

## Cálculo II

### Transformadas de Laplace

Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , localmente integrável em  $\mathbb{R}_0^+$ . Então, a

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

chama-se a *Transformada de Laplace de  $f$*  e denota-se por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

para todo o  $s \in \mathbb{R}$  para o qual o integral acima converge.

Chama-se *Transformada Inversa de Laplace de  $f$*  a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

### Formulário

O formulário abaixo permite obter tanto as transformadas de Laplace de uma função  $h(t)$  (lendo a tabela da esquerda para a direita), bem como as transformadas inversas de  $H(s)$  (lendo a tabela da direita para a esquerda).

No contexto da tabela sejam:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

$\mathbf{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$	$\mathcal{L}\{\mathbf{h(t)}\} = \mathbf{H(s)}$
$t^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\sinh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s >  a $
$\cosh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s >  a $
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s), \quad s > s_f, s_g$
$\alpha f(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha F(s), \quad s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t), \lambda \in \mathbb{R}$	$F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t - a), a > 0$	$e^{-as} F(s), \quad s > s_f$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a}), \quad s > as_f$
$t^n f(t), n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \text{ordem exp. de } f$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0),$ $s > \text{ordem exp. de } f$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$ $s > \text{ordem exp. de } f, f'$
$f^{(n)}(t), n \in \mathbb{N}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad s > \text{ordem exp. de } f, f', \dots, f^{(n-1)}$

### Transformada da Convolução

Se  $\exists \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  e  $\exists \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , então:

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= F(s)G(s) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) &= (f * g)(t), \end{aligned}$$

onde

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$$

**Nota:** A operação de convolução é comutativa, ou seja,  $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ .

### Equações Diferenciais Ordinárias

**Equação Diferencial Ordinária de ordem  $n$ :**

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

**Integral Geral:**

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

ou

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Onde  $y = y(x)$ , e o grau da equação diferencial é denotado por  $n$ .

### Obter EDO a partir de Integral Geral

- Derivar  $n$  vezes o integral geral, sendo que cada expressão derivada será uma equação do sistema abaixo
- Resolver o sistema de  $n$  equações obtidas em ordem às constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$
- Substituir no integral geral as expressões obtidas para cada constante  $C_1, C_2, \dots, C_n$
- Obtém-se a equação diferencial ordinária pretendida

### Equações Diferenciais de Primeira Ordem

#### Equações de Variáveis Separáveis

$$y' = f(x)g(y)$$

$$M_1(x)N_1(y) dy + M_2(x)N_2(y) dx = 0$$

- Escrever a equação na forma  $y'Q(y) = P(x)$ , com  $Q(y) = \frac{1}{g(y)}$  (ou  $Q(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}$ ) e  $P(x) = f(x)$  (ou  $P(x) = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}$ ) e tomando nota de que restrições foram feitas ao domínio da expressão (por exemplo divisões por  $g(y)$  ou  $N_2(y)$ )
- Primitivar a expressão obtida, ou seja, resolver  $\int Q(y) dy = \int P(x) dx$
- Obter integral geral da EDO
- Verificar se as restrições que foram feitas no ponto 1. estão ou não contempladas no integral geral. Se sim, a solução geral é o integral geral. Se não essas expressões são equações singulares e a solução geral é dada pelo integral geral, juntamente com as soluções singulares

**Nota:** Equações diferenciais redutíveis a equações de variáveis separáveis são equações onde, através de uma mudança de variável, se consegue reduzir a equação a uma EDO de variáveis separáveis. Por exemplo a expressão

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

é redutível a e uma equação diferencial de variáveis separáveis através da substituição  $u = ax + by + c$ ,  $u = u(x)$ . A partir daí, o método de resolução é o exposto acima, apenas no final se tem de substituir de volta  $u$  por  $ax + by + c$ .

#### Equações Homogéneas

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

onde  $M, N$  são funções com o mesmo grau de homogeneidade. Se  $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  então  $f$  diz-me homogênea de grau de homogeneidade  $\alpha$ .

