

Cálculo II

Transformadas de Laplace

Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, localmente integrável em \mathbb{R}_0^+ . Então, a

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

chama-se a *Transformada de Laplace de f* e denota-se por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

para todo o $s \in \mathbb{R}$ para o qual o integral acima converge.

Chama-se *Transformada Inversa de Laplace de f* a

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Formulário

O formulário abaixo permite obter tanto as transformadas de Laplace de uma função $h(t)$ (lendo a tabela da esquerda para a direita), bem como as transformadas inversas de $H(s)$ (lendo a tabela da direita para a esquerda).

No contexto da tabela sejam:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

$\mathbf{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$	$\mathcal{L}\{\mathbf{h(t)}\} = \mathbf{H(s)}$
$t^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{at}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\sinh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > a $
$\cosh(at), a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > a $
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s), \quad s > s_f, s_g$
$\alpha f(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha F(s), \quad s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t), \lambda \in \mathbb{R}$	$F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t - a), a > 0$	$e^{-as} F(s), \quad s > s_f$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > as_f$
$t^n f(t), n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \text{ordem exp. de } f$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0),$ $s > \text{ordem exp. de } f$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$ $s > \text{ordem exp. de } f, f'$
$f^{(n)}(t), n \in \mathbb{N}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad s > \text{ordem exp. de } f, f', \dots, f^{(n-1)}$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s), \quad s > \text{ordem exp. de } f, g$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}, \quad s > 0, \text{ ordem exp. de } f$

Transformada da Convolução

Se $\exists \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\exists \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, então:

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= F(s)G(s) \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) &= (f * g)(t), \end{aligned}$$

onde

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

Nota: A operação de convolução é comutativa, ou seja,

$$(f * g)(t) = (g * f)(t).$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Equação Diferencial Ordinária de ordem n :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Integral Geral:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

ou

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Onde $y = y(x)$, e o grau da equação diferencial é denotado por n .

Obter EDO a partir de Integral Geral

- Derivar n vezes o integral geral, sendo que cada expressão derivada será uma equação do sistema abaixo
- Resolver o sistema de n equações obtidas em ordem às constantes C_1, C_2, \dots, C_n
- Substituir no integral geral as expressões obtidas para cada constante C_1, C_2, \dots, C_n
- Obtém-se a equação diferencial ordinária pretendida

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Equações de Variáveis Separáveis

$$y' = f(x)g(y)$$

$$M_1(x)N_1(y) dy + M_2(x)N_2(y) dx = 0$$

- Escrever a equação na forma $y'Q(y) = P(x)$, com $Q(y) = \frac{1}{g(y)}$ (ou $Q(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}$) e $P(x) = f(x)$ (ou $P(x) = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}$) e tomando nota de que restrições foram feitas ao domínio da expressão (por exemplo divisões por $g(y)$ ou $N_2(y)$)
- Primitivar a expressão obtida, ou seja, resolver $\int Q(y) dy = \int P(x) dx$
- Obter integral geral da EDO
- Verificar se as restrições que foram feitas no ponto 1 estão ou não contempladas no integral geral. Se sim, a solução geral é o integral geral. Se não essas expressões são equações singulares e a solução geral é dada pelo integral geral, juntamente com as soluções singulares

Nota: Equações diferenciais redutíveis a equações de variáveis separáveis são equações onde, através de uma mudança de variável, se consegue reduzir a equação a uma EDO de variáveis separáveis. Por exemplo a expressão

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

é redutível a uma equação diferencial de variáveis separáveis através da substituição $u = ax + by + c$, $u = u(x)$. A partir daí, o método de resolução é o exposto acima, apenas no final se tem de substituir de volta u por $ax + by + c$.

Equações Homogéneas

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

onde M, N são funções com o mesmo grau de homogeneidade. Se $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ então f diz-me homogênea de grau de homogeneidade α .

