Cálculo II

Transformadas de Laplace

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, localmente integrável em $\mathbb{R}_0^+$. Então, a

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

chama-se a *Transformada de Laplace de* f e denota-se por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$ para o qual o integral acima converge.
Chama-se *Transformada Inversa de Laplace de* f a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Formulário

O formulário abaixo permite obter tanto as transformadas de Laplace de uma função $h(t)$ (lendo a tabela da esquerda para a direita), bem como as transformadas inversas de $H(s)$ (lendo a tabela da direita para a esquerda).
No contexto da tabela sejam:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ s > s_f$$
$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s),\ s > s_g$$

$\mathbf{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$	$\mathbf{\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)}$
$t^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$\sin(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\sinh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s),\ s > s_f, s_g$
$\alpha f(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha F(s),\ s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t), \lambda \in \mathbb{R}$	$F(s-\lambda),\ s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a), a > 0$	$e^{-as} F(s),\ s > s_f$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a}),\ s > a s_f$
$t^n f(t), n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n F^{(n)}(s),\ s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$sF(s) - f(0),$ $s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$ $s >$ ordem exp. de f, f'
$f^{(n)}(t), n \in \mathbb{N}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),\ s >$ ordem exp. de $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s),\ s >$ ordem exp. de $f,\ g$
$\int_0^t f(\tau)\ d\tau$	$\frac{F(s)}{s},\ s > 0,$ ordem exp. de f

Transformada da Convolução

Se $\exists \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\exists \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, então:

$$\exists \mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t),$$

onde

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\ d\tau$$

Nota: A operação de convolução é comutativa, ou seja, $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

Equações Diferenciais Ordinárias

Equação Diferencial Ordinária de ordem n:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Integral Geral:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

ou

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Onde $y = y(x)$, e o grau da equação diferencial é denotado por n.

Obter EDO a partir de Integral Geral

1. Derivar n vezes o integral geral, sendo que cada expressão derivada será uma equação do sistema abaixo
2. Resolver o sistema de n equações obtidas em ordem às constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$
3. Substituir no integral geral as expressões obtidas para cada constante $C_1, C_2, \ldots, C_n$
4. Obtém-se a equação diferencial ordinária pretendida

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Equações de Variáveis Separáveis

$$y' = f(x)g(y)$$
$$M_1(x)N_1(y)\ dy + M_2(x)N_2(y)\ dx = 0$$

1. Escrever a equação na forma $y'Q(y) = P(x)$, com $Q(y) = \frac{1}{g(y)}$ $\left(\text{ou } Q(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}\right)$ e $P(x) = f(x)$ $\left(\text{ou } P(x) = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}\right)$ e tomando nota de que restrições foram feitas ao domínio da expressão (por exemplo divisões por $g(y)$ ou $N_2(y)$)
2. Primitivar a expressão obtida, ou seja, resolver $\int Q(y)\ dy = \int P(x)\ dx$
3. Obter integral geral da EDO
4. Verificar se as restrições que foram feitas no ponto 1 estão ou não contempladas no integral geral. Se sim, a solução geral é o integral geral. Se não essas expressões são equações singulares e a solução geral é dada pelo integral geral, juntamente com as soluções singulares

Nota: Equações diferenciais redutíveis a equações de variáveis separáveis são equações onde, através de uma mudança de variável, se consegue reduzir a equação a uma EDO de variáveis separáveis. Por exemplo a expressão

$$y' = f(ax + by + c),\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

é redutível a uma equação diferencial de variáveis separáveis através da substituição $u = ax + by + c,\ u = u(x)$. A partir daí, o método de resolução é o exposto acima, apenas no final se tem de substituir de volta u por $ax + by + c$.

Equações Homogéneas

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0,$$

onde $M,\ N$ são funções com o mesmo grau de homogeneidade.
Se $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y),\ \alpha \in \mathbb{R}$ então f diz-me homogénea de grau de homogeneidade α.

