Universidade de Brasília-UnB
Departamento de Estatística-EST
Professor: Felipe Quintino

Nota:
Disciplina: Processos Estocásticos

Aluno/Matrícula:____

2ª Prova de Processos Estocásticos

Esta prova contém 2 página(s), incluindo esta capa, e 2 questões, formando um um total de 10 pontos.

Tabela (para uso EXCLUSIVO do professor)

Questão:	1	2	Total
Valor:	3	7	10
Pontuação:			

1. (3 pontos) O objetivo do exercício é verificar a aplicabilidade de uma cadeia de Markov na modelagem de dados climáticos. Deverão ser utilizados os dados disponíveis na base "dados.txt" disponibilizado no SIGAA. Leia a base de dados no software R.

   (a) A partir da variável precipitação, crie um processo com espaço de estados contendo 5 elementos.

   (b) Estime as probabilidades de transição com base nos dados (exceto para os últimos 10 dias que serão os dados de validação).

   (c) Predizer os próximos símbolos do processo e avaliar a qualidade da estimação utilizando os 10 dias finais. (Dica: uma possibilidade é fazer uma matriz de confusão).

2. (7 pontos) O objetivo dessa questão é a modelagem de ativos financeiros utilizando processos estocásticos a tempo contínuo. Para isso, um modelo teórico é assumido e comparado com o processo observado nos tempos $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. No software R, baixe a série de preços de fechamentos dos valores das ações do BBAS3 de 01/01/2023 a 31/12/2023. (Dica: utilize a função "quantmod::getSymbols"). Assuma que o preço das ações segue o modelo estocástico

$$X(t) = X_0 - \theta \int_0^t X(s)ds + \xi(t), \quad t \in [0,1],$$

   onde X_0 é o valor inicial do processo, $\theta \in (0,\infty)$ é um parâmetro (de drift) e $\{\xi(t); t \in [0,1]\}$ é um processo estocásico a tempo contínuo. Desejamos avaliar qual dos processos gera o melhor ajuste de modelo ao processo observado, o movimento Browniano $\xi(t) = B(t)$ ou o processo de Poisson $\xi(t) = N(t)$. Para isso, siga os seguintes passos:

(a) Simule uma trajetória do movimento Browniano $\mathbf{B} = \{B(t);\ t \in [0,1]\}$ e uma do processo de Poisson $\mathbf{N} = \{N(t);\ t \in [0,1]\}$ com taxa $\lambda = 1$ contendo a mesma quantidade de pontos que a base de dados.

(b) Considere o processo discretizado

$$X(t_k) = X(t_{k-1}) - \theta \sum_{j=0}^{k-1} X(t_j)(t_j - t_{j-1}) + \xi(t_k). \tag{1}$$

Programe uma função que receba os tempos $t_0 < \cdots < t_{k-1}$, o histórico do processo até o tempo t_{k-1}, i.e., $(X(t_0), \cdots, X(t_{k-1}))$, um valor do parâmetro θ e o valor do processo $\xi(t_k)$. A saída da função deve ser o valor do processo no tempo t_k, i.e., $X(t_k)$, calculado por (1).

(c) Estime o parâmetro θ a partir dos dados observados. (Dica: Um possível estimador é o de mínimos quadrados, comparando o processo observado ao modelo teórico (1). Nesse caso, são obtidos as estimativas $\hat{\theta}_{MB}$ e $\hat{\theta}_{PP}$, respectivamente, para o movimento Browniano e o processo de Poisson).

(d) Avalie os resíduos (diferença entre processo observado e modelo ajustado) do ajuste. (Dica: podem ser feitos testes de normalidade dos resíduos, histograma, boxplot e/ou Normal-qq plot).

(e) Represente graficamente o processo observado e os modelos ajustados.

(f) Estabeleça qual o melhor modelo (utilizando movimento Browniano ou processo de Poisson).

(g) Leia os dados de 01/01/2024 a 15/01/2024. Utilize o modelo ajustado em (c) para predizer o valor das novas observações com base nos dados de 2023. Analise os resultados.