Cálculo II

Transformadas de Laplace

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, localmente integrável em $\mathbb{R}_0^+$. Então, a

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

chama-se a *Transformada de Laplace de* f e denota-se por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$ para o qual o integral acima converge.
Chama-se *Transformada Inversa de Laplace de* f a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Formulário

O formulário abaixo permite obter tanto as transformadas de Laplace de uma função $h(t)$ (lendo a tabela da esquerda para a direita), bem como as transformadas inversas de $H(s)$ (lendo a tabela da direita para a esquerda).
No contexto da tabela sejam:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ s > s_f$$
$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s),\ s > s_g$$

$\mathbf{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$	$\mathbf{\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)}$
$t^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$\sin(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\cos(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\sinh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s),\ s > s_f, s_g$
$\alpha f(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha F(s),\ s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t), \lambda \in \mathbb{R}$	$F(s-\lambda),\ s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a), a > 0$	$e^{-as} F(s),\ s > s_f$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a}),\ s > a s_f$
$t^n f(t), n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n F^{(n)}(s),\ s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$sF(s) - f(0),$ $s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$ $s >$ ordem exp. de f, f'
$f^{(n)}(t), n \in \mathbb{N}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) -$ $... - f^{(n-1)}(0),\ s >$ ordem exp. de $f, f', ..., f^{(n-1)}$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s),\ s >$ ordem exp. de $f,\ g$
$\int_0^t f(\tau)\ d\tau$	$\frac{F(s)}{s},\ s > 0,$ ordem exp. de f

Transformada da Convolução

Se $\exists \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\exists \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, então:

$$\exists \mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t),$$

onde

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)\ dx$$

Nota: A operação de convolução é comutativa, ou seja, $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

Equações Diferenciais Ordinárias

Equação Diferencial Ordinária de ordem n:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

ou

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

Integral Geral:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$$

ou

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n),\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$$

Onde $y = y(x)$, e o grau da equação diferencial é denotado por n.

Obter EDO a partir de Integral Geral

1. Derivar n vezes o integral geral, sendo que cada expressão derivada será uma equação do sistema abaixo
2. Resolver o sistema de n equações obtidas em ordem às constantes $C_1, C_2, ..., C_n$
3. Substituir no integral geral as expressões obtidas para cada constante $C_1, C_2, ..., C_n$
4. Obtém-se a equação diferencial ordinária pretendida

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Equações de Variáveis Separáveis

$$y' = f(x)g(y)$$
$$M_1(x)N_1(y)\ dy + M_2(x)N_2(y)\ dx = 0$$

1. Escrever a equação na forma $y'Q(y) = P(x)$, com $Q(y) = \frac{1}{g(y)}$ $\left(\text{ou } Q(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}\right)$ e $P(x) = f(x)$ $\left(\text{ou } P(x) = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}\right)$ e tomando nota de que restrições foram feitas ao domínio da expressão (por exemplo divisões por $g(y)$ ou $N_2(y)$)
2. Primitivar a expressão obtida, ou seja, resolver $\int Q(y)\ dy = \int P(x)\ dx$
3. Obter integral geral da EDO
4. Verificar se as restrições que foram feitas no ponto 1 estão ou não contempladas no integral geral. Se sim, a solução geral é o integral geral. Se não essas expressões são equações singulares e a solução geral é dada pelo integral geral, juntamente com as soluções singulares

Nota: Equações diferenciais redutíveis a equações de variáveis separáveis são equações onde, através de uma mudança de variável, se consegue reduzir a equação a uma EDO de variáveis separáveis. Por exemplo a expressão

$$y' = f(ax + by + c),\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

é redutível a uma equação diferencial de variáveis separáveis através da substituição $u = ax + by + c,\ u = u(x)$. A partir daí, o método de resolução é o exposto acima, apenas no final se tem de substituir de volta u por $ax + by + c$.

Equações Homogéneas

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0,$$

onde $M,\ N$ são funções com o mesmo grau de homogeneidade.
Se $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y),\ \alpha \in \mathbb{R}$ então f diz-me homogénea de grau de homogeneidade α.

