

Cálculo I

Fórmulas

Trigonometria

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdot \sin x &= \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}; \cdot \cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}; \cdot \tan x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} \\ \Rightarrow \text{Para Primitivas:} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \cot x = \frac{1-t^2}{2t}\end{aligned}$$

Polinómios

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Limites

Limites Notáveis

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} &= +\infty, (p \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Infinitésimas Equivalentes

$$\left. \begin{aligned}\sin x \\ \tan x \\ (e^x - 1) \\ \ln(x + 1)\end{aligned} \right\} \approx x \text{ se } x \rightarrow 0$$

Limites Gerais

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ \text{Indeterminações } \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}: \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \text{Indeterminações } 1^\infty: \\ \text{Se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \text{ então}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]^{(f(x)-1)g(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)}\end{aligned}$$

Derivadas

Derivadas Básicas

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ (c f)' &= c f'(x) \\ (x^n)' &= nx^{n-1} \\ (f \pm g)' &= f'(x) \pm g'(x) \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ (\frac{f}{g})' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (f \circ g)' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1})} \\ (fg)' &= (e^{g \ln(f)})' = f^g (f' \frac{g}{f} + g' \ln(f))\end{aligned}$$

Derivadas Logarítmicas e Exponenciais

$$\begin{aligned}(a^x)' &= a^x \ln a \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}, x > 0 \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, x > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^x)' &= x^x (1 + \ln x) \\ (e^{f(x)})' &= f'(x) e^{f(x)} \\ ([f(x)]^n)' &= n[f(x)]^{n-1} f'(x) \\ (\ln[f(x)])' &= \frac{f'(x)}{f(x)}, f(x) > 0\end{aligned}$$

Derivadas Trigonométricas

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\sec x)' &= \sec x \tan x \\ (\operatorname{arcsec} x)' &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\csc x)' &= -\csc x \cot x \\ (\operatorname{arccsc} x)' &= -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \\ (\tan x)' &= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\cot x)' &= -\operatorname{csc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \\ (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sin[f(x)])' &= f'(x) \cos[f(x)] \\ (\cos[f(x)])' &= -f'(x) \sin[f(x)] \\ (\tan[f(x)])' &= f'(x) \sec^2[f(x)] = \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\end{aligned}$$

Integrais

Integrais Básicos

$$\begin{aligned}\int c \cdot f(x) \, dx &= c \int f(x) \, dx, c \in \mathbb{R} \\ \int f(x) \pm g(x) \, dx &= \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx \\ \int_a^b f(x) \, dx &= F(x)|_a^b = F(b) - F(a), F(x) = \int f(x) \, dx \\ [F(\varphi(x))]' &= F'(\varphi(x)) \varphi'(x)\end{aligned}$$

Integrais Polinomiais

$$\begin{aligned}\int dx &= x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int k \, dx &= kx + C, C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + C, C \in \mathbb{R} \\ \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \text{ e } C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{ax+b} \, dx &= \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, dx = \ln|\varphi(x)| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \varphi'(x) [\varphi(x)]^a \, dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + C, a \neq -1 \text{ e } C \in \mathbb{R}$$

Integrais Trigonométricos

$$\begin{aligned}\int \cos x \, dx &= \sin x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \sec^2 x \, dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \csc^2 x \, dx &= \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \arcsin x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= -\arccos x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= -\operatorname{arccot} x + C, C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \varphi'(x) \cos[\varphi(x)] \, dx &= \sin \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \varphi'(x) \sin[\varphi(x)] \, dx &= -\cos \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} \, dx &= \tan \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} \, dx &= -\cot \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} \, dx &= \arcsin \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} \, dx &= -\arccos \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2} \, dx &= \arctan \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R} \\ \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2} \, dx &= -\operatorname{arccot} \varphi(x) + C, C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Integrais Exponenciais/Logarítmicos

$$\begin{aligned}\int e^x \, dx &= e^x + C, C \in \mathbb{R} \\ \int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\int \varphi'(x) e^{\varphi(x)} \, dx = e^{\varphi(x)} + C, C \in \mathbb{R}$$

Primitivação por partes

$$\begin{aligned}\int f'(x) g(x) \, dx &= f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx \\ \text{Nota: } d\varphi(x) &= \varphi'(x) \, dx \\ \rightarrow \int f(x) g'(x) \, dx &= \int v \, du = uv - \int u \, dv\end{aligned}$$

$$\text{I} \quad \left. \begin{aligned}\int P_k(x) \sin(bx) \, dx \\ \int P_k(x) \cos(bx) \, dx \\ \int P_k(x) e^{ax} \, dx\end{aligned} \right\} \begin{aligned}u &= P_k(x) \\ v' &= \begin{cases} \cdot \sin(bx) \\ \cdot \cos(bx) \\ \cdot e^{ax} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{II} \quad \left. \begin{aligned}\int P_k(x) \ln(bx) \, dx \\ \int P_k(x) \arcsin x \, dx \\ \int P_k(x) \arccos x \, dx \\ \int P_k(x) \arctan x \, dx \\ \int P_k(x) \operatorname{arccot} x \, dx\end{aligned} \right\} u = \begin{cases} \cdot \ln(bx) \\ \cdot \arcsin x \\ \cdot \arccos x \\ \cdot \arctan x \\ \cdot \operatorname{arccot} x \end{cases} \quad v' = P_k(x)$$