Caso a equação esteja na forma $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

- Determinar grau de homogeneidade α de M e N
- Multiplicar a equação por $\frac{1}{x^\alpha}$
- Obter uma equação escrita na forma normal $y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$

- Aplicar a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$
- Resolver a equação obtida (de variáveis separáveis)
- Substituir de volta u por $\frac{y}{x}$

Equações Redutíveis a Homogéneas ou de Variáveis Separáveis

$$y' = \Phi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

$$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad c_1 \neq 0 \text{ ou } c_2 \neq 0$$

- Calcular $\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- $\lambda = 0$ A equação pode reduzir-se a uma de variáveis separáveis através da mudança de variável $z = a_1x + b_1y$, $z = z(x)$
- $\lambda \neq 0$ A equação pode reduzir-se a uma homogênea através das mudanças de variáveis $x = u + h$ e $y = v + k$, onde u, v são variáveis (e $v = v(u)$) e $h, k \in \mathbb{R}$.
Resolver:

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

de forma a obter h e k . Resolver a equação homogênea resultante da substituição, no final devolvendo as variáveis substituídas.

Equações Lineares de 1ª Ordem

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

I Método de Bernoulli

1. Mudança de variável $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Obtém-se:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$$

2. Calcular uma solução (portanto "sem constantes") de v para

$$v' + P(x)v = 0$$

3. Calcular a solução u para $u'v = Q(x)$

4. $y = uv$, onde u e v são as soluções encontradas antes

II Método de Lagrange (variação de constante)

1. Resolver a equação homogênea (que é de variáveis separáveis) associada

$$y' + P(x)y = 0$$

2. Na solução do ponto anterior surge uma constante. Considere-se a solução como tendo o aspecto $CH(x)$ onde $H(x) = e^{-\int P(x) dx}$ e C é uma constante. Então, passa-se essa constante a uma função de x , ou seja, obtém-se $C(x)H(x)$
3. Iguala-se a expressão obtida no ponto anterior à função $Q(x)$, mas considerando a parcela $C(x)$ como estando derivada. Ou seja, resolve-se $C'(x)H(x) = Q(x)$
4. A solução geral será dada por $y = C(x)H(x) = H(x) \int H^{-1}(x)Q(x) dx$

III Fator Integrante

1. Determinar $I(x)$ tal que $I(x) = e^{\int P(x) dx}$
2. Vem $(I(x)y)' = Q(x)I(x)$, logo, resolve-se $I(x)y = \int Q(x)I(x) dx$ para obter y

Equação Diferencial de Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

Para resolver uma equação de Bernoulli basta utilizar um dos métodos abaixo:

- Resolver pelo **Método de Bernoulli**
- Resolver pela mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$, de onde se obtém uma equação de aspecto

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x)z = Q(x)$$

que não é mais do que uma equação linear de 1ª ordem, que portanto pode ser resolvida pelos processos expostos acima. No final, deve-se devolver as variáveis iniciais e deve-se confirmar (especialmente se α for positivo) que não se perderam soluções.

Soluções de Problemas de Cauchy

Visto que as soluções obtidas para EDOs são uma família de funções, de forma a se determinar uma solução particular é necessário conhecer valores que permitam inferir sobre que função da família de soluções obtida é a que se procura. Conhecendo-se esses valores, o processo para obtenção da solução particular pretendida é o exposto abaixo:

1. Determinar a solução geral da EDO em estudo
2. A partir das condições iniciais, determinar o valor das constantes que figuram na solução geral
3. A solução particular pretendida é a solução geral onde as suas constantes tomam o valor determinado acima

Equações Diferenciais de Ordem n , $n \geq 1$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = Q(x), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

As soluções de equações diferenciais de ordem n têm o aspecto $y_g = y_h + y_p$. Assim, para calcular y_g podem-se seguir as etapas abaixo.

