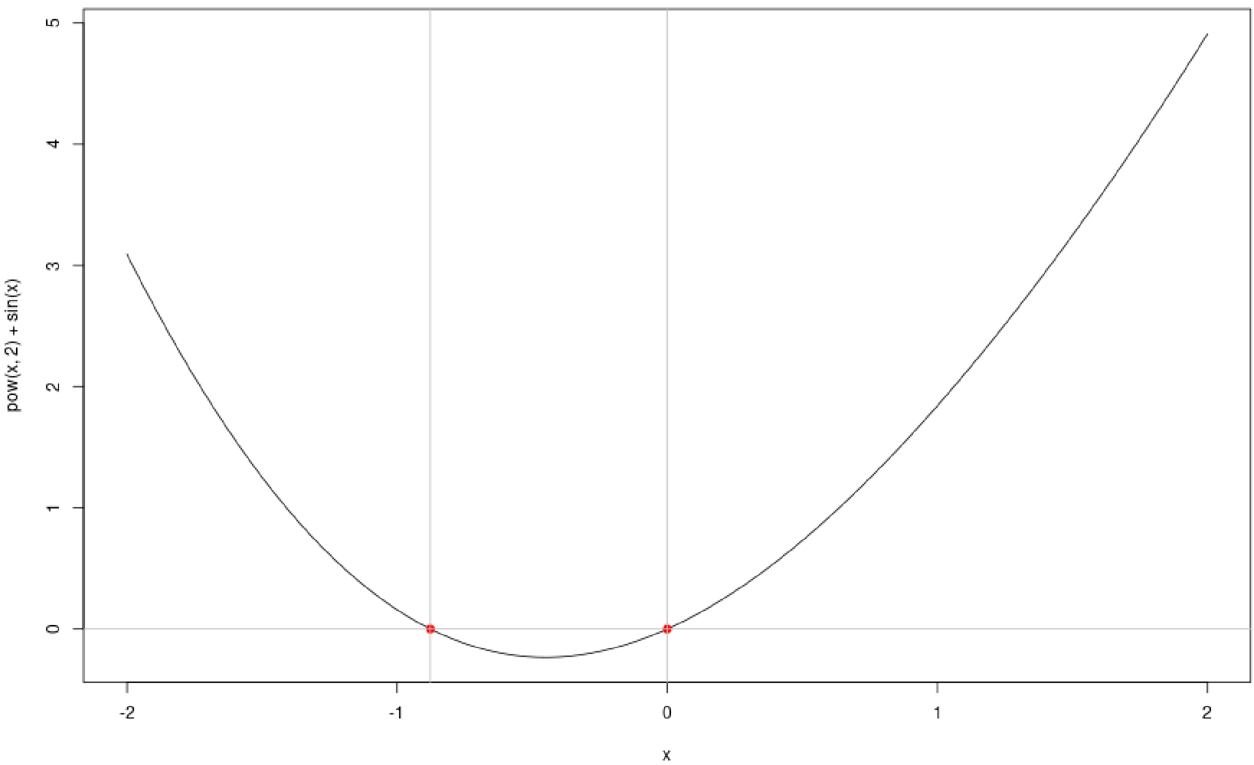

Рис. 2: График функции $x^2 + \sin(x)$ на интервале $[-2; +2]$.

Функция	Точность	Найденные корни	Число итераций
$e^{2x} \cdot \sin(x) - 18$	10^{-2}	1.45348	8
	10^{-4}	1.44897	14
	10^{-6}	1.44891	21
	10^{-9}	1.44891	31
$x^2 + \sin(x)$	10^{-2}	-0.882812	9
		-0.0031134	9
	10^{-4}	-0.87677	16
		$7.87441 \cdot 10^{-5}$	15
	10^{-6}	-0.876727	22
		$6.58521 \cdot 10^{-7}$	22
	10^{-9}	-0.876726	32
		$2.85042 \cdot 10^{-10}$	32