III - 2 vezes por partes

Hipótese 1

$$\left. \begin{aligned} \int e^{ax} \sin(bx) \, dx \\ \int e^{ax} \cos(bx) \, dx \end{aligned} \right\} u = e^{ax}, \, v' = \begin{cases} \cdot \sin(bx) & \textcircled{1} \\ \cdot \cos(bx) & \textcircled{2} \end{cases}$$

Hipótese 2

$$u = \begin{cases} \cdot \sin(bx) & \textcircled{1} \\ \cdot \cos(bx) & \textcircled{2} \end{cases}, \, v' = e^{ax}$$

Primitivação de Funções Racionais (por decomposição)

Função Racional: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P e Q polinômios de coeficientes reais.

- Função Racional **Própria** $\rightarrow \text{gr}(P(x)) < \text{gr}(Q(x))$
- Função Racional **Imprópria** $\rightarrow \text{gr}(P(x)) \geq \text{gr}(Q(x))$

0. Função Racional Imprópria \rightarrow Polinômio+F. R. Própria

1. Resolver $Q(x) = 0$, decompondo-se $Q(x)$ em :

- Constantes (a)
- $(x - R)^l$, $l \in \mathbb{N} \rightarrow l - \text{Mult. de Raizes Reais}$
- $(x^2 + px + q)^k$, $k \in \mathbb{N} \rightarrow k - \text{Mult. de Raizes } \alpha \pm i\beta$

$$Q(x) = a(x - R_1)^{l_1} \cdot (x - R_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{k_2} \cdot \dots$$

2. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x - R_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} \cdot \dots}$
- Determinar:
 $\frac{A_1}{x - R_1} + \frac{A_2}{(x - R_1)^2} + \frac{A_3}{(x - R_1)^3} + \dots + \frac{A_{l_1}}{(x - R_1)^{l_1}}$
nº de parcelas = l_1 (multiplicidade)
 - Determinar:
 $\frac{E_1 + D_1x}{x^2 + p_1x + q} + \frac{E_2 + D_2x}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{E_{k_1} + D_{k_1}x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}}$
nº de parcelas = k_1 (multiplicidade)

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{soma de todas as parcelas}$$

3. Calcular valores A_1, \dots, A_{l_1} e $E_1, D_1, \dots, E_{k_1}, D_{k_1}$ através do método dos coeficientes indeterminados.

Primitivas de Funções Racionais

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \, C \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{1}{(x \pm b)^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x \pm b}{a}\right) + C, \, C \in \mathbb{R}$$

Se $\exists \int f(x) \, dx = F(x) + C$
 $\Rightarrow \int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \, C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{[\varphi(x)]^2 - a^2} \varphi'(x) \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a} \right| + C, \, C \in \mathbb{R}$$

Primitivação por Mudança de Variável

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $x = \varphi(t)$ uma aplicação com derivada contínua e que não anula:
 $P_x(f(x)) = P_t(f(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)}$
 $\rightarrow \int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}$

Substituições

Primitivas	Substituição
$\int f(e^x) \, dx$	$t = e^x \Rightarrow x = \ln t$
$\int f(\ln x) \, dx$	$t = \ln x \Rightarrow x = e^t$
$\int f(x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots) \, dx$	$t = x^{\frac{1}{m}} \Rightarrow x = t^m,$ com $m = m.m.c.(q, s, \dots)$
$\int f(x, (ax + b)^{\frac{p}{q}}, (ax + b)^{\frac{r}{s}}, \dots) \, dx$	$t = (ax + b)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow ax + b = t^m,$ com $m = m.m.c.(q, s, \dots)$
$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}), a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}$
$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}), c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$
$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}), b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t,$ α é raiz de $ax^2 + bx + c$

Primitivação de Funções Trigonométricas

1. $\int f(\sin^k x, \cos^m x) \, dx$
- (a) $k - \text{par}, m - \text{ímpar}$
substituição $t = \sin x$
 - (b) $k - \text{ímpar}, m - \text{par}$
substituição $t = \cos x$
 - (c) $k, m - \text{ímpares}$
substituição $t = \sin x$ ou $t = \cos x$
+ fórm.: $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
 - (d) $k, m - \text{pares}$
"baixar" ordem de $\sin x$ e $\cos x$:
 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