1. Calcular as soluções do polinómio característico da equação, ou seja, resolver:
$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$
2. A cada solução λ_i de multiplicidade s faz-se corresponder uma equação y_i , de forma a se obter o sistema fundamental $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Cada equação y_i do sistema depende de se λ_i é uma raiz real ou um par de raízes complexas da equação característica:

$$\lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$y_{i_1} = e^{\lambda_i x}, y_{i_2} = x e^{\lambda_i x}, \dots, y_{i_s} = x^{s-1} e^{\lambda_i x}$$

$$\lambda_i = \alpha \pm i\beta$$

$$y_{i_1} = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, y_{i_2} = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

3. A solução da equação homogênea associada é tal que

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

Caso se esteja perante um caso em que $Q(x) = 0$, então a solução geral da equação linear corresponde a y_h . Caso contrário, deve-se calcular y_p (já que $y_g = y_h + y_p$). Para isso podem-se utilizar dois métodos, o de **Lagrange** e o dos **Coefficientes Indeterminados**, que são expostos nas secções seguintes.

I Método da Variação das Constantes (de Lagrange)

1. Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada (ver secção anterior)

2. A solução geral da equação completa terá a forma

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n, i = 1, 2, \dots, n$$

Para obter os valores de $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ resolve-se o sistema de equações

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + \dots + C'_n(x)y_n = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \dots + C'_n(x)y'_n = 0 \\ \dots \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) \end{cases}$$

Possível método de resolução do sistema (**Regra de Cramer**):

- (a) Calcular

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- (b) Calcular $\delta_{C'_i(x)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, para cada $C'_i(x)$ substituir a coluna i do determinante

$$\text{anterior pela coluna} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ Q(x) \end{bmatrix}$$

- (c) Calcular cada $C'_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ através de

$$C'_i(x) = \frac{\delta_{C'_i(x)}}{\delta}$$

- (d) Calcular cada $C_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, através de

$$C_i(x) = \int C'_i(x) dx$$

Nota: Não esquecer a constante K_i que surge na primitivação.

- (e) O resultado final é dado por

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$$

II Método dos Coeficientes Indeterminados

1. Começar por obter o sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada (ver secção anterior)
2. A solução particular que se procura é dada em função do aspecto de $Q(x)$

$Q(x) = e^{\alpha x} M_n(x)$ $M_n(x)$ é um polinómio de ordem n . Considere-se que s denota a multiplicidade da raiz real λ em que $\lambda = \alpha$ (caso essa raiz não exista, $s = 0$). Então, a solução particular da equação terá o aspecto

$$y_p = x^s e^{\alpha x} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0)$$

$Q(x) = e^{\alpha x} (M_n(x) \cos \beta x + N_n(x) \sin \beta x)$
 $M_n(x)$, $N_n(x)$ são polinômios de ordem n . Se existe alguma raiz λ da equação característica tal que $\lambda = \alpha \pm i\beta$, então seja s a multiplicidade dessa raiz. Caso contrário $s = 0$. Neste caso, a equação particular da equação terá o aspecto

$$y_p = x^s e^{\alpha x} ((A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0) \cos \beta x + (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_0) \sin \beta x)$$

- Após ter sido determinado o aspecto que a solução particular deve ter, resolve-se a equação inicial substituindo-se y "pelo aspecto" que se determinou acima, ou seja, resolve-se

$$y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + \dots + a_n y_p = Q(x)$$

de forma a se obterem os valores de A_i e B_i , $i = 1, 2, \dots, n$ das equações acima. Assim, obtém-se a equação particular para a equação diferencial a resolver

- Como $y_g = y_h + y_p$ e já foram calculados y_h e y_p , a solução geral da equação completa é apenas a soma destas equações (y_h e y_p)

Séries Numéricas

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais ou complexos. À sucessão formada pelas adições sucessivas dos seus n termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ chama-se sucessão das somas parciais de ordem n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Chama-se série (ou série infinita) à soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Uma série pode ser

convergente $\exists S \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, e escreve-se

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergente $\nexists S \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ ou $S = \pm\infty$

Propriedades

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n)$ não só é uma série convergente como também