Caso a equação esteja na forma $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$

a) Determinar grau de homogeneidade α de M e N
b) Multiplicar a equação por $\frac{1}{x^\alpha}$
c) Obter uma equação escrita na forma normal $y' = \Phi(\frac{y}{x})$

1. Aplicar a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$
2. Resolver a equação obtida (de variáveis separáveis)
3. Substituir de volta u por $\frac{y}{x}$

Equações Redutiveis a Homogéneas ou de Variáveis Separáveis

$$y' = \Phi\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right),$$
$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2,\ c_1 \neq 0 \text{ ou } c_2 \neq 0$$

1. Calcular $\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
2. $\lambda = 0$ A equação pode reduzir-se a uma de variáveis separáveis através da mudança de variável $z = a_1 x + b_1 y,\ z = z(x)$

   $\lambda \neq 0$ A equação pode reduzir-se a uma homogénea através das mudanças de variáveis $x = u + h$ e $y = v + k$, onde $u,\ v$ são variáveis (e $v = v(u)$) e $h,\ k \in \mathbb{R}$.
   Resolver:

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{cases}$$

   de forma a obter h e k. Resolver a equação homogénea resultante da substituição, no final devolvendo as variáveis substituídas.

Equações Lineares de 1ª Ordem

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

I Método de Bernoulli

1. Mudança de variável $y = uv,\ u = u(x),\ v = v(x)$. Obtém-se:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

2. Calcular <u>uma</u> solução (portanto "sem constantes") de v para

$$v' + P(x)v = 0$$

3. Calcular a solução u para $u'v = Q(x)$
4. $y = uv$, onde u e v são as soluções encontradas antes

II Método de Lagrange (variação de constante)

1. Resolver a equação homogénea (que é de variáveis separáveis) associada

$$y' + P(x)y = 0$$

2. Na solução do ponto anterior surge uma constante. Considere-se a solução como tendo o aspecto $CH(x)$ onde $H(x) = e^{-\int P(x)\ dx}$ e C é uma constante. Então, passa-se essa constante a uma função de x, ou seja, obtém-se $C(x)H(x)$
3. Iguala-se a expressão obtida no ponto anterior à função $Q(x)$, mas considerando a parcela $C(x)$ como estando derivada. Ou seja, resolve-se $C'(x)H(x) = Q(x)$
4. A solução geral será dada por $y = C(x)H(x) = H(x)\int H^{-1}(x)Q(x)\ dx$

III Fator Integrante

1. Determinar $I(x)$ tal que $I(x) = e^{\int P(x)\ dx}$
2. Vem $(I(x)y)' = Q(x)I(x)$, logo, resolve-se $I(x)y = \int Q(x)I(x)\ dx$ para obter y

Equação Diferencial de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$$

Para resolver uma equação de Bernoulli basta utilizar um dos métodos abaixo:

- Resolver pelo **Método de Bernoulli**
- Resolver pela mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$, de onde se obtém uma equação de aspecto

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)z = Q(x)$$

que não é mais do que uma equação linear de 1ª ordem, que portanto pode ser resolvida pelos processos expostos acima. No final, deve-se devolver as variáveis iniciais e deve-se confirmar (especialmente se α for positivo) que não se perderam soluções.

Soluções de Problemas de Cauchy

Visto que as soluções obtidas para EDOs são uma família de funções, de forma a se determinar uma solução particular é necessário conhecer valores que permitam inferir sobre que função da família de soluções obtida é a que se procura. Conhecendo-se esses valores, o processo para obtenção da solução particular pretendida é o exposto abaixo:

1. Determinar a solução geral da EDO em estudo
2. A partir das condições iniciais, determinar o valor das constantes que figuram na solução geral
3. A solução particular pretendida é a solução geral onde as suas constantes tomam o valor determinado acima

Equações Diferenciais de Ordem n, $n \geq 1$

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = Q(x),\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$$

As soluções de equações diferenciais de ordem n têm o aspecto $y_g = y_h + y_p$. Assim, para calcular y_g podem-se seguir as etapas abaixo.

1. Calcular as soluções do polinómio característico da equação, ou seja, resolver:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_n = 0$$

2. A cada solução λ_i de multiplicidade s faz-se corresponder uma equação y_i, de forma a se obter o sistema fundamental $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Cada equação y_i do sistema depende de se λ_i é uma raíz real ou um par de raízes complexas da equação característica:

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$y_{i_1} = e^{\lambda_i x},\ y_{i_2} = xe^{\lambda_i x}, ...,\ y_{i_s} = x^{s-1}e^{\lambda_i x}$$

$\lambda_i = \alpha \pm i\beta$

$$y_{i_1} = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{i_2} = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

3. A solução da equação homogénea associada é tal que

$$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2, ...,\ n$$

Caso se esteja perante um caso em que $Q(x) = 0$, então a solução geral da equação linear corresponde a y_h. Caso contrário, deve-se calcular y_p (já que $y_g = y_h + y_p$). Para isso podem-se utilizar dois métodos, o de **Lagrange** e o dos **Coeficientes Indeterminados**, que são expostos nas secções seguintes.