Caso a equação esteja na forma $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$

a) Determinar grau de homogeneidade α de M e N

b) Multiplicar a equação por $\frac{1}{x^\alpha}$

c) Obter uma equação escrita na forma normal $y' = \Phi(\frac{y}{x})$

1. Aplicar a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$
2. Resolver a equação obtida (de variáveis separáveis)
3. Substituir de volta u por $\frac{y}{x}$

Equações Redutiveis a Homogéneas ou de Variáveis Separáveis

$$y' = \Phi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$
$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2,\ c_1 \neq 0 \text{ ou } c_2 \neq 0$$

1. Calcular $\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
2. $\lambda = 0$ A equação pode reduzir-se a uma de variáveis separáveis através da mudança de variável $z = a_1x + b_1y,\ z = z(x)$

   $\lambda \neq 0$ A equação pode reduzir-se a uma homogénea através das mudanças de variáveis $x = u + h$ e $y = v + k$, onde $u,\ v$ são variáveis (e $v = v(u)$) e $h,\ k \in \mathbb{R}$.
   Resolver:

   $$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

   de forma a obter h e k. Resolver a equação homogénea resultante da substituição, no final devolvendo as variáveis substituídas.

Equações Lineares de 1ª Ordem

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

I Método de Bernoulli

1. Mudança de variável $y = uv,\ u = u(x),\ v = v(x)$. Obtém-se:
   $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$
2. Calcular <u>uma</u> solução (portanto "sem constantes") de v para
   $$v' + P(x)v = 0$$
3. Calcular a solução u para $u'v = Q(x)$
4. $y = uv$, onde u e v são as soluções encontradas antes

II Método de Lagrange (variação de constante)

1. Resolver a equação homogénea (que é de variáveis separáveis) associada
   $$y' + P(x)y = 0$$
2. Na solução do ponto anterior surge uma constante. Considere-se a solução como tendo o aspecto $CH(x)$ onde $H(x) = e^{-\int P(x)\ dx}$ e C é uma constante. Então, passa-se essa constante a uma função de x, ou seja, obtém-se $C(x)H(x)$
3. Iguala-se a expressão obtida no ponto anterior à função $Q(x)$, mas considerando a parcela $C(x)$ como estando derivada. Ou seja, resolve-se $C'(x)H(x) = Q(x)$
4. A solução geral será dada por
   $y = C(x)H(x) = H(x) \int H^{-1}(x)Q(x)\ dx$

III Fator Integrante

1. Determinar $I(x)$ tal que $I(x) = e^{\int P(x)\ dx}$
2. Vem $(I(x)y)' = Q(x)I(x)$, logo, resolve-se $I(x)y = \int Q(x)I(x)\ dx$ para obter y

Equação Diferencial de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$$

Para resolver uma equação de Bernoulli basta utilizar um dos métodos abaixo:

- Resolver pelo **Método de Bernoulli**
- Resolver pela mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$, de onde se obtém uma equação de aspecto
  $$\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x)z = Q(x)$$
  que não é mais do que uma equação linear de 1ª ordem, que portanto pode ser resolvida pelos processos expostos acima. No final, deve-se devolver as variáveis iniciais e deve-se confirmar (especialmente se α for positivo) que não se perderam soluções.

Soluções de Problemas de Cauchy

Visto que as soluções obtidas para EDOs são uma família de funções, de forma a se determinar uma solução particular é necessário conhecer valores que permitam inferir sobre que função da família de soluções obtida é a que se procura. Conhecendo-se esses valores, o processo para obtenção da solução particular pretendida é o exposto abaixo:

1. Determinar a solução geral da EDO em estudo
2. A partir das condições iniciais, determinar o valor das constantes que figuram na solução geral
3. A solução particular pretendida é a solução geral onde as suas constantes tomam o valor determinado acima

Equações Diferenciais de Ordem n, $n \geq 1$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = Q(x),\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$$

As soluções de equações diferenciais de ordem n têm o aspecto $y_g = y_h + y_p$. Assim, para calcular y_g podem-se seguir as etapas abaixo.