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ é uma série divergente
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ é convergente ($\forall p \in \mathbb{R}$)
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries divergentes, então nada se pode concluir quanto à convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$

Séries Geométricas

$$\sum_{n=p}^{\infty} r^n, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$|r| < 1 \quad \text{Convergência} - \sum_{n=p}^{\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r}$$

$$|r| \geq 1 \quad \text{Divergência}$$

Séries Telescópicas (ou de Mengoli ou Redutíveis)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+p}), \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\text{Se } \exists A \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}) = A$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+p}) = a_1 + a_2 + \dots + a_k - A$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+p} - a_n), \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\text{Se } \exists A \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}) = A$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+p} - a_n) = A - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

Séries Harmónicas de ordem p (ou de Dirichlet)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} p > 1 & \text{Convergência} \\ p \leq 1 & \text{Divergência} \end{cases}$$

Série Harmónica alternada de ordem p

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} p > 1 & \text{Convergência absoluta} \\ 0 < p \leq 1 & \text{Convergência simples} \\ p \leq 0 & \text{Divergência} \end{cases}$$

Séries de termos não negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

$$\text{Convergência} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_0^+ : (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq M$$

Séries de termos quaisquer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Então, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{Convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{Absolutamente convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{Divergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{Simplesmente convergente}$$

Crítérios de Convergência/Divergência

Crítério do Integral

Seja $f : [k, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $k \in \mathbb{N}$ um função contínua, monótona decrescente e $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \quad \text{Converge} \Leftrightarrow \int_k^{\infty} f(x) \, dx \quad \text{Converge}$$

Crítério de Comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries numéricas. Se

$\exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \Rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{Converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{Diverge}$$

Crítério de Comparação por passagem ao limite

Se $\exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \Rightarrow a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ e $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, então

$L \in \mathbb{R}^+$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza

$$L = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{Converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Converge}$$

$$L = +\infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{Diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Diverge}$$

Crítério da Razão (ou D'Alembert)

Seja $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, então

$$L < 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Converge (absolutamente)}$$

$$L > 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Diverge}$$

$$L = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{Este teste nada permite concluir}$$

Critério da Raíz (ou de Cauchy)

Seja $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, então

L < 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Converge (absolutamente)

L > 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Diverge

L = 1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Este teste nada permite concluir

Critério de Leibniz

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ é convergente se

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é monótona decrescente, } a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Teorema de Riemann

Para qualquer série de termos quaisquer simplesmente convergente e para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação dos termos dessa série tal que a soma da série, após a reordenação, é igual a C e, ainda, existe uma outra reordenação dos termos tal que a série resultante diverge.

Sucessões de Funções

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Convergência Pontual

Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in D \exists p(\epsilon, x) : (\forall n > p \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

então

$$f_n \xrightarrow{p} f$$

Convergência Uniforme

Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists p(\epsilon) : (\forall n > p \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \forall x \in D)$$

então

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

Nota: Convergência uniforme \Rightarrow Convergência pontual

Condição necessária e suficiente de convergência uniforme

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Propriedades

Seja

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Seja a um ponto de acumulação de D . Se $f_n \xrightarrow{u} f$ e existe e é único $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2. Se $f_n \xrightarrow{u} f, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ função limite e f_n são contínuas em $a \in D$ então

f é contínua em a e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

3. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b], f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função limite e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão de funções contínuas em $[a, b]$, então

f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

4. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (pontual ou uniformemente) para f em D, f_n são funções com derivadas contínuas em D e $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em D , então

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

Séries de Funções

Chama-se soma parcial da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

à soma

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

Uma série de funções converge

pontualmente em D quando $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente em D

uniformemente em D quando $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em D

Critério de Weierstrass

Sejam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, a_n \geq 0 \text{ — série convergente}$$

tais que

$$\exists p \in \mathbb{N} : \forall n > p \forall x \in I \subseteq D \quad |f_n(x)| \leq a_n$$

Então $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em I .