I Método da Variação das Constantes (de Lagrange)

1. Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada (ver secção anterior)
2. A solução geral da equação completa terá a forma

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n,\ i = 1,\ 2, ...,\ n$$

Para obter os valores de $C_1(x),\ C_2(x), ...,\ C_n(x)$ resolve-se o sistema de equações

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + ... + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x)y_n' = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) \end{cases}$$

Possível método de resolução do sistema (**Regra de Cramer**):

(a) Calcular

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(b) Calcular $\delta_{C_i'(x)},\ i = 1,\ 2, ...,\ n$, ou seja, para cada $C_i'(x)$ substituir a coluna i do determinante anterior pela coluna $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ Q(x) \end{bmatrix}$

(c) Calcular cada $C_i'(x),\ i = 1,\ 2, ...,\ n$ através de

$$C_i'(x) = \frac{\delta_{C_i'(x)}}{\delta}$$

(d) Calcular cada $C_i(x),\ i = 1,\ 2, ...,\ n$, através de

$$C_i(x) = \int C_i'(x)\ dx$$

<u>Nota:</u> Não esquecer a constante K_i que surge na primitivação.

(e) O resultado final é dado por

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

II Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada (ver secção anterior)
2. A solução particular que se procura é dada em função do aspecto de $Q(x)$

$Q(x) = e^{\alpha x}M_n(x)$ $M_n(x)$ é um polinómio de ordem n. Considere-se que s denota a multiplicidade da raíz real λ em que $\lambda = \alpha$ (caso essa raíz não exista, $s = 0$). Então, a solução particular da equação terá o aspecto

$$y_p = x^se^{\alpha x}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)$$

$Q(x) = e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x$

$M_n(x),\ N_n(x)$ são polinómios de ordem n. Se existe alguma raíz λ da equação característica tal que $\lambda = \alpha \pm i\beta$, então seja s a multiplicidade dessa raíz. Caso contrário $s = 0$. Neste caso, a equação particular da equação terá o aspecto

$$y_p = x^s e^{\alpha x}((A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)\cos\beta x +$$
$$(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0)\sin\beta x)$$

3. Após ter sido determinado o aspecto que a solução particular deve ter, resolve-se a equação inicial substituindo-se y "pelo aspecto" que se determinou acima, ou seja, resolve-se

$$y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + ... + a_n y_p = Q(x)$$

de forma a se obterem os valores de A_i e $B_i,\ i = 1,\ 2, ...,\ n$ das equações acima. Assim, obtém-se a equação particular para a equação diferencial a resolver

4. Como $y_g = y_h + y_p$ e já foram calculados y_h e y_p, a solução geral da equação completa é apenas a soma destas equações (y_h e y_p)

Séries Numéricas

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais ou complexos. À sucessão formada pelas adições sucessivas dos seus n termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ chama-se sucessão das somas parciais de ordem n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Chama-se série (ou série infinita) à soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Uma série pode ser

convergente $\exists S \in \mathbb{C} : \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, e escreve-se

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

divergente $\nexists S \in \mathbb{C} : \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ ou $S = \pm\infty$

Propriedades

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n)$ não só é uma série convergente como também

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$ é uma série divergente

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é convergente $(\forall p \in \mathbb{R})$

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries divergentes, então nada se pode concluir quanto à convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$

Séries Geométricas

$$\sum_{n=p}^{+\infty} r^n,\ p \in \mathbb{R}$$

$|\mathbf{r}| < \mathbf{1}$ Convergência - $\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r}$

$|\mathbf{r}| \geq \mathbf{1}$ Divergência

Séries Telescópicas (ou de Mengoli ou Redutiveis)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}), p \in \mathbb{N}$$

Se $\exists A \in \mathbb{N} : \lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}) = A$

$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p}) = a_1 + a_2 + ... + a_k - A$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+p} - a_n), p \in \mathbb{N}$$

Se $\exists A \in \mathbb{N} : \lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}) = A$

$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+p} - a_n) = A - (a_1 + a_2 + ... + a_k)$