2. $\int f(\tan^k x) \, dx$ ou $\int f(\cot^k x) \, dx$

Fórmulas:

- $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

3. $\int f(\sin x, \cos x) \, dx, \int f(\tan x) \, dx, \int f(\cot x) \, dx$
Substituição "Universal":
 $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$

Primitivação de Funções Irracionais

\rightarrow Substituir usando Fórmulas Trigonométricas

1. $\int f(\sqrt{a^2 - b^2x^2}) \, dx$
 $\sqrt{a^2 - b^2x^2} = \sqrt{a^2(1 - (\frac{b}{a}x)^2)} = a\sqrt{1 - (\frac{b}{a}x)^2}$
Subst.: $\frac{b}{a}x = \sin t \Rightarrow dx = \frac{a}{b} \cos t \, dt$
 $\int f(\sqrt{a^2 - b^2x^2}) \, dx = \int f(a\sqrt{1 - \sin^2 t}) \cdot \frac{a}{b} \cdot \cos t \, dt$
 $\Rightarrow \int f(a \cdot \cos t) \cdot \frac{a}{b} \cos t \, dt + C, \, C \in \mathbb{R}$
2. $\int f(\sqrt{a^2 + b^2x^2}) \, dx$
 $\sqrt{a^2 + b^2x^2} = \sqrt{a^2(1 + (\frac{b}{a}x)^2)} = a\sqrt{1 + (\frac{b}{a}x)^2}$
Subst.: $\frac{b}{a}x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{a}{b} \frac{1}{\cos^2 t} \, dt$
 $\int f(\sqrt{a^2 + b^2x^2}) \, dx = \int f(a\sqrt{1 + \tan^2 t}) \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \, dt$
 $\Rightarrow \int f(a \cdot \frac{1}{\cos t}) \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \, dt + C, \, C \in \mathbb{R}$

3. $\int f(\sqrt{a^2x^2 - b^2}) \, dx$
 $\sqrt{a^2x^2 - b^2} = \sqrt{b^2((\frac{a}{b}x)^2 - 1)} = b\sqrt{(\frac{a}{b}x)^2 - 1}$
Subs.: $\frac{a}{b}x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} \, dt$
 $\int f(\sqrt{a^2x^2 - b^2}) \, dx = \int f(b\sqrt{(\frac{1}{\cos t})^2 - 1}) \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} \, dt$
 $\Rightarrow \int f(b \tan t) \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} \, dt + C, \, C \in \mathbb{R}$

Integrais de Riemann

Integral de Riemann é o limite da soma de Riemman.

Soma de Riemann:

$\text{Sf}(P, C) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i, \, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
 $\Rightarrow \text{Integral de Riemann} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = I$
 $I = \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \text{Sf}(P, C)$

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Geometria de integral de Riemann

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - \text{integrável}, a < b$

- $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$
 $I = \int_a^b f(x) \, dx$
- $c \in]a, b[: f(c) = 0$
 $I = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$
- $f, g : [a, b] - \mathbb{R} - \text{integráveis}, \text{ e } f > g, \forall x \in [a, b]$
 $I = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

Propriedades

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - \text{integráveis e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$
- Se $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$
- Se $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$
- Se $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$
- Se $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$
 $\Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$
- $|\int_a^b f(x) \, dx| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

CrITÉRIOS de Integrabilidade

Condição Necessária

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável (no sentido de Riemann)
 $\Rightarrow f$ é limitada em $[a, b]$

Importante \Rightarrow Se f não é limitada em $[a, b] \Rightarrow f$ não é integrável em $[a, b]$ (no sentido de Riemann)

Condições Suficientes

- Se f é contínua em $[a, b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a, b]$
- Se f é limitada em $[a, b]$ e descontínua apenas num número finito de pontos de $[a, b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a, b]$
Ou:
Se f é limitada em $[a, b]$ e contínua por partes em $[a, b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a, b]$

3. Se f é monótona em $[a, b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a, b]$
4. Se f é integrável em $[a, b]$ e g apenas difere de f num número finito de pontos de $[a, b] \Rightarrow g$ é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema Fundamental de Cálculo Integral

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, podemos definir uma nova função
 $F'(x) = \int_a^x f(t) dt$, com $x \in [a, b]$.

Teorema I

Seja f integrável em $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$
 $\Rightarrow F$ é contínua em $[a, b]$.