1. Calcular as soluções do polinómio característico da equação, ou seja, resolver:
   $$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_n = 0$$
2. A cada solução λ_i de multiplicidade s faz-se corresponder uma equação y_i, de forma a se obter o sistema fundamental $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Cada equação y_i do sistema depende de se λ_i é uma raíz real ou um par de raízes complexas da equação característica:
   $\lambda_i \in \mathbb{R}$
   $$y_{i_1} = e^{\lambda_i x},\ y_{i_2} = xe^{\lambda_i x}, ...,\ y_{i_s} = x^{s-1}e^{\lambda_i x}$$
   $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$
   $$y_{i_1} = x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{i_2} = x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$
3. A solução da equação homogénea associada é tal que
   $$y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2, ...,\ n$$
   Caso se esteja perante um caso em que $Q(x) = 0$, então a solução geral da equação linear corresponde a y_h. Caso contrário, deve-se calcular y_p (já que $y_g = y_h + y_p$). Para isso podem-se utilizar dois métodos, o de **Lagrange** e o dos **Coeficientes Indeterminados**, que são expostos nas secções seguintes.

I Método da Variação das Constantes (de Lagrange)

1. Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada (ver secção anterior)
2. A solução geral da equação completa terá a forma
   $$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n,\ i = 1,\ 2, ...,\ n$$
   Para obter os valores de $C_1(x),\ C_2(x), ...,\ C_n(x)$ resolve-se o sistema de equações
   $$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + ... + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + ... + C_n'(x)y_n' = 0 \\ ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) \end{cases}$$
   Possível método de resolução do sistema (**Regra de Cramer**):
   (a) Calcular
   $$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$
   (b) Calcular $\delta_{C_i'(x)},\ i = 1,\ 2, ...,\ n$, ou seja, para cada $C_i'(x)$ substituir a coluna i do determinante anterior pela coluna $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ Q(x) \end{bmatrix}$
   (c) Calcular cada $C_i'(x),\ i = 1,\ 2, ...,\ n$ através de
   $$C_i'(x) = \frac{\delta_{C_i'(x)}}{\delta}$$
   (d) Calcular cada $C_i(x),\ i = 1,\ 2, ...,\ n$, através de
   $$C_i(x) = \int C_i'(x)\ dx$$
   <u>Nota:</u> Não esquecer a constante K_i que surge na primitivação.
   (e) O resultado final é dado por
   $$y_g = C_1(x)y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

II Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogénea associada (ver secção anterior)
2. A solução particular que se procura é dada em função do aspecto de $Q(x)$
   $Q(x) = e^{\alpha x}M_n(x)$ $M_n(x)$ é um polinómio de ordem n. Considere-se que s denota a multiplicidade da raíz real λ em que $\lambda = \alpha$ (caso essa raíz não exista, $s = 0$). Então, a solução particular da equação terá o aspecto
   $$y_p = x^s e^{\alpha x}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)$$
   $Q(x) = e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x$
   $M_n(x),\ N_n(x)$ são polinómios de ordem n. Se existe alguma raíz λ da equação característica tal que $\lambda = \alpha \pm i\beta$, então seja s a multiplicidade dessa raíz. Caso contrário $s = 0$. Neste caso, a equação particular da equação terá o aspecto
   $$y_p = x^s e^{\alpha x}((A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)\cos\beta x + (B_nx^n + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_0)\sin\beta x)$$
3. Após ter sido determinado o aspecto que a solução particular deve ter, resolve-se a equação inicial substituindo-se y "pelo aspecto" que se determinou acima, ou seja, resolve-se
   $$y_p^{(n)} + a_1y_p^{(n-1)} + ... + a_ny_p = Q(x)$$
   de forma a se obterem os valores de A_i e $B_i,\ i = 1,\ 2, ...,\ n$ das equações acima. Assim, obtém-se a equação particular para a equação diferencial a resolver
4. Como $y_g = y_h + y_p$ e já foram calculados y_h e y_p, a solução geral da equação completa é apenas a soma destas equações (y_h e y_p)

Ricardo Jesus