Séries Harmónicas de ordem p (ou de Dirichlet)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p},\ p \in \mathbb{R} \begin{cases} \mathbf{p > 1} & -\text{Convergência} \\ \mathbf{p \leq 1} & -\text{Divergência} \end{cases}$$

Série Harmónica alternada de ordem p

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p},\ p \in \mathbb{R} \begin{cases} \mathbf{p > 1} & -\text{Convergência absoluta} \\ \mathbf{0 < p \leq 1} & -\text{Convergência simples} \\ \mathbf{p \leq 0} & -\text{Divergência} \end{cases}$$

Séries de termos não negativos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \geq 0$$

Convergência $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_0^+ : (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq M$

Séries de termos quaisquer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente. Então, se

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ Convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ − Absolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ Divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ − Simplesmente convergente

Critérios de Convergência/Divergência

Critério do Integral

Seja $f : [k, +\infty[\to [0, +\infty[,\ k \in \mathbb{N}$ um função contínua, monótona decrescente e $f(n) = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \text{ Converge} \Leftrightarrow \int_k^{+\infty} f(x)\ dx \text{ Converge}$$

Critério de Comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries numéricas. Se $\exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ Converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ Converge}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ Diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ Diverge}$$

Critério de Comparação por passagem ao limite

Se $\exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \Rightarrow a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ e $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, então

$\mathbf{L} \in \mathbb{R}^+$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ têm a mesma natureza

$\mathbf{L = 0}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ Converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Converge

$\mathbf{L} = +\infty$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ Diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Diverge

Critério da Razão (ou D'Alembert)

Seja $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, então

$\mathbf{L < 1}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Converge (absolutamente)

$\mathbf{L > 1}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Diverge

$\mathbf{L = 1}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Este teste nada permite concluir

Critério da Raíz (ou de Cauchy)

Seja $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, então

L < 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Converge (absolutamente)

L > 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Diverge

L = 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Este teste nada permite concluir

Critério de Leibniz

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \forall n \in \mathbb{N}$ é simplesmente convergente se

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é monótona decrescente, } a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Teorema de Riemann

Para qualquer série de termos quaisquer simplesmente convergente e para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação dos termos dessa série tal que a soma da série, após a reordenação, é igual a C e, ainda, existe uma outra reordenação dos termos tal que a série resultante diverge.

Sucessões de Funções

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}},\ f_n :\ D \to \mathbb{R}$$

Convergência Pontual

Se

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall \epsilon > 0\ \forall x \in D\ \exists p(\epsilon, x) : (\forall n > p \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

então

$$f_n \xrightarrow{p} f$$

Convergência Uniforme

Se

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists p(\epsilon) : (\forall n > p \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon,\ \forall x \in D)$$

então

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

Nota: Convergência uniforme ⇒ Convergência pontual

Condição necessária e suficiente de convergência uniforme

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Propriedades

Seja

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}},\ f_n : D \to \mathbb{R}$$

1. Seja a um ponto de acumulação de D. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ e existe e é único $\lim_{x\to a} f_n(x)$, então
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$
2. Se $f_n \xrightarrow{u} f$, $f : D \to \mathbb{R}$ função limite e f_n são contínuas em $a \in D$ então
$$f \text{ é contínua em } a \text{ e}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
3. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função limite e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessão de funções contínuas em $[a, b]$, então
$$f \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e}$$
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$$
4. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (pontual ou uniformemente) para f em D, f_n são funções com derivadas contínuas em D e $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em D, então
$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

Séries de Funções

Chama-se soma parcial da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x),\ f_n : D \to \mathbb{R}$$

à soma

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

Uma série de funções converge

pontualmente em D quando $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em D

uniformemente em D quando $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em D

Critério de Weierstrass

Sejam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x),\ f_n : D \to \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \geq 0\ -\ \text{série convergente}$$

tais que

$$\exists p \in \mathbb{N} : \forall n > p\ \forall x \in I \subseteq D\ \ |f_n(x)| \leq a_n$$

Então $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em I.

Propriedades

1. Sejam $f_n,\ f : D \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ e existe e é finito $\lim_{x\to a} f_n(x)$, então
$$\text{A série numérica } \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) \text{ é convergente e}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$
2. Sejam $f_n,\ f : D \to \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ e $\forall n \in \mathbb{N} f_n$ é contínua em $a \in D$, então
$$S(x) \text{ é também contínua em } a$$
3. Sejam $f_n,\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ e f_n são funções contínuas em $[a, b]$, então
$$f \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e}$$
$$\int_a^b S(x)\ dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$$
4. Sejam $f_n,\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \to S(x)$ (pontual ou uniformemente), $f_n \in C^1(D)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ é uniformemente convergente em D, então
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$$

Nota: As propriedades de séries de funções mantém-se para séries de potências e séries de Taylor.