Teorema II

Se:

- f é integrável em $[a, b]$,
- f é contínua em $c \in [a, b]$,
- $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$\Rightarrow F$ é diferenciável em $c \in [a, b]$ e $F'(c) = f(c)$

Na prática:

Se f é integrável e contínua em $[a, b]$ e
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$

Nota: $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$, com $g(x) \in [a, b]$
 $u = g(x) \Rightarrow G(u) = \int_a^u f(t) dt$, $u \in [a, b]$

Teorema do Valor Médio

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então $\exists c \in [a, b]$:
 $\int_a^b f(x) dx = f(c)f(b-a)$

Fórmula de Barrow (ou de Newton-Leibniz)

$\int_a^b f(x) dx = ?$ (integral definido)

1. Primitivar
 $\int f(x) dx = F(x)$ (apenas uma)
2. Substituir Limites de Integração
 $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Integrais Impróprios

Integrais Impróprios da 1ª Espécie

- $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, f é integrável em $\forall [a, c] \subset [a, +\infty[$, $c \in \mathbb{R}$
 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$
- $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f é integrável em $\forall [c, b] \subset]-\infty, b]$, $c \in \mathbb{R}$
 $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx$
- $f :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, f é integrável em $\forall [a, b] \subset]-\infty, +\infty[$, $a, b \in \mathbb{R}$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$

Se o limite existe (finito e único):

Integral Impróprio Convergente, caso contrário, **divergente**.

Calcular ex.: $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$

1. Primitivar (apenas uma primitiva): $\int f(x) = F(x)$
2. Fórmula de Barrow: $F(x)|_a^c = F(c) - F(a)$
3. Calcular: $\lim_{c \rightarrow +\infty} [F(c) - F(a)]$

Integrais Impróprios da 2ª Espécie

- $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e f ilimitada na vizinhança de b :
 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$
 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$
- $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\exists c \in]a, b[$: $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$ (f não está definida em c)
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c^-} f(x) dx + \int_{c^+}^b f(x) dx$
 $= \lim_{d \rightarrow c^-} \int_a^d f(x) dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) dx$

Integrais Impróprios da 3ª Espécie

Integral Impróprio da 1ª Espécie + Integral Impróprio da 2ª Espécie \Rightarrow Separar em intervalos com apenas um dos tipos de Integrais Impróprios (1º ou 2º).

Propriedades dos Integrais Impróprios

1. Se:

- $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ com $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$
- f, g - integráveis em $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $\beta \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ - convergentes

Então:

$\int_a^b [\gamma f(x) + \eta g(x)] dx = \gamma \int_a^b f(x) dx + \eta \int_a^b g(x) dx$ - convergente

2. Se $\int_a^b |f(x)| dx$ - convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ - convergente absolutamente

Critério de Comparação

Se:

- $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$)
- f, g - integráveis em $\forall [\alpha, \beta] \in [a, b]$
- $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a^*, b]$, $a \leq a^* \leq b$

1. Se $\int_a^b g(x) dx$ - convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ - convergente
2. Se $\int_a^b f(x) dx$ - divergente $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ - divergente

Nota (Método II):

Se $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ e

$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ então:

$\int_a^b g(x) dx$ e $\int_a^b f(x) dx$ têm a mesma natureza.

$g(x)$ - é uma função primitivável escolhida para comparar com $f(x)$.

Notas Pessoais:

Extra - Fórmulas de Primitivação

Funções Racionais

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln|a^2+x^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln|a^2+x^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{a+x}{b+x}\right) + C, \quad a \neq b \text{ e } C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Raízes

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right) \sqrt{ax+b} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \arctan\left(\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln|\sqrt{x} + \sqrt{x+a}| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx =$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$\frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} -$$

$$\frac{b}{2a^{3/2}} \ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Logarítmos

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n \ln x dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + C, \quad n \neq -1, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x + C, \quad a \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \arctan \frac{x}{a} - 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) - 2x +$$

$$\left(\frac{b}{2a} + x\right) \ln(ax^2+bx+c) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) \ln(ax+b) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx =$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) \ln(a^2-b^2x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int (\ln x)^2 dx = 2x - 2x \ln x + x(\ln x)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int (\ln x)^3 dx = -6x + x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2(\ln x)^2 dx = \frac{2x^3}{27} + \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exponenciais

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2e^x dx = (x^2-2x+2)e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^3e^x dx = (x^3-3x^2+6x-6)e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int xe^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Funções Trigonométricas

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x \sin x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c_1 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + c_2 =$$

$$-\frac{1}{4} \cos 2x + c_3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos ax \sin bx dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, \quad a \neq b + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x + C, \quad n \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln|\csc x - \cot x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x + C, \quad n \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln|\tan x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Funções Trigonométricas e Monomiais

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cos^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} x \sin 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \tan^2 x dx = -\frac{x^2}{2} + \ln \cos x + x \tan x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \sec^2 x dx = \ln \cos x + x \tan x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Produtos de Funções Trigonométricas e Exponenciais

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$$

$$\int xe^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x)$$

$$\int xe^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x)$$

_____ Ricardo Jesus