PROVA 2 DE PROCESSO ESTOCÁSTICOS

Rafael de Acypreste (200060023) e Rafael Lira (190115858)

Professor Felipe Quintino

UnB

Prova 2 de Processo Estocásticos

Aplicação ao modelo empírico

Trata-se de um modelo para avaliar as probabilidades de transição entre os estados de precipitação de chuvas.

```r
# Importing data
dados <-
    read.delim("dados.txt",
        header = TRUE,
        sep    = ";"
    ) |>
    select(-X) |>
    filter(!is.na(Precipitacao))

# Summary statistics
dados$Precipitacao |> summary()
```

```
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  0.000   0.000   0.000   4.173   2.400 131.000 
```

O primeiro passo é discretizar a variável de precipitação, que é feita com a função `cut()` do pacote `base`. Para esse exemplo, a variável será dividida em 3 categorias: sem chuva (precipitação até $0, 1$), chuva fraca (precipitação maior que $0, 1$ e menor que 10) e chuva forte.

```r
# Discretization of the variable
quantiles <- quantile(dados$Precipitacao,
    probs = seq(0.7, 0.9, length.out = 3)
)

breaks <- c(-Inf, 0.001, quantiles, Inf)

state_labels <- factor(
    c(
        "sem chuva",
        "garoa",
        "chuva fraca",
        "chuva moderada",
        "chuva forte"
    ),
    levels = c(
        "sem chuva",
        "garoa",
        "chuva fraca",
        "chuva moderada",
        "chuva forte"
    )
)
```

```r
# Discretization
dados <-
    dados |>
    # Discretization
    mutate(rain_status = cut(Precipitacao,
        breaks = breaks,
        labels = state_labels
    ))
```

Para esse exemplo, serão separadas as 10 últimas observações para avaliar as estimações.

```r
dados_teste <- tail(dados, 10)
dados_treinamento <- dados[1:(nrow(dados) - 10), ]
```

Para estimar as transições de estado, é necessário criar uma variável que identifique o estado atual e o estado seguinte. Para isso, é necessário criar uma variável defasada, que pode ser feita com a função `lag()` do pacote `dplyr`. Depois disso, basta avaliar as proporções das transições de estado.

```r
# Creating the lagged variable
transicoes_chuva <-
    dados_treinamento |>
    # Lag variable
    mutate(rain_status_lag = lag(rain_status)) |>
    # Exclude the last state
    filter(!is.na(rain_status_lag)) |>
    # Count the transitions
    count(rain_status, rain_status_lag) |>
    # Calculates the estimator
    mutate(
        Prop = round(n / sum(n), digits = 3),
        .by = rain_status
    )
```

A matriz de transição estimada entre os estados sem chuva, garoa, chuva fraca, chuva moderada, chuva forte, nesta ordem, é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0.822 & 0.041 & 0.051 & 0.045 & 0.04 \\ 0.334 & 0.12 & 0.186 & 0.177 & 0.183 \\ 0.306 & 0.133 & 0.187 & 0.184 & 0.19 \\ 0.306 & 0.121 & 0.171 & 0.193 & 0.21 \\ 0.282 & 0.118 & 0.174 & 0.204 & 0.223 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Agora, pode-se recuperar a matriz de transição para fazer as estimativas de transição de estado.

```r
# Transition matrix
matriz_transicao <-
    transicoes_chuva |>
    select(-n) |>
    pivot_wider(
        names_from = rain_status_lag,
```

```
        values_from = Prop
    ) |>
    column_to_rownames("rain_status") |>
    as.matrix()

ultimo_estado <- dados_treinamento |>
    tail(1) |>
    pull(rain_status)
```

Com a matriz de transição, basta considerar o último estado dos dados (garoa) — consequência da propriedade de Markov — de treinamento para fazer as estimativas de transição de estado.

```
simula_cadeia_markov <- function(n = 10,
                                 valor_inicial,
                                 matriz_transicao,
                                 estados) {
    P <- matriz_transicao
    y <- valor_inicial

    # Simulation of the stochastic process
    for (i in 1:n) {
        # Sample of the next state
        y[i + 1] <- sample(estados, size = 1, prob = P[y[i], ])
    }

    return(y[-1])
}
# Excecution of the function
previsoes <- simula_cadeia_markov(
    valor_inicial = ultimo_estado,
    matriz_transicao = matriz_transicao,
    estados = state_labels,
    n = 10
)
```

E, então, pode-se comparar as previsões com os dados de teste. Para o gráfico, os acertos são indicados pela linha tracejada vermelha.