Caso a equação esteja na forma  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

a) Determinar grau de homogeneidade  $\alpha$  de  $M$  e  $N$

b) Multiplicar a equação por  $\frac{1}{x^\alpha}$

c) Obter uma equação escrita na forma normal  $y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$

- Aplicar a mudança de variável  $u = \frac{y}{x}$
- Resolver a equação obtida (de variáveis separáveis)
- Substituir de volta  $u$  por  $\frac{y}{x}$

#### Equações Redutíveis a Homogêneas ou de Variáveis Separáveis

$$y' = \Phi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad c_1 \neq 0 \text{ ou } c_2 \neq 0$$

- Calcular  $\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- $\lambda = 0$  A equação pode reduzir-se a uma de variáveis separáveis através da mudança de variável  $z = a_1x + b_1y$ ,  $z = z(x)$
- $\lambda \neq 0$  A equação pode reduzir-se a uma homogênea através das mudanças de variáveis  $x = u + h$  e  $y = v + k$ , onde  $u, v$  são variáveis (e  $v = v(u)$ ) e  $h, k \in \mathbb{R}$ . Resolver:

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

de forma a obter  $h$  e  $k$ . Resolver a equação homogênea resultante da substituição, no final devolvendo as variáveis substituídas.

### Equações Lineares de 1ª Ordem

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

## I Método de Bernoulli

- Mudança de variável  $y = uv$ ,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .  
Obtém-se:  
 $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$
- Calcular uma solução (portanto "sem constantes") de  $v$  para  
 $v' + P(x)v = 0$
- Calcular a solução  $u$  para  $u'v = Q(x)$
- $y = uv$ , onde  $u$  e  $v$  são as soluções encontradas antes

## II Método de Lagrange (variação de constante)

- Resolver a equação homogênea (que é de variáveis separáveis) associada  
 $y' + P(x)y = 0$
- Na solução do ponto anterior surge uma constante. Considere-se a solução como tendo o aspecto  $CH(x)$  onde  $H(x) = e^{-\int P(x) dx}$  e  $C$  é uma constante. Então, passa-se essa constante a uma função de  $x$ , ou seja, obtém-se  $C'(x)H(x)$
- Iguala-se a expressão obtida no ponto anterior à função  $Q(x)$ , mas considerando a parcela  $C(x)$  como estando derivada. Ou seja, resolve-se  $C'(x)H(x) = Q(x)$
- A solução geral será dada por  
 $y = C(x)H(x) = H(x) \int H^{-1}(x)Q(x) dx$

## III Fator Integrante

- Determinar  $I(x)$  tal que  $I(x) = e^{\int P(x) dx}$
- Vem  $(I(x)y)' = Q(x)I(x)$ , logo, resolve-se  
 $I(x)y = \int Q(x)I(x) dx$  para obter  $y$

## Equação Diferencial de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

Para resolver uma equação de Bernoulli basta utilizar um dos métodos abaixo:

- Resolver pelo **Método de Bernoulli**
- Resolver pela mudança de variável  $z = y^{1-\alpha}$ , de onde se obtém uma equação de aspecto

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x)z = Q(x)$$

que não é mais do que uma equação linear de 1ª ordem, que portanto pode ser resolvida pelos processos expostos acima. No final, deve-se devolver as variáveis iniciais e deve-se confirmar (especialmente se  $\alpha$  for positivo) que não se perderam soluções.

## Soluções de Problemas de Cauchy

Visto que as soluções obtidas para EDOs são uma família de funções, de forma a se determinar uma solução particular é necessário conhecer valores que permitam inferir sobre que função da família de soluções obtida é a que se procura. Conhecendo-se esses valores, o processo para obtenção da solução particular pretendida é o exposto abaixo:

- Determinar a solução geral da EDO em estudo
- A partir das condições iniciais, determinar o valor das constantes que figuram na solução geral
- A solução particular pretendida é a solução geral onde as suas constantes tomam o valor determinado acima

## Equações Diferenciais de Ordem n, $n \geq 1$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = Q(x), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

As soluções de equações diferenciais de ordem  $n$  têm o aspecto  $y_g = y_h + y_p$ . Assim, para calcular  $y_g$  podem-se seguir as etapas abaixo.