Во всех случаях число итераций совпало с теоретическим числом итераций (с точностью до единицы), рассчитанным по формуле:

$$k = \log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon} \tag{1}$$

ε	k
10^{-2}	8.643856
10^{-4}	15.28771
10^{-6}	21.93157
10^{-9}	31.89735

3 Выводы

Приложение

Вывод коэффициентов для метода парабол

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} &y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ &+y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &+y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &+y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &+y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_0)(x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y_0 \cdot (x-x_1)(x-x_2) \cdot (x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_2-x_0)(x_2-x_1) \\ &+y_1 \cdot (x-x_0)(x-x_2) \cdot (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_2-x_0)(x_2-x_1) \\ &+y_2 \cdot (x-x_0)(x-x_1) \cdot (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_0)(x_1-x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-y_0 \cdot (x-x_1)(x-x_2) \cdot (x_1-x_0)(x_1-x_2)^2(x_2-x_0) \\ &-y_1 \cdot (x-x_0)(x-x_2) \cdot (x_0-x_1)(x_0-x_2)^2(x_2-x_1) \\ &-y_2 \cdot (x-x_0)(x-x_1) \cdot (x_0-x_1)^2(x_0-x_2)(x_1-x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-y_0 \cdot (x-x_1)(x-x_2) \cdot (x_0-x_1)(x_1-x_2)^2(x_0-x_2) \\ &+y_1 \cdot (x-x_0)(x-x_2) \cdot (x_0-x_1)(x_0-x_2)^2(x_1-x_2) \\ &-y_2 \cdot (x-x_0)(x-x_1) \cdot (x_0-x_1)^2(x_0-x_2)(x_1-x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_0-x_2) \cdot \big(\\ &-y_0 \cdot (x-x_1)(x-x_2) \cdot (x_1-x_2) \\ &+y_1 \cdot (x-x_0)(x-x_2) \cdot (x_0-x_2) \\ &-y_2 \cdot (x-x_0)(x-x_1) \cdot (x_0-x_1) \\ &\big) = 0 \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} m &= (x_0-x_1) \\ n &= (x_1-x_2) \\ k &= (x_0-x_2) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}-y_0\cdot(x-x_1)(x-x_2)\cdot n\\+y_1\cdot(x-x_0)(x-x_2)\cdot k\\-y_2\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdot m\\=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-y_0\cdot(x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2)\cdot n\\+y_1\cdot(x^2-xx_2-xx_0+x_0x_2)\cdot k\\-y_2\cdot(x^2-xx_1-xx_0+x_0x_1)\cdot m\\=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-y_0\cdot(x^2-x(x_2+x_1)+x_1x_2)\cdot n\\+y_1\cdot(x^2-x(x_2+x_0)+x_0x_2)\cdot k\\-y_2\cdot(x^2-x(x_1+x_0)+x_0x_1)\cdot m\\=0\end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{array}{ll}e=x_2+x_1 & o=x_1x_2\\ f=x_2+x_0 & p=x_0x_2\\ g=x_1+x_0 & q=x_0x_1\end{array}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}-y_0\cdot(x^2-xe+o)\cdot n\\+y_1\cdot(x^2-xf+p)\cdot k\\-y_2\cdot(x^2-xg+q)\cdot m\\=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-y_0n+y_1k-y_2m)x^2\\-(-y_0ne+y_1kf-y_2mg)x\\+(-y_0no+y_1kp-y_2mq)\\=0\end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}u&=y_0n\\v&=y_1k\\w&=y_2m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a&=-u+v-w\\b&=-ue+vf-wg\\c&=-uo+vp-wq\end{aligned}$$

Далее решается квадратное уравнение, при условии $a\neq 0$.

$$ax^2-bx+c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

В случае $a=0$, уравнение – линейное, и принимает вид:

$$-bx+c=0$$

$$x=\frac{c}{b}$$

Вывод коэффициентов для метода парабол (версия 2)

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ = 0 \end{aligned}$$

Каждую из дробей с коэффициентом y_i можно представить как квадратное уравнение:

$$y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = y_0 \cdot \frac{x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = a_0 x^2 + b_0 x + c_0, \text{где} \begin{cases} a_0 = \dfrac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ \\ b_0 = -\dfrac{y_0(x_1 + x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ \\ c_0 = \dfrac{y_0 x_1 x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \end{cases}$$

Аналогично можно проделать для дробей при коэффициентах y_1 и y_2. Тогда исходное уравнение с тремя дробями можно представить в виде следующего квадратного уравнения:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

где:

$$\begin{aligned} A = a_0 + a_1 + a_2 \\ B = b_0 + b_1 + b_2 \\ C = c_0 + c_1 + c_2 \end{aligned}$$