Propriedades

1. Sejam $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D . Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ e existe e é finito $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$, então

A série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

2. Sejam $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ e $\forall n \in \mathbb{N} f_n$ é contínua em $a \in D$, então

$S(x)$ é também contínua em a

3. Sejam $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ e f_n são funções contínuas em $[a, b]$, então

f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

4. Sejam $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \rightarrow S(x)$ (pontual

ou uniformemente), $f_n \in C^1(D)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ é uniformemente convergente em D , então

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$$

Nota: As propriedades de séries de funções mantêm-se para séries de potências e séries de Taylor.

Séries de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$$

Raio de Convergência

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (\text{fórmula de D'Alembert})$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{fórmula de Cauchy})$$

Teorema de Abel

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ converge em $x = c + A, A \neq 0$, então converge absolutamente em $x \in]c - |A|, c + |A|[$. Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ diverge em $x = c + B, B \neq 0$, então diverge em $x \in]-\infty, c - |B|[\cap]c + |B|, +\infty[$

Teorema

Todas as séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ com raio de

convergência R convergem uniformemente em todo o intervalo fechado $I \subset]c-R, c+R[$.

Séries de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

Séries de MacLaurin

Série de Taylor com $c = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Polinómio de Taylor de grau n (centrado em c)

$$P_n(x) = T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

Resto de ordem n

$$R_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

Resto de ordem n na forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \quad \xi \in \text{int}(x, c)$$

Teorema

Uma função f admite desenvolvimento em série de Taylor se em torno de c no intervalo $]c-R, c+R[$, $R > 0$ se e só se

- $f \in C^\infty]c-R, c+R[$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in]c-R, c+R[$

Condição suficiente

Se um função f admite derivadas finitas de todas as ordens em $[a, b]$ e essas derivadas, em valor absoluto podem ser majoradas por um valor M , $\text{in} \mathbb{R}$, isto é $|f^{(n)}| \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$, então em todo o intervalo $[a, b]$ f admite desenvolvimento em torno do ponto $c \in]a, b[$.

Função analítica

f é uma função analítica em a se $\exists r > 0 : \forall x \in]a-r, a+r[$ a série de Taylor de f converge para $f(x)$.

Séries de Fourier

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica de período T se $f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ao menor dos períodos chama-se período fundamental.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 2\pi$ periódica e integrável. Então, a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \sim f(x),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

chama-se a série de Fourier associada a f .

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admite representação em série de Fourier e é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D$, então o desenvolvimento simplifica-se na seguinte expressão (chamada de série de cossenos)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \sim f_{\text{par}}(x),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admite representação em série de Fourier e é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D$, então o desenvolvimento simplifica-se na seguinte expressão (chamada de série de senos)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \sim f_{\text{ímpar}}(x),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Condição suficiente para desenvolvimento

Se f é uma função periódica de período 2π , definida e integrável em $[-\pi, \pi]$, então a série de Fourier de f converge em todo o \mathbb{R} para a função soma $S(x)$ dada por

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Convergência Uniforme

Se f é uma função periódica de período 2π , contínua e seccionalmente diferenciável (isto é, existem derivadas finitas em todos os pontos do domínio de f), então a série de Fourier de f **converge uniformemente** em todo o \mathbb{R} para $f(x)$, e escreve-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

com a_n e b_n tal como definidos acima.

Nota: Se f não é contínua, então a série de Fourier de f não é uniformemente convergente.

Extensão periódica de um função

Seja $f :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$, então

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0, 2\pi[\\ \phi(x+2k\pi), & x \notin]0, 2\pi[\end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

é uma extensão 2π periódica de f .

Extensão periódica par

Seja $f :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$, então

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

é uma extensão periódica (de período 2π) par de f .

Extensão periódica ímpar

Seja $f :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$, então

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

é uma extensão periódica (de período 2π) ímpar de f .

Nota: Séries de Fourier são séries de funções, e portanto partilham dos mesmos critérios e propriedades que estas últimas.

Fórmulas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$