- Calcular as soluções do polinómio característico da equação, ou seja, resolver:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

- A cada solução  $\lambda_i$  de multiplicidade  $s$  faz-se corresponder uma equação  $y_i$ , de forma a se obter o sistema fundamental  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Cada equação  $y_i$  do sistema depende de se  $\lambda_i$  é uma raiz real ou um par de raízes complexas da equação característica:

$$\lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$y_{i_1} = e^{\lambda_i x}, y_{i_2} = x e^{\lambda_i x}, \dots, y_{i_s} = x^{s-1} e^{\lambda_i x}$$

$$\lambda_i = \alpha \pm i\beta$$

$$y_{i_1} = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, y_{i_2} = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

- A solução da equação homogênea associada é tal que

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

Caso se esteja perante um caso em que  $Q(x) = 0$ , então a solução geral da equação linear corresponde a  $y_h$ .

Caso contrário, deve-se calcular  $y_p$  (já que  $y_g = y_h + y_p$ ). Para isso podem-se utilizar dois métodos, o de **Lagrange** e o dos **Coefficientes Indeterminados**, que são expostos nas secções seguintes.

## I Método da Variação das Constantes (de Lagrange)

- Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada (ver secção anterior)
- A solução geral da equação completa terá a forma

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n, i = 1, 2, \dots, n$$

Para obter os valores de  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ , ...,  $C_n(x)$  resolve-se o sistema de equações

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + \dots + C'_n(x)y_n = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \dots + C'_n(x)y'_n = 0 \\ \dots \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) \end{cases}$$

Possível método de resolução do sistema (**Regra de Cramer**):

- Calcular

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- Calcular  $\delta_{C'_i(x)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ou seja, para cada  $C'_i(x)$  substituir a coluna  $i$  do determinante

$$\text{anterior pela coluna} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ Q(x) \end{bmatrix}$$

- Calcular cada  $C'_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  através de

$$C'_i(x) = \frac{\delta_{C'_i(x)}}{\delta}$$

- Calcular cada  $C_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , através de

$$C_i(x) = \int C'_i(x) dx$$

Nota: Não esquecer a constante  $K_i$  que surge na primitivação.

- O resultado final é dado por

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$$

## II Método dos Coeficientes Indeterminados

- Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada (ver secção anterior)
- A solução particular que se procura é dada em função do aspecto de  $Q(x)$

$Q(x) = e^{\alpha x} M_n(x)$   $M_n(x)$  é um polinómio de ordem  $n$ . Considere-se que  $s$  denota a multiplicidade da raiz real  $\lambda$  em que  $\lambda = \alpha$  (caso essa raiz não exista,  $s = 0$ ). Então, a solução particular da equação terá o aspecto

$$y_p = x^s e^{\alpha x} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0)$$

$Q(x) = e^{\alpha x} (M_n(x) \cos \beta x + N_n(x) \sin \beta x)$   
 $M_n(x)$ ,  $N_n(x)$  são polinómios de ordem  $n$ . Se existe alguma raiz  $\lambda$  da equação característica tal que  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , então seja  $s$  a multiplicidade dessa raiz. Caso contrário  $s = 0$ . Neste caso, a equação particular da equação terá o aspecto  
 $y_p = x^s e^{\alpha x} ((A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0) \cos \beta x + (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_0) \sin \beta x)$

- Após ter sido determinado o aspecto que a solução particular deve ter, resolve-se a equação inicial substituindo-se  $y$  "pelo aspecto" que se determinou acima, ou seja, resolve-se

$$y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + \dots + a_n y_p = Q(x)$$

de forma a se obterem os valores de  $A_i$  e  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  das equações acima. Assim, obtém-se a equação particular para a equação diferencial a resolver

- Como  $y_g = y_h + y_p$  e já foram calculados  $y_h$  e  $y_p$ , a solução geral da equação completa é apenas a soma destas equações ( $y_h$  e  $y_p$ )

Ricardo Jesus