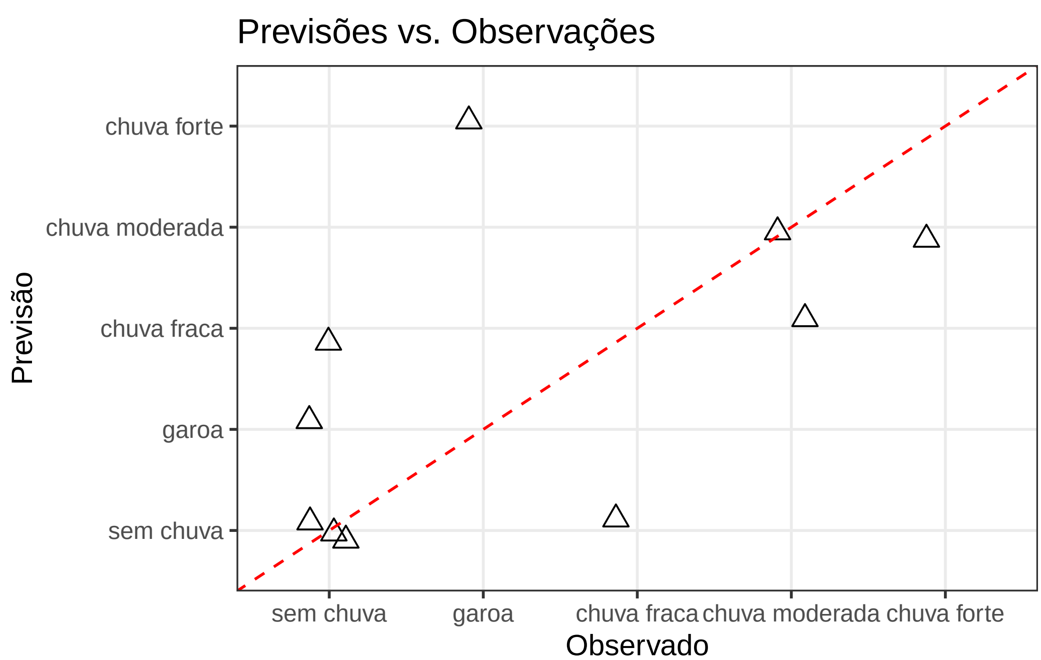
```
comparacao <-
    data.frame(
        observado = dados_teste$rain_status,
        previsao = previsoes
    )

# Imprime a tabela
comparacao
```

```
        observado        previsao
1  chuva moderada chuva moderada
2  chuva moderada    chuva fraca
3     chuva forte chuva moderada
4       sem chuva          garoa
```

```
5        sem chuva    chuva fraca
6        sem chuva      sem chuva
7        sem chuva      sem chuva
8        sem chuva      sem chuva
9      chuva fraca      sem chuva
10           garoa    chuva forte
```

```r
# Constroi o gráfico
comparacao |>
    ggplot(aes(x = observado, y = previsao)) +
    geom_jitter(
        size = 3, shape = 2,
        width = 0.15, height = 0.15
    ) +
    geom_abline(
        intercept = 0,
        slope = 1,
        color = "red",
        linetype = "dashed"
    ) +
    theme_bw() +
    labs(
        x = "Observado",
        y = "Previsão",
        title = "Previsões vs. Observações"
    )
```



Questão 2

Aplicação ao modelo empírico

Trata-se de um modelo para avaliar o comportamento dos preços de fechamentos dos valores das ações do BBAS3 no ano de 2023.

```
# Define the stock symbol and specify the start and end dates
stock_symbol <- "BBAS3.SA"
start_date <- "2023-01-01"
end_date <- "2024-01-01"

# Use getSymbols to fetch historical stock data
getSymbols(stock_symbol,
    src = "yahoo",
    from = start_date,
    to = end_date
)
```

```
[1] "BBAS3.SA"
```

```
# Check the loaded data and get the closing values
stock_values <- as.vector(Cl(get(stock_symbol)))

# Summary statistics
summary(stock_values)
```

```
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  32.64   40.78   47.00   45.49   49.07   55.39 
```

Obtendo o número de observações no vetor de valores da ação, é possível gerar simulações do movimento Browniano e do processo de Poisson com a mesma quantidade de pontos que a base de dados. Considerando um intervalo de 0 a 1, em anos, é gerado um vetor t relativo ao tempo decorrido do início da contagem ao momento de cada observação. Para simular o movimento Browniano, basta fazer a soma cumulativa de n valores da distribuição Normal padrão, enquanto para o processo de Poisson é feita a soma de valores da distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = 1/n$.

```
n <- length(stock_values) - 1
t <- seq(0, 1, length.out = n + 1)
B <- c(0, cumsum(rnorm(n)))
N <- c(0, cumsum(rpois(n, 1 / n)))
```

Em seguida, é criada uma função para prever a k-ésima observação do modelo, usando os tempos, o histórico do processo, o parâmetro θ e o valor do processo $\xi(t_k)$

```
simulate_Xtk <- function(t, X, theta, csi) {
    timeline <- as.vector(t)
    history <- as.vector(X)
    csi <- as.vector(csi)
```

```r
    if (length(timeline) != length(history) ||
        length(timeline) != length(csi) ||
        length(history) != length(csi)) {
        print("The timeline, the history and the csi vector must have the same length.")
        return()
    }
    n <- length(timeline)

    tj <- timeline[-1]
    tj_1 <- timeline[-n]
    Xtj <- history[-1]
    fatork <- Xtj * (tj - tj_1)
    sumk <- cumsum(fatork)
    Xtk <- Xtj - theta * sumk + csi[-1]
    return(Xtk)
}
```

Para estimar o parâmetro θ por meio do método dos mínimos quadrados, é criada uma função que recebe os mesmos inputs da função de simulação, porém retornando a soma de quadrados do resíduo.

```r
least_squares <- function(t, X, theta, csi) {
    observed_values <- X[-1]
    predicted_values <- simulate_Xtk(t, X, theta, csi)

    return(sum((observed_values - predicted_values)^2))
}
```

Utilizando a função *optim*, e escolhendo um valor inicial inicial para θ, é possível encontrar o ponto onde a soma de quadrados é mínima. Assim, são gerados os estimadores para cada o movimento Browniano e para o processo de Poisson.

```r
initial_theta <- 1

(estim_theta_browniano <- optim(
    par = initial_theta,
    fn = least_squares,
    X = stock_values,
    t = t,
    csi = B ## Trajetória do movimento Browniano
)$par)
```

```
[1] 0.8238281
```

```r
(estim_theta_poisson <- optim(
    par = initial_theta,
    fn = least_squares,
    X = stock_values,
    t = t,
    csi = N ## Trajetória do processo de Poisson
)$par)
```

```
[1] -8.881784e-16
```