Séries de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n$$

Raio de Convergência

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ (fórmula de D'Alembert)}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \text{ (fórmula de Cauchy)}$$

Teorema de Abel

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ converge em $x = c + A,\ A \neq 0$, então converge absolutamente em $x \in]c - |A|, c + |A|[$. Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ diverge em $x = c + B,\ B \neq 0$, então diverge em $x \in] - \infty, c - |B| [\cap] c + |B|, +\infty[$

Teorema

Todas as séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ com raio de convergência R convergem uniformemente em todo o intervalo fechado $I \subset]c-R, c+R[$.

Séries de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Séries de MacLaurin

Série de Taylor com $c=0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Polinómio de Taylor de grau n (centrado em c)

$$P_n(x) = T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Resto de ordem n

$$R_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Resto de ordem n na forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},\ \xi \in int(x,c)$$

Teorema

Uma função f admite desenvolvimento em série de Taylor se em torno de c no intervalo $]c-R, c+R[,\ R>0$ se e só se

- $f \in C^\infty(]c-R, c+R[)$
- $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,\ x \in]c-R, c+R[$

Condição suficiente

Se um função f admite derivadas finitas de todas as ordens em $[a,b]$ e essas derivadas, em valor absoluto podem ser majoradas por um valor $M,\ in\mathbb{R}$, isto é $\left|f^{(n)}\right| \le M,\ \forall x \in [a,b]$, então em todo o intervalo $[a,b]$ f admite desenvolvimento em torno do ponto $c \in]a,b[$.

Função analítica

f é uma função analítica em a se $\exists r > 0 : \forall x \in]a-r, a+r[$ a série de Taylor de f converge para $f(x)$.

Séries de Fourier

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diz-se periódica de período T se $f(x+T) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ao menor dos períodos chama-se período fundamental.
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π periódica e integrável. Então, a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)] \sim f(x),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx,\ n \in \mathbb{N}$$

chama-se a série de Fourier associada a f.
Se $f:D\to\mathbb{R}$ admite representação em série de Fourier e é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x),\ \forall x \in D$, então o desenvolvimento simplifica-se na seguinte expressão (chamada de série de cossenos)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) \sim f_{\text{par}}(x),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Se $f:D\to\mathbb{R}$ admite representação em série de Fourier e é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D$, então o desenvolvimento simplifica-se na seguinte expressão (chamada de série de senos)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nx) \sim f_{\text{ímpar}}(x),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx,\ n \in \mathbb{N}$$

Condição suficiente para desenvolvimento

Se f é uma função periódica de período 2π, definida e integrável em $[-\pi,\pi]$, então a série de Fourier de f converge em todo o $\mathbb{R}$ para a função soma $S(x)$ dada por

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Convergência Uniforme

Se f é uma função periódica de período 2π, contínua e seccionalmente diferenciável (isto é, existem derivadas finitas em todos os pontos do domínio de f), então a série de Fourier de f **converge uniformemente** em todo o $\mathbb{R}$ para $f(x)$, e escreve-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)],$$

com a_n e b_n tal como definidos acima.
Nota: Se f não é contínua, então a série de Fourier de f não é uniformemente convergente.

Extensão periódica de um função

Seja $f:]0,2\pi[\to \mathbb{R}$, então

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0,2\pi[\\ \phi(x+2k\pi), & x \notin]0,2\pi[\end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

é uma extensão 2π periódica de f.

Extensão periódica par

Seja $f:]0,\pi[\to \mathbb{R}$, então

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

é uma extensão periódica (de período 2π) par de f.

Extensão periódica ímpar

Seja $f:]0,\pi[\to \mathbb{R}$, então

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

é uma extensão periódica (de período 2π) ímpar de f.

Nota: Séries de Fourier são séries de funções, e portanto partilham dos mesmos critérios e propriedades que estas últimas.

Fórmulas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$
$$\sin x\cos y = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$
$$\sin x\sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$
$$\cos x\cos y = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Ricardo Jesus
prof. Vera Kharlamova